MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ Abderrahmane Mira - Bejaia

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Département de Mathématiques

Mémoire

présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Thème

Sur la théorie du point fixe dans les espaces métriques et applications

par

Djabri Houssem - Eddin

Haddadi Sofiane

devant le jury composé de :

M^{r}	A. Berboucha	M.C.A	U. Bejaia	Président
M^{me}	S. Allili-Zahar	M.C.B	U. Bejaia	Examinatrice
M^{me}	K. Kheloufi-Mebarki	M.C.A	U. Bejaia	Promotrice

Promotion Juin 2015.

Remerciements

Nous remercions DIEU tout puissant de nous avoir donné la foie, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin de bonnes personnes et nous a confié à de bonnes mains.

Nous tenons d'abord à exprimer nos plus vifs remerciements à Mme Karima Kheloufi qui a supervisé avec enthousiasme ce travail dans toutes ses étapes et a collaboré de manière importante à la réalisation.

Nous remercions Mlle Y. Djabri pour son aide et ses conseils qui nous ont été d'une grande utilité et qui nous a prêté assistance en programmation LaTeX.

Nous adressons aussi nos remerciments à Mme S. Allili et à monsieur A. Berboucha pour avoir accepté d'être membres du jury.

Nous témoignons toute notre gratitude à tout les membres du département de Mathématiques et spécialement aux enseignants qui ont contribué à notre formation et qui nous ont permis de travailler dans de bones conditions.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs, affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes chers soeurs: Yousra et Naila.

Tous mes enseignants.

Mes très chers grands-parents.

Ma chère grande famille: mes oncles et mes tantes, mes cousins et mes cousines.

Tous mes amis.

Houssem-eddine

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

A la mémoire de mon père pour son sacrifice, et à la mémoire de ma grande mère, que dieu les accueille dans son vaste paradis.

A ma chère mère pour son affection et son dévouement, que dieu la protège.

A mes frères et seours

Tous mes enseignants.

Et enfin à tous ceux qui m'aiment

Sofiane

Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités sur les espaces métriques **3**

1.1 Distances 3

1.2 Ouverts, fermés, adhérence, voisinages 6

1.3 Espaces complets 9

2 Théorèmes du point fixe pour des applications contractantes **13**

2.1 Principe de contraction de Banach 13

2.2 La version locale du théorème de Banach 17

2.3 Théorème du point fixe pour une application dont une itérée est contractante 19

2.4 Théorème du point fixe de Edelstein 20

2.5 Théorèmes du point fixe pour des contractions non linéaires 24

2.6 Théorèmes du point fixe pour des applications non-expansives 25

2.7 Alternative non linéaire de Leray–Schauder pour des applications contractantes 30

3 Applications **33**

3.1 Application sur le principe de contraction de Banach 33

3.1.1 Equation intégrale de Fredholm 33

3.1.2 Théorème de Stampacchia 34

3.1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz global 38

3.1.4 Méthode de Newton-Raphson 39

3.2 Application sur le théorème pour une application dont une iterée est contractante 42

3.2.1 Equation intégrale de Voltera 42

3.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local 44
3.3 Application sur le théorème du point fixe pour les applications non-expansives 47
3.4 Application sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour les applications contractantes 48
3.4.1 Problème de Dirichlet homogène d'ordre deux 48

Conclusion **51**

Bibliographie **52**

Introduction

L'objectif de ce mémoire est l'étude de quelques théorèmes du point fixe dans des espaces métriques. En analyse, un théorème du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer que l'équation $f(x) = x$ admet des solutions sous certaines conditions sur l'application f. Il est à noter que la théorie du point fixe est fondamentale en mathématiques. En effet, la résolution de plusieurs problèmes mathématiques se ramène souvent à la recherche de point fixe pour certaines applications non linéaires. De plus, plusieurs problèmes intervenant en physique, chimie et en biologie sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles ou d'équations intégrales. Ces systèmes peuvent s'écrire sous forme d'équations abstraites $f(x) = x$ où l'application f est définie d'un ensemble E dans lui même; d'où l'importance de l'étude et du développement de la théorie du point fixe. Le célèbre théorème du point fixe de Banach (principe de contraction de Banach) dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème fournit aussi un algorithme d'approximation de ce point fixe comme limite d'une suite itérée, contrairement à d'autres théorèmes du point fixe (Brouwer, Schauder,...), qui nous assurent seulement l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer. Mais d'une part, montrer que l'application est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur l'application et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer ce théorème. D'où la nécessité d'étendre et de généraliser le principe de contraction de Banach afin d'élargir son domaine d'applications, d'une part, et de récupérer ses avantages, d'autre part.

Ce mémoire comprend trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions mathématiques de base nécessaires pour la suite de cette étude. Dans le deuxième chapitre, on présente quelques théorèmes du point fixe. Comme le théorème du point fixe le plus simple et le plus utilisé dans la littérature concerne les applications contractantes, on commence par discuter le principe de contraction de Banach. Une version locale ainsi que plusieurs généralisations de ce théorème sont présentées dans ce chapitre. Il est inévitable que toute discussion sur les applications contractantes (k-Lipschitzienne, $k \in [0, 1[$) conduise naturellement aux applications non-expansives (1-Lipschitzienne), ce qui explique pourquoi nous avons choisi de parler de cette classe d'applications. Le théorème de Schauder pour les applications non-expansives ainsi que le théorème de Browder et Gohde sont présentés. Le chapitre se termine par présenter l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour les applications contractantes, après avoir montré que la propriété d'existence du point fixe est invariante par homotopie pour cette classe d'applications. Dans le troisième chapitre, plusieurs résultats connus, en analyse, ont été démontrés en faisant appel aux théorèmes du point fixe étudiés dans le chapitre précédent. Ces résultats concernent principalement, le théorème de Cauchy-Lipschitz, le théorème de Stampacchia, ainsi que quelques types d'équations intégrales.

CHAPITRE 1

Généralités sur les espaces métriques

1.1 Distances

Définition 1.1.1 (Espace métrique) *Un espace métrique (X, d) est un ensemble X muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés qui suivent :*

$\forall\ x,\ y \in X : d(x,y) \geq 0$ *et* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$\forall\ x,\ y \in X : d(x,y) = d(y,x)$ *(la symétrie).*

$\forall\ x,\ y,\ z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.1 .

1. *Sur $\mathbb{R}^n$ on peut considérer les distances suivantes :*

   $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$

   $d_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

   $d_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

2. *Sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$. On peut definir la distance :*

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t \in [0,1]} \{|f(t) - g(t)|\}.$$

3. *On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque X, posant pour $x,\ y \in X$*

   $d(x,y) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x = y \\ 1 \ \text{si } x \neq y \end{cases}$ *on l'appelle métrique discrète.*

4. ***Métrique induite.*** *Si* (X,d) *est un espace métrique et* A *un sous-ensemble de* X *la restriction :* $d|_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}$ *définit une distance sur* A*. Par conséquent, tout sous-ensemble d'un espace métrique constitue un espace métrique.*

5. ***Métrique produit.*** *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, on peut définir une métrique sur* $X\times Y$ *par :* $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X\times Y$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Distances équivalentes

Pour comparer les structures topologiques définies par deux métriques différentes, on introduit la notion d'équivalence entre deux distances.

Définition 1.1.2 (Métriques équivalentes) *Soient* d_1 *et* d_2 *deux métriques sur l'ensemble* X*. On dira qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes* k_1, $k_2 > 0$ *telles que pour tout* $(x, y) \in X \times X$ *on a* $k_1\ d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq k_2\ d_1(x, y)$.

Exemple 1.1.2 .

1. *Sur* $\mathbb{R}^n$*, les distances* d_1*,* d_2 *et* d_∞ *sont deux à deux équivalentes.*

2. *Sur* $C([0, 1], \mathbb{R})$*, les distances* d_1*,* d_2 *et* d_∞ *ne sont pas équivalentes.*

Espaces vectoriels normés

C'est une classe importante d'espaces métriques, dont les espaces euclidiens sont le modèle de base. En générale, un espace vectoriel normé est un espace vectoriel sur lequel il existe une métrique compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Définition 1.1.3 (Espace vectoriel normé) *Un espace* $(E, \|.\|)$ *est dit espace vectoriel normé sur le corps* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *s'il est muni d'une application* $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ *qui vérifie*

1. $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$ *et* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. $\forall \lambda \in \Bbbk$, $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *où* $|\lambda|$ *désigne respectivement la valeur absolue si* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *ou le module si* $\Bbbk = \mathbb{C}$.

3. $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.3 *Si* $(E, \| \ . \ \|)$ *est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par :* $d_{\| \ . \ \|}(x,y) = \|x - y\|$.

1. *Sur* $\mathbb{R}^n$, *on peut définir plusieurs normes*

   $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ *la norme euclidienne,*

   $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$,

   $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

2. *L'espace vectoriel* $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *peut être muni des normes :*

   $\|f\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$

   $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(t)| \, dt$

   $\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 (f(t))^2 \, dt}$

3. *Sur l'espace des suites numériques bornées (à valeur dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*), on peut définir la norme* $\|u\| = \sup\limits_{n \geq 0} |u_n|$.

4. ***Norme produit****. Si* $(E, \| \ . \ \|_E)$ *et* $(F, \| \ . \ \|_F)$*sont deux espaces normés, on peut définir une norme sur l'espace vectoriel* $E \times F$ *par :*

$$\forall (x,y) \in E \times F, \ \ \|(x,y)\| = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Définition 1.1.4 *Soit* E *un espace vectoriel normé. Deux normes* $\| \ . \ \|_1$ *et* $\| \ . \ \|_2$ *de* E *sont dites équivalentes s'il existe* c_1, $c_2 > 0$ *tels que, pour tout* $x \in E$:

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 .$$

Remarque 1.1.1 .

a. *Sur* $\mathbb{R}^n$, *les normes* $\| \ . \ \|_1$, $\| \ . \ \|_2$ *et* $\| \ . \ \|_\infty$ *sont équivalentes.*

b. *Sur* $C([0,1], \mathbb{R})$, *les normes* $\| \ . \ \|_1$, $\| \ . \ \|_2$ *et* $\| \ . \ \|_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

c. *Deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes.*

1.2 Ouverts, fermés, adhérence, voisinages

Définition 1.2.1 (Boule) *Soit (X, d) un espace métrique, a un point de X et $r > 0$, on définit la boule (ouverte) de centre a et rayon r par :*

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

Définition 1.2.2 (Sous-ensemble ouvert) *Le sous ensemble U de l'espace métrique (X, d) est dit ouvert si*

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U.$$

Définition 1.2.3 (Sous-ensemble fermé) *Le sous ensemble F de l'espace métrique (X, d) est dit fermé si son complémentaire $C_X F$ est ouvert.*

Définition 1.2.4 (Adhérence d'un sous ensemble) *Soit $A \subset X$, un sous-ensemble de l'espace métrique X. On définit l'adhérence $\overline{A}$ de A par :*

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Proposition 1.2.1 .

1. *A est fermé $\iff A = \overline{A}$.*
2. *$\overline{A} = \left\{x \in X \,\middle|\, \exists \text{ une suite } (x_n)_n \subset A \text{ telle que } \lim_{n\to\infty} x_n = x\right\}$.*

Exemple 1.2.1 .

1. *L'adhérence du sous-ensemble $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ lui-même puisque tout nombre réel est limite de rationnels .*
2. *Soit $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$, alors $\overline{A} = A \cup \{0\}$.*
3. *L'adhérence de l'intervalle $]0, 1]$ dans l'espace $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ est l'intervalle $]0, 1]$ lui même (le point 0 est bien limite d'une suite dans $]0, 1]$, mais il n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$). Cela montre qu'il est important de savoir dans quel espace on travaille lorsqu'on considère les notions d'ouvert, fermé,etc...*
4. *Si $A \subset \mathbb{R}$ est borné, alors $\inf A, \sup A \in \overline{A}$.*

Définition 1.2.5 (Voisinages) *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $a \in X$. *On dit que* $V \subset X$ *est un voisinage de* a *dans* X *s'il existe un ouvert* $U \subset X$ *tel que* $a \in U \subset V$.

La proposition suivante montre qu'on peut exprimer la continuité sans faire appel a la notion de distance, mais seulement aux ouverts, fermés ou voisinages.

Proposition 1.2.2 *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques,* $f : X \to Y$ *une application et* $a \in X$. *Alors*

1. f *est continue au point* a $\iff$ $\forall\ V$ *voisinage de* $f(a)$ *dans* Y, $f^{-1}(V)$ *est un voisinage de* a *dans* X.

2. $f : X \to Y$ *est continue* $\iff$ $\forall V \subset Y$ *ouvert,* $f^{-1}(V)$ *est ouvert dans* X.

   $\iff$ $\forall F \subset Y$ *fermé,* $f^{-1}(F)$ *est fermé dans* X.

Définition 1.2.6 (Limite d'une suite) *Soit* (X, d) *un espace métrique.*

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \subset X$ *une suite de* X. *On dit que cette suite converge vers* $a \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon,$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, *ou encore* $x_n \to a$ *quand* $n \to +\infty$.

Remarquons que si cette limite existe, alors elle est unique. En effet, si on a l *et* l' *dans* X *tels que :* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ N_\varepsilon$ *tel que* $n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$ *et*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N'_\varepsilon \text{ tel que } n > N'_\varepsilon \Rightarrow d\left(x_n, l'\right) < \varepsilon$$

alors, pour $n \geq \sup\left\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\right\}$ *on a*

$$d\left(l, l'\right) \leq d(l, x_n) + d\left(x_n, l'\right) \leq 2\varepsilon,$$

et donc $d\left(l, l'\right) \leq 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. *D'où* $d\left(l, l'\right) = 0$, *et il en suit que* $l = l'$.

Définition 1.2.7 (Limite d'une application) *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques* $f : X \to Y$ *une application* $a \in X$ *et* $b \in Y$. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* b *lorsque* x *tend vers* a *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta_\varepsilon \text{ tel que } d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), b) < \varepsilon,$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *ou encore* $f(x) \to b$ *si* $x \to a$.

Définition 1.2.8 (Application continue) *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques* $f : X \to Y$ *une application et* $a \in X$*, on dit que* f *est continue au point* a *si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in X,\ d_X(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.9 (Application Lipschitzienne) *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. On dit que* f *est Lipschitzienne s'il existe* $k \geq 0$ *telle que :*

$$\forall x, y \in X,\ d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y). \tag{1.2.1}$$

- *Le plus petit réel* k *qui vérifie* (1.2.1)*est appelé constante de Lipschitz.*
- *Si* $k \in [0, 1[$*, l'application* f *est dite contractante.*
- *Si* $k = 1$*, l'application* f *est dite non-expansive.*

Définition 1.2.10 (Application contractive) *Soit* (X, d) *un espace métrique, l'application* $f : X \to X$ *est dite contractive si*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),\ \forall x, y \in X \text{ avec } x \neq y$$

Définition 1.2.11 (Application contractante non linéaire.) *Soit* (X, d) *un espace métrique. L'application* $f : X \to X$ *est dite contraction non linéaire s'il existe une fonction continue (croissante)* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tel que* $\varphi(r) < r\ \forall r \in \mathbb{R}_+^*$ *et*

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)),\ \forall x, y \in X \tag{1.2.2}$$

- *Si* $\varphi(r) = kr$*,* $0 \leq k < 1$*,* f *est une contraction.*
- *Si* $\varphi(r) = r$*,* f *est non-expansive.*
- *Si* $\varphi(r) = r$ *et l'inégalité dans (1.2.2) est stricte,* f *est contractive.*

Exemple 1.2.2 .

1. *L'homothétie dans un espace vectoriel normé* $x \mapsto kx$ *avec* $k \geq 0$ *est Lipschitzienne.*
2. *Plus généralement, le théorème des accroissements finis permet de montrer qu'une fonction dérivable de dérivée bornée en norme par* $k \geq 0$ *est Lipschitzienne, c'est par exemple le cas sur* $\mathbb{R}$ *de l'application* $x \mapsto \frac{1}{3}(x + \sin x)$ *avec* $k = \frac{2}{3}$.

1.3 Espaces complets

Définition 1.3.1 (Suite de Cauchy) *On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X,d) est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon > 0 \text{ tel que } n, m > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$d(x_n, x_m) \to 0, \text{ quand } n,\ m \to +\infty.$$

Remarque 1.3.1 *Toute suite qui converge est de Cauchy. En effet, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, cela veut dire que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_\varepsilon > 0 \text{ tel que } n > N_\varepsilon \ \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc

$$n, m > N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) \le d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par contre, il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas.

Définition 1.3.2 (Espace métrique complet) *L'espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

Remarque 1.3.2 *l'intérêt des espaces complet est de pouvoir y représenter ses éléments comme limites de suite de Cauchy. Par exemple, dans $\mathbb{R}$: $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ce qui définit parfaitement le nombre e.*

Exemple 1.3.1 .

1. *$\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes) est un espace complet.*
2. *$(C([0,1], \mathbb{R}), \|\ .\ \|_\infty)$ est un espace complet.*
3. *L'espace $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\ .\ \|_1)$ n'est pas complet. En effet, la suite de fonctions continues*
$$f_n(t) = \begin{cases} (2t)^n \ \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 \text{ si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$
est de Cauchy pour la norme $\|\ .\ \|_1$. Puisque :
$$\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\, dt = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(m+1)}\right| \to 0 \text{ quand } n,\ m \to \infty,$$

mais si f_n convergeait, sa limite f devrait être nulle dans $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, égale à 1 dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, c-à-d $f \notin \mathcal{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$.

4. *L'espace $(]-1,1[, |\ .\ |)$ n'est pas complet. En effet, la suite de Cauchy $\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 1 mais $1 \notin]-1,1[$.*

Théorème 1.3.1 *Soit X un ensemble. Alors l'espace $B(X, \mathbb{R}^p)$ des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}$, est complet, où $\|\ .\ \|_{\mathbb{R}^p}$ est l'une des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^p$.*

Preuve. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $B(X, \mathbb{R}^p)$. Pour tout $x \in X$ fixé, la suite des valeurs correspondantes : $\{f_n(x)\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$, et comme $\mathbb{R}^p$ est complet, elle admet une limite. On définit l'application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ en posant :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

f est un bon candidat pour la limite de la suite $(f_n)_n$. Le reste de la preuve consiste à montrer que :

1. $f \in B(X, \mathbb{R}^p)$ (c'est-à-dire f est bornée).

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f au sens de la norme uniforme $\|.\|_\infty$(c'est-à-dire la convergence de f_n vers f a lieu non seulement point par point, mais uniformément sur X).

Montrons la proposition 1. Utilisons l'hypothèse que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $B(X, \mathbb{R}^p)$ avec $\varepsilon = 1$:

$$\exists\ N_1 > 0 \text{ tel que } n, m \geq N_1 \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^p} < 1,\ \forall x \in X.$$

Puisque $f_{N_1} : X \to \mathbb{R}^p$ est bornée, $\exists\ M > 0$ tel que $\|f_{N_1}(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq M$, $\forall x \in X$, et donc

$$\|f_m(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|f_m(x) - f_{N_1}(x)\|_{\mathbb{R}^p} + \|f_{N_1}(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq 1 + M,\ \forall x \in X,\ m \geq N_1$$

puis par passage à la limite, on aura $\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq 1 + M$, $\forall x \in X$. D'où $f \in B(X, \mathbb{R}^p)$.

Montrons maintenant la proposition 2. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Puisque $f_k(x) \to f(x)$ quand $k \to \infty$, $\exists\ N^1_{\varepsilon,x}$ tel que

$$k \geq N^1_{\varepsilon,x} \Longrightarrow \|f_k(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour cet ε, $\exists$ N_ε^2 tel que

$$k, l > N_\varepsilon^2 \Longrightarrow \|f_k - f_l\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$k, l > N_\varepsilon^2 \Longrightarrow \|f_k(x) - f_l(x)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in X,$$

puisque la suite d'applications $(f_k)_k$ est de Cauchy. Donc, si $l \geq N_\varepsilon^2$ et $k \geq \sup\left\{N_{\varepsilon,x}^1, N_\varepsilon^2\right\}$ on a :

$$\|f_l(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|f_l(x) - f_k(x)\|_{\mathbb{R}^p} + \|f_k(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon,\ \forall x \in X,$$

et donc $l \geq N_\varepsilon^2 \Longrightarrow \|f_l - f\|_\infty < \varepsilon$. ■

Théorème 1.3.2 *Soit X un espace complet et $A \subset X$. On a*

$$A \text{ est complet} \Longleftrightarrow A \text{ est fermé.}$$

Preuve. Si $A \subset X$ est complet et $(a_n)_n \subset A$ est une suite qui converge vers $x \in X$, alors $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy (puisque dans X elle converge), alors elle doit converger dans A, comme celui-ci est complet, donc $x \in A$. C'est à dire que A est fermé dans X. Notez que jusqu'ici on n'a pas utilisé le fait que X est complet.

Si $A \subset X$ est fermé, toute suite de Cauchy $(a_n)_n \subset A$ doit converger dans X, puisque celui-ci est complet et A est fermé, cette limite doit appartenir à A, ce qui prouve que A est complet. ■

Proposition 1.3.1 *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Alors le sous-espace $C(K, \mathbb{R}^p)$ de $B(K, \mathbb{R}^p)$ est fermé pour la norme $\| \ . \ \|_\infty$.*

Preuve. Il s'agit de voir qu'une suite d'applications continues qui converge uniformément dans $B(K, \mathbb{R}^p)$ a pour limite une fonction continue. Soit donc $(f_n)_n$ une suite de $C(K, \mathbb{R}^p)$ qui converge uniformément vers $f \in B(K, \mathbb{R}^p)$ et soient x, $x_0 \in K$. On a :

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|f(x) - f_n(x)\|_{\mathbb{R}^p} + \|f_n(x) - f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Comme la suite $(f_n)_n$ converge au sens de $\|.\|_\infty$, on a pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N_ε tel que :

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon,$$

donc

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left(\|f(x) - f_n(x)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

D'autre part, on a chaque application f_n est continue alors, il existe un $\delta_{n,\varepsilon}$ tel que

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_{n,\varepsilon} \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_{N_\varepsilon,\varepsilon} = \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon.$$

■

Corollaire 1.3.1 *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Alors $C(K, \mathbb{R}^p)$ muni de la métrique induite par $\| \ . \ \|_\infty$ sur $B(K, \mathbb{R}^p)$ est complet.*

Corollaire 1.3.2 *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $F \subset \mathbb{R}^p$ fermé. Alors le sous-espace de $C(K, \mathbb{R}^p)$:*

$$C(K, F) = \{ f \in C(K, \mathbb{R}^p) \ | \ f(x) \in F, \ \forall x \in K \}$$

muni de la norme $\| \ . \ \|_\infty$ est complet.

Preuve. Il suffit de montrer que ce sous-espace est fermé. Or si $(f_n) \subset C(K, F)$ est une suite d'applications ayant pour limite $f \in C(K, \mathbb{R}^p)$, et comme F est fermé on a

$$\forall x \in K, \ \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \in F,$$

donc $f \in C(K, F)$. ■

Théorème 1.3.3 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques avec Y complet. Alors l'ensemble $C_b(X, Y)$ est complet pour la distance uniforme*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \{ d_Y(f(x), g(x)) \}.$$

$C_b(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans Y.

Théorème 1.3.4 (Intersection de Cantor) *Soit (X, d) un espace métrique, soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles non-vides fermés de X tels que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 ...$ et tels que $\lim_{n \to \infty} diam\ (A_n) = 0$. Alors, l'ensemble $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est constitué d'un unique point.*

Théorème 1.3.5 ([2], page 32) *Soit (X, d) un espace métrique. Alors*

$$X \text{ est compact} \iff X \text{ est complet et totalement borné.}$$

CHAPITRE 2

Théorèmes du point fixe pour des applications contractantes

2.1 Principe de contraction de Banach

Introduction

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou encore théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922, dans l'article [3], dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduites par Liouville en 1837 et développée par la suite, par Picard en 1890. A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu différentes généralisations dans les espaces métriques et les espaces topologiques localement convexe.

Définition 2.1.1 (Application contractante) *Soit (X, d) un espace métrique. L'application $F : X \to X$ est dite contractante s'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que :*

$$\forall x, y \in X \, : d\left(F\left(x\right), F\left(y\right)\right) \leq k \; d\left(x, y\right).$$

k est appelée constante de contraction.

Théorème 2.1.1 (Principe de contraction de Banach, 1922) *Soit* (X, d) *un espace métrique complet, soit* $F : X \to X$ *une application contractante de constante de contraction* k*. Alors :*

a. F *admet un unique point fixe* $\alpha \in X$*.*

b. *Pour tout* $x \in X$, $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} F^n(x)$ *où* $F^0(x) = x$ *et* $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$*.*

c. *La vitesse de convergence peut être estimée par :*

$$d(F^n(x), \alpha) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)).$$

Remarque 2.1.1 *Dans le théorème 2.1.1, on peut considérer une application* $F : A \to A$*, où* A *est un fermé de* X*.*

On va présenter deux démonstrations du théorème 2.1.1. La première est constructive, c'est la démonstration originale de Banach qui donne l'approximation du point fixe, la deuxième est non-constructive, et démontre seulement l'existence et l'unicité du point fixe. Elle repose sur le principe des ensembles emboités de Cantor.

Preuve. Méthode 1 :

1. L'unicité du point fixe : Soient α, α' deux points fixes de F, alors

$$d\left(\alpha, \alpha'\right) = d\left(F(\alpha), F\left(\alpha'\right)\right) \leq k.d\left(\alpha, \alpha'\right)$$

   ce qui n'est possible que si $d\left(\alpha, \alpha'\right) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \alpha'$.

2. L'existence du point fixe : Montrons que si $x \in X$, la suite $(F^n(x))_n \subset X$ est de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d\left(F^{n+1}(x), F^n(x)\right) \leq kd\left(F^n(x), F^{n-1}(x)\right) \leq .... \leq k^n d(F(x), x).$$

   Donc, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} d\left(F^{n+p}(x), F^n(x)\right) &\leq d\left(F^{n+p}(x), F^{n+p-1}(x)\right) + ... + d\left(F^{n+1}(x), F^n(x)\right) \\ &\leq \left(k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + ... + k^{n+p-1}\right) d(F(x), x) \\ &\leq k^n \left(1 + k + k^2 + ... + k^{p-1}\right) d(F(x), x) \\ &\leq k^n \frac{1-k^p}{1-k} d(F(x), x), \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient en calculant la somme d'une suite géométrique de raison k. On voit que si $n \to +\infty$, $d\left(F^{n+p}(x), F^{n}(x)\right) \to 0$ et donc la suite $\left(F^{n}(x)\right)_{n}$ est de Cauchy dans X. Par conséquent, comme X est complet, cette suite converge vers une limite que nous appellerons α, que nous allons montrer que c'est un point fixe de F. D'abord, remarquons que

$$\lim_{n\to\infty}\left(F^{n+1}(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(F^{n}(x)\right).$$

Ensuite, le fait que F est contractante entraîne qu'elle est continue, et donc

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(F^{n+1}(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(F\left(F^{n}(x)\right)\right) = F\left(\lim_{n\to\infty}\left(F^{n}(x)\right)\right) = F(\alpha).$$

Enfin, dans l'inégalité (2.1.1), si on fixe n et en fait tendre p vers l'infini on aura

$$d\left(\alpha, F^{n}(x)\right) \leq \frac{k^{n}}{1-k} d\left(x, F(x)\right).$$

Méthode 2 :

Soit $a = \inf\{d(x, F(x)) : x \in X\} \geq 0$, supposons que $a > 0$. Alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $d(x, F(x)) < a + \varepsilon$, on aura donc

$$a \leq d(F(x), F^{2}(x)) \leq kd(x, F(x)) < k(a+\varepsilon),$$

ce qui nous ramène à une contradiction lorsque ε tend vers 0, d'où $a = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^{*}$, considérons les ensembles

$$D_{n} = \{x \in X : d(x, F(x)) \leq \frac{1}{n}\}.$$

- D_n est non vide, car $a = 0$.
- D_n est fermé, car toute suite de D_n convergente dans X a une limite dans D_n.
- De plus, les ensembles D_n forment une suite décroissante quand $n \to \infty$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(D_n) = 0$. En effet, $\forall x, y \in D_n$

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d\left(x, F(x)\right) + d\left(F(x), F(y)\right) + d\left(F(y), y\right) \\ &\leq \frac{2}{n} + kd(x,y). \end{aligned}$$

  Ce qui donne

$$d(x,y) \leq \frac{2}{n(1-k)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

  Ensuite, le théorème des ensembles emboités de Cantor assure que l'intersection des D_n, $n \in \mathbb{N}^{*}$ est réduite à un point qui est l'unique point fixe de F.

■

Exemple 2.1.1 .

1. *Soient* $X = [a, b]$ *et l'application* $F : X \to X$ *telle que* F *est dérivable en chaque* $x \in \,]a, b[$ *et* $|F'(x)| \leq k < 1$. *Alors, on déduit du théorème des accroissements finis que :* $\forall x, y \in X$, *il existe un point* ξ *entre* x *et* y *tel que,*
$$F(x) - F(y) = F'(\xi)(x - y).$$
Donc
$$|F(x) - F(y)| = |F'(\xi)||x - y| \leq k|x - y|.$$
Par conséquent, F *est contractante et donc elle admet un unique point fixe.*

2. *Soient* $X = \mathbb{R}$ *et l'application* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*
$$F(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$
Alors F *est contractante et elle admet un unique point fixe* $x = 2$.

Remarque 2.1.2 *Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème précédent est réellement utile.*

1. *Si* X *n'est pas stable par* F *:* $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ *sur* $X = [0, 1]$. *On a* X *est fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc il est complet (car* $\mathbb{R}$ *est complet). De plus* $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, *ce qui implique que* $\sup\limits_{x \in [0,1]} |F'(x)| < 1$, *donc* F *est contractante sur* $[0, 1]$. *Mais* F *n'admet pas de point fixe car* $F([0, 1]) = \left[1, \sqrt{2}\right] \not\subset [0, 1]$, *i.e* X *n'est pas stable par* F.

2. *Si* F *n'est pas contractante :* $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ *sur* $X = [0, +\infty[$.

   On a $F([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$ *et* X *est un fermé dans* $\mathbb{R}$. *Alors* X *est complet. Mais* F *n'a pas de point fixe car* $\sup\limits_{x \in X} |F'(x)| = 1$, *i.e* F *n'est pas contractante.*

3. *Si* X *n'est pas complet :* $F(x) = \frac{\sin x}{2}$ *sur* $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   On a $F\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ *et* $\sup\limits_{x \in X} \mid F'(x) \mid = \frac{1}{2} < 1$, *alors* F *est contractante. Mais* F *n'admet pas de point fixe car* X *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc* X *n'est pas complet.*

Corollaire 2.1.1 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $F : X \to X$ *une application k-lipschitizienne (c'est à dire* $\exists\ k \geq 0$ *tel que* $\forall x, y \in X$, $\|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\|$*) et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $|\lambda| > k$. *Alors pour tout* $a \in X$, *il existe une unique solution* $\alpha = \alpha(a)$ *dans* X *de l'équation abstraite* $F(x) + \lambda x = a$.

Preuve. Soient g l'application définie par $g(x) = \frac{a - F(x)}{\lambda}$ et $x, y \in X$, alors

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\| &= \left\|\frac{a - F(x) - a + F(y)}{\lambda}\right\| \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \|F(x) - F(y)\| \\
&\leq \frac{k}{|\lambda|} \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Or $|\lambda| > k$, alors g est contractante, il existe donc une unique solution α de l'équation $g(x) = x$ en vertu du théorème 2.1.1. Autrement dit l'équation $F(\alpha) + \lambda\ \alpha = a$. ■

Remarque 2.1.3 *Si dans le théorème 2.1.1,* $k = 1$, *alors :*

1. *L'application* F *n'admet pas nécessairement de point fixe. Par exemple la translation dans un espace de Banach :* $x \longmapsto x + v$ $(v \neq 0)$.

2. *Si* F *admet un point fixe, ce point fixe n'est pas nécessairement unique. Par exemple l'application identité.*

3. *L'application* F *peut admettre un unique point fixe. Par exemple l'application*

$$\begin{aligned}
F : [0,1] &\to [0,1] \\
x &\mapsto 1 - x.
\end{aligned}$$

Dans la littérature, il existe diverses versions modifiées du théorème de contraction de Banach. Généralement, si l'une des hypothèses est affaiblie les autres doivent être renforcées. La complétude de l'espace est généralement indispensable. Dans ce qui suit, on présente quelques variantes du principe de contraction de Banach.

2.2 La version locale du théorème de Banach

Dans ce qui suit, on présente la version locale du théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \text{ où } x_0 \in X \text{ et } r > 0.$$

Supposons que $F : B(x_0, r) \to X$ est une contraction, de constante k, avec

$$d(F(x_0), x_0) < (1-k)r.$$

Alors F admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Preuve. Il existe r_0 avec $0 \le r_0 < r$, tel que $d(F(x_0), x_0) \le (1-k)r_0$. On montre que $F : \overline{B(x_0, r_0)} \to \overline{B(x_0, r_0)}$. Soit $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$ alors

$$\begin{aligned} d(F(x), x_0) &\le d(F(x), F(x_0)) + d(F(x_0), x_0) \\ &\le kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \\ &\le kr_0 + (1-k)r_0 \\ &\le r_0. \end{aligned}$$

Donc l'application $F : \overline{B(x_0, r_0)} \to \overline{B(x_0, r_0)}$ est contractante et $\overline{B(x_0, r_0)}$ est un espace complet. Par suite, l'application du théorème 2.1.1 à F assure qu'elle admet un unique point fixe dans $\overline{B(x_0, r_0)}$. Comme $\overline{B(x_0, r_0)} \subset B(x_0, r)$ et F est contractante sur $B(x_0, r)$ ce point fixe reste unique dans $B(x_0, r)$. ■

Théorème 2.2.2 *Soient $\bar{B}_r$ la boule fermé de rayon $r > 0$, centrée en zéro, d'un espace de Banach X et $F : \bar{B}_r \to X$ une application contractante, de constante L, vérifiant $F(\partial \bar{B}_r) \subseteq \bar{B}_r$. Alors F a un unique point fixe dans $\bar{B}_r$.*

Preuve. On considère $G(x) = \frac{x+F(x)}{2}$. On montre d'abord que $G : \bar{B}_r \to \bar{B}_r$. Posons

$$x^* = r\frac{x}{\|x\|} \text{ où } x \in \bar{B}_r \text{ et } x \neq 0.$$

Notons que $x^* \in \partial \bar{B}_r$(car, $\|x^*\| = r$). Si $x \in \bar{B}_r$ et $x \neq 0$ alors

$$\|F(x) - F(x^*)\| \le L\|x - x^*\| = L(r - \|x\|),$$

car $x - x^* = \frac{x}{\|x^*\|}(\|x\| - r)$. Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \|F(x)\| &\le \|F(x^*)\| + \|F(x) - F(x^*)\| \\ &\le r + L(r - \|x\|) \le 2r - \|x\|. \end{aligned}$$

Alors pour $x \in \bar{B}_r$ et $x \neq 0$ on a

$$\|G(x)\| = \left\| \frac{x + F(x)}{2} \right\| \leq \frac{\|x\| + \|F(x)\|}{2} \leq r.$$

Par continuité, on aura $\|G(0)\| \leq r$. Par conséquent, $G : \bar{B}_r \to \bar{B}_r$, de plus elle est contractante. En effet,

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \frac{\|x-y\| + L\|x-y\|}{2} = \frac{1+L}{2}\|x-y\| \text{ et } \frac{1+L}{2} < 1.$$

Le théorème 2.1.1 implique que G a un seul point fixe $u \in \bar{B}_r$. Finalement, si $u = G(u)$ alors $u = F(u)$. ■

2.3 Théorème du point fixe pour une application dont une itérée est contractante

Le théorème suivant étend un peu les possibilités d'applications du théorème de contraction de Banach.

Exemple 2.3.1 (Exemple de motivation) .

Soit $X = C([0,b], \mathbb{R})$. L'application

$$\begin{array}{llll} F: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & (Fx)(t) & = \int_0^t x(s)ds \end{array}$$

n'est pas contractante si $b > 1$, mais l'application

$$x \mapsto (F^n x)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} x(s)ds$$

est contractante pour n assez grand.

Théorème 2.3.1 *Soient X un espace métrique complet et $F : X \to X$ une application dont une itérée F^N est contractante. Alors F admet un unique point fixe α dans X. De plus $\forall x \in X$, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} F^n(x)$.*

Preuve. En appliquant le théorème 2.1.1 à F^N, on obtient que F^N possède un unique point fixe α et $\lim\limits_{n\to\infty} (F^n)^N(x) = \alpha$, $\forall x \in X$. Mais on a :

$$F^N(F(\alpha)) = F^{N+1}(\alpha) = F(F^N(\alpha)) = F(\alpha),$$

ce qui entraîne que $F(\alpha)$ est aussi point fixe de F^N, donc $F(\alpha) = \alpha$. Ce point fixe de F est unique, car tout point fixe de F est aussi un point fixe de F^N. Il reste à voir que $\alpha = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$, $\forall x \in X$. Soit donc $x \in X$; on sait que

$$\lim_{k\to\infty} F^{kN}(F^l(x)) = \alpha,\ l = 0, ..., N-1$$

et donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ K_\varepsilon^l$, $l = 0..., N-1$ tels que $k \geq K_\varepsilon^l \Rightarrow d(F^{kN}(F^l(x)), \alpha) < \varepsilon$. Posons $K_\varepsilon = \sup\{K_\varepsilon^0, ..., K_\varepsilon^{N-1}\}$. Alors, si $n \geq NK_\varepsilon$ par division euclidienne n peut s'écrire de façon unique sous la forme : $n = kN\ + r$, avec $0 \leq r \leq N-1$ et $n \geq N\ K_\varepsilon \Rightarrow kN + r \geq NK_\varepsilon \Rightarrow k \geq K_\varepsilon - \frac{r}{N} \Rightarrow k \geq K_\varepsilon$, car k est un entier et $\frac{r}{N} < 1$. Donc $d(F^n(x), \alpha) = d(F^{kN}(F^r(x)), \alpha) < \varepsilon$. ■

Exemple 2.3.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f(x) = e^{-x}$. f n'est pas contractante, car pour $x = -2$ et $y = 0$, on a :*

$$|f(-2) - f(0)| = e^{+2} - 1 > |-2 - 0|.$$

Or $f^2(x) = e^{-e^{-x}}$ est contractante dans $\mathbb{R}$, car

$$\left|\left(f^2\right)'(x)\right| = e^{-\left(e^{-x}+x\right)} \leq e^{-1} < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a alors f^2 est contractante, de constante de contraction e^{-1}. On peut donc appliquer le théorème 2.3.1 pour trouver le point fixe de f dans $\mathbb{R}$, c'est à dire pour trouver $a \in \mathbb{R}$ qui vérifie $e^{-a} = a$. En commençant l'itération par $x_0 = 0$ on arrive à observer que $a \approx 0.567$.

Remarque 2.3.1 *Dans le théorème 2.3.1, l'application F n'est pas nécessairement continue. En effet, l'application*

$$\begin{array}{cccc} F: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & F(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ pour } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \end{array}$$

vérifie $F(F(x)) = 0$, $\forall x \in [0,1]$. D'où F^2 est contractante mais F est discontinue.

2.4 Théorème du point fixe de Edelstein

Une autre tentative naturelle d'étendre le théorème 2.1.1 serait de supposer que F est contractive, c'est à dire $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$, $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$. Dans ce cas F

n'admet pas nécessairement un point fixe. Par exemple, considérons $F(x) = \ln(1+e^x)$ définie sur $X = \mathbb{R}$. D'une part, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$ on a

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= |\ln(1+e^x) - \ln(1+e^y)| \\ &= \left|\frac{e^\xi}{1+e^\xi}\right| |x-y|, \ \xi \in \mathbb{R} \\ &< |x-y|. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= x \Leftrightarrow \ln(1+e^x) = x \\ &\Leftrightarrow 1 + e^x = e^x \\ &\Leftrightarrow 1 = 0 \text{ (impossible)}. \end{aligned}$$

Cependant, avec une hypothèse plus forte sur l'espace nous obtenons le théorème suivant

Théorème 2.4.1 (Théorème d'Edelstein ([1], page 180)) *Soit (X, d) un espace métrique compact, soit $F : X \to X$ une application contractive. Alors*

a. *F admet un unique point fixe $\alpha \in X$.*

b. *Pour tout $x \in X$, $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} F^n(x)$ où $F^0(x) = x$ et $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$.*

Preuve.

1. L'unicité du point fixe : Soient α, α' deux points fixes de F tels que $\alpha \neq \alpha'$, alors

$$d\left(\alpha, \alpha'\right) = d\left(F(\alpha), F\left(\alpha'\right)\right) < d\left(\alpha, \alpha'\right)$$

ce qui est impossible. Alors $\alpha = \alpha'$.

2. L'existence du point fixe : Soit l'application $x \mapsto d(x, F(x))$. x point fixe de F est équivalent à dire que $d(x, F(x)) = 0$. Comme X est un compact alors l'application $d(x, F(x))$ atteint son minimum. Alors il existe $\alpha \in X$ tels que

$$\forall x \in X, \ d(\alpha, F(\alpha)) \leq d(x, F(x)). \tag{2.4.1}$$

On va montrer par l'absurde que α est un point fixe de F. Si $\alpha \neq F(\alpha)$ d'après la définition d'une application contractive, on a $d(F(\alpha), F(F(\alpha))) < d(\alpha, F(\alpha))$ ce qui contredit (2.4.1). D'où $\alpha = F(\alpha)$.

3. Pour tout $x \in X$, $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} F^n(x)$. Posons $x_n = F^n(x)$ et montrons que pour un certain $k \geq 0$ on a $x_k = \alpha$ et plus généralement $x_n = \alpha$ pour $n \geq k$ autrement dit $x_n \longrightarrow \alpha$ pour n assez grand. On procède par l'absurde : supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \alpha$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 < d\left(x_{n+1}, \alpha\right) = d\left(F\left(x_n\right), F(\alpha)\right) < d\left(x_n, \alpha\right),$$

alors la suite réelle $\{d(x_n, \alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par zéro. Donc il existe une limite, noté l, telle que

$$l = \lim_{n \to \infty} d(x_n, \alpha).$$

De plus, grâce à la compacité de X, la suite $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans X, noté $(x_{n_i})_i$, telle que $x_{n_i} \to y \in X$, quand $n_i \to \infty$. Comme l'application F est continue, alors

$$F(x_{n_i}) \to F(y) \Rightarrow \; F(x_{n_i+1}) \to F(y) \; \text{ quand } n_i \to \infty,$$

et on a $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, \alpha) = l$ quand $n \to \infty$, entraine que

$$d(x_{n_i}, \alpha) \to l \text{ et } d(x_{n_i+1}, \alpha) \to l \text{ quand } n_i \to \infty.$$

Par la continuité de la distance

$$d(x_n, \alpha) \to d(y, \alpha), \; \text{ quand } n \to \infty$$

alors

$$d(y, \alpha) = l = d(f(y), \alpha) = d(F(y), F(\alpha)),$$

et si $y \neq \alpha$, alors $d(F(y), F(\alpha)) < d(y, \alpha)$. Ce qui est impossible alors $y = \alpha$ c'est à dire que : $d(y, \alpha) = l = 0$. Alors $d(x_n, \alpha) \to 0$ quand $n \to \infty$.

■

Remarque 2.4.1 *La preuve du théorème d'Edelstein ne donne pas une estimation de l'erreur d'approximation.*

Exemple 2.4.1 *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *avec* $f(x) = \frac{1}{1+x}$. $\forall x, y \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \\ &= \left| \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \right|, \end{aligned}$$

donc

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right| < 1,\ \forall x,y\in[0,1]\ \text{avec } x\neq y.$$

C'est à dire f est contractive sur $[0,1]$.

Remarquons que le rapport $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$ est proche de 1 lorsque x et y sont suffisamment proches de 0. Par conséquent, f n'est pas contractante sur tout l'intervalle $[0,1]$ par rapport à la métrique usuelle. Le théorème d'Edelstein assure que f admet un point fixe unique dans $[0,1]$ et $f^n(x)$ tend vers ce point, pour tout choix de x. Bien sûr, il est facile de trouver le point fixe x

$$x=\frac{1}{1+x}\Rightarrow x=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\approx 0.61803\in V(1).$$

Cet exemple ne nécessite pas réellement l'application du théorème d'Edelstein. Une façon de contourner cela est de vérifier que $f:\left[\frac{1}{2},1\right]\to\left[\frac{1}{2},1\right]$ et on déduit du théorème des accroissements finis que, si $x,y\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, il existe un point ξ entre x et y tels que

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |f'(\xi)||x-y|\\ &\leq \max_{\xi\in\left[\frac{1}{2},1\right]}|f'(\xi)||x-y|,\end{aligned}$$

et on sait que : $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2},1\right]}|f'(x)|=\frac{4}{9}<1$, alors

$$\forall x,y\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|\ \text{avec } k=\frac{4}{9}.$$

On applique le théorème 2.1.1 et on déduit qu'il existe un unique point fixe de f dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Une deuxième méthode consiste à vérifier que $f^2(x)=\frac{1+x}{2+x}$ est contractante dans $[0,1]$, (en effet, $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|\left(f^2\right)'(x)\right|=\frac{1}{4}<1$), alors on peut appliquer le théorème 2.3.1 à f^2 pour déduire l'existence et l'unicité du point fixe de f.

Exemple 2.4.2 *Soit $g:[0,1]\to[0,1]$ avec $g(x)=\frac{x}{1+x}$. $\forall x,y\in[0,1]$, on a*

$$\begin{aligned}|g(x)-g(y)| &= \left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right|\\ &= \left|\frac{x-xy+xy+y}{(1+x)(1+y)}\right|\\ &= \left|\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\right|.\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right|.$$

Remarquons que le point fixe de f est 0, (en effet, $x = \frac{x}{1+x} \Rightarrow x = 0$*). Le rapport* $\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right|$ *pour* $x \neq y$ *peut être proche de* 1 *en prenant* x *et* y *suffisamment proches de* 0*. Ce qui rend cet exemple différent du précédent est que* g *n'admet pas une restriction contractante sur un voisinage de son point fixe. D'autre part, étant donné que* $g^n(x) = \frac{x}{(1+nx)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$*. Alors*

$$\left|\frac{g^n(x)-g^n(y)}{x-y}\right| = \frac{1}{(1+nx)(1+ny)},$$

est arbitrairement proche de 1 *lorsque* x *et* y *sont suffisamment proches de* 0 *donc toutes les itérées* g^n *de* g *ne sont pas contractantes au voisinage* 0*.*

2.5 Théorèmes du point fixe pour des contractions non linéaires

Maintenant, on va présenter sans démonstration quelques généralisations du théorème de contraction de Banach, dans lesquelles la constante de contraction k est remplacée par une fonction réelle.

Théorème 2.5.1 (Théorème du point fixe de Boyd et Wong [[1], pages 182-183]) *Soit* (X,d) *un espace métrique complet, soit* $F : X \to X$ *une application vérifiant*

$$d(F(x), F(y)) \leq \psi(d(x,y)),\ \forall x, y \in X$$

avec $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction semi-continue supérieure à droite (i.e :* $\lambda_i \to \lambda \Rightarrow \limsup_{i\to\infty} \psi(\lambda_i) \leq \psi(\lambda)$*) et* $\psi(t) < t,\ \forall t > 0$*. Alors* F *admet un point fixe* $\alpha \in X$*. De plus*

$$\forall x \in X,\ \alpha = \lim_{n\to\infty} F^n(x).$$

Corollaire 2.5.1 (([1], page 184)) *Soient* (X,d) *un espace métrique complet et* $F : X \to X$ *une contraction non linéaire (c'est à dire il existe une fonction continue* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tel que* $\varphi(t) < t\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x,y)),\ \forall x, y \in X$*). Alors* F *admet un unique point fixe* $\alpha \in X$*. De plus,*

$$\forall x \in X, \alpha = \lim_{n\to\infty} F^n(x).$$

Théorème 2.5.2 (Théorème de point fixe de Matkowski ([1], pages 185-186)) *Soient (X, d) un espace métrique complet et $F : X \to X$ une application vérifiant*

$$d(F(x), F(y)) \leq \psi(d(x, y)), \forall x, y \in X,$$

où $\psi :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ est croissante et vérifie que $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$, $\forall t > 0$. Alors F admet un unique point fixe $\alpha \in X$ et $\forall x \in X$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$.

2.6 Théorèmes du point fixe pour des applications non-expansives

Dans cette section, nous présentons l'extension la plus naturelle d'une contraction.

Définition 2.6.1 (Application non-expansive) *Soit (X, d) un espace métrique. L'application $F : X \to X$ est dite non-expansive si :*

$$d(F(x), F(y)) \leq d(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Observons que les contractions, les isométries et les applications contractives sont des applications non-expansives. Nous commençons cette section en présentant un résultat connu sous le nom du théorème de Shauder pour les applications non-expansives.

Théorème 2.6.1 *Soient C un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach E et $F : C \to C$ une application non-expansive avec $F(C)$ est compact dans C. Alors F admet un point fixe.*

Preuve. Soit $x_0 \in C$, pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on définit la suite d'applications

$$F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F + \frac{1}{n} x_0,$$

comme C est convexe et $x_0 \in C$. Alors $F_n : C \to C$, de plus F_n est contractante. En effet, $\forall x, y \in C$

$$\begin{aligned} \|F_n(x) - F_n(y)\| &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|F(x) - F(y)\| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|. \end{aligned}$$

On applique le théorème 2.1.1 pour chaque F_n (n fixé) et on en déduit qu'il existe un unique point fixe $x_n \in C$ de F_n, $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Donc

$$x_n = F_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x_n) + \frac{1}{n} x_0.$$

De plus, comme $F(C)$ est un sous ensemble compact de C, alors il existe une partie d'entiers d'entiers S et $u \in C$ tels que $F(x_n) \to u$ quand $n \to +\infty$ dans S.

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x_n) + \frac{1}{n} x_0 \to u \text{ quand } n \to +\infty \text{ dans } S.$$

Par continuité, $F(x_n) \to F(u)$ quand $n \to +\infty$ dans S, d'où $u = F(u)$. ■

Théorème 2.6.2 *Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe dans un espace de Hilbert réel H. Soit $F : C \to C$ une application non-expansive. Alors F admet au moins un point fixe.*

Pour démontrer le théorème 2.6.2 on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.6.1 *Soit H un espace de Hilbert avec $u, v \in H$, et soit r, R deux constantes réelles telles que $0 \le r \le R$. S'il existe un $x \in H$ avec $\|u - x\| \le R$ et $\|v - x\| \le R$ et $\left\|\frac{u+v}{2} - x\right\| \ge r$, alors*

$$\|u - v\| \le 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Preuve. La loi du parallélogramme nous donne :

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= 2\|u - x\|^2 + 2\|v - x\|^2 - \|(u - x) + (v - x)\|^2 \\ &\le 2R^2 + 2R^2 - 4\left\|\frac{u + v}{2} - x\right\|^2 \\ &\le 4\left(R^2 - r^2\right). \end{aligned}$$

■

Lemme 2.6.2 *Soit H un espace de Hilbert, Soit $C \subseteq H$ un ensemble borné et $F : C \to C$ une application non-expansive. Supposons que x, $y \in C$ et $a = \frac{x+y}{2} \in C$. Soit $\delta(C)$ le diamètre de C, soit $\varepsilon \le \delta(C)$ avec $\|x - F(x)\| \le \varepsilon$ et $\|y - F(y)\| \le \varepsilon$. Alors*

$$\|a - F(a)\| \le 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\delta(C)}.$$

Preuve. Comme $\|x-y\| \leq \left\|x - \frac{a+F(a)}{2}\right\| + \left\|y - \frac{a+F(a)}{2}\right\|$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\left\|x - \frac{a+F(a)}{2}\right\| \geq \frac{1}{2}\|x-y\|$. Cependant, puisque

$$\|a-x\| = \frac{1}{2}\|x-y\|,$$

on a

$$\begin{aligned} \|F(a)-x\| &\leq \|F(a)-F(x)\| + \|F(x)-x\| \\ &\leq \|a-x\| + \varepsilon \\ &= \frac{1}{2}\|x-y\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

On applique le lemme 2.6.1 avec $r = \frac{1}{2}\|x-y\|$, $R = \frac{1}{2}\|x-y\| + \varepsilon$, $u = a$, $v = F(a)$ et on obtient que

$$\begin{aligned} \|a-F(a)\| &\leq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\|x-y\|+\varepsilon\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\|x-y\|\right)^2} \\ &= 2\sqrt{\|x-y\|\,\varepsilon + \varepsilon^2} \\ &= 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\|x-y\|+\varepsilon} \\ &\leq 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\delta(C)}. \end{aligned}$$

Preuve du théorème 2.6.2. Supposons que $0 \in C$ et définissons pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ les applications

$$\begin{aligned} F_n : C &\rightarrow C \\ x &\mapsto F_n(x) = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) F(x). \end{aligned}$$

Supposons également que $F(0) \neq 0$, sinon la preuve est terminé (0 est point fixe). Ensuite, le théorème 2.1.1 nous garantit l'existence et l'unicité de $x_n \in C$ qui vérifie

$$x_n = F_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Alors

$$\|x_n - F(x_n)\| = \frac{1}{n}\|F(x_n)\| \leq \frac{1}{n}\delta(C). \tag{2.6.1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, soit $Q_n = \left\{x \in C : \|x - F(x)\| \leq \frac{1}{n}\delta(C)\right\}$. On a

$$Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq Q_4 \supseteq \ldots \supseteq Q_n \supseteq \ldots.,\ \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

les ensembles sont fermés à ordre décroissant $d_n = \inf_{x \in Q_n} \|x\|$ et comme $(Q_n)_n$ est décroissante, on a $d_2 \leq d_3 \leq d_4 \leq \ldots \leq d_n \leq \ldots$ avec $d_i \leq \delta(C)$, $\forall i \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Par conséquent, $\exists d \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\rightarrow\infty} d_n = d$ avec $d \leq \delta(C)$.

Maintenant, soit

$$A_n = Q_{8n^2} \cap \overline{B\left(0, d + \frac{1}{n}\right)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, l'ensemble A_n est non vide, fermé, $A_{n+1} \subset A_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \delta(A_n) = 0$. Pour montrer cette dernière, soit $u, v \in A_n$ alors

$$\|u - 0\| \leq d + \frac{1}{n} \text{ et } \|v - 0\| \leq d + \frac{1}{n}. \tag{2.6.2}$$

Comme $u, v \in Q_{8n^2}$, on a

$$\|u - F(u)\| \leq \frac{1}{8n^2}\delta(C) \text{ et } \|v - F(v)\| \leq \frac{1}{8n^2}\delta(C).$$

Ainsi le lemme 2.6.2 implique que

$$\left\|\frac{u+v}{2} - F\left(\frac{u+v}{2}\right)\right\| \leq 2\sqrt{2\delta(C)}\sqrt{\frac{1}{8n^2}.\delta(C)} = \frac{1}{n}\delta(C),$$

donc

$$\frac{u+v}{2} \in Q_n \text{ et } \left\|\frac{u+v}{2} - 0\right\| \geq d_n. \tag{2.6.3}$$

Maintenant (2.6.2) et (2.6.3) et le lemme 2.6.1 impliquent que

$$\|u - v\| \leq 2\sqrt{\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - d_n^2}.$$

De plus, $\delta(A_n) \leq 2\sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2} + (d^2 - d_n^2)}$. D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \delta(A_n) = 0.$$

Ensuite, le théorème de Cantor nous garantit l'existence de $x_0 \in \cap_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}} A_n$. Alors $x_0 \in \cap_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}} Q_{8n^2}$, on aura donc

$$\|x_0 - F(x_0)\| \leq \frac{\delta(C)}{8n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

D'où

$$\|x_0 - F(x_0)\| = 0.$$

■

Le théorème suivant de Browder et Gohde affirme que le résultat du théorème reste valable, si H est un espace de Banach uniformément convexe.

Théorème 2.6.3 (théorème de Browder et Gohde, voir ([1], page 229)) *Soient X un espace de Banach uniformément convexe, et C un sous ensemble non vide fermé, convexe, borné de X. Alors toute application non-expansive $T : C \to C$ admet au moins un point fixe dans C.*

Le lemme suivant nous assure qu'on peut toujours approximer une application non-expansive définie sur un ensmble convexe borné d'un espace de Banach par une application contractante.

Lemme 2.6.3 ([9], page 19) *Soient C un ensemble convexe, bornée d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application non-expansive. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application contractante, $F_\varepsilon : C \to C$telle que pour tout $x \in C$, $\|F(x) - F_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$.*

Preuve. Pour tout point $z \in C$ et pour tout $\varepsilon \in \left]0, 1\right]$, on définit

$$F_\varepsilon(x) = \varepsilon z + (1 - \varepsilon) F(x).$$

Pour tout $x, y \in C$, On a :

$$\begin{aligned} \|F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(y)\| &= (1 - \varepsilon) \|F(x) - F(y)\| \\ &\leq (1 - \varepsilon) \|x - y\|, \end{aligned}$$

qui prouve que F_ε est contractante et on a aussi

$$\begin{aligned} \|F_\varepsilon(x) - F(x)\| &= \varepsilon \|z - F(x)\| \\ &\leq \varepsilon \mathrm{diam}(C). \end{aligned}$$

La conclusion se fait en prenant ε assez proche de 0. ■

Théorème 2.6.4 *Soient C un sous ensemble fermé, bornée et convexe d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application non-expansive. Alors*

$$\inf \{\|x - F(x)\|, \ x \in C\} = 0.$$

Preuve. Soit F_ε définie comme dans le lemme précédent, l'application F_ε est contractante et admet un unique point fixe noté $x_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - F(x_\varepsilon)\| &= \|F_\varepsilon(x_\varepsilon) - F(x_\varepsilon)\| \\ &= \varepsilon \|z - F(x_\varepsilon)\| \\ &\leq \varepsilon \mathrm{diam}(C). \end{aligned}$$

La conclusion se fait à partir de la propriété caractéristique de la borne inférieure. ■

Théorème 2.6.5 *Soit C un sous ensemble compact, convexe d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application non expansive. Alors F admet un point fixe dans C.*

Preuve. Evidement la borne inférieure discutée dans le théorème précédent est atteinte.

$$\inf \{\|x - F(x)\|, x \in C\} = 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in C \text{ tel que } \|x_0 - F(x_0)\| = 0,$$

C'est à dire, il existe $x_0 \in C$ tel que $x_0 = F(x_0)$. ■

2.7 Alternative non linéaire de Leray–Schauder pour des applications contractantes

Dans cette section on va voir que la propriété d'existence du point fixe pour les applications contractantes est invariante par homotopie. Soit (X, d) un espace métrique complet et U un sous-ensemble ouvert de X.

Définition 2.7.1 *Soit $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ deux applications contractantes, où $\overline{U}$ est la fermeture de l'ouvert U dans X. On dit que F et G sont homotopes s'il existe une application $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ qui vérifié les propriétés suivantes :*

1. *$H(.,0) = G$ et $H(.,1) = F$.*
2. *$x \neq H(x,t)$ pour $x \in \partial U$ et $t \in [0,1]$.*
3. *il existe une constante $\alpha \in [0,1[$ telle que :*

$$d(H(x,t), H(y,t)) \leq \alpha d(x,y), \ \forall x, y \in \overline{U} \text{ et } t \in [0,1].$$

4. *il existe une constante $M \geq 0$ telle que :*

$$d(H(x,t), H(x,s)) \leq M|t-s|, \ \forall x \in \overline{U} \text{ et } t, s \in [0,1].$$

Théorème 2.7.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et U un ouvert de X, supposons que $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ soient deux applications contractantes homotopes et que G admet un point fixe dans $\overline{U}$. Alors F admet un point fixe dans $\overline{U}$.*

Preuve. Considérons l'ensemble $A = \{\lambda \in [0,1] \,:\, x = H(x,\lambda) \text{ pour un certain } x \in U\}$ où H est une homotopie entre F et G décrit dans la définition précédente.

Notons que A est non vide, puisque G admet un point fixe, $0 \in A$. Nous allons montrer que A est à la fois ouvert et fermé dans le connexe $[0,1]$, ce qui entraîne que $A = [0,1]$. Par conséquent, F admet un point fixe. Nous montrons d'abord que A est fermé dans $[0,1]$. Pour avoir ce résultat, soit

$$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \text{ avec } \lambda_n \longrightarrow \lambda \in [0,1] \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Montrons que $\lambda \in A$. Comme $\lambda_n \in A$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $x_n \in U$ tel que $x_n = H(x_n,\lambda_n)$, alors pour $n,m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} d\left(x_n,x_m\right) &= d\left(H(x_n,\lambda_n),H(x_m,\lambda_m)\right) \\ &\leq d\left(H(x_n,\lambda_n),H(x_n,\lambda_m)\right) + d\left(H(x_n,\lambda_m),H(x_m,\lambda_m)\right) \\ &\leq M\left|\lambda_n-\lambda_m\right| + \alpha d\left(x_n,x_m\right). \end{aligned}$$

Ce qui donne que

$$d\left(x_n,x_m\right) \leq \frac{M}{1-\alpha}\left|\lambda_n-\lambda_m\right|.$$

Comme $(\lambda_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, et puisque X est complet alors il existe $x \in \overline{U}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. De plus $x = H(x,\lambda)$, car

$$\begin{aligned} d\left(x_n,H(x,\lambda)\right) &= d\left(H(x_n,\lambda_n),H(x,\lambda)\right) \\ &\leq M\left|\lambda_n-\lambda\right| + \alpha d\left(x_n,x\right). \end{aligned}$$

Donc $\lambda \in A$, d'où A est fermé dans $[0,1]$.

Maintenant, nous montrons que A est ouvert dans $[0,1]$. Soit $\lambda_0 \in A$, alors il existe $x_0 \in U$ tel que $x_0 = H(x_0,\lambda_0)$. Fixons $\varepsilon > 0$ qui vérifie

$$\varepsilon \leq \frac{(1-\alpha)\,r}{M} \text{ où } r < d\left(x_0,\partial U\right),$$

où $d\left(x_0,\partial U\right) = \inf\left\{d\left(x_0,x\right), x \in \partial U\right\}$. Fixons $\lambda \in \left]\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon\right[$. Alors pour $x \in \overline{B\left(x_0,r\right)}$

$$\begin{aligned} d(x_0,H(x,\lambda)) &\leq d(H(x_0,\lambda_0),H(x,\lambda_0)) + d(H(x,\lambda_0),H(x,\lambda)) \\ &\leq \alpha d(x_0,x) + M|\lambda-\lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha)r = r. \end{aligned}$$

Alors pour chaque $\lambda \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$, on obtient

$$H(\cdot, \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(x_0, r)}.$$

En appliquant le théorème 2.1.1, on déduit que $H(., \lambda)$ admet un point fixe dans $B(x_0, r)$. Donc $\lambda \in A$ pour tout $\lambda \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$ c'est à dire A est un voisinage de λ_0. On conclut que A est un ouvert dans $[0, 1]$. ■

Théorème 2.7.2 *Soient U un sous-ensemble ouvert d'un espace de Banach X. $0 \in U$ et $F : \overline{U} \longrightarrow X$ une contraction avec $F(\overline{U})$ borné. Alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

(A1) F admet un point fixe dans $\overline{U}$,

(A2) il existe $\lambda \in]0, 1[$ et $u \in \partial U$ tels que $u = \lambda F(u)$.

Preuve. Supposons que (A2) n'est pas vérifiée et F n'a aucun point fixe sur ∂U, sinon la preuve est terminée. Alors on a

$$u \neq \lambda F(u) \text{ pour tout } u \in \partial U \text{ et } \lambda \in [0, 1].$$

Soit $H : \overline{U} \times [0, 1] \longrightarrow X$ une application définie par :

$$H(x, t) = tF(x).$$

Soit G la fonction nulle. L'application G admet un point fixe dans U $(0 = G(0))$. F et G sont deux applications contractantes homotopes. Par conséquent, le théorème 2.7.1 assure l'existence de $x \in U$ tel que $x = F(x)$, d'où le résultat cherché. ■

CHAPITRE 3 Applications

3.1 Application sur le principe de contraction de Banach

3.1.1 Equation intégrale de Fredholm

Soit $K : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue pour laquelle il existe $q \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < q < 1$, tel que $|K(x,t)| \leq q$, $\forall\ x,t \in [0,1]$, et soit $\Phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On aimerait trouver une fonction $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sataisfisant l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$f(x) = \Phi(x) + \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt.$$

Cela se ramène facilement à la recherche d'un point fixe en définissant l'application F par :

$$\begin{array}{rccl} F: & C([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ & g & \longmapsto & (Fg)(x) = \Phi(x) + \int_0^1 K(x,t) g(t)\, dt. \end{array}$$

On vérifie facilement que :

1. F est bien définie. En effet, Φ est continue et l'intégrale du produit de deux fonctions continues est continue.

2. F est contractante, de constante de contraction q, si on munit $C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\ .\ \|_\infty$. En effet ; soit $f,\ g \in C([0,1],\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} |(Ff)(x) - (Fg)(x)| &= \left| \int_0^1 k(x,t)\ \ (f(t) - g(t))\, dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(x,t)|\ \ |f(t) - g(t)|\, dt \\ &\leq q \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \\ &\leq q\ \|f - g\|_\infty , \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |(Ff)(x) - (Fg)(x)| \leq q \|f - g\|_\infty ,$$

c'est à dire

$$\|Ff - Fg\|_\infty \leq q \|f - g\|_\infty .$$

D'où F est contractante.

Puisque $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ .\ \|_\infty$ est complet, on peut appliquer le théorème 2.1.1, ce qui implique que l'équation intégrale ci-dessus possède une unique solution et nous fournit une méthode pour approcher cette solution : on peut par exemple itérer F sur la fonction nulle. En particulier, dans le cas où $\Phi \equiv 0$ l'unique solution est $f \equiv 0$.

3.1.2 Théorème de Stampacchia

Soit H un espace de Hilbert réel dont le produit scalaire est noté $(.,.)_H$ et la norme associée $\|.\|_H$, et H' son dual topologique.

Définition 3.1.1 *Soit H un espace de Hilbert réel. On dit qu'une forme bilinéaire $a(.,.)$: $H \times H \to \mathbb{R}$ est continue si*

$$\exists c_a > 0, \forall (u,v) \in H \times H : |a(v,v)| \leq c_a \|u\|_H \|v\|_H .$$

Définition 3.1.2 *Soit H un espace de Hilbert réel. On dit qu'une forme bilinéaire $a(.,.)$: $H \times H \to \mathbb{R}$ est coercive (ou bien H-elliptique) si*

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in H : a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2 .$$

Théorème 3.1.1 (Théorème de projection sur un convexe fermé) *Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$\|f-u\|_H = \min_{v \in K} \|f-v\|_H .$$

De plus u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u, v-u) \leq 0, \ \forall v \in K, \end{cases}$$

on note $u = P_K f$ (projection de f sur K).

Théorème 3.1.2 (Théorème de Riesz-Frechet, [4] page 81) *Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, \quad <\varphi, v>= (f,v)_H,$$

de plus

$$\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H .$$

Théorème 3.1.3 (Théorème de Stampacchia, [4] pages 82-83) *Soit $a(.,.)$ une forme bilineaire continue et coercive sur $H \times H$. Soit K un convexe fermé non vide de H. Pour tout $l \in H'$ il existe un unique $u \in K$ vérifiant :*

$$a(u, v-u) \ \geq \ <l, v-u> \forall v \in K.$$

De plus, si $a(.,.)$ est symétrique alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u,u)-<l,u>= \min_{v \in K}(\frac{1}{2}a(v,v)-<l,v>). \end{cases}$$

Preuve. Soit $l \in H'$ alors d'après le théorème de Riesz-Frechet $\exists!\ f \in H$ tel que

$$\forall v \in H : \quad <l,v>= (f,v)_H.$$

Pour u fixé dans H l'application $v \longmapsto a(u,v)$ est linéaire et continue sur H. Alors d'après le théorème de Riesz-Frechet :

$$\exists!\ Au \in H \text{ tel que } \forall v \in H \ a(u,v) = (Au, v)_H.$$

On a définit ainsi l'opérateur

$$\begin{aligned} A: \ H &\rightarrow \ H \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

vérifiant que

$$\begin{aligned} \text{i) } \exists c &> 0, \forall v \in H : \|Au\|_H \leq c \|v\|_H . \\ \text{ii) } \exists \alpha &> 0, \forall v \in H : (Av, v)_H \geq \alpha \|v\|_H^2 . \end{aligned}$$

le problème

$$\begin{cases} u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \ \geq \ < l, v-u > \forall v \in K. \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} u \in K \text{ tel que} \\ (Au, v-u)_H \geq (f, v-u)_H \ \forall v \in K. \end{cases}$$

Soit $\rho > 0$, une constante qui sera fixée ultérieurement. On cherche $u \in K$ tel que :

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u)_H \leq 0 \ \forall v \in K.$$

D'aprés le théorème de la projection sur un convexe fermé

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u).$$

On définit alors, l'application

$$\begin{aligned} S: \ K &\longrightarrow K \\ v &\longmapsto Sv \ = P_K(\rho f - \rho Av + v). \end{aligned}$$

Montrons que S est contractante, d'abord on montre que

$$\forall f_1, f_2 \in H : \ \|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\| ,$$

où $u_1 = P_K f_1$ et $u_2 = P_K f_2$. En effet d'après le théorème de projection on a

$$\begin{cases} (f_1 - u_1, v - u_1)_H \leq 0 \ \forall v \in K, \\ (f_2 - u_2, v - u_2)_H \leq 0 \ \forall v \in K. \end{cases}$$

En particulier :

$$\begin{cases} (f_1 - u_1, u_2 - u_1)_H \leq 0, \\ (f_2 - u_2, u_1 - u_2)_H \leq 0 \ , \end{cases}$$

en sommant on trouve

$$(f_1, u_2 - u_1)_H - (u_1, u_2 - u_1)_H + (f_2, u_1 - u_2)_H - (u_2, u_1 - u_2)_H \leq 0$$

$$\begin{aligned}
&= -(f_1, u_2 - u_1)_H + (f_2, u_1 - u_2)_H + (u_1, u_1 - u_2)_H - (u_2, u_1 - u_2)_H \leq 0 \\
&= (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_H + \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0 \\
&= \|u_1 - u_2\|_H^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_H \\
&\qquad \leq \|f_1 - f_2\|_H \|u_1 - u_2\|_H ,
\end{aligned}$$

donc

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq \|f_1 - f_2\| .$$

C'est à dire

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\|_H \leq \|f_1 - f_2\| .$$

Ainsi pour $v_1, v_2 \in K$, on a :

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq \|\rho(Av_2 + Av_1) + v_1 - v_2\| ,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \rho^2 \|(Av_2 + Av_1)\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 + 2\rho(Av_2 - Av_1, v_1 - v_2) \\
&\leq \rho^2 c^2 \|v_1 - v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(Av_2 - Av_1, v_1 - v_2) \\
&\leq (\rho^2 c^2 - 2\rho\alpha + 1) \|v_1 - v_2\|^2 .
\end{aligned}$$

On pose $k^2 = \rho^2 c^2 - 2\rho\alpha + 1$

$$\text{pour } 0 < \rho < \frac{2\alpha}{c^2}, \text{ on a } 0 \leq k^2 < 1$$

ainsi S est contractante. D'après le théorème 2.1.1 S admet un unique point fixe $u \in K$. Ce qui signifie que

$$\exists!\ u \in K \text{ tel que } \forall v \in K : a(u, v - u) \ \geq \ < l, v - u > .$$

On suppose que $a(.,.)$ est symétrique, donc elle définit un nouveau produit scalaire sur $H \times H$. Etant donné $l \in H'$, d'aprés le théorème de représentation de Riesz-Frechet :

$$\exists!\ g \in H \text{ tel que } \forall v \in H :< l, v >= a(g, v).$$

Par suite :

$$a(u, v - u) \geq < l, v - u > \ \text{ équivalent à : } a(u, v - u) \leq 0 \ \forall v \in K.$$

ce qui signifie que d'après le théorème de projection $u = P_K g$ (en terme de produit scalaire $a(.,.)$). En plus d'aprés le théorème de projection, u est défini par :

$$(a(g-u, g-u))^{\frac{1}{2}} = \min_{v \in K} (a(g-v, g-v))^{\frac{1}{2}},$$

ou encore u réalise le minimum de $a(g-u, g-u)$ ce qui revient à minimiser sur K

$$\frac{1}{2} a(v,v) - a(g,v) = \frac{1}{2} a(v,v) - < l, v > .$$

■

3.1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in I \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, et $I = [0, b]$. On définit l'opérateur intégral suivant :

$$\begin{array}{rccl} F: & C(I, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C(I, \mathbb{R}^n) \\ & y & \longmapsto & Fy(t) \quad = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \end{array}$$

y solution de (3.1.1) si et seulement si $y = Fy$, i.e la solution de (3.1.1) est un point fixe de l'opérateur intégral F.

Théorème 3.1.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz) *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et lipschitzienne par rapport à y. i.e il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que pour tout $t \in I$*

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^n, \ \|f(t,y) - f(t,z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha \|y - z\|_{\mathbb{R}^n} .$$

Alors, il existe une unique solution $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ du problème (3.1.1).

Preuve. On applique le théorème 2.1.1, pour $X = C(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme à poids

$$\|y\|_\alpha = \sup_{t \in I} \left\| e^{-\alpha t} \, y(t) \right\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| e^{-\alpha t} \, y(t) \right\|_0$$

et l'opérateur intégral défini par

$$\begin{array}{rccl} F: & C(I, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C(I, \mathbb{R}^n) \\ & y & \longmapsto & Fy(t) \quad = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \end{array}$$

Notons que tout point fixe de l'opérateur F est une solution du problème (3.1.1) et inversement. Observons que $C(I,\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|.\|_\alpha$ est un espace de Banach qui est équivalent à la norme $\|y\|_0 = \sup_{t\in I} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}$. En effet, $\forall y \in C(I,\mathbb{R}^n)$, on a

$$e^{-\alpha b} \|y\|_0 \leq \|y\|_\alpha \leq \|y\|_0 .$$

F est une application contractante. En effet, $\forall y, z \in C(I,\mathbb{R}^n)$, on a

$$Fy(t) - Fz(t) = \int_0^t [\ f\ (s, y(s)) -\ f\ (s, z(s))]ds \ \text{ pour } t \in I.$$

Alors, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \|(Ty - Tz)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq e^{-\alpha t} \int_0^t \alpha e^{\alpha s} e^{-\alpha s} \|y(s) - z(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds \\ &\leq e^{-\alpha t} (\int_0^t \alpha e^{\alpha s} ds) \|y - z\|_\alpha \\ &\leq e^{-\alpha t} (e^{\alpha t} - 1) \|y - z\|_\alpha \\ &\leq (1 - e^{-\alpha b}) \|y - z\|_\alpha . \end{aligned}$$

D'où ; $\|Ty - Tz\|_\alpha \leq (1 - e^{-\alpha b}) \|y - z\|_\alpha$, sachant que $(1 - e^{-\alpha b}) < 1$. Par suite le théorème 2.1.1 implique qu'il existe un unique point fixe $y \in C(I,\mathbb{R}^n)$ de F. Par conséquent, le problème de Cauchy (3.1.1) admet une unique solution $y \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ (car $y \in C(I,\mathbb{R}^n)$, $y' = f(t,y) \in C(I,\mathbb{R}^n)$). ■

Remarque 3.1.1 *On peut munir $C(I,\mathbb{R}^n)$ de la norme $\|y\|_0 = \sup_{t\in I} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}$, mais ce choix nous donne l'existence et l'unicité d'une solution locale définie sur un sous-intervalle de I.*

3.1.4 Méthode de Newton-Raphson

Un autre exemple d'application du théorème 2.1.1 nous est fourni par la méthode de Newton-Raphson pour la recherche de racine de polynômes (ou plus généralement de fonctions d'une variable réelle), dont nous présentons maintenant deux variantes.

Proposition 3.1.1 *Soit $f : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons que $f'(x_0) \neq 0$ et qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < 1$ et que :*

1. $\left|1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right| \leq q \ \ \forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

2. $\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq r(1-q)$.

Alors f possède une unique racine α dans $[x_0 - r, x_0 + r]$. De plus, pour tout $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$, la suite$(x_n)_n$ définie récursivement par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)},\ n \geq 1.$$

a pour limite α. Enfin, la vitesse de convergence de $(x_n)_n$ est estimée par

$$|x_n - \alpha| \leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_0)}\right| \frac{q^{n-1}}{1-q}$$

et si on prend $x_1 = x_0$; alors

$$|x_n - \alpha| \leq rq^{n-1}.$$

Notons que si f est de classe C^1 les hypothèses de cette proposition seront satisfaites si x_0 est suffisamment proche d'une racine α de f en laquelle la dérivée de f est non nulle et si r est assez petit.

Preuve. Posons : $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$ et vérifions que F est une application contractante de $[x_0 - r, x_0 + r]$ de constante de contraction q ; le résultat suivra alors du théorème 2.1.1, puisque $f(x) = 0$ équivaut à dire $F(x) = x$. On a : $F^{'}(x) = 1 - \frac{f^{'}(x)}{f'(x_0)}$ et donc si $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $\left|F^{'}(x)\right| \leq q$. On déduit alors du théorème des accroissement finis que $\forall x, y \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $x < y$, $\exists \xi \in [x, y]$ tel que :

$$F(x) - F(y) = F^{'}(\xi)(x - y),$$

et donc

$$|F(x) - F(y)| \leq q\,|x - y|\,,$$

à cause de l'hypothèse 1. Si $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$

$$|F(x) - x_0| \leq |F(x) - F(x_0)| + |F(x_0) - x_0| \leq q.r + r.(1-q) = r$$

à cause de la première partie de la preuve et de l'hypothèse 2. Cela prouve bien que F est une application contractante de $[x_0 - r, x_0 + r]$ dans lui même, et en fait $x_n = F^{n-1}(x_1)$ et $x_1 - F(x_1) = \frac{f(x_1)}{f(x_0)}$. Les affirmations suivent alors le théorème 2.1.1. ■

Proposition 3.1.2 (Variante de la proposition précédente) .

Soit $f : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Supposons que $f^{'}(x) \neq 0$, $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ et qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < 1$ et que :

1. $\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x_0)^2}\right| \leq q \quad \forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

2. $\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq r(1-q)$.

   Alors f possède une unique racine α dans $[x_0 - r, x_0 + r]$. De plus pour tout $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$, la suite $(x_n)_n$ définie récursivement par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

   a pour limite α. On a $|x_n - \alpha| \leq \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \frac{q^{n-1}}{1-q}$ et si on prend $x_1 = x_0$ alors

$$|x_n - \alpha| \leq rq^{n-1}.$$

Preuve. On reprend le schéma de la preuve précédente avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Ici on a : $F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ et l'hypothèse (1) nous assure alors que F est contractante. Le fait que F est une application de $[x_0 - r, x_0 + r]$ se montre comme dans la proposition précédente. ■

Exemple 3.1.1 *Calculons à l'aide des propositions qui précèdent les racines de f. On pose $f(x) = x^2 - 2$ et le problème est de calculer la racine positive de f. On commence par faire un bon choix pour x_0 et r :*

$$x_0 = \frac{3}{2},\ r = \frac{1}{2}$$

Alors $\left|1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right| = \left|\frac{3-2x}{3}\right| \leq \frac{1}{3}$ et d'autre part $\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| = \frac{1}{12}$; on peut donc prendre $q = \frac{1}{3}$. On doit itérer la fonction :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} = \frac{3x - x^2 + 2}{3}$$

On commence l'itération avec $x_1 = x_0 = \frac{3}{2}$ et on obtient

$$x_2 = \frac{17}{12}(= 1.416...), x_3 = \frac{611}{432}(= 1,4143518...), etc...$$

L'estimation de la convergence donne $\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq (\frac{1}{2})(\frac{1}{3})^{n-1}$. Appliquons maintenant la proposition 3.1.2, en prenant toujours $x_0 = \frac{3}{2}$, $r = \frac{1}{2}$. On doit itérer la fonction

$$F(x) = \ x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} = \frac{x^2+2}{2x}$$

On vérifie que $\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x_0)^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ *et que* $\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| = \frac{1}{12}$. *On peut donc prendre* $q = \frac{1}{2}$. *L'estimation de la convergence donne*

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq (1/2)^n.$$

En partant de $x_1 = \frac{3}{2}$ *on obtient :*

$$x_2 = \frac{17}{12}(= 1.416...), x_3 = \frac{577}{408}(= 1.41421568...), etc...$$

3.2 Application sur le théorème pour une application dont une iterée est contractante

3.2.1 Equation intégrale de Voltera

On se donne les fonctions $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues. On cherche une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x K(x,t)\ f(t)\,dt. \tag{3.2.1}$$

C'est dire qu'on cherche un point fixe de l'opérateur intégral définie par :

$$\begin{array}{llll} F : & C([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ & g & \longmapsto & F(g)(x) = \varphi(x) + \int_0^x K(x,t)\,g(t)\,dt. \end{array}$$

Nous allons montrer par récurrence sur n que, $\forall x \in [0,1]$:

$$|F^n(g_1)(x) - F^n(g_2)(x)| \leq \frac{x^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty ,$$

où $M = \sup\{|K(x,t)|\ ;\ x,t \in [0,1]\}$. Pour n = 1, on a

$$
\begin{aligned}
|F(g_1)(x) - F(g_2)(x)| &= \int_0^x K(x,t)\ \ (g_1(t) - g_2(t))\, dt \\
&\leq \int_0^x |K(x,t)|\ \ |(g_1(t) - g_2(t))|\, dt \\
&\leq \sup_{x,t\in[0,1]} |K(x,t)| \int_0^x |(g_1(t) - g_2(t))|\, dt \\
&\leq M \int_0^x |g_1(t) - g_2(t)|\, dt \\
&\leq M\ \ \|(g_1 - g_2)\|_\infty \int_0^x dt \\
&\leq x\ M\ \ \|g_1 - g_2\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Supposons-la vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour n + 1 :

$$
\begin{aligned}
\left|F^{n+1}(g_1)(x) - F^{n+1}(g_2)(x)\right| &= |F(F^n(g_1))(x) - F(F^n(g_2))(x)| \\
&= \left| \int_0^x K(x,t)\ \ (F^n(g_1))(t)\, dt - \int_0^x K(x,t)\ \ F^n(g_2)(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_0^x |K(x,t)|\ \ |(F^n(g_1))(t) - F^n(g_2)(t)|\, dt \\
&\leq \int_0^x \sup_{x,t\in[0,1]} |K(x,t)|\ \ |(F^n(g_1))(t) - F^n(g_2)(t)|\, dt \\
&\leq \int_0^x M\ \frac{t^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty\, dt \\
&= M\ \frac{1}{n!}\ M^n \|g_1 - g_2\|_\infty \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ M^{n+1} \|g_1 - g_2\|_\infty .
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$\|F^n(g_1) - F^n(g_2)\|_\infty \leq \frac{x^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty .$$

Et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq N$, $\frac{M^n}{n!} < \varepsilon$, si on choisit $\varepsilon = q$ avec $0 < q < 1$ donc il existe N tel que si $\frac{M^N}{N!} < q$ alors F^N sera contractante, de constante de contraction q. On peut donc affirmer que l'équation intégrale (3.2.1) admet une unique solution, que l'on peut obtenir par itération de F.

3.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in I \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

où $(t_0, y_0) \in U$ et $I \subset \mathbb{R}$. On cherche une solution $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, $(t, y) \in U$, telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Définition 3.2.1 *Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (3.2.2), si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de ce problème avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B_f(y_0, r_0)$.*

Définition 3.2.2 (Application localement Lipschitzienne) *f est dite localement lipschitzienne par rapport à la variable y sur U, si $\forall (r_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (r_0, y_0) dans U et une constante $k = k(V)$ telle que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in V$, on ait*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\| .$$

Le théorème suivant de Cauchy-Lipschitz donne un résultat d'existence et d'unicité de solution d'un probleme de Cauchy. Ce résultat permet d'élargir le domaine d'application du théorème 3.1.4.

Théorème 3.2.1 (Cauchy-Lipschitz) *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport y sur U, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy (3.2.2) admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to B_f(y_0, r_0)$. De plus, si on pose $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite itérée $\Phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte.*

Preuve. On commence par construire un cylindre de sécurité pour le problème (3.2.2). Soit V un voisinage de (t_0, y_0) sur lequel f est k-Lipschitzienne par rapport à y, et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B_f(y_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit que f est bornée sur C_0. Soit $M = \sup\limits_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\|$ et on pose $T = \min\left[T_0, \frac{r_0}{M}\right]$, On aura que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (3.2.2). Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. Par construction, on a $\sup\limits_{t\in C}\|f(t,y)\| \leq M$ et f est k-Lipschitzienne par rapport à y sur C. Soit $F = C\left([t_0 - T, t_0 + T], B_f(y_0, r_0)\right)$ muni de la distance $d = \| \ \|_\infty$. $\forall y \in F$. On définit sur F l'application :

$$y \longmapsto \Phi(y)(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(u, y(u))du.$$

On montre d'abord l'équivalence suivante :

$$y \text{ est solution du problème (3.2.2)} \Leftrightarrow y \text{ est un point fixe de } \Phi.$$

($\Leftarrow$) Supposons que y est un point fixe de Φ. Alors $\forall y \in F$ on a $\Phi(y) = y$ d'où $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$. Or f est continue sur U donc y est continue sur U. De plus, y est dérivable sur $[T_0 - t, T_0 + t]$ et sa dérivée $y'(t) = f(t, y(t))$. On a aussi $y(t_0) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} f(u, y(u))du = y_0$. Donc f est solution du problème (3.2.2).

($\Rightarrow$) Supposons maintenant que y est solution de (3.2.2). On a alors $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$. On peut intégrer y' par rapport à u car $y'(u) = f(u, y(u))$ et $u \mapsto f(u, y(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce segment. Alors on obtient :

$$\int\limits_{t_0}^{t} y'(u)\, du = \int\limits_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du = [y(u)]_{u=t_0}^{u=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0$$

Donc, on a bien

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du = \Phi(y)(t),$$

et donc y est un point fixe de Φ. On veut appliquer le théorème du point fixe a Φ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que Φ est une application de F dans F. Pour cela on montre que $\Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Soit $y \in F$. Alors $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

on a

$$\begin{aligned}
\|\Phi(y)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(u, y(u))du\| \\
&\leq M \int_{t_0}^{t} du \\
&\leq M \ |t - t_0| \\
&\leq M \ T \leq r_0.
\end{aligned}$$

Donc $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$, d'où $\Phi(y) \in F$ et on a évidemment la stabilité de F par Φ^p.

2. On montre maintenant que Φ^p est contractante. Soient $y, z \in F$. On pose $y_p = \Phi^p(y)$, $z_p = \Phi^p(z)$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre que :

$$\|y_p(t) - z_p(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z), \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \tag{3.2.3}$$

C'est évident dans le cas $p = 0$. Supposons que pour un certain entier p, on ait (3.2.3). Alors, $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned}
\|y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} k \ \|y_p(u) - z_p(u)\| \, du \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k \ k^p \frac{|u - t_0|^p}{p!} \ d(y, z) \, du \\
&= \frac{k^{p+1}}{p!} \ d(y, z) \int_{t_0}^{t} |u - t_0|^p \, du \\
&= \frac{k^{p+1}}{p!} \ d(y, z) \left[\frac{|u - t_0|^{p+1}}{(p+1)} \right]_{u=t_0}^{u=t} = k^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} d(y, z),
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. Comme $|t - t_0| \leq T$, on a

$$d(y_p, z_p) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y, z)$$

donc Φ est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$, et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$ (car $\lim\limits_{p \to +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$). Donc, pour $q \geq p$, Φ^q est contractante.

3. Le théorème 1.3.3 nous assure la complétude de F. On déduit du théorème 2.1.1 que Φ^q admet un unique point fixe y. De plus $\Phi^q(\Phi(y)) = \Phi(\Phi^q(y)) = \Phi(y)$ donc $\Phi(y)$ est un point fixe de Φ^q, et par unicité du point fixe de Φ^q on a $\Phi(y) = y$. Comme les points fixes de Φ sont des points fixes de Φ^q , on en déduit que y est l'unique point fixe de Φ. Finalement, y est l'unique solution de (3.2.2).

■

3.3 Application sur le théorème du point fixe pour les applications non-expansives

Théorème 3.3.1 *Soient X un espace de Banach uniformément convexe, f un élément de X, et $T : X \to X$ une application non-expansive. Alors l'équation abstraite:*

$$x - Tx = f, \tag{3.3.1}$$

admet une solution x si et seulement si pour tout $x_0 \in X$, la suite itérative de Picard $(x_n)_n$ définie par:

$$x_{n+1} = Tx_n + f,\ n \in \mathbb{N},$$

est bornée.

Preuve. Soit l'application $T_f : X \to X$ définie par

$$T_f(u) = Tu + f.$$

L'élément $u \in X$ est solution de 3.3.1 si et seulement si u est un point fixe de T_f. Il est clair que T_f est non-expansive. Supposons que T_f admet un point fixe $u \in X$.

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\| &= \|Tx_n + f - T_f(u)\| \\ &= \|T_f(x_n) - T_f(u)\| \\ &\leq \|x_n - u\|. \end{aligned}$$

D'où $(x_n)_n$ est bornée.

Inversement supposons que $(x_n)_n$ est bornée. Soit

$$d = diam(\{x_n, n \in \mathbb{N}\}) \text{ et } B_d[x] = \{y \in X : \|x - y\| \leq d\},$$

avec $x \in X$. $B_d[x]$ est convexe. En effet: soient x_0, $y_0 \in B_d[x]$ et $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|x-(\lambda x_0+(1-\lambda)y_0)\| &= \|\lambda x+(1-\lambda)x-\lambda x_0+(1-\lambda)y_0\| \\
&\leq \lambda\|x-x_0\|+(1-\lambda)\|x-y_0\| \\
&\leq d,
\end{aligned}$$

donc $\lambda x_0+(1-\lambda)y_0 \in B_d[x]$. On pose

$$C_n = \cap_{i\geq n} B_d[x_i],$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble C_n est non vide (car $x_n \in C_n$) et il est convexe. De plus,

$$T_f(C_n) \subset C_{n+1}. \tag{3.3.2}$$

En effet, soient $u \in C_n$ et $i \geq n+1$

$$\begin{aligned}
\|x_i - T_f(u)\| &= \|Tx_{i-1}+f-T_f(u)\| \\
&= \|T_f(x_{i-1})-T_f(u)\| \\
&\leq \|x_{i-1}-u\| \\
&\leq d.
\end{aligned}$$

Donc $T_f(u) \in C_{n+1}$. Soit $C = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} C_n}$, puisque la suite d'ensemble $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et C_n est convexe pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, alors C est convexe, borné. Puisque T_f est stable sur C (d'après 3.3.2), on peut appliquer le théorème de Browder et Gohde pour déduire que T_f admet un point fixe. ■

3.4 Application sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour les applications contractantes

3.4.1 Problème de Dirichlet homogène d'ordre deux

Soit le problème de Dirichlet :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} y'' = f\left(t, y, y'\right), \quad t \in [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

où $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Nous considérons, pour $\lambda \in]0,1[$, la famille des problèmes:

$$(\mathrm{P})_\lambda \quad \begin{cases} y'' = \lambda f\left(t, y, y'\right), \; t \in [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

On définit l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} F: & C^1([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^1([a,b],\mathbb{R}) \\ & y & \longmapsto & Fy(t) = \displaystyle\int_a^b G(t,s) f\left(s, y(s), y'(s)\right) ds \end{array}$$

où la fonction de Green est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}, a \le t \le s \le b \\ -\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, a \le s \le t \le b \end{cases}$$

Constatons que les points fixes de F sont les solutions du problème (P).

Théorème 3.4.1 *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, vérifiant*

$$\begin{cases} \text{il existe un sous-ensemble } D \subseteq R^2 \text{ et deux constantes } K_0 \text{ et } K_1 \\ \text{tels que } |f(t,y,y') - f(t,z,z')| \le K_0|y-z| + K_1|y'-z'|, \; \forall t \in [a,b] \times D \end{cases}$$

tel que

$$K_0 \frac{(b-a)^2}{8} + K_1 \frac{(b-a)}{2} < 1. \tag{3.4.1}$$

Supposons qu'il existe un ensemble ouvert borné de fonction, $U \subset C^1[a,b]$ avec $0 \in U$ tel que

$$u \in \overline{U} \text{ implique que tout } (u(t), u'(t)) \in D \text{ pour tout } t \in [a,b] \tag{3.4.2}$$

et

$$y \text{ est solution de } (P)_\lambda \text{ pour certain } \lambda \in]0,1[\text{ implique que } y \notin \partial U. \tag{3.4.3}$$

Alors le problème (P) admet une unique solution dans $\overline{U}$.

Preuve. Soit $X = C^1([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|y\| = K_0|y|_0 + K_1|y'|_0 \text{ où } |y|_0 = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)| \text{ et } |y'|_0 = \sup_{t\in[a,b]} |y'(t)|$$

L'application $F : \overline{U} \rightarrow C^1[a,b]$ est cotractante. En effet, d'aprés les propriétés de la fonction f et la condition (3.4.2), pour tout y et z dans $\overline{U}$ nous avons

$$\begin{aligned} |(Fy - Fz)(t)| &= \left| \int_a^b G(t,s)\left[f(s,y(s),y'(s)) - f(s,z(s),z'(s))\right] ds \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{8} \|y - z\|, \end{aligned}$$

puisque

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |G(t,s)|\, ds = \max_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)(t-a)}{8} = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Alors

$$|Fy - Fz|_0 \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|y - z\|.$$

Ainsi que, pour tout y et z dans $\overline{U}$, nous avons $|(Fy - Fz)'|_0 \leq \frac{(b-a)}{2} \|y - z\|$,

puisque

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |G_t(t,s)|\, ds = \max_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)^2 + (t-a)^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)}{2}.$$

Par conséquent,

$$\|Fy - Fz\| \leq \left[K_0 \frac{(b-a)^2}{8} + K_1 \frac{(b-a)}{2}\right] \|y - z\|, \forall y,\, z \in \overline{U}. \tag{3.4.4}$$

Ensuite, la condition (3.4.1) entraine la contraction de F. Finalement, la condition (3.4.3) entraine que la proposition (A2) dans le théorème 2.7.2 n'est pas vérifiée. D'où l'existance et l'unicité d'une solution du problème (P). ■

Conclusion

Ce mémoire, conçu en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques, présente quelques théorèmes du point fixe qui sont parmi les outils les plus puissants de l'analyse et dont la littérature regorge d'applications dans divers domaines; notamment lorsqu'il s'agit d'établir l'existence de solutions pour des équations intégrales ou différentielles. Par ailleurs, ils servent aussi de pont entre l'analyse et la topologie, ce qui leur permet d'interagir et de donner de bons et d'intéressants résultats.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan and D. R. Sahu, *Fixed point theory for lipschitzian-type mapping with applications*, Vol 6. Cambridge university Press Springer, 2000.

[2] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Combridge Tracts in Mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press 2001.

[3] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application*, Fund. Math. 3(1922).

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Edition Masson, Paris, 1983.

[5] C. Dazé, *Théorèmes du point fixe et principe variationnel d'Ekeland*, Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.) en mathématiques, Université de Montréal, février 2010.

[6] J. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 2006.

[7] J. Dixmier, *Topologie générale*, collection Puf, presses universitaires de France, Paris (1981).

[8] K. Goebel. *Concise course on point theorem*, Yokohama Publishers, 2002 .

[9] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by its history*, Springer Verlag, Berlin, 1997.