MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Bejaia
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

KACI Malek
AMEUR Lounes

THÈME

Fonctions presque périodiques et application aux équations différentielles.

Soutenu devant le jury composé de :

Mme.	**H. BECHIR**	M.C.B	Université A. Mira de Bejaia.	Présidente.
Mme.	**F. TALBI**	M.C.B	Université A. Mira de Bejaia.	Rapporteur.
Mme.	**S. TAS**	Prof	Université A. Mira de Bejaia.	Examinatrice.
Mr.	**A. BERBOUCHA**	M.C.A	Université A. Mira de Bejaia.	Examinateur.

Année 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercions Dieu, de nous avoir donné le courage et la patience afin de terminer ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude envers notre promotrice, Mme **F. TALBI**, pour son soutien et la confiance qu'elle nous a accordés en nous proposant ce sujet, et nous a aidés plus qu'elle ne le pense. En nous écoutant patiemment, et en discutant maintes fois de la nature et l'avancement de notre travail, elle nous a permis de synthétiser, comprendre et expliquer un grand nombre de questions. Ces conseils et sa gentillesse nous ont apporté un précieux soutien. On a pu découvrir lors de ces années d'études quelqu'un d'intègre et de qualités humaines aussi bien que scientifiques éminemment rares et précieuses, qu'elle soit chaleureusement remerciée ici.

Nos remerciements sont aussi adressés à Mme **S. TAS**, Mme **H. BECHIR** et Mr. **A. BERBOUCHA** qui nous font l'honneur de juger notre travail.

Merci à nos parents et à nos frères et soeurs pour nous avoir inculqué le goût d'apprendre, de nous avoir enseigné à penser et de nous avoir encouragé sans cesse pour aller plus loin, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à notre formation.

Merci a tous les membres de la Faculté des Sciences Exactes en général et aux membres du Département de Mathématiques en particulier.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier ceux qui nous ont aidé d'une manière ou d'une autre a élaborer ce travail.

Dédicaces

KACI Malek

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes frères et mes sœurs.

Toute ma famille chacun par son nom.

Mon cher binôme ***Lounes****.*

Tous mes camarades de promo et tous mes amis.

Dédicaces

AMEUR Lounes

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes frères et mes sœurs.

Toute ma famille chacun par son nom.

Mon cher binôme ***Malek****.*

Tous mes camarades de promo et tous mes amis.

Table des matières

Introduction générale

Les fonctions **périodiques** sont des fonctions, lorsqu'elles sont appliquées à une variable, donnent la même valeur si on ajoute à cette variable une certaine quantité fixe, appelée **période**. Ainsi la périodicité permet de réduire les intervalles d'études de ces fonctions.

Soit f une fonction périodique de la variable réelle t. Si T est la période élémentaire, on a : $f(t+T) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et plus généralement,

$$f(t+nT) = f(t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Les nombres nT constituent les périodes de f. Dans tout intervalle $[a, a+T[$, il y a un point d'abscisse multiple de T, c'est-à-dire une période nT.

La somme de deux fonctions périodiques dont le rapport de leurs périodes est irrationnel n'est pas périodique. Cette propriété a conduit **H. Bohr** à introduire les fonctions presque périodiques, au début des années vingt (1925). Les fonctions presque périodiques ont des propriétés voisines de celles des fonctions périodiques, en fait on a une périodicité approximative dans le sens que pour tout x réel, l'écart $f(x+T) - f(x)$ peut être rendu de plus en plus petit. C'est-à-dire, une fonction donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est presque périodique si l'ensemble

$$E(\varepsilon, f) = \left\{ T \in \mathbb{R}, \ \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\| \leq \varepsilon \right\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe un nombre réel $\ell > 0$ tel que chaque intervalle de longueur ℓ contient au moins un élément de $E(\varepsilon, f)$.

La théorie des fonctions presque périodiques se développe avec vigueur depuis quatre vingt années environ; très exactement les premiers résultats de celle-ci ont été publiés dans les deux articles du pionnier de cette classe de fonctions **H. Bohr [6],** apparus dans la revue "*Acta-Mathematica*", en 1925-1926. Jouant un rôle important dans l'étude des équations différentielles, elle a été développée après par d'autres auteurs, notamment par **Bochner** [**5**] qui vers 1933 a donné deux autres versions de la définition des fonctions presque périodiques, équivalentes à celle donnée par **H. Bohr,** mais plus maniable.

L'existence et l'unicité des solutions presque périodiques sont d'une grande importance dans l'étude qualitative des équations différentielles à cause de leurs applications dans plusieurs domaines, comme la biologie mathématique, la physique, la théorie de contrôle et d'autre domaines.

Ce mémoire est composé de deux chapitres :

Le premier chapitre a pour objectif de donner une collection de résultats classiques sur les différentes définitions des fonctions presque périodiques qui sont équivalentes, on a débuté ce chapitre par la donnée des différentes définitions des fonctions presque périodiques :

Celle de **Bohr** qui est une généralisation de la périodicité.

Le critère d'approximation par lequel une fonction presque périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques généralisées et la définition de **Bochner** qui caractérise la presque périodicité d'une fonction en utilisant sa normalité.

Nous avons présenté également dans ce chapitre la presque périodicité des fonctions à paramètres qui sont indispensables pour l'étude des solutions presque périodiques des équations différentielles ordinaires non linéaires.

Les éléments fondamentaux concernant les séries de Fourier associées aux fonctions presque périodiques sont données à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions presque périodiques des systèmes différentiels ordinaires linéaires non homogènes

$$\dot{y} = Ay + f$$

où A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients constants et $f = (f_i)_{i=\overline{1..n}}$, est une fonction presque périodique au sens de **Bohr**.

Enfin, nous avons achevé ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1 Les fonctions presque périodiques

Ce chapitre a pour objectif de présenter la notion des fonctions presque périodiques, leurs principales propriétés et de donner certains résultats sur ce type de fonctions.

1.1 Les différentes définitions des fonctions presque périodiques

Il existe trois différentes définitions des fonctions **presque périodiques** :

1. Critère de **Bohr** en utilisant les ensembles relativement denses.
2. Critère d'**approximation** en utilisant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement à la convergence de la norme uniforme.
3. Critère de **Bochner** en utilisant la compacité de l'ensemble des translatés.

Tout au long de ce chapitre $\mathbb{X}$ désignera un espace de **Banach,** et $\|.\|_{\mathbb{X}}$ sa norme.

1.1.1 Critère de Bohr

Définition 1.1.1 *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense, s'il existe un nombre* *positif ℓ tel que tout intervalle de longueur ℓ contient au moins un élément de E.*

Autrement dit,

$$\exists \ell > 0, \text{ tel que } [a, a+\ell] \cap E \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}.$$

*Le nombre ℓ est appelé **longueur d'inclusion** de la partie E.*

Exemple 1.1.1 .

1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Puisque tout intervalle de longueur 2 contient un élément de $\mathbb{Z}$.*

2. *Pour tout réel T, l'ensemble $\{nT,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.*

3. *L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas relativement dense puisque pour tout $\ell > 0$, il existe un $\alpha = -2\ell$ tel que*

$$[-2\ell, -2\ell + \ell] \cap \mathbb{N} = \emptyset.$$

A présent, nous pouvons énoncer la définition de la presque périodicité de **Bohr**.

Définition 1.1.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction **continue**.*

*On dit que f est presque périodique au sens de **Bohr** si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $E\{\varepsilon, f\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, où*

$$E\{\varepsilon, f\} = \left\{ T \in \mathbb{R},\ \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon \right\}$$

Autrement dit,

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[a, a+\ell_\varepsilon]$ contient un nombre T satisfaisant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

*Un nombre T qui appartient à $E\{\varepsilon, f\}$ est appelé ε-**presque période** ou ε-**nombre de translation** de la fonction f.*

Notation 1.1.1 *Notons par $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace de toutes les fonctions presque périodiques, au sens de **Bohr**, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{X}$.*

Remarque 1.1.1 *La définition précédente est une extension naturelle de la définition de Bohr des fonctions presque périodiques à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

Exemple 1.1.2 .

1. Toute somme finie de fonctions périodiques à périodes aléatoires dont les rapports sont des nombres irrationnels, n'est pas périodique.

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \exp(ix) + \exp(i\sqrt{2}x).$$

Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodiques, l'une de période 2π, l'autre est de période $\sqrt{2}\pi$.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $\tau \neq 0$ tel que pour tout réel x, on ait

$$f(x+\tau) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$\exp(ix)\exp(i\tau) + \exp(i\sqrt{2}x)\exp(i\sqrt{2}\tau) = \exp(ix) + \exp(i\sqrt{2}x).$$

Ce qui implique que

$$\exp(ix)(\exp(i\tau) - 1) + \exp(i\sqrt{2}x)(\exp(i\sqrt{2}\tau) - 1) = 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$i\exp(ix)(\exp(i\tau) - 1) + \sqrt{2}i\exp(i\sqrt{2}x)(\exp(i\sqrt{2}\tau) - 1) = 0.$$

Pour $x = 0$ on a

$$\exp(i\tau) - 1 + \sqrt{2}(\exp(i\sqrt{2}\tau) - 1) = 0.$$

C'est-à-dire que

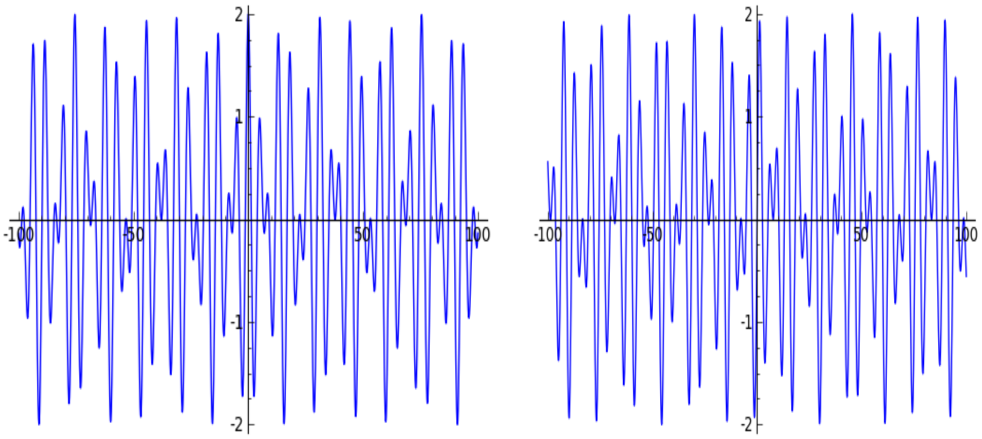
$$\exp(i\tau) = \exp(i\sqrt{2}\tau) = 1.$$

Donc, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau = 2k_1\pi$ et $\tau = \sqrt{2}k_2\pi$, comme $\tau \neq 0$, on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Ce qui est absurde.

Donc f n'est pas une fonction périodique.



Représentation graphique de $\operatorname{Re} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

2. Une fonction périodique continue est presque périodique.

En effet, soit f une fonction périodique, alors il existe $T > 0$, tel que

$$f(x+T) = f(x).$$

D'où

$$f(x+T) - f(x) = 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Comme f est continue, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $|(x+T) - x| = |T| < \delta$, implique que

$$\|f\,(x+T) - f\,(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$; $\forall T \in \left]-\delta, \delta\right[$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

$\left]-\delta, \delta\right[$ est un intervalle de longueur 2δ, c'est-à-dire que l'ensemble $E(\varepsilon, f)$ rencontre tout intervalle de longueur 2δ.

