République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Bejaïa - Algérie

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Thème

Familles Sommables et Applications

Le jury composé de :

Mr BOUHMILA Fatah	M.C.A Univ. Bejaïa	Président
Mme TAS Saadia	Professeur Univ. Bejaïa	Promotrice
Mme BECHIR Halima	M.C.A Univ. Bejaïa	Examinatrice

Présenté par :

Mlle DJENNADI Smina
Mlle OUADI Kenza

Promotion 2015 - 2016

Remerciements

Par la Grâce de DIEU le tout puissant, et en préambule de ce mémoire, nous tenons à exprimer notre reconnaissance et notre gratitude à l'administration et à l'ensemble du corps enseignant du département de mathématiques de l'Université Abderrahmane Mira pour leurs efforts et leur entière disponibilité dans la transmission de leur savoir et de leurs connaissances afin de nous garantir l'aboutissement de ce cycle de master.

Comme il nous tient à cœur, tout particulièrement, d'exprimer toute notre reconnaissance envers celle, sans qui ce travail n'aurait pas abouti : Madame S.TAS, notre encadreur qui a su être présente aux moments opportuns et ainsi nous apporter son aide à chaque fois que le besoin s'en faisait sentir. Aussi, nous la remercions vivement de nous avoir permis de mener ce travail jusqu'à son terme et d'être là aujourd'hui devant vous.

Honorables Président et membres du Jury M$^{\text{r}}$ F.BOUHMILA ET M$^{\text{me}}$ H.ZEROUATI-BECHIR que nous n'oublions pas de remercier pour avoir bien voulu accepter de commenter et de juger notre travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mon cher papa qui a toujours cru en moi et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.

Ma chère mère que je ne cesse de remercier pour tout ce qu'elle m'a donnée. Que Dieu la récompense pour tous ses bienfaits.

Mon unique frère Idris.

Mon neveu Abd Raouf.

Mes chères sœurs Liticia et Sabrina

Ma sœur Katia ainsi que son mari Oualid.

Mes cousins et mes cousines.

Tous les membres de ma promotion : Ryma, Razika, Rahima.

M*es amies/amis : Amel, Assia, Hamza.*

Une spéciale dédicace à ma chère copine Kenza que je considère comme une sœur pour moi, tu as été une amie plus que je ne pouvais imaginer.

Mina

Dédicaces

Papa, maman, les mots n'expriment pas tout ce que j'éprouve pour vous en ce moment important de ma vie, votre souci majeur a été la réussite et le bonheur de vos enfants pour lesquels vous avez accepté de faire des sacrifices sans limites. Que ce travail soit pour vous une source de joie.

A mes frères Djamel, Mounir, Elouafi, Lotfi et Djalal.

A mes sœurs Ghania, Nedjima et leurs maris Houcine et Madjid.

A mes belles sœurs Sabah, Nabila et Souhila.

A mes nièces et neveux Asma, Abd Erraouf, Tawba, Racha, Djassem, Ilyas, Iyad, Khawla et Anas.

A mes cousines et cousins.

A toi Siham, tu as été pour moi une vraie amie, reçois à travers ce travail mes profondes reconnaissances.

A toi Mina, nous formons une vraie équipe. Je te souhaite tout ce que tu désires.

A toute la promotion 2016, je vous souhaite une brillante carrière.

A toutes les personnes qui m'aiment, je dédie ce modeste travail.

Kenza

Table des matières

Liste des principales notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
K	Désigne un corps, dans la pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\varnothing$	Ensemble vide
$A^{\perp}$	Complémentaire orthogonal de A
$\overline{A}$	Adhérance de A
C_A^B	Complémentaire de A dans B
$Card(A)$	Cardinal d'un ensemble fini A
χ_A	Fonction indicatrice d'un sous-ensemble A
$A \backslash B$	La différence des ensembles
$\oplus$	La somme direct des ensembles
$P_f\,(I)$	Ensemble des parties finies de I
S_J	Somme partielle finie sur J
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire
$\Vert . \Vert$	Norme
$\overline{a}$	Conjugué de a

Introduction

La série harmonique alternée, de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour n entier strictement positif, converge vers $\ln 2$, tandis que celle obtenue en réordonnant les termes de la suite de façon à sommer beaucoup plus vite les termes pairs que les termes impairs converge vers $\frac{\ln 2}{2}$. La conclusion que nous pouvons en tirer est qu'il y a un réel problème mathématique à permuter les termes d'une série semi convergente. Ce qui conduit à introduire une définition de la somme qui exclut ce genre de situation et qui assure que la sommation donne le même résultat quel que soit l'ordre choisi.

La loi d'addition sur les scalaires ou les vecteurs vérifie certaines propriétés, telles que l'associativité et la commutativité. Celles-ci permettent de définir naturellement les sommes de familles finies, auxquelles les propriétés de l'addition, considérée comme opération binaire, s'étendent aisément. Les difficultés surviennent lorsqu'on envisage d'étendre la sommation à des familles infinies discrètes. La notion de sommabilité est une extension de la notion de la convergence absolue au cas où les termes de la série dépendent d'un ensemble d'indices I quelconque, et où par conséquent, il n'y a pas d'ordre des termes de la série. Elle vise à étendre les calculs de sommes sous la forme $\sum_{i\in I} a_i$ où aucune condition de dénombrabilité, ni d'ordre n'est imposée à l'ensemble des indices I, contrairement à la notion de série. Il s'agit donc de pouvoir définir la somme de façon globale.

Le premier chapitre est dédié à quelques rappels concernant notament la dénombrabilité.

Dans le second chapitre, nous présentons le cas où les a_i sont des nombres réels ou des nombres complexes. Pour faciliter l'utilisation dans d'autres branches des mathématiques (analyse complexe, séries de Fourier, analyse fonctionnelle...), on étudie dans la première partie de ce chapitre les familles positives pour lesquelles il n'existe qu'un phénomène d'accumulation, sans compensation, qui permet dans tous les cas d'attribuer à la famille $(a_i)_{i\in I}$ une somme, finie ou infinie. Eunsuite, nous exposons les familles sommables de nombres réels (resp. de nombres complexes), nous définissons très simplement la notion de sommabilité et celle de somme en séparant les parties positives et les parties négatives (resp. les parties réelles et les parties imaginaires). Un résultat très important pour cette partie est celui de l'équivalence entre la sommabilité et l'absolue sommabilité.

Dans le troisième chapitre, nous étudions les familles vectorielles dont la famille des normes a une somme finie. Il n'est alors pas difficile d'attribuer à la famille initiale une somme vectorielle qui possède toutes les vertus souhaitables.

Nous nous situons d'emblée dans le cas où les a_i sont des éléments d'un espace vectoriel normé et nous donnons la définition de la convergence d'une série de vecteurs de terme général a_i dans un espace vectoriel normé, l'ensemble d'indexation étant $\mathbb{N}$. On dit que cette série converge et a pour somme le vecteur S de E si la suite des sommes partielles $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$ converge vers S, autrement dit si $\|S_n - S\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci s'écrit encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|S_n - S\| < \varepsilon. \tag{0.0.1}$$

Si on veut généraliser ceci à une famille de vecteurs $(a_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble infini quelconque, on se heurte immédiatement à une difficulté, c'est qu'une écriture comme $\forall i \geq i_0$, n'a en général pas de sens dans I qui n'a aucune raison d'être muni d'une relation d'ordre total. Essayons alors de traduire l'idée exprimée par (0.0.1) sans faire appel à la structure d'ordre de $\mathbb{N}$. On remarque pour cela que S_n réalise une approximation de S par la somme d'un nombre fini de termes de la famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec une erreur $\|S_n - S\| < \varepsilon$. Cette approximation peut être réalisée par une somme finie indexée par n'importe quel ensemble $I_n = \{0, 1, ..., n\}$ pourvu que $n \geq n_0$. Pour se débarrasser de la relation d'ordre intervenant dans cette dernière écriture on la reformule en $I_n \supset I_{n_0}$. Réécrivons maintenant (0.0.1) à l'aide des ensembles emboîtés I_n.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_0 = I_{n_0} = \{0, 1, ..., n_0\}, \forall I_n \supset I_{n_0}, \left\| \sum_{i\in I_n} a_i - S \right\| < \varepsilon. \tag{0.0.2}$$

Au risque d'insister lourdement, notons que dans l'écriture, "$\forall I_n \supset I_{n_0}$", I_n ne désigne pas n'importe quelle partie finie de $\mathbb{N}$, mais un ensemble fini de la forme $\{0, 1, 2, ..., n\}$. Avons nous réussi ainsi à expurger (0.0.1) de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$?

En fait non, nous avons seulement réussi à la cacher dans la définition des ensembles I_n d'entiers consécutifs entre 0 et n. Si on veut vraiment généraliser à un ensemble d'indexation I quelconque, on est donc condamné à renoncer à cette structure particulière des I_n et à ne retenir que leur finitude. On est ainsi amené à introduire une nouvelle notion de convergence pour la série de terme général a_i

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J \text{ (fini)} \subset \mathbb{N}, \forall I \text{ fini tel que } J \subset I \subset \mathbb{N}, \left\| \sum_{i \in I} a_i - S \right\| < \varepsilon.$$

L'objet du quatrième chapitre est de définir les familles sommables induites par la structure de groupe topologique. En mathématiques, et plus particulièrement en topologie générale, un filtre est une structure définie sur un ensemble, et permettant d'étendre la notion de limite aux situations les plus générales. La théorie des filtres a été inventée en 1937 par *Henri Cartan*, et utilisée par le groupe *Bourbaki*. Il suffit en effet d'une addition (la loi de composition interne du groupe) et d'une topologie pour "additionner des objets en quantité quelconque", plus précisément les objets considérés sont des éléments d'un groupe topologique commutatif et séparé.

La dernière partie de ce mémoire est consacré à quelques applications des familles sommables, justifiant ainsi leur intérêt.

CHAPITRE 1

Chapitre rappels

1.1 Dénombrabilité

1.1.1 Introduction

Compter des objets et faire des additions, voilà bien les deux activités les plus élémentaires à la base des mathématiques. Et pourtant à y regarder de plus près, ce n'est pas si facile. Déjà pour un ensemble fini, la méthode qui consiste à regarder ses éléments l'un après l'autre et à les compter (donc à les numéroter) n'est applicable que pour de « petits » ensembles. Le plus souvent on s'en sort en faisant une représentation de l'ensemble à dénombrer à l'aide d'un autre ensemble plus familier. Elle est d'ailleurs à la base du processus de comptage qui consiste simplement à mettre en bijection un ensemble avec un ensemble de nombres entiers. Cette notion de bijection permet d'étendre en un certain sens le dénombrement aux ensembles infinis.

1.1.2 Notion d'ensemble dénombrable

Définition 1.1.1 *Un ensemble I est dit fini s'il est vide ou s'il est en bijection avec un ensemble $\{1, ..., n\}$ pour un certain entier $n \geq 1$. Un tel n est alors unique et est appelé cardinal de E. Par convention le cardinal de l'ensemble vide est 0.*

Définition 1.1.2 *Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Il est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Théorème 1.1.1 *(Cantor)*

Soit I un ensemble. Alors il n'existe pas de bijection de I sur $P_f(I)$.

Démonstration. Par l'absurde. Soit φ une bijection de I sur $P_f(I)$. Construisons une partie de I en posant :

$$A = \{x \in I : x \notin \varphi(x)\}.$$

Puisque φ est une bijection de I sur $P_f(I)$, A possède un antécédant par φ, notons le x_0.

Alors par définition même de la partie A, il vient

$$x_0 \notin A \Leftrightarrow x_0 \in \varphi(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in A.$$

Ce qui est absurde. ■

1.1.3 Critères de dénombrabilité

Théorème 1.1.2 *Soit I un ensemble. S'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$, alors I est dénombrable.*

Démonstration. Soit φ une injection de I dans $\mathbb{N}$. Alors l'application g de I dans $\varphi(I)$, qui à un élément i de I associe $\varphi(i)$, est évidemment bijective (on a rendu φ surjective en restreignant son ensemble d'arrivée). On a ainsi construit une bijection de I sur une partie de $\mathbb{N}$, I est dénombrable par définition. ■

Théorème 1.1.3 *Soit I un ensemble. S'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur I, alors I est dénombrable.*

Démonstration. Soit φ une surjection de $\mathbb{N}$ sur I. Soit i un élément de I. φ étant surjective, l'ensemble des antécédents de i par φ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soit $a(i)$ son plus petit élément. Construisons une partie de $\mathbb{N}$ en posant $A = \{a(i); i \in I\}$. Alors l'application de A dans I est évidemment une bijection; on a mis I en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, I est dénombrable.

En d'autres termes, pour rendre φ injective, on a sélectionné un et un seul antécédent par φ de chaque élément i de I. En notant A l'ensemble de tous ces éléments-là, il suffit de restreindre φ à A pour la rendre injective. ■

Lemme 1.1.1 *Toute partie infinie de* $\mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration. Soit I une partitie infinie de $\mathbb{N}$. On construit une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur I par récurrence en utilisant le fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On initialise la récurrence en posant

$$I_0 = I, \varphi(0) = \min I_0$$

Ensuite, pour $n \geq 1$, si on a défini $\varphi(k)$ et I_k pour $i = 0, ..., n-1$, on pose

$$I_n = I \setminus \varphi\left(\{0, ..., n-1\}\right), \varphi(n) = \min I_n$$

L'ensemble $\varphi\left(\{0, ..., n-1\}\right) = \{\varphi(0), ..., \varphi(n-1)\}$ est fini donc I_n est non vide puisque I est infini. On peut donc construire ainsi de proche en proche tous les $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. De plus il est clair par construction que pour tout $n \geq 1$, $\varphi\left(n-1\right) < \varphi\left(n\right)$.

L'application φ est donc strictement croissante, ce qui entraîne son injectivité. Pour voir qu'elle est surjective, soit m un élément quelconque de I. Comme m est un entier, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers strictement inférieurs à m, donc à fortiori qu'un nombre fini n d'éléments de I inférieurs strictement à m (éventuellement aucun). Ainsi m est le $(n+1)$-ième plus petit élément de I, d'où $\varphi(n) = m$. Nous venons de montrer qu'un élément quelconque de I a au moins un antécédent par φ, autrement dit que φ est surjective. ■

Proposition 1.1.1 *Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est elle-même dénombrable.*

Démonstration. Soit A une partie infinie d'un ensemble dénombrable B. Il existe alors une bijection $g : B \to \mathbb{N}$. Sa restriction $\breve{g}$ à A est une bijection de A sur $g(A)$. L'ensemble $g(A)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, car si elle était finie, il en serait de même pour A. Par le lemme 1.1.1, il existe une bijection φ de $g(A)$ sur $\mathbb{N}$. L'application $\varphi \circ \breve{g} : A \to \mathbb{N}$ est une bijection comme composée de deux bijections. L'ensemble A est donc dénombrable. ■

Remarque 1.1.1 *Il résulte immédiatement de la proposition que si l'ensemble B contient une partie infinie A non dénombrable, B est lui même infini non dénombrable.*

Remarque 1.1.2 *La proposition nous permet de caractériser les ensembles au plus dénombrables comme ceux qui sont en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, ou encore comme ceux qui s'injectent dans $\mathbb{N}$. De même, les ensembles dénombrables sont les ensembles infinis qui s'injectent dans $\mathbb{N}$.*

Proposition 1.1.2 *(i) Pour tout $d \geq 1$, si $X_1, ..., X_d$ sont dénombrables, alors le produit cartésien $X_1 \times ... \times X_d$ est dénombrable. En outre, si tous les X_i sont non vides, $X_1 \times ... \times X_d$ est infini dénombrable dès que l'un des X_i est infini dénombrable.*

(ii) Une réunion d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration. Montrons (i) par récurrence sur d. On suppose $d = 2$. Les ensembles X_1 et X_2 étant dénombrables, il existe deux injections Φ_i de X_i dans $\mathbb{N}, i = 1; 2$. Alors l'application $\Phi : X_1 \times X_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\Phi((x_1; x_2)) = (\Phi_1(x_1); \Phi_2(x_2))$ est injective, et donc le produit $X_1 \times X_2$ est dénombrable.

