

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DE Abderahmane. MIRA  
BEJAIA  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en mathématiques**

**Spécialité : Analyse et Probabilités**

**Par**

**GUENDOUZ Yasmina  
ABDALLI Aicha**

**THÈME**

Les ondelettes : présentation des outils et leurs applications

Soutenu publiquement, le 20/06/2015 devant le jury composé de :

Mr.	<b>F. BOUHMILA</b>	Université A-Mira de Béjaia	Président.
Mme.	<b>H. BECHIR</b>	Université A-Mira de Béjaia	Promotrice.
Mr.	<b>B. KERAI</b>	Université A-Mira de Béjaia	Examineur.

---

# *Remerciements*

Nous remercions Dieu de cette réussite.

Nous tenons tout d'abord à remercier notre promotrice, Madame H.BECHIR pour son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité qui ont contribué à faire de ce mémoire ce qu'il est aujourd'hui.

Nos remerciements sont aussi adressés à Monsieur F.BOUHMILA et Monsieur B. KERAI qui nous font l'honneur de juger notre travail.

Nous remercions aussi tous les enseignants du département de Mathématiques qui nous ont permis d'améliorer notre formation.

Aicha & Yasmina

---

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents.

Mon frère et mes soeurs.

Ma très chère grand-mère, mes oncles et mes tantes, mes cousins et mes cousines.

Tous mes camarades de promo, tous mes amis et toutes mes copines de chambre.

Ma camarade de mémoire : Yasmina.

Aicha

---

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de mon père (rahimaho ALLAH).

Ma très chère maman qui m'a encouragée et soutenue tout au long de mes études.

Mes frères, mes soeurs et toutes leurs petites familles.

Mon fiancé.

Mon oncle laid qui a toujours été à mes côtés.

Ma camarade de mémoire Aicha et tous mes amis.

Yasmina

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Transformation de Fourier</b>	<b>5</b>
1.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	5
1.2 Propriétés de la transformée de Fourier	6
1.2.1 Propriétés de régularité	6
1.2.2 Parité, translation, changement d'échelle, modulation	6
1.2.3 Théorème d'échange	7
1.3 Convolution des fonctions	7
1.4 Inverse de la transformée de Fourier	7
1.4.1 Formule d'inversion de Fourier	8
1.5 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et convolution	8
1.5.1 Dérivée de la transformée	9
1.6 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	9
1.6.1 Théorème de Plancherel	9
1.6.2 Théorème de Plancherel-Reisz	9
1.6.3 Rappel des théorèmes	10
1.7 Propriétés élémentaires de $F$ sur $L^2(\mathbb{R})$	11
1.7.1 Formule d'échange	11
1.8 Transformée de Fourier dans $L^2$ et convolution	11
1.9 Transformation de Fourier à plusieurs variables	12
<b>2 La transformée en ondelettes et quelques exemples sur leurs familles</b>	<b>14</b>

2.1	La transformée continue en ondelettes . . . . .	14
2.2	Bases orthonormées d'ondelettes . . . . .	16
2.2.1	Le passage à la transformée discrète en ondelettes . . . . .	16
2.2.2	Analyse multirésolution et bases orthonormés d'ondelettes . . . . .	16
2.2.3	La fonction d'échelle et l'ondelette . . . . .	18
2.3	Les paquets d'ondelettes . . . . .	20
2.3.1	Construction des paquets d'ondelettes . . . . .	20
2.3.2	Les atomes des paquets d'ondelettes . . . . .	21
2.3.3	Organisation des paquets d'ondelettes . . . . .	21
2.4	Bases biorthogonales d'ondelettes . . . . .	23
2.4.1	Orthogonalité et biorthogonalité . . . . .	24
2.4.2	Propriétés des ondelettes biorthogonales . . . . .	24
2.5	Quelques familles d'ondelettes bien connues . . . . .	25
2.5.1	Ondelettes orthogonales à support compact . . . . .	26
2.5.2	Ondelettes orthogonales à support non compact . . . . .	26
2.5.3	Ondelettes sans filtres, réelles . . . . .	27
2.5.4	Ondelettes sans filtres complexes . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Applications des ondelettes</b>	<b>29</b>
3.1	Panorama de quelques applications des ondelettes . . . . .	29
3.2	Ondelettes et imagerie médicale : . . . . .	34
3.2.1	La transformée en ondelettes continue bidimensionnelle : . . . . .	34
3.2.2	Ondelettes et tomographie locale : . . . . .	35
3.3	Identification par analyse en paquets d'ondelettes de l'iris et tests de ro- bustesse . . . . .	39
	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

---

# Liste des principales notations

- $L^p(\mathbb{R})$   $\{f : f \text{ mesurable et } \int |f(t)|^p dt < \infty\}$
- $L^\infty(\mathbb{R})$   $\{\text{classe de fonctions essentiellement bornées}\}$ .
- $\int_{\mathbb{R}}$  Intégrale de Lebesgue.
- $\chi_{[a,b]}$  L'indicatrice de l'intervalle  $[a, b]$ ,  $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\|f\|_p$   $(\int |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ .
- $\|f\|_\infty$   $\min\{A > 0 / |f(t)| \leq A \text{ pp}\}$ .
- $\mu$  Mesure de Lebesgue.
- $F(f)$  ou  $\widehat{f}$  Transformée de Fourier de  $f$  (continue fréquentiel).
- $\overline{F}(f)$  Transformée de Fourier inverse de  $f$ .
- $L^1(\mathbb{R})$  espace des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$ .
- $L^2(\mathbb{R})$  espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$  ou d'énergie finie sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$ .
- $\|f\|_2$  norme dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
- $L^2(\mathbb{Z})$  espace des suites (indicées par  $\mathbb{Z}$ ) de carré sommable.
- $C^0(\mathbb{R})$  ensembles des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .
- $\overline{V}$  fermeture ou adhérence de l'ensemble  $V$  (le plus petit fermé contenant  $V$ ).
- $V \oplus W$  somme directe des espaces  $V$  et  $W$ ; ensemble des éléments de la forme  $v + w$  avec  $v \in V$  et  $w \in W$ .
- $V \perp W$  les sous-espaces  $V$  et  $W$  sont orthogonaux.

$\delta$	distribution de Dirac (au point 0).
$V_j$	espace des approximations de niveau $j$ .
$W_j$	espace des détails de niveau $j$ .
$\varphi$	fonction d'échelle associée à une analyse multirésolution.
$\psi$	ondelette associée à une analyse multirésolution (analyse discret) ou vérifier la condition d'admissibilité.
$\psi_{a,b}$	la famille d'ondelettes associées à $\psi$ , avec $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a})$ $a \in \mathbb{R}^+$ , $b \in \mathbb{R}$ .
$C_f(a, b)$	coefficient de la fonction $f$ sur l'ondelette $\psi_{a,b}$ .
<i>AMR</i>	analyse multirésolution.



---

# Introduction

L'analyse par ondelettes a été introduite au début des années 1980 dans le contexte de l'analyse des signaux et d'exploration pétrolière. Il s'agissait à l'époque de donner une représentation des signaux permettant la mise en valeur simultanément des informations temporelles et fréquentielles (localisation temps-fréquence).

En 1984, P. Goupillaud, A. Grossmann et J. Morlet poussés par les exigences croissantes de la recherche d'hydrocarbures proposent une méthode de reconstruction des signaux sismiques multidimensionnels permettant une restauration des hautes fréquences à l'aide d'une représentation temps-fréquence. C'est ainsi que le "besoin" des ondelettes, famille de fonctions déduites d'une même fonction (appelée ondelette mère) par opérations de translations et de dilatations, s'est fait ressentir en remarquant que la transformée de Fourier, qui a dominée dès le début du 19ième siècle, "perd" lors de la projection le "contrôle" de la variable temporelle et reste toujours incapable de décrire localement (en temps ou espace) le comportement fréquentiel des signaux.

Dès lors, les ondelettes qui ont été créées pour résoudre des problèmes posés par la sismique réflexion ne cessent de se développer, tant du point de vue pratique que du point de vue théorique, par des personnes telles Meyer, Daubechies, et autres pour ouvrir ensuite les ondelettes sur de nombreux champs d'applications autres que les mathématiques.

Dans cet exposé, nous suivrons un plan de travail suivant :

Dans un premier chapitre on rappellera quelques définitions et propriétés sur la transformée de Fourier.

Dans un deuxième chapitre nous présenterons l'aspect mathématique des ondelettes avec toutes les caractéristiques que présente cet outil. Nous commencerons par intro-

duire les transformées continues en ondelettes, ce qui nous conduira naturellement à la notion des bases orthonormées et biorthogonales, nous présenterons les bases de paquets d'ondelettes et nous traiterons quelques exemples sur les familles d'ondelettes.

Dans le dernier chapitre nous présenterons quelques applications des ondelettes dans différents domaines. Nous nous intéresserons particulièrement à l'imagerie médicale et la biométrie.

---

# Transformation de Fourier

En analyse, pour les fonctions non périodiques, la transformation de Fourier est une approche analogue à celle des séries de Fourier. Elle permet de leur associer un spectre en fréquences et d'obtenir l'expression de la fonction comme «somme infinie» des fonctions trigonométriques de toutes les fréquences qui forment son spectre. Une telle sommation se présente donc sous forme d'intégrale. Cela permet de la présenter sous forme d'une série et justifie le point de vue intuitif. Séries et transformation de Fourier constituent deux outils de base de l'analyse harmonique.

La transformation de Fourier  $F$  est une opération qui transforme une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  en une autre fonction, elle décrit le spectre fréquentiel de cette dernière.

## 1.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

**Définition 1.1.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . La transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\hat{f}$  est définie par :

$$\begin{aligned}\hat{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2\pi itx) dt\end{aligned}$$

**Remarque 1.1.1** L'intégrale précédente a un sens puisque

$$|f(t) \exp(-2\pi itx)| = |f(t) \exp(-itx)| = |f(t)|$$

Comme  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $f(t) \exp(-2\pi itx) \in L^1(\mathbb{R})$  et  $f(t) \exp(-itx) \in L^1(\mathbb{R})$

## 1.2 Propriétés de la transformée de Fourier

### 1.2.1 Propriétés de régularité

**Lemme 1.2.1** (*Riemann-Lebesgue*) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\widehat{f}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

**Proposition 1.2.1** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

a)  $\widehat{f}$  est bien définie et est uniformément continue.

b)  $\widehat{f}$  est uniformément bornée et

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(x)| \leq \|f\|_1 = F(|f|)(0)$$

**Proposition 1.2.2** (*Linéarité*) Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$$

c'est à dire que  $F$  est une application linéaire qui de plus est uniformément continue sur  $L^1(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$ .

### 1.2.2 Parité, translation, changement d'échelle, modulation

**Théorème 1.2.1** Soit  $f \in L^1$ .

a) Si  $f$  est paire (resp. impaire) alors  $\widehat{f}$  est paire (resp. impaire)

b) Si  $f$  est réelle alors  $\widehat{f}(-x) = \overline{\widehat{f}(x)}$ .

