

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ A. MIRA - BEJAIA  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en mathématiques**

**Option : Analyse et Probabilités**

**Par**

**BERKATI Nadjet et HAMMA Nadjat**

**THÈME**

**Analyse variationnelle et théorie isopérimétrique**

Soutenu publiquement, le 21/06/2015 devant le jury composé de :

Mr.	<b>A.DAHMANI</b>	Professeur	U. BEJAIA	Président.
Mr.	<b>F. BOUHMILA</b>	Professeur	U. BEJAIA	Promoteur.
Mme	<b>H.BECHIR</b>	Professeur	U. BEJAIA	Examinatrice.
Mr.	<b>A.MOULAI</b>	Doctorant	U. BEJAIA	Examineur.

---

# Dédicaces

Au début j'avoue que ma cohabitation passionnée des mathématiques m'a laissée un amour fou des bonnes définitions sans lesquelles il n'y a que des à-peu-près.

En suite, je dédie ce modeste travail à :

- \* Mes très chers parents que j'aime beaucoup, pour leurs aides, leur soutien durant toute ma vie et surtout de m'avoir toujours poussée à travailler pour être toujours meilleure ;
- \* Mes très chers frères : Syphax et Nouh ;
- \* Mes copines qui sont comme les soeurs que je n'ai pas eues : Rahima, Lamia, Nawel et Dihiya ;
- \* Nadjat, avec la quelle j'ai travaillée et préparé ce mémoire ;
- \* Tout mon groupe de natation ;
- \* Mes voisines : Houa et Kenza ;
- \* Mes oncles et tantes et leurs familles respectives;
- \* Toute la famille BERKATI sans exception ;
- \* Toute la promotion 2015 option Analyse et Probabilités ;
- \* Tous les matheux et tous les amis ;
- \* Et particulièrement à chaque personne que j'aime.

**BERKATI Nadjet**

---

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents Taoues et Layachi qui m'ont apporté une grande disponibilité.  
pendant toute la durée de mes études.

À mes frères Yanis et Mounir et mes soeurs Souhila et Nasria.

À Nadjet avec qui j'ai aimé travailler durant cette année.

À la mémoire de mon grand père paternel Sliman, à ma grand mère Zouina à mes oncles et tantes.

Je ne me permettrais surtout pas d'oublier mon adorable fiancé Samir que j'aime beaucoup pour sa gentillesse, son soutien et ses précieux conseils.

À tous mes amis.

À toute la promotion "mathématique" 2015 de l'université de Bejaia.

**Hamma Nadjat**

---

# *Remerciements*

Nous remercions Mr F.BOUHMILA d'avoir accepté de nous encadrer, même si cela ne sera jamais suffisant pour lui exprimer toute notre reconnaissance pour la confiance et le soutien, pour le temps qu'il nous a consacré toutes les fois que cela à été nécessaire, pour les conseils qu'il nous a prodigué, tout au long de notre travail.

Nos remerciement sont aussi adressés à Mme. H.BECHIR, Mr. A.DAHMANI et Mr. A.MOULAI qui nous font l'honneur de juger notre travail.

On remercie l'ensembles des enseignants qui ont contribué à notre formation durant notre deuxième cycle d'étude ainsi que tous les enseignants du département de Mathématiques pour leur soutien et leur disponibilité.

---

# Table des matières

<b>Avant propos</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Théorème d'Euler-Lagrange</b>	<b>8</b>
1.1 Quelques exemples introductifs : . . . . .	8
1.1.1 Longueur minimale d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	8
1.1.2 <b>Brachistochrone</b> . . . . .	10
1.2 Variété et métrique <b>Riemanniennes</b> . . . . .	11
1.2.1 Variété Riemannienne . . . . .	11
1.2.2 Métriques Riemannienne . . . . .	12
1.2.3 <b>Géodésique</b> . . . . .	13
1.3 Théorème d' <b>Euler-Lagrange</b> dans $\mathbb{R}$ . . . . .	14
1.3.1 Le problème . . . . .	14
1.3.2 Théorème d' <b>Euler-Lagrange</b> dans $\mathbb{R}$ . . . . .	15
1.3.3 Calcul de $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial Y'}$ et équation d' <b>Euler</b> . . . . .	18
1.3.4 Cas $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ : Formule de <b>Beltrami</b> . . . . .	19
1.4 Théorème d' <b>Euler-Lagrange</b> dans $\mathbb{R}^n$ : $\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial Y'} = 0$ . . . . .	21
1.4.1 Théorème d' <b>Euler-Lagrange</b> dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	22
1.5 Un exemple d'application : géodésiques d'une sphère . . . . .	23
1.5.1 Géodésiques en coordonnées sphériques . . . . .	24
1.5.2 Géodésiques en coordonnées stéréographiques . . . . .	31

---

<b>2</b>	<b>Equation d'Euler et théorème de Hilbert</b>	<b>35</b>
2.1	Equation d' <b>Euler</b> et théorème de <b>Hilbert</b> . . . . .	35
2.1.1	Courbes paramétrées : Augmenter la dimension du problème (généraliser la formulation) . . . . .	36
2.1.2	Extrémale . . . . .	43
2.1.3	Théorème de <b>Hilbert</b> . . . . .	44
2.1.4	Champ d'extrémales . . . . .	46
2.2	Une approche en analyse fonctionnelle . . . . .	50
2.2.1	Notion d'espace fonctionnel adapté à une fonctionnelle . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Recherches géométriques sur le problème isopérimétrique</b>	<b>54</b>
3.1	Fragment d'histoire . . . . .	56
3.2	Formulation générale du problème . . . . .	58
3.3	Définitions et premières propriétés . . . . .	58
3.3.1	L'inégalité isopérimétrique classique . . . . .	61
3.3.2	Dimension 2 . . . . .	62
3.3.3	<b>Inégalité isopérimétrique pour un polygone</b> . . . . .	62
3.3.4	Dimension 3 . . . . .	63
3.4	Démonstrations géométriques élémentaires . . . . .	64
3.5	Calcul des variations . . . . .	64
3.6	Polygone et <b>Steiner</b> . . . . .	67
3.7	Somme de Minkowski . . . . .	73
3.8	Inégalité de Bonnesen . . . . .	74
	<b>Annexes</b>	<b>79</b>
3.9	Principe de moindre action pour une variété Riemannienne : équation géodésique . . . . .	79
3.9.1	Minimisation de la fonctionnelle énergie . . . . .	79
3.9.2	Prise en compte du système de coordonnées . . . . .	81
3.9.3	Réécriture à l'aide des Symboles de Christoffel . . . . .	82

3.9.4	Changement de variables pour intégrer le système différentiel dans l'exemple de la sphère . . . . .	83
	<b>Conclusion générale</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

---

# Avant propos

En mathématiques, et plus précisément en analyse fonctionnelle, le calcul des variations ou calcul variationnel est un ensemble de méthodes permettant de minimiser une fonctionnelle.

Celle-ci, qui est à valeurs réelles, dépend d'une fonction qui est l'inconnue du problème. Il s'agit donc d'un problème de minimisation dans un espace fonctionnel, de dimension infinie. Le calcul des variations s'est développé depuis le milieu du dix-huitième siècle jusqu'aujourd'hui ; son dernier avatar est la théorie de la commande optimale, datant de la fin des années 1950. Le calcul des variations a des applications dans de nombreux domaines :

1. L'inconnue étant une courbe paramétrée, on recherche une courbe de longueur minimale (ou extrémale), autrement dit une **géodésique** ; c'est une question fondamentale en géométrie différentielle.
2. L'inconnue étant une surface, on recherche, pour un périmètre donné, la surface d'aire maximale (problème d'isométrie).
3. En physique, le principe de moindre action affirme que les mouvements d'un système matériel se produisent de manière, sinon à minimiser l'action, du moins à rendre celle-ci stationnaire. Ces mouvements peuvent donc être déterminés en minimisant ou en rendant stationnaire cette fonctionnelle, ce qui fait du calcul des variations un outil fondamental pour les physiciens (*formulation variationnelle des équations de la physique*).

4. Une condition nécessaire d'extremum ou plus généralement de stationnarité de la fonctionnelle est **l'équation d'Euler-Lagrange**.

Les principaux résultats classiques du calcul des variations sont :

1. L'équation d'**Euler-Lagrange** (condition nécessaire du premier ordre) ;
2. Les conditions de transversalité (dans le cas de problèmes à extrémités variables) ;
3. Les conditions du second ordre de minimum faible de **Legendre** et de **Jacobi** ;
4. Les conditions du second ordre de minimum fort de **Weierstrass** ;
5. La relation entre formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien (transformation de **Legendre**) ;
6. L'équation de **Hamilton-Jacobi** et le théorème de **Jacobi** ;
7. Enfin, pour ses applications à la physique, le théorème de **Noether** est fondamental.

### **Historique:**

Sans aller jusqu'au légendaire problème de la reine **Didon**, on peut faire remonter les principes variationnels à **Pierre de Fermat (1657)** et **Christian Huygens (1690)** pour l'étude de propagation de la lumière (principe de **Fermat** et principe de **Huygens-Fresnel**). Néanmoins, le calcul des variations est né en **1696**, avec le problème de la courbe brachistochrone, posé par **Jean Bernoulli** (à la suite de **Galilée** dans son dialogue sur les deux grands systèmes du monde paru en **1632**) ; il s'agit d'un problème de temps minimal (comme l'indique la racine grecque :  $\ll \beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$  (brachistos)  $\gg$ ,  $\ll$  le plus court  $\gg$  ;  $\ll \chi\rho\omicron\nu\omicron\varsigma$   $\gg$  (chronos) ,  $\ll$  temps  $\gg$ ). Ce problème fut résolu par **Jean et Jacques Bernoulli**, **Gottfried Wilhelm Leibniz**, **Issac Newton**, **Guillaume François Antoine de l'Hôpital** et **Ehrenfried Walther von Tschirnhaus**. La solution de **Jacques Bernoulli** se fondait sur le principe d'**Huygens** et l'idée du fond d'onde ; elle préfigurait l'équation de **Hamilton-Jacobi**. Celle de **Jean Bernoulli** était fondée sur une analogie avec la propagation de la lumière et le principe de **Fermat**, ainsi

que la loi de **Descartes**. Celle de **Leibniz**, enfin, était fondée sur une analogie avec la propagation de la lumière et le principe de **Fermat**, ainsi que la loi de **Descartes**. Celle de **Leibniz**, enfin, était fondée sur l'approximation de la courbe par des lignes brisées et était le premier pas vers l'équation d'**Euler-Lagrange**.

Le second pas a été accompli par **Euler**, élève de **Jean Bernoulli** : **Euler** a ébauché à partir de considérations géométriques la méthode des "petites variations" en **1744**. **Joseph-Louis Lagrange** a introduit le vocable "calcul des variations" vers **1760** et a donné sa forme actuelle à la solution d'**Euler**. **Adrien-Marie Legendre** a complété en **1786** l'équation d'**Euler-Lagrange**, qui est une condition du second ordre qui porte son nom. Ces résultats ont été rassemblés par **Lagrange** dans la théorie des fonctions analytiques, parue en **1797** ; **Lagrange** a également introduit les variables canoniques en **1811** dans sa Mécanique analytique (bien qu'elles aient été attribuées à **William Rowan Hamilton** par **Charles Gustave Jacobi**). L'équation d'**Euler-Lagrange** été étendue au cas du calcul des variations à intégrales multiples en **1834** par **Mikhaïl Ostrogradski** (généralisant un résultat obtenu en **1831** par **Siméon Denis Poisson** sur le même sujet). L'équation d'**Hamilton -Jacobi** a été introduite en premier lieu par **Hamilton** dans sa *seconde publication Essay on a General Method in Dynamics* en **1835** à l'occasion d'un problème de mécanique. **Jacobi** a complété la condition du second ordre de **Legendre** en **1837**, avec la théorie des "points conjugués" et a reformulé la contribution de **Hamilton**, cette fois dans un contexte général, dans ses *Vorlesungen uber Dynamik* **1842**. **Alfred Clebsch** a généralisé en **1858** les résultats de **Legendre** et de **Jacobi**. **Eduard Heine** a établi le lemme fondamental du calcul des variation en **1870**. Il revenait à **Karl Weierstrass**, dans ses cours professés à l'Université de Berlin, notamment celui de **1879**, de définir la notion d'extremum fort, et d'établir la condition qui porte son nom, ainsi que la "condition d'arrondissement des angles" (également obtenue, indépendamment, par **G.Erdmann** en **1877**). **Paul David Gustave Du Bois-Reymond** a établi son fameux lemme en **1879** : cette extension du lemme fondamental du calcul des variations permet d'établir de manière plus satisfaisante l'équation d'**Euler-Lagrange**. Enfin, **David Hilbert** a établi le théorème de l'intégrale invariante (qui clarifie la théorie de

**Weierstrass**) et résolu le problème de **Dirichlet** (le problème de calcul de variations à intégrales multiples le plus célèbre) en **1900**. Les principaux résultats du calcul des variations classique avaient dès lors été obtenus.

Néanmoins, des compléments substantiels ont été apportés au tournant du vingtième siècle par **Hermann Amandus Schwarz** (généralisation du théorème de **Weierstrass** entre **1898** et **1899**) et **Adolf Kneser** (condition de transversalité, **1900**). **Oskar Bolza** et **Harris Hancock** ont réalisé indépendamment en **1904** deux synthèses de tous les travaux précédents ; leur lecture est encore très instructive et facilement accessible. **Christian Gustav Adolph Mayer** a introduit en **1905** les "champs de Mayer" qui généralisent les champs d'extrémales de **Weierstrass** ; il a également réalisé une étude fine des "arcs anormaux". **William Fogg Osgood** et **Jacques Hadamard** ont continué d'étudier entre **1900** et **1906** le calcul des variations avec intégrale multiple. On peut encore citer les contributions de la première moitié du vingtième siècle dues à **Emmy Noether** (théorème de **Noether** : obtenu en **1918**, il est la formulation mathématique des lois de conservation en physique de l'énergie, de l'impulsion, du moment cinétique, etc.) ; à **Alfred Haar** (le lemme de **Haar**, datant des années **1926-1932**, peut être vu comme une extension du lemme de **Du Bois-Reymond** au cas d'intégrales multiples) ; et à **Constantin Carathéodory** (**Hermann Boerner** appelait en **1953** "*der Königsweg der Variationsrechnung*", autrement dit "la route royale du calcul des variations" l'approche de **Carathéodory**). **Gilbert Ames Bliss** et ses élèves dont **Magnus Hestenes**, ont réalisé pendant plus de vingt ans une étude détaillée du problème de **Bolza**, étude dont les résultats ont été rassemblés dans la vaste synthèse que sont les *Lectures on the Calculus of Variations* de **Bliss**. Mentionnons encore **George David Birkhoff** et son élève **Maston Morse** (théorie de **Morse**). La théorie de **Morse** a été généralisée par **Richard Palais** et **Stephen Smale** en **1964** (condition de compacité de **Palais-Smale**).

Le calcul des variations a connu un profond renouveau dans les années **1950** avec le développement de la théorie de la commande optimale, sous l'impulsion de **Lev Pontriaguine** et **Richard Bellman**. Le formalisme de **Pontriaguine** et de **Bellman** est

une extension et une amélioration du formalisme hamiltonien classique, et clarifie la formulation de **Carathéodory**.

On peut encore mentionner les contributions, postérieures à **1960**, de **Jacques-Louis Lions**, **Ivar Ekeland** et **Jean-Pierre Aubin**. Le calcul des variations "non lisse" développé vers la fin des années **1980** par **Frank H. Clarke**, est un apport significatif. Le calcul des variations reste en mathématiques un domaine fort actif. Les mathématiciens qui ont contribué à son développement sont extrêmement nombreux (ils comprennent la plupart des grands noms du dix-neuvième siècle et du début du vingtième, et même le célèbre philosophe **Edmund Husserl**, élève des mathématiciens **Leo Konigsberger**, **Leopold Kronecker** et **Karl Weierstrass** ; **Husserl** a soutenu en **1883** sa thèse *Beitrag zur Variationsrechnung*). N'ont été mentionnés plus haut que certains parmi les plus notables de ces mathématiciens.

Un domaine d'application important du calcul des variations est l'étude des géodésiques sur une variété munie d'une connexion affine, et plus particulièrement des géodésiques minimales dans un espace de **Riemann**. L'étude locale des géodésiques minimales sur une surface a été réalisée, à la suite de **Carl Friedrich Gauss**, par **Jacobi** (théorie des points conjugués) et **Pierre-Ossian Bonnet** (qui a démontré le résultat que **Jacobi** avait énoncé sans démonstration). Ces travaux ont été complétés par **Kneser**, **Tullio Levi-Civita** et **Elie Cartan** (ce dernier ayant donné de l'équation géodésique sa forme intrinsèque). Le problème global n'a cessé d'être à l'ordre du jour et a donné naissance à la théorie de **Morse**, déjà évoquée.

---

# Introduction

À L'origine, le terme *géodésique* vient de **géodésie** (du grec *gaïa* « terre » et *daiein* « partager, diviser »), la science de la mesure de la taille et de la forme de la terre. La géodésique désignait donc pour des géomètres le chemin le plus court entre deux points de l'espace (sous entendu géographique).

La transposition aux mathématiques fait de la géodésique la généralisation de la notion de ligne droite aux surfaces, et plus généralement aux espaces courbes.

La définition de la géodésique dépendant donc du type d'espace courbe, l'acception précédente n'y est plus vraie que localement dans le cas où cet espace dispose d'une métrique.

Le chemin le plus court entre deux points dans un espace courbe peut être obtenu en écrivant l'équation de la longueur de la courbe, et en cherchant la valeur minimale pour cette valeur. De manière équivalente, on peut définir une autre valeur, l'énergie de la courbe et chercher à la minimiser, ce qui aboutit aux mêmes équations pour une géodésique. Intuitivement, on peut chercher à comprendre cette seconde formulation en imaginant une bande élastique tendue entre deux points, qui, si elle suivait la géodésique, aurait une longueur minimale et donc une énergie minimale.

Les géodésiques sont souvent rencontrées dans le cadre de l'étude de la géométrie riemannienne et plus généralement des géométries métriques. En physique, les géodésiques décrivent le mouvement des particules libres, c'est-à-dire lorsqu'elles ne sont pas soumises à une force externe (autre que la gravitation dans le cadre de la relativité générale); en particulier, le chemin suivi par un rocher en chute libre, un satellite en orbite ou la forme d'une orbite planétaire sont tous décrits par des géodésiques de la théorie de la relativité

générale. Par contre la trajectoire d'un spationaute en route pour la Lune dans une fusée n'est pas une géodésique en raison de la force de poussée exercée par le moteur de l'engin.

Le premier chapitre va nous servir à nous fixer les idées sur ce que sont les géodésiques et comment les obtenir à partir du théorème d'**Euler-Lagrange**.

Le théorème d'**Euler-Lagrange** étant extrêmement général, il est applicable à toute sorte d'espaces de configurations, du moment qu'ils sont différentiables. Cette étude sera axée sur les variétés **Riemanniennes** qui ont pour particularité, en plus d'être différentiables, d'être munies d'une métrique qui permet d'introduire une notion de distance et donc de plus court chemin. Un exemple sera traité, celui de la recherche des géodésiques sur une variété simple : la sphère.

Deux systèmes de coordonnées différents seront alors étudiés : les coordonnées sphériques et les coordonnées stéréographiques. Ceci afin d'illustrer que, même si quelque soit le système de coordonnées utilisé les géodésiques d'une variété sont toujours les mêmes, la difficulté de leur détermination est totalement liée à ces systèmes de coordonnées.

Le deuxième chapitre va nous servir à aller encore plus loin, et cela grâce aux théorèmes de **Hilbert** qui donnent une condition nécessaire et suffisante pour que l'extrémale soit solution du problème variationnel. D'abord on va introduire le problème variationnel, et donner quelques notions de bases. On va enchaîner par les théorèmes de **Hilbert** les plus importants, comme on va voir comment on construit un champ d'extrémales. Enfin, on va donner une approche en analyse fonctionnelle où nous allons donner la notion d'espace fonctionnel adapté à une fonctionnelle et quelques théorèmes et propriétés.

Le troisième chapitre va nous servir à présenter le problème isopérimétrique. La tradition fait remonter le problème isopérimétrique à la fondation de Carthage par la princesse tyréenne **Élissa (alias Didon)**, vers 800 avant Jésus-Christ. D'abord on va donner un fragment d'histoire de ce problème, on suivra cela par quelques définitions et propriétés où on va citer l'inégalité isopérimétrique et le quotient isopérimétrique. Enfin on va conclure par quelques démonstrations élémentaires où on utilise beaucoup plus les polygones.