Supposons maintenant que X_2 soit infini dénombrable. Soit $x_1 \in X_1$ un élément fixé. Alors $\mathbb{N}$ s'injecte dans $X_1 \times X_2$ par l'application $\psi(n) = (x_1; \Phi_2^{-1}(n))$. Supposons maintenant le résultat vrai au rang d. Notons que $X_1 \times ... \times X_{d+1} = (X_1 \times ... \times X_d) \times X_{d+1}$, et quitte à réindexer, on peut toujours supposer que X_{d+1} est infini dénombrable. Ainsi, on conclut par le cas $d = 2$.

Montrons (ii). Posons $X = \underset{i \in I}{\cup} X_i$ où $I \subset \mathbb{N}$, et $X_i, i \in I$ est dénombrable. Pour tout $i \in I$, on considère une injection φ_i de X_i dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $x \in X$, on définit l'entier $n(x) = \min \{i \in I; x \in X_i\}$. Soit maintenant l'application $\Phi : X \to \mathbb{N}^2$ définie par

$$\Phi(x) = \left(n(x), \varphi_{n(x)}(x)\right).$$

Montrons que Φ est injective. Soit $x \neq y$. Alors soit $n(x) \neq n(y)$ et dans ce cas $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, soit $n(x) = n(y) = p$ ce qui implique $x, y \in X_p$, et alors $\varphi_p(x) \neq \varphi_p(y)$ car φ_p est injective. Dans ce cas on a donc $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Donc Φ est injective et X est dénombrable. ■

Proposition 1.1.3 *Un ensemble I est dénombrable si et seulement si il existe une suite croissante (J_n) de parties finies de I dont la réunion est I.*

Démonstration. La condition est nécessaire car $\mathbb{N}$ vérifie cette propriété et donc tout ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$ également. Inversement, supposons qu'il existe une telle suite croissante (J_n). Posons $K_0 = J_0$ et $K_n = J_n \backslash J_{n-1}$. On a $I = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} K_n$ et les ensembles K_n sont deux à deux disjoints. Soit $d_n = card\,(K_n)$.

Considérons une bijection φ_n de K_n sur $\{d_0 + ... + d_{n-1}, d_0 + ... + d_{n-1}\}$. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par $\varphi_{|K_n} = \varphi_n$. Alors φ est injective de I dans $\mathbb{N}$ et donc I est dénombrable par définition. ■

1.2 Espaces vectoriels normés

On parle d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$ ou sur le corps $\mathbb{C}$. Les définitions sont les mêmes en substituant $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ ou vice versa.

Définition 1.2.1 *On appelle espace vectoriel sur un corps $\Bbbk$ tout ensemble E muni de deux lois «+» et «.» tel que :*

1. La loi «+» vérifie les propriétés suivantes :

Pour tout $x, y, z \in E$ on ait

- $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- $x + y = y + x$.
- *Il existe un élément neutre noté O_E tel que $x + O_E = x$.*
- $x + (-x) = O_E$.

2. La loi «.» vérifie les propriétés suivantes :

Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et $x, y \in E$ on ait

- $1.x = x$.
- $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
- $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Définition 1.2.2 *Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble F non-vide de E tel que :*

- *si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$.*
- *si $\lambda \in \mathbb{R}$, (resp.$\mathbb{C}$) alors $\lambda x \in F$.*

Définition 1.2.3 *Un espace $(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé sur le corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'il est muni d'une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie :*

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2. $\forall \lambda \in \Bbbk, x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \,.\, \|x\|$ *où $|\lambda|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou le module si $\Bbbk = \mathbb{C}$.*

3. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.4 *Soit E un K-espace vectoriel et $X \subset E$, un sous-ensemble de E. On dit que X est un sous-espace vectoriel de E s'il satisfait aux conditions de stabilité linéaire, c'est à dire :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, x + y \in X \text{ et } \lambda x \in X.$$

Proposition 1.2.1 *Soient F et F', deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. L'espace $F + F'$ est un sous espace vectoriel de E.*

Notation *: si F et F'sont tels que $F \cap F' = \{0\}$, on dit que $F + F'$ est une somme directe et on note $F \oplus F'$.*

Définition 1.2.5 *On appelle espace de Banach E, un espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.2.6 *On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive autrement dit, toute application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

1) $\forall x \in E, y \mapsto < x, y >$ *est linéaire, et* $\forall y \in E, x \mapsto < x, y >$ *est linéaire.*

2) $\forall (x, y) \in E^2, < x, y > = < y, x >$.

3) $\forall x \in E \backslash \{0\}, < x, x > > 0.$

4) $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

• Si E, est un espace vectoriel de dimension finie ou infinie muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace préhilbertien réel.

Proposition 1.2.2 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz).*

Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $< .,. >$, un produit scalaire sur E. Pour tous $(x,y) \in E^2$, on a

$$|< x,y >| \leq \sqrt{< x,x >} \cdot \sqrt{< y,y >}.$$

Démonstration. Soient x et y, deux éléments quelconques de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle φ, la fonction définie pour tout $x \in E$ par : $\phi(x) =< x,x >$. Considérons le polynôme : $P(\lambda) = \varphi(x + \lambda y)$. Le fait que P soit un polynôme découle de la bilinéarité du produit scalaire, on est d'ailleurs en mesure de préciser le degré de P : $d^\circ(P) = 2$. Le produit scalaire étant une forme définie positive, on en déduit que $\varphi(x + \lambda y) \geq 0$. Or

$$P(\lambda) =< x + \lambda y, x + \lambda y >= \lambda^2 \varphi(y) + 2\lambda < x,y > +\varphi(x)$$

Puisque P est un polynôme du second degré, positif, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on en déduit que son discriminant Δ est négatif. Ainsi

$$\Delta = 4\left((< x,y >)^2 - \varphi(x)\varphi(y)\right) \leq 0$$

Cette inégalité s'écrit encore

$$|< x,y >| \leq \sqrt{< x,x >} \cdot \sqrt{< y,y >}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Définition 1.2.7 *On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien $\{H, \langle .,. \rangle\}$ complet pour la norme définie par le produit scalaire.*

Définition 1.2.8 *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de H est dite orthonormée si ses vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux (c'est à dire deux à deux disjoints).*

Définition 1.2.9 *On appelle base d'un Hilbert H, tout sous-ensemble de H orthonormé.*

CHAPITRE 2

Familles sommables de nombres réels et de nombres complexes

2.1 Familles sommables de nombres réels positifs

Dans ce paragraphe I désigne un ensemble quelconque et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs ou nuls.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1 *On dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si l'ensemble de toutes les sommes finies*

$$\left\{ \sum_{i \in J} a_i, J \text{ fini} \subset I \right\}$$

est majoré. En d'autres termes,

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall J \text{ fini} \subset I : \sum_{i \in J} a_i \leq M$$

Définition 2.1.2 *La borne supérieure de l'ensemble des sommes finies $\sum\limits_{i \in J} a_i$ (J parcourant l'ensemble de toutes les parties finies de I) est appelée la somme de la famille $(a_i)_{i \in I}$ et notée $\sum_{i \in I} a_i$.*

C'est à dire

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \text{ fini} \subset I \right\}.$$

Remarque 2.1.1 *La somme d'une famille de réels positifs est donc toujours définie. C'est un nombre réel positif fini ou infini. Dans le cas où une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels positifs n'est pas sommable, on convient de poser*

$$\sum_{i \in I} a_i = +\infty.$$

Remarque 2.1.2 *Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ qui contient ∞, alors*

$$\sum_{i \in I} a_i = +\infty.$$

Proposition 2.1.1 *Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable. Alors l'ensemble $D = \{i \in I, a_i \neq 0\}$, appelé support de la famille, est au plus dénombrable. De plus la famille $(a_i)_{i \in D}$ est sommable et*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in D} a_i.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, posons $D_n = \left\{ i \in I, a_i > \frac{1}{n} \right\}$ de sorte que $\underset{n \in \mathbb{N}^*}{\cup} D_n = D$.

Montrons que les ensembles D_n sont finis. Raisonons par l'absurde, supposons que D_n est infini alors il possède pour tout entier k un sous-ensemble K de cardinal k. On aurait donc

$$\sum_{i \in I} a_i \geq \sum_{i \in K} a_i > \frac{k}{n}$$

D'où, pour $k \to +\infty$, on a : $\sum\limits_{i \in I} a_i = +\infty$. La famille $(a_i)_{i \in I}$ ne serait donc pas sommable ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Ainsi l'ensemble D est réunion dénombrable d'ensembles finis, et donc dénombrable. De plus tous les termes dont les indices sont en dehors de D sont nuls, on a immédiatement

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in D} a_i.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 2.1.1 *(Lien entre famille sommable et série)*

Soit $(a_i)_{i \in I}$ *une famille sommable. Considérons la bijection suivante :*

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D, \; n \mapsto \varphi(n) = j_n.$$

Où $D = \{j_n \in I, a_{j_n} \neq 0\}$, *alors la série* $\sum_{n \geq 0} a_{j_n}$ *est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{j_n} = \sum_{i \in I} a_i.$$

Démonstration. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $J = \{j_0, j_1, ..., j_N\}$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{N} a_{j_n} = \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in D} a_i.$$

Donc les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_{j_n}$ sont majorées et la série converge.

Par passage à la limite on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{j_n} \leq \sum_{i \in D} a_i. \tag{2.1.1}$$

Inversement, soit J une partie finie de D et soit $N \in \mathbb{N}$, tel que $J \subset \{j_0, j_1, ..., j_N\}$. Un tel entier N existe puisque l'application φ est une énumération de D.

On a alors

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{n=0}^{N} a_{j_n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_{j_n}$$

D'où à fortiori

$$\forall J \text{ fini} \subset D : \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_{j_n}. \tag{2.1.2}$$

Les deux inégalités (2.1.1) et (2.1.2) achèvent la démonstration. ■

Corollaire 2.1.1 *Pour que la famille* $(a_i)_{i \in I}$ *soit sommable, il est nécessaire et suffisant que la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{j_n}$ *soit convergente.*

2.1.2 Propriétés des familles sommables

Théorème 2.1.2 *Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs ou nuls..*

(i) Si pour tout $i \in I$, $a_i \leq b_i$ et si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

(ii) Si pour tout $i \in I$, $a_i \leq b_i$ et si la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable alors la famille $(b_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

(iii) Si les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables alors la famille $(a_i + b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$

(iv) Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, la famille $(\alpha a_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}\alpha a_i = \alpha\sum_{i\in I} a_i.$$

Démonstration. Pour montrer une inégalité du type $\sup A \leq \beta$ il suffit, puisque $\sup A$ est le plus petit majorant de A, de montrer que β est un majorant de A, autrement dit qu'on a $\alpha \leq \beta$ pour tout $\alpha \in A$.

(i) Si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable. Alors, pour toute partie finie J de I,

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in J} b_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

Donc, $\left\{\sum_{i\in J} a_i, J \text{ fini} \subset I\right\}$ est majoré, la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sup\left\{\sum_{i\in J} a_i, J \text{ fini} \subset I\right\} = \sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

(ii) C'est la contraposée de (i).

(iii) On sait que le "sup d'une somme n'est pas toujours la somme des sup".

Pour toute partie finie J de I, on a

$$\sum_{i\in J}(a_i + b_i) = \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in J} b_i \leq \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$$

et $\left\{\sum_{i\in J}(a_i+b_i), J \text{ fini} \subset I\right\}$ est majoré, donc la famille $(a_i+b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sup\left\{\sum_{i\in J}(a_i+b_i), J \text{ fini} \subset I\right\} \leq \sum_{i\in I}(a_i+b_i) \leq \sum_{i\in I}a_i + \sum_{i\in I}b_i \tag{2.1.3}$$

En sens inverse, il faut procéder en deux étapes. Si J et K sont deux parties finies de I, on a

$$\sum_{i\in J}a_i + \sum_{i\in K}b_i \leq \sum_{i\in J\cup K}a_i + \sum_{i\in J\cup K}b_i = \sum_{i\in J\cup K}(a_i+b_i) \leq \sum_{i\in I}(a_i+b_i),$$

D'où

$$\sum_{i\in J}a_i + \sum_{i\in K}b_i \leq \sum_{i\in I}(a_i+b_i)$$

En prenant la borne supérieure du membre gauche de cette inégalité quand K décrit l'ensemble des parties finies de I, on obtient

$$\sum_{i\in J}a_i + \sum_{i\in I}b_i \leq \sum_{i\in I}(a_i+b_i)$$

En procédant de la même façon sur J, on obtient

$$\sum_{i\in I}a_i + \sum_{i\in I}b_i \leq \sum_{i\in I}(a_i+b_i). \tag{2.1.4}$$

D'après les inégalités (2.1.3) et (2.1.4), on obtient le résultat.

(iv) Pour toute partie finie J de I, on a

$$\sum_{i\in J}\alpha a_i = \alpha\sum_{i\in J}a_i$$

D'où

$$\sum_{i\in J}\alpha a_i \leq \alpha\sum_{i\in I}a_i$$

Par définition de la somme d'une famille, on a

$$\sum_{i\in I}\alpha a_i \leq \alpha\sum_{i\in I}a_i \tag{2.1.5}$$

Comme la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors la famille $(\alpha a_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

D'autre part, on a

$$\sum_{i\in I}a_i = \sum_{i\in I}\frac{1}{\alpha}.\alpha a_i \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i\in I}\alpha a_i$$

En multipliant par α, on obtient

$$\alpha \sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} \alpha a_i \tag{2.1.6}$$

De (2.1.5) et (2.1.6), on déduit l'égalité. ■

Corollaire 2.1.2 *Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables alors pour tous réels positifs α et β, la famille $(\alpha a_i + \beta b_i)_{i\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{i \in I} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i \in I} a_i + \beta \sum_{i \in I} b_i.$$

Démonstration. Ceci résulte directement de la proposition précédente. ■

Théorème 2.1.3 *(Sous-familles d'une famille sommable)*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable.

(i) Si A est une partie quelconque de I alors la famille $(a_i)_{i\in A}$ est sommable et

$$\sum_{i \in A} a_i = \sum_{i \in I} \chi_A(i)\, a_i. \tag{2.1.7}$$

où χ_A est la fonction indicatrice de A dans I.