Il en résulte que, si  $f$  est réelle et paire (resp. impaire), alors  $\widehat{f}$  est réelle et

paire (resp. imaginaire pure et impaire)

c) Translation : si  $g(t) = f(t-u)$  où  $u \in \mathbb{R}$ , alors  $\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x) \exp(-2\pi i u x)$

d) Modulation : si  $g(t) = f(t) \exp(2\pi i u t)$ , alors  $\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x - u)$

e) Homothétie : si  $g(t) = f(\alpha t)$  où  $\alpha > 0$ , alors  $\widehat{g}(x) = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

### 1.2.3 Théorème d'échange

**Théorème 1.2.2** *Si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors  $\widehat{f}g$  et  $f\widehat{g}$  sont alors dans  $L^1(\mathbb{R})$ , de plus  $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)dx$*

## 1.3 Convolution des fonctions

**Définition 1.3.1** *Etant données  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , on appelle convolution de  $f$  et  $g$ , la fonction  $f * g$ , si elle existe, définie par :*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds$$

**Proposition 1.3.1** *Soient  $f$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $f * g$  est définie p.p et appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ .*

**Proposition 1.3.2** *Soient  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $L^p(\mu)$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$ , alors il existe une suite extraite  $(f_{n_k})_{k \geq 1}$  telle que  $f_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$   $\mu$ .p.p*

## 1.4 Inverse de la transformée de Fourier

Nous venons de voir que beaucoup d'opérations se transposent agréablement par la transformation de Fourier. La formule d'inversion est obtenue très simplement à partir de  $F$  et elle est très utile puisqu'elle nous permet, de passer de  $\widehat{f}$  à  $f$ . Cependant, il y a quelques précautions à prendre car si  $f$  est intégrable,  $\widehat{f}$  ne l'est pas toujours.

### 1.4.1 Formule d'inversion de Fourier

**Théorème 1.4.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tel que  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  alors

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \exp(2\pi itx) dx \text{ p.p.}$$

On note que pour presque partout  $f = \overline{F(F(f))}$ .

**Proposition 1.4.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tel que  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Si  $f$  est continue en un point  $t_0$  alors  $f(t_0) = \overline{F(F(f))}(t_0)$ .

**Corollaire 1.4.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tel que  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  alors, on a

$$F(F(f))(t) = f(-t) \text{ p.p.}$$

**Théorème 1.4.2** (d'unicité) Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tel que  $\widehat{f} = 0$  alors  $f = 0$  p.p, c'est à dire  $F$  est injective de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $C^0(\mathbb{R})$ .

## 1.5 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et convolution

Le théorème qui suit fait le lien entre la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  et la convolution. Ce résultat permet de ramener la résolution d'équations de convolution (et donc d'équation aux dérivées partielles à coefficients constants sur  $\mathbb{R}$ ) à des problèmes de division.

**Théorème 1.5.1** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

$$\overline{F(f * g)} = \overline{F(f)} \overline{F(g)}.$$

Si de plus  $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$ .

### 1.5.1 Dérivée de la transformée

**Théorème 1.5.2** *Si  $f$  et  $tf \in L^1(\mathbb{R})$ , alors :*

$$\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}).$$

$$(\widehat{f})'(x) = \widehat{(-2\pi it f)}(x).$$

## 1.6 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous avons vu dans l'espace  $L^1$ , que les hypothèses du théorème d'inversion de Fourier ne peuvent être remplies que si  $f$  est égale presque partout à une fonction continue tendant vers zéro à l'infini. La nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est apparue très tôt. Ainsi, en 1910, Plancherel a défini la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions de carré intégrable à savoir  $L^2(\mathbb{R})$  qui a l'avantage sur  $L^1(\mathbb{R})$  d'être un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)} dt$$

### 1.6.1 Théorème de Plancherel

**Théorème 1.6.1** *Soit  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , alors*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

$$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

### 1.6.2 Théorème de Plancherel-Reisz

Il existe un automorphisme unique, qu'on note  $F$ , de  $L^2(\mathbb{R})$  qui prolonge canoniquement l'isométrie

$$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto \widehat{f}$$

De plus, pour tout  $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , on a

$$F(\overline{F(f)}) = \overline{F(F(f))} = f \quad pp$$

$$\|F(f)\|_2 = \|f\|_2$$

$$\langle f, g \rangle = \langle F(f), F(g) \rangle$$

i.e

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} F(f)(x)\overline{F(g)(x)}dx.$$

soit

$$\varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2\pi itx) \chi_{[-n,n]} dt \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - F(f)\|_2 = 0 \quad (1.6.1)$$

**Remarque 1.6.1**  $F$  désigne deux applications distinctes; d'une part celle de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $C^0(\mathbb{R})$  et d'autre part celle de  $L^2(\mathbb{R})$  sur lui même. Ces deux applications ne coïncident que sur  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . En effet,  $\widehat{f}(x)$  est bien définie en tout points  $x$  de  $\mathbb{R}$  lorsque  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , tandis que lorsque  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $f$  est définie comme élément de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ . Mais en tant que fonction ponctuelle de  $x$ , on ne dispose que d'une fonction définie pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ . Il y a là une différence importante entre  $L^1(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R})$  pour la transformée de Fourier.

**Remarque 1.6.2** Lorsque  $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ , la fonction  $t \longmapsto f(t) \exp(-2\pi itx)$  n'est intégrable pour aucune valeur de  $x$ . Il est donc hors de question d'utiliser la formule intégrale définie dans ce chapitre. Dans ce cas la formule (1.6.1) affirme (en terme de suites) que  $\widehat{f}$  est la limite dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la suite  $(\widehat{f}_n)_{n>0}$ . Il faut prendre garde au fait qu'il n'y a pas, en général, de convergence presque partout de  $\widehat{f}_n$  vers  $\widehat{f}$  (on peut seulement l'affirmer pour une sous-suite).

### 1.6.3 Rappel des théorèmes

Comme nous venons de le voir dans le théorème précédent (la formule (1.6.1)), lorsque  $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ , la transformée de Fourier est donnée par une limite dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Donc,



le calcul se fait par approximation. Toutefois, on peut souvent se ramener à un calcul d'intégrales semi-convergentes.

C'est l'objet des théorèmes qui suivent.

**Théorème 1.6.2** *Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .*

Si pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\int_{-A}^A f(t) \exp(-2\pi itx) dt$  converge vers une limite finie que l'on note  $g(x)$ , lorsque  $A$  tend vers l'infini, alors  $F(f) = g$  pp.

**Théorème 1.6.3** *Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ .*

S'il existe  $g \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\overline{F}(g) = f$  alors  $F(f) = g$ .

## 1.7 Propriétés élémentaires de $F$ sur $L^2(\mathbb{R})$

Toutes les propriétés de translations, de modulation et d'homothétie vues pour les fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  sont encore valables pour  $L^2(\mathbb{R})$ . On les obtient par passage à la limite en utilisant la densité de  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . De plus, on a les propriétés suivantes.

### 1.7.1 Formule d'échange

**Proposition 1.7.1** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de carré intégrables, alors  $F(f)g$  et  $fF(g)$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} F(f)(t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)F(g)(u)du$$

## 1.8 Transformée de Fourier dans $L^2$ et convolution

**Proposition 1.8.1** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ , on a*

$$\begin{aligned} f * g &= \overline{F(\widehat{fg})}. \\ \widehat{fg} &= \widehat{f} * \widehat{g}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.8.1** Dans la proposition précédente la formule  $F(f * g) = \widehat{f\widehat{g}}$  n'a pas de sens a priori car  $f * g$  est seulement dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Cette formule serait vraie si l'on avait  $f * g$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Lorsque  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ , la convolution et la transformée de Fourier sont bien définies.

**Proposition 1.8.2** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{aligned}\widehat{f\widehat{g}} &\in L^2(\mathbb{R}) \\ f * g &= \overline{F(\widehat{f\widehat{g}})}\end{aligned}$$

## 1.9 Transformation de Fourier à plusieurs variables

Dans tout ce que précède, la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$  et dans  $L^2(\mathbb{R})$ , se généralise à  $\mathbb{R}^N$  muni du produit scalaire euclidien.

Nous allons donner les changements à apporter pour une fonction de  $L^1(\mathbb{R}^N)$ . Ceux-ci s'adaptent aux fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

**Notation 1.9.1** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N$$

On définit :

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_N);$$

$$x^\alpha = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N}$$

$$D^\alpha g(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_N^{k_N}}(x) \text{ où } |\alpha| = k_1 + k_2 + \dots + k_N.$$

$$(t, x) = \sum_{i=1}^N t_i x_i, \text{ le produit scalaire euclidien de } \mathbb{R}^N;$$

La norme euclidienne de  $t$  et  $x$  sont respectivement définis comme suite

$$\|t\|^2 = \sum_{i=1}^N t_i^2$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

**Définition 1.9.1** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$  l'application qu'on note  $\widehat{f}$  ou  $F(f)$ , définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  par

$$\widehat{f}(x) = F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) \exp(-2\pi i(t, x)) dt$$

**Définition 1.9.2** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . On appelle transformée de Fourier conjuguée, l'application qu'on note  $\overline{F}(f)$ , définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$

$$\overline{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) \exp(2\pi i(t, x)) dt$$

---

# La transformée en ondelettes et quelques exemples sur leurs familles

La théorie des ondelettes est apparue il y a quelques années suite aux travaux de Grossman et Morlet sur la caractérisation des signaux sismiques. Depuis, les travaux de recherche sur les ondelettes se sont multipliés sous l'influence des chercheurs français notamment. De nombreuses voies nouvelles sont en cours d'exploitation, les applications des ondelettes touchent tous les domaines de traitement du signal mona et bidimensionnel.

Deux variantes de la transformée en ondelettes existent : la transformée en ondelette continue et la transformée en ondelette discrète.

## 2.1 La transformée continue en ondelettes

**Définition 2.1.1** *On appelle ondelette (où ondelette "mère") une fonction  $\psi \in L^1 \cap L^2$  admettent  $(n + 1)$  moment nuls (où  $n \in \mathbb{N}$ ) c'est-à-dire vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}} t^p \psi(t) dt = 0 \quad p = 0, \dots, n$$

-Une famille d'ondelettes est définie par le couple  $(a,b)$  désignant respectivement un changement d'échelle ou dilatation et une translation de la fonction  $\psi$ , les ondelettes sont donc définies par :  $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$   $a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}$ .

la famille  $\{\psi_{a,b}\}$  est la famille d'ondelettes associée à  $\psi$ . En prenant  $\psi$  d'énergie 1 ( $\|\psi\|_{L^2} = 1$ ) toutes les fonctions  $\psi_{a,b}$  sont alors de norme 1.

-La transformée continue en ondelettes de la fonction  $f$  d'énergie finie est la famille des coefficients  $C_f(a,b)$  définie par :

$$C_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = (f, \psi_{a,b})_{L^2} \quad a \in \mathbb{R}^{+*}, b \in \mathbb{R}$$

-La transformée en ondelettes est réversible on peut donc passer de l'analyse d'une fonction à sa synthèse par :

$$f(t) = \frac{1}{K_\psi} \int_{]0,+\infty[ \times \mathbb{R}} \frac{1}{a^2} C_f(a,b) \psi_{a,b}(t) da db \text{ dans } L^2, t \in \mathbb{R}$$

$K_\psi$  la valeur commune des intégrales.

L'inversibilité de la transformée continue en ondelettes dans  $L^2$  est complétée par le fait qu'elle vérifiant la condition d'admissibilité.

### Condition d'admissibilité :

Soit  $\psi \in L^1 \cap L^2$  vérifiant la condition d'admissibilité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw = \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < +\infty$$

Notons que la condition d'admissibilité implique en particulier que  $\widehat{\psi}(0) = 0$  donc  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ . Cette condition est difficile à utiliser, on lui préfère souvent une condition suffisante d'admissibilité beaucoup plus simple à vérifier :

$$\psi \text{ réelle, } \psi \in L^1 \cap L^2, t\psi(t) \in L^1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0.$$

## 2.2 Bases orthonormées d'ondelettes

### 2.2.1 Le passage à la transformée discrète en ondelettes

On considère des sous ensembles discrets de  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ . Fixons  $a_0 > 1$ ,  $b_0 > 0$  et prenons  $a \in \{a_0^p\}_{p \in \mathbb{Z}}$  et  $b \in \{na_0^p b_0\}_{p, n \in \mathbb{Z}}$  on se sert, pour la transformée discrète, de la famille dénombrable d'ondelettes :

$$\psi_{p,n}(t) = a_0^{-\frac{p}{2}} \psi(a_0^{-p}t - nb_0) \quad a_0 > 1, \quad b_0 > 0 \text{ fixée et } p, n \in \mathbb{Z}$$

Pour  $f \in L^2$ , on définit la transformée discrète en ondelettes de la fonction  $f$  par :

$$C_f(p, n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{p,n}(t)} dt = (f, \psi_{p,n})_{L^2} \quad p, n \in \mathbb{Z}$$

-Si on choisit  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 1$  on se place dans le cas dyadique on a alors:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k).$$

Pour cela on abordera une question plus difficile : existe-t-il, et dans quelles conditions une fonction  $\psi$  telle que la familles  $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  soit une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ ?

