

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Abderrahmane MIRA-BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Probabilités

Par

OUACIF Samir

et

MEZNAD Loucif

THÈME

Approximation de la solution variationnelle par la
méthode des éléments finis

Soutenu publiquement, le 29 Juin 2016 devant le jury composé de :

Mme	H. BECHIR	M. C. A	U. de Béjaia	Présidente
M	F. BOUHMILA	M. C. A	U. de Béjaia	Rapporteur
Mme	S. TAS	Prof	U. de Béjaia	Examinatrice
M	A. MOULAÏ	Doctorant	U. de Béjaia	Examineur

Année 2015 – 2016

Remerciements

Nous tenons en premier lieu à exprimer notre gratitude à Mr **F.BOUHMILA** qui nous a accordé toute l'assistance nécessaire à l'élaboration de ce mémoire. Sa bienveillance nous a accompagnés durant toute notre formation. C'est donc avec reconnaissance que nous lui présentons nos remerciements. Nous le remercions aussi pour son aide précieuse et pour sa contribution à la réalisation du présent travail.

Nos remerciements sont aussi adressés à Mme **S. TAS**, Mme **H. BECHIR** et Mr **A. MOULAÏ** qui nous font l'honneur de juger ce manuscrit et notre exposé. Nous remercions ceux et celles qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce document, en particulier nos camarades **N. BRAHIMI** et **M. KACI**.

Nous remercions tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont assuré notre formation universitaire et n'ont lésiné sur aucun effort pour la réussite de celle-ci. Nous n'omettons pas de souligner avec vigueur la qualité des rapports humains qui ont prévalu le long de notre présence au département de mathématiques et qui sont faits de respect, rigueur, fraternité et toutes les autres vertus qui nous ont construits et faits de nous des citoyens responsables.

Dédicaces

OUACIF Samir

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui étaient toujours mon vrai soutien durant toute ma vie, que Dieu les protège.

Mon frère et mes sœurs.

Mes grands-parents, mes oncles, ma tante ainsi que toute ma famille.

Mon camarade et ami Loucif.

Tous les étudiants de notre promotion.

Tous mes amis et camarades en particulier Lyes et Bilal.

Dédicaces

MEZNAD Loucif

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs, affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études et à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes frères et ma sœur.

Toute ma famille, chacun par son nom.

Mon *camarade et ami* Samir.

Tous mes camarades de promotion et tous mes amis.

Table des matières

Notations	1
Introduction générale	2
1 Résolution des problèmes aux limites par une méthode variationnelle	5
1.1 Introduction	5
1.2 Formulation variationnelle d'un problème elliptique linéaire	5
1.2.1 Les espaces de Sobolev	6
1.2.2 Formulation variationnelle	9
1.2.3 Le principe de la formulation variationnelle	9
1.2.4 Théorème de Lax-Milgram	9
1.3 Etude du problème de Dirichlet pour le Laplacien	16
2 Approximation variationnelle	21
2.1 Introduction	21
2.2 Approximation interne générale	21
2.2.1 Convergence de la méthode	23
2.3 Méthode de Galerkin	25
2.3.1 Présentation de la méthode de Galerkin	25
3 Approximation par la méthode des éléments finis	26
3.1 Introduction	26
3.2 Principes généraux de la méthode des éléments finis	27
3.3 Eléments finis en dimension $N = 1$	27

3.3.1	Approximation par éléments finis \mathbb{P}_1	28
3.3.2	Convergence et estimation d'erreur	34
3.4	Eléments finis en dimension $N \geq 2$	35
3.4.1	Eléments finis triangulaires	35
3.4.2	Eléments finis \mathbb{P}_k en dimension $N \geq 2$	41
3.5	Résolution du problème modèle par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k	46
3.5.1	Présentation du problème	46
3.5.2	Calcul du second membre	47
3.5.3	Assemblage de la matrice de rigidité	48
Conclusion générale		49
Bibliographie		50

M^\perp	Orthogonal de M .
A^t	Matrice transposée.
$R(A)$	L'image de l'opérateur A .
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$	Laplacien de u .
∂^α	Dérivée partielle d'ordre α .
$\partial\Omega$	Bord d'un ouvert Ω .
$C_c(\Omega)$	L'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω .
$C^k(\Omega)$	L'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω ($k \geq 0$).
$C^\infty(\Omega)$	= $\bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$.
$\mathcal{D}(\Omega) = [C^\infty(\Omega)] \cap C_c(\Omega)$	L'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact.
$Supp(f)$	= $\overline{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}}$.
V'	Le dual d'un espace V .
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_\Omega u ^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty\}$.
$H^1(\Omega)$	Espace de Sobolev d'ordre 1.
$H_0^1(\Omega)$	Espace de Sobolev de trace nulle.
$diam(A)$	Le diamètre de A .

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles (EDP) constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de l'analyse mathématique ou scientifique et sont d'une grande utilité dans la modélisation de nombreux problèmes dans différents domaines comme la physique (mécanique, thermodynamique, acoustique,...), la chimie pour modéliser les réactions, l'économie pour étudier le comportement des marchés... Ces problèmes se ramènent à des modèles mathématiques écrits en général sous forme

$$Lu = f \tag{0.0.1}$$

où L est un opérateur défini d'un espace de fonctions E dans un espace de fonctions F ; u est la fonction inconnue et f une fonction donnée. En général, une solution exacte d'un tel problème n'est pas facile à trouver. Il s'agit d'abord d'essayer de montrer, lorsque cela est possible, que le problème admet une unique solution stable (on dit qu'il est bien posé). Aussi pour résoudre ce problème, il y a plusieurs méthodes mathématiques ; qu'elles soient analytiques ou numériques et avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des problèmes très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

La méthode des **éléments finis** est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où

un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être traité par la méthode des éléments finis.

Historiquement, la méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche

1. **Les mathématiques** : outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909).
2. **Les sciences de l'ingénieur** : dont la contribution a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continu d'une barre longue, d'où l'idée de base des éléments finis.

Argyris (1955), Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés varier linéairement comme pour chaque barre ou poutre du système discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donnait la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom. Argyris et Kelsey (1960) utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...). Le terme "élément fini" est utilisé pour la première fois par Glough (1960), et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode. Dans les années soixante; Zienkiwicz (1965), De Arante (1968), Oliviera (1968), Green (1969), Tones (1969), Lay (1969), Storne (1969), et Finlayson (1975) ont reformulé la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la MEF. En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines. En mécanique des fluides, la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles par éléments finis en utilisant la formulation vitesse – pression a commencé dans les années 1970.

Le but de notre travail est d'exposer la méthode des éléments finis. Le présent mémoire est structuré en trois chapitres. Le premier est consacré à la formulation variationnelle pour les problèmes linéaires elliptiques, cette méthode fait appel à des résultats d'analyse fonctionnelle comme le théorème de Lax-Milgram, les espaces de Sobolev. Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la notion d'approximation interne qui est le précurseur de la méthode des éléments finis où nous présentons l'aspect théorique de la MEF. Dans le troisième chapitre, nous présentons la MEF en détail où nous illustrons la méthode sur l'exemple du problème de Poisson et nous donnerons les principes généraux et quelques théorèmes utiles ainsi la notion de maillage.

Résolution des problèmes aux limites par une méthode variationnelle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous introduisons la méthode de la formulation variationnelle pour un problème elliptique linéaire qui est basée sur les espace de Sobolev. que nous rappelons dans un premier temps. Ensuite, nous donnons le principe de cette méthode suivie de théorème important qui caractérise la notion de la solution faible c'est à dire au sens variationnelle, il s'agit de théorème de Lax-Milgram.

1.2 Formulation variationnelle d'un problème elliptique linéaire

Dans cette section, nous introduisons quelques critères nécessaires à l'étude des problèmes aux limites elliptiques linéaires.

1.2.1 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles reste sans réponse.

Dans ce qui suit, nous introduisons quelques rappels concernant ces espaces, d'analyse fonctionnelle où la plupart des résultats sont énoncés sans démonstration, pour plus de détail voir [1], [2].

Définitions et propriétés

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L^2(\Omega)$, u s'identifie à une distribution sur Ω noté encore u . Notons $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ pour $j = \overline{1, N}$, les dérivées partielles premières de u , au sens des distributions.

Définition 1.2.1 On appelle espace de **Sobolev** d'ordre un sur Ω l'espace défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall j = \overline{1, N} \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $(u, v)_{H^1(\Omega)}$

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} u v dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx \end{aligned}$$

et de la norme associés :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 La dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$, s'il existe des fonctions v_1, \dots, v_N dans $L^2(\Omega)$ telles que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} v_j \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Nous avons alors,

$$v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Proposition 1.2.1 *L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.2.2 *De la même façon, nous définissons les espaces de Sobolev d'ordre m , ($m \in \mathbb{N}^*$) par :*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\}$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$; $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

On le munit du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

et de la norme associée :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Proposition 1.2.2 *L'espace $H^m(\Omega)$, ($m \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.2.1 *Si Ω est un ouvert de classe C^1 , avec $\Gamma = \partial\Omega$ bornée, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

$H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence (ou bien la fermeture) de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, pour la norme de $H^1(\Omega)$.