(ii) Si $A \subset B$ on a

$$\sum_{i \in A} a_i \leq \sum_{i \in B} a_i. \tag{2.1.8}$$

(iii) Si A et B sont des parties disjointes de I alors

$$\sum_{i \in A \cup B} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i. \tag{2.1.9}$$

Démonstration. (i) Notons que $\forall i \in I, 0 \leq \chi_A(i)\, a_i \leq a_i$ et donc $(a_i)_{i\in I}$ étant sommable, $(\chi_A(i)\, a_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

Soit J une partie finie de A. Puisque $\chi_A(i) = 1$ pour tout $i \in J$, on a

$$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in J} \chi_A(i)\, a_i \leq \sum_{i \in I} \chi_A(i)\, a_i$$

On en déduit que la famille $(a_i)_{i\in A}$ est sommable puisque

$$\sum_{i \in A} a_i \leq \sum_{i \in I} \chi_A(i)\, a_i \tag{2.1.10}$$

Inversement, soit K une partie finie de I. On a

$$\sum_{i\in K}\chi_A(i)\,a_i = \sum_{i\in K\cap A} a_i \leq \sum_{i\in A} a_i$$

L'inégalité précedente étant vérifiée pour toute partie finie K de I, on a

$$\sum_{i\in I}\chi_A(i)\,a_i \leq \sum_{i\in A} a_i \tag{2.1.11}$$

(2.1.10) et (2.1.11) démontrent l'égalité.

(ii) En observant que toute partie finie K de A est aussi une partie finie de B, on peut écrire

$$\sum_{i\in K} a_i \leq \sum_{i\in B} a_i$$

En prenant la borne supérieur du membre gauche de cette inégalité quand K d'écrit l'ensemble des parties finies de A, on obtient

$$\sum_{i\in A} a_i \leq \sum_{i\in B} a_i$$

(iii) Pour ce dernier point, on remarque que $\forall i \in I, \chi_A(i) + \chi_B(i) = \chi_{A\cup B}(i)$. ■

2.1.3 Suites exhaustives

Définition 2.1.3 *On appelle suite exhaustive de I toute suite croissante (J_n) de sous-ensembles finis de I dont la réunion vaut I. On dit alors que (J_n) épuise I, et on note $(J_n) \circlearrowleft I$.*

Lemme 2.1.1 *Si $(J_n) \circlearrowleft I$ et si J est un sous-ensemble fini de I alors*

$$\exists N > 0, \text{ tel que } J \subseteq J_n \text{ pour } n > N.$$

Démonstration. Si $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ alors chaque j_k tel que $1 \leq k \leq p$, est dans $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, donc dans un $J_{\varphi(k)}$, avec $\varphi : \{1, p\} \to \mathbb{N}$ et il suffit de prendre $N = \max \varphi(k)$.

Cela justifie le terme de la suite exhaustive : la suite "épuise" I en recouvrant tout sous-domaine fini à partir d'un certain rang. ■

Théorème 2.1.4 *Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille (sommable ou non) et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de I, finies ou infinies, telle que $(J_n) \circlearrowleft I$. Alors*

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} a_i.$$

Démonstration. Considérons pour cela la suite $S_n = \sum_{i\in J_n} a_i$, croissante car les J_n croissants et les a_i sont positifs.

Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, (S_n) n'est pas bornée ; en effet, en considérant par l'absurde un de ses majorants M, on peut trouver un sous-ensemble fini J de I tel que $\sum_{i\in J} a_i > M$, et d'après le lemme 2.1.1 J est dans les J_n à partir d'un certain rang N, d'où

$$S_n = \sum_{i\in J_n} a_i \geq \sum_{i\in J} a_i > M$$

Ce qui est absurde par définition de M. On en déduit que

$$\sum_{i\in I} a_i = \infty = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} a_i$$

Dans le cas où les a_i sont sommables, (S_n) est bornée par $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$, donc converge vers un réel $l \leq S$.

Si $l < S$, posons $\varepsilon = S - l > 0$; par définition de $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$, on peut trouver un sous-ensemble fini J de I tel que $\sum\limits_{i\in J} a_i > S - \varepsilon = l$, et comme dans le premier cas J est dans les J_n à partir d'un certain rang N, d'où

$$S_n \geq \sum_{i\in J} a_i > l$$

Ce qui est absurde. Et donc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = l = S = \sum_{i\in I} a_i.$$

La démonstration est ainsi achevée. ■

Remarque 2.1.3 *Si $I = \mathbb{N}$, on obtient*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Proposition 2.1.2 *Soit* $(a_i)_{i\in I}$ *une famille sur* I.

(i) Si on trouve une suite exhaustive $(J_n) \circlearrowleft I$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i\in J_n} a_i$ *soit finie, alors les* $(a_i)_{i\in I}$ *sont sommables et*

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} a_i. \tag{2.1.12}$$

(ii) Si on trouve une suite exhaustive $(J_n) \circlearrowleft I$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i\in J_n} a_i = \infty$ *alors les* $(a_i)_{i\in I}$ *ne sont pas sommables.*

Démonstration. (i) Considérons J un sous-ensemble fini de I. D'après le lemme 2.1.1, J est dans les J_n à partir d'un certain rang N, d'où

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in J_n} a_i \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} a_i$$

qui est indépendant de J, d'où la sommabilité voulue.

En appliquant le sens direct, on obtient l'égalité des sommes.

(ii) Si les (a_i) étaient sommables, on aurait un majorant M de $\sum_{i\in J} a_i$ indépendant du sous-ensemble J fini de I choisi ; or $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} a_i = \infty$, donc à partir d'un certain rang $\sum_{i\in J_n} a_i > M$, ce qui est impossible. ■

Théorème de Fubini, version faible

Théorème 2.1.5 *(Faible de Fubini)*

Soient $(a_i)_{i\in I}$ *une famille sommable sur* I *et* $(I_j)_{j\in J}$ *une partition de* I. *On a alors*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i. \tag{2.1.13}$$

Démonstration. Tout d'abord, la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable sur chaque I_j. Les nombres $\sum\limits_{i\in I_j} a_i$ sont par conséquent des réels positifs, et on peut donc parler de leur somme $\sum\limits_{j\in J}\left(\sum\limits_{i\in I_j} a_i\right)$.

Montrons que les paquets $\sum\limits_{i\in I_j} a_i$ sont sommables sur J. Soient D un sous-ensemble fini de J, et pour chaque j; $(J_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de I_j. On a alors, en appliquant le théorème 2.1.4 à la famille $(a_i)_{i\in I_j}$, et car D est fini de J

$$\begin{aligned}\sum_{j\in D}\sum_{i\in I_j} a_i &= \sum_{j\in D}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i\in J_j^n} a_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in D}\sum_{i\in J_j^n} a_i\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in \underset{j\in D}{\cup} J_j^n} a_i \leq M.\end{aligned}$$

L'ensemble de sommation est inclus dans I car $\left(\underset{j\in D}{\cup} J_j^n\right) \subset \left(\underset{j\in D}{\cup} I_j\right) \subset \left(\underset{j\in J}{\cup} I_j\right) = I$, donc la famille $\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

Calculons enfin la somme des paquets. Soit $(D_p) \circlearrowleft J$ (car J est au plus dénombrable)

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\sum_{i\in Ij} a_i &= \lim_{p\to\infty}\sum_{j\in D_p}\sum_{i\in I_j} a_i\\ &= \lim_{p\to\infty}\sum_{j\in D_p}\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in J_j^n} a_i\\ &= \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in D_p}\sum_{i\in J_j^n} a_i\end{aligned}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in Ij} a_i = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in \underset{j\in D_p}{\cup} J_j^n} a_i \tag{2.1.14}$$

Par ailleurs, à p fixé $\left(\bigcup_{j\in D_P} J_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ croit vers $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in D_p} J_j^n = \bigcup_{j\in D_p} I_j$ donc épuise $\bigcup_{j\in D_p} I_j$. On applique le théorème 2.1.4 à la famille $\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)_{j\in J}$, on obtient

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in \underset{j\in D_p}{\cup} J_j^n} a_i\right) = \lim_{p\to\infty}\sum_{i\in \underset{j\in D_p}{\cup} I_j} a_i = \sum_{i\in I} a_i$$

étant donné que $\left(\underset{j\in D_p}{\cup} I_j\right)_{p\in\mathbb{N}}$ épuise I. Donc

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{2.1.15}$$

d'après (2.1.14) et (2.1.15). ■

Proposition 2.1.3 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sur I. Si on peut trouver une partition $(I_j)_{j\in J}$ de I telle que les paquets $\sum\limits_{i\in I_j} a_i$ soient finis et sommables sur J, alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable sur I et*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{2.1.16}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est assez simple, il faut juste prouver que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, puis appliquer le théorème 2.1.5.

Montrons alors la sommabilité de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Soient A un sous-ensemble fini de I et M un majorant de $\sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{i\in I_j} a_i$. On a

$$A = A\cap I = A\cap\left(\underset{j\in J}{\cup} I_j\right) = \underset{j\in J}{\cup}(A\cap I_j) = \underset{j\in D}{\cup}(A\cap I_j)$$

où D est le support de la famille $\left(\sum\limits_{i\in I_j} a_i\right)_{j\in J}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A} a_i &= \sum_{j\in D}\sum_{i\in A\cap I_j} a_i\\ &\le \sum_{j\in D}\sum_{i\in I_j} a_i \le M\end{aligned}$$

Qui est indépendant de A, donc la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable sur I. En appliquant donc le théorème 2.1.5, on obtient

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i$$

La proposition est ainsi démontré. ■

Le théoreme suivant est évident dans le cas où les ensembles considérés sont finis : on peut dans ce cas la considérer comme une généralisation de la propriété d'associativité de la somme.

Notons qu'il n'y a pas d'énoncé analogue à ce théorème, pratique à formuler pour le cas des séries. C'est là la justification principale de l'emploi de la notion de famille sommable.

Théorème de Fubini, version forte (Sommation par paquets)

Théorème 2.1.6 *Soit* $(a_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque et soit* $(I_j)_{j\in J}$ *une partition quelconque de* I*. Alors on a*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{2.1.17}$$

Démonstration. Pour toute partie finie F de I, on a

$$F = \bigcup_{j\in J} (I_j \cap F).$$

L'ensemble F, étant fini, ne rencontre qu'un nombre fini de I_j; autrement dit, il existe une partie finie J_F de J telle que

$$F = \bigcup_{j\in J_F} (I_j \cap F).$$

D'après l'associativité des sommes finies, on a

$$\sum_{i\in F} a_i = \sum_{j\in J_F} \left(\sum_{i\in I_j\cap F} a_i \right)$$

Et en observant que $(I_j \cap F) \subset I_j$, on a

$$\sum_{i\in F} a_i \leq \sum_{j\in J_F} \left(\sum_{i\in I_j} a_i \right)$$

On remplace dans l'inégalité qui précéde J_F par J, puis F par I, on obtient

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} a_i \right). \tag{2.1.18}$$

Inverssement, pour toute partie finie J_0 de J, l'additivité simple (2.1.9) entraîne

$$\sum_{j\in J_0} \left(\sum_{i\in I_j} a_i \right) = \sum_{i\in \bigcup\limits_{j\in J_0} I_j} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

D'où

$$\sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} a_i \right) \leq \sum_{i\in I} a_i. \tag{2.1.19}$$

(2.1.18) et (2.1.19) donnent l'égalité souhaitée. ■

2.2 Familles sommables de nombres réels de signe quelconque et de nombres complexes

On considère maintenant des familles de nombres réels de signe quelconque (resp. de nombres complexes). On définit très simplement la notion de famille sommable et celle de somme en séparant les parties positives et les parties négatives (resp. parties imaginaires et parties réelles).

Remarque 2.2.1 *Il n'est plus possible d'admettre des valeurs infinies, car on risque de rencontrer l'opération interdite $\infty - \infty$.*

Rappelons quelques notations :

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq 0 \\ |a\,| & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Et on a

$$a = a^+ - a^- \quad \text{et} \quad |a| = a^+ + a^- \ .$$

Pour $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\frac{1}{2}\left(|\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a|\right) \leq |a| \leq |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a| \, .$$

Nous allons ici nous servir de ces notions pour écrire une famille quelconque $(a_i)_{i \in I}$ de nombres réels (resp. complexes) en deux familles de réels positifs, et étendre ainsi aux familles de réels de signe quelconque (resp. familles de nombres complexes) la notion de famille sommable.

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; soit I un ensemble quelconque d'indices.

Définition 2.2.1 *(Famille absolument sommable)*

La famille $(a_i)_{i \in I}$ est dite absolument sommable si et seulement si la famille $(|a_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Définition 2.2.2 *Une famille $(a_i)_{i\in I}$ du corp K est dite sommable si elle est absolument sommable. Autrement dit si*

$$\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty.$$

Lemme 2.2.1 *Soit A une partie de I, la famille $(a_i)_{i\in A}$ (restriction de la famille au sous-ensemble A) est encore sommable.*

Démonstration. Résulte immédiatement de l'inégalité $\sum_{i\in A} |a_i| \leq \sum_{i\in I} |a_i|$. ■

Définition 2.2.3 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de K.*

(i) Pour a_i réels, on pose

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$

(ii) Pour a_i complexes, on pose

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}\,(a_i)^+ - \sum_{i\in I} \mathrm{Re}\,(a_i)^- + i\left(\sum_{i\in I} \mathrm{Im}\,(a_i)^+ - \sum_{i\in I} \mathrm{Im}\,(a_i)^-\right)$$

Proposition 2.2.1 *Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres réels quelconques (resp. de nombres complexes) est sommable si, et seulement si, $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ (resp. $(\mathrm{Re}\, a_i)_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}\, a_i)_{i\in I}$) le sont.*

Démonstration. (i) Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels quleconque.

Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable. Puisque pour tout $i \in I$

$$|a_i| = a_i^+ + a_i^-, 0 \leq a_i^+ \leq |a_i| \text{ et } 0 \leq a_i^- \leq |a_i|$$

On obtient

$$\sum_{i\in I} a_i^+ < +\infty, \sum_{i\in I} a_i^- < +\infty$$

Inversement, si les familles $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables. Puisque

$$|a_i| = a_i^+ + a_i^-$$

On définit

$$\sum_{i\in I}|a_i| = \sum_{i\in I}a_i^+ + \sum_{i\in I}a_i^-$$

D'où $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable. D'aprés la définition 2.2.2 on conclut que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

(ii) $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable. Puisque pour tout $i \in I$

$$|\operatorname{Re} a_i| \leq |a_i| \text{ et } |\operatorname{Im} a_i| \leq |a_i|,$$

On obtient

$$\sum_{i\in I}|\operatorname{Re} a_i| < +\infty \text{ et} \sum_{i\in I}|\operatorname{Im} a_i| < +\infty,$$

Inversement, si $(\operatorname{Re} a_i)_{i\in I}$ et $(\operatorname{Im} a_i)_{i\in I}$ sont sommables, comme

$$0 \leq \sum_{i\in I}|a_i| \leq \sum_{i\in I}\left(|\operatorname{Re} a_i| + |\operatorname{Im} a_i|\right).$$

Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable. ■

La somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas toujours définie, contrairement au cas des familles de réels positifs.