La réponse est liée à la notion d'analyse multirésolution.

### 2.2.2 Analyse multirésolution et bases orthonormés d'ondelettes

Une analyse multirésolution est une famille  $M = \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant :

1) Croissance

$$V_j \subset V_{j-1} \tag{2.2.1}$$

2) Densité

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \tag{2.2.2}$$

3) Séparable

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \tag{2.2.3}$$

4) Dilatation

$$\forall j \in \mathbb{Z}, v(t) \in V_j \iff v(2t) \in V_{j-1} \tag{2.2.4}$$

5) Base orthonormale :

$$\exists g \in V_0 \text{ telle que } \{g(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est une base orthonormale de } V_0. \quad (2.2.5)$$

A partir de la famille  $M$  on définit une deuxième famille de sous-espaces notés  $\{W_j\}$ , où  $W_j$  est le supplémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$  :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \text{ avec } W_j \perp V_j$$

Par opposition aux espaces  $\{V_j\}$  qui sont les espaces d'approximation, on dira que les espaces  $\{W_j\}$  sont les espaces de détails. On obtient une série de propriétés sur les sous-espaces  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  qui sont utiles pour la compréhension géométrique de la construction :

$$w(t) \in W_j \iff w(2t) \in W_{j-1} \quad (2.2.6)$$

$$W_k \perp W_j \quad j \neq k \quad (2.2.7)$$

$$V_k \perp W_j \quad j \leq k \quad (2.2.8)$$

$$V_j = V_k \oplus W_k \oplus \dots \oplus W_{j+1} \quad j < k \quad (2.2.9)$$

$$V_j = \bigoplus_{j=J+1}^{+\infty} W_j \quad (2.2.10)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus \left\{ \bigoplus_{j=-\infty}^J W_j \right\} \quad (2.2.11)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j \quad (2.2.12)$$

Enonçons maintenant le résultat fondamental associée aux analyses multirésolution, en notant  $f_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} f(2^{-j}t - k)$ , pour  $f$  une fonction quelconque.

**Théorème 2.2.1** *BASES ORTHONORMEES D'ONDELETTES*

Soit  $M$  une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . A partir de (2.2.5) on peut construire une fonction d'échelle  $\varphi$  puis une ondelette  $\psi$  telles que :  $\forall j \in \mathbb{Z}, \left\{ \{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}, j \leq J} \right\}$  est une base orthonormée de  $L^2$  et  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée d'ondelettes de  $L^2$ .

**Démonstration.** à partir de  $g$  et donc de  $\{g(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , on construit une fonction telle que  $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de  $V_0$ ;

–on déduit que  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ ;

–à partir de  $\varphi$ , on construit une fonction  $\psi$  telle que  $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de  $W_0$ ;

–on déduit que  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$  ;

–on conclure que  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2$ . ■

Les points délicats sont les étapes 1 et 3. Elles font l'objet des deux propositions énoncées dans la suite. Elles présentent en outre, de manière plus complète, les propriétés de la fonction d'échelle  $\varphi$  et de l'ondelette  $\psi$ .

**Remarque 2.2.1** *Si  $M$  est une analyse multirésolution, il existe une infinité de fonctions d'échelle et donc une infinité d'ondelettes associées engendrant la même analyse.*

**2.2.3 La fonction d'échelle et l'ondelette**

Dans ce paragraphe, on énonce deux propositions qui établissent leurs liens entre les notions d'analyse multirésolution et d'ondelette orthogonale et proposent une manière de construire la seconde à partir de la première cette construction montre, au passage, le rôle fondamental joué par les équations aux deux échelles dans les domaines temporel et fréquentiel. Commençons par la construction de la fonction d'échelle  $\varphi$ .

**Proposition 2.2.1 :CONSTRUCTION DE LA FONCTION D'ECHELLE**

Considérons la fonction d'échelle  $\varphi$  définie à l'aide de sa transformée de Fourier  $\hat{\varphi}$  par:

$$\hat{\varphi}(w) = \frac{\hat{g}(w)}{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(w+k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.2.13}$$



Alors :

- (1)  $\varphi \in V_0$ ;
- (2)  $\{\varphi_{0,k} = \varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ ;
- (3) équation aux deux échelles pour  $\varphi$  :

$\exists! a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, a \in l^2(\mathbb{Z})$  tel que :

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(t - k) \text{ dans } L^2 \quad (2.2.14)$$

(4)  $m_0(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(-2i\pi kw)$  et périodique de période 1,  $m_0 \in L^2(0, 1)$ , et vérifie :

$$\hat{\varphi}(2w) = m_0(w) \hat{\varphi}(w) \text{ p.p. } w \in \mathbb{R} \quad (2.2.15)$$

$$|m_0(w)|^2 + \left| m_0\left(w + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1, \text{ p.p. } w \in \mathbb{R} \quad (2.2.16)$$

(5) plus généralement,  $\forall j \in \mathbb{Z} \left\{ \varphi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

### Proposition 2.2.2 CONSTRUCTION DE L'ONDELETTE

L'ondelette  $\psi$  est définie à l'aide de sa transformée de Fourier  $\hat{\psi}$ . soit  $\rho$  une fonction périodique de période  $\frac{1}{2}$ ,  $|\rho(w)| = 1$  p.p.  $w \in \mathbb{R}$ , posons  $m_1(w) = \rho(w) \exp(-2i\pi kw) \overline{m_0\left(w + \frac{1}{2}\right)}$  et définissons :

$$\hat{\psi}(w) = m_1\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (2.2.17)$$

Alors :

- (1)  $\psi \in W_0$ ;
- (2)  $\{\psi_{0,k} = \psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_0$ ;
- (3) équation aux deux échelles pour  $\psi$  :

$\exists! b = \{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, b \in l^2(\mathbb{Z})$  tel que  $m_1(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \exp(-2i\pi kw)$ , et :

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi(t - k) \text{ dans } L^2 \quad (2.2.18)$$

(4)  $m_1$  est périodique de période 1,  $m_1 \in L^2(0, 1)$  et :

$$|m_1(w)|^2 + \left| m_1\left(w + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1, \quad p.p.w \in \mathbb{R} \quad (2.2.19)$$

$$m_0(w) \overline{m_1(w)} + m_0\left(w + \frac{1}{2}\right) \overline{m_1\left(w + \frac{1}{2}\right)} = 0, \quad p.p.w \in \mathbb{R} \quad (2.2.20)$$

(5) plus généralement,  $\forall j \in \mathbb{Z} \left\{ \psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$ .

(6)  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 2.3 Les paquets d'ondelettes

Les paquets d'ondelettes sont une généralisation des ondelettes orthogonales. Ils permettent une analyse plus fine en décomposant les espaces de détail qui ne sont jamais décomposés dans le cas des ondelettes. Ils ont été introduits par Coifman, Meyer et Wickerhauser au début des années 1990 afin de pallier le manque de résolution fréquentielle de l'analyse en ondelettes. Le principe est en quelque sorte de découper en tranches fréquentielles les espaces de détail.

### 2.3.1 Construction des paquets d'ondelettes

La génération des paquets d'ondelettes se fait par récurrence. On part des deux filtres de longueur  $N$ ,  $g_n$  et  $h_n$ , associés à l'ondelette orthogonale à support compact  $\psi$  et la fonction d'échelle  $\varphi$ , issues d'une AMR de  $L^2$ . Ils sont obtenus à partir des suites  $a$  et  $b$  des formules (2.2.14) et (2.2.18), de sorte que leur norme  $L^2$  soit égale à 1.

Par induction, on définit la suite de fonctions  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , en partant de  $w_0 = \varphi$ , par :

$$\begin{cases} w_{2n}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k w_n(2t - k) \\ w_{2n+1}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} g_k w_n(2t - k) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

L'équation (2.3.1) pour  $n = 0$  se réduit simplement aux deux équations aux deux échelles et on a  $w_0 = \varphi$ , la fonction d'échelle et par suite  $w_1 = \psi$ , l'ondelette. On

voit ainsi en quoi les paquets généralisent les ondelettes. Plus généralement, en partant d'une ondelette orthogonale plus régulière, on obtient des versions lissées de ce système de fonctions, toutes à support inclus dans  $[0, 2N - 1]$ .

### 2.3.2 Les atomes des paquets d'ondelettes

Les atomes de l'analyse en ondelettes sont construits par translation et dilatation dyadique des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ . Pour les paquets d'ondelettes, on procède semblablement en partant des fonctions  $(w_n ; n \in \mathbb{N})$  et en considérant les atomes triplement indicés :

$$(w_n)_{j,k}(t) = 2^{-j/2} w_n(2^{-j}t - k) \text{ pour } n \in \mathbb{N}, (j, k) \in \mathbb{Z}^2$$

Ces atomes ne servent pas tous. Pour  $j$  fixé, les valeurs utiles de  $n$  sont  $0 \leq n \leq 2^j - 1$ . Comme dans le cas des ondelettes,  $k$  est le paramètre de position et  $j$  est le paramètre d'échelle. Quelle est alors l'interprétation de  $n$  ?

L'idée est que, pour des valeurs fixées de  $j$  et  $k$ ,  $(w_n)_{j,k}$  analyse les fluctuations du signal autour de la position  $k2^j$ , à l'échelle  $2^j$  et à toutes les fréquences correspondant aux différentes valeurs utiles du dernier paramètre  $n$ .

### 2.3.3 Organisation des paquets d'ondelettes

L'ensemble des fonctions :  $P_{j,n} = ((w_n)_{j,k}(t); k \in \mathbb{Z})$  constitue le paquet d'ondelette  $(j, n)$ . Les paquets d'ondelettes sont naturellement organisés selon un arbre. Par exemple, pour un niveau de décomposition égal à 2, ils sont organisés comme indiqué dans (la figure 2.10). Pour chaque niveau de  $j$  qui indique la profondeur dans l'arbre. Les valeurs possibles du paramètre de fréquence  $n$  sont les entiers de 0 à  $2^j - 1$ , qui indique la position dans l'arbre. Autrement dit, la notation  $P_{j,n}$  utilisée est consistante avec la notation usuelle profondeur-position de l'étiquetage des noeuds d'un arbre.

Notons  $\overline{P_{j,n}}$  l'espace engendré par les fonctions du paquet  $P_{j,n}$ . Comme pour tout  $j$ ,  $\overline{P_{j,0}} = V_j$  et  $\overline{P_{j,1}} = W_j$ , la librairie des bases de paquets d'ondelettes contient les bases d'ondelettes mais aussi beaucoup d'autres.

