

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

GOUDJIL KRIMOU & MEGRI NASSIM

THEME

Applications du théorème des résidus et
transformation conforme

Soutenu le : 29/06/2016 devant le jury composé de:

<i>Mme</i>	H. BECHIR	<i>Enseignante</i>	U.de Béjaia	Présidente
<i>Mr.</i>	F. BOUHMILA	<i>Enseignante</i>	U.de Béjaia	Rapporteur
<i>Mme.</i>	L. BAICHE	<i>Enseignante</i>	U.de Béjaia	Examinatrice
<i>Mr</i>	N. BOUDRAHAM	<i>Enseignante</i>	U.de Béjaia	Examineur

Remerciements

Nous voudrions sincèrement exprimer nos plus vifs remerciements à notre promoteur Monsieur **F. BOUHMILA** pour l'intéressant sujet qu'il nous a proposé.

Sa disponibilité alliée à sa gentillesse naturelle et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. Nous lui devons toute notre reconnaissance pour nous avoir inculqués les valeurs de responsabilité et humaine afin de transmettre les mathématiques aux futurs générations dans le domaine l'enseignement.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements les plus vifs à Mesdames **H. BECHIR** et à **L. BAÏCHE** et à Monsieur **N. BOUDRAHEM**, Enseignants à l'Université A-Mira, pour nous avoir fait l'honneur d'être le jury de cette soutenance.

Merci à tous les membres de la faculté des sciences exactes en général et aux membres du département de mathématiques.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier ceux qui nous ont aidé d'une manière ou d'une autre à élaborer ce modeste travail.

Dédicaces

A mes chers parents, frères et sœurs, et à toute ma famille.

A mon ami Nassim avec qui j'ai partagé des moments de plaisir et de souffrance pour parfaire ce travail, et ainsi à tous mes amis.

A toutes personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, pour la réalisation de ce travail.

GOUDJIL Krimou

Dédicaces

A mes chers parents qui ont subis au long de mes études.

A mes chères sœurs qui ont été toujours à côté de moi.

A mon cher ami Krimou avec qui j'ai partagé des moments de plaisir et de souffrance pour parfaire ce travail.

A mes meilleurs ami(e)s : Mounir, Sonia, Fares, Malek et beaucoup d'autre.

A toute ma famille.

A toutes personnes qui mon aidé, de près ou de loin, pour la réalisation de ce travail.

MEGRI Nassim

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	2
1 Variable complexe	3
1.1 Rappels généraux sur les nombres complexes	3
1.1.1 Topologie générale sur le plan complexe	5
1.2 Limites et continuité des fonctions complexes	6
1.2.1 Limites des fonctions complexes	6
1.2.2 Continuité des fonctions complexes	6
1.3 Dérivabilité d'une fonction complexe	6
1.3.1 Dérivée	6
1.3.2 Fonctions holomorphes	7
1.4 Séries entières	7
1.4.1 Séries entières	7
1.4.2 Rayon de convergence	8
1.5 Fonctions élémentaires	9
1.6 Condition de Cauchy-Riemann	10
1.7 Intégration complexe	14
1.7.1 Les chemins et les courbes dans un plan complexe	14
1.7.2 Chemins de classe C^1	14
1.7.3 Intégration le long d'une courbe	14
1.7.4 Intégrale curviligne complexe	16

1.7.5	Formule intégrale de Cauchy	19
2	Le théorème des résidus (Applications au calcul d'intégrales réelles et au calculs de séries numériques)	21
2.1	Séries de Taylor	22
2.1.1	Théorème de Taylor	22
2.2	Séries de Laurent	23
2.2.1	Théorème de Laurent	23
2.3	L'unicité de développement en série	25
2.4	Résidus	28
2.4.1	Définition des points singuliers	28
2.4.2	Exemples de points singuliers	29
2.4.3	Définition des résidus	29
2.4.4	Calcul des résidus	30
2.4.5	Théorème des résidus	30
2.4.6	Applications au calcul d'intégrales réelles	32
2.4.7	Application au calcul de séries numériques	40
3	Les transformations conformes	45
3.1	Transformations conformes	45
3.2	Les transformations de Möbius	51
3.3	Théorème de l'application conforme de Riemann	55
3.4	Transformation de Joukowski	62
3.5	La transformation de Schwarz-Christoffel	64
	Conclusion	68
	Bibliographie	69

Introduction

Les nombres complexes forment une extension de l'ensemble des nombres réels. Ils permettent notamment de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels. Les nombres complexes furent introduits au 16^{ème} siècle par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli, Nicolo Fontana, et Ludovico Ferrari afin d'exprimer les solutions des équations du troisième degré en toute généralité par les formules de Cardan, en utilisant notamment des nombres de carré négatif, ainsi que les solutions des équations du quatrième degré (méthode de Ferrari).

L'ensemble des sommes et produits de nombres réels et du nombre imaginaire i (les nombres de la forme $x+iy$) satisfait les propriétés d'une structure de corps commutatif qui contient le corps des réels. Il est appelé corps des nombres complexes et on le note \mathbb{C} . Il est muni de l'application module qui généralise la valeur absolue des nombres réels mais ne peut pas être ordonné totalement de façon compatible avec sa structure de corps.

Ce n'est qu'à partir du 19^{ème} siècle que se développe l'aspect géométrique des nombres complexes, vus comme des éléments ou des transformations du plan, sous l'impulsion de Jean-Robert Argand (plan d'Argand), puis avec les travaux de Gauss et de Cauchy.

L'analyse réelle, c'est à l'origine l'étude des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et surtout des fonctions régulières : continues, dérivables, intégrables, de classe C^1 , C^∞ etc. En analyse complexe, nous allons étudier les fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , continues, mais surtout dérivables.

Pour une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , on emploie le terme holomorphe plutôt que dérivable.

Les premiers exemples de fonctions de la variable complexe sont des fonctions polynômiales à coefficients complexes, et plus généralement les sommes de séries entières conver-

gentes à coefficients complexes. Réciproquement, nous verrons qu'une fonction f est holomorphe en un point z_0 de \mathbb{C} si et seulement si f est développable en série entière sur un voisinage de ce point.

Le but de ce mémoire est de mettre à jour les propriétés des fonctions holomorphes. Plus spécifiquement:

1. De se familiariser avec la notion d'holomorphie : Définition de la notion d'holomorphie se traduisant par les conditions de Cauchy-Riemann.
2. Définir les séries entières : rayon de convergence, étude sur le cercle de convergence. . .
3. D'être capable de développer une fonction holomorphe en une série entière.
4. Calculer les résidus.
5. Calculer certaines intégrales et somme de série par la méthode des résidus : outil puissant pour le calcul de certaines intégrales et sommes.
6. De noter la relation entre l'holomorphie et les applications conformes : si on transforme par une fonction holomorphe de dérivée non nulle deux courbes se coupant en faisant un angle orienté, les courbes images font entre elles le même angle orienté.

Ce mémoire consiste trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous nous sommes intéressés aux variables complexes et leurs propriétés fondamentales.

Le deuxième chapitre est consacré au théorème des résidus et ses applications au calcul d'intégrales réelles et calcul de séries numériques.

Dans le troisième chapitre, on a étudié la notion de transformation conforme et quelques transformations conformes élémentaires.

et on termine par une conclusion et quelques perspectives de recherche.

1.1 Rappels généraux sur les nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$ des entiers naturels est fermé sous les lois de l'addition $m + n$ et la multiplication $m.n$.

Et pour pouvoir résoudre pour x toute équation du type: $x + m = n$, où $m, n \in \mathbb{N}$, il faut passer aux entiers relatifs $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.

Et pour résoudre pour x toute équation de la forme: $px + q = 0$, pour $p, q \in \mathbb{Z}$, il faut passer aux nombres rationnels $\mathbb{Q} = q/p$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$, et $p \neq 0$.

Ce dernier système est formé de quatre opérations de l'arithmétique mais on ne peut pas résoudre pour x toute équation du type: $x^2 + c = 0$, où $c \in \mathbb{Q}$.

Les nombres réels \mathbb{R} permettent de résoudre certaines de ces équations mais pas toutes. Ils forment un système fermé sous les quatre opérations arithmétique qui est de plus complet au sens où toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait la condition de Cauchy

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (x_m - x_n) = 0$$

qui est convergente mais on ne peut par exemple obtenir une solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans \mathbb{R} .

Il faut pour cela construire l'espace des nombres complexes \mathbb{C} . Cet ensemble s'écrit sous la forme

$$\mathbb{C} = \{x + iy, \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

où i l'imaginaire pur, muni de la loi d'addition

$$(x + iy) + (x_0 + iy_0) = (x + x_0) + i(y + y_0)$$

et la loi de multiplication

$$(x + iy)(x_0 + iy_0) = xx_0 - yy_0 + i(yx_0 + xy_0) \quad (1.1.1)$$

Cet ensemble forme un corps commutatif.

En particulier tout élément non nul de \mathbb{C} , possède un inverse donné par

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad (1.1.2)$$

De (1.1.1) on déduit l'identité

$$i^2 = -1$$

D'un point de vue géométrique, le plan euclidien \mathbb{R}^2 peut être identifié au plan complexe \mathbb{C} en faisant correspondre à tout point (ou vecteur) de coordonnées $(x; y)$ son affixe $z = x + iy$. On dit aussi que $z = x + iy$ est un point du plan complexe, et son complexe conjugué est noté $\bar{z} = x - iy$.

La norme euclidienne de \mathbb{R}^2 s'identifie au module complexe

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et ces notions permettent de réécrire (1.1.2) sous forme

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

1.1.1 Topologie générale sur le plan complexe

Définition 1.1.1 Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ une partie non vide.

1. On dira que la partie D est un domaine s'il est ouvert et connexe.
2. On dira que la partie D est convexe si: $\forall z_1, z_2 \in D, \forall t \in [0, 1] : (1-t)z_1 + tz_2 \in D$.
3. On dira que la partie D est étoilée s'il existe un point $z_0 \in D$ tel que pour tout $z \in D$ le segment $[z_0, z] \subseteq D$.

Remarque 1.1.1 toute partie convexe est étoilée, et l'intérieur de toute partie étoilée est un domaine (ouvert et connexe).

Définition 1.1.2 Soient $z_0 \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}_+^*$,

- 1) Pour une boule ouverte de centre z_0 et de rayon R est donné par

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

- 2) Pour une boule fermée de centre z_0 et de rayon R est donné par

$$\overline{B}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Remarque 1.1.2 Dans le plan complexe, une boule a la forme d'un disque. On emploie donc souvent le terme disque (ouvert ou fermé) de centre z_0 et de rayon R lorsque l'on fait de la topologie dans \mathbb{C} .

Proposition 1.1.1 a) Un ouvert de \mathbb{C} est une réunion de boules ouvertes de \mathbb{C} .

b) le corps \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension deux. Le module d'un nombre complexe $|x + iy|$ est défini par $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) Dans \mathbb{C} toutes les normes sont équivalentes, et elles définissent la même topologie que le module.

d) \mathbb{C} est complet : toute suite de Cauchy à valeurs complexes converge dans \mathbb{C} .

- e) Un fermé de \mathbb{C} est le complémentaire d'un ouvert de \mathbb{C} .
- f) On appelle voisinage d'un point z_0 un disque ouvert quelconque de centre z_0 .
- g) Adhérence et intérieur d'une partie A de \mathbb{C} :
- 1) \bar{A} est l'intersection de tous les fermés de \mathbb{C} contenant A .
 - 2) $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts de \mathbb{C} inclus dans A .

1.2 Limites et continuité des fonctions complexes

1.2.1 Limites des fonctions complexes

Définition 1.2.1 On dit que f admet une limite l quand $|z|$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |z| > \eta \implies |f(z) - l| < \varepsilon.$$

1.2.2 Continuité des fonctions complexes

Définition 1.2.2 soit

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\rightarrow f(z) \end{aligned}$$

On dit que f est continue en $z_0 \in D$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon, z_0)$ tel que

$$|z - z_0| < \eta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

1.3 Dérivabilité d'une fonction complexe

1.3.1 Dérivée

Définition 1.3.1 Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que la fonction f admet une dérivée au point z_0 si le nombre complexe $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$ tend vers une limite finie lorsque z tend vers z_0 .

Autrement dit, cela veut dire qu'il existe un nombre complexe, noté $f'(z_0)$, et appelé la dérivée de f en z_0 tel que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \text{ tend vers } 0.$$

1.3.2 Fonctions holomorphes

Définition 1.3.2 Une fonction f est dite holomorphe en un point si elle est holomorphe dans un disque ouvert centré en ce point, et est dite holomorphe dans un domaine D si elle est dérivable en chaque point de D

Proposition 1.3.1 Soient $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$

- 1) Si f est holomorphe en z_0 , alors f est continue en z_0 .
- 2) Si f, g deux holomorphes en z_0 , alors on a

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(z_0) \text{ pour } g(z_0) \neq 0.$$

- 3) Si g holomorphe en z_0 , et si f holomorphe en $g(z_0)$, alors

$$f \circ g : D \rightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe en z_0 , de plus

$$(f \circ g)'(z_0) = g'(z_0)f'(g(z_0)).$$

1.4 Séries entières

1.4.1 Séries entières

Définition 1.4.1 On appelle série entière de la variable complexe toute série de fonction de la forme

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On note

$$S = \sum a_n z^n.$$

1.4.2 Rayon de convergence

Définition 1.4.2 On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum (a_n z^n)$ la quantité définie par

$$\rho = \sup \{R \in [0, +\infty[: \text{la série entière } (\lvert a_n \rvert R^n) \text{ converge}\}.$$

Théorème 1.4.1 soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \lvert z \rvert < R$$

alors f est holomorphe dans le disque $D(0; R)$ et on ait

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad \lvert z \rvert < R.$$

Preuve. Le rayon de convergence de $f'(z)$ est le même que celui de $f(z)$. En particulier, si on pose

$$\xi(r) = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)^2 \lvert a_k \rvert r^{k-2} < \infty \quad \forall r \in]0, R[$$

Alors, à l'aide de l'identité

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + b^{k-1})$$

On trouve pour tout $z; z_0 \in D(0; r)$

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z_0^{k-1} &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\frac{z^k - z_0^{k-1}}{z - z_0} - k z_0^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\sum_{p=0}^{k-1} z^{k-1-p} z_0^p - k z_0^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\sum_{p=0}^{k-2} (z^{k-1-p} - z_0^{k-1-p}) z_0^p \right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\sum_{p=0}^{k-2} (z - z_0) \left(\sum_{q=0}^{k-2-p} z^{k-2-p-q} - z_0^q \right) z_0^p \right) \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| &\leq \lvert z - z_0 \rvert \sum_{k=2}^{+\infty} \lvert a_k \rvert \left(\sum_{p=0}^{k-2} \left(\sum_{q=0}^{k-2-p} r^{k-2} \right) \right) \\ &\leq \lvert z - z_0 \rvert \xi(r). \end{aligned}$$

■

1.5 Fonctions élémentaires

Dans tout ce qui suit, $z \in \mathbb{C}$.