3. La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin x + \sin\sqrt{2}x \end{array}$$

est presque périodique. Mais elle n'est pas périodique, car on a

$$\begin{aligned} |f(x+T)-f(x)| &= |\sin(x+T)+\sin\left(\sqrt{2}(x+T)\right)-\sin x-\sin\sqrt{2}x| \\ &= |\sin x\cos T+\sin T\cos x+\sin\sqrt{2}x\cos\sqrt{2}T+\sin\sqrt{2}T\cos\sqrt{2}x-\sin x \\ &\quad -\sin\sqrt{2}x| \\ &= |\sin\sqrt{2}x\left(\cos\sqrt{2}T-1\right)+\sin x\left(\cos T-1\right)+\sin T\cos x \\ &\quad +\sin\sqrt{2}T\cos\sqrt{2}x| \\ &\leq |1-\cos\sqrt{2}T|+|1-\cos T|+|\sin T|+|\sin\sqrt{2}T|. \end{aligned}$$

Car $|\cos x| \leq 1$ et $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de **Gottschalk (2.5.2)**, on a pour ε et δ positifs, il existe deux entiers m, n tels que

$$|mx - an| < \delta, \ \forall x, a \in \mathbb{R}$$

pour $x = 1$, $a = \sqrt{2}$ et $\delta = \frac{\varepsilon}{4\pi} > 0$ on aura

$$\left|m - \sqrt{2}n\right| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

pour $T = 2n\pi$, on obtient

$$\sin T = \sin(2n\pi) = 0 \text{ et } \cos(T) = \cos(2n\pi) = 1$$

d'où

$$|f(x+T)-f(x)| \leq \left|1-\cos\sqrt{2}T\right| + \left|\sin\sqrt{2}T\right|$$

et on a aussi

$$\sqrt{2}T = \sqrt{2}(2n\pi) = (\sqrt{2}n)2\pi.$$

Posons

$$\sqrt{2}n - m = a$$

ce qui implique que $\sqrt{2}n = m + a$, on obtient

$$\left|\sqrt{2}n - m\right| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

d'où

$$|a| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

ce qui est équivalent à

$$\sqrt{2}T = (m + a)2\pi.$$

On a

$$\begin{aligned}
\cos\sqrt{2}T &= \cos\left(2\pi m + 2\pi a\right) \\
&= \cos 2\pi m \cos 2\pi a - \sin 2\pi m \sin 2\pi a \\
&= \cos 2a\pi.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sin\sqrt{2}T &= \sin\left(2\pi m + 2\pi a\right). \\
&= \sin 2\pi m \cos 2\pi a + \sin 2\pi a \cos 2\pi m. \\
&= \sin 2\pi a.
\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$|f(x+T) - f(x)| \leq |1 - \cos 2\pi a| + |\sin 2\pi a|.$$

Comme

$$|\sin\theta| \leq |\theta|, \ \forall\theta$$

et

$$|1 - \cos\theta| \leq |\theta|, \ \forall\theta$$

alors,

$$|f(x+T) - f(x)| \leq 2|a|\pi + 2|a|\pi = 4\pi|a|$$

et comme

$$|a| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

alors,

$$|f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc f est presque périodique mais n'est pas périodique car,

$$f(x+T) \neq f(x).$$

Du point de vue géométrique, on observe la presque périodicité de cette fonction à partir de l'allure de sa courbe représentative donnée par la **figure1.1.**

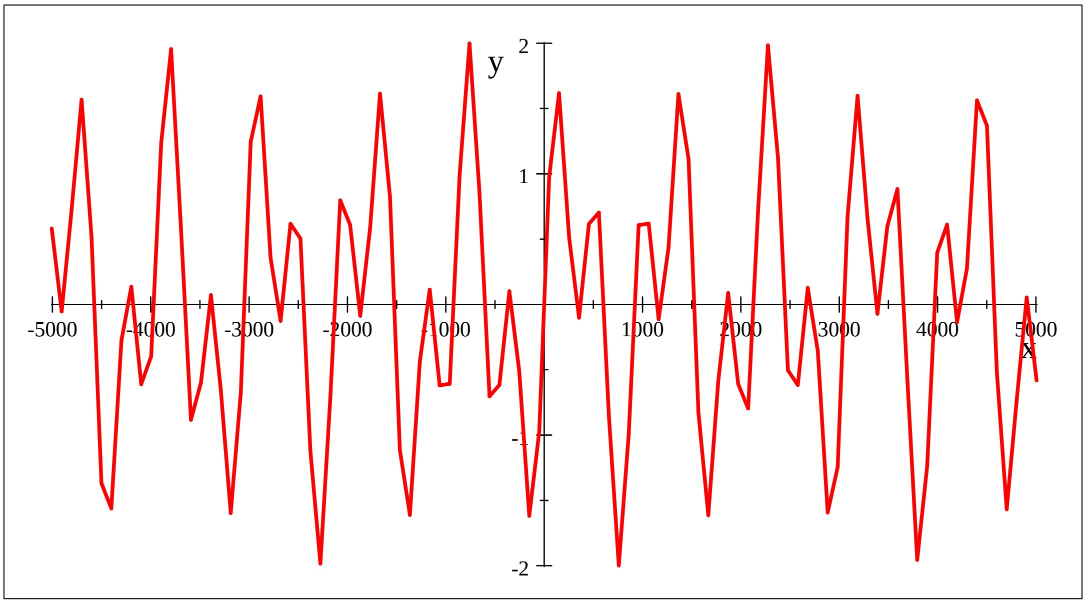


figure1.**1** (figure de la fonction f)

4. On peut vérifier la presque périodicité de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \cos x + \cos\sqrt{2}x \end{array}$$

de la même manière que pour la fonction précédente.

Proposition 1.1.1 *Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors f est bornée et uniformément continue.*

Preuve.

i La bornitude de f.

Supposons que f est une fonction presque périodique.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre T vérifiant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Comme par hypothèse f est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle atteint ses bornes sur tout compact de $\mathbb{R}$. En particulier, il existe $M > 0$, tel que

$$\sup_{x \in [0, \ell_\varepsilon]} \|f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq M.$$

On prend $\varepsilon = 1$ et $T \in [-x, -x + \ell_1]$ une ε**-presque période,** alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} < 1,$$

il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{\mathbb{X}} &= \|f(x) - f(x+T) + f(x+T)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \|f(x) - f(x+T)\|_{\mathbb{X}} + \|f(x+T)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq M + 1. \end{aligned}$$

Donc f est bornée.

ii La continuité uniforme de f.

Soit $\varepsilon > 0$, et $\ell = \ell_\varepsilon$ la longueur d'inclusion associée à f.

Comme f est uniformément continue sur $[-1, 1 + \ell]$, alors il existe $\delta_\varepsilon > 0$, tel que

$$\forall x, y \in [-1, 1 + \ell], \ \ |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon.$$

D'autre part, si $T \in [-x, -x + \ell]$ avec T une ε-presque période, on a

$$\|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec $|x - y| < \delta_\varepsilon$, on aura

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{X}} &= \|f(x) + f(x+T) - f(x+T) - f(y+T) + f(y+T) - f(y)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \|f(x) - f(x+T)\|_{\mathbb{X}} + \|f(x+T) - f(y+T)\|_{\mathbb{X}} + \|f(y) - f(y+T)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon = \varepsilon', \text{ avec } \varepsilon' > 0. \end{aligned}$$

Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

■

Exemple 1.1.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin \alpha x^2$ n'est pas presque périodique, car elle n'est pas uniformément continue.*

Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (ne dépend pas de ε), $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \eta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

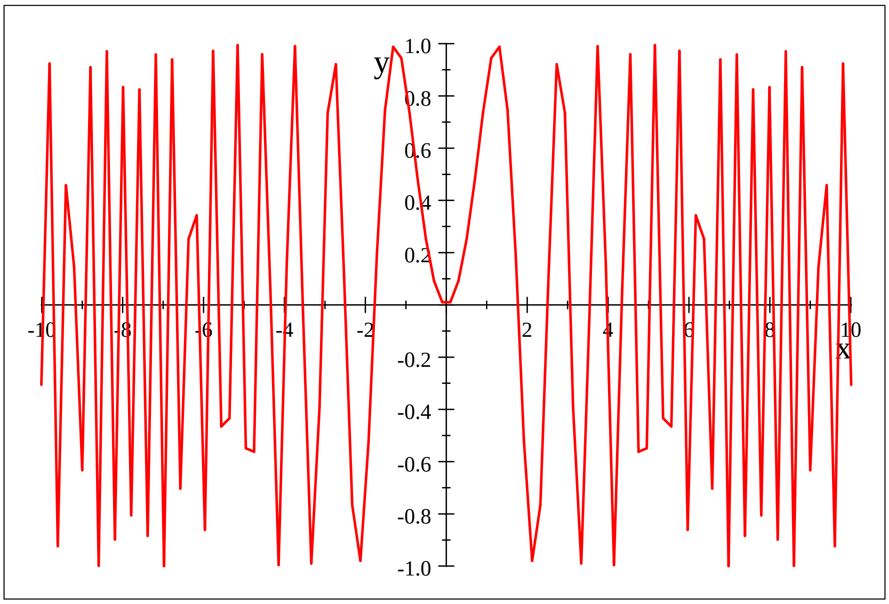
On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\sin\left(\alpha x^2\right) - \sin\left(\alpha y^2\right)\right| \\ &= \left|2\sin\left(\frac{\alpha}{2}(x^2 - y^2)\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)\right)\right| \\ &\leq |\alpha|\left|x^2 - y^2\right| \\ &\leq |\alpha|\,|x - y|\,|x + y| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

si

$$|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|\,|x + y|}.$$

Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{|\alpha||x+y|}$ qui dépend de x et y, donc la fonction $x \mapsto \sin \alpha x^2$ n'est pas uniformément continue, d'où elle n'est pas presque périodique.



Le graphe de la fonction f

Propriétés de l'ensemble des nombres de translation

Proposition 1.1.2 *Tout ensemble qui contient un ensemble relativement dense est relativement dense.*

Preuve. Soient E_1 et E_2 deux ensembles tels que E_1 est un ensemble relativement dense et

$$E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}.$$

Montrons que E_2 est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Montrons qu'il existe $\ell_2 > 0$ tel que

$$\forall a \in \mathbb{R},\, x \in [a, a + \ell_2] \cap E_2 \neq \emptyset.$$

E_1 étant un ensemble relativement dense, il existe $\ell_1 > 0$ et $x \in E_1$ tels que

$$x \in [a, a + \ell_1]\,,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Ce qui implique que $x \in [a, a + \ell_1]$ et $x \in E_1$.

Comme $E_1 \subset E_2$, alors $x \in [a, a + \ell_1]$ et $x \in E_2$.

D'où

$$x \in [a, a + \ell_1] \cap E_2,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Il suffit de prendre $\ell_2 = \ell_1 > 0$ pour avoir

$$x \in [a, a + \ell_2] \cap E_2,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Donc E_2 est relativement dense dans $\mathbb{R}$. ■

Proposition 1.1.3 *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *si* $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, *alors*

$$E\{\varepsilon', f\} \supset E\{\varepsilon, f\}\,,\ \forall \varepsilon' > \varepsilon.$$

Preuve. On a

$$E(\varepsilon, f) = \left\{ T \in \mathbb{R},\ \sup_{x \in \mathbb{R}} \| f\,(x+T) - f\,(x) \|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon \right\}.$$

Comme $\varepsilon' > \varepsilon$, on obtient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \| f\,(x+T) - f\,(x) \|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon < \varepsilon'.$$

Ce qui donne,

$$E\left\{\varepsilon', f\right\} \supset E\left\{\varepsilon, f\right\},\ \forall \varepsilon' > \varepsilon.$$

■

Proposition 1.1.4 *Pour tout* $\varepsilon > 0$*,* $E\left\{\varepsilon, f\right\}$ *est fermé.*

Preuve. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E\left\{\varepsilon, f\right\}$ qui converge vers T dans $\mathbb{R}$.