2.2.1 Propriétés des familles sommables

Proposition 2.2.2 *Soient $(b_i)_{i\in I}$ et $(c_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs tels que $a_i = b_i - c_i$ alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et*

$$\sum_{i\in I}a_i = \sum_{i\in I}b_i - \sum_{i\in I}c_i.$$

Démonstration. Comme $(b_i)_{i\in I}$ et $(c_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et $a_i = b_i - c_i$ alors

$$|a_i| \leq |b_i| + |c_i|$$

D'où $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

De plus l'hypothèse $a_i^+ - a_i^- = b_i - c_i$ entraîne $a_i^+ + c_i = a_i^- + b_i$, donc

$$\sum_{i\in I} \left(a_i^+ + c_i\right) = \sum_{i\in I} \left(a_i^- + b_i\right).$$

On applique la linéarité de la somme définie dans le cas des familles à termes réels positifs pour conclure. ■

Corollaire 2.2.1 *Soeint $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables. Quels que soient les réels α et β, la famille $(\alpha a_i + \beta b_i)_{i\in I}$ est sommable et on a*

$$\sum_{i\in I} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i\in I} a_i + \beta \sum_{i\in I} b_i.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{i\in I} |\alpha a_i + \beta b_i| \leq |\alpha| \sum_{i\in I} |a_i| + |\beta| \sum_{i\in I} |b_i|$$

Et comme $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables alors $(\alpha a_i + \beta b_i)_{i\in I}$ est sommable. En outre

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} (\alpha a_i + \beta b_i) &= \sum_{i\in I} (\alpha a_i + \beta b_i)^+ - \sum_{i\in I} (\alpha a_i + \beta b_i)^- \\
&= \sum_{i\in I} (\alpha a_i)^+ + \sum_{i\in I} (\beta b_i)^+ - \sum_{i\in I} (\alpha a_i)^- - \sum_{i\in I} (\beta b_i)^- \\
&= \alpha \left(\sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- \right) + \beta \left(\sum_{i\in I} b_i^+ - \sum_{i\in I} b_i^- \right) \\
&= \alpha \sum_{i\in I} a_i + \beta \sum_{i\in I} b_i
\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue. ■

Corollaire 2.2.2 *Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de nombres complexes alors la famille $(\overline{a_i})_{i\in I}$ l'est aussi et*

$$\sum_{i\in I} \overline{a_i} = \overline{\sum_{i\in I} a_i}.$$

Démonstration. Découle de la linéairité de la somme et des propriétés des nombres complexes. ■

Théorème 2.2.1 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable des éléments de K.*

(i) La somme $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$ de cette famille est caractérisé par

$$\forall\varepsilon > 0, \exists J_0 \subset I \text{ tel que } \forall J \in P_f(I), J_0 \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} a_i - S\right| < \varepsilon.$$

(ii) Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Si pour tout $j \in J$, la famille $(a_i)_{i\in I_j}$ est sommable alors la famille $\left(\sum\limits_{i\in I_j} a_i\right)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i.$$

(iii) $l^1(I,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, l'application :

$$l^1(I,\mathbb{C}) \ni (a_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} |a_i|$$

est une norme, l'application :

$$l^1(I,\mathbb{C}) \ni (a_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} a_i \in \mathbb{C}$$

est linéaire et continue.

Démonstration. (i)1) Si $a_i \in \mathbb{R}$, soient $S^+ = \sum\limits_{i\in I} a_i^+$ et $S^- = \sum\limits_{i\in I} a_i^-$.$\exists J_+$ et $J_- \in P_f(I)$ tels que

$$J_+ \subset J \Rightarrow S^+ - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i\in J} a_i^+ \le S^+$$

Et

$$J_- \subset J \Rightarrow S^- - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i\in J} a_i^- \le S^-$$

Alors

$$J_+ \cup J_- \subset J \Rightarrow \left|S - \sum_{i\in J} a_i\right| \le \left|S^+ - \sum_{i\in J} a_i^+\right| + \left|S^- - \sum_{i\in J} a_i^-\right| \le \varepsilon.$$

(i)2) Si $a_i \in \mathbb{C}$, on écrit $a_i = \operatorname{Re} a_i + i \operatorname{Im} a_i$. On suppose que $\operatorname{Re} a_i > 0$ et $\operatorname{Im} a_i > 0$, la propriété est vraie pour une famille de nombres positifs car alors $m = \sup\limits_{J\in F(I)} \sum\limits_{i\in J} a_i$: Soit $J_0 \in P_f(I)$ tel que $m - \varepsilon \le \sum\limits_{i\in J_0} a_i$. Si $J_0 \subset J$ alors

$$\sum_{j\in J_0} a_j \le \sum_{j\in J} a_j \le S$$

(ii)1) Si $a_i \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{i \in I_j} a_i = \sum_{i \in I_j} a_i^+ - \sum_{i \in I_j} a_i^-$$

La proposition 2.2.2 implique

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i^+ \right) - \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i^- \right) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i &= \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i^+ \right) - \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i^- \right) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i. \end{aligned}$$

(ii)2) Si $a_i \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} \sum_{i \in I} a_i &= \sum_{i \in I} \mathrm{Re}\, a_i \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in Ij} \mathrm{Re}\, a_i \\ &= \sum_{j \in J} \mathrm{Re} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right) \\ &= \mathrm{Re} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i. \end{aligned}$$

La même relation est vraie pour la partie imaginaire, ce qui prouve l'identité.

(iii) Le fait que $l^1(I, \mathbb{C})$ soit un espace vectoriel et que $\sum_{i \in I} |a_i|$ est une norme résulte de l'inégalité triangulaire, et des propriétés de croissance et de linéarité de la somme d'une famille de nombres positifs.

Comme $a_i + b_i = a_i^+ + b_i^+ - a_i^- - b_i^-$, la proposition 2.2.2 entraîne l'additivité de la somme pour des familles de nombres réels. Que $\sum_{i \in I} \alpha a_i = \alpha \sum_{i \in I} a_i$ est clair si $\alpha, a_i \in \mathbb{R}$.

On déduit comme en (ii)2) la linéarité complexe. ■

2.2.2 Familles sommables et séries

L'énoncé suivant fait le lien entre la notion de famille sommable et celle de série absolument convergente. En tennant compte de la proposition 2.1.1 :

Théorème 2.2.2 *Soient D infini et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération quelconque de D. Pour que la famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels quelconque soit sommable il faut et il suffit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n}$ soit absolutment convergente. Si cette dernière condition est réalisée, on a*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n}. \tag{2.2.1}$$

Démonstration. Les assertions précédentes résultent immédiatement de la proposition 2.1.1 et du théorème 2.1.1.

Pour démontrer (2.2.1), observons qu'en vertu du théorème 2.1.1, on a

$$\sum_{i\in I} a_i^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n}^+ \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} a_i^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n}^-$$

D'autre part, on a par définition

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n}^-$$

Ce qui résulte immédiatement de la convergence des séries et du fait que $a_{j_n} = a_{j_n}^+ - a_{j_n}^-$.

■

Remarque 2.2.2 *On retrouve, comme corollaire immédiat de cet énoncé le fait bien connu que la convergence absolue d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{j_n}$ ne dépend pas de l'ordre des termes de la série. Dans la suite, pour désigner la somme d'une série absolument convergente, nous emploierons indifféremment la notation série ou la notation famille sommable.*

Théorème 2.2.3 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ est absolument convergente.*

Dans ce cas la somme de la série et la somme de la famille sommable coïncident.

Démonstration. Nous avons démontré ce résultat pour les séries à termes positifs. Comme la sommabilité et la convergence absolue sont des propriétés de $(|a_i|)_{i\in I}$, l'équivalence est donc aussi démontrée pour les familles de complexes.

Il reste à prouver que les sommes $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$, définie comme une limite, et $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$, définie comme une combinaison linéaire de 4 bornes supérieures sont égales. ■

Cela ne pose pas de problème non plus. Puisque le résultat est établi pour les familles à termes positifs et que pour les deux définitions de la somme des applications

$$(a_i)_{i\in I} \to \sum_{i\in I} a_i \text{ et } (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \to \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$$

sont linéaires alors que $a_i = \mathrm{Re}\left(a_i^+\right) - \mathrm{Re}\left(a_i^-\right) + i\left(\mathrm{Im}\left(a_i^+\right) - \mathrm{Im}\left(a_i^-\right)\right)$.

Il nous reste à examiner ce que devient la propriété de sommation par paquets dans le cas de familles de réels de signe quelconque.

Théorème 2.2.4 *(Sommation par paquets)*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels et soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I Alors, pour que la familles $(a_i)_{i\in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que chacune des familles $(a_i)_{i\in I_j}$ soit sommable, et que la famille $\left(\sum_{i\in I_j} |a_i|\right)_{i\in J}$ soit sommable.

Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, on a

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i\right). \tag{2.2.2}$$

Démonstration. Il résulte du théorème 2.1.6 que

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} |a_i|\right) \tag{2.2.3}$$

D'où la première assertion.

Supposons maintenant que les deux membres de (2.2.3) soient finis. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} a_i &= \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- \\ &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i^+\right) - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i^-\right).\end{aligned}$$

Le théoème 2.1.6 affirme notamment que les familles $\left(\sum_{i\in I_j} a_i^+\right)_{i\in J}$ et $\left(\sum_{i\in I_j} a_i^-\right)_{i\in J}$ sont sommables. En vertu de la proposition 2.2.2, leur différence l'est aussi, et on peut écrire

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{i\in I_j} a_i^-\right). \tag{2.2.4}$$

Le théorème (2.1.6) affirme aussi que pour chaque indice j, les familles $\left(a_i^+\right)$ et $\left(a_i^-\right)$ sont sommables sur I_j. La famille $(a_i)_{i\in I_j}$, qui s'obtient en prenant leur différence l'est donc aussi, et on peut écrire

$$\sum_{i\in I_j} a_i^+ - \sum_{i\in I_j} a_i^- = \sum_{i\in I_j} a_i.$$

En reportant dans (2.2.4), on obtient (2.2.2). ■

Corollaire 2.2.3 *(Théorème de Fubini)*

(i) Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille "double" de réels positifs. Alors on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}\right). \tag{2.2.5}$$

(ii) Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille double de nombres réels (finis). Alors si l'une des sommes

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} |a_{ij}|, \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} |a_{ij}|\right), \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} |a_{ij}|\right)$$

est finie, les deux autres le sont aussi, et on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}\right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente en observant que

$$I\times J = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times J = \bigcup_{j\in J} I\times\{j\}.$$

■

Corollaire 2.2.4 *(i) Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de réels positifs. Alors on a*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) \tag{2.2.6}$$

(ii) Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de réels de signe quelconque. Alors la famille double $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et l'égalité (2.2.6) est vérifiée.

Démonstration. Appliquer le corollaire précédent. ■

Nous allons généraliser le corollaire précédent au cas d'un nombre fini quelconque de familles.

Corollaire 2.2.5 *(i) Soient $I_1, I_2, ..., I_k$ des ensembles quelconques et soient $(a_{i_1}^{(1)})_{i_1 \in I_1}, ..., (a_{i_k}^{(k)})_{i_k \in I_k}$ des familles de réels positifs indéxées par $I_1, I_2, ..., I_k$ respectivement. Alors on a*

$$\sum_{(i_1,...,i_k) \in I_1 \times ... \times I_k} a_{i_1}^{(1)} ... a_{i_k}^{(k)} = \left(\sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1}^{(1)} \right) ... \left(\sum_{i_k \in I_k} a_{i_k}^{(k)} \right).$$

(ii) Soient maintenant $(a_{i_1}^{(1)})_{i_1 \in I_1}, ..., (a_{i_k}^{(k)})_{i_k \in I_k}$ des familles de réels de signe quelconque, supposées sommables. Alors la famille $\left(a_{i_1}^{(1)} ... a_{i_k}^{(k)} \right)$ est sommable, et l'égalité précédente est encore vérifiée.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence à partir du corollaire précédent. ■

Exemple 2.2.1 *Soit la famille $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}}$ indexée par $\mathbb{N}^{*2}$ et définie par*

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}, a_{mn} = \frac{(-1)^{mn}}{m^2 n^2}.$$

On rappelle que

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} |a_{mn}| = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{m^2 n^2}$$

D'où

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} |a_{mn}| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \right)^2$$

En utilisant l'égalité, cas particulier de la propriété de Fubini et puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Il vient

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} |a_{mn}| < +\infty.$$

La famille (a_{mn}) *est donc sommable sur* ${\mathbb{N}^*}^2$.

Reste à calculer sa somme T.

$$T = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2} \\ nm \text{ pair}}} \frac{1}{m^2n^2} - \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2} \\ nm \text{ impair}}} \frac{1}{m^2n^2}$$

Mais en notant P *l'esemble des entiers supérieurs à* 0 *pairs, et* I *l'ensemble des entiers supérieurs à* 0 *impairs, on a*

$$\left\{(m,n) \in {\mathbb{N}^*}^2, mn \text{ pair}\right\} = (P \times P) \cup (P \times I) \cup (I \times P)$$

Et

$$\left\{(m,n) \in {\mathbb{N}^*}^2, mn \text{ impair}\right\} = I \times I.$$

D'où

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2} \\ nm \text{ pair}}} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{(m,n)\in P\times P} \frac{1}{m^2n^2} + \sum_{(m,n)\in P\times I} \frac{1}{m^2n^2} + \sum_{(m,n)\in I\times P} \frac{1}{m^2n^2}$$

(Additivité par rapport aux ensembles) et

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2} \\ nm \text{ impair}}} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{(m,n)\in I\times I} \frac{1}{m^2n^2}.$$

En posant

$$U = \sum_{n\in P} \frac{1}{n^2} \text{ et } V = \sum_{n\in I} \frac{1}{n^2},$$

On obtient, en utilisant la propriété de Fubini (pour les familles positives)

$$\sum_{(m,n)\in P\times P} \frac{1}{m^2n^2} = \left(\sum_{m\in P} \frac{1}{m^2}\right) \left(\sum_{n\in P} \frac{1}{n^2}\right)$$

Et des égalités analogues pour les trois autres termes. D'où

$$T = U^2 + 2UV - V^2$$

En observant que

$$S = U + V$$

Et que

$$U = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2} = \frac{S}{4}$$

On obtient les valeurs de U *et* V

$$U = \frac{S}{4} \text{ et } V = \frac{3S}{4}$$

Il vient alors

$$T = S^2\left[\frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} - \frac{9}{16}\right] = -\frac{S^2}{8}$$

Soit

$$T = -\frac{\pi^4}{288}.$$

CHAPITRE 3

Familles sommables dans un espace vectoriel normé

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé, I un ensemble quelconque et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

3.2 Définitions et propriétés

Définition 3.2.1 *Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de E est dite sommable, de somme $S \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I) \text{ et } J_0 \subseteq J \Rightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i - S \right\| \leq \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

Remarque 3.2.1 *(i) La somme de la famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ est notée $S = \sum_{i\in I} a_i$.*

(ii) Un tel S s'il existe est unique.