Ce premier chapitre va nous servir à nous fixer les idées sur ce que sont les géodésiques et comment les obtenir à partir du théorème d'**Euler-Lagrange**. D'abord on va commencer par donner quelques exemples introductifs, ensuite on donnera quelques définitions de base telles que : géodésique, variété et métrique Rimanienne..., après on va parler du théorème d'**Euler-Lagrange** dans  $\mathbb{R}$  comme on va donner sa généralisation dans  $\mathbb{R}^n$ , en fin on va illustrer ce travail par un exemple d'application qui va nous permettre de clarifier les idées, qui est la géodésique de la sphère. Et cela en coordonnées sphériques et en coordonnées stéréographiques.

## 1.1 Quelques exemples introductifs :

### 1.1.1 Longueur minimale d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$

Dans le plan, on veut trouver la courbe la plus courte joignant les points  $A = (x_a, y_a)$  et  $B = (x_b, y_b)$ .

On veut montrer que c'est le segment de droite joignant  $A$  à  $B$ .

Si on veut mettre ce problème sous forme mathématique, il faut commencer par répondre aux questions suivantes :

1. C'est quoi une courbe ?
2. Sa longueur ?
3. Que veut dire "la plus courte" ?

**Réponses :**

1. Une courbe sous forme paramétrée est une fonction définie sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{r} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{x}(t) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

qui à chaque paramètre  $t$  interprété par exemple comme un temps associe une position  $\vec{x}(t)$ . Par exemple, un cercle de rayon  $R$  centré à l'origine est donné par :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$$

pour  $t \in [0, 2\pi]$ , à chaque angle  $t$  on associe la position  $\vec{x}$  correspondant à cet angle sur le cercle.

L'image  $\Gamma = \text{Im } \vec{r}$  est également appelée une courbe géométrique.

2. La longueur de la courbe paramétrée  $\vec{r}$  est donnée par :

$$J(\vec{r}) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \text{noté } J(\Gamma) \quad (1.1.2)$$

3. Trouver la courbe la plus courte signifie " minimiser  $J$  ", C'est-à-dire : parmi toutes les fonctions  $\vec{r} \in C^1$  trouver une fonction  $\vec{r}_m$  qui minimise  $J(\vec{r})$  telle que :

$$J(\vec{r}_m) = \min_{\substack{\vec{r} \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^2) \\ \vec{r}(a)=A, \vec{r}(b)=B}} J(\vec{r})$$

### 1.1.2 Brachistochrone

L'exemple le plus important historiquement est celui du **brachistochrone**.

On laisse un objet glisser sans frottement du point  $A$  le long du toboggan. Comment choisir la forme du toboggan, c'est-à-dire la fonction  $f$ , pour que le temps d'arrivée au point  $B$  soit minimum? Vous voyez qu'une fois qu'on se donne un toboggan, c'est-à-dire une fonction, en utilisant quelques notions de mécanique et de conservation d'énergie, on peut calculer le temps de parcours, c'est-à-dire un scalaire. La vitesse de l'objet à l'ordonnée  $y$  vaut  $\sqrt{2gy}$ . L'élément d'arc  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$  est parcouru en un temps  $dt = ds/v$ . Le temps du parcours est donc  $T = \int_0^{x_b} \sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{2gf(x)}} dx$ .

Et il faut trouver la fonction  $f$  qui minimise cette intégrale. Ce problème avait été lancé comme un défi par un des frères **Bernoulli** vers 1690 (à peine dix ans après l'invention du calcul différentiel) à la communauté scientifique. Tous les grands : **Newton**, **Leibnitz**, l'autre **Bernoulli**, **L'Hospital**,...,y répondirent. **Euler** en 1740 a trouvé une solution générale de ce genre de problème et **Lagrange** en 1780 les a généralisés à la mécanique.

#### Plus explicitement :

Dans  $\mathbb{R}^2$ , connaissant un point haut  $A = (x_a, y_a)$  et un point bas  $B = (x_b, y_b)$ , on cherche à connaître la courbe joignant  $A$  à  $B$  telle que : si on lâche un objet de  $A$  le long de la courbe, l'objet arrive en un temps minimum en  $B$ . On suppose les frottements nuls et la gravité constante.

Mathématiquement ce sont **les cycloïdes**.

Par choix du repère  $(o, x, y)$ , on prend  $y_a = 0$  et l'axe des  $y$  est dirigé vers le bas.

Soit

$$E = \{f \in C^1([x_a, x_b]; \mathbb{R}) : f(x_a) = y_a \text{ et } f(x_b) = y_b \text{ imposés}\}. \quad (1.1.3)$$

On cherche une solution dans  $E$ .

Calculons le temps mis pour aller de  $A$  à  $B$  le long du graphe de  $f$ . En un point  $\vec{x} = (x, y) = (x, f(x))$  du graphe, l'élément de longueur est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

si en ce point la vitesse est

$$\|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt}$$

ce qui implique que

$$dt = \frac{ds}{\|\vec{v}\|}$$

d'où le temps est

$$T(f) = \int_{x=x_a}^{x_b} \frac{\sqrt{1+f'^2(x)} dx}{\|\vec{v}\|}.$$

Il reste à exprimer  $\vec{v}$  en fonction de  $x$ . La conservation de l'énergie totale nous donne :

$$\frac{1}{2}m \|\vec{v}(x, y)\|^2 - mgy = \text{constante}$$

en tout point  $(x, y)$  de la courbe.

puisque la vitesse et la position initiales sont nulles. On a alors :

$$\|\vec{v}(x, y)\| = \sqrt{2mg}.$$

donc

$$T(f) = \int_{x=x_a}^{x_b} \sqrt{\frac{1+f'^2(x)}{2gf(x)}} dx \quad (1.1.4)$$

Pour montrer que la fonction  $f$  réalisant le minimum de  $T$  est une **cycloïde**, on utilisera l'équation d'**Euler-Lagrange**.

## 1.2 Variété et métrique Riemanniennes

### 1.2.1 Variété Riemannienne

**Définition 1.2.1** Une variété Riemannienne est une variété différentielle  $V$  munie en chacun de ses points  $M$  d'une forme quadratique définie positive  $g_M$  sur l'espace tangent  $T_M V$  en  $M$ . La donnée  $g$  est appelée métrique Riemannienne sur  $V$  et permet de définir une notion de distance entre deux points sur la variété. Les métriques Riemanniennes existent sur toute variété différentielle.

Pour illustrer ce qu'est une métrique, ci-après est développé l'exemple de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.2.2 Métriques Riemannienne

**Exemple 1.2.1** *La métrique de  $\mathbb{R}^3$*

Prenons l'espace  $\mathbb{R}^3$  qui est l'espace de vie des objets de tous les jours. Il s'agit bien d'une variété différentielle et dans laquelle on mesure quotidiennement des distances à l'aide d'une règle ou d'un mètre par exemple. Et il se trouve que ce mètre à certaines propriétés : il est tel que dans toutes les directions la façon de mesurer les distances est la même, qu'elle est indépendante de l'endroit où l'on se trouve dans l'espace et que si on se déplace avec une vitesse de norme 1 pendant une unité de temps alors on aura avancé d'une unité de distance. Synthétiquement, il s'agit là de la notion usuelle de distance. Alors l'espace  $\mathbb{R}^3$  avec cette notion de distance est bien une variété différentiable munie d'une métrique et donc Riemannienne.

Explicitons cette métrique :

Pour cela, munissons cette variété d'un système de coordonnées  $(x, y, z)$ . Soit  $F(t)$  une courbe dans cette variété passant par deux points  $p_1$  et  $p_2$  respectivement au temps  $t_1$  et  $t_2$ . Cette courbe peut s'exprimer en fonction des coordonnées comme  $F(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \in \mathbb{R}^3$ . Alors sa longueur entre les deux points  $p_1$  et  $p_2$  sera donnée par somme (sous forme d'intégrale) des longueurs infinitésimales  $ds$  à chaque instant  $t$  entre  $t_1$  et  $t_2$ . D'après ce qui précède sur la mesure des distances dans  $\mathbb{R}^3$ , cette longueur de déplacement infinitésimale le long de  $F(t)$  s'écrira

$$ds = \| dF(t) \| = \| \dot{F}(t) \| dt$$

où  $\| \cdot \|$  est la norme usuelle dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\dot{F}(t)$  la vitesse de parcours de la courbe à l'instant  $t$ . D'où, en fonction du système de coordonnées, on a :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Et cette équation peut être réécrite comme

$$ds^2 = \underbrace{(dx \quad dy \quad dz)}_g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

*C'est cette matrice  $g$  qui est appelée la métrique de la variété Riemannienne.*

*Dans le cas de  $\mathbb{R}^3$  la métrique est la matrice identité ce qui résume bien les propriétés citées sur le mètre permettant de mesurer usuellement les distances dans  $\mathbb{R}^3$  ( identique dans toutes les directions, indépendant du temps...).*

**Remarque 1.2.1** *Un abus de langage fait que souvent le mot **métrique** désigne à la fois la matrice  $g$  et l'élément infinitésimal de longueur au carré  $ds^2$ .*

Après cette illustration par un exemple de ce qu'est une métrique Riemannienne, en voici une définition générale de la métrique Riemannienne.

**Définition 1.2.2** *Soit  $V$  une variété Riemannienne de dimension  $n$  et  $M$  un point de cette variété de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ . Alors la métrique  $g$  de cette variété au point  $M$  est une matrice carrée de dimension  $n$ , définie positive, telle que l'élément infinitésimal  $ds^2$  s'écrive :*

$$ds^2 = (dx_1, \dots, dx_n)g \begin{pmatrix} dx_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{pmatrix}$$

*Et cette métrique  $g$  dépend du point  $M$ .*

### 1.2.3 Géodésique

**Définition 1.2.3** *Géodésique*

*Soit une variété Riemannienne. Une géodésique sur cette variété est une courbe minimisante de l'action du système physique associé, et c'est aussi une courbe sur la variété permettant de relier deux points de celle-ci par le plus court chemin.*

**Exemple 1.2.2** *On se place ici dans  $\mathbb{R}^3$ . On considère une surface paramétrée, pour  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$  et  $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$  :*

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

et notons  $S = \text{Im}(\vec{r})$  l'ensemble des points de la surface géométrique image de  $\vec{r}$ . La sphère  $S$  centrée en  $\vec{0}$  de rayon  $R$  est donnée par :

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$  (longitude),  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (latitude)

Soit une courbe dessinée sur  $S$ , pour  $u \in [u_0, u_1]$  :

$$\vec{Z}(u) = \vec{r}(\theta(u), \varphi(u)),$$

dessiner sur cette surface. On s'est implicitement donné des fonctions

$$\theta : u \in [u_0, u_1] \rightarrow \theta(u) \in [\theta_0, \theta_1] \quad \text{et} \quad \varphi : u \in [u_0, u_1] \rightarrow \varphi(u) \in [\varphi_0, \varphi_1].$$

On se donne deux points  $A, B \in S$  et une courbe sur  $S$  joignant  $A$  et  $B$ . Si cette courbe est de longueur minimale, elle est appelée **une géodésique** sur  $S$ .

## 1.3 Théorème d'**Euler-Lagrange** dans $\mathbb{R}$

L'équation d'**Euler-Lagrange** est un résultat mathématique qui joue un rôle fondamental dans le calcul des variations. On retrouve cette équation dans de nombreux problèmes réels de minimisation de longueur d'arc, tel que le problème brachistochrone ou bien encore les problèmes géodésiques. Elle est nommée d'après **Leonhard Euler** et **Joseph-Louis Lagrange**.

### 1.3.1 Le problème

Soit une fonction :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, Y, Z) & \longmapsto & F(x, Y, Z) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

qu'on supposera de classe  $C^2$  dans la suite.

On se donne deux réels  $\alpha_0, \alpha_1$  et on note :

$$E = \{Y \in C^2([a, b]; \mathbb{R}) : Y(a) = \alpha_0, Y(b) = \alpha_1\}, \quad (1.3.2)$$

L'ensemble des fonctions qui sont de classe  $C^2$  et dont les extrémités sont bloquées.

$$E_0 = \{\varphi \in C^2([a, b]; \mathbb{R}) : \varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0\}, \quad (1.3.3)$$

l'espace vectoriel associé à l'espace affine  $E$ .

Soit  $J : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle à minimiser sur  $E$  de la forme :

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y') dx$$

**Exemple 1.3.1** Pour la brachistochrome 1.1.4 on pose

$$F(x, Y, Z) = \sqrt{\frac{1 + Z^2}{2gY}}.$$

### 1.3.2 Théorème d'Euler-Lagrange dans $\mathbb{R}$

On veut minimiser  $J$  dans  $E$  où  $J$  est donné par

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y(x), Y'(x)) dx \quad (1.3.4)$$

c'est à dire : trouver  $Y \in E$  telle que

$$J(Y) = \min_{f \in E} J(f).$$

Sous les hypothèses de dérivabilité usuelles, on veut donc que la différentielle  $dJ(Y)$  ou dérivée de  $J$  en  $Y$  soit nulle.

On rappelle que

$$dJ(Y) : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

est l'application linéaire, quand elle existe, définie sur l'espace vectoriel associé à l'aide du développement limité au premier ordre, pour tout  $\varphi \in E_0$  :

$$J(Y + \varepsilon\varphi) = J(Y) + \varepsilon dJ(Y)\varphi + o(\varepsilon) \text{ au voisinage de } \varepsilon = 0 \quad (1.3.5)$$

En particulier le choix  $\varphi \in E_0$  permet d'avoir

$$Y + \varepsilon\varphi \in E.$$

Alors  $J(Y + \varepsilon\varphi)$  est bien défini.

quant  $dJ(Y)$  existe, pour toute fonction  $\varphi \in E_0$  la quantité suivante existe :

$$dJ(Y)\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(Y + \varepsilon\varphi) - J(Y)}{\varepsilon} \quad (1.3.6)$$

appelée la dérivée directionnelle de  $J$  en  $Y$  dans la direction  $\varphi$ , quant elle existe.

Et une condition nécessaire pour que  $J$  soit minimum en  $Y$  est que ses dérivées directionnelles  $dJ(Y)\varphi$  soient nulles pour toute fonction  $\varphi \in E_0$  (variation nulles au voisinage de  $Y$ ).

Sinon il existerait un  $\varphi$  et un  $\varepsilon$  tel que

$$J(Y + \varepsilon\varphi) < J(Y)$$

par linéarité de  $dJ(Y)$ , la fonction

$$\varepsilon \longrightarrow J(Y + \varepsilon\varphi) \in \mathbb{R}$$

a pour tangente une droite qui passe par  $J(Y)$  et a pour pente  $dJ(Y)\varphi$ .

**Théorème 1.3.1** *Pour que  $J$  ait un minimum en  $Y$ , quand  $F \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ , il est nécessaire d'avoir, pour tout  $x$*

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)) \right) = 0 \quad (1.3.7)$$

*On rappelle, voir paragraphe précédent, que le terme en  $\frac{d}{dx}$  est la dérivée totale, et signifie la dérivée*

$$\frac{dg}{dx}(x) = g'(x)$$

*de la fonction*

$$g : x \longrightarrow g(x)$$

*où ici*

$$g(x) = \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x))$$

*fonction de la seule variable  $x$ .*

Notation abusive usuelle :

$$\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) = 0 \quad (1.3.8)$$

**Preuve.** Montrons que 1.3.7 est une condition nécessaire.

supposons donc que  $dJ(Y)\varphi = 0$  pour tout  $\varphi \in E_0$ .

on a

$$dJ(Y)\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b G_{y,\varphi}(\varepsilon, x) dx :$$

$$G_{y,\varphi}(\varepsilon, x) = \frac{F(x, (Y + \varepsilon\varphi)(x), (Y' + \varepsilon\varphi')(x)) - F(x, Y(x), Y'(x))}{\varepsilon}$$

mais on sait que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x, Y + \varepsilon B, Z + \varepsilon C) - F(x, Y, Z)}{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y, Z).B + \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y, Z).C$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{y,\varphi}(\varepsilon, x) = \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y(x), Y'(x)).\varphi(x) + \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)).\varphi'(x).$$

Supposons suffisamment de régularité pour pouvoir passer à la limite sous le signe  $\int$

$$dJ(Y)\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b G_{y,\varphi}(\varepsilon, x) dx$$

et notre hypothèse  $dJ(Y)\varphi = 0$  fait que

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y(x), Y'(x)).\varphi(x) + \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)).\varphi'(x) \right] dx = 0 \quad (1.3.9)$$

Par intégration par parties on a :

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)).\varphi'(x) dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)).\varphi(x) \right) dx + [\dots]_a^b ,$$

où le terme de bord

$$[\dots]_a^b = \left[ \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)).\varphi(x) \right]_a^b = 0$$

puisque  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . On doit donc avoir :

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)) \right) \right) .\varphi(x) dx = 0 \quad (1.3.10)$$

Ce pour toute fonction  $\varphi \in E_0$ . D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)) \right) = 0$$

■

**Remarque 1.3.1** On appelle point critique un point  $Y$  tel que  $dJ(Y) = 0$

le théorème ci-dessus donne une condition nécessaire et suffisante pour  $Y$  soit critique.

En effet, réciproquement : si 1.3.8 est vraie alors on a 1.3.10 pour tout  $\varphi \in E_0$ , et donc, par intégration par parties, on a  $dJ(Y) \cdot \varphi = 0$  pour tout  $\varphi \in E_0$ , donc  $dJ(Y) = 0$ , donc  $Y$  est un point critique.

### 1.3.3 Calcul de $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial Y'}$ et équation d'**Euler**

Posons

$$g(x) = M(x, Y(x), Y'(x)) \text{ où } M(x, Y, Z) = \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y, Z)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx}(x) &= \frac{\partial M}{\partial x}(x, Y(x), Y'(x)) + \frac{\partial M}{\partial Y}(x, Y(x), Y'(x)) \frac{dY}{dx}(x) + \frac{\partial M}{\partial Z}(x, Y(x), Y'(x)) \frac{dY'}{dx}(x) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Z}(x, Y(x), Y'(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Z}(x, Y(x), Y'(x)) Y'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}(x, Y(x), Y'(x)) Y''(x) \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

L'équation d'**Euler-Lagrange** 1.3.8 devient donc, en  $(x, Y(x), Y'(x))$  :

$$\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y'} - Y' \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Y'} - Y'' \frac{\partial^2 F}{\partial Y'^2} = 0 \quad (1.3.12)$$

appelée équation d'**Euler**.

L'inconnue est une fonction

$$Y : x \in [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

et l'équation d'**Euler** est une équation du second ordre qui nécessite deux constantes d'intégration, ici données par  $Y(a)$  et  $Y(b)$ .

Le graphe de la fonction  $x \longrightarrow Y(x)$  a ses extrémités qui passe par les points  $(a, Y(a))$  et  $(b, Y(b))$  imposés.

**Exemple 1.3.2** Longueur d'une courbe en deux dimension

On a

$$F(x, Y, Z) = \sqrt{1 + Z^2} = (1 + Z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, Y, Z) = \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y, Z) \text{ avec } \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y, Z) = Z(1 + Z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

alors

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}(x, Y, Z) = (1 + Z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

et l'équation d'**Euler** est :

$$f''(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

donc  $f''(x) = 0$ , d'où  $f(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont données par les conditions aux limites.

La courbe de longueur minimale est un segment de droite.

### 1.3.4 Cas $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ : Formule de Beltrami

C'est le cas de l'équation d'**Euler** 1.3.12 quand

$$F(x, Y, Z) = F(Y, Z)$$

c'est à dire quand  $F$  ne dépend pas de  $x$ .

Dans ce cas on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

et 1.3.12 devient :

$$\frac{\partial F}{\partial Y} - Y' \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Y'} - Y'' \frac{\partial^2 F}{\partial Y'^2} = 0 \tag{1.3.13}$$

aux points  $(Y, Z) = (Y(x), Y'(x))$ .