Montrons que $T \in E\left\{\varepsilon, f\right\}$.

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E\left\{\varepsilon, f\right\}$ c'est-à-dire $T_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \| f(x+T_n) - f(x) \|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite et grâce à la continuité de f, on obtient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| f(x + \lim_{n \to \infty} T_n) - f(x) \right\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \| f(x+T) - f(x) \|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

D'où $T \in E\left\{\varepsilon, f\right\}$.

Par conséquent $E\left\{\varepsilon, f\right\}$ est fermé. ■

Proposition 1.1.5 *Pour tout* $\varepsilon > 0$*,* $E(\varepsilon, f_\alpha) = E(\varepsilon, f)$ *où*

$$f_\alpha(x) = f(x+\alpha),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire, l'espace des fonctions presque périodiques $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *est stable par translation.*

Preuve. Supposons que $T \in E\{\varepsilon, f_\alpha\}$ et montrons que $T \in E\{\varepsilon, f\}$.

Soit $T \in E\{\varepsilon, f_\alpha\}$, ce qui implique que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f_\alpha(x+T) - f_\alpha(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Posons $x = z + \alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x+T) - f(x) &= f(z+\alpha+T) - f(z+\alpha) \\ &= f_\alpha(z+T) - f_\alpha(z). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} &= \sup_{z\in\mathbb{R}} \|f_\alpha(z+T) - f_\alpha(z)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $T \in E(\varepsilon, f)$.

Donc

$$E\{\varepsilon, f_\alpha\} \subset E\{\varepsilon, f\}. \tag{1.1.1}$$

Maintenant supposons que $T \in E\{\varepsilon, f\}$ et montrons que $T \in E\{\varepsilon, f_\alpha\}$.

Soit $T \in E\{\varepsilon, f\}$, ce qui est équivalent à dire que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

On a

$$f_\alpha(x+T) - f_\alpha(x) = f(x+\alpha+T) - f(x+\alpha),$$

on pose, $y = x + \alpha$, on obtient

$$f_\alpha(x+T) - f_\alpha(x) = f(y+T) - f(y)$$

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f_\alpha(x+T) - f_\alpha(x)\|_{\mathbb{X}} &= \sup_{y\in\mathbb{R}} \|f(y+T) - f(y)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui veut dire que $T \in E(\varepsilon, f_\alpha)$.

Donc,

$$E\{\varepsilon, f\} \subset E\{\varepsilon, f_\alpha\}. \tag{1.1.2}$$

Donc (1.1.1) et (1.1.2) impliquent que $\forall \varepsilon > 0$,

$$E(\varepsilon, f_\alpha) = E(\varepsilon, f).$$

■

Proposition 1.1.6 *Soient $f_1, f_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble*

$$E\{\varepsilon, f_1\} \times E\{\varepsilon, f_2\}$$

est relativement dense.

Preuve. Voir [3] ■

Proposition 1.1.7 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \neq 0$, alors il existe $M > 0$ tel que*

$$E\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\} \supset E\{\varepsilon, f\}.$$

Preuve. Soit $T \in E\{\varepsilon, f\}$ c'est à dire $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(x+T)} - \frac{1}{f(x)}\right| &= \left|\frac{f(x+T) - f(x)}{f(x+T)f(x)}\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2|f(x)|}
\end{aligned}$$

il suffit de prendre $M = 2|f(x)|$, et on aura

$$\left|\frac{1}{f(x+T)} - \frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Donc

$$T \in E\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\}$$

■

Nous allons maintenant présenter la propriété **d'approximation** des fonctions presque périodiques au sens de **Bohr** par des **polynômes trigonométriques généralisés**.

1.1.2 Critère d'approximation

Définition 1.1.3 *On appelle* ***polynôme trigonométrique généralisé****, toute combinaison de la forme*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x) \ \textit{avec, } a_k \in \mathbb{X},\ \lambda_k \in \mathbb{R} \textit{ et } n \in \mathbb{N}.$$

On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces polynômes.

Proposition 1.1.8 *L'ensemble des polynômes trigonométriques généralisé $\mathcal{A} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

Preuve. Il est clair que les fonctions $x \mapsto \exp(i\lambda_k x)$, $\forall k = \overline{1.n}$ sont continues et périodiques, alors elles sont presque périodiques.

Comme la somme des fonctions presque périodiques est toujours presque périodiques, alors $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x)$ est presque périodique.

Donc $\mathcal{A} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. ■

Définition 1.1.4 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$,* ***continue,*** *possède la propriété d'approximation polynômiale, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un* ***polynôme trigonométrique*** *$P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.1.1 *Une fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si et seulement si, elle possède la propriété d'approximation polynômiale.*

Preuve. La démonstration de ce théorème est longue et technique, le lecteur intéressé pourra se rapporter à [11]. ■

Proposition 1.1.9 *La série uniformément convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(i\lambda_n x)$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ est presque périodique.*

Preuve. Chaque terme de la série est une fonction presque périodique, alors la somme de n premiers termes $S_n(x)$ est presque périodique. Par conséquent, la somme $S(x)$ de la série est aussi presque périodique, (limite uniforme de $S_n(x)$). ■

1.1.3 Critère de Bochner

La définition des fonctions presque périodiques au sens de **Bohr** est parfois peu maniable. Il est important de chercher des propriétés moins intuitives, mais plus utilisables, des fonctions presque périodiques, qui puissent en constituer une nouvelle définition basée sur une propriété topologique des fonctions **translatées**.

On note par $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, l'ensemble des fonctions continues et bornées muni de la norme de la convergence uniforme, qui est un espace de **Banach.**

Définition 1.1.5 *Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{X}$, continue est dite **normale** ou presque périodique au sens de **Bochner** si l'ensemble de ses translatés*

$$\{f_\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Où

$$f_\alpha(x) = f(x + \alpha), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, pour toute suite bornée de nombres réels $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(f(x + h_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente.

Le théorème suivant affirme que la presque périodicité de **Bohr** et celle de **Bochner** sont équivalentes.

Théorème 1.1.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction continue.*

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est normale.*
2. *f est presque périodique au sens de **Bohr**.*

Preuve. La nécessité

Raisonnons par contraposition, on suppose que $f \notin AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et montrons que f n'est pas normale.

Soit $f \notin AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, c'est à dire il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \ell > 0$, il existe un intervalle de longueur ℓ qui ne contient aucun ε_0-nombre de translation.

Pour montrer que f n'est pas normale, il suffit de construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall i \neq j, \ \ |u_i - u_j| \notin E(\varepsilon_0, f), \tag{1.1.3}$$

où $E(\varepsilon_0, f)$ l'ensemble des ε_0-nombre de translation associé à la fonction f.

En effet pour une telle suite, on aura :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x + u_i - u_j) - f(x)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon_0$$

soit encore,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x + u_i) - f(x + u_j)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon_0$$

ce qui montre que l'on ne peut pas extraire une sous-suite convergente de la suite $(f_{u_n})_n$.

Donc f ne serait pas normale.

Pour construire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on procède comme suit :

Soit $u_1 \neq 0$, il existe un intervalle $[a_1, b_1]$, tel que

$$(b_1 - a_1) > 2\,|u_1|$$

qui ne contient aucun τ (ε_0-translation), car f n'est pas presque périodique.

On pose,

$$u_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1).$$

Alors,

$$u_2 - u_1 \in [a_1, b_1]$$

car,

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 - a_1 &= \frac{b_1 - a_1 - 2u_1}{2} > 0 \\ &\text{et} \\ b_1 - (u_2 - u_1) &= \frac{b_1 - a_1 + 2u_1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Donc $(u_2 - u_1)$ ne peut pas être un ε-nombre de translation, c'est à dire

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x + u_2 - u_1) - f(x)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon.$$

Il existe un autre intervalle $[a_2, b_2]$, tel que

$$b_2 - a_2 > 2\left(|u_1| + |u_2|\right)$$

qui ne contient aucun ε-nombre de translation.

On pose,

$$u_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$$

comme $(u_3 - u_1)$ et $(u_3 - u_2) \in [a_2, b_2]$, et ne peuvent pas être des ε-nombres de translation, donc nous avons

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x + u_3 - u_1) - f(x)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x + u_3 - u_2) - f(x)\|_{\mathbb{X}} > \varepsilon.$$

En répétant la même procédure, à l'ordre n, il va exister un autre intervalle $[a_n, b_n]$, tel que

$$b_n - a_n > 2\left(|u_1| + |u_2| + ... + |u_n|\right)$$

qui ne contient aucun ε-nombre de translation.

On pose,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),$$

on aura

$$\forall i < n + 1, \ u_{n+1} - u_i \in [a_n, b_n]$$

donc les $(u_{n+1} - u_i)$, pour $i < n+1$, ne peuvent pas être des ε-nombres de translation.

Finalement, on a construit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie (1.1.3).

La suffisance

Supposons que $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et montrons que f est normale.

Soient $S = (S_n)_n$ une suite d'ensembles dense dans $\mathbb{R}$ et $(f_{u_n})_n$ une suite de translation de f.

$$f_{u_n}(t) = f(u_n + t).$$

On procède au choix d'une sous suite de $(f_{u_n})_n$ convergente.

$(f_{u_{1.n}})_n$ une sous suite de $(f_{u_n})_n$ convergente dans S_1, $(f_{u_{2.n}})_n$ une sous suite de $(f_{u_{1.n}})_n$ convergente dans S_2, ainsi de suite pour les autres termes, $(f_{u_{i.n}})_n$ une sous suite de $(f_{u_{(i-1).n}})_n$ convergente dans S_i.

On forme la suite diagonale $(f_{u_{n.n}})_n$ qui converge dans S.

Maintenant, on s'intéresse à la convergence uniforme de la suite $(f_{u_{n.n}})_n$, qui sera notée $(f_{v_n})_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\ell = \ell_\varepsilon > 0$ longueur d'intervalles qui contiennent des ε-nombres translation correspondant à la presque périodicité de f, et δ correspond à la continuité uniforme de la fonction f, on décompose l'intervalle $[0, \ell]$ en des sous-intervalles de longueur inférieure à δ et dans chacun, on choisit un point de S.

Soit S_0 l'ensembles des points choisis

$$S_0 = \{r_1, r_2, ..., r_p\}.$$

La suite $(f_{v_n})_n$ est uniformément convergente, donc il existe N_ε, $\forall m, n > N_\varepsilon$, on a

$$\|f_{v_n}(r_i) - f_{v_m}(r_i)\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon, \; i = 1, 2, ..., p$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, il existe un τ (ε-nombre translation) dans l'intervalle $[-t, -t+\ell]$.

où $\tau + t \in [0, \ell]$, et soit $r_i \in S_0$ tel que $|\tau + t - r_i| < \delta$.