Définition 3.2.2 *(Critère de Cauchy)*

Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de E vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), J_0 \cap J = \emptyset \Longrightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 3.2.1 *Toute famille sommable de E vérifie le critère de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E de somme S, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $J_0 \in P_f(I)$ tel que

$$\forall J \in P_f(I) : J \supset J_0 \Rightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i - S \right\| \leq \varepsilon$$

Considérons $K \in P_f(I)$ tel que $K \cap J_0 = \emptyset$, alors si on pose $J = J_0 \cup K$, on a $J_0 \subset J$ et

$$\sum_{i\in K} a_i = \sum_{i\in J} a_i - \sum_{i\in J_0} a_i$$

D'où

$$\left\| \sum_{i\in K} a_i \right\| = \left\| \sum_{i\in J} a_i - \sum_{i\in J_0} a_i \right\| \leq \left\| \sum_{i\in J} a_i - S \right\| + \left\| \sum_{i\in J_0} a_i - S \right\| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

La réciproque de ce théorème exige de E d'être un espace de Banach.

Théorème 3.2.2 *Dans un espace de Banach, une famille vérifiant le critère de Cauchy est sommable.*

Démonstration. Soit la famille $(a_i)_{i\in I}$ de E vérifiant le critère de Cauchy alors pour $\varepsilon = 1$, il existe un sous-ensemble fini $J_0 \subset I$ tel que

$$\forall J \in P_f(I), J \cap J_0 = \emptyset : \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| < 1$$

Supposons construits pour un entier $n \in \mathbb{N}$, des ensembles $J_0, J_1, ..., J_n$ de $P_f(I)$ tels que $J_0 \subset J_1 \subset ... \subset J_n$ et pour tout $1 \leq k \leq n$ et tout $J \in P_f(I)$

$$J \cap J_k = \emptyset \Longrightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| < \frac{1}{k+1}$$

Alors, il existe $J'_{n+1} \in P_f(I)$ tel que pour tout $J \in P_f(I)$

$$J \cap J'_{n+1} = \emptyset \Longrightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| < \frac{1}{n+2}$$

D'où, en posant $J_{n+1} = J'_{n+1} \cup J_n$, on a $J_n \subset J_{n+1}$ et pour tout $J \in P_f(I)$

$$J \cap J_{n+1} = \emptyset \Longrightarrow \left\|\sum_{i\in J} a_i\right\| < \frac{1}{n+2}$$

On a donc construit par récurrence une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $P_f(I)$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $J \in P_f(I)$

$$J \cap J_{n+1} = \emptyset \Longrightarrow \left\|\sum_{i\in J} a_i\right\| < \frac{1}{n+2}$$

Montrons que la suite $\left(\sum_{i\in J_n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy de vecteurs de E.

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \left\|\sum_{i\in J_{n+p}} a_i - \sum_{i\in J_n} a_i\right\| = \left\|\sum_{i\in J_{n+p}\setminus J_n} a_i\right\| < \frac{1}{n}.$$

De plus E est supposé complet, alors $\left(\sum_{i\in J_n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $S \in E$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left\|\sum_{i\in J_n} a_i - S\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors pour tout $J_0 \in P_f(I)$ tel que $J_{n_0} \subset J$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in J} a_i - S\right\| &= \left\|\left(\sum_{i\in J_{n_0}} a_i + \sum_{i\in J\setminus J_{n_0}} a_i\right) - S\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i\in J_{n_0}} a_i - S\right\| + \left\|\sum_{i\in J\setminus J_0} a_i\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

D'où $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable. ■

Proposition 3.2.1 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E alors l'ensemble $D = \{i \in I : a_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, posons $D_n = \{i \in I : \|a_i\| > \frac{1}{n}\}$. Alors, on a

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

D'autre part, comme la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors

$$\forall n \geq 1, \exists J_n \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), J_n \cap J = \emptyset \Longrightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| \leq \frac{1}{n}.$$

En particulier, on a $D_n \subseteq J_n$, et par conséquent D_n est fini. D'où $\{i \in I : a_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable. ■

Proposition 3.2.2 *Toute sous-famille d'une famille sommable d'un Banach est sommable.*

Démonstration. Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ d'élements de E, elle vérifie le critère de Cauchy c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), J_0 \cap J = \emptyset \Longrightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| \leq \varepsilon.$$

Soient $K \subset I$ et la sous-famille associée $(a_i)_{i\in K}$. On pose $K_0 = K \cap J_0$; on a alors

$$\forall J \in P_f(I) : K_0 \cap J = J_0 \cap J$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), K_0 \cap J = \emptyset \Longrightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $(a_i)_{i\in K}$ vérifie le critère de Cauchy et est donc sommable puisque E est complet. ■

Proposition 3.2.3 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable, de somme S. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $(f(a_i))_{i\in I}$ est une famille sommable et,*

$$f(S) = \sum_{i\in I} f(a_i).$$

Démonstration. Tout repose sur l'inégalité $\|f(a)\| \leq k\|a\|, \forall a_i \in E$ qui traduit la continuité de l'application f.

Soit $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$ alors $\|S_J - S\| \leq \frac{\varepsilon}{k}$ pour $J \in P_f(I)$ et $J \supset J_0 \in P_f(I)$ de la définition de la sommabilité de la famille $(a_i)_{i\in I}$ alors

$$\|f(S_J) - f(S)\| \leq k\|S_J - S\| \leq \varepsilon$$

Donc la famille $(f(a_i))_{i\in I}$ est sommable de somme $f(S)$. ■

3.3 Familles normalement sommables

Définition 3.3.1 *On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ de E est normalement sommable si la famille $(\|a_i\|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}^+$.*

Théorème 3.3.1 *Dans un Banach, toute famille $(a_i)_{i\in I}$ normalement sommable est sommable.*

Démonstration. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille dans un espace de Banach, normalement sommable. Alors la famille $(\|a_i\|)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), J_0 \cap J = \emptyset \Longrightarrow \sum_{i\in J} \|a_i\| \leq \varepsilon.$$

Comme

$$\left\|\sum_{i\in J} a_i\right\| \leq \sum_{i\in J} \|a_i\|$$

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), J_0 \cap J = \emptyset \Longrightarrow \left\|\sum_{i\in J} a_i\right\| \leq \varepsilon.$$

La famille $(a_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy et comme E est complet, elle est sommable.

■

Théorème 3.3.2 *Une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel normé de dimension finie est sommable si et seulement si elle est normalement sommable.*

Démonstration. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach, donc toute famille de vecteurs de E normalement sommable est sommable d'après le théorème 3.3.1.

Réciproquement, comme $\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$ on peut supposer que E est un $\mathbb{R}$-espace vecoriel de dimension p. Considèrons une base $B = (e_1, ..., e_p)$ de E, alors pour tout $i \in I$, on a

$$a_i = \sum_{k=1}^{p} a_i^k e_k$$

où $a_i^1, ..., a_i^p$ sont les coordonnées de a_i dans la base B. Comme E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, on munit E de la norme $\|.\|_B$ associée à la base B définie par

$$\|a_i\|_B = \max_{1 \leq k \leq p} \left(\left|a_i^k\right|\right)$$

Comme la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable de somme S, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), J_0 \subset J \Longrightarrow \left\| S - \sum_{i \in J} a_i \right\|_B < \varepsilon$$

On en déduit donc que la sommabilité de la famille $(a_i)_{i \in I}$ dans E équivaut à la sommablité de chaque famille de cordonnées $\left(a_i^k\right)_{i \in I}$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $1 \leq k \leq p$. Or, dans $\mathbb{R}$ la sommabilité équivaut à l'absolue sommabilité, donc les familles $\left(\left|a_i^k\right|\right)_{i \in I}$ sont sommables pour tout $1 \leq k \leq p$, donc d'après la définition 2.1.1, il existe des réels $M_1, ..., M_p > 0$ tels que, pour tout $J \in P_f(I)$ et tout $1 \leq k \leq p$, on a

$$\sum_{i \in J} \left|a_i^k\right| \leq M_k$$

D'où

$$\sum_{i \in J} \|a_i\|_B \leq \max\left(M_1, ..., M_p\right)$$

Et ainsi la famille $(\|a_i\|_B)_{i \in I}$ est sommable dans E. ■

Proposition 3.3.1 *(Application multilinéaire et famille sommable)*

Soit E et F deux espaces normés, et soit f une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans un espace normé complet E'. Soit $(a_i)_{i \in I}$ (resp.$(b_j)_{j \in J}$) une famille sommable d'éléments de E (resp. de$F$) de somme S_1 (resp.S_2).

Lorsque ces deux familles sont absolument sommables, la famille des $f(a_i, b_j)$ est aussi absolument sommable, et sa somme est $f(S_1, S_2)$.

Démonstration. Comme f est continue, il existe une constante k telle que

$$\|f(x, y)\| \leq k \|x\| . \|y\| \quad \text{pour tout } x, y.$$

On a donc

$$\|f(a_i, b_j)\| \leq k \|a_i\| . \|b_j\|$$

Or les familles $\|a_i\|$ et $\|b_j\|$ étant sommables, la famille produit l'est aussi, donc la famille $f(a_i, b_j)$ est absolument sommable, et comme E' est complet, elle est sommable.

Remarquons maintenant que pour tout $a \in E$ on a

$$\sum_{j\in J} f(a, b_j) = f(a, B)$$

De même pour $b \in F$ on a

$$\sum_{i\in I} f(a_i, b) = f(A, b)$$

Donc, d'après l'associativité de la somme, on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} f(a_i, b_j) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} f(a_i, b_j)\right) = \sum_{i\in I} f(a_i, B) = f(A, B).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

3.4 Regroupements

Proposition 3.4.1 *Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'un espace de Banach E et $(I_n) \circlearrowleft I$. La limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i\in I_n} a_i$ existe et ne dépend pas de la suite exhaustive choisie. On a de plus*

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I_n} a_i.$$

Démonstration. Soit $S_n = \sum_{i\in I_n} a_i$; montrons que (S_n) est de Cauchy. En effet, soeint n et p des entiers positifs, on a

$$\begin{aligned}\|S_{n+p} - S_n\| &= \left\|\sum_{i\in I_{n+p}} a_i - \sum_{i\in I_n} a_i\right\| = \left\|\sum_{i\in I_{n+p}\setminus I_n} a_i\right\| \\ &\leq \sum_{i\in I_{n+p}\setminus I_n} \|a_i\| = \sum_{i\in I_{n+p}} \|a_i\| - \sum_{i\in I_n} \|a_i\|.\end{aligned}$$

Or la suite $S_n = \sum_{i\in I_n} \|a_i\|$ converge car les $(a_i)_{i\in I_n}$ sont sommables, donc (S_n) est de Cauchy. On en déduit l'existence de $l = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$.

Montrons à présent que la limite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie. Soient $\left(I'_n\right) \circlearrowleft I, S'_n = \sum_{i\in I'_n} a_i$ et $l' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I'_n} a_i$. On construit par récurrence les deux suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes φ et ψ telles que

$$I_{\varphi(1)} \subset I'_{\psi(1)} \subset I_{\varphi(2)} \subset I'_{\psi(2)} \subset I_{\varphi(3)} \subset I'_{\psi(3)} \subset ...$$

On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|l' - l\| \leq \left\|l' - S'_{\psi(n)}\right\| + \left\|S'_{\psi(n)} - S_{\varphi(n)}\right\| + \left\|S_{\varphi(n)} - l\right\|.$$

Le premier et le troisième terme tendent vers 0. Quant au second

$$\begin{aligned}\left\|S'_{\psi(n)} - S_{\varphi(n)}\right\| &= \left\|\sum_{i\in I'_{\psi(n)}} a_i - \sum_{i\in I_{\varphi(n)}} a_i\right\| = \left\|\sum_{i\in I'_{\psi(n)}\setminus I_{\varphi(n)}} a_i\right\| \\ &\leq \sum_{i\in I'_{\psi(n)}\setminus I_{\varphi(n)}} \|a_i\| \leq \sum_{i\in I_{\varphi(n+1)}\setminus I_{\varphi(n)}} \|a_i\|. \\ &\leq \sum_{i\in I_{\varphi(n+1)}} \|a_i\| - \sum_{i\in I_{\varphi(n)}} \|a_i\|,\end{aligned}$$

Il tend vers 0. D'où l'égalité des deux limites. ■

Remarque 3.4.1 *La réciproque est fausse. Considérons par exemple la famille* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ainsi que la suite exhaustive* $I_n = \{0, ..., 2n\}$ *: on a* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i\in I_n} (-1)^i = 1$*, et pourtant la famille n'est pas sommable.*

Théorème 3.4.1 *Soient* $(a_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de somme* S*, et* $(I_k)_{k\in K}$ *une partition de* I*. Si pour tout* $k \in K$ *la famille* $(a_i)_{i\in I_k}$ *est sommable de somme* S_k*, alors la famille* $(S_k)_{k\in K}$ *est sommable de somme* S *et l'on a*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right).$$

Démonstration. Tout d'abord, la famille $(a_i)_{i\in I}$ sur chaque I_k ; en effet, $I_k \subset I$, donc

$$\sum_{i\in I_k} \|a_i\| \leq \sum_{i\in I} \|a_i\|$$

qui est fini par hypothèse.

Montrons ensuite que les paquets $\sum\limits_{i\in I_k} a_i$ sont sommables sur K. Soit J un sous-ensemble fini de K, et pour chaque $i \in (I_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de I_k. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in J}\left\|\sum_{i\in I_k} a_i\right\| \leq \sum_{k\in J}\sum_{i\in I_k}\|a_i\| &= \sum_{k\in J}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_k^n}\|a_i\| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in J}\sum_{i\in I_k^n}\|a_i\| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in \underset{k\in J}{\cup} I_k^n}\|a_i\| \\
&\leq M
\end{aligned}$$

Car $\bigcup\limits_{k\in J} I_k^n \subseteq \bigcup\limits_{k\in J} I_k \subseteq \bigcup\limits_{k\in K} I_k = I$ pour tout n.

Calculons enfin la somme des paquets. Soit $(J_p) \circlearrowleft K$

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i &= \lim_{p\to+\infty}\sum_{k\in J_p}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_k^n} a_i \\
&= \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in J_p}\sum_{i\in I_k^n} a_i \\
&= \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in \underset{k\in J_p}{\cup} I_k^n} a_i \\
&= \lim_{p\to+\infty}\sum_{i\in \underset{k\in J_p}{\cup} I_k} a_i \\
&= \sum_{i\in I} a_i
\end{aligned}$$

Car $\left(\bigcup\limits_{k\in J_p} I_k^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \circlearrowleft \bigcup\limits_{k\in J_p} I_k$ et $\left(\bigcup\limits_{k\in J_p} I_k\right) \circlearrowleft I$. ■

Théorème 3.4.2 *Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un Banach E et $(I_k)_{k\in K}$ une partition de I telle que :*

(i) $\forall k \in K, (||a_i||)_{i\in I_k}$ est sommable et si $S_k = \sum\limits_{i\in I_K}\|a_i\|$,

(ii) $(S_k)_{k\in K}$ est sommable.

Alors $(a_i)_{i\in I}$ est normalement sommable.