Puis on remarque que, si

$$z : x \longrightarrow z(x)$$

est la fonction définie par :

$$z(x) = F(Y(x), Y'(x)) - Y'(x) \frac{\partial F}{\partial Y'}(Y(x), Y'(x)) \quad (1.3.14)$$

notée :

$$z = F - Y' \frac{\partial F}{\partial Y'} \quad (1.3.15)$$

On a par dérivation de fonctions composées en notation abrégées :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\partial F}{\partial Y} Y' + \frac{\partial F}{\partial Y'} Y'' - Y'' \frac{\partial F}{\partial Y'} - Y' \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Y'} Y' - Y' \frac{\partial^2 F}{\partial Y'^2} Y'' \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Y'} Y' - \frac{\partial^2 F}{\partial Y'^2} Y'' \right) Y' \end{aligned}$$

Donc 1.3.13 donne  $z' = 0$ . Alors il existe une constante  $K$  telle que  $z(x) = K$  pour tout  $x$  :

$$F - Y' \frac{\partial F}{\partial Y'} = K \quad (1.3.16)$$

en tous les points  $(Y, Z) = (Y(x), Y'(x))$ . C'est l'équation de **Beltrami**. Le sens de 1.3.16 est : il existe  $K \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in [a, b]$  on a :

$$F(Y(x), Y'(x)) - Y'(x) \frac{\partial F}{\partial Y'}(Y(x), Y'(x)) = K \quad (1.3.17)$$

**Exemple 1.3.3** *En deux dimension, la longueur de la courbe explicite donnée pas 1.1.2*

*On a*

$$F(x, Y, Z) = \sqrt{1 + Z^2}$$

*avec*

$$\frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y, Z) = \frac{Z}{\sqrt{1 + Z^2}}$$

1.3.16 donne, il existe  $K \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} - f'(x) f'(x) (1 + f'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} = K,$$

*donc*

$$1 + f'(x)^2 - f'(x)^2 = K \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

*donc  $f'(x) = \sqrt{\frac{1}{K} - 1}$  =noté  $a$  où  $a$  est une constante. Donc nécessairement  $f(x) = ax + b$ .*

*Et une telle fonction convient.*

**Exemple 1.3.4 Brachistochrone**

Ici

$$F(x, Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+Z^2}{Y}} = F(Y, Z)$$

ne dépend pas de  $x$ . Donc la courbe  $Y = {}^{noté} f$  qui réalise le minimum cherché vérifie l'équation 1.3.16 de **Beltrami**.

On a

$$\frac{\partial F}{\partial Z}(Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{Z}{\sqrt{(1+Z^2)Y}}$$

et donc il existe une constante  $K \in \mathbb{R}$  telle que, cf 1.3.16, avec  $Y = f$  et  $Z = f'$

$$\sqrt{\frac{1+Z^2}{Y}} - Z \frac{Z}{\sqrt{(1+Z^2)Y}} = \sqrt{2g}K$$

on a donc :

$$1 = K \sqrt{2g} \sqrt{(1+Z^2)Y},$$

Soit, en posant

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2gK^2} \\ D &= f(1+f'^2), \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

dont la solution est une **cycloïde** pour une roue de rayon  $R = \frac{D}{2}$ .

**1.4 Théorème d'Euler-Lagrange dans  $\mathbb{R}^n$ :  $\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial Y'} = 0$**

**Introduction :**

On s'intéresse aux fonctions à valeurs vectorielles :

$$E = \left\{ Y : t \in [a, b] \longrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, Y(a) \text{ et } Y(b) \text{ fixés, } Y \in C^2 \right\} \tag{1.4.1}$$

La dérivée est notée

$$\frac{dY}{dt}(t) = Y'(t)$$

et la dérivée seconde est notée

$$\frac{d^2Y}{dt^2}(t) = Y''(t)$$

Soit

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \vec{y}, \vec{z}) \mapsto F(t, \vec{y}, \vec{z}) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

une fonction de classe  $C^2$ , et soit

$$J(Y) = \int_a^b F(t, Y(t), Y'(t)) dt \quad (1.4.3)$$

une fonctionnelle à minimiser sur l'ensemble des fonction  $Y \in E$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$ . En cartésien on prend  $Y = (x, y) = \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ . Et  $Y(t) = (x(t), y(t))$  donne la position à l'instant  $t$ . Et  $Y'(t)$  et  $Y''(t)$  donne les vitesses et accélération au point  $Y(t)$  à l'instant  $t$ . Le long de la trajectoire  $t \longrightarrow Y(t)$ .

### 1.4.1 Théorème d'Euler-Lagrange dans $\mathbb{R}^n$

Soit  $E$  l'espace défini en 1.4.1.

**Théorème 1.4.1** Une fonction  $Y \in E$  qui réalise le minimum de  $J$  vérifie :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(t, Y(t), Y'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial z_i}(t, Y(t), Y'(t)) \right) = 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (1.4.4)$$

système de  $n$  équations aux  $n$  inconnues. Les  $n$  fonctions  $Y_i$  composantes de  $Y$ . Ce qui est noté :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (1.4.5)$$

ou encore (écriture du système des  $n$  équations) :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{y}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{z}} \right) = 0 \quad (1.4.6)$$

soit avec les notations de la mécanique : pour tout  $i = 1, \dots, n$  :

$$\frac{\partial F}{\partial Y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial Y'_i} = 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (1.4.7)$$

ou encore (écriture du système des  $n$  équations) :

$$\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial Y'} = 0 \quad (1.4.8)$$

**Preuve.** Reprendre la démonstration du théorème dans  $\mathbb{R}$

ici on pose

$$M(t, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{\partial F}{\partial z_i}(t, \vec{y}, \vec{z}), \text{ puis } g(t) = M(t, Y(t), Y'(t))$$

on obtient, avec des notations abrégées :

$$g' = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial \vec{y}} Y' + \frac{\partial M}{\partial \vec{z}} \cdot Y'' = 0,$$

les équations d'**Euler** sont donc, pour tout  $i = 1, \dots, n$  :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial \vec{y}} Y' - \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial \vec{z}} Y'' = 0, \quad (1.4.9)$$

Soit :

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial y_j} Y'_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j} Y''_j = 0, \quad (1.4.10)$$

■

**Proposition 1.4.1** *Equation d'Euler*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial Y'_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial Y'_i \partial Y} Y' - \frac{\partial^2 F}{\partial Y'_i \partial Y} Y'' = 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (1.4.11)$$

*système de  $n$  équations différentielles du second ordre dont l'inconnue est la fonction*

$$Y : t \in [a, b] \longrightarrow Y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

*et les constantes d'intégrations sont les  $2n$  positions imposées  $Y(a)$  et  $Y(b)$ .*

## 1.5 Un exemple d'application : géodésiques d'une sphère

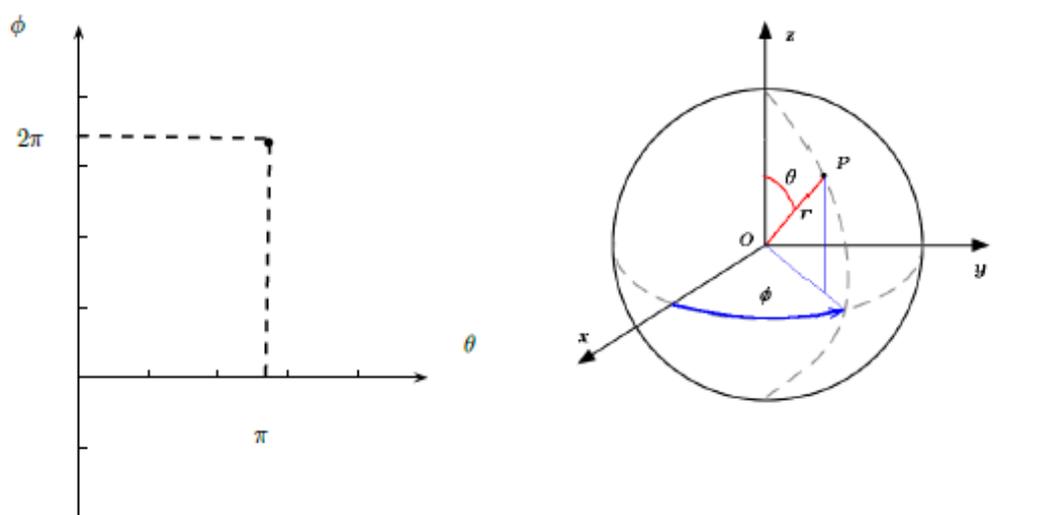
Dans cette section seront déterminées les courbes géodésiques de la sphère de rayon 1, et cela à partir de deux système de coordonnées différents : les coordonnées sphériques et les

coordonnées stéréographiques. Ceci permettra tout d'abord de montrer que, quelque soit le système de coordonnées placé sur la variété, les géodésiques sont les mêmes. C'est à dire, elles sont intrinsèques à sa géométrie. Et d'autre part cela illustrera que le système différentiel permettant de trouver ces géodésiques est d'une difficulté de résolution en fonction du système de coordonnées choisit. On dit alors que les systèmes de coordonnées introduisent des non-linéarités de paramétrage sur le système différentiel.

### 1.5.1 Géodésiques en coordonnées sphériques

Une sphère de rayon  $r = 1$  peut être représentée comme l'immersion dans  $\mathbb{R}^3$  muni des coordonnées  $(x, y, z)$  d'une portion du plan muni des coordonnées  $(\theta, \phi)$  où  $\theta$  et  $\phi$  sont deux angles tels que  $\theta \in [0; \pi]$  et  $\phi \in [0; 2\pi]$ . Et la fonction d'immersion  $f$  permettant de passer de l'un à l'autre s'écrit :

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$



Immersion du plan  $(\theta, \phi)$  dans  $\mathbb{R}^3$  : la sphère de rayon 1.

### Métrie Riemannienne de la sphère en coordonnées sphériques

L'élément infinitésimal de longueur dans  $\mathbb{R}^3$  s'écrit  $ds^2(x, y, z) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , ce qui peut se réécrire en fonction de  $\theta$  et  $\phi$  comme :

$$ds^2(x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = dx^2(\theta, \phi) + dy^2(\theta, \phi) + dz^2(\theta, \phi)$$

D'où, en remplaçant à l'aide de  $f(\theta, \phi)$  :

$$ds^2(x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = ds^2(\theta, \phi)$$

où  $ds^2(\theta, \phi)$  est l'élément infinitésimal de mesure des longueurs dans la portion du plan  $(\theta, \phi)$ .

**Remarque 1.5.1** *Le fait de remplacer  $x, y$  et  $z$  par  $x(\theta, \phi), y(\theta, \phi)$  et  $z(\theta, \phi)$  s'appelle faire le tiré-arrière de  $ds^2$  par  $f$ . De plus, puisque  $ds^2(x, y, z) = ds^2(\theta, \phi)$  alors le tiré-arrière par  $f$  de la métrique de la variété d'arrivée est la métrique de celle de départ. Autrement dit, la métrique est préservée par  $f$  et donc les distances sont conservées. Alors  $f$  est appelée une isométrie.*

On peut réécrire  $ds^2$  sous forme matricielle ce qui fait alors apparaître la métrique  $g$  de la variété comme ceci :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} d\theta & d\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

D'où la métrique associée à la sphère en coordonnées sphériques est symétrique et s'écrit :

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

L'obtention de cette métrique permet de poursuivre en utilisant les résultats de la section précédente pour déterminer le système différentiel vérifié par les géodésiques de la sphère.

### Obtention du système différentiel d'Euler-Lagrange

La fonctionnelle à minimiser pour trouver les géodésiques de la sphère s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\int ds = \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2} = \int \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2} dt = \int L(t, \theta(t), \dot{\theta}, \dot{\phi}) dt$$

où  $L$  est le Lagrangien considéré.

Alors, en exprimant l'équation obtenue dans un système de coordonnées tel que  $F(t) = (x_1(t) \dots x_i(t) \dots x_n(t))^T$ , et en tirant partie de la symétrie de la matrice  $g$ , on obtient que les géodésiques de la variété vérifient le système différentiel suivant

$$\ddot{x}_k + \dot{x}_i \dot{x}_j \Gamma_{ij}^k = 0 \text{ pour } k = 1, \dots, n \quad (1.5.1)$$

où les  $\Gamma_{ij}^k$  sont les appelées symboles de **Cristoffel** et sont définies par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (g_{im,j} + g_{jm,i} + g_{ij,m})$$

Pour écrire l'équation 1.5.1 dans ce système de coordonnées il faut tout d'abord calculer les symboles de **Cristoffel** associés à la métrique. On rappelle que  $g$  étant symétrique, les  $\Gamma_{ij}^k$  le sont également, c'est à dire :  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . D'où

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} &= \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} = 0 \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} &= 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} &= 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} &= 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Alors, dans ce système de coordonnées, où la courbe  $\vec{F}(t)$  est paramétrée par le temps telle que  $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$ , l'équation 1.5.1 est équivalent à :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\phi} = -\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} \end{cases}$$

Les géodésiques de la sphère de rayon 1 en coordonnées sphériques vérifient donc ces équations différentielles. Pour obtenir ces courbes géodésiques, il faudrait résoudre ces équations différentielles ce qui n'est pas réalisable de façon simple, d'où, l'introduction au paragraphe suivant d'une reparamétrisation du lagrangien.

**Reparamétrisation du lagrangien et géodésiques :** Pour une sphère de rayon 1, étudiée en coordonnées sphériques, la quantité à minimiser est la fonctionnelle :

$$\int ds = \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2}$$

or on peut réécrire cela comme :

$$\int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2} = \int \sqrt{1 + [\sin^2 \theta \phi'(\theta)]^2} d\theta = \int L(\theta, \phi'(\theta)) d\theta$$

où  $L(\theta, \phi'(\theta))$  est une reparamétrisation du lagrangien décrivant le système étudié, qui est alors non-plus paramétré par le temps mais par l'angle  $\theta$ . Et il est à noter que cette écriture du lagrangien est indépendante de  $\phi(\theta)$  donc  $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ , d'où si l'on écrit l'équation d'**Euler-Lagrange** correspondante on a :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial L}{\partial \phi'} \right) = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial \phi'} = cste = C$$

Or

$$L(\theta, \phi'(\theta)) = \sqrt{1 + [\sin^2 \theta \phi'(\theta)]^2}$$

d'où, en calculant  $\frac{\partial L}{\partial \phi'}$ , et en cherchant à exprimer  $\phi'$  en fonction de  $\theta$  et  $C$ , on obtient, pour  $|C| < 1$  :

$$\phi'(\theta) = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{C}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}$$

Alors en intégrant par la méthode de séparation de variables on obtient :

$$\phi + \underbrace{D}_{=cste} = \int \frac{C}{\underbrace{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - C^2}}_{=I}} d\theta \quad (1.5.2)$$

on note  $I$  le membre de droite. Pour le calculer, le changement de variable suivant sera opéré :

$$X = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cot \theta \quad (1.5.3)$$

**Remarque 1.5.2** *Le détail des calculs permettant d'obtenir ce changement de variables est donné en annexe*

et alors avec ce changement de variables, on obtient que :

$$I = \arccos(X) + \underbrace{E}_{cste}$$

en remplaçant  $I$  dans 1.5.2 , et en notant  $\beta = E - D$ , on obtient :

$$\phi - \beta = \arccos(X) \quad (1.5.4)$$

$$\iff \cos(\phi - \beta) = X = \frac{Cu}{q}, \quad \text{où } q^2 = 1 - C^2 > 0$$

$$\iff \cos(\phi - \beta) = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cot \theta \quad \text{où } |C| < 1$$

Puisque  $|C| < 1$ , cette constante peut être écrite comme le sinus d'un angle quelconque  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ , soit  $C = \sin \alpha$  alors on a :

$$\cos(\phi(\theta) - \beta) = \tan \alpha \cot \theta \quad (1.5.5)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux angles constants ( $\alpha \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ ).

Il s'agit là de l'équation des grands cercles de la sphère et en voici quelques uns. Pour les tracer on a utilisé le fait que

$$1.5.5 \iff \phi(\theta) = \arccos(\tan(\alpha) \cot(\theta)) + \beta$$

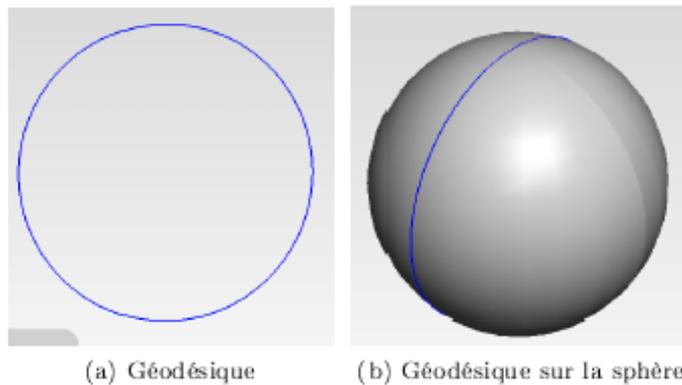
On rappelle qu'en coordonnées sphériques une sphère de rayon 1 est paramétrisée comme ceci :

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

D'où, avec l'équation précédente, les géodésiques sont paramétrées par :

$$\begin{cases} x = \cos(\arccos(\tan \alpha \cot \theta) + \beta) \sin \theta \\ y = \sin(\arccos(\tan \alpha \cot \theta) + \beta) \sin \theta \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un cercle et en particulier d'un grand cercle de la sphère en prenant  $\alpha = \beta = 0$  :

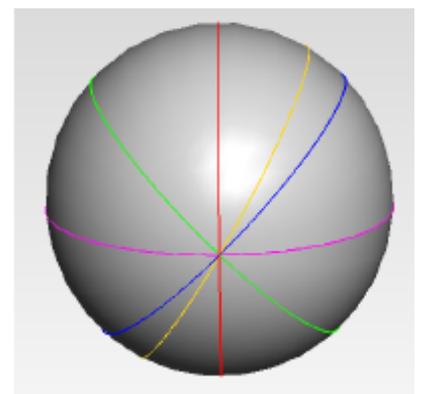


- Une géodésique de la sphère pour  $\alpha = \beta = 0$

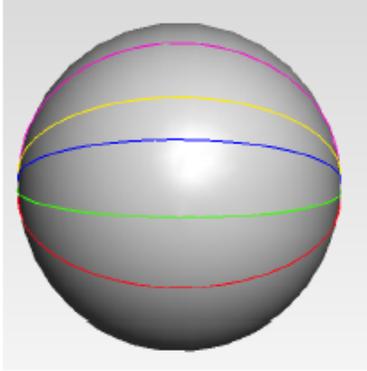
Maintenant, voici ce que l'on obtient pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  (constantes), c'est à dire pour différentes conditions initiales :

;- Évolution des géodésiques en fonction de  $\beta$  avec  $\alpha = 0$  :

couleur	$\beta$
—	$\frac{\pi}{2}$
—	$\frac{\pi}{6}$
—	$\pi$
—	$\frac{\pi}{4}$
—	$-\frac{\pi}{4}$

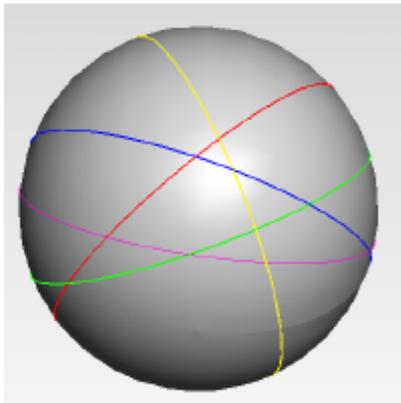


Evolution des géodésiques en fonction de  $\beta$  avec  $\alpha = 0$  :



– Évolution des géodésiques en fonction de  $\alpha$  avec  $\beta = \frac{\pi}{2}$  :

couleur	$\alpha$
—	$\frac{\pi}{8}$
—	$\frac{3\pi}{8}$
—	$\frac{5\pi}{8}$
—	$\frac{7\pi}{8}$
—	$0$



– Évolution des géodésiques en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  :

couleur	$\alpha$	$\beta$
—	$\frac{-\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$
—	$\frac{7\pi}{8}$	$-\pi$
—	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{6}$
—	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{6}$
—	$\frac{-3\pi}{8}$	$\frac{-7\pi}{6}$
—	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$
—	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$

**Remarque 1.5.3** *Ce qui vient d'être fait permet de dire que, si on choisi des conditions initiales sur la sphère, alors on sera en mesure de trouver la géodésique qui correspond.*

Dans cette section, les géodésiques de la sphère on été obtenues à partir des coordonnées sphériques, et la résolution du système différentiel permettant de les obtenir n'a pas été facile. Dans la suite, ces géodésiques vont être re-déterminées (sans entrer autant dans les détails le travail ayant déjà été effectué une fois) pour les coordonnées stéréographiques

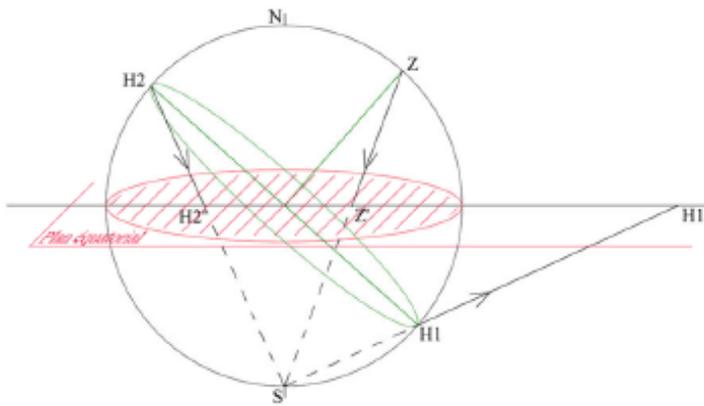
de la sphère. Et cela afin, d'une part, de montrer qu'avec cet autre système de coordonnées les géodésiques de la sphère seront aussi les grands cercles de celle-ci, ce qui illustre le caractère intrinsèque à la géométrie de la variété des géodésiques. Et, d'autre part, afin de montrer que le système différentiel à résoudre pour obtenir ces courbes géodésiques est encore plus compliqué dans le cas des coordonnées stéréographiques. Ce qui illustrera les non-linéarités de paramétrage sur les équations d'**Euler-Lagrange**.