Les fonctions e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$ et $\sinh z$ sont liées entre elles dans le plan complexe à l'aide de leur série de Taylor à l'origine.

$$1. e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$2. \cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$3. \sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$4. \cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$5. \sinh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Proposition 1.5.1 *Les fonctions citées ci-dessus sont liées par les relations suivantes*

$$(1) \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz$$

$$(2) \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{i} \sinh iz = -i \sinh iz$$

$$(3) e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(4) Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

(5) Formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

(6) Forme polaire d'un nombre complexe

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} = |z| e^{i \arg z} \\ z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{cases}$$

Propriétés:

1. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2. $e^z \neq 0$
3. $|e^{iy}| = 1$
4. $|e^z| = e^x$
5. $e^z = 1$ si et seulement si $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{N}$
6. $e^z = -1$ si et seulement si $z = (2n+1)\pi i$, $n \in \mathbb{N}$
7. $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $z_1 - z_2 = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{N}$
8. $\frac{de^z}{dz} = e^z$

1.6 Condition de Cauchy-Riemann

Proposition 1.6.1 *Soit U un ouvert du plan complexe \mathbb{C} .*

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

Où

$$P(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy).$$

$$Q(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Si f est holomorphe dans U , alors elle vérifie la condition de Cauchy-Riemann suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Preuve. Soit f une fonction dérivable au point z_0 .

Pour démontrer la relation de Cauchy-Riemann, on va considérer deux directions différentes pour aller vers z_0 en suivant l'axe des réels et l'axe des imaginaires et on va utiliser le fait que la limite de

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

en z_0 est la même suivant la direction des réelles ou la directions des imaginaire.

Premièrement en suivant l'axe réel, alors

$$\Delta y = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x_0 + \Delta x, y_0) - Q(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Deuxième direction en suivant l'axe imaginaire, alors

$$\Delta x = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0)}{\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{Q(x_0, y_0 + \Delta y) - Q(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Par identification on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

■

Proposition 1.6.2 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$f(x + iy) = P(x; y) + iQ(x; y)$$

Si f est différentiable sur U et vérifie la condition de Cauchy-Riemann, alors f est holomorphe dans U .

Exemple 1.6.1 Soit $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ avec $z = x + iy$

$$\text{On pose } \begin{cases} P(x, y) = \sin x \cosh y \\ Q(x, y) = \cos x \sinh y \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \cos x \cosh y \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \cos x \cosh y \end{cases} \implies \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$$

$$\text{Et } \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = \sin x \sinh y \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\sin x \sinh y \end{cases} \implies \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

f est différentiable et vérifie les équations de Cauchy.

Donc est holomorphe.

Proposition 1.6.3 En coordonnées polaires, les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} \end{cases}$$

Preuve. La relation entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées polaires (r, θ) est donné par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{ce qui nous donne } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

Dérivons ces relations on trouve

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Les dérivées partielles de P et Q s'obtiennent alors par

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann, s'écrivent alors

$$\cos \theta \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

$$\sin \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\cos \theta \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

Multiplions la première par $\cos \theta$, la seconde par $\sin \theta$ et additionnons, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

Multiplions la première par $\sin \theta$, la seconde par $-\cos \theta$ et additionnons, on obtient

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial r}$$

■

1.7 Intégration complexe

1.7.1 Les chemins et les courbes dans un plan complexe

Définition 1.7.1 Un chemin dans \mathbb{C} est une application continue $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, où a et b sont des réels tels que $a < b$.

Le point $\gamma(a)$ s'appelle l'origine de γ et le point $\gamma(b)$, son extrémité.

Définition 1.7.2 On dit que le chemin γ est un lacet, ou est fermé, si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

1.7.2 Chemins de classe C^1

Définition 1.7.3 S'il existe des nombres réels $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ tels que pour tout $k = 1, \dots, n - 1$, alors on dit que γ est de classe C^1 sur l'intervalle $]c_k, c_{k+1}[$.

Si la restriction de l'application $\gamma(t)$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ est injective on dira que le chemin γ est simple ou qu'il est sans points doubles.

Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de Jordan.

Exemple 1.7.1 1. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par : $\gamma(t) = (3t - 1, 5t + 2)$.

2. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par : $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 + \sin t)$.

Dans la suite, on considérera uniquement des chemins de classe C^1 par morceaux.

1.7.3 Intégration le long d'une courbe

Définition 1.7.4 La forme la plus simple de l'intégrale complexe donnée par l'expression suivante

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^b (P(t) + iQ(t)) dt \\ &= \int_a^b P(t)dt + i \int_a^b Q(t)dt \end{aligned}$$

où P et Q sont des fonctions réelles continues et bornées. Dans cette formule le nombre i est considéré comme une constante dans une intégrale réelle. La variable t est

un paramètre réel. Toutes les propriétés des intégrales réelles peuvent donc s'appliquer à cette intégrale.

Exemple 1.7.2

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{it} dt &= \int_a^b (\cos t + i \sin t) dt \\ &= [\sin t - i \cos t]_a^b \\ &= e^{ia} - e^{ib}\end{aligned}$$

On étend la définition donnée en définition (1.7.4) aux intégrales de fonctions le long de courbes dans le plan complexe.

Proposition 1.7.1 Soit f une fonction continue définie sur un sous-ensemble D du plan complexe et soit γ un contour contenu dans D donné par

$z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, on définit l'intégrale de f selon γ par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

Sur la courbe, $f(z)$ devient $f(z(t))$ et dz devient $z'(t)dt$.

et on calcule l'intégrale complexe en termes de l'intégrale réelle.

Remarque 1.7.1 Si la courbe est fermée, alors on note

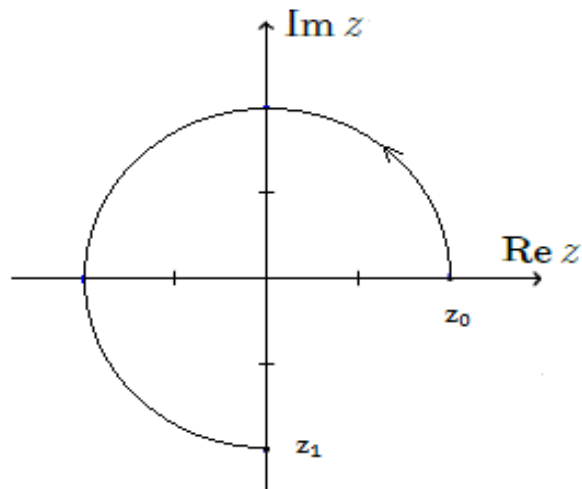
$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

Au lieu de

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Exemple 1.7.3 Soit $\gamma = \{z(t) \in \mathbb{C} : z(t) = 2e^{it}, \text{ avec } 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\}$,

Calculons l'intégrale $\int_{\gamma} z^2 dz$



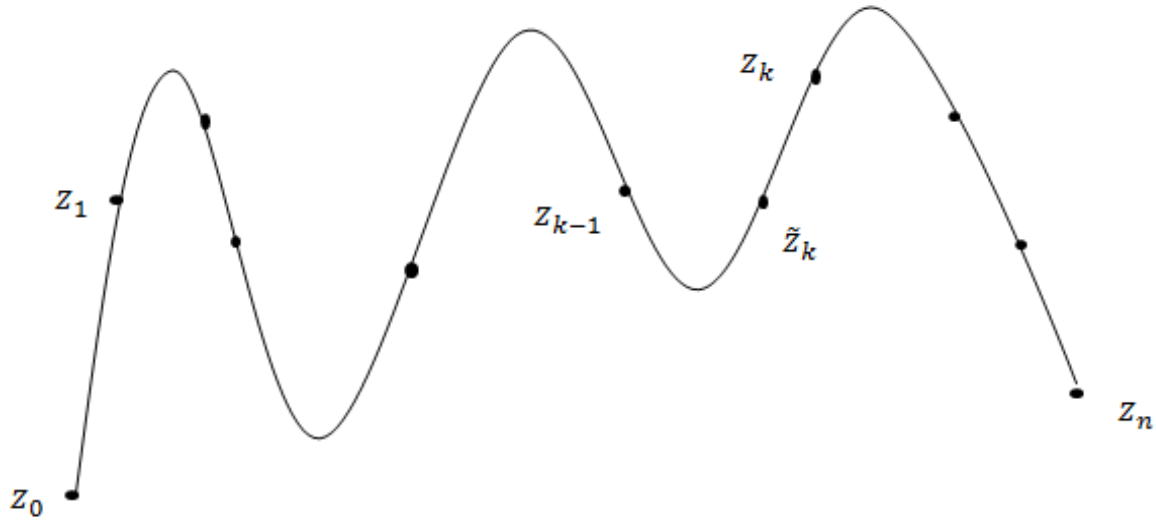
On a : $z(t) = 2e^{it} \implies dz = z'(t)dt = 2ie^{it}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (2e^{it})^2 2ie^{it} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it} dt \\ &= \frac{8}{3}(1 - i). \end{aligned}$$

1.7.4 Intégrale curviligne complexe

Pour avoir une vue plus profonde, il est intéressant de présenter l'intégrale complexe à la façon de Riemann.

Soit un arc γ rectifiable, partageons l'arc γ en sous-arcs par les points $a = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = b$ et prenons \tilde{z}_k sur γ entre z_{k-1} et z_k comme on le voit sur la figure suivante



La courbe γ est représentée par $z = z(t)$, avec $a \leq t \leq b$.

Et : $z_0 = z(t_0), \dots, z_k = z(t_k), \tilde{z}_k = z(\tilde{t}_k), t_{k-1} \leq \tilde{t}_k \leq t_k, \dots, z_n = z(t_n)$.

Formons les produits $f(\tilde{z}_k)\Delta z_k$, où f est une fonction continue bornée sur γ et $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Formons aussi la somme $\sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k)\Delta z_k = S_n$.

Supposons qu'il existe une constante ℓ , tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(\varepsilon) > 0$ tel que $|S_n - \ell| < \varepsilon$ pourvu que $|\Delta z_k| < \varepsilon$ pour tout k .

Alors nous disons que $f(z)$ est intégrable sur γ et nous écrivons

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \ell$$

et cette intégrale est appelée, intégrale curviligne de f le long de γ .

En modifiant un peu la présentation précédente, on peut aussi écrire

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k)\Delta z_k$$

Proposition 1.7.2 *L'intégrale curviligne complexe peut être exprimée de la façon suivante*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (Pdx - Qdy) + i \int_{\gamma} (Qdx + Pdy).$$

Preuve. En posant $f(z) = P(z) + iQ(z)$, on aura

$$\sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n \left(P(\tilde{z}_k) + iQ(\tilde{z}_k) \right) (\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

D'où:

$$\sum_{k=1}^n f(\tilde{z}_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n \left(P(\tilde{z}_k) \Delta x_k - Q(\tilde{z}_k) \Delta y_k \right) + i \left(Q(\tilde{z}_k) \Delta x_k + P(\tilde{z}_k) \Delta y_k \right)$$

Admettant que les limites existent dans le membre de droite, on obtient des intégrales en ligne et alors:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (P dx - Q dy) + i \int_{\gamma} (Q dx + P dy).$$

■

Propriétés des intégrales

1. $\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz.$
2. $\int_{\gamma} k f(z) dz = k \int_{\gamma} f(z) dz$ où k est une constante quelconque.
3. $\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz.$

Où $\gamma_1 + \gamma_2$ indique simplement la somme de deux parcours. Cette propriété nous permet de calculer l'intégrale sur un contour sur lequel la fonction pourrait être discontinue en un nombre fini de points.

4. $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\bar{\gamma}} f(z) dz$

$\bar{\gamma}$ représente le contour parcouru dans la direction inverse de celle que nous avons choisi pour γ .

Preuve. (pour la propriété 4)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt \\ &= - \int_b^a f(z(t)) \cdot z'(t) dt \\ &= - \int_{\bar{\gamma}} f(z) dz \end{aligned}$$

■

Théorème 1.7.1 Soit F une fonction analytique avec une dérivée continue et posons $f(z) = F'(z)$ dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$.

Prenons un contour γ dans D avec un point initial z_1 et un point final z_2 .

Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_{\gamma} F'(z(t)) \cdot z'(t) dt \\ &= [F(z(t))]_a^b = F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

■

1.7.5 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 1.7.2 Si f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple γ et sur γ .

soit w un point intérieur à γ , alors

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

où la courbe γ est décrit dans le sens positif.