Notons  $V_0 = \overline{P_{0,0}}$ , alors on a :

- $(P_{d,1}; d \geq 1)$  est une base orthogonale de  $V_0$  ;

-pour  $J \geq 0$ ,  $(P_{J,1}, (P_{j,1}; 1 \leq j \leq J))$  est une base orthogonale de  $V_0$  ;

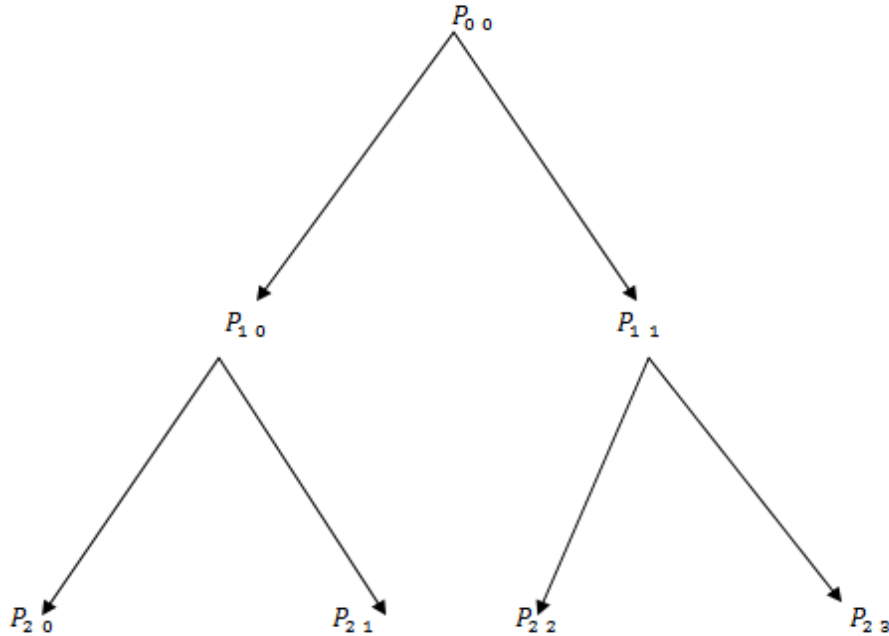


Figure 2.10 : Organisation des paquets d'ondelettes

En outre,  $(P_{j+1,2n}, P_{j+1,2n+1})$  est une base orthogonale de  $\overline{P_{j,n}}$ . Cette propriété donne un sens précis à la scission et par suite la fusion qui est l'opération inverse, dans l'arbre d'organisation des paquets d'ondelettes. Chacun des nœuds développés est de la forme suivante :

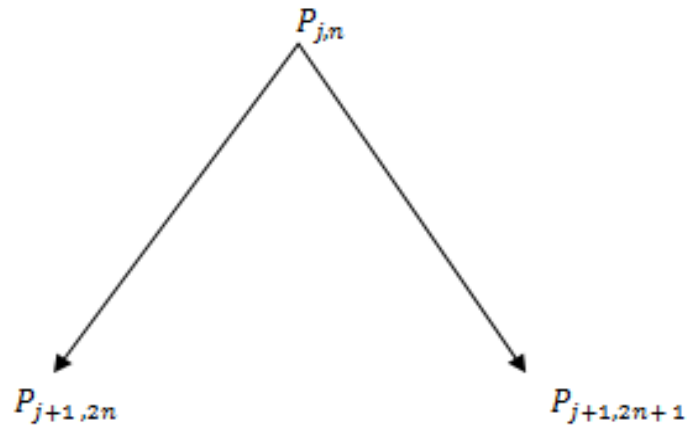


figure 2.11 : Scission et fusions dans l'arbre des paquets d'ondelettes

Par conséquent, l'ensemble des feuilles de tout sous-arbre binaire d'un arbre binaire complet, correspond à une base orthogonale de paquets d'ondelettes de l'espace de départ.

## 2.4 Bases biorthogonales d'ondelettes

Les ondelettes orthogonales engendrent des bases orthonormées et constituent des familles faciles à manier. Cependant, elles sont difficiles à construire, souvent irrégulières et définies implicitement. Relâcher la contrainte d'orthogonalité permet :

- de faciliter la construction et d'accroître ainsi le nombre de formes possibles;
- d'améliorer la forme, la symétrie, la régularité tout en disposant plus souvent de formules explicites pour les ondelettes.

En somme, la condition d'orthogonalité est une contrainte très forte. Il est possible, en relâchant quelque peu cette contrainte, de construire des ondelettes présentant des propriétés plus attractives au prix de l'introduction d'une petite difficulté dans le calcul. On fabrique non plus une seule ondelette mais deux ondelettes  $\psi$  et  $\hat{\psi}$  en dualité, appelées ondelettes biorthogonales. Le cas orthogonal correspond à  $\psi = \hat{\psi}$ .

### 2.4.1 Orthogonalité et biorthogonalité

Prenons un instant pour parler de la dualité, sous l'angle des couples de base en dualité. Dans les cas simples, comme celui des espaces  $L^2$ , lorsque l'on dispose d'une base  $B = \{e_i\}$ , disons oblique, on peut néanmoins faire les calculs comme si la base était orthonormale. On sait associer une seconde base  $\tilde{B} = \{\tilde{e}_i\}$ , dont les éléments sont définis par les relations de dualité  $(\tilde{e}_i, e_j) = \delta_{ij}$ . Alors, en utilisant les coordonnées de  $X$  dans les deux bases :  $x_i = (X, e_i)$  et  $\tilde{x}_i = (X, \tilde{e}_i)$  on écrit  $X = \sum x_i \tilde{e}_i = \sum \tilde{x}_i e_i$ .

Les deux bases interviennent dans les formules de décomposition et de reconstruction: la formule d'analyse du signal ( $x_i = (X, e_i)$ ) utilise la base  $B$ , alors que la formule de synthèse ( $X = \sum x_i \tilde{e}_i$ ) utilise la base duale  $\tilde{B}$ . Notons aussi que même si  $B$  est une base oblique, les calculs se font comme si elle était orthonormale. En effet, notons deux vecteurs  $X$  et  $Y$  en les repérant chacun dans l'une des deux bases :  $X = \sum x_i \tilde{e}_i$  et  $Y = \sum \tilde{y}_i e_i$ . Alors le produit scalaire s'écrit :

$$(X, Y) = \left( \sum x_i \tilde{e}_i, \sum \tilde{y}_j e_j \right) = \sum_i \sum_j x_i \tilde{y}_j (\tilde{e}_i, e_j) = \sum_i \sum_j x_i \tilde{y}_j \delta_{ij} = \sum_i x_i \tilde{y}_i$$

Aucune borne de sommation n'apparaît dans ces formules. Elles sont valables aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie ( $i, j \in \mathbb{Z}$ ), comme dans le cas des espaces de signaux d'énergie finie.

### 2.4.2 Propriétés des ondelettes biorthogonales

Supposons que les ondelettes soient construites et analysons leurs propriétés. Les deux familles  $M = \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\tilde{M} = \{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  sont des analyses multirésolutions biorthogonales de  $L^2(\mathbb{R})$ . Elles sont caractérisées par propriétés :  $L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \tilde{V}_0^\perp$ .

Notons  $V_j, W_j, \tilde{V}_j$  et  $\tilde{W}_j$  les espaces engendrés respectivement par les familles de fonctions  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{\tilde{\varphi}_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Ces espaces et ces fonctions vérifient un ensemble de relations qui mettent en évidence les propriétés de multirésolution et de biorthogonalité. Commençons par le premier aspect :

-pour chaque famille d'espaces  $\{E_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , on passe de  $E_j$  à  $E_{j-1}$  par dilatation;

-on a les inclusions :

$$V_j \subset V_{j-1}, W_j \subset V_{j-1}, \tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j-1} \text{ et } \tilde{W}_j \subset \tilde{V}_{j-1}$$

-enfin, on a les décompositions :

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1} \text{ et } \tilde{V}_j = \tilde{V}_{j+1} \oplus \tilde{W}_{j+1}$$

mais elle ne sont pas orthogonales.

Passons maintenant aux relations de dualité. L'ensemble des propriétés ci-dessous est obtenu à partir du résultat suivant :

$$(\varphi_{0,k}, \tilde{\varphi}_{0,p})_{L^2} = \delta_{k,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

-les couples d'espaces  $(V_j, \tilde{V}_j)$  et  $(W_j, \tilde{W}_j)$  satisfont :

$$(\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,p})_{L^2} = \delta_{k,p} \text{ et } (\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,p})_{L^2} = \delta_{k,p}$$

-les couples d'espaces  $(V_j, \tilde{W}_j)$  et  $(\tilde{V}_j, W_j)$  sont orthogonaux et donc on a :

$$(\varphi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,p})_{L^2} = 0 \text{ et } (\tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,p})_{L^2} = 0$$

-grâce aux inclusions,  $V_n \perp \tilde{W}_j$  et  $\tilde{V}_n \perp W_j$  pour  $n \geq j$ .

-les inclusions impliquent aussi que pour  $n \neq j$ , on a les relations de biorthogonalité :

$$(\psi_{n,k}, \tilde{\psi}_{j,p})_{L^2} = \delta_{n,j} \delta_{k,p}, \text{ d'où } W_n \perp \tilde{W}_j \text{ pour } n \neq j.$$

Dans ce contexte, les projections utilisables sont les projections  $P_j$  obliques sur  $V_j$  parallèlement à la direction de  $(\tilde{V}_j)^\perp$  qui s'écrit pour un signal  $f$  :

$$P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{c}k \varphi_{j,k} \text{ où } \bar{c}k = (f, \tilde{\varphi}_{j,k})$$

## 2.5 Quelques familles d'ondelettes bien connues

La définition et la construction de ces familles, se fait en les regroupant suivant quatre propriétés principales : existence de filtres associée, orthogonalité ou biorthogonalité, support compact ou non, ondelettes réelles ou complexes.

### 2.5.1 Ondelettes orthogonales à support compact

#### L'ondelette de Haar

C'est la plus simple des ondelette : définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  (ou parfois sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ).

C'est la fonction  $H$  constante par morceaux qui vaut :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -1 & \text{si } x \in ]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

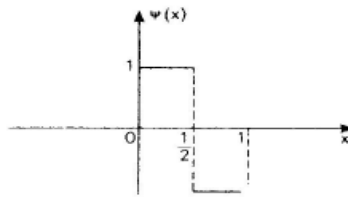


Figure 23 : ondelette de Haar

Cette ondelette est très simple est donc facile à mettre en oeuvre algorithmiquement. De plus, son support est compact : elle est bien localisée en espace. Elle est discontinue; sa transformée de Fourier est :

$\widehat{H}(x) = i \exp(-i\pi w \frac{\sin^2 \frac{\pi w}{2}}{\frac{\pi w}{2}})$ , oscille beaucoup : la localisation en fréquence n'est pas bonne.

### 2.5.2 Ondelettes orthogonales à support non compact

#### L'ondelette de Meyer

L'ondelette de Meyer est l'une des première ondelettes. Elle est construite dans le domaine de Fourier par :

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{iw}{2}) \sin(\frac{\pi}{2} v(\frac{3}{2\pi} |w| - 1)) & \text{si } \frac{2\pi}{3} \leq |w| \leq \frac{4\pi}{3} \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{iw}{2}) \cos(\frac{\pi}{2} v(\frac{3}{4\pi} |w| - 1)) & \text{si } \frac{4\pi}{3} \leq |w| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & \text{si } |w| \notin [\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}] \end{cases}$$



où  $v(a) = a^4(35 - 84a + 70a^2 - 20a^3)$  avec  $a \in [0, 1]$ .

$v$  est une fonction de classe  $C^k$  ( $k$  arbitraire pouvant être égale à l'infinie). L'ondelette de Meyer est de classe  $C^\infty$  et sa transformée de Fourier est de classe  $C^k$ .