### 1.5.2 Géodésiques en coordonnées stéréographiques

Les coordonnées stéréographiques sont un système de coordonnées basé sur la projection stéréographique. La projection stéréographique était utilisée dans la conception des astrolabes arabes de l'époque médiévale. Elle est amplement utilisée en cristallographie pour étudier la symétrie morphologique des cristaux et, notamment, pour représenter les formes cristallines.

La projection stéréographique est une méthode permettant de représenter une partie d'un point sur un plan. On convient souvent que le point dont on prive la sphère sera un des pôles de celle-ci ; le plan de projection peut être celui qui sépare les deux hémisphères, nord et sud, de la sphère qu'on appelle plan équatorial. On peut également faire une projection stéréographique sur n'importe quel plan parallèle au plan équatorial pourvu qu'il ne contienne pas le point dont on prive la sphère.

Si par exemple on effectue une projection stéréographique de la sphère sur son plan équatorial, à partir du pôle Sud noté  $S$ , alors l'image  $Z'$  d'un point  $Z$  de cette sphère par la projection stéréographique sera définie par l'intersection entre le plan équatorial et la droite  $(SZ)$  (cette projection revient à observer la sphère à partir du pôle sud). Et le seul point qui ne puisse être représenté de cette manière est le point  $S$  : le pôle sud lui-même.



Projection stéréographique de la sphère de puis le pôle sud sur son plan équatorial.

C'est ainsi que les coordonnées stéréographiques permettant de représenter la sphère toute entière sont définies à partir de deux cartes de projections stéréographiques, définies par projection à partir de deux pôles tels que nord et sud, qui forment un atlas.

**Proposition 1.5.1** *Projection stéréographique*

*Les projections stéréographiques ont deux propriétés importantes :*

- *tout cercle sur la sphère (hormis ceux passant par le pôle de référence) sera transformé en un autre cercle dans le plan équatorial;*
- *les angles sont conservés pendant la transformation.*

**Remarque 1.5.4** *Lorsque l'on effectue une projection stéréographique de la sphère sur son plan équatoriale à partir du pôle Sud :*

- *L'équateur est projeté sur lui-même.*
- *Un point de l'hémisphère nord sera projeté à l'intérieur de l'équateur et, inversement, un point de l'hémisphère sud sera projeté à l'extérieur.*
- *L'image d'un cercle par la projection étant un cercle, il suffit de projeter deux points formant un diamètre pour retrouver le cercle projeté.*

Dans la suite les coordonnées stéréographiques seront considérées comme liées à l'atlas formé par les deux cartes de projection sur le plan équatorial à partir des pôles Nord et Sud.

**Définition 1.5.1** *Projection stéréographique de la sphère unité*

Soient  $(x, y, z)$  le système de coordonnées sur la sphère dans  $\mathbb{R}^3$  et  $(u, v)$  celui sur le plan équatorial de projection. Alors la projection stéréographique, notée  $P$ , de la sphère unité centrée en  $O$ , depuis son pôle Nord, sur son plan équatorial s'écrira :

$$P(x, y, z) = \begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \quad \forall z \neq 1,$$

**Remarque 1.5.5** *La condition  $z \neq 1$  est bien équivalente à dire que le seul point qui ne puisse être projeté par  $P$  est le pôle Nord.*

Et la projection inverse, notée  $f$ , qui permet d'immerger le plan  $(u, v)$  dans  $\mathbb{R}^3$  sous la forme d'une sphère unité centrée en  $O$ , s'écrit, en notant  $r^2 = u^2 + v^2$  :

$$f(u, v) = \begin{cases} x = \frac{2u}{1+r^2} \\ y = \frac{2v}{1+r^2} \\ z = \frac{r^2-1}{1+r^2} \end{cases}$$

### Métrique Riemannienne de la sphère en coordonnées stéréographiques

Par procédé identique à celui utilisé pour déterminer la métrique de la sphère en coordonnées sphériques, on obtient

que :

$$ds^2(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = dx^2(u, v) + dy^2(u, v) + dz^2(u, v)$$

Et grâce à l'immersion  $f$  on a, par exemple pour la première coordonnée,  $dx = d\left(\frac{2u}{1+r^2}\right)$ , ce qui en n'oubliant pas que

$r^2 = u^2 + v^2$  s'écrira :

$$dx = \frac{2}{1+r^2} \left( (1+r^2)du - \frac{2ru(udu + vdv)}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

En procédant de façon analogue pour  $dy$  et  $dz$  on obtient que  $ds^2$  peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{(1+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+r^2)^2} \end{pmatrix}}_g \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

D'où pour les coordonnées stéréographiques, la variété Riemannienne associée à la sphère, sera le plan  $(u, v)$  muni de la métrique symétrique  $g$  définie ci-dessus.

---

# Equation d'Euler et théorème de Hilbert

En revanche du premier chapitre où nous avons utilisé le théorème d'**Euler-Lagrange** qui nous donne une condition nécessaire pour que l'extrémale soit solution du problème variationnel, ce deuxième chapitre va nous servir à aller un peu plus loin ; cela grâce aux théorèmes de **Hilbert** qui donnent une condition nécessaire et suffisante pour que l'extrémale soit solution du problème variationnel. D'abord on va donner quelques notions de bases telles que : extrémale, champ d'extrémales,... On va enchaîner par les théorèmes de **Hilbert** les plus importants, comme on va voir comment on construit un champ d'extrémales. Enfin on va donner quelques méthodes d'analyse fonctionnelle et illustrer ce travail par quelques exemples.

## 2.1 Equation d'Euler et théorème de Hilbert

Soit le problème variationnel suivant :

On se donne un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , deux réels  $\alpha$  et  $\beta$ , une fonction  $F$  et un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $F: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction de trois variables, de classe  $C^1$  et on définit :

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

pour toute fonction  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1([a, b] \times \mathbb{R} \subset \Omega)$ .

$J$  s'appelle une fonctionnelle et le problème variationnel est :

trouver  $y_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $y_0$  minimise  $J(y)$  parmi toutes les fonctions  $y$  satisfaisant aux contraintes  $y(a) = \alpha$  et  $y(b) = \beta$ .

### Exemple 2.1.1

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) \sqrt{1 + (y')^2} dx .$$

$$f(x, y) = 2\pi y$$

$J$  représente l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de  $y$  autour de l'axe  $Ox$ .

Si  $f(x, y) = \frac{1}{c(x, y)}$ , où  $c(x, y)$  est la célérité du milieu considéré au point  $(x, y)$ ,  $J(y)$  représente le temps de parcours du point  $(a, \alpha)$  au point  $(b, \beta)$  selon la courbe  $(x, y(x))$ .

### 2.1.1 Courbes paramétrées : Augmenter la dimension du problème (généraliser la formulation)

On se donne un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $F$  une fonction de classe  $C^1$  telle que :

$$F : [a, b] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, Y, Z) \longrightarrow F(x, Y, Z)$$

soient deux points  $A$  et  $B$  dans  $\Omega$ . La fonctionnelle considérée sera

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y') dx$$

définie sur les fonctions  $Y : [a, b] \longrightarrow \Omega$  de classe  $C^1$ .

$$Y(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n(x) \end{pmatrix} \text{ et } Y'(x) = \begin{pmatrix} Y'_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y'_n(x) \end{pmatrix} .$$

Chaque composante de  $Y$  est de classe  $C^1$ .

Courbe paramétrée :  $t$  est le paramètre

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

**Remarque 2.1.1** On utilisera aussi la notation  $F(t, X(t), X'(t))$

le problème variationnel sera :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } Y_0 \in C^1([a, b], \Omega) \text{ telle que } J(Y_0) = \min_{Y \in V} J(Y) \\ \text{où } V = \{Y : [a, b] \longrightarrow \Omega \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } Y(a) = A \text{ et } Y(b) = B\} \end{array} \right.$$

On note  $\nabla_Y F$  et  $\nabla_Z F$  les gradients de  $F$  par rapport à  $Y$  et  $Z$ .

C'est-à-dire, si  $F(x, Y, Z) = F(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$

$$\nabla_Y F(x, Y, Z) = \begin{pmatrix} \partial_{Y_1} F \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{Y_n} F \end{pmatrix} (x, Y, Z) \text{ et } \nabla_Z F(x, Y, Z) = \begin{pmatrix} \partial_{Z_1} F \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{Z_n} F \end{pmatrix} (x, Y, Z)$$

**Lemme 2.1.1**

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(x, \varepsilon) dx = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(x, \varepsilon) dx$$

le fait que cette fonction soit continue en  $(x, \varepsilon)$  justifie la dérivation sous le signe  $\int$ .

**Lemme 2.1.2** Si  $f \in C^1([a, b])$  telle que

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = 0, \forall g \in C([a, b])$$

et

$$g(a) = g(b) = 0$$

alors

$$f(x) = 0 \text{ sur } [a, b].$$

**Lemme 2.1.3** Soient  $u, v$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , telle que

pour toute fonction  $\varphi \in C^1([a, b])$  avec

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

on ait :

$$\int_a^b [\varphi'(x)u(x) + \varphi(x)v(x)] dx = 0$$

alors :  $u$  est de classe  $C^1$  et  $u' = v$ .

**Théorème 2.1.1** Si  $Y \in V$  minimise  $J$ , alors

$$\frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y(x), Y'(x)) = \nabla_Y F(x, Y(x), Y'(x))$$

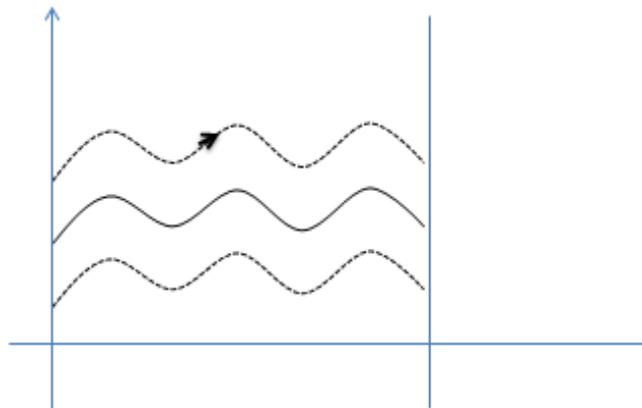
Cette équation est l'équation d'**Euler** associée à la fonctionnelle  $J$ .

Etre solution de l'équation d'**Euler** est nécessaire pour être solution du problème variationnel, mais pas équivalent.

L'hypothèse  $Y(x) \in \Omega$ , avec  $\Omega$  un ouvert est primordiale.

$$Y \rightsquigarrow Y + \varepsilon Y_1$$

$$\varepsilon \rightarrow J(Y + \varepsilon Y_1)$$



**Preuve.** Soit  $Y(x)$  minimisant la fonctionnelle  $J$  dans  $V$ .

$$Y_1(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de classe  $C^1$ , telle que  $Y_1(a) = 0$  et  $Y_1(b) = 0$

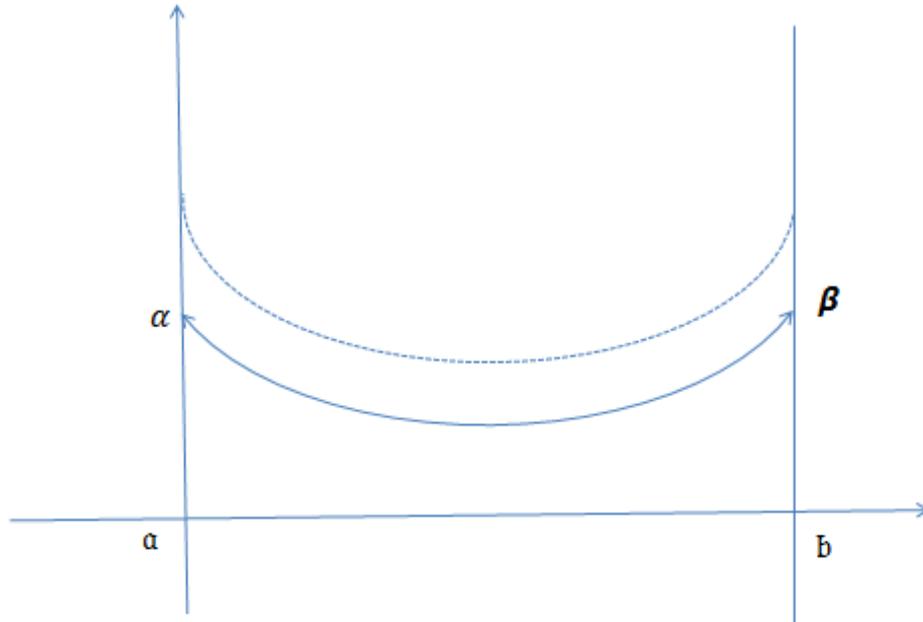
On veut considérer  $\varepsilon \rightarrow J(Y + \varepsilon Y_1)$  et que la dérivée est nulle en  $\varepsilon = 0$ .

Comme  $\Omega$  est ouvert et le graphe de  $Y$  est un compact, il existe  $\varepsilon_0$  tel que, si  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  alors

$$Y(x) + \varepsilon Y_1(x) \in \Omega, \quad \forall x \in [a, b]$$

tel que

$$\Omega = \{(x, y), y > 0\} \text{ et } Y_1(a) = Y_1(b) = 0$$



on a  $Y_1$  est de classe  $C^1$  donc continue sur  $[a, b]$  compact.

on utilise le fait que  $Y_1$  soit bornée. Comme  $Y_1(a) = Y_1(b) = 0$  alors  $Y + \varepsilon Y_1$  satisfait aux contraintes. Donc, si  $\varepsilon$  est assez petit,  $Y + \varepsilon Y_1 \in V$ .

d'après les hypothèses,  $\varepsilon \rightarrow J(Y + \varepsilon Y_1)$  est donc définie pour  $\varepsilon$  assez petit, et de classe  $C^1$ . Elle est minimale en  $\varepsilon = 0$ , donc

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(Y + \varepsilon Y_1)_{\varepsilon=0} = 0$$

or

$$J(Y + \varepsilon Y_1) = \int_a^b F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') dx$$

en utilisant le lemme 2.1.1, on aura :

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(Y + \varepsilon Y_1) = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') dx$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') &= Y_1 \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') + Y_1' \frac{\partial F}{\partial Z}(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') \\ &= Y_1 \begin{pmatrix} \partial_{Y_1} F \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{Y_n} F \end{pmatrix} + Y_1' \begin{pmatrix} \partial_{Z_1} F \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{Z_n} F \end{pmatrix} \text{ en } (x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_1 \cdot \partial_{Y_i} F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') + Y_1' \cdot \partial_{Z_i} F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1')) \\ &= Y_1 \cdot \nabla_Y F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') + Y_1' \cdot \nabla_Z F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(Y + \varepsilon Y_1) = \int_a^b [Y_1 \cdot \nabla_Y F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1') + Y_1' \cdot \nabla_Z F(x, Y + \varepsilon Y_1, Y' + \varepsilon Y_1')] dx$$

Or, par hypothèse on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(Y + \varepsilon Y_1)_{\varepsilon=0} = 0$$

donc

$$\int_a^b [Y_1 \cdot \nabla_Y F(x, Y, Y') + Y_1' \cdot \nabla_Z F(x, Y, Y')] dx = 0 \quad (1)$$

**Première approche :** On intègre par parties le deuxième terme par rapport à  $x$ , on obtient:

$$\int_a^b Y_1' \cdot \nabla_Z F(x, Y, Y') dx = [Y_1 \cdot \nabla_Z F(x, Y, Y')]_a^b - \int_a^b Y_1 \cdot \frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y, Y') dx$$

mais

$$[Y_1 \cdot \nabla_Z F(x, Y, Y')]_a^b = 0$$

car  $Y_1(a) = Y_1(b) = 0$ . D'où

$$\int_a^b Y_1' \cdot \nabla_Z F(x, Y, Y') dx = - \int_a^b Y_1 \cdot \frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y, Y') dx$$

En remplaçant dans (1), on trouve :

$$\int_a^b Y_1 \left[ -\frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y, Y') + \nabla_Y F(x, Y, Y') \right] dx = 0 \quad \forall Y_1 \in C^1([a, b]) \quad (2)$$

avec

$$Y_1(a) = Y_1(b) = 0$$

En utilisant le lemme 2.1.2, on trouve :

$$-\frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y, Y') + \nabla_Y F(x, Y, Y') = 0$$

alors

$$\frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y, Y') = \nabla_Y F(x, Y, Y')$$

mais, on ne sait pas que  $\nabla_Z F(x, Y, Y')$  est dérivable.

**Deuxième approche :** La solution repose sur le lemme 2.1.3

le lemme 2.1.3 implique le théorème, de cette façon :

on considère

$$u' = \frac{d}{dx} \partial_{Z_i} F(x, Y, Y')$$

et

$$v = \partial_{Y_i} F(x, Y, Y')$$

où  $i \in \{1, \dots, n\}$  est un indice fixé.

on remplace dans (2), on trouve :

$$\int_a^b Y_1 (-u' + v) dx = 0, \quad \forall Y_1 \in C^1([a, b])$$

si on choisit

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \text{ est à la } i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

alors

$$\int_a^b (-\varphi u' + \varphi v) dx = 0$$

on intègre par parties le premier terme:

$$\int_a^b -\varphi u' dx = [-\varphi u]_a^b + \int_a^b \varphi' u dx$$

or

$$[-\varphi u]_a^b = 0 \text{ car } \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

d'où

$$\int_a^b -\varphi u' dx = \int_a^b \varphi' u dx$$

on remplace, on obtient :

$$\int_a^b (\varphi' u + \varphi v) dx = 0$$

d'après le lemme 2.1.3,  $u$  est de classe  $C^1$  et  $u' = v$ .

Ceci est la ligne i de l'équation d'**Euler**. Il reste à démontrer le lemme 2.1.3.

posons

$$\alpha(x) = u(x) - \int_a^x v(t) dt$$

on veut montrer que  $\alpha$  est constante.

Partant de

$$\int_a^b (\varphi' u + \varphi v) dx = 0$$

une intégration par parties donne

$$\int_a^b \varphi'(x) \alpha(x) dx = 0.$$

Soit

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(t) dt$$

puis

$$\varphi(x) = \int_a^b [\alpha(x) - m] dt$$

$\varphi$  de classe  $C^1$  et  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  par définition de  $m$ .

on écrit

$$\int_a^b \varphi'(x)\alpha(x)dx = \int_a^b \varphi'(x) [\alpha(x) - m] dx$$

car

$$\int_a^b \varphi'(x)dx = 0$$

et puisque

$$\varphi'(x) = \alpha(x) - m$$

on a :

$$\int_a^b (\alpha(x) - m)^2 dx = 0,$$

or  $(\alpha(x) - m)$  est continue et positive, d'intégrale nulle, donc partout nulle , ce qui prouve le lemme et le théorème.