De même la n -ième dérivée de f en w est donnée par:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

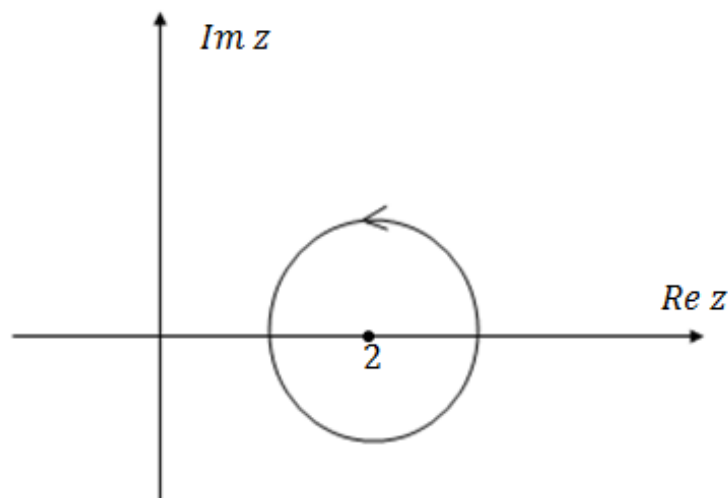
Remarques 1.7.2 1. Les deux formules précédentes sont appelées formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple γ , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de γ .

2. Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D , toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D . Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 1.7.4 Utilisons la formule intégrale de Cauchy pour évaluer

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz$$

le long du cercle : $\gamma = \{z(t) \in \mathbb{C}, z(t) = 2 + e^{it} \text{ où: } 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$



La fonction $z \rightarrow f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle γ et sur γ , et $w = 2$ est à l'intérieur de γ .

D'après la formule intégrale de Cauchy avec $w = 2$, on a

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = \frac{2}{3}\pi i$$

Le théorème des résidus (Applications au calcul d'intégrales réelles et au calculs de séries numériques)

Le développement des fonctions en séries présentent un intérêt théorique, et aussi un intérêt pratique. Par exemple, à l'aide de séries, on peut donner une écriture approximative pour les fonctions. En outre, il existe de nombreux problèmes qu'on peut résoudre à l'aide du théorème des résidus (calcul d'intégrale réelles, calcul de somme de séries numériques, résolution des équations différentielles, etc....), dont la solution peut être trouvée sous la forme d'une série ou sous la forme d'une constante.

2.1 Séries de Taylor

2.1.1 Théorème de Taylor

La formule de Taylor connue dans l'analyse réelle peut être étendue aux fonctions d'une variable complexe.

Théorème 2.1.1 Si f est une fonction analytique à l'intérieur d'un cercle C de centre a et de rayon R , on a pour chaque point z intérieur à C .

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (2.1.1)$$

Remarque 2.1.1 La série de puissances (2.1.1) converge donc vers $f(z)$ lorsque $|z-a| < R$.

Autrement dit, chaque fonction analytique dans le cercle $|z-a| < R$ peut être représentée dans ce cercle par sa série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Proposition 2.1.1 Les coefficients de la série de Taylor sont donnés par la formule

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Où C est un contour fermé simple contenant le point a et intérieur au cercle $|z-a| = R$.

Exemple 2.1.1 La fonction $f(z) = e^z$ est analytique dans tout le plan complexe.

Elle a donc une représentation en série de Taylor autour de $z = 0$ valable pour tout z , qui est sous forme

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty.$$

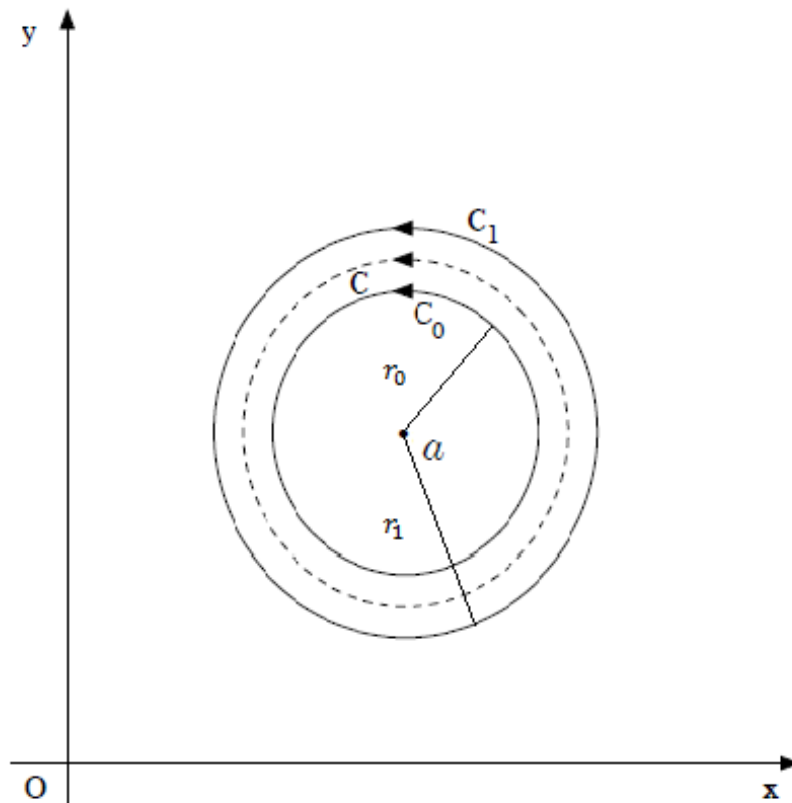
Exemple 2.1.2 La représentation en série de Taylor autour de $z = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{1}{(1-z)}$ est

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

2.2 Séries de Laurent

2.2.1 Théorème de Laurent

Soit deux cercles concentriques C_0 et C_1 , ont le même centre a et de rayons respectifs r_0 et r_1 . On suppose que $f(z)$ est uniforme et analytique sur C_0 et C_1 et également dans la région délimitée par C_0 et C_1 la couronne C comme on le voit sur la figure ci-dessous



Soit $a + h$ un point quelconque de C , on a alors

$$f(a + h) = a_0 + a_1 h + \dots + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \dots$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz & \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \\ a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} (z-a)^{n-1} f(z) dz & \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

C_0 et C_1 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.

Remarque 2.2.1 Nous pouvons dans les intégrations ci-dessus remplacer C_0 et C_1 par tout cercle concentrique C situé entre C_0 et C_1 .

Les coefficients (2.2.1) peuvent alors être écrits au moyen de la formule unique

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{pour } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Proposition 2.2.1 Le développement en série de Laurent de f peut s'écrire sous forme

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots$$

Où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad \text{pour } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

a_n est appelée une série de Laurent ou un développement de Laurent.

La partie $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$ est appelée la partie analytique de la série de Laurent cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $(z-a)$ est appelé la partie principale.

Remarque 2.2.2 Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Exemple 2.2.1 Le développement de Laurent dans \mathbb{C}^* de la fonction

$$f(z) = \sin\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

On a $\forall z \in \mathbb{C}^*$:

$$\sin\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z} - \cos 1 \sin \frac{1}{z}$$

Et comme

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}$$

et

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}$$

D'où on aura

$$f(z) = \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}} - \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}$$

Remarque 2.2.3 Il existe des fonctions holomorphes qui n'admettent pas de développement de Laurent.

Exemple 2.2.2 $f(z) = \log(z)$ n'admet pas de série de Laurent en $z_0 = 0$.

2.3 L'unicité de développement en série

Théorème 2.3.1 Si une série de puissances converge vers une fonction $f(z)$ en tout point intérieur à un cercle C de centre z_0 et de rayon R , que nous notons

$$C(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}.$$

Alors cette série est la série de Taylor de $f(z)$ en puissances de $(z - z_0)$.

Preuve. Nous montrons que le développement en série de puissances d'une fonction analytique est unique.

C'est-à-dire, la série convergente vers une fonction est la série de Taylor de cette fonction.

Considérons

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Les dérivés successive donne:

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= c_1 \\
 f''(z_0) &= 2!c_2 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 f^{(n)}(z_0) &= n!c_n \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned}$$

D'où:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.3.1 Si deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ convergent vers la même fonction $f(z)$ dans un voisinage de z_0 .

Alors les deux séries sont identiques, c'est-à-dire $b_n = c_n$.

Preuve. Résulte du théorème précédent. ■

Proposition 2.3.1 Sur un cercle de centre z_0 et de rayon r .

$$\oint (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{Si } n = -1 \\ 0 & \text{Si } n \neq -1 \end{cases}, \quad n \text{ entier.}$$

Preuve. Soit $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Donc $dz = ire^{i\theta} d\theta$

$$\begin{aligned}
 \oint (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} \cdot ire^{i\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n+1)} d\theta \\
 &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} (\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

Si $n = -1$, alors:

$$\oint (z - z_0)^n dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Si $n \neq -1$, alors:

$$\oint (z - z_0)^n dz = \frac{ir^{n+1}}{n+1} [\sin(n+1)\theta - i \cos(n+1)\theta]_0^{2\pi} = 0$$

■

Remarque 2.3.1 *Le théorème suivant montre que tout développement en série de puissances positives et négatives d'une fonction est nécessairement la série de Laurent de la fonction. Ce théorème est extrêmement utile, puisqu'il permet de trouver le développement en série de Laurent sans calculer les intégrales.*

Théorème 2.3.2 *Soit S une région annulaire de centre z_0 , et soit f une fonction qui a le développement suivant*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Alors les coefficients de cette série sont

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

où γ est un contour simple fermé à l'intérieur de S et contenant le centre z_0 , et que ce développement est la série de Laurent de $f(z)$ en puissances de $(z - z_0)$ pour la région S .

Preuve. Soit S une région limitée par deux cercles concentriques C_1 et C_2 de rayons R_1 et R_2 respectivement tel que $R_1 < R_2$.

Soit γ un contour simple fermé circulaire autour du centre z_0 contenu dans S et de rayon R .

La série est convergente sur γ et on a

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\zeta - z_0)^k$$

D'où

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{n-1} c_k \oint_{\gamma} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta + c_n \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \oint_{\gamma} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta$$

D'après la proposition précédente:

$$\oint (\zeta - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{Si } n = -1 \\ 0 & \text{Si } n \neq -1 \end{cases} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

Donc, on aura

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = c_n \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta = 2\pi i$$

Ainsi

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

■

2.4 Résidus

2.4.1 Définition des points singuliers

Points singuliers

Définition 2.4.1 *Un point a est appelé point singulier d'une fonction f si f n'est pas analytique en a , mais si dans chaque voisinage de a , on peut trouver un point où elle est analytique.*

Points isolés

Définition 2.4.2 *Un point singulier est dit isolé si, de plus, il existe un voisinage de a dans lequel f est analytique (à l'exception de a lui-même).*

Classification des singularités

Définition 2.4.3 *Soit $f : \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur l'ouvert Ω sauf en $a \in \Omega$. Nous dirons alors que f présente en a une singularité :*

- a) **Singularités apparentes** : Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
- b) **Pôles** : Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ existe et finie, alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n .
Si $n = 1$, alors z_0 est appelé un pôle simple.
- c) **Singularités essentielles** : Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

2.4.2 Exemples de points singuliers

1. Soit $f(z) = \frac{\sin z}{z}$,

Puisque $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, alors Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction f .

2. Soit $g(z) = \frac{z+1}{z^2(z^2+1)}$, (possède 4 points singuliers isolés, $z = 0$ et $z = \pm i$.)

La fonction g a un pôle d'ordre deux (pôle double) en $z = 0$ et deux pôles simples en $z = \pm i$.

3. Soit $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$

h a une singularité essentielle en $z = 0$.

2.4.3 Définition des résidus

Soit a est un point singulier isolé de f , la fonction f est représentée par la série de Laurent dans le voisinage $z = a$.

Définition 2.4.4 On appelle résidu de f au point a , noté $\text{Res}(f, a)$, le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f dans un disque épointé $0 < |z - z_0| < R$.

2.4.4 Calcul des résidus

Si : $z = a$ est un pôle d'ordre k , alors nous avons :

$$a_{-1} = \text{Rés}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k f(z) \right] \right\}$$

Exemple 2.4.1 Soit : $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)^2}$

Alors : $z = -1$ est un pôle simple.

Et : $z = 3$ est un pôle double.

Posons : $a_{-1} = \text{Rés}(f, -1)$ et $b_{-1} = \text{Rés}(f, 3)$

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \frac{1}{16}$$

$$b_{-1} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{-1} \frac{d}{dz} (z-3)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{16}$$

2.4.5 Théorème des résidus

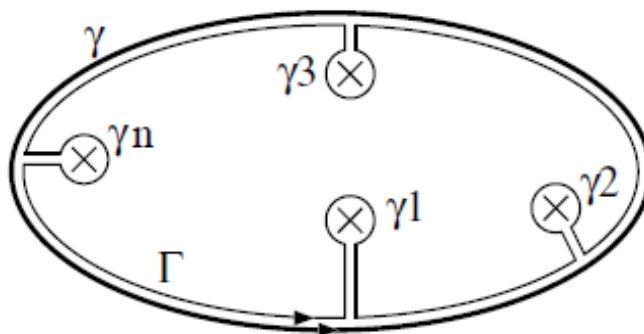
Théorème 2.4.1 Soit Γ un domaine simplement connexe de \mathbb{C} et soit $\{z_1, \dots, z_n\}$ un nombre fini de points de Γ isolés et distincts.

Soit de plus f analytique dans $\Gamma \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$.

Si on prend γ un contour contenu dans Γ et entourant les z_k , $k = 1, \dots, n$, sans rencontrer ces points, et orienté positivement, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés}(f, z_k)$$

Preuve.