La fonction  $\psi$  n'est pas à support compact, mais converge vers 0 lorsque  $x \rightarrow \infty$  plus rapidement que tout inverse de polynôme :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists C_n$  tel que  $|\psi(x)| \leq C_n(1 + |x|^2)^{-n}$ . De plus  $\psi$  est indéfiniment dérivable et la même propriété de décroissance vaut aussi pour chacune des dérivées. La fonction  $\psi$  est donc à décroissance rapide.

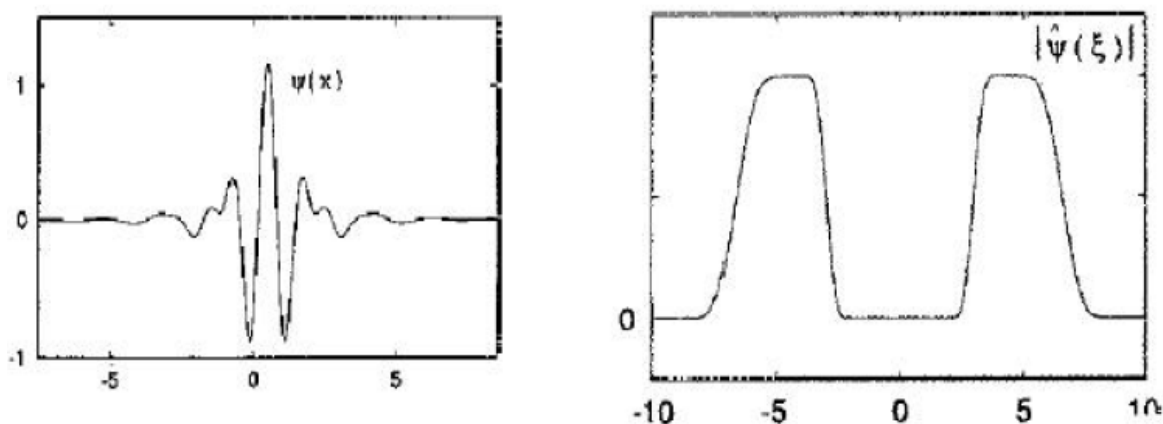


FIG. 2.11 – Ondelette de Meyer et le module de sa transformée de Fourier.

### 2.5.3 Ondelettes sans filtres, réelles

**Le chapeau mexicain** C'est une fonction qui est proportionnelle à la dérivée seconde de la fonction de densité de probabilité gaussienne (elles sont de la forme  $\psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \exp(-\pi x^2)$ , pour  $n \geq 1$ ) :

$$\psi(x) = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} \right) (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

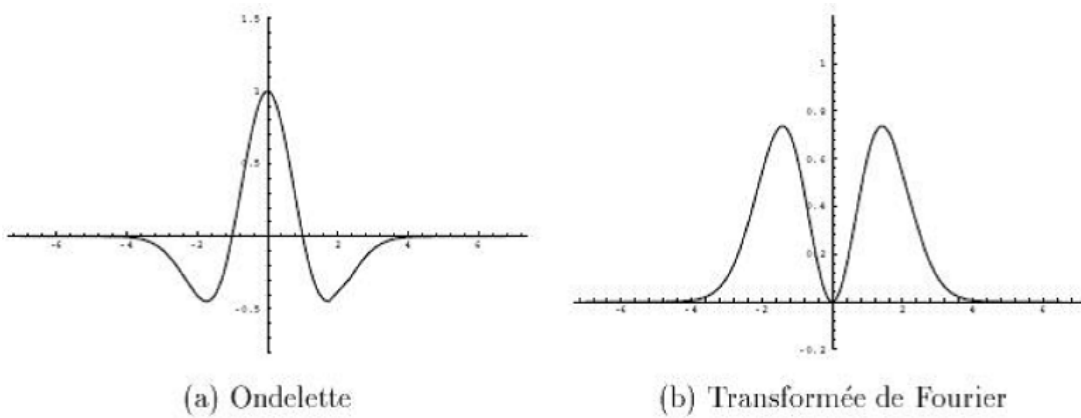


FIG. 2.9 – Ondelette Chapeau Mexicain et module de sa transformée de Fourier

### 2.5.4 Ondelettes sans filtres complexes

#### Les ondelettes de Morlet complexes

Une ondelette de Morlet complexe est définie par :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} \exp(2\pi i f_c x) \exp\left(-\frac{x^2}{f_b}\right)$$

Elle dépend de deux paramètres :  $f_b$  est un paramètre de fenêtre et  $f_c$  la fréquence centrale de l'ondelette. Son graphe est représenté dans la figure (2.8)

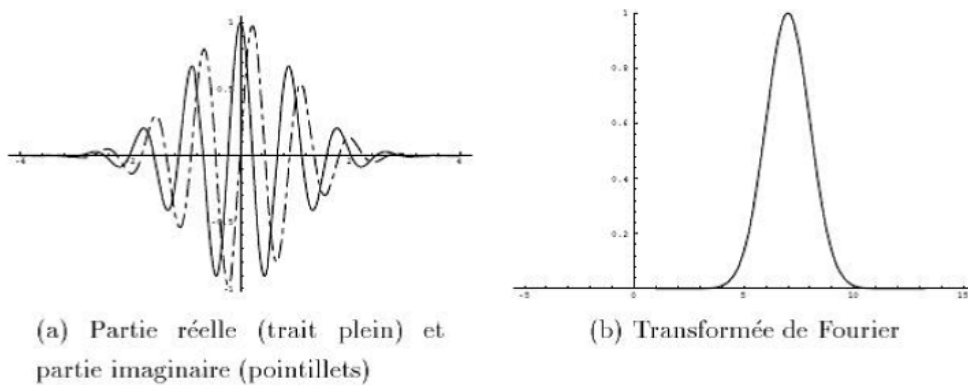


FIG. 2.8 – Ondelette de Morlet et module de sa transformée de Fourier.

---

# Applications des ondelettes

Les applications des ondelettes sont innombrables. Grâce à des caractéristiques spécifiques, les ondelettes sont considérées comme l'un des outils les plus dominants et couvrant une variété immense d'applications d'engineering.

## 3.1 Panorama de quelques applications des ondelettes

La capacité des ondelettes à faire ressortir les variations d'un signal peut être exploitée de diverses manières.

### En géophysique

Les chercheurs de l'Institut de Physique du Globe, à Paris, utilisent les ondelettes pour étudier le minuscule effet sur la vitesse de rotation de la Terre du courant El Niño, qui longe le Pérou.

### En mécanique

On tente d'exploiter les ondelettes pour repérer les défauts dans les engrenages, en analysant les vibrations. La conclusion de toutes les études est que l'analyse de Wigner-Ville est optimale pour résoudre ce type de problèmes.

### **En astronomie**

Les ondelettes servent à étudier la distribution de la matière à grande échelle dans l'Univers. Selon l'astrophysicien français Albert Bijaoui, une meilleure connaissance de cette structure est nécessaire aux théoriciens qui veulent tester les divers scénarios de l'évolution de l'Univers ; une première tâche consiste à faire l'inventaire des galaxies de l'Univers. Puisque les ondelettes identifient les structures aux différentes échelles, elles sont capables de distinguer une étoile d'une galaxie, ce qui n'est pas toujours évident.

### **En séismologie**

On tente de détecter les séismes en identifiant de façon automatique, différentes composantes usuellement appelées P et S d'un signal de séisme, court et instationnaire, en se servant des ondelettes comme outil de reconnaissance de forme.

### **Dans le domaine des sciences biomédicales**

Les ondelettes entrent dans un processus visant à découvrir un dysfonctionnement, à comparer du normal à de l'anormal et à améliorer les informations recueillies pour assurer un travail plus clair. Le secteur biomédical se caractérise par la présence d'une grande variabilité dans les signaux disponibles. Les enregistrements sont souvent complexes : mélanges de signaux localisés comme des spikes (pics) en EEG (électro-encéphalogramme) et de signaux diffus comme le bruit de fond cardiaque ou l'écoulement sanguin. Le signal cardiaque se décompose en séquences dont la plus importante est appelée le complexe QRS. Le repérage de forme par ondelettes permet la discrimination de patterns normaux et anormaux. Les ondelettes testées sur une base de données usuelle s'avèrent avoir un taux de détection excellent. Alors que les autres méthodes ne pouvaient les repérer, les ondelettes détectent bien de petits signaux de fréquence assez grande apparaissant dans les maladies coronariennes, des infarctus ou des arythmies ventriculaires.

## En nanotechnologies

Concernant les nanotechnologies et plus particulièrement dans le domaine de l'analyse d'hétérostructures en couches minces par réflectométrie et diffraction des rayons X pour l'optoélectronique, il a été montré que les ondelettes permettaient d'effectuer une analyse non destructive de ces matériaux, donnant non seulement l'épaisseur des couches nanométriques mais aussi, dans certains cas, l'ordre d'empilement des couches. L'utilisation de la transformée de Fourier ne permettait pas d'extraire les informations d'un profil à grande dynamique avec de très nombreuses zones d'instationnarités et encore moins de donner l'ordre des couches.

## Débruitage

Les ondelettes fournissent des moyens simples et efficaces d'estimer de façon non linéaire des signaux, en présence de bruit. La procédure est simple : on transforme le signal en ondelettes ; on élimine, à toutes les résolutions, les coefficients supérieurs à une valeur seuil et on reconstruit le signal avec les coefficients qui restent grâce à une transformée inverse en ondelettes. La chose qui est surprenante est que cette méthode exige bien peu de connaissances sur le signal. Traditionnellement, il faut connaître assez précisément le signal pour pouvoir l'extirper du bruit. En particulier, avec les méthodes traditionnelles, on était censé deviner le type de régularité du signal. Avec les ondelettes, ceci n'est plus nécessaire : cette performance vient du fait que la transformation en ondelettes orthogonales comprime l'énergie du signal en un nombre assez restreint de gros coefficients, comme si elle rangeait le signal dans quelques compartiments. Elle ne peut toutefois pas ranger le bruit blanc qui est trop « désordonné ». L'énergie du bruit blanc est donc dispersée sur toute la transformée et donne des coefficients petits qu'on élimine. Précisons enfin que le débruitage par ondelettes est très performant pour des signaux constitués à la fois de parties lisses et de zones présentant des irrégularités et des variations brusques. Les méthodes classiques sont incapables d'une telle adaptation en temps.

### **La compression**

L'algorithme de base est très semblable à celui du débruitage. Partant du signal à compresser, on le décompose d'abord sur une base orthogonale d'ondelettes au moyen de la transformée discrète. Ensuite, on sélectionne une partie des coefficients par seuillage dur, en conservant intact les coefficients d'approximation de niveau convenablement choisi. Enfin, à partir des coefficients seuillés, on reconstruit le signal original en leur appliquant la transformée discrète inverse. Le signal ainsi obtenu est le signal comprimé. Le standard de compression d'image bien connu qu'est le JPEG est basé sur une transformée de Fourier discrète.

Le JPEG analyse l'image par bloc de 8 x 8 pixels ce qui conduit aux fameux effets de mosaïques que nous avons tous vu au moins une fois, et qui altère considérablement la qualité de l'image compressée. Ce défaut est d'autant plus visible que le taux de compression est élevé. Le nouveau standard à venir en compression d'image est le JPEG 2000 (Yves Meyer) et qui est basé sur la transformée en ondelettes. Cette fois-ci, l'image est analysée de manière globale et la qualité reste très bonne même à un taux de compression élevé. A titre d'exemple, si l'on considère une image originale de 512 x 512 pixels et d'une taille de 786 Ko, il est très difficile de voir la différence avec la même image compressée par ondelettes d'un ratio de 75:1 et dont la taille atteint seulement 10.6 Ko. Grâce au JPEG 2000, il est non seulement possible de prévoir la taille du fichier compressé mais aussi de permettre un affichage progressif de l'image. On commence par les détails grossiers de l'image puis les hautes fréquences sont progressivement ajoutées, ce qui a pour effet d'ajouter les détails de plus en plus fin, jusqu'à l'image finale.