Pour $m, n > N_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned}
\|f_{v_n}(t) - f_{v_m}(t)\|_{\mathbb{X}} &= \|f(v_n + t) - f(v_m + t)\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \|f(v_n + t) - f(v_n + \tau + t)\|_{\mathbb{X}} + \|f(v_n + \tau + t) - f(r_i + v_n)\|_{\mathbb{X}} \\
&\quad + \|f(r_i + v_n) - f(r_i + v_m)\|_{\mathbb{X}} + \|f(r_i + v_m) - f(v_m + \tau + t)\|_{\mathbb{X}} \\
&\quad + \|f(v_m + \tau + t) - f(v_m + t)\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq 5\varepsilon = \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Donc la sous-suite $(f_{v_n})_n$ de $(f_{u_n})_n$ est uniformément convergente, ce qui nous confirme la normalité de la fonction f. ■

Proposition 1.1.10 *L'espace $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de **Banach**.*

Preuve. Comme l'espace $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est un sous espace fermé de l'espace des fonctions continues bornées $C_b(\mathbb{R},\mathbb{X})$ qui est un espace de **Banach** muni de la norme de la convergence uniforme, alors $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est un espace de **Banach** pour cette norme. ■

1.2 Propriétés des fonctions presque périodiques

Proposition 1.2.1 *Si $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\|f\|_\infty \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Preuve. On a f une fonction presque périodique, c'est à dire $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre T vérifiant

$$E(\varepsilon, f) = \left\{T \in \mathbb{R},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f\,(x+T) - f\,(x)| \leq \varepsilon\right\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

De plus, f est continue, d'où $\forall\varepsilon > 0$,

$$|f\,(x+T) - f\,(x)| \leq \varepsilon.$$

La presque périodicité découle du fait que

$$||f(x+T)| - |f(x)|| \leq |f\,(x+T) - f\,(x)|$$

d'où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} ||f(x+T)| - |f(x)|| \leq \varepsilon.$$

Donc $\|f\|_\infty \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$. ■

Proposition 1.2.2 *Si $f, g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et g est uniformément continue, alors*

$$(g \circ f) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Preuve. Voir [1]. ■

Proposition 1.2.3 *Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f \neq 0$, alors f^2 l'est aussi.*

Preuve. Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ |f(x+T) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\,|f(x)|}.$$

On a

$$\begin{aligned}\left|f^2(x+T) - f^2(x)\right| &= |(f(x+T) - f(x))\,(f(x+T) - f(x))| \\ &\leq 2\,|f(x)|\,|f(x+T) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\,|f(x)|}2\,|f(x)| \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc f^2 est presque périodique. ■

Proposition 1.2.4 *L'espace $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ a une structure d'espace vectoriel, c'est à dire :*

1. Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $\alpha f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ pour tout réel α.

2. Si $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $f + g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Preuve.

1. Soit f une fonction presque périodique, montrons que αf est presque périodique.

   On a f est presque périodique c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T satisfaisant

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon.$$

   On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned}\|\alpha f(x+T) - \alpha f(x)\|_{\mathbb{X}} &= |\alpha|\,\|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq |\alpha|\,\varepsilon = \varepsilon'.\end{aligned}$$

   D'où $\forall \varepsilon' > 0$, il existe $\ell_{\varepsilon'} = \ell_\varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

   $$\|\alpha f(x+T) - \alpha f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon'.$$

   Donc $\alpha f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

2. Soit $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe deux polynômes trigonométriques P et Q tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P(x)\| \leq \varepsilon \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}} \|g(x) - Q(x)\| \leq \varepsilon.$$

   Avec l'inégalité triangulaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|(f+g) - (P+Q)\| &\leq \|f - P\| + \|g - Q\| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

   Qui nous confirme la presque périodicité de la fonction $f + g$.

■

Proposition 1.2.5 *Si $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f, g \neq 0$, alors*

1. $fg \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Si $\inf_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = m > 0$, alors $\left(\frac{1}{f}\right) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Si $\inf_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| > 0$, alors $\left(\frac{f}{g}\right) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Preuve.

1. Soient f et g deux fonctions presque périodiques, alors d'après 1 et 2 on a $f + g$ et $f - g$ sont aussi presque périodique, de même pour leurs carré.

   La fonction $f.g$ peut être donnée par

$$f(x).g(x) = \frac{1}{4}\left(f(x) + g(x)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(f(x) - g(x)\right)^2.$$

   Ce qui donne le résultat.

2. Soit f une fonction presque périodique. et $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = m > 0$, montrons que $\frac{1}{f}$ est presque périodique.

f est presque périodique c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T satisfaisant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On aura donc

$$\left|\frac{1}{f(x+T)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x+T) - f(x)}{f(x+T).f(x)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{m^2}.$$

De plus, on a $E\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\}$ contient $E\left\{\varepsilon, f\right\}$, donc cet ensemble est relativement dense, d'où

$$\left(\frac{1}{f}\right) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

3. Soient f_1 et $f_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_2(x)| > 0$, montrons $\frac{f_1}{f_2} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   f_1, f_2 sont deux fonctions presque périodiques, alors $\frac{1}{f_2}$ est aussi presque périodique.

   Comme $\frac{f_1}{f_2} = f_1.\frac{1}{f_2}$, alors elle est presque périodique.

■

Proposition 1.2.6 *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions presque périodique converge uniformément dans $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est aussi presque périodique.*

Preuve. On a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathbb{R}$ vers f, alors, pour un ε donné, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

En particulier, il existe une fonction f_{n_0} tels que

$$\|f_{n_0}(x) - f(x)\|_{\mathbb{X}} < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit maintenant un nombre T de $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right\}$. Alors

$$\begin{aligned}\|f(x+T) - f(x)\|_{\mathbb{X}} &\leq \|f(x+T) - f_{n_0}(x+T)\|_{\mathbb{X}} + \|f_{n_0}(x+T) - f_{n_0}(x)\|_{\mathbb{X}} + \\ &\quad + \|f_{n_0}(x) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq 3.\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right\} \subset E\left\{\varepsilon, f\right\}$.

Donc $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. ■

Proposition 1.2.7 *Si f est une fonction presque périodique, alors*

$$\operatorname{Im} f = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact, c'est-à-dire $\overline{\operatorname{Im} f}$ est compact.

Preuve. Supposons que f est une fonction presque périodique et montrons que $\operatorname{Im} f$ est **relativement compact**.

C'est à dire montrons que pour toute suite de $\operatorname{Im} f$, on peut extraire une sous suite convergente dans $\operatorname{Im} f$.

Comme $\mathbb{X}$ est un espace de Banach, alors la compacité relative coïncide avec la **pré-compacité.** Donc il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε dans $\mathbb{X}$ telles que leurs réunion couvre l'ensemble $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell > 0$ la longueur d'inclusion associée à f.

Comme f est continue sur $[0, \ell]$, on en déduit que l'ensemble $\{f(x),\ x \in [0, \ell]\}$ est un compact dans $\mathbb{X}$.

C'est-à-dire

$$\{f(x),\ x \in [0, \ell]\} = \bigcup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon).$$

Prenons $x_1, x_2, ..., x_n$ les centres des boules qui couvrent $\{f(x),\ x \in [0, \ell]\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et τ un $\varepsilon-$nombre de translation dans l'intervalle $[-x, -x + \ell]$.

Comme $x + \tau \in [0, \ell]$, alors il existe un entier $p \in \{1, ..., n\}$ tel que

$$f(x + \tau) \in B(x_p, \varepsilon).$$

C'est à dire

$$\|f(x + \tau) - x_p\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|f(x) - x_p\|_{\mathbb{X}} &= \|f(x) - f(x + \tau) + f(x + \tau) - x_p\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \|f(x + \tau) - f(x)\|_{\mathbb{X}} + \|f(x + \tau) - x_p\|_{\mathbb{X}} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \\
&\leq \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Im} f = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon).$$

■

Proposition 1.2.8 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(f * g) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*

Preuve. Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ donc f est continue et comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $(f * g)$ est continue.

On a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\|(f * g)\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On suppose que $g \neq 0$ car si $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ alors $f * g = 0$ et donc $(f * g) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

On a $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre τ vérifiant

$$\|f(x + \tau) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}.$$

Posons $x = y - t \in \mathbb{R}$

$$\|f(y - t + \tau) - f(y - t)\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}.$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
(f * g)(x + \tau) - (f * g)(y) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) f(y + \tau - x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(y - x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(f(y + \tau - x) - f(y - x)\right) g(x) dx,
\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\|(f * g)(x + \tau) - (f * g)(y)\|_{\mathbb{X}} &= \|f(y + \tau - x) - f(y - x)\|_{\mathbb{X}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

1.3 Dérivation des fonctions presque périodiques

Lorsqu'une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique.

Pour les fonctions presque périodiques, ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que la dérivée soit **uniformément continue**, ce qui est nécessaire pour la presque périodicité.

En fait un résultat remarquable assure que cette condition est suffisante.

Théorème 1.3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction presque périodique et dérivable.*

Si la dérivée f' est uniformément continue, alors elle est presque périodique.

Preuve. On cherche à écrire f' comme une limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques. On sait que pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

pour $h = \frac{1}{n}$, on a

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} n \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right)$$

Posons,

$$f_n(x) = n \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right)$$

il est clair que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et

$$f'(x) = \underset{n \to +\infty}{\ell im} f_n(x).$$

Montrons que,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f'(x) - f_n(x)\|_{\mathbb{X}} \right) = 0.$$

On a,

$$\begin{aligned} \|f'(x) - f_n(x)\|_{\mathbb{X}} &= \left\| f'(x) - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \|f'(x) - f'(t)\|_{\mathbb{X}} \, dt \\ &\leq \underset{t \in \left[x, x+\frac{1}{n}\right]}{Sup} \|f'(x) - f'(t)\|_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la continuité uniforme de f' assure l'existence d'un δ tel que si $|u-v| \leq \delta$ alors,

$$\|f'(u) - f'(v)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon$$

d'où il existe un n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $\frac{1}{n} \leq \delta$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\|f'(x) - f_n(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f'sur $\mathbb{R}$. ■

Remarque 1.3.1 *Une question naturelle concernant la régularité des fonctions presque périodiques est la suivante :*

Une fonction presque périodique atteint-elle son ***maximum*** ?

On sait que c'est le cas pour les fonctions périodiques continues. Mais il n'en est pas de même pour les fonctions presque périodiques.

Exemple 1.3.1 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

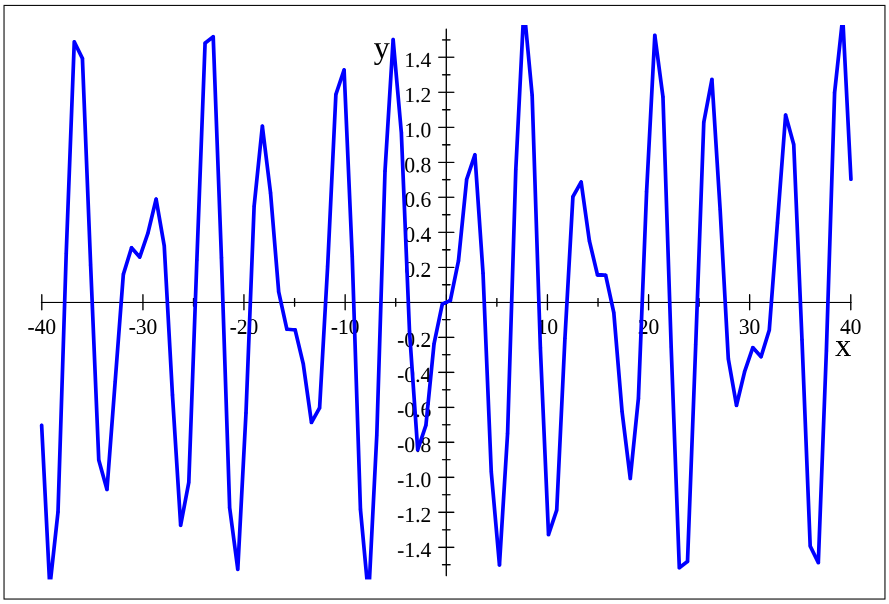
$$f(x) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{2}x\right)$$

qui est une fonction presque périodique, mais n'atteint pas son maximum.

En effet, f est une fonction presque périodique en tant que polynôme trigonométrique.

Si cette fonction atteint son maximum global en un point x_0, alors x_0 serait aussi maximum local.

Comme f est dérivable, ceci entraîne que la dérivée de f s'annule en x_0, ce qui est impossible.



Représentation graphique de la fonction f.