$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

Or

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = -2\pi i \text{Rés}(f, z_k)$$

D'où

$$\int_{\gamma} f(z)dz + \sum_{k=1}^n (-2\pi i \text{Rés}(f, z_k)) = 0$$

Donc

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés}(f, z_k).$$

■

Remarques 2.4.1 1. Ce résultat permet de calculer $\int_{\gamma} f(z)dz$ lorsque γ est un chemin fermé qui n'entoure que des singularités isolées de f (en exprimant certaines intégrales "réelles" à partir d'intégrales $\int_{\gamma} dz$ avec γ un chemin fermé). Ce résultat permet également de nombreuses utilisations dans le cadre de l'intégration au sens réel et dans le cadre de la sommation de séries.

2. Le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers du théorème des résidus.

Lemme 2.4.1 (De Jordan)

Soit le γ le demi-cercle du demi-plan supérieur $y > 0$, avec l'axe comme diamètre et R comme rayon.

1. Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, où $z = Re^{i\theta}$ et $k > -1$ et $M < \infty$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} F(z)dz = 0.$$

2. Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, où $z = Re^{i\theta}$ et $k > 0$ et $M > 0$, alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{imz} F(z)dz = 0.$$

2.4.6 Applications au calcul d'intégrales réelles

1) Intégrale du type $I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

avec :

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Où : P et Q sont des polynômes tel que $Q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$

On va poser $z = e^{i\theta}$, ce qui permet d'écrire :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow dz = iz d\theta$$

Soit γ le cercle unité, si on pose :

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{iz} f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz &= \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

D'après le théorème des résidus

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés}(\tilde{f}, z_k)$$

Où z_k sont les singularités de \tilde{f} à l'intérieur du cercle unité γ .

Ainsi

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés}(\tilde{f}, z_k).$$

Exemple 2.4.2 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$

Solution 2.4.1 Dans cet exemple on pose : $P(x, y) = 1$ et $Q(x, y) = 2 + x$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \frac{1}{iz} \left(\frac{1}{2 + \frac{z+1}{2}} \right) = \frac{2}{i(z^2 + 4z + 1)} \\ &= \frac{2}{i(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})} \\ \text{Rés}(\tilde{f}, \sqrt{3} - 2) &= \frac{1}{i\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Et donc on aura :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2) Intégrale du type $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Où $f(x)$ est une fonction rationnelle vérifiant les deux conditions suivantes :

a) f n'a pas de pôle réel.

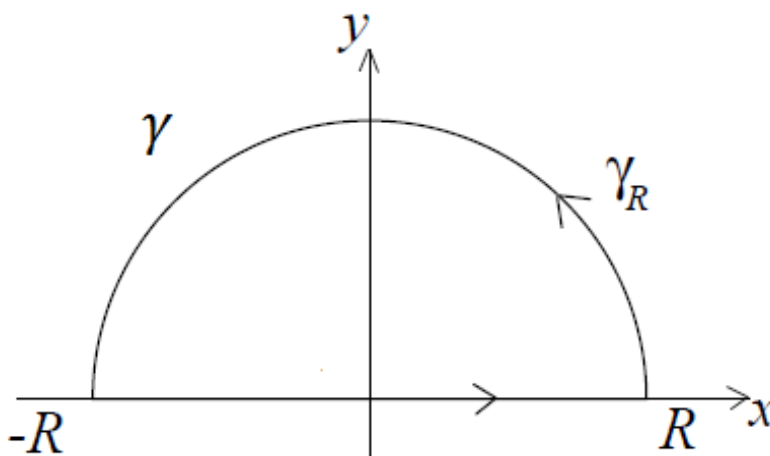
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$.

cette dernière condition permet d'écrire $f(z)$ sous la forme suivante :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où P et Q sont deux polynômes tels que $\deg(Q) > \deg(P)$. Cette condition assure la convergence de l'intégrale, par comparaison à la fonction $\frac{1}{x^2}$.

Etant donné un nombre réel $R > 0$, introduisons le contour γ_R représenté ci-dessous



On supposera que R assez grand pour que tous les pôles de $f(z)$ situés au-dessus de l'axe réel soient à l'intérieur de γ .

Posons

$$I(R) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Le théorème des résidus donne

$$I(R) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés}(f, z_k) \quad (1)$$

où z_1, \dots, z_k sont enfermés par γ . Le contour γ se compose du segment $[-R, R]$ et d'un demi-cercle γ_R en sorte qu'on a :

$$I(R) = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \quad (2)$$

On a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = I$$

Et :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

De (1) et (2) on obtient :

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés}(f, z_k)$$

Lemme 2.4.2 Soit S un secteur angulaire fermé vérifiant la condition

$$\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2, \quad \text{pour tout } z \in S$$

Soit f une fonction complexe continue en tout point de S de module assez grand. On suppose que $zf(z)$ tend vers zéro quand z tend vers l'infini en restant dans S .

Pour tout $R > 0$ on introduit l'arc γ_R défini par

$$\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta z} \quad \text{pour } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

Alors $\int_{\gamma_R} f(z) dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour $R \geq r$ on ait

$$z \in S \text{ et } |z| = R \Rightarrow |zf(z)| \leq \epsilon$$

Donc :

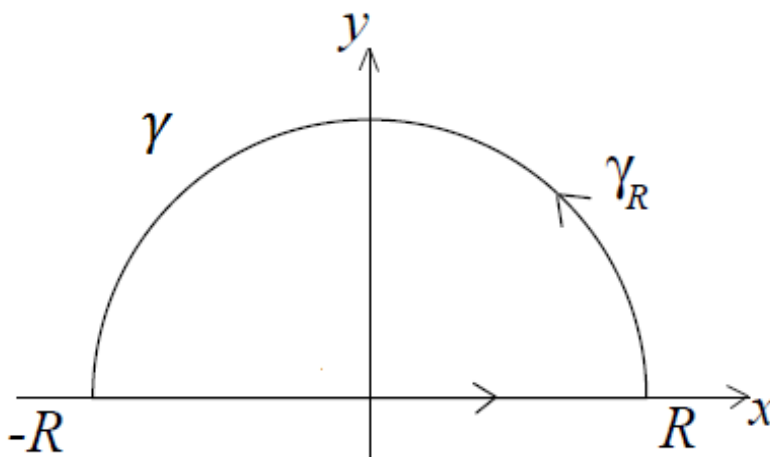
$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq 2\pi\epsilon.$$

■

Exemple 2.4.3 Soit à calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

Solution 2.4.2



Posons : $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$

Alors f admet deux pôles doubles $-i$ et i

D'où : $I = 2\pi i \text{Rés}(f, i)$, (car $-i$ n'est pas à l'intérieur de γ)

Posons : $z = i + u$

D'où : $\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{u^2(u+2i)^2} = \frac{-1}{4u^2(\frac{u}{2i}+1)^2}$

On a au voisinage de $u = 0$: $(1 + \frac{u}{2i})^2 = 1 - \frac{u}{i} + \dots = 1 + iu + \dots$

D'où : $\text{Rés}(f, i) = \frac{-i}{4}$

Et on trouve : $I = 2\pi i \left(\frac{-i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Remarque 2.4.2 Si $f(x)$ est une fonction rationnelle paire, Alors on ait

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Exemple 2.4.4 En utilisant l'exemple précédent, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

3) Intégrale du type : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$

Où le dénominateur $Q(x) \neq 0$ et $\deg(Q(x)) > \deg(P(x))$.

Alors le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$ sera fait selon le signe du paramètre α .

a) 1^{er} cas ($\alpha > 0$) : Dans ce cas on choisit un réel $R > 0$ et strictement supérieur aux modules des racines $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ de $Q(z)$ qui appartiennent au demi-plan supérieur et puis on intègre la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$ sur la courbe simple fermée γ_R constituée par l'intervalle $[-R, R]$ et le demi-cercle C_R centré à l'origine et de rayon R . Donc, d'après le théorème des résidus on obtient :

$$\oint_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right)$$

On pose $M(R) = \sup \left\{ \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| ; z = Re^{i\theta} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$. Ainsi, puisque le module

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \right| &\leq M(R) \int_0^{2\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \\ &\leq 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \\ &\leq 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R \theta/\pi} d\theta \text{ car } \sin \theta \geq 2\theta/\pi, \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \\ &\leq \frac{\pi M(R)}{\alpha R} [1 - e^{-\alpha R}] \end{aligned}$$

on en déduit que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0$.

Par conséquent on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right)$$

b) 2^{ème} cas ($\alpha < 0$) : Soit $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ les racines de $Q(x)$ qui appartient au demi-plan inférieur, puis pour tout réel $R > \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$ on intègre la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$ sur la courbe fermée γ_R constituée par le demi-cercle $C_R = \{Re^{i\theta}; \theta \in [-\pi, \pi]\}$ et l'intervalle $[-R, R]$ parcouru dans le sens opposé. Comme 1^{er} cas, en appliquant le théorème des résidus sur γ_R on obtient :

$$\oint_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = - \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right)$$

et ainsi le passage à la limite sur R vers l'infini nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rés} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right)$$

Exemple 2.4.5 Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$.

Solution 2.4.3 On a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx \\ &= \operatorname{Re} \left(i\pi \operatorname{Rés} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}, i \right) \right) \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Rés} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2+1}, i \right) = \frac{1}{2ie}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}$$

4) Intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^a dx$

$$\text{Où } \left\{ \begin{array}{l} -1 < a < 0 \\ \text{la fraction rationnelle } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ n'a que des pôles complexes} \\ \deg(P(x)) < \deg(Q(x)) \end{array} \right.$$

Sous ces trois conditions, on va décrire une méthode qui nous permet de calculer les intégrales de cette forme.

On va effectuer un changement de variable en posant $x = e^t$

On aura

$$dx = e^t dt$$

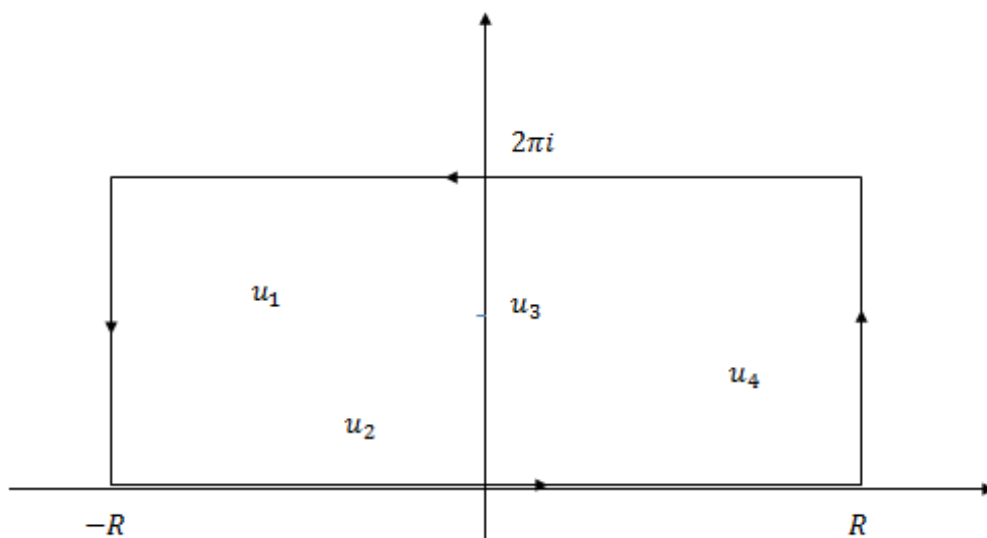
et

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^a dx = \int_0^{+\infty} \frac{P(e^t)}{Q(e^t)} e^{(a+1)t} dt$$

Posons aussi $u = \log(z)$, telle que $\arg(z) \in]0, 2\pi[$.

Alors, si: $z_0 \neq 0$ est un pôle pour la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$, on aura forcément le nombre complexe $u_0 = \log(z_0)$ comme singularité pour la fraction $\frac{P(e^t)}{Q(e^t)}$.

Et donc pour calculé l'intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^a dx$, il suffit d'appliquer le théorème des résidus à la fonction $\frac{P(e^u)}{Q(e^u)} e^{(a+1)u}$ sur le rectangle C_R de la courbe γ_R qu'est simple fermée du demi-plan supérieur et qui contient les singularités de la fonction $\frac{P(e^t)}{Q(e^t)}$ comme indiqué sur la figure ci-dessous



$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_R} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)} e^{(a+1)u} du &= 2\pi i \sum_{k=0}^n \text{Rés} \left(\frac{P(e^u)}{Q(e^u)} e^{(a+1)u}, u_k \right) \\
&= \int_{-R}^R \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} e^{(a+1)x} dx + \int_R^{-R} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} e^{(a+1)(x+2\pi i)} dx \\
&\quad + i \left(\int_0^{2\pi} \frac{P(e^{(R+iy)})}{Q(e^{(R+iy)})} e^{(a+1)(R+iy)} dy + \int_{2\pi}^0 \frac{P(e^{(-R+iy)})}{Q(e^{(-R+iy)})} e^{(a+1)(-R+iy)} dy \right) \\
&= (1 - e^{2\pi i(a+1)}) \int_{-R}^R \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} e^{(a+1)x} dx \\
&\quad + i \left(\int_0^{2\pi} \frac{P(e^{(R+iy)})}{Q(e^{(R+iy)})} e^{(a+1)(R+iy)} dy - \int_0^{2\pi} \frac{P(e^{(-R+iy)})}{Q(e^{(-R+iy)})} e^{(a+1)(-R+iy)} dy \right)
\end{aligned}$$

Pour R tend vers ∞ on aura

$$\left| \frac{P(e^{(R+iy)})}{Q(e^{(R+iy)})} e^{(a+1)(R+iy)} \right| \simeq e^{(a+1)R} \frac{c}{e^{nR}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{P(e^{(-R+iy)})}{Q(e^{(-R+iy)})} e^{(a+1)(-R+iy)} \right| \simeq R^{-(a+1)R} c'$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et on trouve que

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^a dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\sin(\pi a)} \sum_{k=0}^n \text{Rés} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} z^a, z_k \right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} e^{(a+1)x} dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\sin(\pi a)} \sum_{k=0}^n \text{Rés} \left(\frac{P(e^u)}{Q(e^u)} e^{(a+1)u}, u_k \right).$$

2.4.7 Application au calcul de séries numériques

Le théorème des résidus est utilisé pour le calcul du somme de séries. Les résultats suivants sont valables moyennant peu de restrictions sur $f(z)$, les conditions de validité sont généralement remplies quand la série converge.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = - \sum \text{Rés}(\pi \cotg(\pi z) f(z), z_k).$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = - \sum \text{Rés} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} f(z), z_k \right).$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum \text{Rés}(\pi \tan \pi z f(z), z_k).$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum \text{Rés} \left(\frac{\pi}{\cos \pi z} f(z), z_k \right).$$

Théorème de Mittag-Leffler

Théorème 2.4.2 Soit C_N des cercles de rayon R_N ne passant par aucun pôle et sur lesquels $|f(z)| < M$ où M est indépendant de N et $R_N \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$.