### **La climatologie**

La compréhension du climat nécessite une étude approfondie des séries temporelles des paramètres du temps qui ont été mesurés dans le passé. Le climatologue recourt aux techniques du traitement du signal et il utilise souvent l'analyse harmonique et la transformée de Fourier. Les mathématiciens ont élaborés un nouvel outil, qui complète la panoplie d'instruments destinés à l'analyse du signal. Le spectre d'échelle, qui synthétise

une partie de l'information fournie par la transformée en ondelette, possède la propriété de détecter des cycles dont la période évolue, dans le temps, de part et d'autre d'une période moyenne. Appliqué aux séries temporelles de températures de surface de l'air mesurées dans une centaine de stations météorologiques, aux données proposées par les réanalyses et aux principaux indices climatiques qui caractérisent les flux troposphériques, le spectre d'échelle a révélé des cycles dont les périodes sont proches de 30 et de 42 mois. L'analyse des données relatives à l'activité solaire conclut également à la présence de cycles dont les fréquences correspondent à celles relevées dans les séries de données de températures et dans celles des indices du climat.

### **En imagerie médicale**

On exploite le fait que la présence d'erreurs dans une transformée en ondelettes n'altère pas toute la transformée. Quand on utilise l'analyse de Fourier en imagerie par résonance magnétique, le moindre mouvement de la partie étudiée du corps transforme l'image. Le mathématicien Dennis Healy Jr. Et le radiologue John Weaver à Dartmouth College, ont montré qu'avec les ondelettes, ces erreurs sont très réduites.

### **En biométrie**

On utilise les ondelettes dans un algorithme de reconnaissance du visage appelé Elastic Bunch Graph Matching, en convolant certains points caractéristiques du visage (milieu des yeux, du nez, de la bouche, etc.) avec de nombreuses ondelettes paramétrées (Wiskott & al.) afin d'extraire différents coefficients qui pourront ensuite être utilisés pour vérifier la ressemblance entre deux visages.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'imagerie médicale et la biométrie.

## 3.2 Ondelettes et imagerie médicale :

### 3.2.1 La transformée en ondelettes continue bidimensionnelle :

Pour l'analyse d'images et la caractérisation de structures dans l'image une transformée redondante apporte l'avantage d'une information plus facile à analyser et à interpréter. Les applications que nous allons développer dans cette partie concernent la transformée en ondelettes continue bidimensionnelle, et sa version discrétisée en échelle : la transformée dyadique.

#### Transformée en ondelettes continue directionnelle :

La décomposition en ondelettes d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  contre une ondelette d'analyse  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  est définie pour tout  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$  par

$$C_\psi f(a, b, \alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t) \frac{1}{a} \psi \left( r_{-\alpha} \left( \frac{t-b}{a} \right) \right) dt \quad (3.2.1)$$

où  $r_{-\alpha}$  désigne la rotation d'angle  $-\alpha$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Il est alors possible de reconstruire  $f$  à partir de ses coefficients d'ondelettes  $C_\psi f(a, b, \alpha)$ , en utilisant une ondelette de synthèse  $h$ , c'est-à-dire une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  vérifiant la condition d'admissibilité

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\widehat{\psi}(w) \widehat{h}(w)}{\|w\|^2} dw < +\infty$$

On obtient alors la formule de synthèse contre l'ondelette de reconstruction  $h$  :

$$f(t) = \frac{1}{k_{\psi h}} \int_0^\infty \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} C_\psi f(a, b, \alpha) \frac{1}{a} h \left( r_{-\alpha} \left( \frac{t-b}{a} \right) \right) \frac{da}{a^3} db d\alpha \quad (3.2.2)$$

Dans le cas où l'ondelette d'analyse est auto-admissible i.e vérifie  $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{\|w\|^2} dw < +\infty$ ,

on a également la conservation de l'énergie :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{k_{\psi\psi}} \int_0^\infty \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} |C_\psi f(a, b, \alpha)|^2 \frac{da}{a^3} db d\alpha \quad (3.2.3)$$

Ce qui signifie que la transformée en ondelettes continue est une isométrie de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi])$ ,  $\frac{da}{a^3} db d\alpha$



### Transformée en ondelettes dyadique

Le problème de la discrétisation des formules de décompositions précédentes, en vue du calcul pratique des coefficients d'ondelettes d'une fonction se pose dans le cas particulier d'une discrétisation en échelle dyadique,  $a = 2^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , on montre moyennant une hypothèse supplémentaire sur l'ondelette de synthèse, que l'on obtient des formules de reconstructions exactes. C'est la transformée en ondelettes dyadique, définie par  $S$ .

La transformée en ondelettes directionnelle dyadique d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  contre une ondelette d'analyse  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  est définie pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , par

$$C_\psi f(2^j, b, \alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) 2^{-j} \overline{\psi}(2^{-j} r_{-\alpha}(t - b)) dt \quad (3.2.4)$$

Une ondelette de synthèse pour cette transformée est une fonction  $h$  vérifiant :

$$\int_0^{2\pi} \left[ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{\psi}(2^{-j} r_{-\alpha} k)} \hat{h}(2^{-j} r_{-\alpha} k) \right] d\alpha = 1, \quad \forall k \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

On a alors la formule de reconstruction :

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 4^{-j} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} C_\psi f(2^j, b, \alpha) 2^{-j} h((2^{-j} r_{-\alpha}(t - b))) db d\alpha \quad (3.2.5)$$

### 3.2.2 Ondelettes et tomographie locale :

L'avènement du scanner a permis de fournir des informations pré-opératoires précises sur le patient qui servent à la fois à établir un diagnostic, à élaborer un planning chirurgical mais aussi à guider le chirurgien. Toutefois l'examen scanner, s'il est efficace pour la reconstruction 3D de structures anatomiques, est un examen irradiant. L'objectif médical est d'une part de réduire au minimum les radiations administrées au patient ; d'autre part, en condition opératoire, les détecteurs des appareils de mesure ont des tailles réduites et ne permettent de mesurer que des données tronquées des structures.

#### Principe de fonctionnement d'un scanner :

Le principe est celui de l'acquisition de donnée radiographiques sur des détecteurs, positionnés autour de l'objet à étudier, les géométries d'acquisition peuvent être différentes

suivant les types d'appareils : acquisition circulaire à géométrie parallèle à géométrie cônica, ou encore à acquisition hélicoidale.

La Figure 1 : présente le principe de fonctionnement d'un scanner : acquisition circulaire de données radiographique autour de la section d'intérêt (à gauche), et principe de mesure de la transformée de Radon sur un détecteur (à droite).

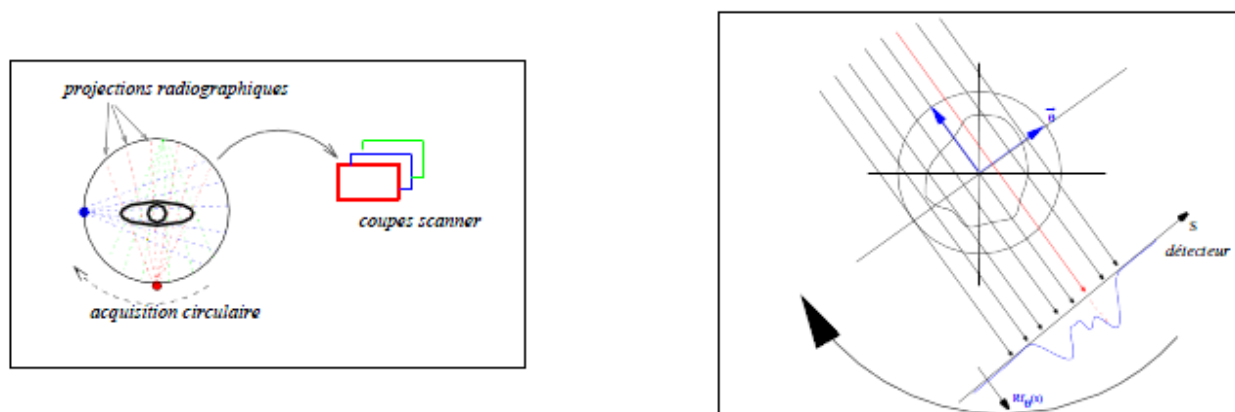


Figure 1

En dimension 2 d'espace, ces données radiographiques correspondent à la transformée de Radon de la fonction d'atténuation, mesurée sur chaque détecteur.

La transformée de Radon de la fonction d'atténuation  $f(x)$  sur un détecteur correspond à la moyenne de  $f$  le long des droites  $L_{\theta,s}$ (figure 1 droite) : pour  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$R_{\theta,s}f(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(x)dl = \int_{-\infty}^{+\infty} f(su_{\theta} + tu_{\theta}^{\perp})dt \quad (3.2.6)$$

où  $u_{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $u_{\theta}^{\perp} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ .

Pour reconstruire une structure anatomique en dimension 2 à partir de ses projections, on doit inverser la transformée de Radon. La formule d'inversion classique, utilisée en pratique fait appel à la transformée de Fourier : c'est la formule de rétro-projection filtrée:

$$f(x) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{R_{\theta}f}(w) |w| \exp(2\pi i x \cdot u_{\theta}) d\theta dw \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (3.2.7)$$

L'inconvénient de cette formule est que la reconstruction de la fonction en un point nécessite la connaissance de la transformée de Radon sur tous les détecteurs. L'objectif consiste alors à développer de nouvelles méthodes de reconstructions moins invasives, en cherchant des formules de reconstructions locales pour remplacer (3.1.7).

### Inversion de la transformée de Radon par ondelettes

L'introduction des ondelettes en tomographie date du début des années 1990. L'approche par ondelettes introduite en 1995 par Donoho, est certainement la méthode la plus utilisée actuellement pour la résolution de problèmes inverses. Nous nous intéresserons ici à l'approche proposée par Holschneider et de nature complètement différente : cette approche consiste à inverser la transformée de Radon, en la considérant comme une transformée en ondelettes bidimensionnelle particulière dans un espace de distributions. Dans un premier temps nous étendons la définition de la transformée en ondelettes (3.2.1) à des ondelettes d'analyse  $\psi$  distributions :

$$C_\psi f(a, b, \alpha) = \langle T_b D_a R_\alpha \psi, f \rangle$$

où les opérateurs  $T_b, D_a$  et  $R_\alpha$  sont définis dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  par : pour toute fonction test  $\varphi$ ,  $\langle T_b \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi(x + b) \rangle$ ,  $\langle D_a \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, a\varphi(ax) \rangle$ ,  $\langle R_\alpha \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi(r_\alpha x) \rangle$ .

Pour la suite que on considère que les fonctions  $f$  étudiées sont des fonctions de  $D(\mathbb{R}^2)$  (espace de fonctions  $C^\infty$  à support compact).

L'idée originale d'Holschneider est alors de considérer comme "ondelette" la distribution suivante :

$$\psi = \delta(x_1)1(x_2) : f \in D(\mathbb{R}^2) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(0, x_2) dx_2$$

Le coefficient d'ondelette est alors directement relié à la transformée de Radon (3.2.6) par :

$$\langle T_b D_a R_\theta \psi, f \rangle = R_\theta f(b, u_\theta)$$

Pour inverser la transformée de Radon il suffit alors d'inverser cette transformée en "ondelettes" en utilisant une ondelette de synthèse admissible  $h$  :

$$f(x) = \frac{1}{k_{\psi h}} \int_0^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} R_{\theta} f(b, u_{\theta}) \frac{1}{a^4} h\left(r_{-\theta}\left(\frac{t-b}{a}\right)\right) da d\theta \quad (3.2.8)$$

Dans ce cas la condition d'admissibilité s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(w_1, 0)}{|w_1|^2} dw_1 < +\infty$$

Ce qui signifie que  $h$  à deux moments nuls dans la direction  $x_1 = \int h d x_1 = \int x_1 h dx_1 = 0$ .