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y(x), Y'(x))dx$$

$$Y : [a, b] \rightarrow \Omega \text{ de classe } C^1, \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n.$$

$$F : [a, b] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1$$

$$\text{Conditions limites } Y(a) = A, Y(b) = B \tag{2.1.1}$$

$Y$  minimise  $J$  dans l'espace des fonctions satisfaisant aux contraintes  $\implies Y$  est solution de :

$$\frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y(x), Y'(x)) = \nabla_Y F(x, Y(x), Y'(x))$$

■

## 2.1.2 Extrémale

### Définition 2.1.1 *Extrémale*

*On appelle extrémale toute solution de l'équation d'**Euler**.*

**Exemple 2.1.2** Soit  $F$  de la forme suivante

$$F(x, Y, Z) = \frac{1}{2} | Z |^2 - U(x, Y)$$

où  $U$  est de classe  $C^1$ .

on a

$$\nabla_Z F(x, Y, Z) = \begin{pmatrix} \partial_{Z_1} F \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{Z_n} F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \end{pmatrix} = Z$$

or

$$\frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y, Z) = \frac{d}{dx} Z = \frac{d}{dx} Y'(x) = Y''(x)$$

et

$$\nabla_Y F(x, Y, Z) = -\nabla_Y U(x, Y)$$

Alors, l'équation d'**Euler** est :

$$\frac{d}{dx} \nabla_Z F(x, Y, Z) = \nabla_Y F(x, Y, Z) \iff Y''(x) = -\nabla_Y U(x, Y)$$

c'est à dire c'est l'équation fondamentale de la dynamique lorsque les forces dérivent d'un potentiel  $U$ .

Dans ce cas, la fonction  $F$  est le **Lagrangien** du système et la fonctionnelle  $J$  est appelée action.

### 2.1.3 Théorème de Hilbert

**Théorème 2.1.2** Le théorème de **Hilbert** donne des conditions suffisantes pour que l'extrémale (solution de l'équation d'**Euler**) satisfaisant aux contraintes minimise effectivement la fonctionnelle.

On se place dans le cas le plus simple :

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

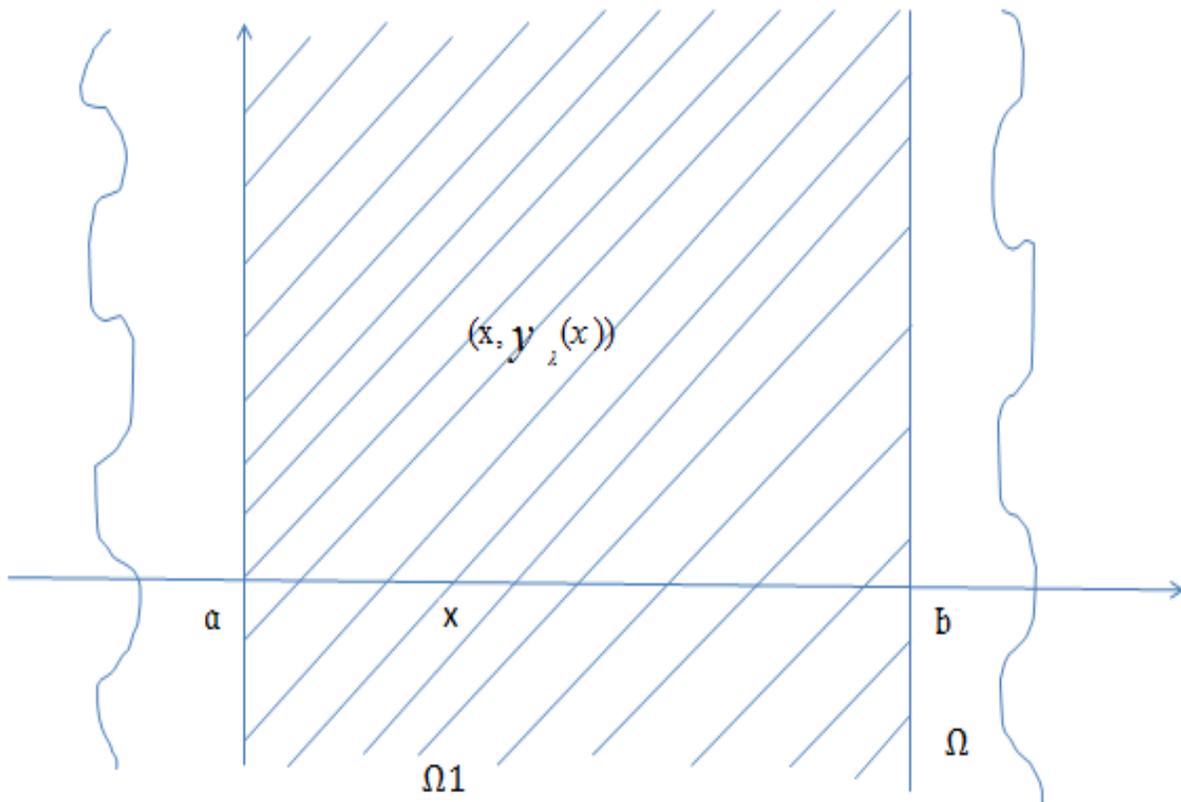
où  $F : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$

$$V = \{y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ tel que } y(a) = \alpha, y(b) = \beta\}$$

On appelle  $\Omega$ , l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\Omega$  où  $x \in [a, b]$ . Les conditions limites sont  $y(a) = \alpha$ ,  $y(b) = \beta$  et on appelle  $V$  l'ensemble des  $y$  de classe  $C^1$  satisfaisant aux conditions limites.  $V$  est appelée variété Riemannienne.

Le problème variationnel est :

$$\text{Trouver } y_0 \in V \text{ telle que : } J(y_0) = \min_{y \in V} J(y)$$



**Preuve.** Supposons que :

1. Il existe  $y_0 \in V$  unique solution de l'équation d'**Euler** satisfaisant aux conditions limites.

2. Beaucoup plus : il existe une famille d'extrémales notées  $y_\lambda$ , indexées par  $\lambda \in ]\lambda_0, \lambda_1[$  contenant  $\lambda = 0$  telle que l'application :

$$\begin{aligned} \theta : ]\lambda_0, \lambda_1[ \times [a, b] &\longrightarrow \Omega_1 \\ (\lambda, x) &\longmapsto (x, y_\lambda(x)) \end{aligned}$$

est un  $C^2$  **diffeomorphisme**, c'est-à-dire que  $\theta$  est bijective et  $\theta$  et  $\theta^{-1}$  sont de classe  $C^2$  jusqu'au bord.

**Remarques:**

1. Naturellement, seul  $y_0$  satisfait les conditions aux limites.
2. En règle générale, les solutions de l'équation d'**Euler**, qui est d'ordre deux, dépendent de deux paramètres. La construction d'une telle famille d'extrémales revient à lier judicieusement les deux paramètres par une relation.

3. Une telle famille  $(y_\lambda)$  est appelée **champ d'extrémales**.

La suite de la preuve se repose sur le lemme et le théorème suivants. ■

### 2.1.4 Champ d'extrémales

Un champ d'extrémales étant donné, on construit l'application  $\omega$  définie par :

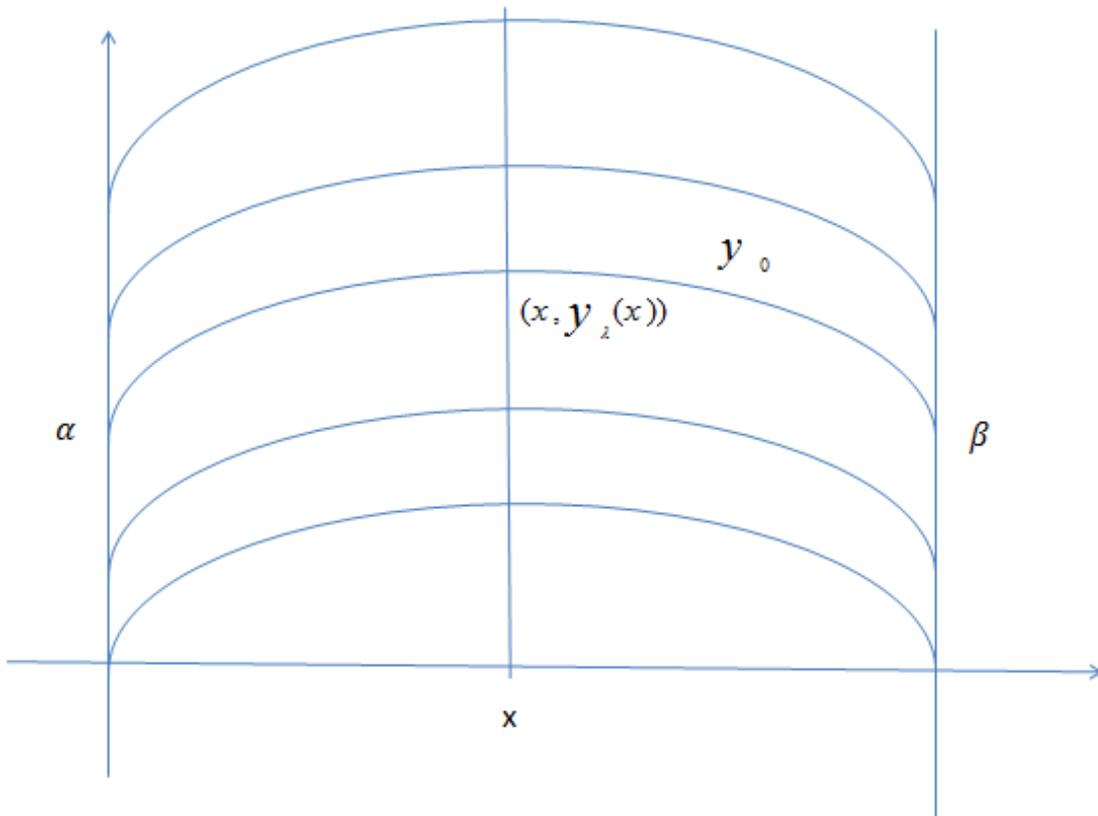
$$\begin{aligned} \omega : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow y'_\lambda(x) \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est l'unique paramètre tel que

$$y = y_\lambda(x)$$

autrement dit, les  $y_\lambda$  satisfont à l'équation du premier ordre :

$$y' = \omega(x, y)$$



**Lemme 2.1.4** *Préparatoire à la preuve du théorème d'Hilbert :*

Soient les fonctions

$$U(x, y) = F(x, y, \omega) - \omega \frac{\partial F}{\partial Z}(x, y, \omega)$$

et

$$V(x, y) = \frac{\partial F}{\partial Z}(x, y, \omega)$$

où

$$\omega = \omega(x, y)$$

alors la forme  $Udx + Vdy$  est une différentielle exacte. Autrement dit

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

en effet :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial Z} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial Z} - \omega \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial Z} - \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \text{ au point } (x, y, \omega(x, y))$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}$$

soit  $\lambda$  l'unique paramètre tel que

$$(x, y, \omega) = (x, y_\lambda(x), y'_\lambda(x))$$

$y_\lambda$  est solution de l'équation d'**Euler** :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial Z}(x, y_\lambda, y'_\lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_\lambda, y'_\lambda)$$

Par hypothèse,  $y_\lambda$  est de classe  $C^2$ , donc on peut différencier.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Z} + y'_\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial Z} + y''_\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

où  $y_\lambda, y'_\lambda, y''_\lambda$  sont évaluées en  $x$ , les dérivées de  $F$  en  $(x, y_\lambda, y'_\lambda)$ .

on a :  $y_\lambda = y, y' = \omega$

d'où :

$$y''_\lambda(x) = \frac{d}{dx} \omega(x, y_\lambda) = \frac{\partial \omega}{\partial x} + y'_\lambda \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

La relation

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

apparaît alors comme une paraphrase de l'équation d'**Euler**.

### **Théorème 2.1.3** de **Hilbert**

*On a trois hypothèses*

1. Si  $\Omega_1$  est un ouvert simplement connexe,
2. Il existe un champ d'extrémales pour tout couple  $(x, y) \in \Omega_1$ ,
3. L'application  $Z \longrightarrow F(x, y, Z)$  est convexe.

Alors

$$J(y_0) = \min_{y \in V} J(y)$$

**Preuve.** On se donne  $y_0 \in V$ .

il s'agit de montrer que :

$$J(y_0) \leq J(y) \quad , \forall y \in V$$

soit  $C_0$  et  $C$  les graphes dans  $\Omega_1$  de  $y_0$  et  $y$ .

comme  $y_0 \in V$  et  $y \in V$ ,  $C_0$  et  $C$  définissent un lacet dans  $\Omega_1$  et par le théorème de **Stokes** , on a :

$$\int_{C_0} U dx + V dy = \int_C U dx + V dy \quad (\text{différentielle exacte avec } \Omega_1 \text{ simplement connexe}).$$

on calculons  $\int_{C_0} U dx + V dy$  , on obtient :

$$dy = y'_0(x) dx = \omega(x, y_0(x)) dx$$

d'où sur  $C_0$  on a :

$$U dx + V dy = F(x, y_0(x), y'_0(x))$$

autrement dit

$$\int_{C_0} U dx + V dy = J(y_0)$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} J(y_0) - J(y) &= \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx - \int_a^b U dx + V dy \\ &= \int_a^b \left\{ F(x, y, y') - F(x, y, \omega) + \omega \frac{\partial F}{\partial Z}(x, y, \omega) - y' \frac{\partial F}{\partial Z}(x, y, \omega) \right\} dx \end{aligned}$$

avec  $y = y(x)$ ,  $y' = y'(x)$  et  $\omega = \omega(x, y)$ .

le terme entre parenthèses s'écrit :

$$F(x, y, y') - F(x, y, \omega) - (y' - \omega) \frac{\partial F}{\partial Z}(x, y, \omega) \geq 0$$

si  $z \longrightarrow F(x, y, z)$  est convexe, on dérive par rapport à  $Z$  en  $\omega$ , on obtient :

$$(\omega - y') \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}(x, y, \omega) \geq 0$$

ce terme est positif pour tout  $y'$  et  $\omega$  quant  $z \longrightarrow F(x, y, z)$  est convexe.

d'où : le théorème est prouvé. ■

**Remarque 2.1.2** *S'il y a stricte convexité de  $z \rightarrow F(x, y, z)$*

*C'est-à-dire que la fonction concernée n'est affine sur aucun intervalle. Alors*

$$F(x, y, y') - F(x, y, \omega) - (y' - \omega) \frac{\partial F}{\partial Z}(x, y, \omega) > 0$$

*et  $y_0$  est l'unique minimum de  $J$  dans  $V$ .*

## 2.2 Une approche en analyse fonctionnelle

### 2.2.1 Notion d'espace fonctionnel adapté à une fonctionnelle

Etant donné une fonctionnelle  $J$  définie sur les fonctions de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$ , un espace de Banach  $E$  est dit adapté à la fonctionnelle quand il vérifie les quatre conditions suivantes.

1.  $E$  est un dual, c'est-à-dire il existe  $B$ , espace de Banach tel que  $B' = E$ .

**Exemple1 :**  $(L^p)' = L^q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \leq p < \infty$

**Exemple2 :**  $L^1$  n'est pas un dual.

2.  $C^1(\Omega) \subset E$  et  $C^1(\Omega)$  est dense dans  $E$  et la fonctionnelle  $J$  est continue sur  $E$  (prolongement de  $J$  sur  $E$ ) muni de la topologie forte (en norme).

topologie forte :

$$u_n \rightarrow u \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_E = 0$$

3.  $J$  est coercive c'est-à-dire

$$\text{si } f_k \in E \text{ et } \|f_k\|_E \rightarrow \infty \text{ alors } \lim_{k \rightarrow \infty} J(f_k) = \infty$$

4.  $J$  est semi-continue inférieurement pour la topologie  $\star$  faible.

Si  $(f_k)_k$  est une suite d'éléments de  $E$  admettant une limite pour la topologie  $\star$  faible

$$J\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k\right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(f_k)$$

$(f_k \xrightarrow{\star} f)$  signifie  $\forall b \in B \quad \langle b, f_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle b, f \rangle$

**Théorème 2.2.1** *fondamentale*

Si  $E$  est adapté à  $J$  et si  $V$  est une partie fermée de  $E$  pour la topologie  $\star$  faible  $f^\star(E, B)$ , alors il existe  $g \in V$  tel que

$$J(g) = \inf \{J(f); f \in V\}$$

le problème de minimisation de  $J$  sur  $V$  a une solution.

**Preuve.** Soit

$$m = \inf \{J(f); f \in V\}$$

$m = -\infty$  n'est pas exclus à priori.

alors il existe  $f_k \in V$  tel que

$$\lim J(f_k) = m$$

la coercivité de  $J$  implique que les  $f_k$  sont bornés en norme  $\|f_k\| \leq C$ . La compacité de la boule (de rayon  $C$ ) pour la topologie  $\star$  faible permet d'extraire une sous-suite convergente

vers un élément  $g$ .

Si la sous-suite est notée  $(f_{k_n})$  avec

$$J(g) = J(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf J(f_{k_n})$$

parce que  $J$  est semi-continue inférieurement pour la topologie  $\star$  faible.

Autrement dit,

$$J(g) \leq m \text{ (d'où } m \text{ est fini).}$$

Mais  $V$  est fermé pour la topologie  $\star$  faible, alors

$$g \in V \text{ et } J(g) = m$$

■

**Remarque 2.2.1** *la coercivité de  $J$  sur  $V$  suffit.*

**Corollaire 2.2.1** *Si  $E$  est adapté à  $J$ , si  $E$  est réflexif et si  $V$  est une partie convexe fermée (pour la topologie forte) de  $E$ , alors il existe  $g \in V$  tel que*

$$J(g) = \inf \{J(f), f \in V\}$$

1.  $E$  réflexif, topologie faible est équivalente à la topologie  $\star$  faible.
2.  $V$  est convexe fermé, donc  $V$  fermé pour la topologie faible.

**Preuve.** (de 2)

Soit  $f_k \in V$  telle que

$$f_k \xrightarrow{\star} f$$

$$\forall l \in E^*, l(f_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} l(f)$$

si  $f \notin V$  le théorème de Hahn Banach implique qu'il existe  $l \in E^*$ ,  $l = 0$  sur  $V$  et  $l(f) \neq 0$  ce qui est impossible car  $l$  est continue. ■

**Proposition 2.2.1** *Si  $E$  vérifie 1, 2 et 3, si  $E$  est réflexif, si  $J$  est convexe alors  $J$  est semi-continue inférieurement pour la topologie  $\star$  faible.*

**Remarque 2.2.2**  $J$  est coercive c'est à dire :

$$\forall f, g \in E \text{ et } \forall t \in [0, 1], J(tf + (1-t)g) \leq tJ(f) + (1-t)J(g)$$

$E$  est réflexif signifie que la topologie  $\star$  faible est la topologie faible c'est pareil.

**Preuve.** Soit  $f_k \in E$  telle que  $f_k \xrightarrow{\star} f$

$f_k$  converge vers  $f$  pour la topologie  $\star$  faible, il existe  $c > 0$  tel que

$$\|f_k\|_E \leq c \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_E \geq \|f\|$$

donc il existe  $c'$  telle que  $J(f_k) \leq c'$  pour tout  $k$ . (coercivité de  $J$  sur  $E$ ).

soit

$$F = \{f \in E ; J(f) \leq c'\}$$

$J$  étant convexe et continue,  $F$  est un ensemble convexe fermé de  $E$ ,  $F$  est donc fermé pour la topologie faible, d'où  $f \in E$ .

$$J(f) \leq c'$$

Quitte à prendre une sous-suite, on suppose que  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(f_k)$  existe. Soit

$$F_\varepsilon = \left\{ f \in E : J(f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J(f_k) + \varepsilon \right\}$$

Or  $J$  est convexe continue, ce qui implique que  $F_\varepsilon$  est convexe fermé pour la topologie faible d'où  $f \in F_\varepsilon$ .

$$J(f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf J(f_k)$$

soit  $\varepsilon > 0$ , pour  $k$  assez grand on a

$$J(f_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J(f_k) + \varepsilon$$

■

**Définition 2.2.1** On appelle suite minimisante toute suite  $(f_k)$  d'éléments de  $V$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_k) = \inf \{ J(f), f \in V \}$$

**Remarque 2.2.3** Les suites minimisantes utilisées pour approcher les solutions des équations différentielles qui proviennent d'un problème variationnel.

---

# Recherches géométriques sur le problème isopérimétrique

En géométrie euclidienne, l'isopérimétrie est initialement l'étude des propriétés des formes géométriques du plan qui partagent le même périmètre, ce qui se généralise ensuite dans les autres espaces euclidiens. En particulier, le problème le plus classique consiste à déterminer la forme géométrique plane qui maximise son aire avec un périmètre fixé. La réponse est intuitive, c'est le disque, mais malgré son apparence anodine ce problème fait appel à des théories sophistiquées pour obtenir une démonstration rigoureuse (particularité qu'il partage par exemple avec le théorème de **Jordan** qui indique qu'une boucle tracée sans croisement divise le plan en deux parties). Pour cette raison on simplifie parfois le problème isopérimétrique en limitant les surfaces autorisées, par exemple en se restreignant aux seuls quadrilatères ou triangles, ce qui donne alors respectivement le carré et le triangle équilatéral. De manière générale, le polygone à  $n$  côtés ayant la plus grande surface, à périmètre donné, est celui qui se rapproche le plus du cercle : c'est le polygone régulier.