Si on suppose que les seules singularités de $f(z)$ à distance finie sont des pôles simples a_1, a_2, a_3, \dots rangés par ordre de valeur absolue croissante, et si on note par b_1, b_2, b_3, \dots les résidus de $f(z)$ en a_1, a_2, a_3, \dots

Alors

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right\}$$

Quelques développements particuliers

1. $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - \dots \right)$
2. $\frac{1}{\cos z} = \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 - z^2} - \dots \right)$

$$3. \tan z = 2z \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2 - z^2} - \dots \right)$$

$$4. \cot gz = \frac{1}{z} + 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} + \dots \right)$$

$$5. \frac{1}{\sinh z} = \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 + \pi^2} - \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 + 9\pi^2} - \dots \right)$$

$$6. \frac{1}{\cosh z} = \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 + z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2 + z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 + z^2} - \dots \right)$$

$$7. \tanh z = 2z \left(\frac{1}{z^2 + (\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2 + (3\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2 + (5\pi/2)^2} + \dots \right)$$

$$8. \coth z = \frac{1}{z} + 2z \left(\frac{1}{z^2 + \pi^2} + \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 + 9\pi^2} + \dots \right)$$

Exemple 2.4.6 Soit à calculer la somme suivante

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Solution 2.4.4 On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \text{Rés} \left(\frac{\pi \cotg \pi z}{z^2}, 0 \right)$$

Le développement de Laurent de $\cot z$ est :

$$\cotgz = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \dots \implies \frac{\pi \cotg \pi z}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} - \dots$$

On trouve

$$\text{Rés} \left(\frac{\pi \cotg \pi z}{z^2}, 0 \right) = \frac{-\pi^2}{3}$$

Ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exemple 2.4.7 Calculer la somme suivante

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Solution 2.4.5 Pour calculer la somme de la série S_n , on cherche à exprimer cette somme comme étant la somme des résidus d'une fonction en différents points. Pour chaque entier n , on cherchera à exprimer le terme S_n comme étant le résidu en $z = n$ d'une fonction liée à S_n .

Pour cela on utilise la fonction $\pi \cotg(\pi z)f(z)$ où $f(z)$ est définie comme S_n en remplaçant la variable entière n par la variable complexe z ($f(n) = S_n$).

L'intérêt de cette méthode repose sur le fait que les singularités de la fonction sont tous des entiers relatifs, et pour calculer la somme S_n , on considère l'intégrale suivante:

$$\int_{\gamma} \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1+z^2)} dz$$

où le contour γ est le carré de sommets $\pm(N + \frac{1}{2}) \pm i(N + \frac{1}{2})$.

Les pôles de la fonction $f(z) = \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1+z^2)}$ sont tous les entiers n tels que

$$-N \leq n \leq N$$

et les racines carrées de $1 + z^2$, sont i et $-i$.

Le théorème des résidus nous permet de calculer l'intégrale par :

$$\int_{\gamma} \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1+z^2)} dz = 2\pi i \left(\sum_{n=-N}^N \text{Res}(f, n) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) \right)$$

Les différents résidus sont donnés par :

$$\text{Res}(f, n) = \frac{\pi \cos(n\pi)}{\cos(n\pi)(1+n^2) + \sin(n\pi)2n} = \frac{1}{1+n^2}$$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{\pi \cos(i\pi)}{2i \sin(i\pi)} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \right)$$

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{\pi \cos(-i\pi)}{-2i \sin(-i\pi)} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \right)$$

On a donc

$$\int_{\gamma} \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1+z^2)} dz = 2\pi i \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 + \pi \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \right)$$

Il reste à calculer l'intégrale, pour cela on utilise l'inégalité sur le carré γ de sommets $\pm(N + \frac{1}{2}) \pm i(N + \frac{1}{2})$, où N est un entier. Ce contour, parcouru dans le sens positif entoure les points $z = n$, pour $-N \leq n \leq N$.

On a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right|^2 &= \left| \frac{\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{2}}{\frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}} \right|^2 \\
&= \left| \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\pi x}}{e^{\pi y}} + \frac{e^{\pi y}}{e^{i\pi x}} \right)}{\frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\pi x}}{e^{\pi y}} - \frac{e^{\pi y}}{e^{i\pi x}} \right)} \right|^2 \\
&= \left| \frac{\frac{1}{2} \frac{e^{i2\pi x} + e^{2\pi y}}{e^{\pi(ix+y)}}}{\frac{1}{2i} \frac{e^{i2\pi x} - e^{2\pi y}}{e^{\pi(ix+y)}}} \right|^2 \\
&= \left| i \frac{e^{i2\pi x} + e^{2\pi y}}{e^{i2\pi x} - e^{2\pi y}} \right|^2 \\
&= \left| \frac{\cosh(2\pi y) + \cos(2\pi x)}{\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)} \right|^2 \\
&= \frac{\cosh(2\pi y) + \cos(2\pi x)}{\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)}
\end{aligned}$$

Sur les côtés verticaux du carré, on note : V_- et V_+ , on a : $x = \pm(N + \frac{1}{2})$.

D'où : $\cos(2\pi x) = -1$

Donc : $\left| \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right|^2 = \frac{\cosh(2\pi y) - 1}{\cosh(2\pi y) + 1} < 1$

De plus on a la majoration suivante

$$\left| \frac{1}{1 + z^2} \right| < \frac{1}{(N - \frac{1}{2})^2}$$

En utilisant cette inégalité on trouve

$$\left| \int_{V_{\pm}} \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1 + z^2)} dz \right| \leq \frac{2N + 1}{(N - \frac{1}{2})^2} \rightarrow 0, \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

Sur les cotés horizontaux du carré, on note : H_- et H_+ , on a : $y = \pm(N + \frac{1}{2})$.

On a donc :

$$\left| \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right|^2 = \frac{\cosh(2\pi y) + \cos(2\pi x)}{\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)} \leq \frac{\cosh(2N\pi + \pi) + 1}{\cosh(2N\pi + \pi) - 1} = K(N) \rightarrow 1, \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

D'où

$$\left| \int_{H_{\pm}} \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1 + z^2)} dz \right| \leq \frac{(2N + 1) K(N)}{N^2} \rightarrow 0, \text{ pour } N \rightarrow \infty$$

On a donc établi que l'intégrale $\int_{\gamma} f(z) \pi \cot(\pi z) \rightarrow 0$, lorsque $N \rightarrow \infty$

Ce qui permet de conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \right) - \frac{1}{2}.$$

Les transformations conformes

Une bonne façon de représenter graphiquement les fonctions de variables complexes est d'utiliser deux plans. Le plan z est l'ensemble de départ et le plan w est l'ensemble d'arrivée. On trace dans le plan z des courbes dont on reproduit les images par $f(z)$ dans le plan w . Quand nous faisons ainsi la représentation graphique d'une fonction, nous utilisons les termes application ou transformation au lieu du terme fonction.

3.1 Transformations conformes

Définition 3.1.1 *Soit U un ouvert de \mathbb{C}*

Une application $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite conforme si elle conserve les angles.

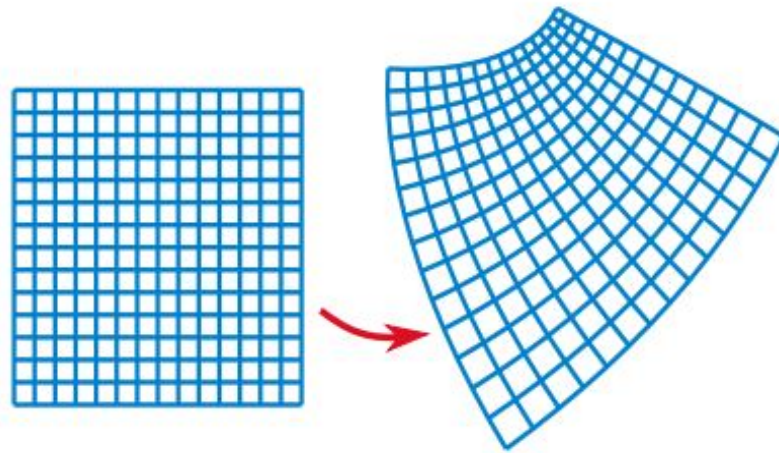
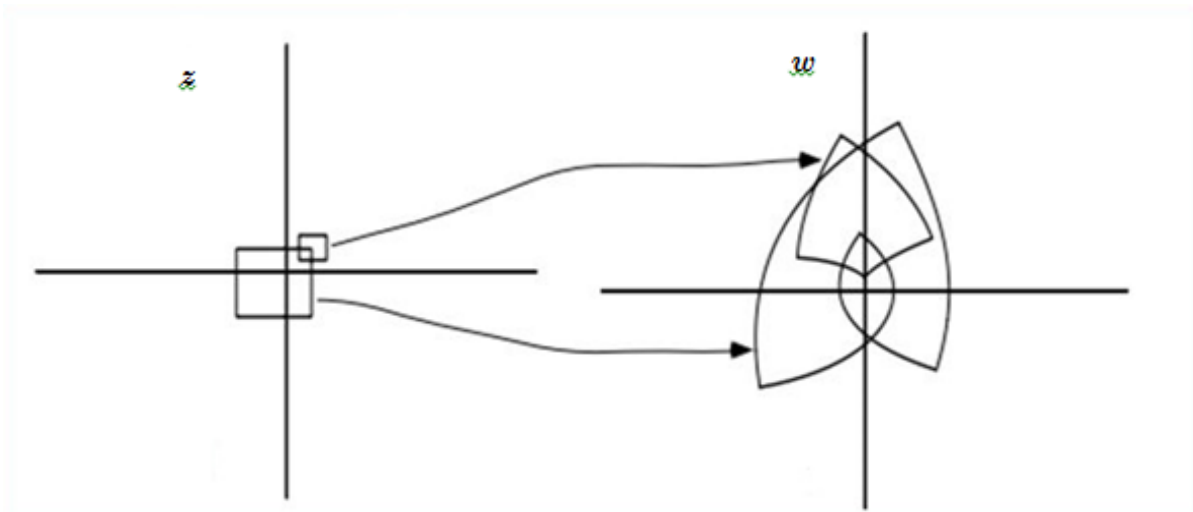


Image d'une grille rectangulaire par une transformation conforme du plan.

Remarque 3.1.1 *On remarque dans la figure ci-dessus que les lignes se coupant perpendiculairement sont transformées en des courbes qui se coupent également perpendiculairement.*



Remarque 3.1.2 *On trouve les deux carrés, (la fonction utilisée est $f(z) = z^2 e^z$).*

Définition 3.1.2 Soit f une application dans un domaine D dans le plan complexe, et $z_0 \in D$ à un voisinage $z_0 + \epsilon_r$ pour lequel $f(z) \neq f(z_0)$. On dit que f conserve les angles en z_0 si seulement si la quantité suivante existe et est indépendante de θ

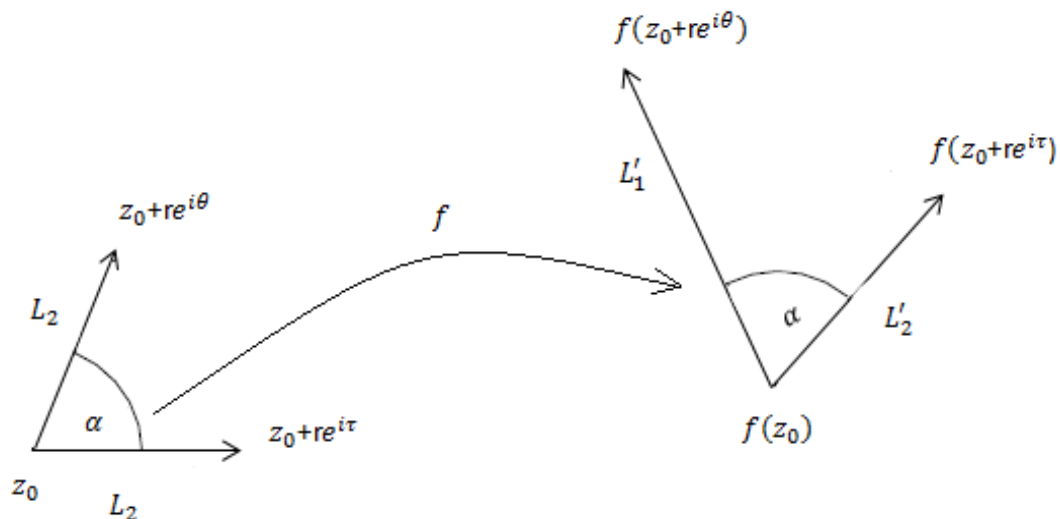
$$\lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|}$$

Remarque 3.1.3 Dans la définition précédente, le terme suivant

$$\Delta_f(z_0, h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{|f(z_0 + h) - f(z_0)|}$$

donne la direction d'un complexe dans le cercle unité, qui va de $f(z_0)$ à $f(z_0 + h)$.