On peut alors utiliser dans les calculs de reconstruction une ondelette  $h$  classique, c'est-à-dire une fonction à décroissance rapide et possédant deux moments nuls.

En pratique on utilisera plutôt la transformée en ondelette dyadique avec une ondelette de synthèse  $\widetilde{h}$  radiale pour inverser la transformée de Radon :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 4^{-j} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[ \int_0^2 R_{\theta} f(b, u_{\theta}) d\theta \right] \frac{1}{2^j} \widetilde{h}(2^{-j}(t-b)) db \quad (3.2.9)$$

La figure 2 : présente le fantôme de Shepp Longan : image originale et reconstruction par la formule d'inversion utilisant les ondelettes (à gauche), coupe horizontale au centre de l'image (au centre), Zoom autour de la Région d'intérêt (disque) et reconstruction locale par ondelettes : les discontinuités de l'image sont préservées (à droite).

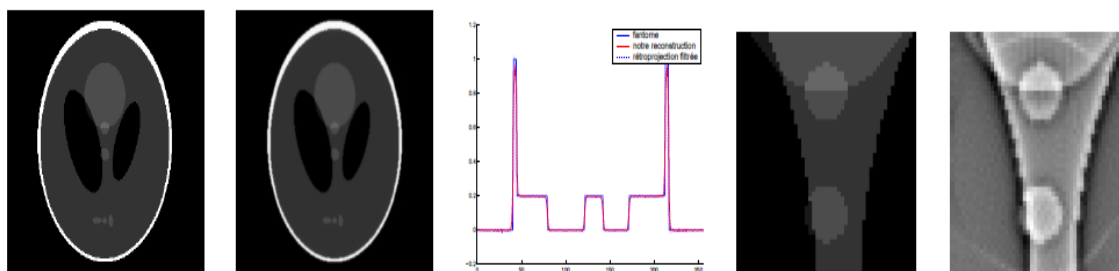


Figure2

### 3.3 Identification par analyse en paquets d'ondelettes de l'iris et tests de robustesse

#### Extraction de l'iris

Les images de notre base ont été prises par Miles Research, grâce à un équipement spécialisé qui permet d'obtenir une excellente qualité : très bonne définition, pas de reflet, peu d'occlusion par les paupières ou les cils (Fig. 1a). Ces images ont été redimensionnées à 600x400 pixels. L'algorithme de segmentation extrait les contours interne et externe de l'iris, qui est ensuite déroulé et égalisé (Fig. 1b).

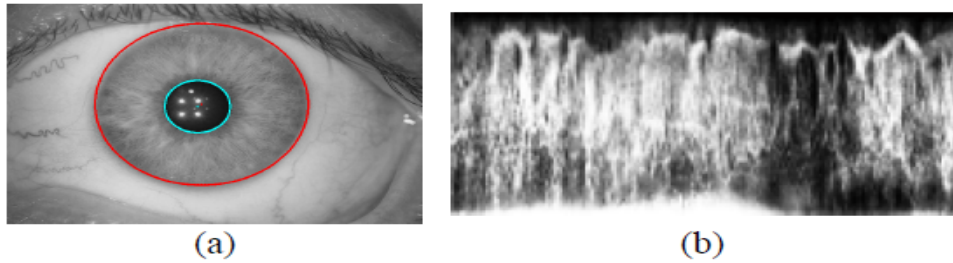


FIG. 1: (a) localisation de l'iris, (b) iris déroulé et égalisé

**Localisation et égalisation :** L'algorithme d'extraction de l'iris a été fondé sur la modélisation des contours interne et externe de l'iris, par un cercle et une ellipse respectivement, et sur le contraste plus ou moins marqué qui existe entre l'iris et la pupille ou l'iris et la sclérotique. Plus précisément, la méthode d'extraction comporte quatre phases (Fig. 2). Tout d'abord, un prétraitement inhérent au système d'acquisition élimine les quatre spots lumineux situés dans ou près de la pupille (Fig. 2a, 2b). Dans la seconde phase, une analyse d'histogramme permet de détecter la zone la plus sombre au centre de l'image, et ainsi de localiser approximativement la pupille (Fig. 2c). Ceci nous permet de définir une grille des centres possibles du cercle délimitant celle-ci. Dans la troisième étape, on recherche le centre et le rayon du cercle qui maximise le gradient moyen orthogonal à la courbe (Fig. 2d). Le même procédé est appliqué durant la quatrième phase pour trouver l'ellipse. La différence réside dans la limitation de la zone angulaire sur laquelle est estimé le gradient (Fig. 2e), afin de pallier aux perturbations éventuelles dues à la

présence de paupière ou de cils. On a alors obtenu une localisation précise de l'iris (Fig. 2f). Cet algorithme donne de très bons résultats, même en cas de faibles contrastes, grâce à l'effet moyennage, et parce qu'il ne nécessite pas d'ajustement de paramètres puisqu'il est basé sur une maximisation.

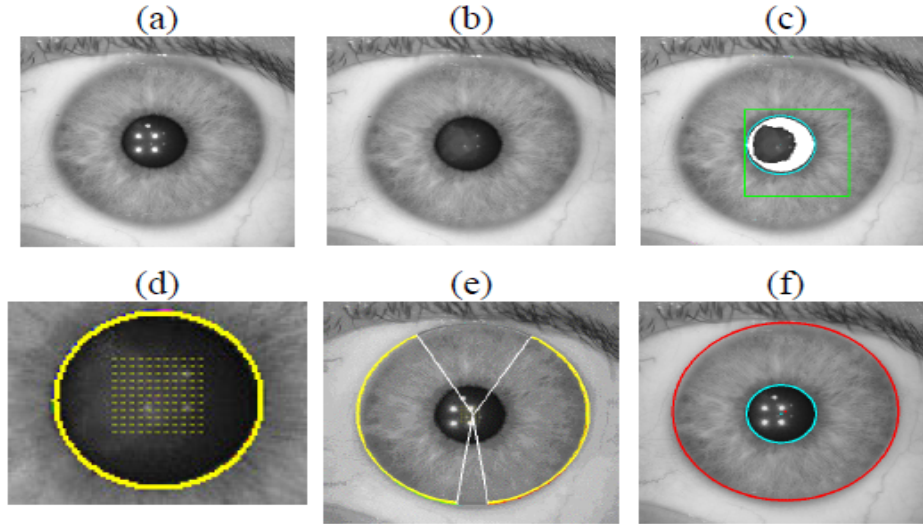


FIG. 2: Principe de l'algorithme de localisation de l'iris

**Déroulement :** L'iris localisé est déroulé suivant la transformation polaire proposée par Daugman :

$$\begin{cases} x(r, \theta) = rx_i(\theta) + (1 - r)rx_p(\theta) \\ y(r, \theta) = ry_i(\theta) + (1 - r)ry_p(\theta) \end{cases}$$

avec  $(x_p, y_p)$  et  $(x_i, y_i)$  les coordonnées sur les bords interne et externe de l'iris, l'angle  $\theta$  et le rayon  $r$ . Les dimensions de l'image déroulées sont fixées à  $256 * 128$  pixels. Cette image est ensuite égalisée, pour augmenter le contraste de la texture (Fig. 1b).

### Algorithme d'identification

Cet algorithme comporte deux phases : l'extraction d'une signature basée sur la décomposition en paquets d'ondelettes, et une mesure de distance qui permet de décider si deux signatures proviennent d'un même iris ou de deux iris différents. Pour identifier une

personne, il suffit donc de comparer la signature extraite de son iris avec les signatures stockées dans une base de référence.

**Extraction de la signature :** On utilise une décomposition en paquets d'ondelettes sur 3 niveaux de résolution, aboutissant à 64 imagettes (paquets d'ondelettes), numérotées 0 à 63, chacune extrayant des informations fréquentielles et spatiales sur la texture de l'iris. Nous avons calculé, sur toute notre base (149 images sources, 69 iris différents), l'énergie moyenne  $E_i$  de chaque paquet  $w_i$ , afin de déterminer lesquels sont les plus informatifs, et donc à priori les plus discriminants :

$$E_i = \sum_{j,k} w_i(j, k)^2, \quad i = 0, \dots, 63$$

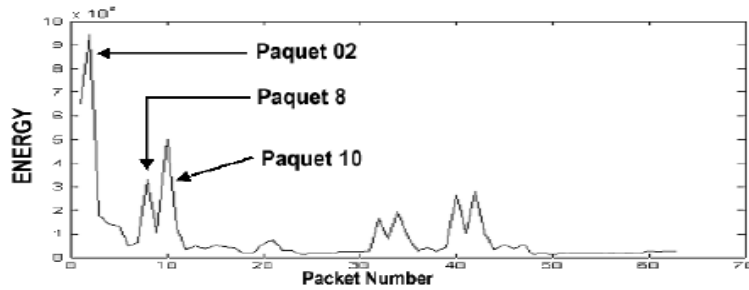


FIG. 3 : Distribution de l'énergie moyenne des paquets

La distribution d'énergie obtenue (Fig.3) indique que les paquets 2, 10, et éventuellement 8, sont les plus appropriés pour créer la signature. Le paquet 0 n'est pas utilisé car il ne contient pas d'information autre que l'énergie moyenne. Les paquets 2, 8, et 10, notés  $w_i$  pour  $i = 2, 8$  et 10, sont alors encodés, non plus juste sur leur signe, mais par :

$$\begin{cases} s_i(j, k) = \text{sign}(w_i(j, k)) & \text{si } |w_i(j, k)| > s \\ s_i(j, k) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En débruitage d'une image par transformée en ondelettes, on met à zéro les coefficients de faible amplitude, avant d'appliquer la transformée inverse. Ici nous suivons un raisonnement analogue : nous considérons que les coefficients de faible amplitude représentent davantage du bruit que de l'information sur la texture de l'iris, et nous les mettons à zéros, afin qu'ils impactent moins la décision que les coefficients de forte amplitude. Le seuil  $S$  a été défini expérimentalement. Finalement, on obtient pour chaque paquet une signature compacte  $s_i$  de  $N = 16 * 32$  coefficients égaux à  $-1$ ,  $0$ , ou  $1$ .

**Mesure de distance et résultats :** La mesure de la distance entre deux signatures permet de décider si deux signatures proviennent du même iris ou de deux iris différents. Elle est calculée selon l'expression suivante,  $s_i^{(1)}$  et  $s_i^{(2)}$  étant deux signatures obtenues du paquet  $i$  :

$$HD_i = \frac{1}{2N} | s_i^{(1)}(j, k) - s_i^{(2)}(j, k) |$$

Afin d'évaluer notre méthode, nous calculons la distance entre chaque signature et toutes les autres. Nous définissons la séparation comme la différence entre la plus petite distance entre deux signatures provenant d'iris différents (imposteurs) et la plus grande distance obtenue pour deux signatures provenant d'un même iris (authentiques). Cette séparation doit nécessairement être positive pour pouvoir obtenir 100% d'identification correcte, et la discrimination sera d'autant mieux réalisée que la séparation est importante. Les tests ont été réalisés sur toute notre base de données. La figure 4 montre les résultats pour le paquet 2. La séparation est positive (0.082) et a été améliorée de 8%. Cette méthode nous permettra de déterminer le seuil de décision qui sera appliqué dans le système final : il suffira de le choisir au milieu de la zone de séparation obtenue sur une base d'apprentissage. L'estimation du taux d'identification sera calculée sur une base de généralisation.