En effet, on a

$$f'(x) = \cos x - \cos(\sqrt{2}x)$$

donc les points critiques sont contenus dans l'ensemble

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos x = \cos(\sqrt{2}x) \right\}.$$

Dire que $\cos x = \cos y$ *signifie que* $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$ *ou* $x + y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Donc dire que $x \in E$ *est équivalent à dire que* $x(1-\sqrt{2}) \in 2\pi\mathbb{Z}$ *ou* $x(1+\sqrt{2}) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Donc on peut écrire

$$E = \frac{2}{1-\sqrt{2}}\pi\mathbb{Z} \cup \frac{2}{1+\sqrt{2}}\pi\mathbb{Z} = 2(1+\sqrt{2})\pi\mathbb{Z} \cup 2(1-\sqrt{2})\pi\mathbb{Z}.$$

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
f\left(2\left(1-\sqrt{2}\right)\pi n\right) &= \sin\left(2\left(1-\sqrt{2}\right)\pi n\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\pi n\right) \\
&= \sin\left(2\pi n - 2\sqrt{2}\pi n\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2\sqrt{2}\pi n - 4\pi n\right) \\
&= -\sin\left(2\sqrt{2}\pi n\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2\sqrt{2}\pi n\right) \\
&= -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(2\sqrt{2}\pi n\right).
\end{aligned}$$

Donc pour tous entiers relatifs n *et* m *on a,*

$$\begin{aligned} f\left(2\left(1-\sqrt{2}\right)\pi n\right) &= -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(2\sqrt{2}\pi n+2\pi m\right) \\ &= -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(2\pi\left(n\sqrt{2}+m\right)\right). \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ *muni de l'addition forme un sous-groupe additif de* $(\mathbb{R},+)$*, il ne peut être discret car* $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$*, il est donc dense.*

Par conséquent, on peut trouver une suite $((a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Z}^2$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n+\sqrt{2}b_n=-\frac{1}{4}.$$

On a donc que

$$f\left(2\left(1-\sqrt{2}\right)\pi a_n\right)=-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(2\pi\left(a_n+\sqrt{2}b_n\right)\right).$$

Donc en passant à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f\left(2\left(1-\sqrt{2}\right)\pi a_n\right) &= -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(2\pi\left(\frac{-1}{4}\right)\right) \\ &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$|f(x)|\leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

ceci montre bien que la borne supérieure de f *sur* $\mathbb{R}$ *est* $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Maintenant montrons que celui-ci n'est jamais atteint.

Supposons qu'il le soit en un point x_0.

On a

$$\sin x_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}x_0\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où

$$\sin x_0-1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\sin\left(\sqrt{2}x_0\right)\right).$$

Le membre de gauche est négatif tandis que le membre de droite est positif donc les deux termes sont nuls.

Par conséquent, $x_0\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$ *et* $\sqrt{2}x_0\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$.

Il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que*

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1 \text{ et } \sqrt{2}x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2.$$

Comme $x_0 \neq 0$, *on a*

$$\sqrt{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k_2}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k_1} = \frac{1 + 4k_2}{1 + 4k_1},$$

ce qui contredit le fait que $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

1.4 Fonctions presque périodiques à paramètres

Pour étudier la presque périodicité des solutions des équations différentielles de type

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.4.1}$$

Il est indispensable d'imposer la presque périodicité de la fonction f uniformément par rapport à x dans les compacts, sinon la fonction composée $f(t, x(t))$ où x est une solution de l'équation (1.4.1) ne pourrait étre presque périodique.

Par exemple la fonction $f(t, x) = \sin(tx)$ est presque périodique pour chaque x par contre la fonction composée

$$f(t, \sin t) = \sin(t \sin t)$$

n'est pas presque périodique. Pour plus de détail sur cet exemple, voir [13] page 14.

Définition 1.4.1 *On dit qu'une fonction continue* f *est presque périodique en* t *et uniformément en* $x \in B$, *avec* B *un sous ensemble borné de* $\mathbb{X}$.

Si pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\ell_\varepsilon > 0$ *tel que tout intervalle de longueur* ℓ_ε *contient un nombre* τ *vérifiant*

$$\|f(t + \tau, x) - f(t, x)\| \leq \varepsilon, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x \in B.$$

Théorème 1.4.1 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{X} & \to & \mathbb{X} \\ & (t, x) & \mapsto & f(t, x) \end{array}$$

une fonction presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ *et uniformément en* $x \in B$ *avec* $B \subset \mathbb{X}$.

On suppose que f est Lipschitzienne en $x \in \mathbb{X}$ et uniformément en $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire il existe $\ell > 0$ tel que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \ell \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{X} \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est une fonction presque périodique, alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{X} \\ & t & \mapsto & \Gamma(t) = f(t, g(t)) \end{array}$$

est aussi une fonction presque périodique.

Preuve. On a $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, contient un nombre T vérifiant

$$\|g(x+T) - g(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2\ell}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.4.2}$$

On a,

$$\begin{aligned} \|\Gamma(t+\tau) - \Gamma(t)\| &= \|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t+\tau, g(t))\|_{\mathbb{X}} + \|f(t+\tau, g(t)) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \ell \|g(t+\tau) - g(t)\|_{\mathbb{X}} + \|f(t+\tau, g(t)) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Comme f est presque périodique, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε, contient un nombre τ vérifiant

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau, g(t)) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.3}$$

En combinant les inégalités (1.4.2) et (1.4.3), on obtient

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\Gamma(t+\tau) - \Gamma(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t, g(t))\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent $\Gamma : t \mapsto f(t, g(t))$ est presque périodique. ■

Théorème 1.4.2 *Soit*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$$

une fonction presque périodique en t et uniformément en x.

Supposons que $u \mapsto f(t,u)$ est une fonction uniformément continue sur $B' \subset \mathbb{X}$ (où B' est un sous ensemble bornée de $\mathbb{X}$), uniformément pour $t \in \mathbb{R}$.

Si $g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ définie par

$$\Gamma(.) = \Gamma\left(., g(.)\right) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$$

Preuve. Supposons que $g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ c'est-à-dire que $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de $[a, a + \ell_\varepsilon]$ contient un nombre T vérifiant

$$\|g(t+T) - g(t)\| \leq \varepsilon,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.4.4}$$

Comme $g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors g est bornée. Soit maintenant B' un sous ensemble borné de $\mathbb{X}$ tel que $g(t) \in B'$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}\|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}} &\leq \|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t+\tau, g(t))\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + \|f(t+\tau, g(t)) - f(t, g(t))\|_{\mathbb{X}}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.4.4) et la continuité uniforme de F, on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t, g(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.4.5}$$

de même, en utilisant la presque périodicité de f, on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau, g(t)) - f(t, g(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.4.6}$$

en combinant les inégalités (1.4.5) et (1.4.6), on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau, g(t+\tau)) - f(t, g(t))\| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\Gamma(t) = \Gamma(t, g(t)) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

■

1.5 Séries de Fourier des fonctions presque périodiques

Nous allons à présent introduire la notion de série de Fourier d'une fonction presque périodique, on veut associer à une fonction presque périodique une série de la forme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k \exp(i\lambda_k x), \text{ avec } \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ et } C_k \in \mathbb{X}.$$

On cherche à obtenir les coefficients C_k et λ_k. Pour cela, il est nécessaire de définir la valeur moyenne d'une telle fonction.

1.5.1 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Définition 1.5.1 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et localement intégrable.*

*On définit la **valeur moyenne supérieure** et la **valeur moyenne inférieure** qu'on note respectivement, $\overline{M}(f)$ et $\underline{M}(f)$ comme suit :*

$$\overline{M}(f) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)dx \quad \text{et } \underline{M}(f) = \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)dx.$$

*Lorsque ces deux valeurs sont égales, on obtient la **valeur moyenne** de f, notée $M(f)$ tel que*

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

Il faut cependant vérifier qu'un tel nombre existe.

Théorème 1.5.1 *Pour toute fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, le nombre : $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$ existe indépendamment de $\alpha \in \mathbb{R}$ et vaut $M(f)$.*

Preuve. En premier lieu, montrons le résultat pour un polynôme trigonométrique.

Soit P un polynôme trigonométrique de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \exp(i\lambda_k x), \text{ avec } \lambda_k \neq 0, \text{et } c_k \in \mathbb{X}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} P(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \exp(i\lambda_k x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\exp(i\lambda_k(\alpha+T)) - \exp(i\lambda_k\alpha)}{i\lambda_k}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{T}\left|\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} P(x)dx\right| \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{2}{T\left|\lambda_k\right|} \underset{T\to\infty}{\to} 0$$

indépendamment de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque : Si le polynôme trigonométrique P contient un exposant nul, alors P est de la forme

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(i\lambda_k x) \quad \text{et} \quad \underset{T\to\infty}{\ell im} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} P(x)dx = c_0.$$

Soit à présent $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, d'après le **théorème d'approximation 1.1.1,** on a pour $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique S tel que

$$\left\|f - S\right\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout T_1, $T_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_2} f(x)dx\right\|_{\mathbb{X}} &\leq \left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_1} \left(f(x) - S(x)\right)dx\right\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + \left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_1} S(x)dx - \frac{1}{T_2}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_2} S(x)dx\right\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + \left\|\frac{1}{T_2}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_2} \left(f(x) - S(x)\right)dx\right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left\|\frac{1}{T_1}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_1} S(x)dx - \frac{1}{T_2}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T_2} S(x)dx\right\|_{\mathbb{X}} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_1 \geq n_0$ et $T_2 \geq n_0$, ce qui nous donne

$$\left\| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} S(x)dx - \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} S(x)dx \right\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui entraîne que

$$\left\| \frac{1}{T_1} \int_{\alpha}^{\alpha+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2} \int_{\alpha}^{\alpha+T_2} f(x)dx \right\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

La **complétude** de $\mathbb{X}$ assure l'existence de la limite.

Il reste à montrer que la limite ne dépend pas de α.

Donnons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, en utilisant la relation de **CHASLES**, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left\| \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx - \int_{0}^{T} f(x)dx \right\|_{\mathbb{X}} &= \frac{1}{T} \left\| \int_{T}^{\alpha+T} f(x)dx - \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \frac{2\,|\alpha|\,M}{T}. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat attendu lorsque $T \to \infty$. ∎

Remarque 1.5.1 *La valeur moyenne d'une fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ existe et vaut*

$$\begin{aligned} M(f) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{0} f(x)dx. \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{\alpha-T}^{\alpha+T} f(x)dx, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En général, on prend $\alpha = 0$, c'est-à-dire

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)dx.$$

Voici quelques propriétés dont bénéficie la valeur moyenne :

Proposition 1.5.1 *Soit $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $c \in \mathbb{C}$, alors on a*

1. *$M(cf) = cM(f)$.*

2. *Si $f \geq 0$, alors $M(f) \geq 0$.*

3. *$M(f+g) = M(f) + M(g)$.*

4. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors*

$$\lim_{n\to\infty} M(f_n) = M(f).$$

Preuve. 1, 2 et 3 découlent directement des propriétés de l'intégrale.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ \|M(f_n) - M(f)\|_{\mathbb{X}} &= \left\| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (f_n(x) - f(x))dx \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{X}}\, dx. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|M(f_n) - M(f)\|_{\mathbb{X}} &\leq \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{X}}\, dx \right] \\ &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{X}}\, dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\lim_{n\to\infty} M(f_n) = M(f).$$

■

Remarques 1.5.2 .

1. L'application qui à une fonction presque périodique associe sa valeur moyenne est une forme linéaire continue.

2. La majoration de l'intégrale définissant la valeur moyenne montre que pour toute fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on a

$$\|M(f)\|_{\mathbb{X}} \leq \|f\|_{\mathbb{X}}.$$

3. Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors

$$M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$$

où $\overline{f}$ est le conjugué de f.