Cette définition signifie que deux rayons quelconques L_1 et L_2 sont issus de z_0 , l'angle que fait leur image est le même que l'angle orienté (L_1, L_2) comme on le voit sur la figure suivante:



avec : $\alpha = \theta - \tau$

Exemple 3.1.1 Les similitudes conservent les angles car $a \in \mathbb{C}$, et $f(z) = az$.

En appliquant la définition précédant :

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \Delta_f(z_0, re^{i\theta}) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{az_0 + are^{i\theta} - az_0}{|az_0 + are^{i\theta} - az_0|} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{ar}{|are^{i\theta}|} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{ar}{|a|r} \\
 &= \frac{a}{|a|}
 \end{aligned}$$

Donc ne dépend pas de θ , alors f conserve les angles.

La fonction $f(z) = z^2$ vérifie que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \Delta_f(z_0, re^{i\theta}) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{(z_0 + re^{i\theta})^2 - z_0^2}{|(z_0 + re^{i\theta})^2 - z_0^2|} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{z_0^2 + 2z_0re^{i\theta} + r^2e^{2i\theta} - z_0^2}{|z_0^2 + 2z_0re^{i\theta} + r^2e^{2i\theta} - z_0^2|} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{2z_0re^{i\theta} + r^2e^{2i\theta}}{|2z_0re^{i\theta} + r^2e^{2i\theta}|} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2z_0 + re^{i\theta}}{|2z_0 + re^{i\theta}|} = \frac{2z_0}{|2z_0|} \\
 &= \frac{z_0}{|z_0|}
 \end{aligned}$$

La propriété de conservation des angles pour tout point d'un domaine est caractéristique des fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas dans ce domaine. C'est pour cette raison pour laquelle on appelle applications conformes les fonctions holomorphes à dérivée qui ne s'annulent pas.

Théorème 3.1.1 Soit un domaine D du plan complexe, et f une fonction holomorphe dans D .

Si $f'(z_0)$ existe en un point $z_0 \in \Omega$ et $f'(z_0) \neq 0$, l'application f conserve les angles en z_0 . Réciproquement, si la différentielle de f existe et n'est pas nulle en z_0 et si f conserve les angles en z_0 alors $f'(z_0)$ existe et n'est pas nulle, c'est-à-dire:

$$f'(z) \neq 0 \iff f \text{ est conforme en } z_0.$$

Preuve. On a f holomorphe dans le voisinage de z_0 avec $f'(z) \neq 0$.

appliquant la définition précédente on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{|re^{i\theta}|}{|re^{i\theta}|} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} \frac{|(z_0 + re^{i\theta}) - z_0|}{|(z_0 + re^{i\theta}) - z_0|} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{(z_0 + re^{i\theta}) - z_0} \frac{|(z_0 + re^{i\theta}) - z_0|}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} \\ &= \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} \end{aligned}$$

donc f conserve les angles en z_0 .

La réciproque, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ et $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

On suppose f admet un développement en série entière, au voisinage de z_0 , alors on peut écrire la formule suivante:

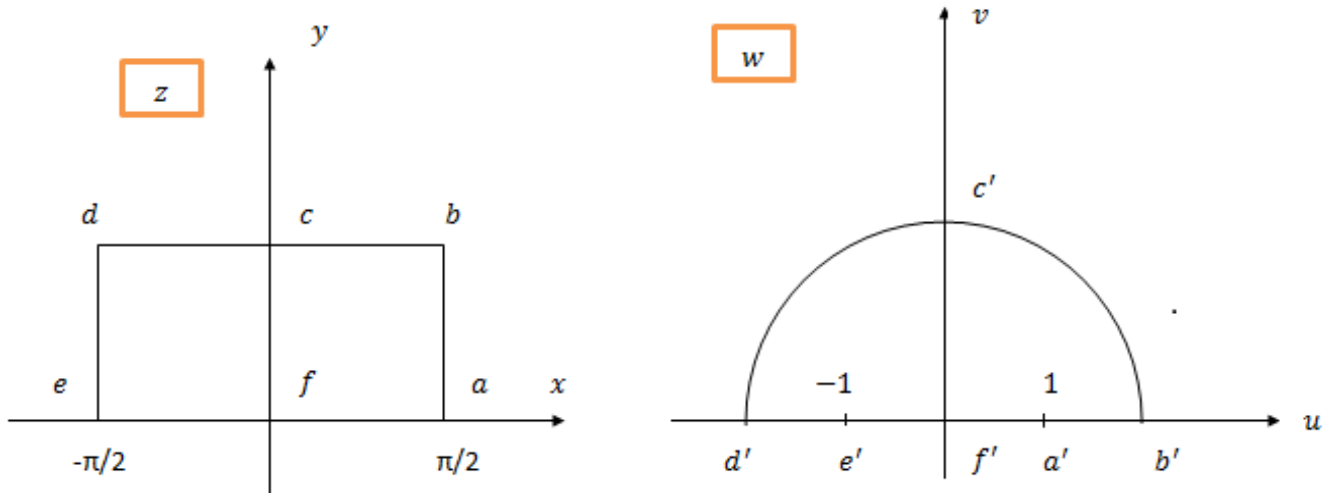
$$f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n e^{in\theta} + o(|re^{i\theta}|^n)$$

Donc:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n e^{in\theta}}{\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n e^{in\theta} \right|} \\ &= e^{i(n-1)\theta} \frac{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}{\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|} \end{aligned}$$

ce résultat ne dépend pas de θ si seulement si $n = 1$ c'est-à-dire $f'(z_0) \neq 0$. ■

Exemple 3.1.2 Soit la fonction $w = \sin z$, trouver de la région rectangulaire donnée par $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ et $0 < y < k$



posant $y = 0$, on a :

$$w = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = \sin x.$$

Donc la droite $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ est envoyée dans la droite $-1 \leq u \leq 1$.

posant $x = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$w = \sin z = \cosh y.$$

La droite (ab) est donc envoyée sur la droite $1 \leq u \leq \cosh k$.

Posant $y = k$, alors :

$$w = \sin z = \sin x \cosh k + i \cos x \sinh k$$

et

$$u = \sin x \cosh k$$

$$v = \cos x \sinh k$$

d'où

$$\frac{u^2}{\cosh^2 k} + \frac{v^2}{\sinh^2 k} = 1;$$

la relation entre u et v est donc la demi-ellipse $b'c'd'$.

Enfin, posant $x = -\frac{\pi}{2}$,

$$w = \sin z = \cosh y,$$

et la droite (de) s'en va sur la droite $-1 \geq u \geq -\cosh k$.

Nous pouvons aussi soupçonner que l'intérieur du rectangle s'en va à l'intérieur de demi-ellipse.

Définition 3.1.3 On dit que un point est un point fixe ou un point invariant d'une transformation conforme si seulement si $w = z$.

Exemple 3.1.3 Soit $f(z) = z(1 + e^z)$ une fonction holomorphe, calculer les points fixes de f .

Solution 3.1.1 soit z^* un point fixe de f .

$$f(z^*) = z^*(1 + e^{z^*}) = z^*$$

donc

$$z^*e^{z^*} = 0 \text{ alors } z^* = 0$$

de plus

$$\begin{aligned} f'(z) &= 1 + (1 + z)e^z \\ f'(z^* = 0) &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

La fonction f est conforme en z^* .

3.2 Les transformations de Möbius

Définition 3.2.1 Soient a, b, c et d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. La fonction complexe définie par

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{3.2.1}$$

s'appelle transformation de Möbius ou transformation homographie, Il nous convient dans ce que suit de considérer que cette fonction est de classe de C^∞ à C^∞ .

Remarque 3.2.1 La condition $ad - bc \neq 0$ assure que T n'est pas une constante.

Définition 3.2.2 Les cas spéciaux du transformation de Möbius sont:

1. La translation pour: $a = d = 1, c = 0$ et $b \in \mathbb{C}$.
2. La multiplication pour: $d = 1, c = b = 0$ et $a \in \mathbb{C}$.
3. La rotation pour: $d = 1, c = b = 0$ et $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| = 1$.
4. L'inverse pour: $d = a = 0, c = b = 1$.

Proposition 3.2.1 On peut écrire toute transformation de Möbius comme compositions des cas spéciaux.

Preuve. On à $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$;

si $c \neq 0$ alors; on peut écrire

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + (b - \frac{ad}{c})}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \left(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}\right) \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \\ &= T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1(z). \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} T_1(z) &= z + \frac{d}{c} \\ T_2(z) &= \frac{1}{z} \\ T_3(z) &= \left| \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} \right| z \\ T_4(z) &= e^{i\alpha}; (\alpha = \arg(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2})) \\ T_5(z) &= \frac{a}{c} + z. \end{aligned}$$

Si $c = 0$ alors:

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \left| \frac{a}{d} \right| e^{i\beta} + \frac{b}{d}$$

avec $\beta = \arg(\frac{a}{d})$, et ainsi T est une composition d'une rotation, une dilatation et une translation. ■

Proposition 3.2.2 *Si T est une transformation de Möbius.*

alors tous les droites et cercles sont transformable en des droites et des cercles.

Preuve. L'équation d'un cercle dans un plans complexe sous la forme suivante:

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \text{ avec } |b| + |c| \neq 0 \text{ et } a, c \in \mathbb{R} \quad (3.2.2)$$

si $a = 0$, alors l'équation (3.2.2) est une équation d' une droite.

On remplace z dans(3.2.2) par $w + \alpha$ avec $w, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a(w + \alpha)\overline{(w + \alpha)} + \bar{b}(w + \alpha) + b\overline{(w + \alpha)} + c &= 0 \\ a w \bar{w} + a \bar{\alpha} w + a \alpha \bar{w} + a \alpha \bar{\alpha} + \bar{b} w + \bar{b} \alpha + b \bar{w} + b \bar{\alpha} + c &= 0 \\ a w \bar{w} + (a \bar{\alpha} + \bar{b}) w + (a \alpha + b) \bar{w} + (a \alpha \bar{\alpha} + \bar{b} \alpha + b \bar{\alpha} + c) &= 0 \end{aligned}$$

puisque le dernier terme est un réel, alors les translations préservent leurs caractéristiques géométrique dans le plan complexe.

On remplace z dans(3.2.2) par βw avec $w, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} a\beta w \overline{\beta w} + \bar{b}\beta w + b\overline{\beta w} + c &= 0 \\ a|\beta| w \bar{w} + (\bar{b}\beta) w + (b\bar{\beta}) \bar{w} + c &= 0 \end{aligned}$$

qu'est aussi une équation d'un cercle, c'est-à-dire la multiplication préserve les caractéristiques géométrique.

On remplace z dans(3.2.2) par $\frac{1}{w}$ avec $w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} a \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} + \bar{b} \frac{1}{w} + b \frac{1}{\bar{w}} + c &= 0 \\ a + \bar{b} w + b \bar{w} + c w \bar{w} &= 0 \end{aligned}$$

on pose $\bar{b} = d$ on obtient:

$$c w \bar{w} + \bar{d} w + d \bar{w} + a = 0$$

et aussi on a une équation d'un cercle, c'est-à-dire l'inverse préserve les caractéristiques géométrique.

La composition de ces trois transformations donne la transformation de Möbius. ■

Théorème 3.2.1 *Toute transformation de Möbius est conforme.*

Preuve. On a $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

on dérive par rapport à z

$$\begin{aligned} T'(z) &= \left(\frac{az+b}{cz+d} \right)' \\ &= \frac{ad-cb}{(cz+d)^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Car $ad - cb \neq 0$. ■

Théorème 3.2.2 *Si z_1, z_2, z_3 sont distinctes et si le triplet w_1, w_2, w_3 se compose de trois autres points distinctes dans le plan des w alors il n'existe qu'une seule transformation de Möbius T telle que $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2$ et $T(z_3) = w_3$. Cette transformation est définie implicitement par :*

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

Preuve. Soient $w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}, w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$ et $w_3 = \frac{az_3+b}{cz_3+d}$.

$$\begin{aligned} \frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} &= \frac{\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} \right) \left(\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} \right)}{\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} \right) \left(\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} \right)} \\ &= \frac{\left(\frac{cb(z_1-z)}{(cz+d)(cz+d)} \right) \left(\frac{cb(z_3-z_2)}{(cz+d)(cz+d)} \right)}{\left(\frac{cb(z_3-z)}{(cz+d)(cz+d)} \right) \left(\frac{cb(z_1-z_2)}{(cz+d)(cz+d)} \right)} \\ &= \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \end{aligned}$$

■

Exemple 3.2.1 *Quel est l'image de l'axe imaginaire sous la transformation de Möbius T déterminée par l'imposition des trois conditions :*

$$\begin{cases} T(-i) = -1. \\ T(0) = i. \\ T(i) = 1. \end{cases}$$

Solution 3.2.1 D'après le Théorème (3.2.2) la transformation est définie implicitement par l'équation:

$$\begin{aligned}\frac{(w+1)(w_2-i)}{(w-1)(w_2+1)} &= \frac{(z+i)(-i)}{(z-i)(i)} \\ \frac{(w+1)(w_2-i)}{(w-1)(w_2+1)} &= -\frac{z+i}{z-i} \\ i\frac{w+1}{w-1} &= -\frac{z+i}{z-i}\end{aligned}$$

Si $w = u + iv$ et $z = 0 + iy$ (pour les points sur l'axe imaginaire) on voit que

$$\begin{aligned}i\frac{u+iv+1}{u+iv-1} &= -\frac{z+i}{z-i} \\ \frac{(u+(iv+1))(u-(iv+1))}{((u-1)+iv)((u-1)-iv)} &= i\frac{y+1}{y-1} \\ \frac{u^2+v^2-1}{(u-1)^2-v^2} + i\frac{2v}{(u-1)^2-v^2} &= i\frac{y+1}{y-1}\end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\frac{u^2+v^2-1}{(u-1)^2-v^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{2v}{(u-1)^2-v^2} = \frac{y+1}{y-1}$$

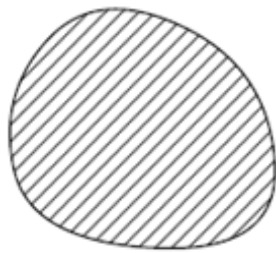
L'image de l'axe imaginaire est alors le cercle unitaire $\{w : |w| = u^2 + v^2 = 1\}$.