L'isopérimétrie se généralise à des géométries différentes. Par exemple, dans le cas d'un demi-plan, la zone d'aire maximale pour un périmètre donné est le demi-disque.

En dimension 3, il s'agit de trouver le solide de plus grand volume, enveloppé dans une surface de mesure fixée ; la bulle de savon, qui résout le problème inverse en cherchant à minimiser la surface par laquelle elle enveloppe un volume d'air donné, indique la solution : c'est la sphère, car c'est le solide qui minimise la surface pour englober un volume donné, ce qui correspond au même problème de forme que de maximiser le volume englobé pour une surface donnée.

Ce concept donne naissance à une famille de théorèmes appelés isopérimétriques, à des majorations dites inégalité isopérimétrique, ainsi qu'à un rapport, appelé quotient isopérimétrique indique qu'une surface de périmètre  $p$  et d'aire  $a$  vérifie la majoration  $\frac{4\pi a}{p^2} \leq 1$  ; le terme de gauche est le quotient isopérimétrique, qui n'est égal à 1 que dans le cas du disque.

Si l'origine de cette question date d'au moins 2 900 ans, ce n'est qu'en 1895, à l'aide de méthodes dérivées du théorème de **Minkowski** que la question est définitivement résolue sous sa forme antique. Ces méthodes permettent de démontrer le théorème isopérimétrique et de le généraliser à des dimensions supérieures dans le cas d'une géométrie euclidienne.

### 3.1 Fragment d'histoire



**Didon** applique le théorème isopérimétrique pour l'achat du terrain à l'origine de la fondation de Carthage.

La légende raconte que la ville de **Carthage** fut fondée en 814 av.**J.-C.** par la princesse phénicienne **Elissa**, surnommée **Didon**. Elle demanda au roi de **Numidie Iarbas** l'octroi d'un terrain pour s'y installer. **Iarbas**, réticent, lui accorda le droit de choisir un lopin de terre que pourrait contenir la peau d'un boeuf. La rusée **Didon** découpa en une fine lamelle la peau, qui devint une longue lanière de 4 km de longueur. Elle fit étendre cette lanière sur un demi-cercle dont les deux extrémités touchaient la côte, rectiligne à l'endroit où elle se trouvait. La reine avait intuitivement trouvé la solution au problème isopérimétrique dans un demi-plan euclidien. Ce problème est résolu lorsqu'est trouvée la surface la plus grande possible, pour un périmètre donné. Le demi-cercle est en effet la courbe que doit suivre la lanière pour délimiter la plus grande surface possible, dans ce cas particulier.

La méthode consistant à mesurer une surface à l'aide de son périmètre est fréquente durant l'antiquité grecque. **Homère** indique que la ville de Troie fait 10 200 pas, indiquant par là qu'en faire le tour demande une marche de 10 200 pas. La solution du problème isopérimétrique dans le plan euclidien est connue par certains depuis le cinquième siècle av.J.-C., au moins pour le cas du polygone à  $n$  côtés. Il porte le nom de théorème isopérimétrique. À l'époque des Grecs, tous ne semblent pas au courant de ce résultat et de ses conséquences. **Proclus** (412-495) mentionne le cas de tricherie de géomètres datant de cette époque. Des terrains étaient divisés en différents lopins de même périmètre mais de surfaces différentes. Les géomètres, responsables du partage, obtenaient les plus grosses parcelles. La supercherie fut découverte au moment des moissons, dont l'abondance est proportionnelle à la surface et non au périmètre.

La fondation de **Rome** est également une question de périmètre : **Romulus** trace, avec sa charrue, le périmètre circulaire de sa future ville le mot latin **Urbs** (la ville, qui désigne **Rome** et a donné en français les mots urbain, urbaniser) serait une déformation d'une expression signifiant "tracer le périmètre". Une racine indo-européenne signifiant pourtour, périmètre, clôture en serait à l'origine. Le problème de l'isométrie est très ancien, comme l'atteste la légende de **Didon**, et ses différentes réponses (polygone régulier, demi-disque dans un demi-plan, cercle) étaient connues dès l'antiquité grecque, bien qu'il fallu attendre le dix-neuvième siècle pour qu'une démonstration rigoureuse soit élaborée.

**Théon** d'Alexandrie (335-405) et **Pappus** quatrième siècle attribuent à **Zénodore** deuxième siècle av. J.-C. les premières démonstrations. Il prouve que parmi tous les polygones à  $n$  côtés et de même périmètre, seul celui régulier est candidat à être la réponse au problème isopérimétrique. Il découvre aussi que le disque d'un périmètre donné possède une surface supérieure à celle de n'importe quel polygone régulier. Il aurait aussi démontré que la sphère est le solide ayant un plus grand volume que tout polyèdre de même surface.

Les mathématiques grecs n'ont pas les moyens d'aller au-delà. Leurs démonstrations restent partielles, même si leurs auteurs n'ont pas conscience de l'aspect incomplet des preuves. Ils ne disposent pas non plus des outils mathématiques qui auront permis d'aller

plus loin. Les mathématiciens arabes s'approprient le savoir des Grecs sur cette question. **Abū Ja'far al-khāzin** écrit un traité résumant tout le savoir de son époque sur l'isopérimétrie. Ils développent les moyens d'aller plus loin. **Nasir ad-Din at-Tusi**, un mathématicien du treizième siècle, développe, dans son traité du quadrilatère, suffisamment la trigonométrie pour présenter des preuves complètes dans le cas des triangles ou des rectangles.

Il faut ensuite attendre les mathématiques européennes du dix-neuvième siècle pour d'autres progrès. En 1836, **Jakob Steiner** obtient un premier résultat nouveau. Sous réserve d'admettre l'existence d'une solution en dimension 2, alors cette solution est nécessairement le disque. Pour une preuve complète en dimension 2, il faut attendre les travaux de **Karl Weirstrass** et **Hermann Minkowski** ; elle devient rigoureuse vers 1895.

## 3.2 Formulation générale du problème

Le problème isopérimétrique dans le plan euclidien peut se formuler de la façon suivante :

Soit  $C$  une courbe (simple et fermé) dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que  $C$  vérifie certains critères de régularité (par exemple  $C$  est continue). Notons  $L$  la longueur de la courbe, et  $A$  l'aire de la composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  (la région intérieure de  $C$ ). Quelles sont alors, pour une longueur  $L$  fixés, les courbes qui maximisent la valeur de l'aire  $A$ ? Ou inversement, pour une aire  $A$  fixée, quelles sont les courbes de longueur  $L$  minimale?

La solution à ce problème est connue, les minimiseurs sont les cercles, et on a l'inégalité suivante :

$$L^2 \geq 4\pi A$$

## 3.3 Définitions et premières propriétés

**Proposition 3.3.1** *Dans le plan euclidien,*

1. De tous les rectangles plans de même périmètre, le carré a l'aire la plus grande.
2. De tous les triangles plans de même périmètre, le triangle équilatéral a l'aire la plus grande.
3. De tous les parallélépipèdes rectangles de même aire latérale, le cube a le plus grand volume.
4. De tous les cylindres circulaires droits de même volume, celui dont l'aire latérale est la plus petite est le cylindre dont la hauteur est égale au diamètre.

**Preuve.** Les assertions sont faciles à démontrer, en particulier parce qu'il s'agit de problèmes avec un petit nombre de paramètres.

1- Soit un rectangle de côtés  $a$  et  $b$ . Le périmètre est donné par

$$L = 2(a + b)$$

et l'aire par

$$A = ab.$$

Il en résulte que

$$A = a\left(\frac{L}{2} - a\right) = \frac{L^2}{16} - \left(a - \frac{L}{4}\right)^2$$

Ainsi pour tout rectangle, on a l'inégalité isopérimétrique

$$16A \leq L^2$$

avec égalité si et seulement si les côtés sont égaux au quart du périmètre.

2- Soit un triangle de côtés  $a, b$  et  $c$ . Son périmètre est

$$L = a + b + c$$

et son aire est donnée par la formule de **Héron d'Alexandrie**

$$A = \sqrt{\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right)\left(\frac{L}{2} - b\right)\left(\frac{L}{2} - c\right)}$$

pour conclure, on peut utiliser l'inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$$

qui résulte de la concavité de la fonction exponentielle. Ainsi, les triangles vérifient l'inégalité isopérimétrique

$$12\sqrt{3A} \leq L^2$$

avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

3- Soit un parallélépipède rectangle de côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$ . L'aire latérale est donnée par

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

et le volume par

$$V = abc.$$

On peut alors écrire, en utilisant à nouveau l'inégalité arithmético-géométriques

$$A = 2V \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \geq 6V^3 \sqrt{\frac{1}{abc}}$$

avec égalité si et seulement si  $a = b = c$ . Les parallélépipèdes rectangles vérifient donc l'inégalité isopérimétrique,

$$216V^2 \leq A^3$$

avec égalité si et seulement si le parallélépipède est un cube.

4- Soit un cylindre droit de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ . L'aire latérale est donnée par

$$A = 2\pi(R^2 + Rh)$$

et le volume par  $V = \pi R^2 h$ . Il en résulte que

$$\frac{A}{2\pi} = R^2 + \frac{V}{\pi R}.$$

On en déduit alors que l'aire est minimale quand le rayon vaut  $R_0$  tel que  $V = 2\pi R_0^3$ , d'où la hauteur correspondante  $h_0 = 2R_0$ . ■

### 3.3.1 L'inégalité isopérimétrique classique

L'inégalité isopérimétrique est le double énoncé suivant :

- De toutes les figures planes de même périmètre, le disque est celle dont l'aire est le plus grand.
- De toutes les figures planes de même aire, le disque est celle dont le périmètre est le plus petit.

Soit  $F$  une figure plane  $F_p^*$  le disque de même périmètre que  $F$  respectivement. Soit  $F_p^*$  le disque de même aire que  $F$ . Les énoncés ci-dessus se traduisent par les inégalités,

$$Aire(F) \leq Aire(F_p^*)$$

$$périm(F_p^*) \leq périm(F)$$

qui peuvent se résumer par l'inégalité homogène

$$4\pi Aire(F) \leq périm^2(F)$$

que nous appellerons inégalité isopérimétrique classique.

Le mathématicien **Jakob Steiner** a fait des contributions majeurs à l'étude du problème isopérimétrique. Lisons ce qu'il écrit.

#### **Théorème 3.3.1 Principale**

*Entre toute les figures isopérimétrique planes, le cercle est un maximum ; et réciproquement entre toute les figures planes équivalentes, le cercle a le plus petit périmètre.*

**Preuve.** Il est clair qu'il y a une infinité de figures d'un périmètre donné qui ont diverses formes et diverses aires. On comprend de même que l'aire pourra devenir aussi petit qu'on voudra, mais non pas aussi grande qu'on voudra, puisqu'elle reste évidemment toujours comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un des points de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Mais puisque des figures de périmètre donné peuvent avoir différentes aires, sans pouvoir toutefois grandir indéfiniment, il faut qu'il y ait entre elles une figure maximum ou plusieurs maxima de différentes

formes, c'est-à-dire plusieurs figures de différentes formes et d'une même aire, plus grande que celle des autres figures. Remarquons encore qu'une figure dont l'aire peut être agrandie sans changer de périmètre, n'est pas un des maxima. Il s'ensuit que chaque figure maximum est convexe, et qu'elle ne peut pas avoir de lignes droites dans son périmètre, ou du moins qu'il n'y a pas deux lignes droites consécutives, car elle pourrait encore devenir plus grande dans chacun de ces deux cas. ■

**Remarque 3.3.1** *La démonstration de l'inégalité isopérimétrique classique (et de ses généralisations) a motivé les mathématiciens depuis des siècles.*

*Les méthodes qui ont été utilisées pour la démonstration font souvent suite à l'apparition de nouveaux concepts ou développements mathématiques (calcul de variation, séries de Fourier, géométrie intégrale, jusqu'au transport optimal ces dernières années).*

### 3.3.2 Dimension 2

Soit  $p_n$  un polygone à  $n$  côtés, où  $n$  désigne un entier plus grand que 2,  $p$  son périmètre et  $a_n$  son aire. Dans ce cas particulier, le théorème isopérimétrique s'exprime sous la forme suivante :

#### **Théorème 3.3.2 isopérimétrique pour un polygone**

*L'aire de  $p_n$  est plus petite que celle d'un polygone régulier à  $n$  côtés et de périmètre  $p$ . Un disque de périmètre  $p$  possède une aire strictement plus grande que celle de  $p_n$ .*

Ce théorème peut s'exprimer sous la forme d'une inégalité :

### 3.3.3 Inégalité isopérimétrique pour un polygone

On dispose de l'inégalité suivante

$$4\pi a_n < 4n \tan \frac{\pi}{n} a_n \leq p^2.$$

Cette propriété est très générale ; elle reste vraie pour toute surface d'aire  $a$ , ayant un bord rectifiable de longueur  $p$ , c'est-à-dire que le bord est une courbe qui possède une longueur finie.

**Théorème 3.3.3 isopérimétrique dans un espace euclidien de dimension 2**

L'aire  $a$  est plus petite que celle du disque de même périmètre  $p$ , ce qui donne lieu à la majoration suivante, dite **inégalité isopérimétrique**. L'inégalité a lieu uniquement si la surface est un disque.

$$p^2 - 4\pi a \geq 0.$$

Ce théorème donne lieu à une définition :

**Définition 3.3.1 Quotient isopérimétrique**

Le quotient  $q$  défini par l'égalité suivante, est appelé quotient isopérimétrique :

$$q = 4\pi \frac{a}{p^2}.$$

on peut interpréter ce quotient comme le carré du rapport entre le rayon du cercle ayant même périmètre. L'inégalité isopérimétrique est équivalente à dire que  $q$  est inférieur à 1, le cas d'égalité n'ayant lieu que si la surface est un disque.

**3.3.4 Dimension 3**

En dimension 3, on ne peut approcher de plus en plus précisément la sphère par des polyèdres réguliers convexes. Il n'en existe que 5, appelés solides de **Platon**. Le résultat général reste néanmoins vrai :

**Théorème 3.3.4 isopérimétrique dans un espace euclidien de dimension 3**

Soit un solide mesurable au sens de **Lebesgue** ayant un bord mesurable, son volume est plus petit que celui de la boule dont la sphère a même aire.

**Remarque 3.3.2** Ici le bord du solide est une surface comme la sphère est le bord de la boule.

L'inégalité isopérimétrique s'exprime à l'aide d'un **quotient isopérimétrique**  $q$ . Elle indique que ce coefficient est toujours inférieur à 1 et le cas d'égalité n'a lieu que pour la sphère. Le coefficient  $q$  s'exprime sous la forme suivante, si  $v$  désigne le volume du solide et  $s$  l'aire du bord de ce solide :

$$q = 36\pi \frac{v^2}{s^3}.$$

## 3.4 Démonstrations géométriques élémentaires

En dimension 2, on dispose d'une propriété qui simplifie grandement les choses :

- **Si une surface  $S$  n'est pas convexe mais est d'aire et de périmètre finis, il existe une surface de périmètre strictement plus petite et d'aire strictement plus grande.**

Intuitivement, ce théorème est relativement évident. Si  $S$  n'est pas convexe, son enveloppe convexe possède une aire strictement plus grande et un périmètre strictement plus petit que  $S$ . Pour cette raison, il est pertinent de ne s'intéresser qu'aux surfaces convexes. Comme l'aire et le périmètre d'un convexe, s'ils existent, sont les mêmes que ceux de son adhérence, se limiter aux convexes fermés ne réduit en rien la généralité des solutions trouvées. Enfin, comme toute surface de périmètre fini est bornée, si elle est fermée, elle est nécessairement compacte.

- **Si un polygone à  $n$  sommets possède une aire maximale pour un périmètre donné, ce polygone est régulier.**
- **Si une surface possède une aire maximale pour un périmètre donné, alors cette surface est celle d'un disque.**

La partie la plus difficile à établir est l'existence de telles surfaces.

## 3.5 Calcul des variations

Une première manière de simplifier la question est de supposer que la frontière est suffisamment régulière. En 1904, **Hurwitz** propose une démonstration particulièrement élégante, qui se fonde sur l'inégalité de **Wirtinger** :

Soit une courbe fermée définie par une fonction  $f(t) = (x(t), y(t))$  périodique, continûment dérivable définissant une surface  $S$ . La majoration suivante est vérifiée, l'égalité n'ayant lieu que si la courbe définit un cercle.

$$p^2 \geq 4\pi a$$

Le prix à payer pour l'élégance et la simplicité et le caractère partiel de la solution. L'existence d'une solution optimale est bien démontrée, mais uniquement si la frontière est lisse. Or la frontière peut être quelconque. Évidemment, si elle n'est pas finie, la formule est vraie mais possède peu d'intérêt.

**Démonstration.**

**Inégalité de Wirtinger :**

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, de moyenne nulle, de classe  $C^1$  par morceaux et continue. Alors

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leq \|f'\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt.$$

De plus si  $\|f\| = \|f'\|$ , alors  $f$  est une fonction sinusoïdale.

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

- **Aucune surface dont la frontière est une courbe fermée de classe  $C^1$  par morceaux ne possède une aire strictement supérieure à celle du disque de même périmètre.**

Comme  $f$  définit une courbe fermée, c'est-à-dire une boucle, on peut considérer cette courbe comme une fonction périodique, parcourant une infinité de fois la boucle. Soit  $T$  cette période. Comme une translation est une isométrie, elle ne modifie ni le périmètre  $p$  ni l'aire  $a$  de la surface délimitée par  $f$ . On peut donc supposer que le centre de gravité de la surface  $S$  est le centre du repère orthogonal utilisé.

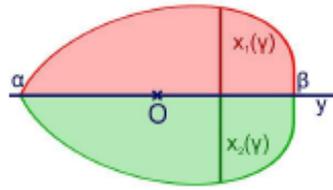
Déterminons dans un premier temps le périmètre  $p$ . Il est égal à l'intégrale de la norme de la vitesse sur une période ; on obtient la formule :

$$p = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

si l'on choisit comme paramètre l'abscisse curviligne  $s$ , c'est-à-dire que l'arc est parcouru à vitesse uniforme  $p/2\pi$ , la valeur  $T$  est égale à  $2\pi$  avec ce nouveau paramétrage.

Déterminons ensuite la valeur de l'aire  $a$ . Elle est définie par la formule, qui l'exprime de plusieurs manières différentes :

$$a = \int_S 1 dx dy = \int_C x dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{ds} ds.$$



Pour s'en rendre compte, on peut soit utiliser la puissant théorème de **Stokes** sur la courbe  $C$  associée à la fonction  $f$ , soit remarquer que  $S$  est convexe. Si  $\alpha$  est la plus petite valeur atteinte par  $\gamma(t)$ ,  $\beta$  la plus grande et  $\gamma$  une valeur entre les deux, il existe deux points de la courbe ayant pour ordonnées  $\gamma$ , que l'on peut noter  $x_1(\gamma)$  et  $x_2(\gamma)$ . Les fonctions  $x_1$  et  $x_2$  de  $[\alpha, \beta]$  dans  $\mathbb{R}$  sont toutes deux continues et correspondent à l'illustration de la figure de droite. Par définition de  $a$ , sa valeur est égale à la somme des aires en rouge et vert sur la figure :

$$a = \int_{\alpha}^{\beta} x_1(y)dy + \int_{\alpha}^{\beta} x_2(y)dy.$$

En utilisant la variable  $s$  curviligne au lieu de  $y$ , on remarque qu'il existe deux valeurs  $v_1$  et  $v_2$  de l'intervalle  $[0, p]$  telles que :

$$a = \int_{v_1}^{v_2} x \frac{dy}{ds} ds + \int_{v_2}^{v_1+2\pi} x \frac{dy}{ds} ds = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{ds} ds.$$

Il est temps d'évaluer  $p^2 - 4\pi a$  :

$$\begin{aligned} p^2 - 4\pi a &= 2\pi \left( \frac{p^2}{2\pi} - 2a \right) \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - 2x \frac{dy}{ds} \right) ds. \end{aligned}$$

Comme  $x$  vérifie les hypothèses de l'inégalité de **Wirtinger** :

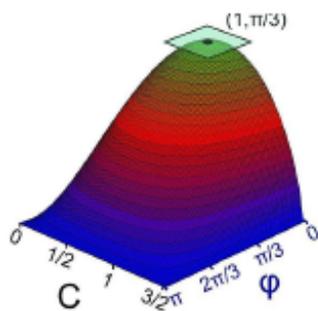
$$p^2 - 4\pi a = 2\pi \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - x^2 + \left( x - \frac{dy}{ds} \right)^2 \right) ds \geq 2\pi \int_0^{2\pi} \left( x - \frac{dy}{ds} \right)^2 ds \geq 0.$$

- **L'égalité est atteinte si, et seulement si, la surface est un disque.**

Pour le cas d'égalité : d'une part il faut qu'il y ait égalité dans l'inégalité de **Wirtinger**, ce qui donne l'expression de  $x(s)$ . D'autre part pour que cette intégrale s'annule, on doit

avoir  $y'(s) = x(s)$ . Ces deux conditions donnent bien un cercle de rayon 1, paramétré à vitesse uniforme. Et bien sûr tous les cercles sont solutions, quelle que soit la façon de les paramétrer car leur aire est égale à  $\pi r^2$  et leur périmètre à  $2\pi r$ , si  $r$  désigne le rayon. ■

## 3.6 Polygone et Steiner



La fonction associée à un triangle de périmètre égal à 3, son aire.