1.5.2 Convergence en moyenne des suites de fonctions presque périodiques

Définition 1.5.2 *On dit qu'une suite $(f_n)_{n>1}$ converge en moyenne quadratique si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$M(\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{\mathbb{X}}^2) \leq \varepsilon, \ \forall n_1, n_2 \geq n_0.$$

Définition 1.5.3 *Une famille $F = \{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de fonctions presque périodiques est dite **homogène** lorsque,*

1. *F est **equi-continue**.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$\bigcap_{\alpha \in I} E(\varepsilon, f_\alpha)$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.5.3 *Il est clair que toute suite de fonctions uniformément convergente est convergente en moyenne quadratique. Ceci découle de l'inégalité*

$$M\left(\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{\mathbb{X}}^2\right) \leq \|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{\infty}^2.$$

L'inverse est en général faux, cependant, une suite de fonctions $AP(\mathbb{R}, X)$ homogène (considérée comme famille) convergeant en moyenne quadratique, l'est aussi uniformément. Voir [11].

1.5.3 Séries de Fourier associée à une fonction presque périodique

Nous présentons ici les éléments fondamentaux concernant les **séries de Fourier** des fonctions presque périodiques.

Définition 1.5.4 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on définit le coefficient de **Fourier-Bohr** de f par*

$$a(\lambda) = M(f(x)\exp(-i\lambda x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\exp(-i\lambda x)dx.$$

*Le nombre réel λ est appelé **exposant de Fourier** de la fonction f.*

Remarque 1.5.4 *Pour toute fonction f presque périodique et pour tout nombre réel λ, la fonction $x \longmapsto f(x)\exp(-i\lambda x)$ est aussi presque périodique.*

Définition 1.5.5 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on définit le **spectre** de la fonction f par*

$$\sigma_f = \{\lambda \in \mathbb{R},\ a(\lambda) \neq 0\}.$$

Définition 1.5.6 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, la série de Fourier associée à la fonction f est définie par*

$$\hat{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} a(\lambda_n)\exp(i\lambda_n x).$$

Proposition 1.5.2 *Si la série de Fourier d'une fonction presque périodique f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une somme alors f coïncide avec cette somme.*

Preuve. Posons

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a(\lambda_k)\exp(i\lambda_k x) \text{ et } g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a(\lambda_k)\exp(i\lambda_k x).$$

Avec les λ_k deux à deux distincts.

Par hypothèses la suite g_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g.

Si $\lambda \notin \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$, alors on a grâce à la convergence uniforme

$$\begin{aligned} M(g(x)\exp(-i\lambda x)) &= \lim_{n\to+\infty} M(g_n(x)\exp(-i\lambda x)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a(\lambda_k) M(\exp(i\lambda_k x)\exp(-i\lambda x)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a(\lambda_k) (\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \exp(i(\lambda_k - \lambda)x)dx) \end{aligned}$$

et on obtient,

$$\begin{aligned} M(g(x)\exp(-i\lambda x)) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a(\lambda_k) \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{\exp(i(\lambda_k-\lambda)T)-1}{i(\lambda_k-\lambda)}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et si $\lambda = \lambda_{k_0}$ alors

$$\begin{aligned} M(g(x)\exp(-i\lambda x)) &= \lim_{n\to+\infty} M(g_n(x)\exp(-i\lambda x)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+k_0} a(\lambda_k) M(\exp(i\lambda_k x)\exp(-i\lambda x)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k_0-1} a(\lambda_k) M(\exp(i\lambda_k x)\exp(-i\lambda x)) \\ &\quad + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=k_0+1}^{n+k_0} a(\lambda_k) M(\exp(i\lambda_k x)\exp(-i\lambda x)) \\ &\quad + M(a(\lambda_k)\exp(i\lambda_{k_0} x)\exp(-i\lambda_{k_0} x)) \\ &= a(\lambda_{k_0}). \end{aligned}$$

Ce qui montre que f et g ont la même série de Fourier.

Le théorème d'unicité permet de conclure le résultat. ■

CHAPITRE 2

Sur la presque périodicité des solutions des équations différentielles ordinaires

Parmi les nombreuses raisons pour lesquelles **Bohr** a introduit le concept d'une fonction presque périodique, nous pouvons citer la description des propriétés des solutions des équations différentielles.

La presque périodicité des solutions des équations différentielles a été longuement étudiée depuis le tout début du vingtième siècle.

Les ouvrages classique de [**10**], [**1**] et [**17**], etc donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'existence des solutions presque périodiques d'un système différentiel linéaire à coefficients constants du premier ordre dont le second membre est presque périodique.

2.1 Primitives des fonctions presque périodiques

Puisque les primitives de fonctions interviennent naturellement dans la théorie des équations différentielles (par exemple dans le cadre de la méthode de variation de la constante), il est naturel de regarder le comportement des primitives vis-a-vis de la presque périodicité.

Théorème 2.1.1 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et F une primitive de f.*

$F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si et seulement si elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Preuve. La nécessité

Il est clair que si $F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors F est bornée.

La suffisance

Supposons que F est bornée et montrons que $F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On peut se restreindre au cas ou f est à valeurs réelles car si

$$f = f_1 + i f_2$$

où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles alors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f_1(t)dt + i \int_0^x f_2(t)dt \\ &= F_1(x) + iF_2(x). \end{aligned}$$

$F \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si et seulement si $F_1, F_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Supposons que F est bornée, notons par,

$$m = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x) \text{ et } M = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x).$$

On suppose que $m \neq M$, sinon F serait constante donc presque périodique.

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, il existe deux réels x_1 et x_2 tels que

$$F(x_1) < m + \frac{\varepsilon}{6} \text{ et } F(x_2) > M - \frac{\varepsilon}{6}.$$

On pose $d = |x_1 - x_2|$.

Puisque f est presque périodique, alors il existe $\ell_1 > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_1 contient un $\frac{\varepsilon}{6d}$-nombre de translation pour f.

On montre ensuite qu'en posant $\ell = \ell_1 + d$, tout $\frac{\varepsilon}{2\ell}$-nombre de translation pour f est un ε-nombre de translation pour F.

Dans un premier temps, on montre que tout intervalle de longueur ℓ contient deux points y_1 et y_2 tels que

$$\begin{aligned} F(y_1) &< m + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\text{et} \\ F(y_2) &> M - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

En effet, posons $\xi = \min\{x_1, x_2\}$. Soit τ un $\frac{\varepsilon}{6d}$-nombre de translation pour f tel que $\xi + \tau \in [\alpha, \alpha + \ell_1]$, où α est un réel quelconque.

On pose, $y_1 = x_1 + \tau$ et $y_2 = x_2 + \tau$ de sorte que $y_1, y_2 \in [\alpha, \alpha + \ell]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} F(y_2) - F(y_1) &= \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt + F(x_2) - F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\ &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1+\tau}^{x_2+\tau} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\ &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \left(f(t+\tau) - f(t)\right) dt \\ &\geq F(x_2) - F(x_1) - d\frac{\varepsilon}{6d} \\ &\geq M - \frac{\varepsilon}{6} - m - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} \\ &= M - m - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$F(y_2) - M > F(y_1) - m - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme on a,

$$F(y_2) - M < 0 \text{ et } F(y_1) - m > 0$$

alors,

$$m + \frac{\varepsilon}{2} > F(y_1) \text{ et } F(y_2) - M > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons à présent $\eta \in E(\varepsilon, F)$, fixons un réel x, on peut trouver $y_1 \in [x, x+\ell]$ tel que

$$F(y_1) < m - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
F(x+\eta) - F(x) &= F(y_1+\eta) - F(y_1) + \int_x^{x+\eta} f(t)dt - \int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
&= F(y_1+\eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{x+\eta} f(t)dt - \int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
&= F(y_1+\eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt - \int_{x+\eta}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
&= F(y_1+\eta) - F(y_1) + \int_x^{y_1} f(t)dt - \int_x^{y_1} f(t+\eta)dt \\
&> -\left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right) + m - \left| \int_x^{y_1} (f(u+\eta) - f(u))du \right| \\
&> -\frac{\varepsilon}{2} - \ell \frac{\varepsilon}{2\ell} \\
&= -\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc,

$$|F(x+\eta) - F(x)| \leq \varepsilon.$$

d'où le résultat. ■

Remarque 2.1.1 *Le résultat du théorème précédent n'est pas valable dans le cas des fonctions à valeurs dans un espace de* ***Banach*** *quelconque.*

Théorème 2.1.2 *Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et F une primitive de f. L'une des conditions suivantes assure que les primitives soient presque périodiques.*

1. *L'image de F est* ***relativement compact****.*

*2. F est bornée et $\mathbb{X}$ est **uniformément convexe**.*

Preuve. Voir [1]. ■

2.2 Equations différentielles linéaires ordinaires

Dans cette section on s'intéresse à l'existence de solutions presque périodiques d'un système différentiel linéaire ordinaire

$$\dot{y} = Ay + f$$

où

$$f = (f_i) = (f_1, ..., f_n)^t$$

telles que les composantes $f_i \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carré à coefficients complexes et $y = (y_1, ..., y_n)^t$ une fonction inconnue.

Le système précédent peut s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x), \ i \in \{1, ..., n\} \tag{2.2.1}$$

Définition 2.2.1 *Une solution du système (2.2.1) est dite presque périodiques (resp. bornée) si toutes ses composantes sont presque périodiques (resp. bornées).*

2.3 Solutions presque périodiques d'une équation différentielle scalaire

Théorème 2.3.1 *Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors toute solution bornée de l'équation différentielle*

$$y' = \lambda y + f \tag{2.3.1}$$

où λ est un nombre complexe quelconque, est presque périodique.

Preuve. En résolvant l'équation homogène

$$y' - \lambda y = 0,$$

on trouve que les solutions sont sous la forme

$$y(x) = C\exp(\lambda x),\ C \in \mathbb{C}.$$

Pour chercher une solution particulière de l'équation non homogène, nous supposons que C est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$, et appliquons la méthode de la variation de la constante.

Posons

$$y(x) = C(x)\exp(\lambda x).$$

On dérive y et on le remplace dans l'équation (2.3.1), on obtient

$$C'(x)\exp(\lambda x) + \lambda C(x)\exp(\lambda x) = \lambda C(x)\exp(\lambda x) + f(x),$$

c'est-à-dire que,

$$C'(x) = f(x)\exp(-\lambda x).$$

On intègre par rapport à x, on trouve

$$C(x) = \int_0^x \exp(-\lambda s)f(s)ds + K,\ K \in \mathbb{C}.$$

On en déduit que la solution générale de (2.3.1) est donnée par

$$y(x) = \exp(\lambda x)\left(K + \int_0^x \exp(-\lambda s)f(s)ds\right).$$

Pour étudier la bornitude de ces solutions, on va distinguer trois cas :

On pose $\lambda = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Premier cas : a > 0

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} |\exp \lambda x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(ax) = +\infty$, alors pour que la solution y soit bornée au voisinage de $(+\infty)$, on doit avoir

$$\lim_{x\to+\infty}(K + \int_0^x \exp(-\lambda s)f(s)ds) = 0.$$

C'est-à-dire que,

$$K = -\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds.$$

Par hypothèse $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors d'après les propriétés des fonctions presque périodiques, f est bornée.

Notons $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, alors

$$0 \leq |\exp(-\lambda s) f(s)| \leq M \exp(-as) |\exp(-ibs)| \leq M \exp(-as).$$

C'est-à-dire que, l'intégrale $\left[-\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds \right]$ existe et finie.