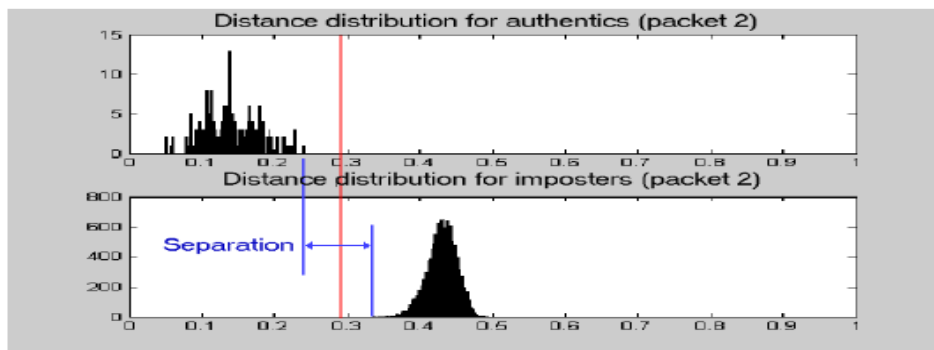


FIG. 4 : Séparation pour le paquet 2 (0.082)

**Combinaison de paquets :** Les paquets 2, 8 et 10 permettent chacun d'obtenir une séparation positive. Comme ils extraient des détails différents, on peut supposer qu'ils sont indépendants, et que l'on aboutira à une meilleure séparation, donc discrimination,



en les combinant. Pour combiner les paquets 2 et 10, nous avons défini une nouvelle distance :

$$HD_c = \frac{1}{N} \sum_{j,k} |s_2^{(1)}(j,k) - s_2^{(2)}(j,k)| |s_{10}^{(1)}(j,k) - s_{10}^{(2)}(j,k)|$$

Comme nous supposons l'indépendance des signatures extraites des paquets 2 et 10, la distance combinée, qui peut être interprétée comme la probabilité que les coefficients diffèrent à la fois dans les deux signatures, est en fait le produit des distances obtenues pour chaque paquet séparément. On multiplie par 2 pour des questions de normalisation. Ainsi on obtient par exemple  $0.46 * 0.45 * 2 = 0.41$  (imposteurs) et  $0.20 * 0.18 * 2 = 0.07$  (authentiques), donc une séparation qui passe de 0.26, ou 0.27 à 0.34. La figure 5 confirme que la séparation a bien été augmentée (de 0.082 à 0.160). L'introduction du paquet 8 n'a pas vraiment amélioré les résultats.

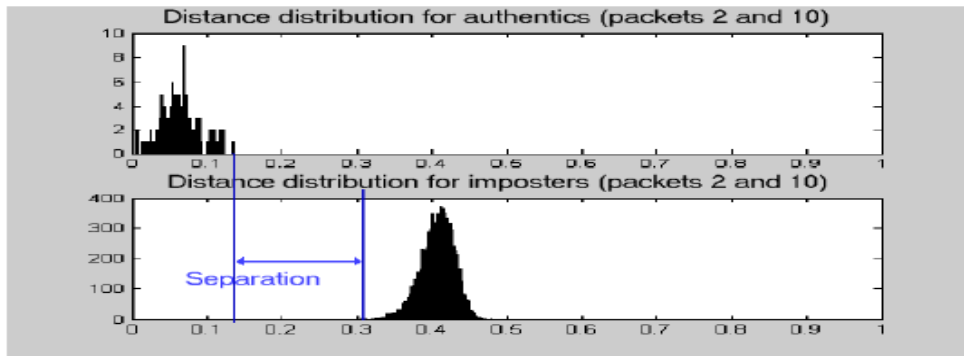


FIG. 5 : Séparation, paquets 2 et 10 combinés (0.160)

### Robustesse de l'algorithme

Pour tester la robustesse de notre méthode, nous avons simulé des variations d'éclairement, du flou, des déviations de l'axe optique, ajouté des défauts locaux. La figure 6 montre quelques exemples de dégradations, à comparer avec l'image originale (a): en (b), l'éclairement a été diminué de 20%, en (c), l'image a été rendue floue par un filtre moyenneur de taille 15, et en (d), un petit spot noir de diamètre 15 pixels a été ajouté. L'objectif est de vérifier que la séparation reste positive malgré ces dégradations, et ceci pour chaque paquet indépendamment des autres. En effet, si la séparation est positive pour les sig-

### 3.3. Identification par analyse en paquets d'ondelettes de l'iris et tests de robustesse

natures extraites des paquets 2, 8, et 10, elle le sera aussi pour toute combinaison. Les paramètres de la segmentation trouvés sur l'image originale sont réappliqués sur les images dégradées.

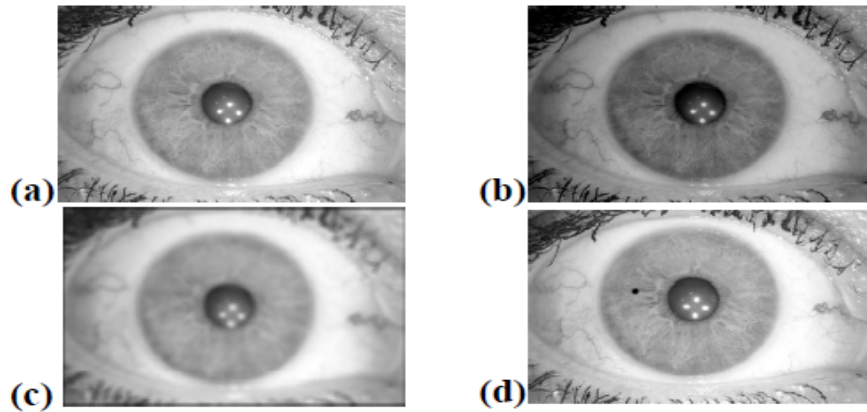


FIG. 6 : Image originale (a) et images dégradées (b)(c)(d)

**Flou :** Le flou a été simulé avec un filtre moyennneur dont on a augmenté la taille du masque. La figure 7 montre que les résultats sont satisfaisants jusqu'à un masque de  $17 \times 17$ . La méthode est donc très robuste au flou.

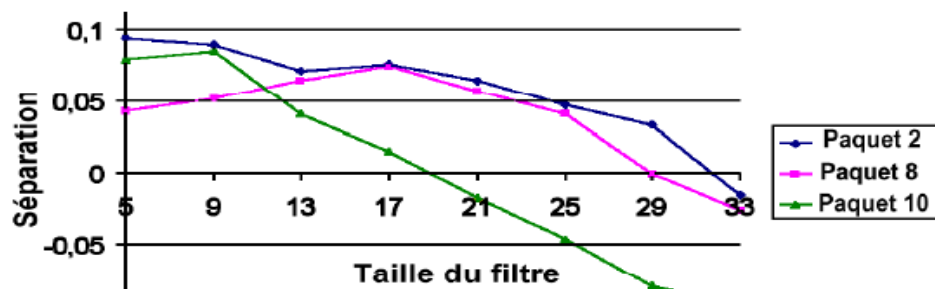


FIG. 7 : Séparation en fonction du flou

**Eclaircissement :** L'éclaircissement a été modifié de façon linéaire, comme l'indique la figure 8 :

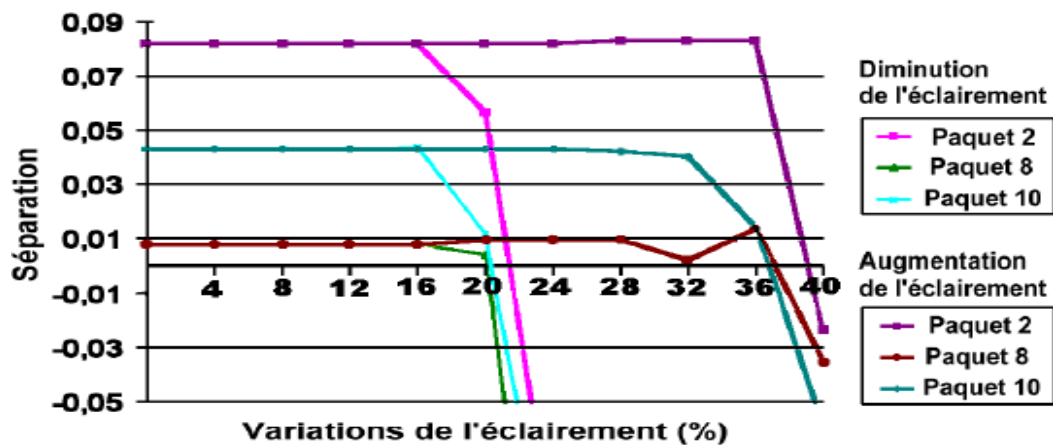


FIG. 8 : Séparation en fonction de l'éclairage

La figure 8 montre une bonne robustesse aux variations d'éclairage, la séparation restant positive jusqu'à une diminution de l'éclairage de 20% et une augmentation de l'éclairage de 36%. Ces résultats ne sont pas surprenants car la signature résulte du codage du signe des coefficients des paquets d'ondelettes. La chute des performances est due à un effet de saturation des niveaux de gris dans l'image initiale.

---

# Conclusion

En moins de 20 ans, les ondelettes se sont imposées comme une théorie mathématique féconde et un formidable outil de traitement du signal et de l'image. La théorie des ondelettes vient compléter de manière très efficace, l'analyse de Fourier utilisée depuis deux siècles. Elles constituent un outil polyvalent qui trouve des applications dans des domaines aussi riches que variés comme la géophysique, l'astrophysique, la biométrie, les sciences biomédicales, les nanotechnologies, etc. Elles ont également ouvert des champs d'investigation nouveaux et ont pu résoudre des problèmes qui ne trouvaient pas de solutions par les méthodes classiques.

Dans ce travail, nous avons essayé de vulgariser cette théorie dont l'utilité n'est plus à démontrer.

Les ondelettes ont ainsi ouvert de nombreux champs d'investigation nouveaux et divers problèmes sont à l'étude via cette théorie.

---

# Bibliographie

- [1] ABRY P., ALDROUBI A., "Designing Multiresolution Analysis-type Wavelets and Their Fast Algorithms", *The journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 2, n°2, 1995.
- [2] ABRY P., *ondelettes et turbulence - multirésolutions, algorithmes de décompositions, invariance d'échelle et signaux de pression*, Diderot Editeur, 1997.
- [3] Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.C., "Biorthogonal bases of compactly supported wavelet", *Commun. on pure and appl. Math.*, n°45, p. 485 – 560, 1992.
- [4] Cohen A., "Biorthogonal wavelets in wavelets: a tutorial in theory and applications", C.K. Chui(dir.), Academic Press, 1992.
- [5] Daubechies I., *Ten Lectures on wavelet*, SIAM, 1992.
- [6] Kahane J.P., Lemarie-Rieusset P.G., *Séries de Fourier et ondelettes*, *Nouvelle bibliothèque Mathématique Cassini*, 1998.
- [7] Mabile G., Fettweis X., Erpicum M et Nicolay S, "étude fréquentielle de données via la transformée en ondelettes : application aux cycles climatiques", BSLG.58.2012, 5-15.
- [8] Mallat S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.
- [9] Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J-M, "les ondelettes et leurs applications", *Laboratoire de Mathématique de l'université Paris-Sud Orsay*, 2003.

- [10] Morizet N., ISEP, Département électronique, "initiation aux ondelettes", 26 mai 2005.
- [11] Rydgren E., Ea T., Amiel F., Rossant F. and Amara A., Iris Features extraction using wavelet packets, IEEE International Conference on Image Processing, Singapore, 2004.
- [12] Valérie P., Bilgot A., Desbat L., "ondelettes et Imagerie médicale " L'aboratoire de modélisation et calcul de l'IMAG BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, 2004.