Les démonstrations historiques ont toutes un "chaînon manquant". Elle montrent qu'une surface qui ne possède pas la bonne propriété : être régulier ou être un disque, n'est pas un optimum. En revanche, elle ne montre pas qu'un tel optimum existe. Une fois l'existence d'un tel optimum démontrée, on sait alors qu'il est unique et l'on connaît sa géométrie. Mais la démonstration de cette existence est l'élément qui bloque les démonstrations pendant de si nombreux siècles. Elle demande une compréhension d'un aspect alors mal maîtrisé de la géométrie : la topologie.

Les preuves actuelles procèdent d'une démarche encore inconnue à l'époque de **Steiner**. La géométrie étudiée n'est plus le plan euclidien, support de la surface étudiée, mais un univers où chaque point est une surface. Elle est illustrée dans le cas particulier des triangles. La fonction considérée est celle qui, à un triangle de périmètre 3, associe son aire. Le triangle est représenté par deux paramètres,  $c$  la longueur d'une arête et  $\varphi$  l'angle entre deux arêtes dont celle de longueur  $c$ . Si l'angle est de mesure nulle ou égale à  $\pi$ , l'aire est nulle, il en est de même si  $c$  est égale à 0 ou à  $3/2$ . La représentation graphique montre que le maximum est bien atteint. Dans ce cas particulier, le sommet est le triangle décrit par le couple  $(1, \pi/3)$ .

Dans le cas des polygone à  $n$  est un entier supérieur à 2, la configuration est relativement simple. On identifie un polygone à un vecteur de  $\mathbb{R}^{2n}$ . L'ensemble des polygones devient une partie d'un espace vectoriel euclidien, cette fois-ci, de dimension  $2n$ . La topologie d'un espace euclidien dispose d'une propriété adéquate . Un théorème assure que les ensembles fermés et bornés sont compacts. La fonction, qui à un polygone associe son aire est continue. Toute fonction continue, définie sur un compact et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  atteint ses bornes. La configuration est analogue à celle de la figure de gauche. Ce qui permet d'établir le "chaînon manquant" :

- **Il existe un polygone à  $n$  côtés et de périmètre  $p$  qui possède une aire maximale.**

Pour le cas général, une démarche analogue à la précédente ne permet pas de conclure.

En se limitant aux convexes compacts, la zone qui nous intéresse est bien un fermé borné, mais la dimension de l'espace est ici infinie. Or si la dimension n'est pas finie, un théorème de Riesz montre qu'un fermé borné (comme la boule unité fermée) n'est jamais compact. De plus, la fonction périmètre n'est plus continue, on peut approcher de plus en plus précisément un disque de rayon 1 par des carrés de plus en plus petits, l'approximation garde un périmètre égal à 8 sans s'approcher de la valeur  $2\pi$  même si elle devient excellente.

En revanche, il est possible d'approcher précisément la frontière d'un convexe compacte par un polygone de périmètre plus petit et d'aire presque égale à celle du convexe. Cette propriété, et le fait d'avoir établi le théorème isopérimétrique pour les polygones, permet aisément de montrer qu'aucune surface de périmètre  $p$  ne peut posséder une aire supérieure à celle d'un disque de même périmètre. Le disque est ainsi un des optimums recherchés et les travaux de Steiner montrent que cet optimum est unique.

**Théorème 3.6.1** *Toute surface  $S$  possède une aire plus petite que celle du disque de même périmètre. L'égalité n'a lieu que si  $S$  est un disque.*

**Démonstration.**

- **Il existe un polygone à  $n$  côtés et de périmètre  $p$  qui possède une aire maximale :**

On munit le plan d'un repère orthonormal, et on considère l'application, qui à un polygone convexe à  $n$  sommets, associe dans  $\mathbb{R}^{2n}$  la suite des coordonnées de ses sommets. Ici  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels et  $\mathbb{R}^{2n}$  l'espace vectoriel canonique de dimension  $2n$ . Réciproquement à tout élément  $u$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , on associe l'enveloppe convexe des points ayant comme suite de coordonnées  $u$ . On obtient une application de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans l'ensemble des polygones ayant un nombre de sommets inférieur ou égal à  $n$ . cette application n'est pas injective, mais est surjective.

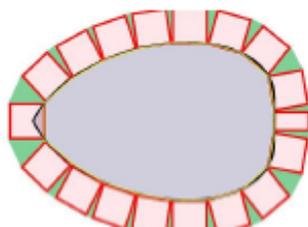
Soit  $\varphi$  la fonction, de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , qui associe à un vecteur  $u$  le barycentre des  $n$  vecteurs dont  $u$  est la suite des coordonnées. La fonction  $\varphi$  est continue, l'image réciproque du vecteur nul est un fermé de  $\mathbb{R}^{2n}$  (car le singleton vecteur nul est lui-même un fermé de  $\mathbb{R}^2$ ), que l'on note  $F_1$ . On ne cherche que des solutions dans ce fermé, ce qui n'est pas contraignant. En effet, si un polygone  $P$  est une solution quelconque du problème isopérimétrique, la translation de  $P$  par l'opposé de son barycentre est une solution dans  $F_1$ . Comme la translation est une isométrie, les propriétés géométriques de l'image par la translation sont les mêmes que celle de  $P$ .

Soit  $\psi$  l'application de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}$  qui associe à un vecteur  $u$  le périmètre du polygone associé à  $u$ . Cette application est encore continue et l'image réciproque du nombre réel  $P$  est encore un fermé  $F_2$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ . L'intersection  $C$  de  $F_1$  et de  $F_2$  est fermé, car intersection de deux fermés. Cet ensemble est aussi borné. Un vecteur est dans  $F_1$  seulement si l'enveloppe convexe des vecteurs de dimension 2 contient le vecteur nul. Le segment allant du vecteur nul à l'un des vecteurs de dimension 2 possède une longueur inférieure à la moitié du périmètre de l'enveloppe convexe. Un élément de  $C$  ne possède donc aucune coordonnée supérieure à la moitié de  $P$ . L'ensemble  $C$  possède les bonnes propriétés pour conclure. Si une solution au problème isopérimétrique posé existe, on en trouve nécessairement au moins une dans  $C$ . De plus,  $C$  est un fermé borné, or dans un espace vectoriel de dimension finie, comme  $\mathbb{R}^{2n}$ , les fermés bornés sont compacts.

On considère l'application  $\xi$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à un vecteur  $u$  associe l'aire de son polygone. Cette application est définie et continue sur le compact  $C$ . L'image de  $C$  par  $\xi$  est un compact, la borne supérieure de cet ensemble est atteinte car tout compact de  $\mathbb{R}$  contient sa borne supérieure. L'enveloppe convexe d'un vecteur  $u$  ayant pour image par  $\xi$  cette borne supérieure, est un polygone ayant au plus  $n$  côtés, de périmètre  $P$  est d'aire maximale. C'est une solution au problème isopérimétrique posé.

- **Il n'existe aucune surface d'aire supérieure à celle d'un disque de même périmètre :**

On raisonne par l'absurde. Quitte à effectuer une homothétie, on suppose qu'il existe une homothésie, on suppose qu'il existe une surface  $S$  de périmètre égal à  $2\pi$  et l'aire égal à  $2\pi$  et d'aire égal à  $\pi + A$ , où  $A$  est un nombre réel strictement positif. On suppose que  $S$  est convexe, sinon, il toujours possible de choisir son enveloppe convexe de périmètre plus petit et d'aire plus grande.



On construit un polygone de périmètre plus petit que  $2\pi$  et d'aire supérieure à  $\pi + \frac{A}{2}$ . La démonstration précédent montre qu'un tel polygone n'existe pas, ce qui démontre que la surface  $S$  ne peut pas plus exister et constitue d'absurdité recherchée. Ce polygone est illustré sur la figure de droite. Soit  $\epsilon$  un nombre réel strictement positif plus petit que 1 et que le rapport de  $\frac{A}{6\pi}$ . Enfin, soit  $P$  Le polygone dont les sommets sont des point de la frontière de  $S$ , régulièrement espacés à une distance  $\epsilon$  d'un de l'autre. Le polygone correspond à la figure constituée par les bases des carrés rouges. Il existe peut-être une arête du polygone de longueur inférieure à  $\epsilon$ , celle la plus à droite sur la figure.

On considère l'enveloppe  $E$  constituée des points à une distance inférieure ou égale à  $\epsilon$  de  $P$ . Cette enveloppe est l'union de l'intérieur du polygone  $P$ , en bleu, des carrés rouges

d'arêtes de longueur  $\varepsilon$  et de portions d'un disque de rayon  $\varepsilon$ , en vert sur la figure. L'union des portions vertes forme un disque complet. L'aire  $a_e$  de l'enveloppe  $E$  est la somme des aires de ces différentes surfaces. Si  $p_p$  désigne le périmètre du polygone, on obtient :

$$a_e = a_p + p_p \varepsilon + \pi \varepsilon^2$$

Le périmètre du polygone est par construction plus petit que celui de la surface  $S$  qui est égale à  $2\pi$ , on en déduit :

$$a_e \leq a_p + 2\pi\varepsilon + \pi\varepsilon^2 = a_p + \pi(2 + \varepsilon)\varepsilon \leq a_p + \frac{A}{2}$$

Un petit lemme, démontré ci-dessous, montre que l'enveloppe  $E$  contient la surface  $S$ . L'aire de  $S$ , c'est-à-dire  $\pi + A$  est en conséquence plus petite que celle de  $a_e$  :

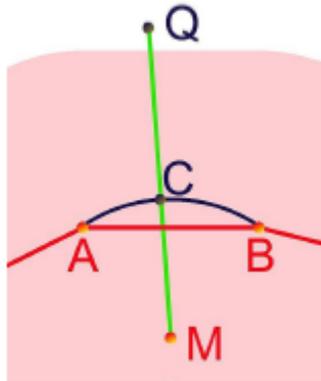
$$\pi + A \leq a_p + \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad a_p \geq \pi + \frac{A}{2}$$

On a bien construit un polygone d'aire strictement supérieure à  $\pi$  et de périmètre strictement inférieur à  $2\pi$ . Or aucun polygone de même périmètre qu'un disque ne possède une aire supérieure à celle du disque : ce résultat est absurde. Cette absurdité montre qu'une surface  $S$  d'aire strictement supérieure à celle d'un disque de même périmètre ne peut exister.

- **Toute surface  $S$  possède une aire plus petite que celle du disque de même périmètre. L'égalité n'a lieu que si la surface  $S$  est elle aussi un disque.**

Il ne reste plus qu'à étudier le cas de l'égalité. La preuve précédente montre qu'il existe bien au moins une surface d'aire optimale pour un périmètre donné, le disque. La démonstration de **Steiner** montre que, si une telle surface existe, elle est nécessairement un disque.

- **L'enveloppe  $E$  contient la surface  $S$ .**

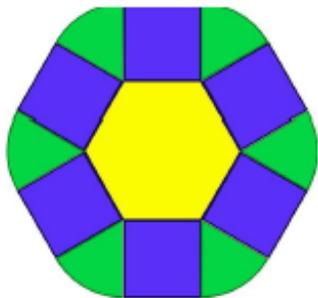


On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'un point  $Q$  de  $S$  qui ne soit pas élément de  $E$ . La surface  $E$  est celle sur fond rouge. La convexité de  $S$  met en évidence une absurdité. On utilise un théorème indiquant qu'il existe une droite d'appui pour chaque point de la frontière et séparant le plan en deux demi-plans dont l'un est fermé. Ce demi-plan fermé contient l'intégralité du convexe.

Soit  $M$  un point de l'intérieur du polygone  $p$ . On considère le segment d'extrémité  $Q$  et  $M$ . Ce segment croise la frontière du polygone et il existe une arête  $AB$  dont l'intersection avec le segment  $QM$  est non vide. Ce point d'intersection ne peut être un sommet, par exemple  $A$ , comme  $A$  est aussi un point frontière de  $S$ . Or, un voisinage de  $M$  est contenu dans l'intérieur du polygone et donc dans celui de  $S$ , ce voisinage contient des points de chaque côté de la droite, ce qui est impossible.

Considérons la frontière du convexe  $S$  entre  $A$  et  $B$ , en bleu sur la figure ; elle traverse la droite  $QM$ . Soit  $C$  le point d'intersection, par construction du polygone  $P$ , le point  $C$  est à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de  $A$  et se trouve dans  $E$ , à la différence de  $Q$  qui n'est pas élément de  $E$ , ces deux points sont donc différents. Le point  $C$  est un point frontière du convexe  $S$ , il possède une droite d'appui. Le même argument que celui utilisé précédemment montre que cette droite d'appui est nécessairement celle passant par  $Q$  et  $M$ . Or, on a vu qu'une telle droite ne peut être une droite d'appui. ■

### 3.7 Somme de Minkowski



Somme de **Minkowski** d'un hexagone de rayon 1 et de la boule unité.

On pourrait croire que les deux démonstrations précédentes closent le débat du problème isopérimétrique du plan euclidien  $E$ . Il n'en est rien. La démarche d'**Hurwitz** n'apporte aucune information si la frontière n'est pas suffisamment lisse. Celle présentée au dernier paragraphe se généralise mal aux dimensions supérieures. À partir de la dimension 3, il ne faut plus espérer trouver des polyèdres convexes réguliers, encore appelés solides de **Platon** approchant avec la précision voulue la sphère. Il n'existe que 5 solides de ce type.

**Hausdorff** et **Minkowski** développent une autre approche, fondée sur une géométrie un peu différente. Ici, le terme de géométrie désigne l'étude d'un ensemble muni d'une distance et d'une opération algébrique compacts non vides, la distance celle de **Hausdorff** et l'opération est la somme de **Minkowski**, dont la compatibilité avec la distance se traduit par la continuité de l'opération. La somme de **Minkowski**  $P + Q$  est l'ensemble des sommes dont le premier membre est élément de  $P$  et le second de  $Q$  :

$$P + Q = \{p + q \text{ tel que } p \in P \text{ et } q \in Q\}.$$

Si  $S$  désigne un convexe compact non vide et  $tB$  la boule fermée de centre le vecteur nul et de rayon  $t$ , l'aire de la somme  $S + tB$  prend la forme suivante, connue sous le nom de formule de **Steiner-Minkowski** :

$$A(S + tB) = a + pt + \pi t^2.$$

Ici,  $a$  désigne l'aire de  $S$  et  $p$  son périmètre. Cette somme est illustrée sur la figure de gauche dans le cas d'un hexagone. La somme correspond à l'ensemble des points du plan

à une distance inférieure ou égale à  $t$  de  $S$ . Appliquer à l'hexagone jaune de la figure, on peut décomposer cette somme en trois régions. La première correspond à la figure initiale  $S$  en jaune, la deuxième aux points situés sur un rectangle de côté une arête du polygone et de largeur  $t$ , correspondant aux 6 rectangles bleus. L'aire des surfaces bleues est égale à  $pt$ . Enfin, à chaque sommet est associée une portion de disque de rayon  $t$ , en vert sur la figure. L'union de ces portions de disque forme un disque complet, d'où le dernier terme de la formule.

L'aire s'exprime comme un polynôme de degré 2, son discriminant est égal à  $p^2 - 4\pi a$ . On reconnaît là le terme de l'inégalité isopérimétrique. Démontrer le théorème revient à dire que le discriminant n'est jamais négatif, ou encore que le polynôme admet au moins une racine. Ce résultat s'obtient directement comme une conséquence de l'inégalité de **Brunn-Minkowski**.

**Démonstration.**

L'inégalité de **Brunn-Minkowski** montre que :

$$\sqrt{A(S + tB)} \geq \sqrt{A(s)} + \sqrt{A(tB)}$$

et  $\sqrt{a + pt + \pi t^2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{\pi t}$ .

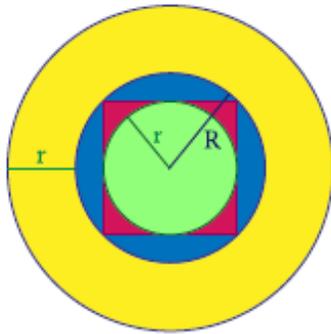
Au carré, cette majoration devient :

$$a + pt + \pi t^2 \geq a + \pi t^2 + 2\sqrt{\pi at} \quad \text{et} \quad p^2 \geq 4\pi a.$$

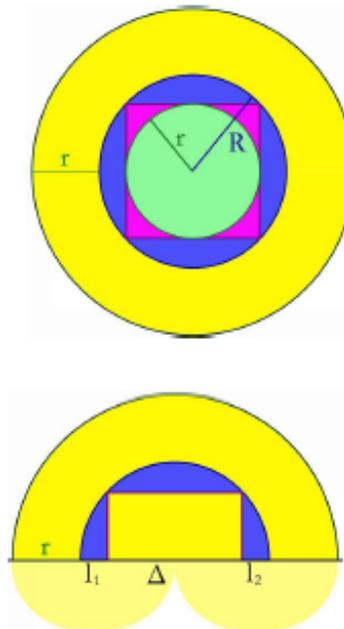
■

## 3.8 Inégalité de Bonnesen

À y regarder de près, le paragraphe précédent propose bien une méthode généralisable pour montrer l'inégalité isopérimétrique, mais elle n'indique pas comment traiter le cas de l'égalité. Plus précisément, la démonstration n'indique pas que seul le cercle est la solution, partie difficile de la démonstration qui a bloqué tant de monde depuis d'Antiquité.



L'opposé rayon du cercle inscrit ainsi que celui du cercle circonscrit se trouvent entre les racines du polynôme.



Il existe bien une preuve, fondée sur une symétrisation de **Steiner**. Elle est malcommode à généraliser en dimension quelconque. **Bonnesen** trouve une expression simple, en fonction d'un cercle inscrit et d'un circonscrit. Le cercle est dit inscrit dans un compact  $S$  s'il est inclus dans  $S$  et si son rayon  $r$  est maximale. Un cercle est dit circonscrit dans  $S$  et s'il contient  $S$  et si son rayon  $R$  est minimale. L'inégalité de **Bonnesen** de la manière suivante, si  $a$  est l'aire du compact et  $p$  son périmètre :

$$p^2 - 4\pi a \geq \pi^2 (R - r)^2.$$

Ce résultat signifie que le discriminant du polynôme du second degré, qui à  $t$  associe l'aire de la surface  $S + tB$ , admet deux racines distinctes si un cercle inscrit possède un rayon strictement plus petit qu'un cercle circonscrit. Autrement dit, pour l'égalité isopérimétrique ait lieu, il est nécessaire que les deux rayons soient égaux, ce qui ne peut arriver que pour le cercle. Un autre résultat, un peu plus fort, indique que les deux valeurs  $-R$  et  $-r$  se situent entre les deux racines, comme illustré sur la figure. De même manière, on en déduit la nécessité de l'égalité entre  $R$  et  $r$  pour atteindre l'optimal.