3.3 Théorème de l'application conforme de Riemann

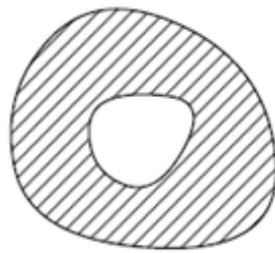
La simple connexité est une propriété invariante par homéomorphisme. En particulier un ouvert homéomorphe au disque est simplement connexe.

Puisque les fonctions holomorphes sont les applications conformes du plan (elles respectent les angles orientés), le théorème de représentation conforme assure que tout ouvert du plan homéomorphe au disque D et différent du plan peut être cartographié globalement par une carte circulaire (ou rectangulaire c'est plus pratique) et qui respecte

les angles.



*U est simplement
connexe*



*U n'est pas simplement
connexe*



*U n'est pas
connexe*

Théorème 3.3.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert non vide, simplement connexe et différent de \mathbb{C} . Alors il existe $f : \Omega \rightarrow D$ analytique et bijective.

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.3.1 Soit U un ouvert simplement connexe de D , différent de D et contenant l'origine. Alors il existe $g : U \rightarrow D$ analytique injective telle que $g(0) = 0$ et $|g'(0)| > 1$.

Preuve. Soit $\beta \in D \setminus \{0\}$ tel que $\beta^2 \notin U$.

Soit g_1 l'application de Möbius:

$$g_1 = \frac{\beta^2 - z}{1 - \bar{\beta}^2 z}$$

envoie injectivement U sur un ouvert simplement connexe U_1 de D^* . De plus $\beta^2 = g_1(0) \in U_1$. Il existe donc une détermination g_2 de la racine carrée définie sur U_1 et telle que:

$$g_2(\beta^2) = \beta.$$

L'ouvert $U_2 = g_2(U_1)$ est dans D .

Soit g_3 une autre application de Möbius:

$$g_3 = \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta}z}.$$

Soit g la composée de $g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

Par construction $g(0) = 0$, $|g'(0)| = \frac{1+|\beta|^2}{2|\beta|} > 1$, $g(U) \subset D$ et g est injective. ■

Preuve. (Du théorème) Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Puisque Ω est simplement connexe, il existe $g \in O(\Omega)$ telle que $g^2(z) = z - z_0$ la fonction g est une racine carrée. Si on pose $\Omega_1 = g(\Omega)$ alors $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^*$, $\Omega_1 \cap -\Omega_1 = \emptyset$ et l'application $g : \Omega \rightarrow \Omega_1$ est un homéomorphisme analytique ainsi que sa réciproque. De plus Ω_1 est simplement connexe.

Soit $v_0 \in \Omega$ et $v_1 = g(v_0)$: $v_1 \neq 0$ par construction. Puisque g est ouverte il existe $\varepsilon \in]0, |v_1|[$ tel que $D_\varepsilon(v_1) \subset \Omega_1$. On a $D_\varepsilon(-v_1) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$.

Or l'homographie $h_0 = \frac{\varepsilon(v_1 - z)}{3v_1(z + v_1)}$ injecte $\mathbb{C} \setminus D_\varepsilon(-v_1)$ dans D_1 en envoyant v_1 sur 0.

Par conséquent la composée $h_0 \circ g$ est une injection analytique de Ω dans D_1 qui envoie v_0 sur l'origine.

Notons H l'ensemble des injections analytiques de Ω dans D qui envoient v_0 sur l'origine.

Cet ensemble contient h_0 .

D'après le lemme précédent si $h \in H$ est non surjective il existe $\tilde{h} \in H$ telle que

$$\left| \tilde{h}'(v_0) \right| > |h'(v_0)|.$$

On pose $M = \sup_{h \in H} |h'(v_0)|$.

On a $M \neq 0$ car $|h_0'(v_0)| \neq 0$. Si on trouve $h \in H$ telle que $|h'(v_0)| = M$ alors h est une bijection analytique de Ω dans D .

Il reste donc à montrer l'existence d'un tel h .

On considère une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |h_n'(v_0)| = M.$$

Puisque les fonctions h_n sont à valeurs dans D , elles sont bornées dans leur ensemble et forment une famille normale. On peut donc en extraire une suite convergente (uniformément sur tout compact de Ω ainsi que les dérivées) vers une fonction analytique h .

On a $|h'(v_0)| = M$ et donc h est non constante. Puisque les h_n sont injectives c'est encore vrai pour h . Ainsi $h \in H$. Puisque $|h'(v_0)| = M$ l'application h répond au problème.

■

Application à l'équation de Laplace dans un disque

Soit : $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$.

$$\text{Soit le problème (P)} \begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \varphi(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Où $\varphi(x, y) = x^2 + y$ est une fonction de C^1 .

Utilisons la méthode de séparation de variables :

Etape 1: passage en coordonnées polaires, telle que :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

et

$$v(r, \theta) = u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

On obtient

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

Et le problème devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi) \\ v(R, \theta) = \varphi(R \cos \theta, R \sin \theta) & \theta \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

on impose que :

$$v(r, 0) = v(r, 2\pi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, 2\pi).$$

En particulier, on a :

$$\psi(\theta) = \varphi(R, \theta) = R^2 \cos^2 \theta + R \sin \theta = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} \cos 2\theta + R \sin \theta$$

Etape 2 : Séparation des variables

Ignorons les conditions aux limites $v(R, \theta) = \psi(\theta)$ et résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & r \in (0, R), \theta \in (0, 2\pi) \\ v(r, 0) = v(r, 2\pi) & r \in (0, R) \\ \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, 2\pi) & r \in (0, R) \end{cases}$$

Cherchons une fonction $v(r, \theta)$, solution du problème donné, de la forme

$$v(r, \theta) = f(r)g(\theta)$$

On trouve l'équation

$$f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = 0$$

Equivalent à

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \lambda$$

Pour les conditions de périodicité :

$$g(0) = g(2\pi) \quad \text{et} \quad g'(0) = g'(2\pi)$$

On obtient :

$$\begin{cases} g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0 \\ g(0) = g(2\pi), \quad g'(0) = g'(2\pi) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

et

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - \lambda f(r) = 0 \quad (3.3.2)$$

Les solutions non triviales de (3.3.1) sont données, pour $n \in \mathbb{Z}$, par

$$\lambda = n^2 \quad \text{et} \quad g_n(\theta) = \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$$

Les solutions de (3.3.2) avec $\lambda = n^2$ sont données par :

$$f_n(r) = \begin{cases} \gamma_n r^n & \text{si } n \neq 0, n \in \mathbb{Z} \\ \gamma_0 + \delta_0 \log r & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Donc la solution générale s'écrit :

$$v(r, \theta) = \alpha_0 (\gamma_0 + \delta_0 \log r) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \gamma_n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n \quad (3.3.3)$$

posant :

$$a_0 = 2\alpha_0\gamma_0, \quad b_0 = \alpha_0\delta_0, \quad a_n = \alpha_n\gamma_n, \quad \text{si } n \neq 0, \quad b_n = \beta_n\gamma_n \text{ si } n > 0 \text{ et } b_n = -\beta_n\gamma_n \text{ si } n < 0$$

Alors (3.3.3) s'écrit sous la forme :

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + b_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{-n} \cos n\theta + b_{-n} \sin n\theta) r^{-n}$$

Puis que on s'est intéressé à des solutions définies dans le disque centré en 0, alors les solutions de la forme r^{-n} et $\log r$ ne sont pas admises car elles tendent vers ∞ quand r tend vers 0.

Alors on déduit que :

$$b_0 = b_{-n} = a_{-n} = 0$$

Par conséquent la solution générale v du problème est :

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + b_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

Etape 3 : conditions aux limites

Il reste à déterminer les coefficients a_n et b_n pour que

$$v(R, \theta) = \varphi(R \cos \theta, R \sin \theta) = \psi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) R^n$$

Ce qui donne

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos n\theta d\theta$$

et

$$b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin n\theta d\theta$$

On pourrait démontrer que la fonction obtenue v est de C^∞ dès que $r < R$.

En particulier

$$\psi(\theta) = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} \cos 2\theta + R \sin \theta$$

Et on trouve que

$$a_0 = R^2, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0$$

ou bien on trouve

$$b_1 = 1, \quad b_n = 0$$

D'où le résultat :

$$v(r, \theta) = \frac{R^2}{2} + \frac{r^2}{2} \cos 2\theta + r \sin \theta = \frac{R^2}{2} + \frac{r^2}{2} \cos^2 \theta - \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta + r \sin \theta$$

Et le résultat en coordonnées cartésiennes est :

$$u(x, y) = \frac{R^2}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2} + y$$

Exemple 3.3.1 On cherche une fonction $u = u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème (P) de l'équation de Laplace suivante:

$$(P) \begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x > 1, y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) = \Psi(1, y) = \frac{2}{1+y^2} & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soit Ω un domaine simplement connexe tel que:

$$\Omega = \{x + iy, \quad x > 1, y \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 1\}$$

Nous allons ramener ce domaine par la transformation conforme au cas d'un disque unité ouvert D .

En appliquant le théorème de représentation conforme de Riemann, telle qu'il existe une application conforme

$$f = \alpha + i\beta : \Omega \rightarrow D.$$

L'inverse de cette fonction s'écrit sous la forme

$$f^{-1} = a + ib : \Omega \rightarrow D$$

On trouve

$$f(z) = \frac{2}{z} - 1 \text{ et } f^{-1}(w) = \frac{2}{1+w}$$

Alors:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = \frac{2}{x + iy} - 1 \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} - 1 - i \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha, \beta) &= a(\alpha, \beta) + ib(\alpha, \beta) = \frac{2}{1 + \alpha + i\beta} \\ &= \frac{2(1 + \alpha)}{(1 + \alpha)^2 + \beta^2} - i \frac{2\beta}{(1 + \alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

On pose $\phi(\alpha, \beta) = \psi \circ f^{-1} = \psi(a(\alpha, \beta), b(\alpha, \beta))$ et on va résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = 0, & \alpha^2 + \beta^2 < 1 \\ v(\alpha, \beta) = \phi(1, y) & \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$$

Si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc $(1 + \alpha)^2 + \beta^2 = 2(1 + \alpha)$

et donc

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, \beta) &= \frac{2}{1 + \left(\frac{-2\beta}{(1+\alpha)^2 + \beta^2}\right)^2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{-2\beta}{2(1+\alpha)^2}\right)^2} \\ &= \frac{2(1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2 + \beta^2} = 1 + \alpha \end{aligned}$$

d'où: $v(\alpha, \beta) = 1 + \alpha$ est la solution triviale.

Et donc la solution donnée par :

$$u(\alpha, \beta) = v(\alpha(x, y), \beta(x, y))$$

et comme $\Delta u = 0$, $\phi = \psi \circ f^{-1}$ et $u = \psi$ sur $\partial\Omega$

3.4 Transformation de Joukowski

Définition 3.4.1 La transformation de Joukowski⁽¹⁾ est définie par :

$$J(z) = z + \frac{1}{z}; \forall z \neq 0.$$

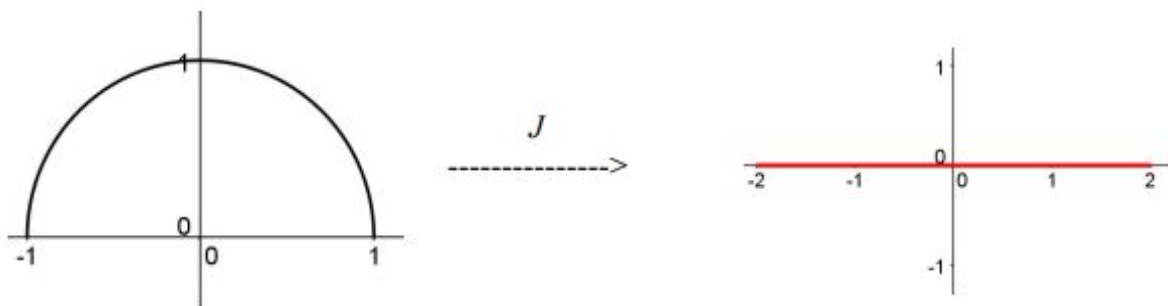
Cette application est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ car : $\forall z \neq 0, J'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$

De plus, $\forall z \notin \{-1, 0, 1\}, J'(z) \neq 0$, donc cette transformation est une application conforme sur tous les domaines ouverts du plan complexe n'incluant ni 0 ni -1 ni 1.

⁽¹⁾**Nikolaï Iegorovitch Joukowski** : (1847 – 1921)

un Mathématicien, physicien, ingénieur russe.

Proposition 3.4.1 *La transformation de Joukowski est une bijection qui transforme le demi-cercle unité supérieur en un segment borné aux points d'affixes respectives -2 et 2 .*



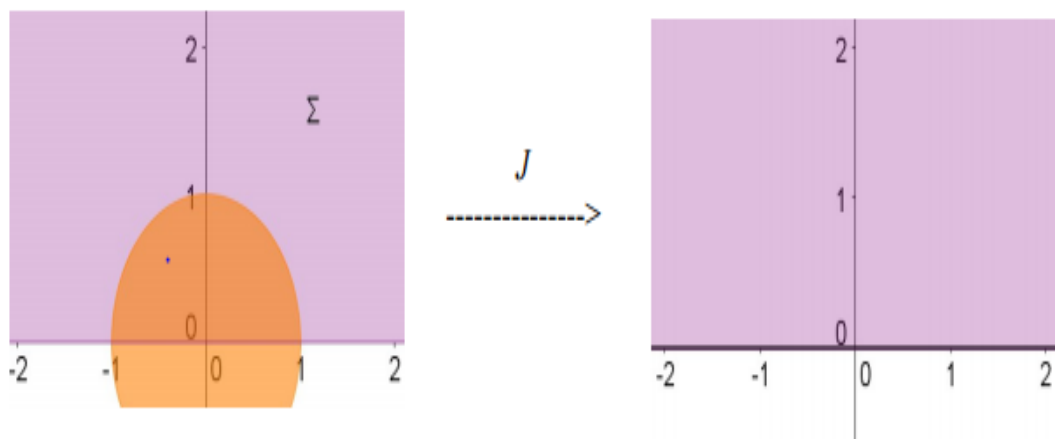
Preuve. Soit z un point du demi-cercle unité supérieur. Alors, $\exists \theta \in [0, \pi]$, tel que $z = e^{i\theta}$.

Ainsi, $J(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$.

Alors quand θ décrit $[0, \pi]$, $J(z)$ décrit $[-2, 2]$ ■

Proposition 3.4.2 *La transformation de Joukowski transforme la portion de plan Σ du schéma suivant en le demi-plan strictement supérieur.*

La frontière du disque est exclue de Σ .



Preuve. Notons que $\forall z = x + iy \neq 0$, on a $J(z) = x + iy + \frac{1}{x+iy}$

$$\begin{aligned} J(z) &= x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^3 + ix^2y + y^2x + iy^3 + x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^3 + y^2x + x}{x^2 + y^2} + i \frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2} + i \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2} \\ &= P(x, y) + iQ(x, y) \end{aligned}$$

Avec :

$$P(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2} \text{ et } Q(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}.$$

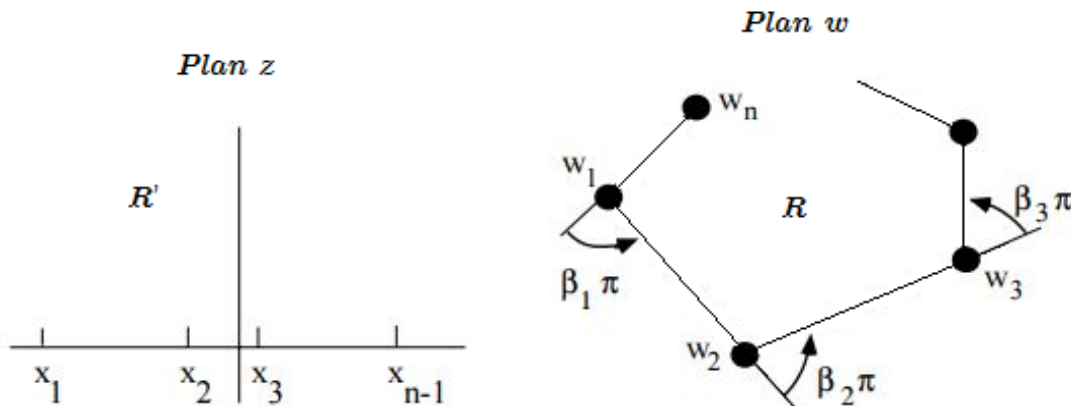
Si $M(z) \in \Sigma$, alors $x^2 + y^2 > 1$ et $y > 0$.

Ainsi, on a bien $Q(x, y) = \text{Im}(J(z)) > 0$. ■

3.5 La transformation de Schwarz-Christoffel

Définition 3.5.1 *Considérons un polygone dans le plan des w , ayant pour sommets w_0, w_1, \dots, w_n , et pour angles extérieurs respectivement $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.*

Soit w_0, w_1, \dots, w_n les points correspondant respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z :



Une transformation qui représente l'intérieur R du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par:

$$T(z) = A \int (\tau - x_1)^{-\beta_1} (\tau - x_2)^{-\beta_2} \dots (\tau - x_{n-1})^{-\beta_{n-1}} d\tau + B \quad (3.5.1)$$

où A et B sont des constantes complexes. On notera que:

1. Parmi les points x_1, x_2, \dots, x_{n-1} on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de (3.5.1) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

Exemple 3.5.1 Trouver une transformation conforme entre le demi-plan $\{z : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ dans un rectangle.

Solution 3.5.1 Soit $a > 1$ et choisissons les quatre points réels $x_1 = -a$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ et $x_4 = a$. Pour un rectangle on a, forcément, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/2$ et si $z_0 = 0$ la formule 3.5.1 s'exprime comme

$$T(z) = A \int_0^z (\tau - x_1)^{-\frac{1}{2}} (\tau - x_2)^{-\frac{1}{2}} (\tau - x_3)^{-\frac{1}{2}} (\tau - x_4)^{-\frac{1}{2}} d\tau + B = A \int_0^z F(\tau) d\tau + B$$

Les valeurs $A = 0$ et B servent à placer le rectangle à une position désirée et ajuster sa grandeur, mais la partie essentielle de la transformation réside dans l'intégrale et ceci comprend le rapport entre les longueurs des côtés.

Pour déterminer les sommets du rectangle il convient de considérer les deux intégrales auxiliaires

$$b = A \int_0^1 F(\tau) d\tau + B = A \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(a^2 - \tau^2)}} + B$$

$$h = A \int_1^a F(\tau) d\tau + B = A \int_1^a \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(a^2 - \tau^2)}} + B$$

Si $-1 < \xi < a$ on note que

$$F(\tau) = (\tau + a)^{-\frac{1}{2}} (\tau + a)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi i} (a - \tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi i} (1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\pi i} |F(\tau)| = -|F(\tau)|$$

et, si $-a < \xi < -1$ on trouve de la même manière que

$$F(\tau) = e^{-3\pi i} |F(\tau)| = i |F(\tau)|$$

Les quatre points du rectangle sont

$$\begin{aligned} T(-a) &= A \int_0^{-a} F(\tau) d\tau + B \\ &= A \left(\int_0^{-1} F(\tau) d\tau + \int_{-1}^{-a} F(\tau) d\tau \right) + B \\ &= A \left(- \int_0^{-1} |F(\tau)| d\tau + i \int_{-1}^{-a} |F(\tau)| d\tau \right) + B \\ &= A(b + ih) + B \end{aligned}$$

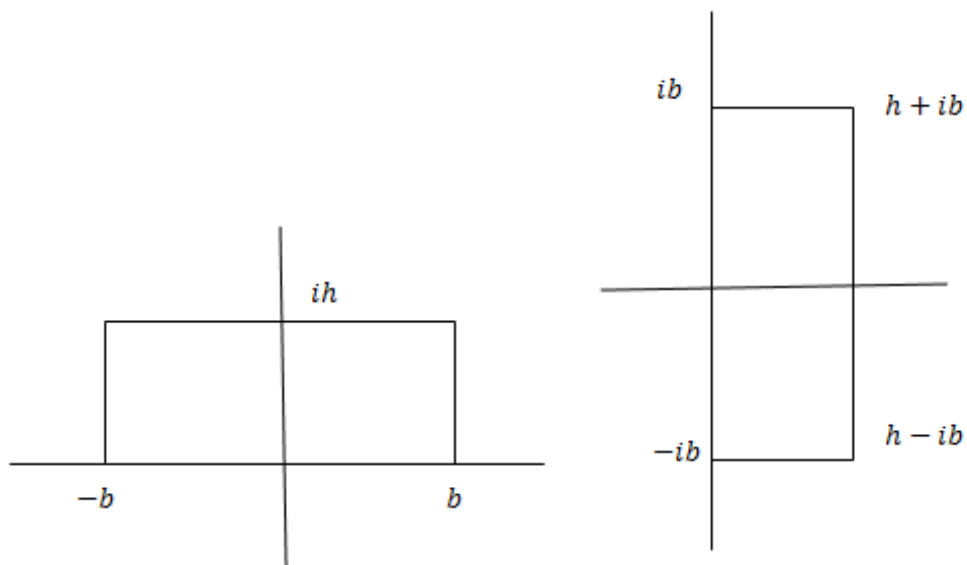
$$\begin{aligned} T(-1) &= A \int_0^{-1} F(\tau) d\tau + B \\ &= -A \int_0^{-1} |F(\tau)| d\tau + B \\ &= Ab + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= A \int_0^{-1} F(\tau) d\tau + B \\ &= A \int_0^{-1} |F(\tau)| d\tau + B \\ &= -Ab + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(a) &= A \int_0^a F(\tau) d\tau + B \\ &= A \left(\int_0^1 F(\tau) d\tau + \int_1^a F(\tau) d\tau \right) + B \\ &= A \left(- \int_0^1 |F(\tau)| d\tau - i \int_1^a |F(\tau)| d\tau \right) + B \\ &= -A(b + ih) + B \end{aligned}$$

Il est clair que $b > 0$ et $h > 0$ de telle sorte que le choix $A = -1$, $B = 0$ produit le premier rectangle de la Figure suivant tandis que le choix $A = i$, $B = 0$ donne le deuxième

qui est une rotation du premier.



En effet, si $|A| = 1$, $B = 0$ on obtient une rotation du premier rectangle autour de l'origine. Pour un choix quelconque de $A \in \mathbb{C}$ on aura une rotation suivi d'un agrandissement ($|A| > 1$) une rétrécissement ($|A| < 1$) du rectangle par un facteur $|A|$. Finalement, si $B \neq 0$ il y aura une translation dans la direction déterminée par B par une distance égale à $|B|$.

Conclusion

Dans ce travail, on a essayé de présenter de manière élémentaire les propriétés remarquables des fonctions d'une variable complexe, on a met en évidence quelques notions fondamentales de l'analyse complexe pour le calcul d'intégrales réelles et de calcul somme de séries numériques.

Nous avons également présenté une étude importante sur la géométrie dans les plans complexe qui parle sur les transformations conformes, cette dernière transforme des objets mathématique dans les plans complexes et conserve les angles et leurs sens d'orientations, nous avons proposés quelques transformations conformes élémentaires, ce mémoire nous a permis aussi de comprendre le lien entre les fonctions holomorphes et les transformations conformes.

Bibliographie

- [1] A. Abbassov, K. Baddari, Théorie et pratique des fonctions d'une variables complexe, Office des publications universitaires, Alger, 2015.
- [2] N.Amroun, Cours de Fonctions de variables complexes. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes Algérie, 2009.
- [3] J.Bak, D-J.Newman, Complex analysis, Springer, New York, 2000.
- [4] M. Bousseboua, Fonction de la variable complexe, Office des publications universitaires, Alger, 2000.
- [5] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, HERMANN, Paris, 1961.
- [6] M. Cédric, Cours d'analyse complexe, Université Galatasaray, 2011.
- [7] S-D. Chatterji, Cours d'analyse: Analyse complexe, Press polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.
- [8] B. Dacorogna, C. Tanteri, Analyse avancée pour ingénieurs, Press polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2002.
- [9] P. Dolbeault, Analyse complexe: maîtrise de mathématique pures, Masson, Paris, 1990.
- [10] R.Gélinas, M.Lambert, Élément d'analyse complexe, Presses de l'université du Québec, 1988.

- [11] A. Giroux, *Analyse complexe : Cours et exercices corrigés*, Université de Montréal, 2013.
- [12] J. Kuntzmann, *Outils mathématiques: Variable complexe*, HERMANN, Paris, 1967.
- [13] T. Laadj, *Notes de Cours d'Analyse Complexe*, USTHB, 2014.
- [14] Y. Lacroix, *Cours de variable complexe*, Université de Picardie, Amiens, 2002.
- [15] J.-M. Lion, *notes du cours de fonctions holomorphes*, université Rennes 1 , 2004.
- [16] F. Maisonneuve, *Fonctions d'une variable complexe: Cours et exercices*, Paris, 2013.
- [17] J-F.Pabion, *Éléments d'analyse complexe*, ellipses, Paris, 1995.
- [18] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, DUNOD, Paris, 2003.
- [19] M-R. Spiegel, *Variables complexes: cours et problèmes*, Série Schaum, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [20] P.Tauvel, *Analyse complexe : Cours et exercices corrigés*, DUNOD, Paris, 2006.
- [21] A. Yger, *Analyse complexe et Distributions*, ellipses, mathématiques 2^e cycle, Paris, 2001.

Résumé

Le mémoire porte sur les notions suivantes: Rappels généraux sur les nombres complexes, Intégration complexe, fonctions holomorphes, équation de Cauchy-Riemann, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, séries de Taylors et de Laurent, points singuliers, théorème des résidus et application au calcul intégral, et aux calculs des somme de série, application conforme.