Plus généralement, comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$, nous définissons

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m}}$$

c.à.d. $H_0^m(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ pour la norme de $H^m(\Omega)$.

Théorème 1.2.2 De Riesz-Fréchet (voir [[2], page 81]) Soit V un espace de Hilbert et V' son dual. Pour toute forme linéaire $\varphi \in V'$, il existe un unique élément $f \in V$ tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Théorème 1.2.3 Inégalité de Poincaré (voir [[1], page 90])

Soit Ω un ouvert borné et régulier. Alors,

$$\exists c = c(\Omega) > 0 \text{ tel que } \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme sur $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ équivalente à celle induite par $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.2.4 Formule de Green (voir [[1], page 69])

Soit Ω un ouvert de classe C^1 de \mathbb{R}^N , avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné (ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N$), alors :

$\forall u \in H^2(\Omega)$ et $\forall v \in H^1(\Omega)$, nous avons :

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma$$

avec,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot n_j \text{ et } n = (n_1, \dots, n_j)^t \text{ vecteur normale unitaire extérieur.}$$

1.2.2 Formulation variationnelle

On appelle formulation variationnelle tout problème du type suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où,

1. V est un espace de Hilbert.
2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire définie sur $V \times V$.
3. l est une forme linéaire définie sur V .

1.2.3 Le principe de la formulation variationnelle

Pour étudier un problème elliptique linéaire par le biais de la formulation variationnelle nous suivons les étapes suivantes :

1. On précise la notion de solution faible en établissant la formulation variationnelle adapté en utilisant les espace de Sobolev.
2. On montre l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant le théorème de Lax-Milgram.
3. On montre un résultat de régularité pour la solution faible.
4. On montre que la solution faible ayant une certaine régularité est une solution classique.

1.2.4 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram joue un rôle important pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible. Nous rappelons dans cette partie quelques résultats pour démontrer ce théorème.

Formes linéaires et bilinéaires

Définition 1.2.3 On appelle **forme linéaire** une application linéaire sur un espace de Hilbert V à valeurs dans \mathbb{R} . Une forme linéaire l vérifie donc les propriétés suivantes :

1. $\langle l, \lambda v \rangle = \lambda \langle l, v \rangle, \forall v \in V$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\langle l, v_1 + v_2 \rangle = \langle l, v_1 \rangle + \langle l, v_2 \rangle, \forall v_1, v_2 \in V$.

Exemple 1.2.1 Si $V = L^2(\Omega)$ et $f(x) \in L^2(\Omega)$ alors :

$$\langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx.$$

est une forme linéaire sur V . En effet,

$$\langle l, \lambda v \rangle = \int_{\Omega} f \lambda v dx = \lambda \int_{\Omega} f v dx = \lambda \langle l, v \rangle, \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

de plus

$$\langle l, v_1 + v_2 \rangle = \int_{\Omega} f (v_1 + v_2) dx = \int_{\Omega} f v_1 dx + \int_{\Omega} f v_2 dx = \langle l, v_1 \rangle + \langle l, v_2 \rangle, \forall v_1, v_2 \in V.$$

D'où le résultat.

Définition 1.2.4 Une forme linéaire l sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\|\cdot\|_V$ est dite **continue** s'il existe une constante C telle que :

$$|\langle l, v \rangle| \leq C \|v\|_V, \forall v \in V.$$

Exemple 1.2.2 La forme linéaire de l'exemple 1.2.1 est continue. En effet d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\langle l, \lambda v \rangle| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \int_{\Omega} |f v| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|v\|_{L^2}$$

avec $C = \|f\|_{L^2}$.

Définition 1.2.5 L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert V est appelé **espace dual** de V et est noté V' .

Définition 1.2.6 Une **forme bilinéaire** sur un espace de Hilbert V est une application

$$a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

vérifiant :

1. $a(\lambda u_1 + \mu u_2, w) = \lambda a(u_1, w) + \mu a(u_2, w); \forall u_1, u_2, w \in V, \text{ et } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$
2. $a(u, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda a(u, w_1) + \mu a(u, w_2); \forall u, w_1, w_2 \in V, \text{ et } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

Définition 1.2.7 Une forme bilinéaire a est dite :

1. **Continue** sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V.$$

2. **Symétrique** si

$$a(u, v) = a(v, u), \forall u, v \in V.$$

3. **Coercive** s'il existe un réel α strictement positif tel que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V.$$

Exemple 1.2.3 L'application a définie par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} uv dx.$$

est une forme bilinéaire symétrique et continue sur $L^2(\Omega)$. La bilinéarité est en effet triviale à démontrer, la continuité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

avec $C = 1$.

Théorème 1.2.5 De Lax-Milgram

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert V . Alors pour tout $\varphi \in V'$, il existe $u \in V$ unique tel que :

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

De plus, si $a(.,.)$ est symétrique alors u est caractérisée par

$$\begin{cases} u \in V \\ \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Preuve. Soit $\varphi \in V'$. Cherchons l'existence d'un élément u de V , unique tel que :

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad (1.2.3)$$

Montrons d'abord qu'il existe un opérateur linéaire continu A sur V tel que

$$a(x, y) = \langle Ax, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

$(.,.)$ étant le produit scalaire défini sur V .

Fixons un élément x de V et considérons l'application ϕ_x défini par

$$\begin{aligned} \phi_x : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \langle \phi_x, y \rangle = a(x, y) \end{aligned}$$

ϕ_x est une forme linéaire continue (car $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue). Alors d'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique élément $f \in V$ tel que

$$\langle \phi_x, y \rangle = a(x, y) = \langle f, y \rangle, \quad \forall y \in V.$$

Posons $f = Ax$ où A est l'application linéaire continue défini par

$$A : V \longrightarrow V$$

$$x \longmapsto Ax = f.$$

Nous avons encore, d'après le théorème de Riesz-Fréchet : pour $\varphi \in V'$, il existe un unique élément f_1 tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = \langle f_1, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Le problème (1.2.3) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver l'unique } u \in V \text{ tel que} \\ (Au, v) = (f_1, v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

C'est-à-dire $Au = f_1$. pour cela il suffit de montrer que A est bijectif.

A est bijectif c'est équivalent à dire que A est à la fois injectif et surjectif

- Montrons que A est injectif ou encore $\ker(A) = \{0\}$.

Comme $a(.,.)$ est Coercive alors :

$$\alpha \|x\|^2 \leq a(x, x) = (Ax, x) \leq \|Ax\| \|x\|.$$

D'où

$$\|Ax\| \geq \alpha \|x\|, \quad \forall x \in V.$$

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

Donc

$$\ker A = \{0\}$$

d'où l'injectivité de A

- Montrons que A est surjectif.

L'image de A notée $R(A)$ est un sous espace vectoriel fermé de V . En effet, soit $y \in \overline{R(A)}$. On a

$$\exists x_n \in V \text{ telle que : } \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$$

$(Ax_n)_n$ est une suite convergente dans V donc elle est de Cauchy dans $R(A)$. Or

$$\|Ax_n - Ax_m\| \geq \alpha \|x_n - x_m\|$$

ce qui implique que $(x_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy dans V et comme V est un Hilbert alors elle est convergente.

Soit $x \in V$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

La continuité de A permet d'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$$

d'où

$$y = Ax$$

ce qui signifie que $y \in R(A)$, par suit :

$$R(A) = \overline{R(A)}.$$

De plus on a

$$\overline{R(A)} = V,$$

en effet, soit $y \in R(A)^\perp$ alors,

$$(Ax, y) = 0, \forall x \in V.$$

En particulier pour $x = y$ on a

$$(Ay, y) = 0 \Leftrightarrow a(y, y) = 0.$$

La coercivité de $a(.,.)$ donne :

$$\begin{aligned} a(y, y) = 0 &\geq \alpha \|y\|^2 \Rightarrow \|y\| = 0 \\ &\Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$R(A)^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{R(A)} = V.$$

Ou encore

$$R(A) = V \left(\text{car } R(A) = \overline{R(A)} \right).$$

D'où la surjectivité de A et finalement ça bijection.

Supposons maintenant que $a(., .)$ est symétrique et montrons que u est caractérisé par

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Soit $\Psi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle$.