Démonstration. $\forall J \in P_f(I), K_J = \{k \in K : J \cap I_k \neq \emptyset\}$ est fini. En effet,

$$k \to a_k \in J \cap I_k$$

est une injection de K_J dans J car $k \neq k' \Longrightarrow a_k \neq a_{k'}$ puisque $a_k \in I_k, a_{k'} \in I_{k'}$ et $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$ ($(I_k)_{k\in K}$ une partition de I). On conclut donc que le cardinal de K_J est inférieur à celui de J qui est fini, ainsi K_J est fini.

On a alors $J = \underset{k\in K}{\cup} J \cap I_k$ avec $\forall k, k' \in K_J, k \neq k' \Longrightarrow (J \cap I_k) \cap (J \cap I_{k'}) = \emptyset$ et

$$\begin{aligned} S_J &= \sum_{i \in \underset{k\in K_J}{\cup}(J\cap I_k)} a_i = \sum_{k\in K_J}\left(\sum_{i\in J\cap I_k} a_i\right) \\ &\leq \sum_{k\in K_J}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right) \leq \sum_{k\in K_J}\left(\sum_{i\in I_k} \|a_i\|\right) \\ &\leq \sum_{k\in K_J} S_k \leq \sum_{k\in K} S_k. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des sommes sur les parties finies de la famille $(a_i)_{i\in I}$ est majoré et la famille est sommable. ■

3.5 Relation entre familles et séries

Définition 3.5.1 *On rappelle qu'une série $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite commutativement convergente si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (permutation des indices), la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ est convergente.*

Lemme 3.5.1 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E, pour toute énumération*

$$I = \{i_0, i_1, ..., i_n, ...\}$$

de l'ensemble quelconque I, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{i_n}$ est convergente et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i_n}.$$

Démonstration. Désignons par S la somme de la famille sommable, soit $\varepsilon > 0$ donné et soit K_0 un sous-ensemble fini de I vérifiant (3.2.1), il existe un entier N tel que

$$K_0 \subset \{i_0, i_1, ..., i_N\}$$

Pour tout entier $n \geq N$, l'ensemle $K = \{i_0, i_1, ..., i_n\}$ contient K_0, donc

$$\left\| S - \sum_{k=0}^{n} a_{i_k} \right\| = \left\| S - \sum_{i \in K} a_i \right\| < \varepsilon.$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{i_n}$ est convergente. ■

Proposition 3.5.1 *(Invariance par permutation)*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de somme S. Alors pour toute bijection $\sigma : I \to I$, la famille $\left(a_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est sommable de somme S. C'est à dire

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que $(b_i)_{i\in I}$ est sommable de même somme S que $(a_i)_{i\in I}$, les b_i étant définis par $b_i = a_{\sigma(i)}$.

L'hypothèse de sommabilité de $(a_i)_{i\in I}$ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \forall J \in P_f(I), J_0 \subseteq J \Rightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i - S \right\| \leq \varepsilon \qquad (3.5.1)$$

Posons

$$J_0' = \sigma^{-1}(J_0) = \{\sigma(i) : i \in J_0\}$$

L'ensemble J_0' est fini car en bijection avec l'ensemble fini J_0 par σ^{-1}. Pour tout J' fini contenant J_0', l'ensemble fini $\sigma(J')$ contient $\sigma(J_0')$ et ce dernier ensemble est égal à J_0. On a donc en appliquant (3.5.1) avec $\sigma(J')$ au lieu de J

$$\left\| \sum_{i\in\sigma(J')} a_i - S \right\| \leq \varepsilon$$

Et ceci est vrai pour tout J' fini contenant J_0'. D'autre part on a

$$\sum_{i\in\sigma(J')} a_i = \sum_{i\in J'} a_{\sigma(i)} = \sum_{i\in J'} b_i$$

Nous avons donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J'_0 \in P_f(I) : \forall J' \in P_f(I), J'_0 \subseteq J', \left\| \sum_{i \in J'} b_i - S \right\| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit que $(b_i)_{i \in I}$ est sommable de somme S. ■

Théorème 3.5.1 *Soit $(a_i)_{i \in I}$ une suite d'éléments d'un Banach E. Alors $(a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de somme S si, et seulement si, pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to I$, la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$ converge de somme S.*

Démonstration. Supposons que $(a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de somme S, et soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un sous-ensemble fini $J_0 \subset I$ tel que

$$\forall J_0 \text{ fini} : J \supseteq J_0, \left\| S - \sum_{i \in J} a_i \right\| \leq \varepsilon$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$J_0 \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), ..., \sigma(n_0)\}$$

Ainsi

$$\forall n \geq n_0, J_0 \subseteq J = \{\sigma(0), \sigma(1), ..., \sigma(n)\}$$

Et par suite on a

$$\left\| S - \sum_{i=0}^{n} a_{\sigma(i)} \right\| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\left(a_{\sigma(i)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est convergente, d'où la famille $\left(a_{\sigma(i)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est de somme

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} a_{\sigma(i)}.$$

Supposons maintenant la famille $(a_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, alors elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall J_0 \in P_f(\mathbb{N}), \exists J \in P_f(\mathbb{N}) \text{ tel que } J_0 \cap J = \emptyset \text{ et } \left\| \sum_{i \in J} a_i \right\| \geq \varepsilon.$$

Pour $J_0 = \emptyset$, il existe $K \in P_f(\mathbb{N})$ tel que $\left\| \sum_{i \in K} a_{i_0} \right\| \geq \varepsilon$; on pose $j_0 = \max K$. Maintenant pour $J_0 = [0, j_0]$, il existe J_1 tel que $J_1 \cap J_0 = \emptyset$ et $\left\| \sum_{i \in J_1} a_i \right\| \geq \varepsilon$; on pose $j_1 = \max J_1$. Ainsi, on construit une suite

$$J_p = \{n_{p,1}, ..., n_{p,r_p}\} \subseteq U_p = [j_{p-1} + 1, j_p],$$

où $j_p = \max J_p$, telle que $\left\|\sum_{i\in J_p} a_i\right\| \geq \varepsilon$. Évidemment, on a $\mathbb{N} = \underset{p}{\cup} U_p$. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ telle que sa restriction à U_p vérifie $\sigma(j_{p-1}+k) = n_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq r_p$. Finalement, on a

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{s=j_{p-1}+1}^{j_{p-1}+r_p} a_{\sigma(s)}\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{r_p} a_{n_{p,k}}\right\| \\ &= \left\|\sum_{i\in J_p} a_i\right\| \geq \varepsilon.\end{aligned}$$

D'où $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy et donc elle est divergente. ■

Remarque 3.5.1 *Le cas où K est fini donne un résultat plus simple : Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, et $(I_k)_{k=\overline{1,n}}$ une partition de I ; si pour tout k, la famille $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable de somme S_k, alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$.*

Remarque 3.5.2 *On voit donc bien qu'une série convergente de terme général a_n n'est pas forcément sommable, en fait elle ne vérifie même pas forcément le critère de Cauchy ! Penser à la série semi-convergente de terme général $(-1)^n/\ln(n)$. Les sommes partielles correspondent à des sommes finies particulières.*

Proposition 3.5.2 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs sur E. Notons A l'ensemble des familles $a = (a_i)_{i\in I}$, muni de la norme $\|a\| = \left(\sum_{i\in I}\|a_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ où $a_i \in A_i$, telles que la famille $\left(\|a_i\|^2\right)_{i\in I}$ soit sommable. Alors*

(i) A est un espace vectoriel.

(ii) A muni de $\|.\|$ est un espace de Banach.

Dans ce cas on dit que A est somme directe des espaces de Banach A_i et on note

$$A := \bigoplus_{i\in I} A_i.$$

Démonstration. (i) A est un sous-espace vectoriel du produit cartésien $\prod\limits_{i\in I} A_i$. En effet, il est stable par multiplication par un scalaire. D'autre part, si $a = (a_i)_{i\in I}$ et

$b = (b_i)_{i\in I}$ sont deux éléments de A et $J \in P_f(I)$ alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J} \|a_i + b_i\|^2 &\leq \sum_{i\in J} (\|a_i\| + \|b_i\|)^2 \\ &\leq \sum_{i\in J} \|a_i\|^2 + \sum_{i\in J} \|b_i\|^2 + 2\sum_{i\in J} \|a_i\| . \|b_i\|\end{aligned}$$

Et par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J} \|a_i + b_i\|^2 &\leq \sum_{i\in J} \|a_i\|^2 + \sum_{i\in J} \|b_i\|^2 + 2\sqrt{\sum_{i\in J} \|a_i\|^2}\sqrt{\sum_{i\in J} \|b_i\|^2} \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{i\in J} \|a_i\|^2} + \sqrt{\sum_{i\in J} \|b_i\|^2}\right)^2 \\ &\leq (\|a_i\| + \|b_i\|)^2 .\end{aligned}$$

Ainsi on obtient par la définition 2.1.1 que la famille $\|a_i + b_i\|^2$ est sommable et

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

D'où $(a + b)$ appartient à A, et donc A est un espace vectoriel.

(ii) Soit $a_n = (a_i^n)_{i\in I}$ une suite de Cauchy dans A. Pour un $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que $\|a_n - a_m\| \leq \varepsilon$ pour tous $n, m \geq N$. Or $\|a_i^n - a_i^m\| \leq \|a_n - a_m\| \leq \varepsilon$, il vient alors que pour tout i, $(a_i^n)_n$ est une suite de Cauchy, et comme l'espace A_i est complet, $(a_i^n)_n$ converge vers un élément $a_i \in I$. Posons $a = (a_i^n)_{i\in I}$ et soit J un sous-ensemble arbitraire fini de I, on a

$$\left(\sum_{i\in J} \|a_i^n - a_i^m\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|a_n - a_m\| \leq \varepsilon,$$

et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\left(\sum_{i\in J} \|a_i^n - a_i^m\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit par la définition 2.1.1 que $\|a_n - a\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$, ce qui montre, d'une part que $a_n \to a$, et donc a, appartient à A, et d'autre part que $(a_n)_n$ converge vers a. ■

CHAPITRE 4

Familles sommables dans un groupe topologique commutatif

4.1 Introduction

Peut-on s'attendre à ce que la théorie précédente soit valable dans tout groupe topologique commutatif et séparé, dont la loi de composition est notée additivement?

Dans cette partie, nous exposons la notion de sommabilité dans un groupe topologique commutatif.

Définition 4.1.1 *On appelle groupe topologique un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une topologie rendant les applications*

$$\begin{array}{rcl} G \times G \mapsto G & \quad \textit{et} \quad & G \mapsto G \\ (x, y) \mapsto x * y & & x \mapsto x^{-1} \end{array}$$

continues.

Proposition 4.1.1 *(i) Dans un groupe topologique, les applications $x \mapsto a * x$ et $x \mapsto x * a$ sont des homéomorphismes.*

(ii) La topologie est déterminée par la donnée des voisoinages de l'élément neutre e.

(iii) Un groupe topologique G est dit séparé si et seulement si le singleton $\{e\}$ est fermé dans G. Egalement, G est séparé si et seulement si l'intersection des voisinages de e est réduite à $\{e\}$.

Démonstration. (i) Si U est un ouvert de A une partie quelconque alors $U * A$ est un ouvert (puisque s'écrit $\underset{a \in A}{\cup} U * a$) et de même, $A * U$ est un ouvert.

(ii) Tout groupe quotient G/H d'un groupe topologique G par un sous-groupe normal H est encore un groupe topologique, lorsque G/H est muni de la topologie quotient. De plus G/H est séparé si et seulement si H est fermé.

(iii) Un groupe topologique est naturellement muni de deux structures uniformes (à droite et à gauche) qui induisent sa topologie, est qui coïncident si le groupe est commutatif. Un groupe topologique est séparé par conséquent complétement régulier. Tout morphisme de groupes topologiques est uniformément continu pour les structures uniformes à droite (resp.à gauche) associées. ■

Théorème 4.1.1 *Un groupe $(G, *)$ muni d'une topologie est un groupe topologique si et seulement si l'application $G \times G \mapsto G; (x, y) \mapsto x * y^{-1}$ est continue.*

Démonstration. Les deux axiomes de la définition entraînent évidemant que l'application

$$G \times G \mapsto G;$$
$$(x, y) \mapsto x * y^{-1}$$

est continue.

Réciproquement,

$$G \times G \mapsto G;$$
$$(x, y) \mapsto x * y^{-1}$$

entraîne $G \mapsto G; x \mapsto x^{-1}$ car $x \mapsto e * x^{-1} = x^{-1}$, est alors continue.

Et

$$\begin{array}{ll} G \times G \mapsto G & \text{et } G \mapsto G \\ (x, y) \mapsto x * y^{-1} & \quad x \mapsto x^{-1} \end{array}$$

entraînent

$$G \times G \mapsto G$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

car $(x, y) \mapsto x * (y^{-1})^{-1} = x * y$, est alors continue. ∎

Définition 4.1.2 *On appelle filtre sur un ensemble I, un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de I qui possède les propriétés suivantes :*

(i) Toute partie de I contenant un ensemble de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

(ii) Toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

(iii) La partie vide de I n'appartient pas à $\mathcal{F}$.

De (i) et (ii) on déduit que toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{F}$ est non vide.

Un filtre $\mathcal{F}$ sur I définit sur I une structure dont les axiomes sont (i), (ii) et (iii); cette structure est dite structure d'ensemble filtré, et l'ensemble I, muni de cette structure, est appelé ensemble filtré par le filtre $\mathcal{F}$.

4.2 Définitions

Soit $(G, +)$ un groupe topologique séparé. Soit I un ensemble quelconque et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. Le groupe est noté ici additivement et O désigne son élément neutre.

Définition 4.2.1 *On dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si l'application $J \mapsto S_J$ a une limite suivant le filtre $\mathcal{F}$ des sections de l'ensemble filtrant des parties finies de I ordonnées par la relation $\subset$. Cette limite est alors appelée la somme de la famille $(a_i)_{i \in I}$.*

La définition précédente équivaut à la suivante.

Définition 4.2.2 *La famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et a pour somme S, si pour tout voisinage V de O dans G, il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute partie finie $J \supset J_0$ de I, on ait*

$$S - \sum_{i \in J} a_i \in V.$$

Remarque 4.2.1 *(i) Lorsqu'un tel S existe, il est unique ; on l'appel somme de la famille et on le note $\sum_{i\in I} a_i$.*

Démontrons que S est unique lorsqu'il existe.

Pour tout voisinage U de O, il existe un voisinage symétrique V de O tel que

$$V + V \subset U.$$

Des relations $S - S_J \in V$ et $S' - S_J \in V$ on tire $S - S' \in V + V$, d'où

$$S - S' \in U$$

L'élément $S - S'$ appartient à tout voisinage de O et comme G est séparé on a donc

$$S - S' = O, \text{ ou } S = S'.$$

(ii) Si I est quelconque et si I' désigne une partie de I telle que $a_i = 0$ pour tout $i \notin I'$ alors les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in I'}$ sont simultanément sommables (ou non sommables) et ont des sommes égales.

Proposition 4.2.1 *Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables d'éléments de G sur le même ensemble d'indices I, et soient S et S' leurs sommes respéctivement. La famille $(c_i)_{i\in I}$, où $c_i = a_i + b_i$ est sommable et de somme $S + S'$.*

Démonstration. Le résultat découle directement de la définition de famille sommable de points de G. ∎

Définition 4.2.3 *(Critère de Cauchy)*

On dit qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de G satisfait au critère de Cauchy si, pour tout voisinage V de O, il existe $J_0 \in P_f(I)$ tel que pour tout $K \in P_f(I)$, disjoint de J_0, on ait

$$S_K \in V.$$

Autrement dit, après qu'on ait retiré de la famille un nombre fini d'éléments "trop gros", toutes les sommes finies sont petites.