La solution y s'écrit alors

$$y(x) = \exp(\lambda x)(-\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds + \int_0^{x} \exp(-\lambda s) f(s) ds.$$

D'après la relation de Chasles, on obtient

$$y(x) = -\exp(\lambda x) \int_x^{+\infty} \exp(-\lambda s) f(s) ds.$$

D'où

$$y(x) = -\int_x^{+\infty} \exp(-\lambda(s - x)) f(s) ds.$$

On fait le changement de variable en posant $u = s - x$, on obtient

$$y(x) = -\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda u) f(u + x) du.$$

Il est clair que y est bornée, en effet puisque f est bornée on a

$$|\exp(-\lambda u) f(u + x)| \leq M |\exp(-ibu)| \exp(-au) \leq M \exp(-au).$$

D'où

$$\begin{aligned} |y(x)| &= \left| -\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda u) f(u + x) du \right| \leq M \int_0^{+\infty} \exp(-au) du \\ &\leq \frac{M}{a}. \end{aligned}$$

Maintenant on vérifie que la solution de l'équation (2.3.1) est bien presque périodique.

Comme la fonction f est presque périodique, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\ell_{a\varepsilon} > 0$ tel que tout intervalle de longueur $\ell_{a\varepsilon}$ contient au moins un nombre positif T satisfaisant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq a\varepsilon, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|y(x+T) - y(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda u)\left[f(u+x+T) - f(u+x)\right] du \right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \exp(-au)\left|f(u+x+T) - f(u+x)\right| du \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \int_0^{+\infty} \exp(-au) du \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \frac{1}{a} \\
&\leq a\varepsilon \frac{1}{a} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la solution y est une fonction presque périodique.

Deuxième cas : $\mathbf{a < 0}$

On procède de la même manière, cette fois-ci en considérant le fait que

$$\lim_{x\to-\infty} |\exp(\lambda x)| = \lim_{x\to-\infty} \exp(ax) = +\infty.$$

Troisième cas : $\mathbf{a = 0}$

On a donc que $\lambda = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors la solution y est de la forme

$$y(x) = \exp(ibx)(K + \int_0^x \exp(-ibs) f(s)) ds.$$

Si on suppose que y est bornée alors on aura nécessairement

$$x \mapsto \int_0^x \exp(-ibs) f(s) ds$$

est aussi bornée.

Puisque

$$s \mapsto \exp(-ibs)f(s)$$

est presque périodique en tant que produit de deux fonctions presque périodiques, on en déduit que

$$x \mapsto \int_0^x \exp(-ibs)f(s)ds$$

est une primitive d'une fonction presque périodique.

Ceci entraîne que

$$x \mapsto \int_0^x \exp(-ibs)f(s)ds$$

est presque périodique, donc y l'est aussi.

Ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 2.3.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de A sur sa diagonale telles que*

$$A = P^{-1}TP.$$

Preuve. Toute matrice carrée est triangularisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Voir [8]. ■

2.4 Solutions presque périodiques d'un système d'équations différentielles

Théorème 2.4.1 *Si les fonctions f_i, $i = 1, 2, ..., n$, sont presque périodiques, alors toute solution bornée sur $\mathbb{R}$ du système* 2.2.1 *est presque périodique.*

Preuve. D'abord, montrons que le résultat est vrai pour les matrices triangulaires supérieures, pour cela on se donne une solution bornée y du système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}y_j + f_i(x), i \in \{1, ..., n\}$$

où $T = (t_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ est une matrice telle que $t_{ij} \in \mathbb{C}$ avec $t_{ij} = 0$ si $i > j$ et les fonctions f_i sont à valeurs complexes.

On peut faire une récurrence sur l'ordre de la matrice T, le théorème précédent assure le résultat pour une matrice d'ordre 1, alors supposons le vrai pour les matrices de taille n, et montrons le pour les matrices de taille $(n+1)$, c'est-à-dire montrons que le résultat est vrai pour le système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{ij}y_j + f_i(x), i \in \{1, ..., n+1\} \tag{2.4.1}$$

On considère $y = (y_1, ..., y_{n+1})^t$ une solution bornée de (2.4.1). La dernière équation est

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = t_{n+1,n+1}y_{n+1}(x) + f_{n+1}(x).$$

Et le théorème précédent assure que y_{n+1} est presque périodique. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, donc le résultat est vrai pour les matrices de taille $n+1$, et par conséquent il est vrai pour les matrices de taille n. Ce qui achève la démonstration du théorème pour les matrices triangulaires supérieures.

Revenons maintenant au cas général, d'après le Théorème 2.3.1 il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure contenant les valeurs propres de A sur sa diagonale telles que

$$A = P^{-1}TP.$$

Soit y une solution bornée de 2.2.1, alors on a en multipliant à gauche par P que

$$\frac{dPy}{dx} = TPy + Pf$$

où $y = (y_1, ..., y_n)^t$ et $f = (f_1, ..., f_n)^t$, on pose $z = Py$ et $g = Pf$, on aura

$$\frac{dz}{dx} = Tz + g.$$

Les composantes de g sont toutes presque périodiques en tant que combinaisons linéaires à coefficients constants de fonctions presque périodiques.

Puisque y est bornée alors $z = Py$ est bornée, et d'après le théorème précédent z est presque périodique.

Les composantes du vecteur y étant des combinaisons linéaires à coefficients constants de composantes de z, on en déduit alors que les composantes de y sont presque périodiques, et par conséquent la solution y est presque périodique. ■

Remarque 2.4.1 *Ce théorème ne garantit pas l'existence d'une solution bornée, alors la question qui se pose est : quelles conditions sur la matrice A doit-on imposer pour avoir une solution bornée ? C'est le théorème suivant qui répond à la question.*

Théorème 2.4.2 *Si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ la fonction f_i est presque périodique et si A ne possède aucune valeur propre à partie réelle nulle alors le système* 2.2.1 *admet une unique solution bornée presque périodique.*

Preuve. On a vu dans la démonstration du théorème (2.4.1) que le système

$$Y' = AY + f$$

se ramène à un système

$$Z' = TZ + g.$$

Chaque équation de ce système est de la forme

$$z_i' = \lambda_i z_i + g_i.$$

Puisque, par hypothèse la matrice A ne possède aucune valeur propre à partie réelle nulle, alors deux cas peuvent se présenter. ($\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, ou $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$).

D'après le théorème (2.3.1), les z_i sont déterminés de manière unique, car la constante qui résulte de la résolution de l'équation a été fixée de sorte que la solution soit bornée.

Ainsi si on imite la preuve du théorème (2.4.1) par récurrence sur l'ordre de la matrice A, on trouve que chaque y_i est bornée.

Alors l'unique solution Y est presque périodique. ■

2.5 Applications

Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + 8y_2(t) + \exp(it) \\ \dot{y}_2(t) = 2y_1(t) + y_2(t) + \exp(i\sqrt{2}t) \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Il est clair que les deux fonctions $t \longmapsto \exp(it)$ et $t \longmapsto \exp(i\sqrt{2}t)$ sont presque périodiques. Le système (2.5.1) s'écrit aussi sous la forme matricielle

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + f(t),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } f(t) = \begin{pmatrix} \exp(it) \\ \exp(i\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \text{ et } Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

On résout d'abord le système homogène associé

$$\dot{Y}(t) = AY(t).$$

Les valeurs propres de A sont -3 associé au vecteur propre $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et 5 associé au vecteur propre $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

ou $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base formée des vecteurs propres.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Posons

$$X(t) = P^{-1}Y(t),$$

c'est-à-dire que

$$Y(t) = PX(t).$$

On voit que $Y(t)$ est solution du système homogène si et seulement si

$$\dot{X}(t) = DX(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X(t).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= AY(t) = \left(PDP^{-1}\right) PX(t) \qquad (2.5.2) \\ &= PDX(t). \end{aligned}$$

Comme
$$Y(t) = PX(t),$$
alors,
$$\dot{Y}(t) = P\dot{X}(t). \tag{2.5.3}$$
Les égalités (2.5.2) et (2.5.3) impliquent que
$$\dot{X}(t) = DX(t),$$
ou encore
$$X(t) = \begin{pmatrix} a\exp(-3t) \\ b\exp(5t) \end{pmatrix}.$$
Avec $a, b \in \mathbb{R}$. Donc
$$Y(t) = PX(t) = P\begin{pmatrix} a\exp(-3t) \\ b\exp(5t) \end{pmatrix} = a\exp(-3t)U + b\exp(5t)V.$$
On cherche maintenant une solution du système non homogène (2.5.1) sous la forme
$$Y(t) = a(t)\exp(-3t)U + b(t)\exp(5t)V.$$
avec $a, b \in C^1(\mathbb{R})$, on a alors, en appliquant la méthode de la variation de la constante
$$\dot{Y}(t) = a'(t)\exp(-3t)U + b'(t)\exp(5t)V - 3a(t)\exp(-3t)U + 5b(t)\exp(5t)V.$$
Puisque
$$AY(t) = \begin{pmatrix} 6a(t)\exp(-3t) + 10b(t)\exp(5t) \\ -3a(t)\exp(-3t) + 5b(t)\exp(5t) \end{pmatrix} = -3a(t)\exp(-3t)U + 5b(t)\exp(5t)V$$
alors,
$$\dot{Y}(t) = a'(t)\exp(-3t)U + b'(t)\exp(5t)V + AY(t).$$
Donc Y est solution de (2.5.1) si et seulement si
$$a'(t)\exp(-3t)U + b'(t)\exp(5t)V = f(t).$$

Ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} -2a'(t)\exp(-3t) + 2b'(t)\exp(5t) = \exp(it) \\ a'(t)\exp(-3t) + b'(t)\exp(5t) = \exp(i\sqrt{2}t) \end{cases}.$$

On résout ce système et on trouve $a'(t)$ et $b'(t)$, puis en intégrant, on trouve

$$\begin{cases} a(t) = \frac{\exp(\sqrt{2}i+3)t}{2(\sqrt{2}i+3)} - \frac{\exp(i+3)t}{4(i+3)} + c_1 \\ b(t) = \frac{\exp(i-5)t}{4(i-5)} + \frac{\exp(\sqrt{2}i-5)t}{2(\sqrt{2}i-5)} + c_2 \end{cases}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Finalement la solution du système est

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left(\frac{\exp(\sqrt{2}i+3)t}{2(\sqrt{2}i+3)} - \frac{\exp(i+3)t}{4(i+3)} + c_1\right)\exp(-3t)U \\ &\quad + \left(\frac{\exp(i-5)t}{4(i-5)} + \frac{\exp(\sqrt{2}i-5)t}{2(\sqrt{2}i-5)} + c_2\right)\exp(5t)V \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}i-5} - \frac{1}{\sqrt{2}i+3}\right)\exp(\sqrt{2}it) + \left(\frac{1}{2(i-5)} - \frac{1}{2(i+3)}\right)\exp(it) \\ \left(\frac{1}{2(\sqrt{2}i+3)} + \frac{1}{2(\sqrt{2}i-5)}\right)\exp(\sqrt{2}it) + \left(\frac{1}{4(i-5)} - \frac{1}{4(i-3)}\right)\exp(it) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-8}{17+2\sqrt{2}i}\exp(\sqrt{2}it) + \frac{-4}{16+2i}\exp(it) \\ \frac{1-\sqrt{2}i}{17+2\sqrt{2}i}\exp(\sqrt{2}it) + \frac{1}{28-16i}\exp(it) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution $Y(t)$ du système (2.5.1) est bornée car ses composantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont bornées.

En effet,

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &= \left|\frac{-8}{17+2\sqrt{2}i}\exp(\sqrt{2}it) + \frac{-4}{16+2i}\exp(it)\right| \\ &\leq \frac{8}{\sqrt{297}}\left|\exp(\sqrt{2}it)\right| + \frac{2}{\sqrt{65}}|\exp(it)| \\ &\leq \frac{8}{\sqrt{297}} + \frac{2}{\sqrt{65}} = M_1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|y_2(t)| &= \left| \frac{1-\sqrt{2}i}{17+2\sqrt{2}i} \exp(\sqrt{2}it) + \frac{1}{28-16i} \exp(it) \right| \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{297}} \left| \exp(\sqrt{2}it) \right| + \frac{1}{4\sqrt{65}} \left| \exp(it) \right| \\
&\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{297}} + \frac{1}{4\sqrt{65}} = M_2.
\end{aligned}$$

Alors d'après le théorème (2.4.1) la solution du système (2.5.1) est presque périodique.