On a :

$$\begin{aligned} \Psi(v) &= \Psi(v - u + u) \\ &= \frac{1}{2}a(v - u + u, v - u + u) - \langle \varphi, v - u + u \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u + u) + \frac{1}{2}a(u, v - u + u) - \langle \varphi, v - u \rangle - \langle \varphi, u \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + \frac{1}{2}a(v - u, u) + \frac{1}{2}a(u, v - u) + \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, v - u \rangle - \langle \varphi, u \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + a(u, v - u) - \langle \varphi, v - u \rangle + \Psi(u). \end{aligned}$$

Mais $a(u, v - u) = \langle \varphi, v - u \rangle$; donc

$$\Psi(v) = \Psi(u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) \geq \Psi(u), \quad \forall v \in V \quad (\text{car } \exists \alpha > 0 : a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2).$$

D'où

$$\Psi(u) = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

■

Remarque 1.2.2 *Le théorème de Lax-Milgram donne des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé (c'est-à-dire, existence, unicité et stabilité de la solution), pas des conditions nécessaires. Si les hypothèses de ce théorème ne sont pas satisfaites, nous ne pouvons pas en déduire que le problème est mal posé. Toutefois, dans le cas où toutes les hypothèses autres que la coercivité de $a(.,.)$ sont satisfaites, nous avons le résultat suivant : si $a(.,.)$ est symétrique et positive ($a(v,v) \geq 0, \forall v \in V$), alors $a(.,.)$ est non coercive implique que le problème est mal posé.*

1.3 Etude du problème de Dirichlet pour le Laplacien

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de classe C^1 avec $\partial\Omega$ son bord.

Considérons le problème suivant :

Trouver une fonction u de $\overline{\Omega}$ dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ dans } \Omega \\ u(x) = 0, \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.1)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$.

On appelle :

1. Solution classique du problème de Dirichlet homogène (1.3.1), tout fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (1.3.1), où $f \in C(\Omega)$.
2. Solution faible du problème (1.3.1), tout fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.3.2)$$

Décrivons la résolution du problème (1.3.1) par la méthode de la formulation variationnelle en suivant les étapes décrites précédemment.

- Recherche de la formulation variationnelle.

On a :

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

C'est-à-dire

$$\left\langle -\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Leftrightarrow -\sum_{j=1}^N \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La dérivation est au sens des distributions, d'où

$$\sum_{j=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Puisque $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ alors

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ alors,

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

- Résolution du problème variationnel.

Nous allons utiliser le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité de la solution faible.

Soient l'espace de Hilbert $V = H_0^1(\Omega)$, la forme bilinéaire défini sur $V \times V$ par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (1.3.4)$$

et la forme linéaire défini sur V donnée par

$$\langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.3.5)$$

Montrons que $a(.,.)$ est continue c'est-à-dire montrons que :

$$\exists C > 0, \forall u, v \in H_0^1(\Omega) : |a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On a :

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\exists C = 1 > 0, \forall u, v \in H_0^1(\Omega) : |a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

Montrons que $a(.,.)$ est coercive. c'est-à-dire montrons que :

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Poincaré (théorème 1.2.3), il existe une constante C positive tel que :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

Ainsi

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + C^2) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

C'est-à-dire

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C^2) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Donc

$$\exists \alpha = \frac{1}{1+C^2} > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est coercive.

Montrons que $\langle l, v \rangle$ est continue, c'est-à-dire montrons que :

$$\exists C_l > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : |\langle l, v \rangle| \leq C_l \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On a

$$|\langle l, v \rangle| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \int_{\Omega} |f| |v| dx.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle l, v \rangle| &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\exists C_l = \|f\|_{L^2(\Omega)} > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) : |\langle l, v \rangle| \leq C_l \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc $\langle l, v \rangle$ est continue.

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant réunies, alors

$$\exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ solution faible de problème (1.3.2).}$$

De plus si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u s'obtient par

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle l, u \rangle = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle l, v \rangle \right\}.$$

- Pour la régularité de la solution faible, en utilisant le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 (voir [2], page 181) Soit u la solution faible du problème de Dirichlet (1.3.1). Si Ω est borné de classe C^{m+2} et si $f \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C \|f\|_{H^m}$$

avec C une constante indépendante de u et de f . En particulier si $m > \frac{N}{2}$ alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et si Ω est de classe C^∞ , $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

- Supposons maintenant que Ω est de classe C^2 . Alors $u \in H^2(\Omega)$. Montrons que u vérifie le problème initial (1.3.1).

$u \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, la dérivée aux sens des distributions donne

$$-\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou bien

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On déduit alors que $-\Delta u = f$ au sens des distributions. Comme $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega)$ alors $-\Delta u = f$ p.p sur Ω .

Approximation variationnelle

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de l'approximation variationnelle qu'il permette de résoudre d'une manière approchée la formulation variationnelle (1.2.1).

2.2 Approximation interne générale

Nous considérons à nouveau la formulation variationnelle(1.2.1) c'est -à-dire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où V est un espace de Hilbert, $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive et la forme linéaire $\langle l, v \rangle$ est continue. Dont on sait qu'elle admet une solution unique d'après le théorème 1.2.5 de Lax-Milgram.

L'approximation interne de (2.2.1) consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par un sous-espace V_h de V de dimension finie. C'est-à-dire à chercher la solution du problème discrétisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver l'unique } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = (l, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

La résolution de l'approximation interne (2.2.2) ce fait grâce au lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soit V un espace de Hilbert réel, et V_h un sous-espace de dimension fini. Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V . Alors l'approximation interne (2.2.2) admet une unique solution. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si $a(.,.)$ est symétrique).*

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution $u_h \in V_h$ du problème (2.2.2) découle du théorème 1.2.5 de Lax-Milgram appliqué à V_h . Pour mettre le problème sous une forme simple, on introduit une base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ de V_h . La solution rechercher u_h s'écrit donc sous la forme :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

On pose $u_h = (u_1, u_2, \dots, u_{N_h})$ le vecteur dans \mathbb{R}^{N_h} . Résoudre (2.2.2) est alors équivalent à trouver un vecteur $u_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ tel que

$$a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.2.3)$$

La bilinéarité de $a(.,.)$ nous permet d'écrire,

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, v_h) u_j = \langle l, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h$$

En particulier,

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \langle l, \varphi_i \rangle, \quad \forall i = \overline{1, N_h}.$$

Ce qui s'écrit matriciellement

$$A_h U_h = b_h \quad (2.2.4)$$

Avec pour $1 \leq i, j \leq N_h$,

$$(A_h)_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$$

$$(b_h)_i = \langle l, \varphi_i \rangle$$

On obtient alors,

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) & a(\varphi_2, \varphi_{N_h}) & \cdots & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle l, \varphi_1 \rangle \\ \langle l, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle l, \varphi_{N_h} \rangle \end{pmatrix}$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ entraîne le caractère défini positif de la matrice A_h , est donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur $U_h \in \mathbb{R}^{N_h}$, nous avons

$$A_h U_h \cdot U_h \geq \alpha \left\| \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j \right\|^2 \geq C |U_h|^2, \text{ avec } C > 0.$$

car toutes les normes sont équivalentes en dimension fini ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{N_h}). De même, la symétrie de $a(\cdot, \cdot)$ implique celle de A_h . Dans les applications mécaniques la matrice A_h est appelée matrice de **rigidité** et notée \mathcal{K} . ■

2.2.1 Convergence de la méthode

Lemme 2.2.2 (lemme de Céa). *On se place sous les hypothèses du lemme 2.2.1. Soit u la solution de (2.2.1) et u_h celle de (2.2.2). On a*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Preuve. Puisque $V_h \subset V$, on déduit par soustraction des formulations variationnelles (2.2.1) et (2.2.2), que $v_h \in V_h$;

$$a(u - u_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in V_h.$$

En posant $w_h = v_h - u_h$, et d'après la continuité et la coercivité de $a(.,.)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u_h - u_h) = a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 2.2.1 Si $a(.,.)$ est symétrique on obtient pour tout élément $v_h \in V_h$,

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - v_h\|.$$

Lemme 2.2.3 On se place dans les hypothèses du lemme 2.2.1. Supposons qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V et une application r_h de \mathcal{V} dans V_h (appelée **opérateur d'interpolation**) tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0, \quad \forall v \in V. \quad (2.2.5)$$

Alors la méthode de l'approximation variationnelle interne converge, c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, comme \mathcal{V} est dense dans V , il existe un élément $v \in \mathcal{V}$ tel que

$$\|u - v\| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe un $h_0 > 0$ (dépendant de ε) tel que, pour cette élément $v \in \mathcal{V}$, on a

$$\|v - r_h(v)\| \leq \varepsilon, \quad \forall h \leq h_0.$$

En vertu du lemme 2.2.2 on a :

$$\|u - u_h\| \leq C \|u - r_h(v)\| \leq C (\|u - v\| + \|v - r_h(v)\|) \leq 2C\varepsilon$$

d'où le résultat. ■

2.3 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin a été précurseur de la méthode des éléments finis. C'est une méthode très générale et très robuste. Bien qu'elle n'ait aucun intérêt numérique en générale, elle est très utile d'un point de vue théorique.

2.3.1 Présentation de la méthode de Galerkin

Pour trouver une solution approchée du problème (2.2.2), l'idée de Galerkin est de résoudre le même type de problème sur un sous-espace V_h de V de dimension finie. En effet ; on suppose que l'espace de Hilbert V est séparable de dimension infinie, ce qui entraîne qu'il existe une base $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ de V . On choisit alors \mathcal{V} comme le sous-espace engendré par cette base hilbertienne qui est dense dans V . En posant $h = \frac{1}{n}$, nous définissons V_h comme le sous-espace de dimension finie engendré par (e_1, e_2, \dots, e_n) . Finalement, l'opérateur d'interpolation r_h est simplement la projection orthogonale sur l'espace V_h . Toutes les hypothèses des lemmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 sont donc satisfaites et on déduit que la solution approchée u_h converge vers la solution exacte u . Malgré son adéquation au cadre théorique développé ci-dessus, la méthode de Galerkin est peu commode d'un point de vue numérique, car la matrice A_h que nous obtenons est généralement **pleine** c'est-à-dire que tous ces coefficients sont non nuls en générale, et **mal conditionnée** c'est-à-dire que la résolution numérique du système linéaire sera instable car très sensible aux erreurs d'arrondi du calcul sur ordinateur.

Approximation par la méthode des éléments finis

3.1 Introduction

La méthode des éléments finis est un cas particulier de la méthode interne pour laquelle les espaces V_h sont faciles à construire et pour laquelle la matrice A_h contient beaucoup de zéro ce que rend possible l'utilisation des méthodes numériques performantes pour son inversion. La méthode des éléments finis est avant tout une méthode d'interpolation. Ainsi, pour approcher une fonction, on découpe son domaine de définition en petits éléments et sur chaque élément, le comportement local de la fonction est représenté par une fonction simple, comme une fonction polynômiale par exemple. Dans la suite, nous illustrons la méthode sur l'exemple simple du problème de Poisson.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1)$$

3.2 Principes généraux de la méthode des éléments finis

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne V_h des espaces fonctionnels usuels $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$..., dont la définition est basée sur la notion géométrique de maillage du domaine de Ω . Un maillage est un pavage de l'espace en volumes géométriques élémentaires très simples : triangles, tétraèdres, parallélépipèdes. Dans ce contexte le paramètre h de V_h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage. Une base de V_h sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles. Ceci aura deux conséquences importantes : d'une part, dans la limite h tend vers 0, l'espace V_h sera de plus en plus gros et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier, et d'autre part, la matrice de rigidité A_h du système linéaire(2.2.4) sera creuse, c'est-à-dire que la plupart des ses coefficients seront nuls ce qui limitera le coût de la résolution numérique.

3.3 Éléments finis en dimension $N = 1$

On se place en une dimension de l'espace et on prend $\Omega =]0 ; 1[$. Dans ce cas le problème modèle (3.1.1) s'écrit sous forme :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans } \Omega \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

par le théorème de Lax-Milgram (1.2.5), pour $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$ que nous voulons approcher. On commence par construire un maillage de l'intervalle $[0 ; 1]$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

c'est-à-dire qu'on divise l'intervalle $[0 ; 1]$ en petits sous-intervalle $K_i = [x_j ; x_{j+1}]$, $j = \overline{0, N}$. Les intervalles $K_i = [x_j ; x_{j+1}]$ sont appelés les cellules ou les mailles ou encore les éléments du maillage. Le maillage sera dite uniforme (ce que l'on supposera toujours par la suite)

si les pointes x_j sont équidistants, c'est-à-dire que

$$x_j = j h \text{ avec } h = \frac{1}{N+1}, j = \overline{0, N+1}.$$

Les point x_j sont aussi appelés les sommets (ou noeud) du maillage. Nous définissons aussi \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieure ou égale à k .

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j, a_j \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.3.2)$$

La méthode des éléments finis consiste à définir comme espace d'approximation de $H^1(\Omega)$:

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}); v|_{K_i} \in \mathbb{P}_k, 0 \leq i \leq N\}.$$

Suivant le choix de $k \in \mathbb{N}^*$, on parle de méthode des éléments finis \mathbb{P}_k .

3.3.1 Approximation par éléments finis \mathbb{P}_1

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}); v|_{K_i} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq i \leq N\}. \quad (3.3.3)$$

et

$$V_{0h} = \{v \in V_h ; v(0) = v(1) = 0\}. \quad (3.3.4)$$

où \mathbb{P}_1 désigne l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à un. L'espace V_h est l'espace d'approximation de $H^1(\Omega)$ par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 tandis que V_{0h} est l'espace d'approximation de $H_0^1(\Omega)$, il faut montrer que ces sont des sous-espaces de $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ respectivement, en déterminant une base et montrer l'existence d'un opérateur d'interpolation défini sur un sous-espace dense de $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ respectivement, et à valeurs dans, respectivement, V_h et V_{0h} . On pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Puis on définit, pour $j = 1, \dots, N + 1$, les fonction φ_j par

$$\varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{|x - x_j|}{h}\right). \quad (3.3.6)$$

Les fonctions φ_j sont des **fonctions chapeaux**, elles vérifient

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}, 1 \leq i \leq N. \quad (3.3.7)$$

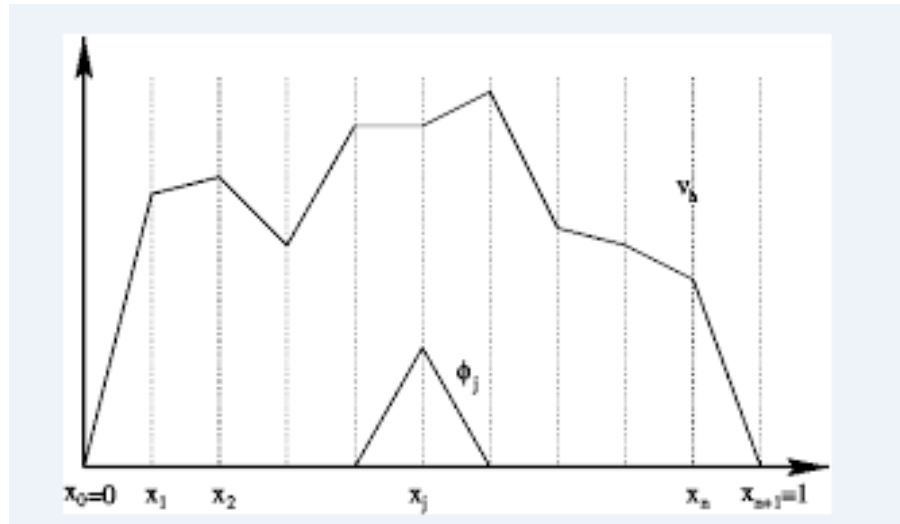


Figure 3.1: maillage de Ω et la fonction chapeau.

De plus la fonction (3.3.6) a son support dans $[x_{i-1}; x_{i+1}]$ et on peut encore écrire φ_j sur son support par

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}; x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_j; x_{j+1}]. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Proposition 3.3.1 *L'espace V_h , défini par (3.3.3) est un sous-espace de $H^1(0; 1)$ de dimension $N + 2$ et la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ est une base en particulier, pour toute $v_h \in V_h$,*

on a

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N+1} v_h(x_j) \varphi_j(x) \quad \forall x \in [0 ; 1]. \quad (3.3.9)$$

De même, l'espace vectoriel V_{0h} défini par (3.3.4) est un sous-espace de $H_0^1(0 ; 1)$ de dimension N et la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ est une base en particulier, pour toute $v_h \in V_{0h}$, on

a

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_h(x_j) \varphi_j(x), \quad \forall x \in [0 ; 1]. \quad (3.3.10)$$

Preuve. Montrons d'abord que V_h est un sous-espace de $H^1(]0 ; 1[)$. Pour cela il faut montrer que toute fonction $v_h \in V_h$ est dans $L^2(]0 ; 1[)$ et sa dérivée au sens des distributions est dans $L^2(]0 ; 1[)$. En effet, soit $v_h \in V_h$ alors $v_h \in C([0 ; 1])$ donc est bornée sur $[0 ; 1]$, par suite

$$\int_0^1 |v_h(x)|^2 dx < \infty.$$

D'où $v_h \in L^2(]0 ; 1[)$. Montrons que $v_h' \in L^2(]0 ; 1[)$, soit donc $v_h \in V_h$ on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0 ; 1[)$

$$\langle v_h', \varphi \rangle = - \langle v_h, \varphi' \rangle = - \int_0^1 v_h(x) \varphi'(x) dx = - \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_h(x) \varphi'(x) dx.$$

En intégrant par parties sur $[x_i ; x_{i+1}]$, on

$$\begin{aligned} \langle v_h', \varphi \rangle &= \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_h'(x) \varphi(x) dx + \sum_{j=0}^N (v_h(x_{j+1}) \varphi(x_{j+1}) - v_h(x_j) \varphi(x_j)) \\ &= \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \{v_h'(x)\} \varphi(x) dx + v_h(x_{N+1}) \varphi(x_{N+1}) - v_h(x_0) \varphi(x_0) \end{aligned}$$

et que sur chaque sous-intervalle $[x_i ; x_{i+1}]$ la dérivée v_h' est une constante que l'on notera $\{v_h'\}$, où $\{v_h'\}$ désigne la dérivée usuelle de v_h sur $[x_i ; x_{i+1}]$ telle que

$$\{v_h'\} = \frac{v_h(x_{j+1}) - v_h(x_j)}{h}.$$

Donc $\{v_h'\} \in L^2(]0 ; 1[)$, et comme $\varphi(0) = \varphi(1)$, on obtient

$$\langle v_h', \varphi \rangle = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \{v_h'\} \varphi(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$v_h' = \{v_h'\},$$

ce qui montre que $v_h' \in L^2(]0 ; 1[)$. D'où $v_h \in H^1(]0 ; 1[)$ donc $V_h \subset H^1(]0 ; 1[)$. Il reste à montrer que la famille $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N+1}\}$ est une base de V_h et l'égalité (3.3.9). En effet, cette famille est libre car si la fonction

$$\omega = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j \varphi_j$$

est identiquement nulle sur $]0 ; 1[$, on aura

$$\omega(x_i) = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j \varphi_j(x_i) = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i = 0$$

montrons que cette famille est génératrice, soit $v_h \in V_h$ on pose

$$\omega_h = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) \varphi_j.$$

Sur chaque intervalle $[x_{i-1} ; x_{i+1}]$ les fonctions v_h et ω_h sont affines et coïncident en deux points (les extrémités de $[x_{i-1} ; x_{i+1}]$) par conséquent ces fonctions sont égales. On en déduit que $v_h = \omega_h$ sur $[x_{i-1} ; x_{i+1}]$ ce qui montre que toute fonction de V_h peut s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N+1}\}$ c'est-à-dire

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N+1} v_h(x_j) \varphi_j(x) \quad \forall x \in [0 ; 1],$$

d'où le résultat. ■

Remarque 3.3.1 *On obtient en particulier que toute fonction de V_h et V_{0h} est définie de façon unique par ses valeurs aux noeuds x_j .*

Décrivons la résolution pratique du problème (3.3.1) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . La formulation (2.2.2) de l'approximation interne devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ \int_0^1 u_h' v_h' dx = \int_0^1 f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{0h}. \end{array} \right. \quad (3.3.11)$$

Avec le choix (3.3.4) de l'espace V_{0h} , la méthode d'approximation variationnelle du problème (3.3.1) consiste à approcher la solution $u \in V$ par la fonction

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_j \varphi_i. \quad (3.3.12)$$

dont le vecteur de \mathbb{R}^N de composantes u_j est la solution du système linéaire

$$A_h U_h = b_h. \quad (3.3.13)$$

En notant pour $v_h = \varphi_i$:

$$1. A_h = (A_h)_{i,j} ; 1 \leq i, j \leq N$$

$$(A_h)_{i,j} = \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' dx. \quad (3.3.14)$$

$$2. b_h = (b_h)_i, 1 \leq i \leq N$$

$$(b_h)_i = \int_0^1 f \varphi_i dx. \quad (3.3.15)$$

Ainsi pour connaître la solution approchée U_h il suffit de calculer la matrice A_h et le second membre b_h . La fonction de base (3.3.8) a son support dans $[x_{i-1} ; x_{i+1}]$, l'intersection des supports de deux fonctions φ_j et φ_i telles que $|i - j| \geq 1$ est vide et par suite

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = 0, \quad \forall i, j ; |i - j| \geq 1. \quad (3.3.16)$$

ce qui signifie que la matrice A_h est tridiagonale de plus elle est symétrique puisque :

$$a(v_1, v_2) = a(v_2, v_1), \quad \forall v \in V_h.$$

on a enfin,

$$\begin{aligned} (A_h)_{i,i} &= a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 (\varphi_i')^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i')^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{2}{h}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

$$\begin{aligned}
 (A_h)_{i,i+1} &= a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi'_{i+1} \varphi'_i dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_{i+1} \varphi'_i dx \\
 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{-1}{h}\right) dx \\
 &= \frac{-1}{h}.
 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

D'où

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.3.19}$$

Pour obtenir le second membre b_h il faut calculer les intégrales

$$(b_h)_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx \text{ pour } 1 \leq i \leq N. \tag{3.3.20}$$

L'évaluation exacte du second membre b_h peut être difficile ou impossible si la fonction f est compliquée. En pratique on utilise des formules d'intégration numérique. Par exemple, on peut utiliser la formule du **point milieu**

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \psi\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right), \tag{3.3.21}$$

ou la formule des **trapèzes**

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \frac{1}{2}(\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i)), \tag{3.3.22}$$

ou bien encore la formule de **Simpson**

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \frac{1}{6}\psi(x_{i+1}) + \frac{1}{6}\psi(x_i) + \frac{2}{3}\psi\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right). \tag{3.3.23}$$

Les deux premières formules sont exactes pour des polynômes de degré un, et la troisième est exactes pour des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. La résolution du système linéaire (3.3.13) est la partie la plus coûteuse de la méthode en terme de temps de calcul.

3.3.2 Convergence et estimation d'erreur

Nous introduisons dans ce paragraphe un résultat principale qui établit la convergence de la méthode \mathbb{P}_1 pour le problème(3.3.1).

Définition 3.3.1 *L'opérateur d'interpolation \mathbb{P}_1 est l'application linéaire r_h définie de $H^1(]0 ; 1[)$ dans V_h par*

$$r_h v_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v_h(x_j) \varphi_j(x), \quad \forall v \in H^1(]0 ; 1[),$$

où les fonctions φ_j sont données par (3.3.6) et (3.3.5).

Lemme 3.3.1 (voir [[1], page 162])

1. Pour toute $v \in H^2(]0 ; 1[)$, il existe une constante $C > 0$ indépendamment de h telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(]0 ; 1[)} \leq Ch \left\| v'' \right\|_{L^2(]0 ; 1[)}. \quad (3.3.24)$$

2. Pour toute $v \in H^1(]0 ; 1[)$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(]0 ; 1[)} = 0. \quad (3.3.25)$$

Théorème 3.3.1 *Soient $u \in H_0^1(]0 ; 1[)$ la solution de (3.3.1) et $u_h \in V_h$ la solution de (3.3.11). Alors, on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(]0 ; 1[)} = 0. \quad (3.3.26)$$

Autrement dit, la méthodes des élément finis \mathbb{P}_1 converge. De plus, si $u \in H^2(]0 ; 1[)$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(]0 ; 1[)} \leq Ch \left\| u'' \right\|_{L^2(]0 ; 1[)} = Ch \|f\|_{L^2(]0 ; 1[)}. \quad (3.3.27)$$

On dit que la convergence est linéaire.

Preuve. La convergence de (3.3.26) est la conséquence du lemme 3.3.1 et du lemme 2.2.3. D'après le lemme de Céa on obtient l'estimation (3.3.27)

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(]0 ; 1[)} &\leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(]0 ; 1[)} \\ &\leq \|u - r_h u\|_{H^1(]0 ; 1[)} \leq Ch \left\| u'' \right\|_{L^2(]0 ; 1[)} = Ch \|f\|_{L^2(]0 ; 1[)}. \end{aligned}$$

■

3.4 Éléments finis en dimension $N \geq 2$

Dans cette section, nous présentons de manière détaillée la méthode des éléments finis en dimension d'espace $N \geq 2$ (en pratique $N = 2$ ou 3); ces éléments sont de forme triangulaire ou rectangulaire. Pour simplifier l'exposé, certains résultats ne seront démontrés qu'en dimension $N = 2$, mais ils s'étendent à la dimension $N = 3$. Nous considérons le problème modèle de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in L^2(\Omega)$. Rappelons que ce problème admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$. Dans tout ce qui suit nous supposons que le domaine est polyédrique (polygonal si $N = 2$), afin que nous puissions le mailler exactement.

3.4.1 Éléments finis triangulaires

Commençons par définir ce qu'est un maillage du domaine Ω par des triangles en dimension $N = 2$ et des tétraèdres en dimension $N = 3$. Nous regroupons les triangles et les tétraèdres dans la famille plus générale des N -simplexes.

Définition 3.4.1 *Un N -simplexe K de \mathbb{R}^N est l'enveloppe convexe de $(N + 1)$ points $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de \mathbb{R}^N . On note $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq N}$ les coordonnées du vecteur a_j . Le N -simplexe K est non dégénéré si la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & a_{N,3} & \cdots & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

est inversible (ce que l'on supposera toujours par la suite).

Remarque 3.4.1 *Soit $A \subset E$, l'enveloppe convexe de A notée $\text{Cov}(A)$ est l'intersection de tous les convexes de E contenant A .*

Exemple 3.4.1

- Un 2-simplexe est simplement un triangle en dimension deux.
- Un 3-simplexe est un tétraèdre en dimension trois.

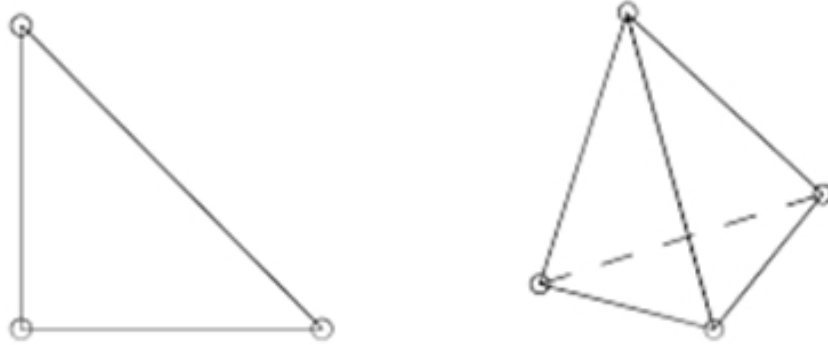


Figure 3.2 :Gauche un 2-simplexe. Droite : un 3-simplexe

Remarque 3.4.2 *Un N -simplexe a autant de faces que de sommets, qui sont elles-mêmes des $(N + 1)$ -simplexes.*

Définition 3.4.2 *Soient K un N -simplexe non dégénéré de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$, et $x \in \mathbb{R}^N$. Alors, x est caractérisé par ses **coordonnées barycentriques** $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de $x \in \mathbb{R}^N$, définies comme solutions du système linéaire*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq N \\ \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1 \end{cases} \quad (3.4.3a)$$

qui admet une solution unique car la matrice A , définie par (3.4.2) est inversible. Les coordonnées barycentriques permettent de donner une caractérisation simple du N -simplexe K :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \lambda_j(x) \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq N + 1\}. \quad (3.4.4)$$

et que les $(N + 1)$ faces de K sont les intersections de K et des hyperplans $\lambda_j(x) = 0$, $1 \leq j \leq N + 1$.

Définition 3.4.3 Soit Ω un ouvert connexe polyédrique de \mathbb{R}^N . Un **maillage** ou une **triangulation** de $\bar{\Omega}$ est un ensemble \mathcal{T}_h de N -simplexes (non dégénérés) $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$ qui vérifient

1. $K_i \subset \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N K_i$,
2. l'intersection $K_i \cap K_j$ de deux N -simplexes distincts est un m -simplexe, avec $0 \leq m \leq N-1$, dont tous les sommets sont aussi des sommets de K_i et K_j . Les sommets ou noeuds du maillage \mathcal{T}_h sont les sommets des N -simplexes K_i qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des N -simplexes K_i .

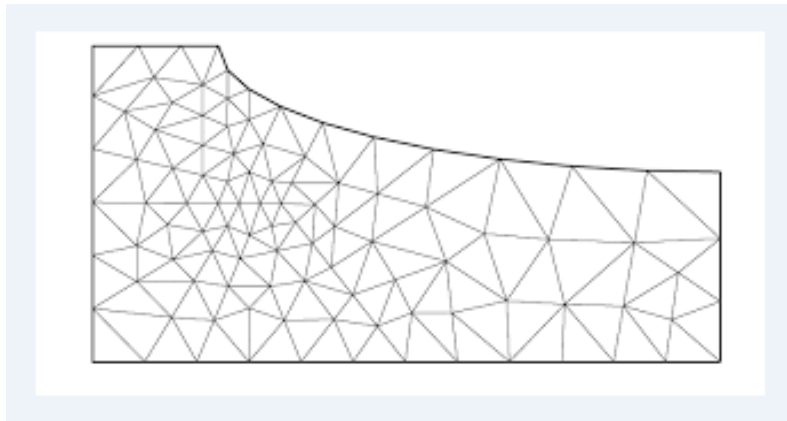


Figure 3.3: Exemple de triangulation en dimension
 $N = 2$.

Remarques 3.4.3 Précisons la signification du deuxième point de la définition 3.4.3 dans les cas $N = 2$ et $N = 3$:

1. En dimension $N = 2$, l'intersection de deux triangles est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit une arête commune entière.
2. En dimension $N = 3$, l'intersection de deux tétraèdres est soit vide, soit un sommet commun, soit une face commune entière, soit une arête commune entière.

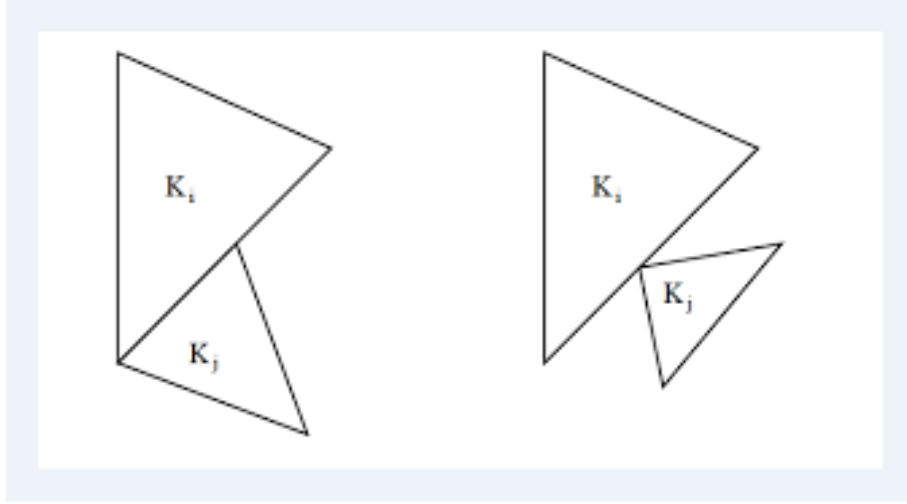


Figure 3.4: Situations interdites

Définition 3.4.4 Soit K un N -simplexe non dégénéré de \mathbb{R}^N de coordonnées barycentriques associées $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. On appelle **treillis** d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de K l'ensemble défini par

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}. \quad (3.4.5)$$

Remarque 3.4.4 La définition 3.4.4 de **treillis** permet de définir l'équivalent en dimension $N \geq 1$ de la notion de point milieu de l'intervalle. Comme vu dans le cas de dimension un, celle-ci sera nécessaire dans l'étude de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k pour $k > 1$. On peut aussi définir Σ_0 comme étant le singleton réduit au barycentre de K .

Exemple 3.4.2

En dimension $N = 2$

1. Pour $k = 1$, Σ_1 est l'ensemble des sommets de K .

2. Pour $k = 2$, Σ_2 est l'ensemble des sommets et des points milieux des arêtes reliant deux sommets.

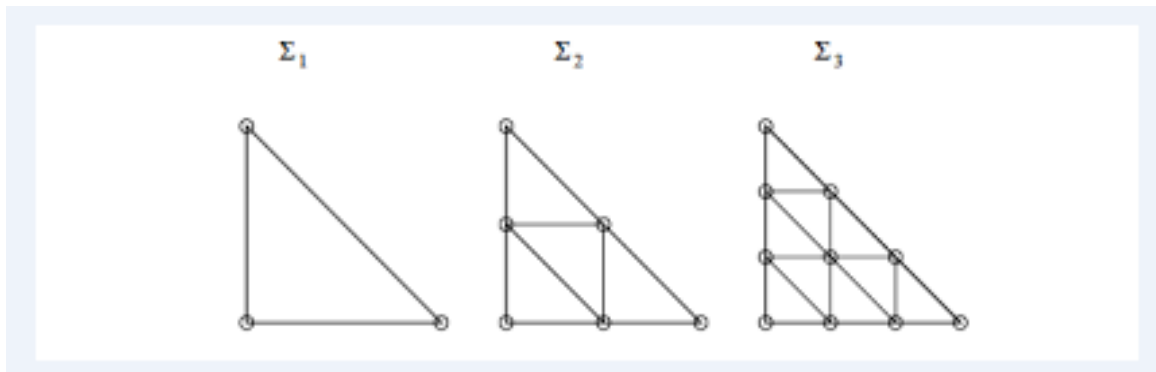


Figure 3.5: Treillis en dimension $N = 2$, $k = 1, 2, 3$.

En dimension $N = 3$.

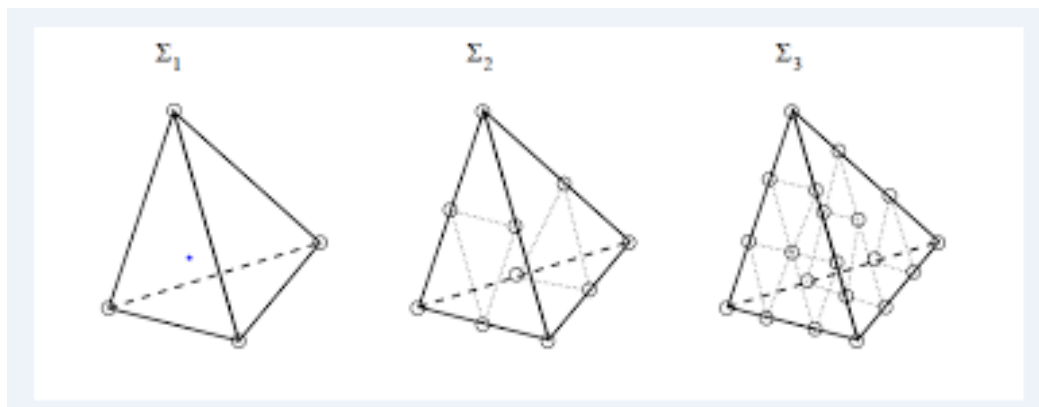


Figure 3.6: Treillis en dimension $N = 3$, $k = 1, 2, 3$.

Notation 3.4.1 On note par \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réel de \mathbb{R}^N de degré inférieur ou égal à k . C'est-à-dire que tout polynôme P de \mathbb{P}_k s'écrit sous la forme suivante :

$$P(x) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_n} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

Exemple 3.4.3 Pour $k = 1$, on obtient des polynômes affines

$$P(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

Lemme 3.4.1 (voir [[1], page 177]) Soit K un N -simplexe. Pour un entier $k \geq 1$, soit \sum_k le treillis d'ordre k , défini par (3.4.5), dont les points sont notés $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq N_k}$. Alors, tout polynôme de \mathbb{P}_k est déterminé de manière unique par ses valeurs au points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq N_k}$. Autrement dit, il existe une base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_k}$ de \mathbb{P}_k telle que

$$\varphi_j(\sigma_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_k. \quad (3.4.6)$$

Dans la suite, ce lemme à deux applications importantes. Tout d'abord celui-ci permettra de construire une base de l'espace d'approximation. En suite, il permet de montrer le lemme suivant.

Lemme 3.4.2 Soit K et K' deux N -simplexes ayant une face commune $\Gamma = \partial K \cap \partial K'$. Soit un entier $k \geq 1$. Alors leurs treillis d'ordre k , \sum_k et \sum'_k coïncident sur cette face Γ . De plus, étant donné P_K et $P_{K'}$ deux polynômes de \mathbb{P}_k , la fonction v défini par

$$v(x) = \begin{cases} P_K(x) & \text{si } x \in K \\ P_{K'}(x) & \text{si } x \in K' \end{cases}$$

est continue sur $K \cup K'$, si et seulement si P_K et $P_{K'}$ ont des valeurs qui coïncident aux points du treillis sur la face commune Γ .

Preuve. Supposons que v est continue sur $K \cup K'$, alors $P_K = P_{K'}$ sur Γ .

Réciproquement, supposons que P_K et $P_{K'}$ coïncident aux points des treillis sur Γ . D'après le lemme 3.4.1, P_K et $P_{K'}$ sont uniquement déterminés sur Γ par leur valeur sur $\sum_k \cap \Gamma$ donc si celle-ci coïncident, on a nécessairement $P_K = P_{K'}$, sur Γ donc v est continue sur $K \cup K'$. ■

Remarque 3.4.5 Soit $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\} = \Gamma \cap \sum_k$. On note $(\varphi_j^K)_{1 \leq j \leq N_k}$ la base de \mathbb{P}_k associée à K et $(\varphi_j^{K'})_{1 \leq j \leq N_k}$ celle associée à K' , définies par (3.4.6). Pour $1 \leq j \leq N$ fixé, si on définit P_K et $P_{K'}$ par

$$P_K = \varphi_j^K \text{ et } P_{K'} = \varphi_j^{K'},$$

alors la fonction v du Lemme 3.4.2, est continue sur $K \cup K'$ puisque pour tout $i = 1 \dots N$ on a,

$$P_K(\sigma_i) = \delta_{ij} = P_{K'}(\sigma_i).$$

3.4.2 Eléments finis \mathbb{P}_k en dimension $N \geq 2$

Dans toute la suite, Ω est un domaine polyédrique. On donne tout d'abord la définition des espaces d'approximation de $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ associés à une triangulation \mathcal{T}_h de Ω .

Définition 3.4.5 Soit \mathcal{T}_h une triangulation de Ω .

1. La méthode des éléments finis triangulaire de Lagrange d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ est définie comme étant la méthode pour laquelle l'espace $H^1(\Omega)$ est approché par l'espace

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_k, \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.4.7)$$

2. Les noeuds de degrés de liberté sont les points \hat{a}_i , $1 \leq i \leq N_{dl}$ des treillis d'ordre k de chacun des N -simplexes $K_i \in \mathcal{T}_h$.
3. Les degrés de liberté d'une fonction $v \in V_h$ sont les valeurs $v(\hat{a}_i)$ de v aux points \hat{a}_i .
4. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est approché par l'espace

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (3.4.8)$$

Proposition 3.4.1 L'espace V_h défini par 3.4.7, est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension est finie, égale au nombre de degré de liberté. De plus, il existe une base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_{dl}}$ de V_h définie par

$$\varphi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_{dl}$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N_{dl}} v(\hat{a}_i) \varphi_i(x).$$

Preuve. Soit $v_h \in V_h$. Comme v_h est continue sur Ω bornée, $v_h \in L^2(\Omega)$. Ainsi, pour montrer que $v_h \in H^1(\Omega)$, il suffit de montrer que pour tout $i = \overline{1, N}$

$$v'_h = \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ (au sens des distributions).}$$

Soient $i = \overline{1, N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors,

$$\begin{aligned} \langle v'_h, \varphi \rangle &= - \langle v_h, \varphi' \rangle \\ &= - \int_{\Omega} v_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \int_{K_i} v_h|_{K_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Puisque $v_h \in V_h$, $v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_k$ pour tout $K_i \in \mathcal{T}_h$, d'après la formule de Green on en déduit

$$\langle v'_h, \varphi \rangle = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \int_{K_i} \frac{\partial v_h|_{K_i}}{\partial x_i} \varphi dx - \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K_i} v_h|_{K_i} \varphi \cdot n_i^K ds, \quad (3.4.9)$$

où $n_i^K = (n_1^K, \dots, n_N^K)^t$ est la normale extérieure unitaire de ∂K . Or si $K_m, K_n \in \mathcal{T}_h$ sont tels que

$$\Gamma = \partial K_m \cap \partial K_n,$$

est une face commune, alors

$$n^{K_n} = -n^{K_m} \text{ sur } \Gamma.$$

Ainsi, comme v_h et φ sont continues dans $\overline{\Omega}$, on obtient

$$\int_{\partial K_n} v_h|_{K_i} \varphi \cdot n_i^{K_n} ds + \int_{\partial K_m} v_h|_{K_i} \varphi \cdot n_i^{K_m} ds = 0$$

on en déduit que la somme des intégrales de bord de (3.4.9) se réduit à une intégrale sur le bord de Ω qui s'annule car $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Finalement, on a

$$\langle v'_h, \varphi \rangle = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \int_{K_i} \frac{\partial v_h|_{K_i}}{\partial x_i} \varphi dx.$$

D'où

$$v'_h = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \frac{\partial v_h|_{K_i}}{\partial x_i} \in L^2(\Omega).$$

Par conséquent, $v_h \in H^1(\Omega)$

Le lemme 3.4.2 et la remarque 3.4.5 montrent que les éléments de V_h sont obtenus localement sur chaque $K_i \in \mathcal{T}_h$ par des polynômes qui coïncident sur les degrés de liberté des faces. La base de V_h est obtenue en assemblant les bases $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_k}$ définies dans le lemme 3.4.1 de chaque $K \in \mathcal{T}_h$. ■

Remarque 3.4.6 *On obtient un résultat semblable pour le sous-espace V_{0h} , défini par (3.4.8), qu'est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie égale au nombre de degrés de liberté intérieurs (on se compte pas les noeuds sur le bord $\partial\Omega$).*

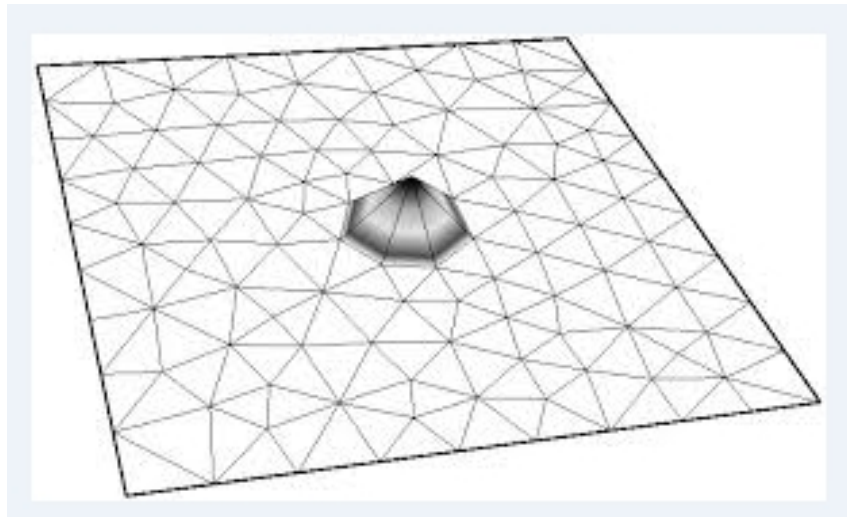


Figure 3.7: Fonction de base \mathbb{P}_1 en dimension $N = 2$.

Convergence et estimation d'erreur

Nous introduisons dans cette section la convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k pour le problème (3.1.1).

Définition 3.4.6 *Pour tout N -simplexe non dégénéré K de \mathbb{R}^N on définit :*

1. Le **diamètre** de K par

$$\text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|.$$

2. La **rondeur** $\rho(K)$ qui désigne le diamètre du plus grande boule contenue dans K par

$$\rho(K) = \max_{B_r \in K} (2r).$$

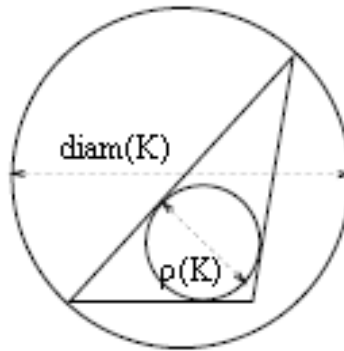


Figure 3.8: Diamètre et rondeur d'un triangle K .

Définition 3.4.7 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω . On dit qu'il s'agit d'une suite de **maillages réguliers** si :

1. La suite $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K_i)$ tend vers zéro.
2. Il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C. \quad (3.4.10)$$

Définition 3.4.8 Pour toute fonction continue v , on définit son **interpolée** par :

$$r_h v(x) = \sum_{i=1}^{N_{dl}} v(\hat{a}_i) \varphi_i$$

où N_{dl} est le nombre de degrés de liberté et les φ_i sont les fonctions de base de V_h données par le lemme 3.4.1.

Proposition 3.4.2 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω . On suppose que $k+1 > \frac{N}{2}$. Alors, pour tout $v \in H^{k+1}(\Omega)$ l'interpolée $r_h v$ est bien définie, et il existe une constante C indépendante de h et de v , telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (3.4.11)$$

Pour la démonstration de cette proposition, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.3 (voir [1], page 193) On suppose que $k+1 > \frac{N}{2}$ et que $\text{diam}(K) \leq 1$. Il existe une constante C indépendante de K telle que, pour tout $v \in H^{k+1}(K)$ on a

$$\|v - r_K v\|_{H^1(K)} \leq C \frac{(\text{diam}(K))^{k+1}}{\rho(K)} |v|_{H^{k+1}(K)} \quad (3.4.12)$$

où $|v|_{H^{k+1}(K)}$ est la semi-norme définie par

$$|v|_{H^{k+1}(K)}^2 = \sum_{|\alpha|=k+1} \int_K |\partial^\alpha v|^2 dx = \|v\|_{H^{k+1}(K)}^2 - \|v\|_{H^k(K)}^2.$$

Preuve. De la proposition 3.4.2.

On a, si $v \in H^{k+1}(\Omega)$, son interpolée $r_h v$ restreinte au N -simplexe K est simplement $r_K v$. Par conséquent,

$$\|v - r_h v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \|v - r_{K_i} v\|_{H^1(K_i)}^2$$

En utilisant la majoration (3.4.12) à chaque maille K_i et comme le maillage est régulier l'inégalité (3.4.10) permet de majorer le rapport $\text{diam}(K_i)/\rho(K_i)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \|v - r_h v\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq Ch^{2k} \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^{k+1}(K_i)}^2 \\ &\leq Ch^{2k} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

ce qu'il faut démontrer. ■

Théorème 3.4.1 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages régulier de Ω . Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, la solution du problème de Dirichlet (3.1.1), et $u_h \in V_{0h}$, celle de son approximation interne(2.2.2) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k . Alors la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k converge, c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0. \quad (3.4.13)$$

De plus, si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et si $k+1 > \frac{N}{2}$, alors on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k |u|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (3.4.14)$$

où C est une constante indépendante de h et de u .

Preuve. On applique le lemme 2.2.3 avec $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)$ qui est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^{k+1}$, l'estimation (3.4.11) de la proposition 3.4.2 permet de vérifier l'hypothèse (2.2.5) du lemme 2.2.3 ce qui donne (3.4.13). L'estimation d'erreur (3.4.14) s'obtient à partir du lemme de Céa 2.2.2

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En appliquant ensuite l'estimation de la proposition 6.3.16, à u , on obtient l'estimation (3.4.14) c'est-à-dire

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k |u|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

■

3.5 Résolution du problème modèle par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k

3.5.1 Présentation du problème

Considérons la formulation variationnelle du problème de Dirichlet homogène sur Ω .

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.5.1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On approche (3.5.1) par la suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_{0h} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (3.5.2)$$

on décompose u_h sur la base des $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_{dl}}$ et on prend $v_h = \varphi_i$ ce qui donne

$$\sum_{j=1}^{N_{dl}} u_h(\hat{a}_j) \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi_i dx$$

où les \hat{a}_j sont les noeuds de degrés de liberté intérieurs (non sur le bord).

D'où

- le vecteur inconnu est :

$$u_h = \left(u_h(\hat{a}_j) \right)_{1 \leq j \leq N_{dl}}. \quad (3.5.3)$$

- Le second membre est :

$$b_h = \int_{\Omega} f \varphi_i dx, \text{ avec } 1 \leq i \leq N_{dl}. \quad (3.5.4)$$

- La matrice de rigidité est :

$$A_h = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx, \text{ avec } 1 \leq i, j \leq N_{dl}. \quad (3.5.5)$$

La formulation variationnelle dans V_{0h} revient à résoudre dans $\mathbb{R}^{N_{dl}}$ le système linéaire

$$A_h \cdot u_h = b_h.$$

En générale, l'intersection des supports de φ_j et φ_i est vide et la plupart des coefficients de A_h sont nuls. Dans ce cas, on dit que la matrice A_h est **creuse**.

3.5.2 Calcul du second membre

Le second membre est le vecteur $b_h \in \mathbb{R}^N$ de coefficients

$$(b_h)_{1 \leq i \leq N} = \int_{\Omega} f \varphi_i dx = \sum_{K_i \in \mathcal{T}_h} \int_{K_i} f \varphi_i dx.$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est le terme source et les φ_i sont les fonctions de base de V_h . Pour calculer le second membre b_h , on utilise des formules de quadrature qui donne une approximation des intégrales sur chaque N -simplexe $K_i \in \mathcal{T}_h$. Par exemple, si K est un N -simplexe de sommets $(a_i)_{1 \leq i \leq N+1}$, les formules suivantes généralisent les formules en dimension un, dites du "**point milieu**" et des "**trapèzes**"

$$\int_K \psi(x) dx \approx \text{volume}(K)\psi(a_0) \quad (3.5.6)$$

avec $a_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} a_i$, le barycentre de K , et

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{\text{volume}(K)}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \psi(a_i). \quad (3.5.7)$$

Ces deux formules sont exacte pour $\psi \in \mathbb{P}_1$ et sont donc approchées à l'ordre deux en h pour des fonctions régulières.

3.5.3 Assemblage de la matrice de rigidité

D'après (3.5.5), la matrice de rigidité $A_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a pour coefficients :

$$(A_h)_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx \quad \forall i, j = \overline{1, N}.$$

Pour calculer ces coefficients, il est nécessaire de pouvoir déterminer les fonctions de base φ_i . Celle-ci dépendant du maillage considéré.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons rappelé quelques connaissances de base sur l'analyse fonctionnelle, pour aboutir à la fin à étudier la MEF (**méthode des éléments finis**), où l'idée consiste à remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posé le problème variationnel par un sous-espace V_h de dimension finie. Le problème approché posé sur V_h , se ramène donc à la résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée **matrice de rigidité**. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce qu'il soit une bonne approximation de V et que la solution u_h dans V_h du problème discrétisé soit "proche" de la solution exacte u dans V .

Bibliographie

- [1] **G. ALLAIRE**, *Analyse numérique et optimisation, une introduction à la modélisation mathématique et à la solution numérique*, Les éditions de l'école polytechnique. Paris, 2012.
- [2] **H. BRÉZIS**, *Analyse fonctionnel, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [3] **S. C. BRENNER** et **L. RIDGWAY SCOTT**, *The mathematical theory of finite element methods*, 3th edition, Springer, 2008.
- [4] **A. ERN**, *Aide-mémoire, Eléments finis*, Dunod, Paris, 2005.
- [5] **J. M. GILSINGER** et **M. JAÏ**, *Eléments d'analyse fonctionnelle, Fondements et applications aux sciences de l'ingénieur*, Presse Polytechnique et Universitaires Romandes, 2010.
- [6] **F. JEDRZEJEWSKI**, *Introduction aux méthodes numériques* 2^{ème} édition, Spinger-Verlag France, Paris, 2005.
- [7] **B. LUCQUIN**, *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations*, Ellipses, 2004.
- [8] **B. MOHAMADI** et **J.H. SAÏAC**, *Pratique de la simulation numérique*, Dunod, Paris, 2003.
- [9] **J. RAPPAZ** et **M. PICASSO**, *Introduction à l'analyse numérique*, Presses Polytechnique et Universitaires Romandes, 1998.

- [10] **J. E. RAKOTOSON** et **J. M. RAKOTOSON**, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, 1^{ère} édition, Presses universitaires de France, 1999.
- [11] **P. A. RAVIART** et **J. M. THOMAS**. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983.