Désignons maintenant par $A(J_0)$ l'ensemble des S_J pour lesquels $J_0 \subset J$.

Proposition 4.2.2 *Dire que la famille $(a_i)_{i\in I}$ satisfait au critère de Cauchy équivaut à dire que pour tout voisinage V de O, il existe un $J_0 \in P_f(I)$ et un translaté $a+V$ de V tel que $A(J_0) \subset a+V$.*

Démonstration. Supposons que $(a_i)_{i\in I}$ satisfait au critère de Cauchy; tout J contenant J_0 est de la forme $J_0 \cup K$, où K est disjoint de J_0; donc $S_J \subset S_{J_0} + S_K$. De la relation $S_K \in V$ résulte donc

$$S_J \in S_{J_0} + V$$

D'où

$$A(J_0) \subset S_{J_0} + V.$$

Etant donné V un voisinage de O, il existe un voisinage symétrique U de O tel que $U + U \subset V$.

Si par hypothèse il existe $J_0 \in P_f(I)$ et $a \in G$ tel que $A(J_0) \subset a + U$, on a pour tout K disjoint de J_0

$$S_{J_0} \in a + U; S_{J_0} + S_K \in a + U$$

D'où

$$S_K \in U + U \subset V.$$

Donc la famille $(a_i)_{i\in I}$ satisfait au critère de Cauchy. ■

Corollaire 4.2.1 *Toute famille sommable satisfait au critère de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable alors pour tout voisinage V de O, il existe $J_0 \in P_f(I)$ tel que pour tout $J \in P_f(I)$ contenant J_0 on ait

$$S - S_J \in V$$

Alors la condition $A(J_0) \subset a + V$ se vérifie en prenant pour a la somme S de la famille.

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 4.2.2 *La réciproque de ce corollaire est fausse en général. Elle n'est vraie que dans les espaces normés complet.*

Proposition 4.2.3 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille satisfaisant au critère de Cauchy. Pour tout voisinage V de O, on a*

$$a_i \in V \text{ sauf pour un nombre fini d'indices } i.$$

Démonstration. Il suffit pour le voir d'appliquer le critère de Cauchy aux ensembles K de la forme $\{i\}$, où $i \notin J_0$. ■

Corollaire 4.2.2 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable dont l'élément neutre admet un système fondamental dénombrable de voisinages, l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit (V_n) un système fondamental dénombrable de voisinages de O. Pour tout n, l'ensemble I_n des indices i tels que $a_i \notin V_n$ est fini. Comme l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ n'est autre que la réunion des I_n, cet ensemble est fini ou dénombrable donc au plus dénombrable. ■

Remarque 4.2.3 *Le corollaire précédent n'est plus nécessairement valable lorsqu'on ne suppose pas que l'origine possède un système fondamental dénombrable de voisinages.*

Exemple 4.2.1 *Considérons le groupe additif des fonctions numériques finies d'une variable réelle, muni de la topologie de la convergence simple et soit f_a un élément de ce groupe tel que*

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

La famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est sommable et a pour somme la fonction égale à 1 en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Corollaire 4.2.3 *Soit G un groupe topologique commutatif séparé et complet, tel qu'un système fondamental de voisinages de O soit formé de sous-groupes de G. Pour qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de points de G soit sommable, il faut et il suffit que $\lim a_i = 0$ suivant le filtre des complémentaires des parties de I.*

Démonstration. Soient V un voisinage de O, H un sous-groupe ouvert de G contenu dans V, s'il existe une partie finie J_0 de I telle que $a_i \in H$ pour tout $i \notin J_0$, on a aussi $\sum_{i\in K} a_i \in H$ pour toute partie finie K de I ne rencontrant pas J_0. ■

4.3 Associativité

Proposition 4.3.1 *(Associativité de la somme)*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de G, et soit $(I_j)_{j\in L}$ une partition quelconque de I. Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable ainsi que chacune des sous-familles $(a_i)_{i\in I_j}$, et si l'on désigne leurs sommes par S et S_j respectivement, la famille $(S_j)_{j\in L}$ est sommable et a pour somme S.

Démonstration. Pour toute partie finie M_0 de L, désignons par $D(M_0)$ l'ensemble des sommes finies $\sum_{i\in M} a_i$ où $M_0 \subset M$.

Pour un J_0 donné, si l'on note M_0 l'ensemble fini des j tels que $J_0 \cap I_j \neq \emptyset$, toute somme $\sum_{i\in M} a_i$ pour laquelle $M_0 \subset M$ est limite de sommes S_j où $J_0 \subset J$. Il en résulte

$$D(M_0) \subset \overline{A(J_0)}$$

D'où

$$\overline{D(M_0)} \subset \overline{A(J_0)}.$$

Pour tout voisinage V de O, il existe un J_0 tel que

$$A(J_0) \subset S + V$$

Donc si V est fermé on a aussi

$$\overline{A(J_0)} \subset S + V$$

D'où

$$\overline{D(M_0)} \subset S + V$$

Comme les voisinages fermés de O constituent une base de voisinages de O, cette relation montre que la famille $(S_j)_{j\in L}$ est sommable et de somme S. ■

Remarque 4.3.1 *Il est inexacte que si chacune des sous-familles $(a_i)_{i\in I_j}$ est sommable et la famille des S_j sommable, la famille $(a_i)_{i\in I}$ soit toujours sommable.*

Pour le voir, il suffit de prendre L infini et chacune des sous-familles réduite à deux éléments, l'un valant 1, l'autre -1 ; chaque S_j vaut 0, donc la famille de S_j est sommable, mais la famille des a_i ne l'est pas.

Par contre, voici le cas important où cet énoncé devient exact. En effet, pour L fini, il suffit de démontrer lorsque $L = \{1, 2\}$. On procède ensuite par récurrence sur le nombre d'éléments de L. Posons $S_1 = \sum_{i\in I_1} a_i, S_2 = \sum_{i\in I_2} a_i$. Pour tout voisinage V de l'origine, il existe une partie finie J_1 (resp. J_2) de I_1 (resp. I_2) telle que pour toute partie finie H_1 (resp.H_2) de I_1 (resp.I_2) contenant J_1 (resp.J_2), on ait

$$\sum_{i\in H_1} a_i \in S_1 + V$$

Respectivement

$$\sum_{i\in H_2} a_i \in S_2 + V$$

Si on pose $J_0 = J_1 \cup J_2$

$$\sum_{i\in H} a_i \in S_1 + S_2 + V + V$$

D'où le résultat.

4.4 Image d'une famille sommable par un homomorphisme continu

Proposition 4.4.1 *Soit G, G' deux groupes topologique commutatifs et séparés, et soit f un homomorphisme continu de G dans $G^{'}$.*

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable dans G, de somme S, la famille $(f(a_i))_{i\in I}$ est sommable dans $G^{'}$ et de somme $S' = f\left(\sum_{i\in I} a_i\right)$.

Démonstration. Pour toute voisinage V' de O dans G', posons $V = f^{-1}(V')$; la relation

$$S - S_J \in V \text{ lorsque } J_0 \subset J$$

etraïne

$$f(S) - f(S_J) \in f(V) \text{ ou encore } S' - S'_J \in V'.$$

Autrement dit la famille $(f\,(a_i))_{i \in I}$ est sommable et a pour somme S'. ■

CHAPITRE 5

Applications

5.1 Moment d'ordre k d'une variable aléatoire discrète

Ω désigne un ensemble quelconque. On note ω l'élément générique de Ω et $P_f(\Omega)$ l'ensemble des parties finies de Ω.

On rappelle qu'une partie non vide P de $[0, +\infty[$ est dite bornée s'il existe un réel M tel que $x \leq M$ pour tout $x \in P$. Un tel réel M s'appelle un majorant de P. L'ensemble des majorants de P admet alors un minimum, qu'on note $\sup P$. Autrement dit, $M = \sup P$ si et seulement si $x \leq M$ pour tout $x \in P$ et $M \leq M'$ pour tout majorant M' de P. Si P n'est pas bornée, on pose $\sup P = +\infty$.

On considère une application $a : \Omega \to [0, +\infty[$. Pour toute partie finie $F = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ de Ω, on pose

$$\sum_F a(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a(\omega_i)$$

Comme l'addition est commutative, cette notion ne dépend pas de la façon dont on a numéroté les éléments de F.

Définition 5.1.1 *On pose*

$$\sum_\Omega a(w) = \left\{ \sup \sum_F a(\omega) : F \text{ partie finie de } \Omega \right\}.$$

On dit que la famille $(a(\omega))_{\omega \in \Omega}$ *est sommable si* $\sum\limits_\Omega a(\omega) < +\infty$.

On suppose maintenant X est une variable aléatoire réelle, et on introduit la notion suivante :

Définition 5.1.2 *Si la famille* $\{|X(\omega)|\, p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *est sommable, on dit que* X *admet un moment d'ordre* 1 *et on pose*

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega).$$

On appelle cette quantité l'espérance, ou la moyenne, de X*.*

Plus généralement, pour tout réel $k > 0$*, on dit que* X *admet un moment d'ordre* k *si la variable aléatoire* $|X|^k$ *admet un moment d'ordre* 1*.*

Il est immédiat de voir que si la variable X est bornée, c'est- à-dire s'il existe un réel $M > 0$ tel que $|X(\omega)| \leq M$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors X admet des moments de tout ordre. L'espérance satisfait les propriétés suivantes :

Proposition 5.1.1 *(i) Si la variable aléatoire* X *admet un moment d'ordre* 1*, et si* $\{x_i, i \in I\}$ *désigne l'ensemble des valeurs prises par* X*, alors la famille* $(x_i P(\{X = x_i\}))_{i\in I}$ *est sommable et*

$$E(X) = \sum_{i\in I} x_i P(\{X = x_i\}).$$

(ii) Si X *et* Y *sont deux variables aléatoires qui admettent toutes les deux un moment d'ordre* 1*, alors pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, c'est aussi le cas pour la variable* $\alpha X + \beta Y$ *et on a*

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

Démonstration. (i) Posons $\Omega_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$. La famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω, et il ne reste qu'à appliquer la formule de sommation par paquets.

(ii) C'est une conséquence de la linéarité de la somme pour les familles sommables. ∎

5.2 Familles orthonormées dans un espace préhilbertien

Théorème 5.2.1 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ un système orthogonal dans H alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $\left(\|a_i\|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas*

$$\left\|\sum_{i\in I} a_i\right\|^2 = \sum_{i\in I} \|a_i\|^2 .$$

Démonstration. Supposons que la famille $\left(\|a_i\|^2\right)_{i\in I}$ est sommable. Pour prouver l'existence de S, fixons une énumération $I = \{i_0, i_1, ..., i_n, ...\}$ de l'ensemble quelconque I. Pour des nombres réels positifs, on sait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_{i_n}\|^2 = \sup\left\{\sum_{i\in J} \|a_i\|^2 : J \text{ fini} \subset I\right\} = \sum_{i\in I} \|a_i\|^2 < +\infty$$

Sous cette hypohèse, on peut définir d'après le théorème

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i_n} \in H, \text{ avec } \|S\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_{i_n}\|^2 = \sum_{i\in I} \|a_i\|^2$$

Il s'agit de montrer que S vérifie (3.2.1) qui définit les familles sommables. Pour chaque sous-ensemble fini K de I. Posons

$$S(K) = \sum_{i\in K} a_i \in H$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné et choisissons l'ensemble fini $K_0 = \{i_0, i_1, ..., i_N\}$ avec N assez grand pour que

$$\sum_{i\in C_I^{K_0}} \|a_i\|^2 = \sum_{n>N} \|a_{i_n}\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

On a alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i_n} = \sum_{n=0}^{N} a_{i_n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_{i_n} = S(K_0) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_{i_n}$$

Donc

$$\|S - S(K_0)\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_{i_n}\right\|^2 \le \sum_{n>N} \|a_{i_n}\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Et on a

$$\|S - S(K_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit K un sous-ensemble fini de I, plus grand que K_0; cet ensemble K est obtenu en ajoutant à K_0 des éléments $i_{n_1}, ..., i_{n_p}$, où les indices n_j sont donc supérieurs à N et où on peut supposer que $N < n_1 < n_2 < ... < n_p$; on a

$$S(K) - S(K_0) = \sum_{j=1}^{p} a_{i_{n_j}}$$

Donc par le théorème de Pythagore

$$\|S(K) - S(K_0)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{p} a_{i_{n_j}} \right\|^2 \leq \sum_{n>N} \|a_{i_n}\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Donc $\|S(K) - S(K_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|S - S(K)\| \leq \|S - S(K_0)\| + \|S(K) - S(K_0)\| < \varepsilon$$

pour tout sous-ensemble fini $K \subset I$ plus grand que K_0, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, supposons que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, prenons l'ensemble fini K_0 qui correspond à $\varepsilon = 1$ dans (3.2.1). Pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, on a, en prenant $K = K_0 \cup J$ que $\|S - S(K)\| \leq 1$, donc

$$\begin{aligned} &\|S(K)\| \leq \|S\| + 1 \\ &\sum_{i \in J} \|a_i\|^2 \leq \sum_{i \in K} \|a_i\|^2 = \|S(K)\|^2 \leq (\|S\| + 1)^2 . \end{aligned}$$

On a bien $\sum_{i \in I} \|a_i\|^2 < +\infty$ puisque les sommes finies sont bornées par $(\|S\| + 1)^2$, donc la famille $\left(\|a_i\|^2\right)_{i \in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$. ■

Définition 5.2.1 *Soient $(a_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale d'un espace préhilbertien E et $x \in E$, on appelle coefficients de Fourier de x relativement à la famille $(a_i)_{i \in I}$, la famille $(C_i(x))_{i \in I}$ où $C_i(x) = \langle x, a_i \rangle, \forall i \in I$.*

$\sum_{i \in I} C_i(x) a_i$ est appelée série de Fourier associée à x relativement à la famille orthonormale $(a_i)_{i \in I}$.

Proposition 5.2.1 *Soit E un espace préhilbertien. Pour tout système orthonormal $(a_i)_{i\in I}$ dans E et pour tout $x \in E$, la famille $\left(|C_i(x)|^2\right)_{i\in I}$ est sommable et on a l'inégalité de Bessel suivante*

$$\sum_{i\in I} |C_i(x)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Démonstration. Pour montrer que la famille $\left(|C_i(x)|^2\right)_{i\in I}$ est sommable, il suffit de vérifier que l'ensemble ses sommes partielles $S_j = \sum_{i\in J} |C_i(x)|^2$ où J est une partie finie de I, est majoré.