**Démonstration.**

- **La valeur  $-r$  est d'image négative par le polynôme qui, à  $t$  associe l'aire de la surface  $S + tB$  :**

On considère un compact convexe non vide  $S$ , un cercle inscrit, de rayon  $r$  et un cercle circonscrit  $C$  de rayon  $R$ . Cette situation est illustrée sur la figure, le compact convexe est le carré violet, le cercle  $C$  est illustré en bleu et le cercle inscrit en vert. La technique utilisée consiste à considérer la zone bleue  $Z$  correspondant aux points de  $C$  qui ne sont pas dans  $S$ . La surface  $Z + rB$  est doublement mesurée, les symboles  $rB$  désignent ici la boule de rayon  $r$  et de centre le vecteur nul. Cette figure recouvre intégralement  $S$  et définit un disque de rayon  $R + r$ , illustré en jaune. On en déduit une première égalité :

$$A(Z + rB) = \pi(R + r)^2.$$

On découpe alors la surface  $Z$  en deux par une droite  $\Delta$  passant par les centres des deux cercles inscrit et circonscrit. La partie supérieure de  $Z$  est notée  $Z_s$ , comme indiquée sur l'illustration. La somme de **Minkowski** de  $Z_s$  et de  $rB$  correspond, dans la partie supérieure à la droite  $\Delta$ , à un demi-disque, de rayon  $R + r$ . Si  $l_1$  et  $l_2$  sont les longueurs des deux intersections de  $Z$  avec  $\Delta$  (voir la figure), l'intersection de la somme avec la partie inférieure à la droite  $\Delta$  possède une aire égale à  $\pi r^2 + (l_1 + l_2)r$ . On en déduit l'égalité :

$$A(Z_s + rB) = \frac{\pi}{2}(R + r)^2 + (l_1 + l_2)r + \pi r^2 \leq A(Z_s) + (\pi R + l_1 + l_2 + p_s)r + \pi r^2.$$

Il est aussi possible d'évaluer cet aire à l'aide de la formule de **Steiner-Minkowski**. Comme  $Z_s$  n'est pas convexe, la frontière de  $S$ . On peut appliquer exactement le même

raisonnement à la partie inférieure à la droite  $\Delta$ . En utilisant l'indice  $i$  pour décrire la partie inférieure, on obtient :

$$A(Z_i + rB) = \frac{\pi}{2}(R+r)^2 + (l_1 + l_2)r + \pi r^2 \leq A(Z_i) + (\pi R + l_1 + l_2 + P_i)r + \pi r^2.$$

En sommant les deux majorations :

$$\pi(R+r)^2 + 2(l_1 + l_2)r + 2\pi r^2 \leq A(Z) + 2\pi Rr + 2\pi r^2 + 2(l_1 + l_2)r + pr.$$

Le périmètre  $p$  de  $S$  est en effet la somme de  $ps$  et de  $pi$ . L'aire de  $Z$  est aussi égale à la différence de l'aire d'un disque de rayon  $R$  avec l'aire  $a$  de  $S$ , ce qui donne :

$$\pi(R+r)^2 + 2\pi r^2 \leq \pi R^2 - a + 2\pi Rr + 2\pi r^2 + pr$$

$$\text{et } a - pr + \pi r^2 \leq 0.$$

La dernière majoration signifie que  $-r$  est d'image négative par le polynôme associant à  $t$  l'aire de  $S + tB$ .

- **La valeur  $-R$  est d'image négative par le polynôme qui, à  $t$  associe l'aire de la surface  $S + tB$  :**

On applique exactement le même raisonnement que le précédent en remplaçant le coefficient  $r$  par  $R$ , le rayon du cercle circonscrit ( $R$  n'est-il pas trop grand pour que cela soit possible?). On obtient la majoration :

$$\pi(2R)^2 + 2\pi R^2 \leq \pi R^2 - a + 2\pi R^2 + 2\pi R^2 + pR$$

$$\text{et } a - pR + \pi R^2 \leq 0,$$

ce qui démontre la proposition.

**L'inégalité de Bonnesen est vérifiée :**

Dire que  $-r$  et  $-R$  ont une image négative par le polynôme revient à dire que ces valeurs se trouvent entre les racines :

$$-\frac{p + \sqrt{p^2 - 4\pi a}}{2\pi} \leq -R \leq -r \leq -\frac{p - \sqrt{p^2 - 4\pi a}}{2\pi}.$$

Cela signifie aussi que la distance qui sépare  $R$  et  $r$  est plus petite que le rapport entre le discriminant et  $\pi$  :

$$R - r \leq \frac{\sqrt{p^2 - 4\pi a}}{2\pi} \quad \text{et} \quad p^2 - 4\pi a \geq \pi^2(R - r)^2.$$

■

**Remarque 3.8.1 historique :**

*La première démonstration de la majoration est l'oeuvre de **Bonnesen**. Celle présentée ici, due à **Hugo Hadwiger**, montre que les deux rayons sont situés entre les deux racines.*

## 3.9 Principe de moindre action pour une variété Riemannienne : équation géodésique

Le but de cet appendice est de développer les calculs qui ont permis d'obtenir le système différentiel vérifié par les géodésiques d'une variété Riemannienne 1.5.1.

### 3.9.1 Minimisation de la fonctionnelle énergie

Le principe de moindre action pour une variété Riemannienne est la recherche de l'optimum de la fonctionnelle

$$J(\vec{\gamma}) = \int_{\vec{\gamma}} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\vec{\gamma}}^T g \dot{\vec{\gamma}}} dt \quad (3.9.1)$$

**Remarque 3.9.1** *Le deuxième membre de cette double égalité nous donne la longueur de la courbe entre les deux points. Le troisième membre est une réécriture de cette longueur en terme de vitesse et de temps de parcours. En particulier, si on prend la norme de la vitesse de parcours de la courbe à constante alors minimiser  $J$  reviendra à trouver la courbe qui, partant de  $P_1$  arrivera en  $P_2$  le plus tôt. Autrement dit on minimisera le temps de parcours à vitesse constante.*

D'autre part,  $J(\vec{\gamma})$  représente l'Action du système étudié, et s'écrit comme l'intégrale du lagrangien  $F(t, \vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t)) = \sqrt{\dot{\vec{\gamma}}^T g \dot{\vec{\gamma}}}$ . Il s'agit d'une forme quadratique sur les vitesses c'est-à-dire d'une énergie cinétique. Autrement dit, le lagrangien d'une variété Riemannienne est exprimé uniquement comme une énergie cinétique (pas d'énergie potentielle). De plus, l'espace  $(\vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t))$  est appelé espace des configurations du système physique, et c'est lui qui est une variété Riemannienne.

Le problème revient donc à chercher la courbe  $\vec{\gamma}^*(t)$  qui, parmi toutes les courbes du type  $\vec{\gamma}_\varepsilon(t) = \vec{\gamma}^*(t) + \varepsilon \vec{\delta}_\gamma(t)$ , minimise l'action  $J$ . Autrement dit, la courbe  $\vec{\gamma}^*(t)$  cherchée est telle que la fonctionnelle  $J(\vec{\gamma}^*(t))$  soit minimale, ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\delta J(\vec{\gamma}^*(t)) = 0, \quad \forall \vec{\delta}_\gamma(t) \quad (3.9.2)$$

où  $\vec{\delta}_\gamma(t)$  est une petite variation appliquée à  $\vec{\gamma}^*(t)$ . La variation de  $J$  ainsi définie sera calculée à l'aide de la dérivée directionnelle définie ci après en 3.9.3, de telle sorte que

l'équation d'Euler-Lagrange sur une variété Riemannienne s'écrira :

$$3.9.2 \Leftrightarrow \left\langle \nabla_Y F - \frac{d}{dt}(\nabla_{Y'} F), \delta_Y \right\rangle = 0, \forall \overrightarrow{\delta_Y(t)}$$

$$\Leftrightarrow \nabla_Y F - \frac{d}{dt}(\nabla_{Y'} F) = 0.$$

où la dérivée directionnelle est définie ainsi :

**Définition 3.9.1 Dérivée directionnelle**

Notons  $\overrightarrow{Y}_\varepsilon(t) = \overrightarrow{Y}(t) + \varepsilon \overrightarrow{\delta_\gamma}(t)$ .

Alors la dérivée directionnelle de la fonctionnelle  $J(\overrightarrow{Y}(t))$  dans la direction  $\overrightarrow{\delta_\gamma}(t)$  s'écrit :

$$\delta J(\overrightarrow{Y}(t)) = \left\langle \nabla J, \overrightarrow{\delta_\gamma} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon) - J(\overrightarrow{\gamma})}{\varepsilon} \quad (3.9.3)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel tel que  $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \overrightarrow{x}^T \overrightarrow{y}$ .

Alors, en exprimant l'équation obtenue dans un système de coordonnées tel que  $\overrightarrow{\gamma}(t) = (x_1(t) \dots x_i(t) \dots x_n(t))^T$ .

La courbe optimum est celle qui vérifie 3.9.2. Notons  $\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon(t)$  la courbe ayant subi une variation de  $\varepsilon$  dans la direction  $\overrightarrow{\delta_\gamma}(t)$ , soit :  $\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon(t) = \overrightarrow{\gamma}(t) + \varepsilon \overrightarrow{\delta_\gamma}(t)$ . Et d'après 3.9.3 on a

$$\delta J(\gamma) = \langle \nabla J, \overrightarrow{\delta_\gamma} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon) - J(\overrightarrow{\gamma})}{\varepsilon} \quad (3.9.4)$$

Il s'agit tout d'abord de chercher à déterminer  $J(\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon) = J(\overrightarrow{\gamma} + \varepsilon \overrightarrow{\delta_\gamma})$ , qui, puisque la métrique  $g$  dépend des  $x_i(t)$  et donc de  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  s'écrira :

$$J(\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\dot{\gamma} + \varepsilon \dot{\delta}_\gamma\right)^T g_\varepsilon \left(\dot{\gamma} + \varepsilon \dot{\delta}_\gamma\right)} dt$$

où  $g_\varepsilon$  est la métrique induite par la perturbation de  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  d'un certain  $\varepsilon$  dans la direction  $\overrightarrow{\delta_\gamma}(t)$ , noté  $\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon(t)$ . Et alors  $g_\varepsilon = g + \varepsilon \delta_g + o(\varepsilon)$  où  $\delta_g$  est défini à l'aide de la dérivation directionnelle par

$$\delta_g = \langle \nabla_g, \overrightarrow{\delta_\gamma} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_\varepsilon - g}{\varepsilon}$$

Alors, on remplaçant dans 3.9.4 en se souvenant que  $\dot{s}^2 = \dot{\gamma}^T g \dot{\gamma}$  et factorisant par  $\dot{s}^2$  sous la racine on obtient que :

$$J(\overrightarrow{\gamma}_\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\dot{s}^2} (\dot{\gamma}^T g \dot{\delta}_\gamma + \dot{\gamma}^T \delta_g \dot{\gamma} + \dot{\delta}_\gamma^T g \dot{\gamma}) + 0(\varepsilon)} dt$$

A présent, on effectue un développement limité de la forme  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + 0(x)$  et on obtient :

$$J(\vec{\gamma}_\varepsilon) = J(\vec{\gamma}) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\dot{s}^2} (\dot{\gamma}^T g \dot{\delta}_\gamma + \dot{\delta}_\gamma^T g \dot{\gamma} + \dot{\gamma}^T \delta g \dot{\gamma} + 0(\varepsilon)) dt$$

De plus, puisque la métrique  $g$  est symétrique on a  $\dot{\gamma}^T g \dot{\delta}_\gamma + \dot{\delta}_\gamma^T g \dot{\gamma} = 2\dot{\gamma}^T g \dot{\delta}_\gamma$ , d'où, en remplaçant dans 3.9.4 :

$$\delta J(\vec{\gamma}(t)) = \langle \nabla J, \vec{\delta}_\gamma \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2\dot{s}^2} (2\dot{\gamma}^T g \dot{\delta}_\gamma + \dot{\gamma}^T \delta g \dot{\gamma}) dt \quad (3.9.5)$$

On veut évaluer ceci pour une norme de la vitesse de parcours  $\dot{s}$  constante. Or on peut toujours re-paramétriser le temps de façon à avoir  $\dot{s} = cste$  et en particulier on prendra ici  $\dot{s} = 1$ . Alors 3.9.5 devient :

$$\delta J(\vec{\gamma}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}^T \delta g \dot{\gamma} - \frac{d}{dt} (\dot{\gamma}^T g) \delta \gamma \right) dt \quad (3.9.6)$$

### 3.9.2 Prise en compte du système de coordonnées

En exprimant 3.9.6 dans le système de coordonnées tel que  $\vec{\gamma}(t) = (x_1(t) \dots x_i(t) \dots x_n(t))^T$  il va être possible de transcrire ce que signifie la condition  $\delta J = 0$ .

Pour ce faire il sera procédé par étapes et pour simplifier les écritures la notation de sommation d'Einstein sera employée. Tout d'abord,  $\vec{\gamma}(t)$  étant une courbe vectorielle à  $n$  composantes, une fois écrite dans le système de coordonnées, on a :

$$\vec{\delta}_{\gamma_k} = \delta x_k \quad (3.9.7)$$

Ensuite, d'après la définition de la dérivée directionnelle  $\delta_g = \langle \nabla_g, \vec{\delta}_\gamma \rangle$ , ce qui d'après 3.9.7 peut s'écrire  $\delta_g = \langle \frac{\partial g}{\partial x_k}, \delta x_k \rangle$  d'où, puisque  $g$  est symétrique, on a :

$$\delta_g = \frac{\partial g}{\partial x_k} \delta x_k \quad (3.9.8)$$

Alors, en remplaçant dans 3.9.6 et sachant que l'on veut  $\delta J(\vec{\gamma}(t)) = 0$ , on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}^T \frac{\partial g}{\partial x_k} \dot{\gamma} \delta x_k - (\dot{\gamma}^T g + \dot{\gamma}^T \dot{g})_k \delta x_k \right) dt = 0 \quad (3.9.9)$$

ce qui en notant  $g_{ij}$  les éléments de la métrique  $g$  peut réécrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \delta x_k - (\ddot{x}_m g_{mk} + \dot{x}_i (\dot{g})_{ik}) \right) \delta x_k dt = 0$$

Or  $(\dot{g})_{ik} = \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} \dot{x}_j \right)_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \dot{x}_j$ . de plus, part de symétrie de  $g$ , on a  $\ddot{x}_m g_{mk} = \ddot{x}_k g_{km}$ .

Autrement dit, on notant  $\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_r} = g_{pq,r}$ , la courbe  $\vec{\gamma}(t)$  recherchée est celle qui vérifie :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j g_{ij,k} - \ddot{x}_k g_{km} - \dot{x}_i g_{ik,j} \dot{x}_j \right) \delta x_k dt = 0 \quad \forall \delta x_k$$

Et ainsi le système différentiel vérifié par les géodésiques est donné par :

$$\frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j g_{ij,k} - \ddot{x}_k g_{km} - \dot{x}_i g_{ik,j} \dot{x}_j = 0 \quad k = 1..n \quad (3.9.10)$$

### 3.9.3 Réécriture à l'aide des Symboles de Christoffel

Le système 3.9.10 peut être réécrite, pour le rendre plus lisible, à l'aide des Symboles de Christoffel définis par :

**Définition 3.9.2** *Symboles de Christoffel*

Soient  $g^{ij}$  les éléments de la matrice inverse  $g^{-1}$  de la métrique  $g$  d'une variété. Ces éléments ont alors les mêmes propriétés de symétrie que  $g$  et de plus on a  $g^{ij} g_{jk} = \delta_i^k$  où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. On définit alors les symboles de Christoffel comme étant :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}) \quad (3.9.11)$$

Or, la métrique étant symétrique on a  $g_{ik,j} = \frac{g_{ik,j} + g_{ki,i}}{2}$  et alors le dernière élément de 3.9.10 peut se réécrire avec un changement d'indice comme

$$\dot{x}_i g_{ik,j} \dot{x}_j = \frac{1}{2} (\dot{x}_j \dot{x}_i g_{kj,i} + \dot{x}_i \dot{x}_j g_{ki,j})$$

En remplaçant dans 3.9.10, et en multipliant tout par  $-1$  cela donne :

$$\ddot{x}_k g_{km} + \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_j (g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) = 0 \quad k = 1..n$$

Il ne reste plus alors qu'à multiplier l'équation précédente par  $g^{mk}$  et à échanger dans la deuxième partie de l'équation les indices  $m$  et  $k$  (ce qui ne change rien  $g^{-1}$  étant symétrique), et on pourra alors écrire :

$$\ddot{x}_k + \dot{x}_i \dot{x}_j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad k = 1 \dots n$$

Ceci est l'écriture, à l'aide des symboles Christoffel, du système différentiel vérifié par les géodésiques d'une variété Riemannienne. Si on peut le résoudre

alors on obtient analytiquement les équations des courbes géodésiques de la variété.

### 3.9.4 Changement de variables pour intégrer le système différentiel dans l'exemple de la sphère

Il s'agit ici d'expliquer comment a été trouvé le changement de variable présenté en 1.5.3 pour obtenir 1.3.18. On procédera par changements de variable successifs. Tout d'abord posons  $u = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  c'est à dire  $\theta = \operatorname{arccot} u$  et alors on a

$$d\theta = d(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} du$$

ainsi :

$$I = - \int \frac{C}{\sin(\operatorname{arccot}(u)) \sqrt{[\sin(\operatorname{arccot}(u))]^2 - C^2}} \times \frac{1}{1+u^2} du$$

Et en faisant appel à des formules trigonométriques, on peut se rappeler que  $\sin(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . alors en remplaçant dans l'équation précédente et en mettant tout sous la racine au dénominateur on obtient :

$$I = - \int \frac{C}{1 - C^2 - C^2 u^2} du$$

En posant maintenant  $q^2 = 1 - C^2 > 0$  puisque  $|C| < 1$ , cela donne (en mettant  $q$  en facteur au dénominateur) :

$$I = - \int \frac{C}{q \sqrt{1 - \frac{C^2 u^2}{q^2}}} du$$

puis par un deuxième changement de variable :  $X = \frac{Cu}{q}$  c'est à dire  $u = \frac{qX}{C}$  qui est tel que  $du = \frac{q}{C} dX$  on a alors :

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{C}{q \sqrt{1 - X^2}} \times \frac{q}{C} dX \\ &= \operatorname{arccos}(X) + \underbrace{E}_{cste} \end{aligned}$$

Le changement de variable globale effectué a donc été :

$$X = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cot \theta.$$

---

# Conclusion générale

En géométrie, une géodésique désigne la généralisation d'une ligne droite sur une surface. En particulier, le chemin le plus court, ou l'un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs, entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique est une géodésique. Lorsque l'on change cette notion de distance, les géodésiques de l'espace peuvent prendre une allure très différente. Les exemples les plus familiers de géodésiques sont les lignes droites en géométrie euclidienne. Sur une sphère, les géodésiques sont les grands cercles. Le chemin le plus court entre un point  $A$  et un point  $B$  sur une sphère est donné la plus petite portion du grand cercle passant par  $A$  et  $B$ . Si  $A$  et  $B$  sont aux antipodes (comme le pôle Nord et le pôle Sud), il existe une infinité de plus en plus courts chemins.

Le théorème d'**Euler-Lagrange** est utilisable pour la détermination de ces géodésiques, qui donne une condition nécessaire pour que l'extrémale soit solution du problème variationnel. Aussi mieux que sa, le théorème de **Hilbert** donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'extrémale soit solution du problème variationnel.

Le sujet de l'isopérimétrie a une longue et riche histoire, à la fois pour son impact sur l'imagination populaire et plus généralement sur celle de la société et aussi **Poas** l'élan qu'il a donné à l'étude de sujets mathématiques variés. L'isopérimétrie est initialement l'étude des propriétés des formes géométriques du plan qui partagent le même périmètre. En particulier, le problème le plus classique consiste à déterminer la forme géométrique plane qui maximise son aire avec un périmètre fixé, qui est le disque. La première manière avancée est le fruit du travail de **Steiner** (1796-1863). Il montre que si une solution existe, elle est nécessairement unique et c'est le disque. Pour cela, il développe un outil, maintenant appelé symétrisation de **Steiner** et encore utilisé pour établir des théorèmes

d'isopérimétrie. Son idée majeure consiste à l'aide d'une droite en deux parties d'aires égales, il est possible de construire une nouvelle surface optimale à l'aide de la duplication d'une des deux parties.

---

# Bibliographie

- [1] F.Alessio, Autour des inégalités isopérimétriques, éditions de l'École polytechnique, 2011.
- [2] B.Flurie-Anne, Géométrie différentielle, groupes de Lie et transformations, Juin à Septembre 2011.
- [3] L.Gilles, Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, deuxième année, 7 août 2009.
- [4] A.Hélène, la cycloïde du brachistochrone au pendule d'Huyghens. Bulletin AMQ, vol.XLIV, N<sup>o</sup>3, octobre 2004.
- [5] B.Tommy, Les problèmes des isopérimètres et des isophanes, collection de monographies sur la théories des fonctions, Paris, Gauthier-Villards, 1929.
- [6] D.B.Yurrii et A.Z.Viktor, Geometric inequalities, Springer, coll. «Grund.math.Wiss.» N<sup>o</sup>285, 1988.