D'autre part, comme la matrice A ne possède aucune valeur propre à partie réelle nulle, alors d'après le théorème (2.4.2) cette solution est l'unique solution bornée et presque périodique.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les différentes définitions des fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach. Ainsi que leurs propriétés fondamentales.

Une attention particulière a été accordée à la presque périodicité des solutions du système différentiel

$$\dot{Y} = AY + f$$

où $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et A une matrice à coefficients constants.

Nous avons aussi construit un exemple illustratif des théorèmes démontrés.

Pour conclure, nous donnons quelques suggestions et développements possibles en vue d'améliorer et d'étendre notre étude. Ces développements concernent essentiellement les points suivants :

1. Etude des solutions presque périodiques des équations différentielles non linéaires.

2. Des études récentes sont effectuées sur les solutions presque périodiques au sens de **Stepanov** et au sens de **Besicovitch** des équations différentielles ordinaires. Il serait donc intéressant de regarder de près cette périodicité définie dans le cadre des espaces de **Lebesgue,** qui considère des fonctions qui ne sont pas nécessairement continues.

Finalement, nous estimons que la théorie des fonctions presque périodiques est un domaine très intéressant et trouve beaucoup d'applications et comme il est d'actualité beaucoup de questions sont encore posées.

Annexe

Suite de Cauchy

Définition 2.5.1 *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé, on dit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q \geq n$ on a*

$$\|x_p - x_q\|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

Espace complet

Définition 2.5.2 *On dit que $\mathbb{E}$ est un espace complet si toute suite de Cauchy de $\mathbb{E}$ est convergente dans $\mathbb{E}$.*

Espace de Banach

Définition 2.5.3 *Un espace de **Banach** est un espace vectoriel normé complet.*

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach muni de sa norme $\|.\|_{\mathbb{X}}$.

Espace pré-compact

Définition 2.5.4 *On dit que $A \subset \mathbb{X}$ est un espace pré-compact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε dans $\mathbb{X}$ telles que leur réunion couvre l'ensemble A. C'est à dire que*

$$A = \bigcup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon).$$

Recouvrement d'ouverts

Définition 2.5.5 *On dit qu'une famille d'ouverts* $(\theta_i)_{i\in I}$ *de* $\mathbb{X}$ *constitue un recouvrement d'ouvert de* $\mathbb{X}$ *si*

$$\mathbb{X} = \underset{i\in I}{\cup} \theta_i.$$

Espace compact

Définition 2.5.6 *On dit que l'espace de Banach* $\mathbb{X}$ *est compacte si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous recouvrement fini, c'est à dire* $\forall(\theta_i)_{i\in I}$ *une famille d'ouverts de* $\mathbb{X}(ie : \mathbb{X} = (\cup\theta_i)_{i\in I})$,*il existe* $I_0 \subset I$ $(I_0 finie)$ *tel que*

$$\mathbb{X} = (\cup\theta_i)_{i\in I_0}.$$

La densité

Définition 2.5.7 *On dit qu'une partie* A *de* $\mathbb{X}$ *est dense dans* $\mathbb{X}$ *si pour tout élément* x *de* $\mathbb{X}$, *il existe une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* A *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Exemple 2.5.1 *Pour* $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, *dire que la partie* A *est dense dans* $\mathbb{R}$ *équivaut à dire*

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, \ \exists a \in A \text{ tel que } x < a < y.$$

Proposition 2.5.1 .

1. *Pour tout réel* θ, $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si,* $\theta \in \mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$.
2. *L'ensemble* $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{x + \theta x, \ \forall x \in \mathbb{Z}\}$ *est un sous groupe additif de* $\mathbb{R}$.

Ensemble borné

Définition 2.5.8 *On dit que* $\mathbb{X}$ *est borné, s'il existe* $C > 0$ *tel que* $\|\varphi\|_{\mathbb{X}} \leq C$, $\forall\varphi \in \mathbb{X}$.

La continuité

Définition 2.5.9 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est continue si f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$.*

f est continue en x si

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

C'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

La continuité uniforme

Définition 2.5.10 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$|x - y| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Fonctions Lipschitziennes

Définition 2.5.11 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction, on dit que f est Lipschitzienne de rapport k s'il existe un réel k tel que*

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{X}} \leq k\,|x - y|\,, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.5.1 *Si $k \in \,]0, 1[$, on dit que f est **contractante**.*

Théorème 2.5.1 ***(HEINE)***

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.

Fonction dérivable

Définition 2.5.12 *On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable au point x_0 si la limite suivante existe et finie*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell = f'(x).$$

L'espace $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$

Définition 2.5.13 *Soit $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|_{\mathbb{X}}\, dx < +\infty.$$

Produit de convolution

Définition 2.5.14 *On dit que f et g sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$y \mapsto f(x-y)g(y)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Si f et g sont convolables, on définit le produit de convolution (ou la convolée) de f et g par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

qui vérifie la propriété suivante :

$$f * g = g * f.$$

Proposition 2.5.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution $f * g$ est intégrable et*

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Fonctions bornées

Définition 2.5.15 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\|f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq M,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Borne supérieure

Définition 2.5.16 *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ensemble majoré avec $U \neq \emptyset$. On dit que M est la borne supérieure de U si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in U$ tel que*

$$M - \varepsilon < x_0 \leq M.$$

Borne inférieure

Définition 2.5.17 *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ensemble minoré avec $U \neq \emptyset$. On dit que m est la borne inférieure de U si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in U$ tel que*

$$m \leq x_0 < m + \varepsilon.$$

Convergence uniforme

Définition 2.5.18 *On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq N$ on a*

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.5.2 ***(GOTTSCHALK)***

Quels que soient les nombres réels $t, a_1, ..., a_k$, non nuls et $\delta > 0$, il existe un ensemble relativement dense D de nombres entiers tel que $n \in D$ entraîne l'existence des entiers $m_1, ..., m_k$ pour lesquels on a :

$$|nt - m_i a_i| < \delta, \ \forall i = 1...k \tag{2.5.4}$$

Définition 2.5.19 *l'application*

$$\begin{array}{rccc} \|.\| : & \mathbb{X} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

définie une norme si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pout tout réel λ.

3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (**Inégalité triangulaire**)

Définition 2.5.20 *l'application*

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{X} \times \mathbb{X} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

est une distance si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, $d(x,y) = d(y,x)$. (**la symétrie**)

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. (**Inégalité triangulaire**)

La compacité relative

Définition 2.5.21 *Un ensemble $A \subset \mathbb{X}$ est dit **relativement compact** si son adhérence est compact dans $\mathbb{X}$, c'est à dire si pour toute suite borné dans A, on peut extraire une sous suite convergente dans A.*

*Mais dans un espace de **Banach** la compacité relative coïncide avec la **précompacité**, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε dans $\mathbb{X}$, tel que la réunion couvre A.*

La convexité uniforme

Définition 2.5.22 *On dit qu'un espace de Banach $\mathbb{X}$ est **uniformément convexe** si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

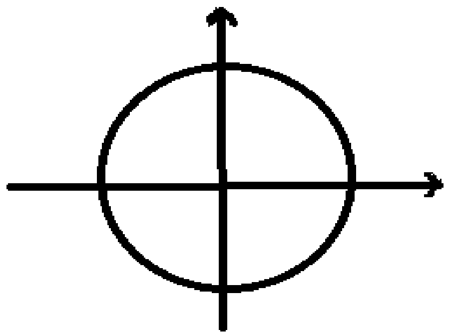
$$(x, y \in \mathbb{X},\ \ \|x\| \leq 1,\ \ \|y\| \leq 1 \ \ et\ \ \|x - y\| > \varepsilon) \Longrightarrow \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \right).$$

Exemple 2.5.2 *Pour $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$. La norme $\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est uniformément convexe tandis que la norme*

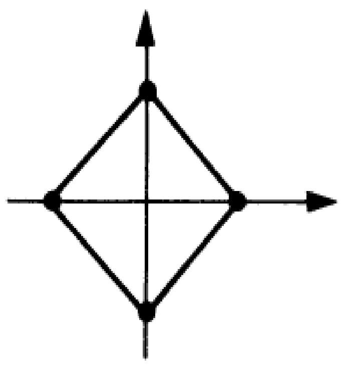
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

n'est pas uniformément convexe.

On peut s'en convaincre en regardant les images des boules unités :



Boule unité de E pour la norme $\|.\|_2$



Boule unité de E pour la norme $\|.\|_1$

Relation de CHASLES

Définition 2.5.23 *Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a < b < c$, supposons que f est intégrable au sens de* ***Riemann*** *sur chacun des intervalles $[a, b]$ $[b, c]$ et $[a, c]$.*

Dans ce cas on a

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

Ensemble fermé

Définition 2.5.24 *On dit que $A \subset \mathbb{X}$ est un fermé si $\forall \left(x_n\right)_{n \in N} \subset A$ tel que x_n converge vers x alors $x \in A$.*

Matrice triangulaire supérieure

Définition 2.5.25 *Les matrices triangulaires supérieures sont de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & ... & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

elles sont caractérisées par : pour tout $i > j$, $a_{ij} = 0$.

Le cas des matrices triangulaires inférieures se traitant de la même manière.

Définition 2.5.26 *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est dite inversible si et seulement s'il existe N tel que*

$$MN = NM = I$$

où I est la matrice identité. On note alors

$$N = M^{-1}.$$

Bibliographie

[1] L. Amerio and G. Prouse, *Almost Periodic Functions and Functional equations*, Van, Nostrand Reinhold, New York, 1971.

[2] J. Andres, A. M. Bersani, and *Grande R. F. Hierarchy of almost periodic function spaces*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, 2006.

[3] A. S. Besicovitch, *Sur quelques points de la théorie des fonctions presque périodiques*, C.R, Acad . Sci . Paris, 1925.

[4] A . S. Besicovitch, *Almost périodic functions*, Cambridge Univ. Press, London, 1932.

[5] S. Bochner, *Abstrake Fast Periodische Funktionen*, Acta Mathematica, 1933.

[6] H. Bohr, *Almost periodic functions*, Chelsea, New York, 1956.

[7] H. Bohr, *Zur theorie der fast periodischen Funktionen* , I. Eine Verallgemeinerung der theorie der Fourierreihen, Acta Math, 1925.

[8] R. Boles Basit, *Connection between the almost periodic functions of Levitan and almost automorphic functions*, Vestnik Moskovskogo Uni, Russian, 1971.

[9] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[10] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Wiley, New York, 1968.

[11] C. Corduneau, *Almost periodic oscillations and Waves*, Springer 2009.

[12] T. Diagana, G.M. N'guerekata and Nguyen Van Minh, *Almost Automorphic Solutions of Evolution Equations,* Proc. Amerc. Math. Soc, 2004.

[13] A. M.Fink, *Almost periodic differential equations,* Lecture Notes Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[14] C. De la Vallée Poussin, *Sur les fonctions presque périodiques de H.Bohr*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1927.

[15] H. D. Ursel, *Parseval's theorem for almost -periodic functions*, Proc. London Math. Soc, 1931.

[16] N. Wiener, *On the representation of functions by trigonometric integrals*, Math. Zeitschr, 1925.

[17] T. Yoshizawa, *Stability Theorie and the Existence of Periodic Solution and Almost Periodic Solution*, Applied Math. Science 14, Springer-verlag, New york, 1925.

[18] L. Ahmed, *Contribution à l'étude de modéles autorégressifs $AR(1)$ à coefficient périodiques et presque périodiques*, Tizi ou*zou,* 2012.