Soit $J \in P_f(I)$ alors

$$\left\langle x - \sum_{i\in J} C_i(x)\, a_i, x - \sum_{i\in J} C_i(x)\, a_i \right\rangle \geq 0, \forall x \in E.$$

Et

$$\begin{aligned}
\left\langle x - \sum_{i\in J} C_i(x)\, a_i, x - \sum_{i\in J} C_i(x)\, a_i \right\rangle &= \|x\|^2 - \left\langle \sum_{i\in J} C_i(x)\, a_i, x \right\rangle - \left\langle x, \sum_{i\in J} C_i(x)\, a_i \right\rangle + \sum_{i\in J} |C_i(x)|^2 \\
&= \|x\|^2 + \left(\sum_{i\in J} |C_i(x)|^2 - 2\sum_{i\in J} \overline{C_i(x)} C_i(x) \right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i\in J} |C_i(x)|^2 \\
&\Longrightarrow \|x\|^2 - \sum_{i\in J} |C_i(x)|^2 \geq 0 \\
&\Longrightarrow \sum_{i\in J} |C_i(x)|^2 \leq \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ce qui achève cette démonstration. ■

Théorème 5.2.2 *Soient E un espace préhilbertien et $(a_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans E alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall x, y \in E$, la famille $\left(C_i(x)\,\overline{C_i(y)}\right)_{i\in I}$ est sommable de somme $\langle x, y\rangle$.

(ii) Pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |C_i(x)|^2$.

(iii) Pour tout $x \in E$, la famille $(C_i(x)\, a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme x $\left(ie\ x = \sum_{i\in I} C_i(x)\, a_i\right)$.

(iv) Le sous espace vectoriel engendré par la famille $(a_i)_{i\in I}$ est dense dans E.

Démonstration. (i)⇒(ii): il suffit de prendre $y = x$ et d'appliquer la proposition 5.2.1 .

(ii)⇒(iii): la famille $\left(\left|C_i\left(x\right)\right|^2\right)_{i\in I}$ est sommable de somme $\|x\|^2$, d'où

$$\forall\varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f\left(I\right) : \forall J \in P_f\left(I\right), J \supset J_0 \Longrightarrow \left|\|x\|^2 - \sum_{i\in J}\left|C_i\left(x\right)\right|^2\right| \leq \varepsilon$$

Or

$$\left\|x - \sum_{i\in J} C_i\left(x\right) a_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J}\left|C_i\left(x\right)\right|^2 \leq \varepsilon$$
$$\Longrightarrow x = \sum_{i\in I} C_i\left(x\right) a_i$$

(iii)⇒(iv): Soit V le sous espace vectoriel engendré par la famille $\left(a_i\right)_{i\in I}$, montrons que $\overline{V} = E$ ou encore

$$\forall x \in E, \forall\varepsilon > 0, \exists y \in V \text{ tel que } \|x - y\| \leq \varepsilon,$$

Or $\forall x \in E$ la famille $\left(C_i\left(x\right) a_i\right)_{i\in I}$ est sommable de somme x alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f\left(I\right) \text{ tel que } \|x - y\| \leq \varepsilon$$

Où $y = \sum\limits_{i\in J_0} C_i\left(x\right) a_i$ et $y \in V$.

(iv)⇒(i): Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $y = \sum\limits_{i\in J} \lambda_i a_i$ où $J \in P_f\left(I\right)$ tel que $\left\|x - \sum\limits_{i\in J} \lambda_i a_i\right\| \leq \varepsilon$ et comme $\left\|x - \sum\limits_{i\in J} C_i\left(x\right) a_i\right\| \leq \left\|\sum\limits_{i\in J} \lambda_i a_i - x\right\| \leq \varepsilon$

On a

$$\left\|x - \sum_{i\in J} C_i\left(x\right) a_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J}\left|C_i\left(x\right)\right|^2 \leq \varepsilon$$

Donc la famille $\left(\left|C_i\left(x\right)\right|^2\right)_{i\in I}$ est sommable de somme $\|x\|^2$.

Utilisons l'égalité suivante où j est le nombre complexe $j^2 = -1$ et non l'indice sur I ou J.

$$4\left\langle x, y\right\rangle = \left\langle x + y, x + y\right\rangle - \left\langle x - y, x - y\right\rangle + i\left[\left\langle x + iy, x + iy\right\rangle - \left\langle x - iy, x - iy\right\rangle\right]$$

Pour établir (i), soient $\left(C_i\left(x\right)\right)_{i\in I}$ et $\left(C_i\left(y\right)\right)_{i\in I}$ les coefficients de Fourier respectifs de x et y relativement à la famille $\left(a_i\right)_{i\in I}$.

Il résulte de l'identité précédente que la famille $\left(C_i(x)\overline{C_i(y)}\right)_{i\in I}$ est sommable et de somme $\langle x, y\rangle$ comme somme de familles sommables $\left(|C_i(x)+C_i(y)|^2\right)_{i\in I}$, $\left(|C_i(x)-C_i(y)|^2\right)_{i\in I}$ et $\left(|C_i(x)+jC_i(y)|^2\right)_{i\in I}$ et $\left(|C_i(x)-jC_i(y)|^2\right)_{i\in I}$. ■

Proposition 5.2.2 *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale d'un espace préhilbertien E et soit $x\in E$ alors la projection x' de x sur M le sous espace vectoriel engendré par $(a_i)_{i\in J}$ J partie finie de I est définie par $x'=\sum\limits_{i\in J} C_i(x)\,a_i$.*

Démonstration. Soit $y\in M$ alors $y=\sum\limits_{i\in J}\lambda_i a_i$ et

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \left\langle x-\sum_{i\in J}\lambda_i a_i, x-\sum_{i\in J}\lambda_i a_i\right\rangle\\ &= \|x\|^2+\sum_{i\in J}\left(|\lambda_i|^2-\overline{\lambda_i}C_i(x)-\lambda_i\overline{C_i(x)}\right)\\ &= \|x\|^2+\sum_{i\in J}|\lambda_i-C_i(x)|^2-\sum_{i\in J}|C_i(x)|^2\end{aligned}$$

Or $\|x-y\|\geq\|x\|^2-\sum\limits_{i\in J}|C_i(x)|^2$ est le minimum de $\|x-y\|$ qui est atteint pour $y=\sum\limits_{i\in J}C_i(x)\,a_i$ et qui est donc la projection de x sur M. ■

5.3 Bases orthonormales d'un espace préhilbertien

Définition 5.3.1 *Dans un espace préhilbertien E, tout système orthonormal qui vérifie l'une des quatre propriétés du théorème 5.2.2 est appelé une base orthonormale de E.*

Définition 5.3.2 *Soit E un espace préhilbertien. Un système orthonormal est dit maximal si tout système orthonormal qui le contient lui est identique.*

Remarque 5.3.1 *On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est un système orthonormal maximal si et seulement si*

$$\textit{Pour } x\in E, \forall i\in I, \langle x, a_i\rangle=0\Longrightarrow x=0.$$

Théorème 5.3.1 *Si H est un espace de Hilbert, les quatre propositions du théorème 5.2.2 sont équivalentes à la proposition suivante : le système orthonormal $(a_i)_{i\in I}$ est maximal.*

Démonstration. Montrons que cette proposition est équivalente à (iv) (i.e le sous espace vectoriel engendré par la famille $(a_i)_{i\in I}$ est dense dans H).

Supposons que la famille $(a_i)_{i\in I}$ soit maximale et soit M le sous espace vectoriel engendré par $(a_i)_{i\in I}$. Si $\overline{M} \neq E$ alors comme $H = \overline{M} \oplus \overline{M}^{\perp} \Longrightarrow \overline{M}^{\perp} \neq \{0\}$ et il existerait $a \in \overline{M}^{\perp}$ et $a \neq 0$ d'où $\langle a, a_i \rangle = 0, \forall i \in I \Longrightarrow (a_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille maximale $\Longrightarrow \overline{M} = H$.

Réciproquement, supposons $\overline{M} = H$ alors pour $x \in H$ si $\langle x, a_i \rangle = 0, \forall i \in I$ on a $x \in \overline{M}^{\perp} = \{0\}$ par suite $(a_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale maximale. ■

5.4 Existence de bases orthonormales

5.4.1 Rappels sur les ensembles inductifs

Définition 5.4.1 *Soit A un ensemble ordonné, A est dit inductif si toute partie totalement ordonnée de A est majorée par un élément de A.*

Théorème de Zorn

Dans un ensemble ordonné inductif A, tout élément de A est majoré par un élément maximal de A.

5.4.2 Application du théorème de Zorn

Soit A l'ensemble des familles orthonormales d'un espace préhilbertien E ordonné par l'inclusion, montrons que A est inductif.

Soit S une partie totalement ordonnée de A. Alors $\widehat{S} = \underset{s\in S}{\cup} S$ est orthonormale car soient $a_1, a_2 \in \widehat{S}$ alors

$$\exists s_1 \in \widehat{S} \text{ et } s_2 \in \widehat{S} \text{ tels que } a_1 \in s_1 \text{ et } a_2 \in s_2$$

Or S est totalement ordonnée d'où si $s_1 \supset s_2$ ou $s_1 \subset s_2$ alors $a_1, a_2 \in s_1$ ou $a_1, a_2 \in s_2$ donc a_1 et a_2 sont orthogonaux (si $a_1 \neq a_2$), il en résulte que $\widehat{S}$ est un majorant de S. Donc A est inductif.

Il en résulte que tout espace de Hilbert admet une base orthonormale.

5.5 Isomorphie des espaces de Hilbert

Soit $l^2(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ de nombres complexes telles que la famille $\left(|x_i|^2\right)_{i\in I}$ soit sommable.

Proposition 5.5.1 $l^2(I,\mathbb{C})$ *est un espace de Banach pour la norme induite par la forme hermitienne définie positive* $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i\in I} x_i\overline{y_i}$ *où* $x = (x_i)_{i\in I}$ *et* $y = (y_i)_{i\in I}$ *sont deux éléments de* $l^2(I,\mathbb{C})$.

Démonstration. Montrons que $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i\in I} x_i\overline{y_i}$ a un sens. Pour cela montrons que la famille $(x_i\overline{y_i})_{i\in I}$ est absolument sommable (donc sommable). Posons $\alpha = \sum\limits_{i\in I}|x_i|^2$ et $\beta = \sum\limits_{i\in I}|y_i|^2$ qui sont deux nombres finis par hypothèse.

Soit J une partie finie de I alors

$$\sum_{i\in J}|x_i\overline{y_i}| \le \left(\sum_{i\in J}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i\in J}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \alpha\beta$$

D'où la famille $(|x_i\overline{y_i}|)_{i\in I}$ est sommable. Les axiomes de la forme hermitienne définie positive se vérifient aisément, il s'en suit que $l^2(I,\mathbb{C})$ est un espace préhilbertien pour la norme $\|x\| = \left(\sum\limits_{i\in I}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$l^2(I,\mathbb{C})$ est complet.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^2(I,\mathbb{C})$ alors

$$\|x_p - x_q\|^2 = \sum_{i\in I}|x_{p,i} - x_{q,i}|^2 \le \varepsilon^2, \forall p,q \ge n_0$$

i étant fixé, la suite $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, d'où $x_i = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n,i}$. Dans l'inégalité précédente faisant tendre q vers $+\infty$, il vient

$$\sum_{i\in I}|x_{p,i} - x_i|^2 \le \varepsilon^2, \forall p \ge n_0$$

Or

$$\left(\sum_{i\in I}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i\in I}|x_{p,i} - x_i|^2 + \sum_{i\in I}|x_{p,i}|^2$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $l^2(I)$, elle est donc bornée par un nombre K, il vient

$$\left(\sum_{i\in I}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon^2 + K^2 \Longrightarrow (x_i)_{i\in I} \in l^2(I)$$

Et en posant $x = (x_i)_{i\in I}$, il vient

$$\|x - x_p\|^2 = \sum_{i\in I}|x_{p,i} - x_i|^2 \leq \varepsilon^2, \forall p \geq n_0$$

Il vient que $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x \Longrightarrow l^2(I,\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert. ■

Théorème 5.5.1 *Soit E un espace préhilbertien muni d'une base orthonormale $(a_i)_{i\in I}$ alors l'application φ de E dans $l^2(I,\mathbb{C})$ définie par : $\varphi(x) = (C_i(x))_{i\in I}$ famille des coefficients de Fourier de x est une isométrie linéaire de E sur $\varphi(E)$ où $\varphi(E) = l^2(I,\mathbb{C})$.*

Démonstration. L'application φ ci-dessus définie est linéaire et comme

$$\|\varphi(x)\| = \left(\sum_{i\in I}|C_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|,$$

φ est une isométrie. Soit $e_i \in l^2(I)$ la famille telles que tous ses termes soient nuls et l'un d'eux égal à $1, e_i = \varphi(a_i)$, la famille $(e_i)_{i\in I} \in \varphi(E)$, montrons que $\varphi(E) = l^2(I,\mathbb{C})$.

Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ un élément de $l^2(I,\mathbb{C})$ alors $\|x\|^2 = \sum\limits_{i\in I}|x_i|^2$ et

$$\forall\varepsilon > 0, \exists J_0 \in P_f(I) : \left|\|x\|^2 - \sum_{i\in I}|x_i|^2\right| \leq \varepsilon^2.$$

Posons $y = \sum\limits_{i\in J_0} x_i e_i$ alors

$$\left\|x - \sum_{i\in J_0} x_i e_i\right\|^2 = \sum_{i\in I\setminus J_0}|x_i|^2 \leq \varepsilon^2$$

Donc $\varphi(E)$ est dense dans $l^2(I,\mathbb{C})$ car $y \in \varphi(E)$.

Si E est complet alors $\varphi(E)$ est fermé dans $l^2(I,\mathbb{C})$ donc

$$\varphi(E) = \overline{\varphi(E)} = l^2(I,\mathbb{C})$$

Ce qui termine cette démonstration. ■

Corollaire 5.5.1 *Soit H un espace de Hilbert et soit $(a_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de H alors pour toute famille sommable $(\lambda_i)_{i\in I}$ de nombres complexes, il existe $x \in H$ tel que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$.*

Conclusion

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons présenté les familles sommables dont les termes appartiennent à différents ensembles ($\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, e.v.n, groupe topologique). En outre, nous avons exposé les diverses propriétés de ces familles telles que la relation avec les séries et la sommation par paquets.

Même si nous avons donné quelques applications, il reste de nombreuses autres à explorer dans une multitude de domaines à l'instar de l'algèbre, l'analyse complexe, les probabilités et l'analyse fonctionnelle.

Bibliographie

[1] Bernard Malgrange, Sommation des séries divergentes, Expositiones Mathematicae 13 (1995), 163-222.

[2] Bourbaki Nicolas,Topologie générale : groupe topologique, chapitre 4.

[3] Godfrey H Hardy, Divergent Series, Oxford University Press (1949), réédition : American Mathematical Society (1992), ISBN 0821826492.

[4] Gustave Choquet, Cours de topologie, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, DUNOD. ISBN 2100052586.

[5] Jean Dieudonné, Eléments d'analyse, tome 1 : Fondements de l'analyse moderne.

[6] Jean-Pierre Ramis, Les séries divergentes, Pour La Science 350 (Décembre 2006), 132-139.

[7] Jean-Pierre Ramis, Séries divergentes et théories asymptotiques, Panoramas et Synthèses 0 (1994), ISBN 2856290248.

[8] Laurent Schwartz, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Paris, Hermann, 1965, 2e édition, chapitre 1.

[9] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe.