



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université A. MIRA, - Bejaïa –
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Mémoire

Pour obtenir le titre du Master en Génie Civil
Option : Matériaux et Structure

Thème

ETUDE COMPARATIVE ENTRE UNE MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS 2D&3D

Présenté par

MR. BOUMRAOU MADJID

M^{ELLE}. MERKHOUF SOUHILA

SOUTENU LE 25 - 06 - 2012 DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

MR. OURABEH	ADNANE	Président
MR. RAMDANI	LYES	Rapporteur
MR. BELLHAMDI	NOURDINE	Examineur

Dédicaces

Avec une grande joie je dédie ce modeste travail :

A mes chère parents qui ma beaucoup aidé durant mes études

A mes très chers frères et sœurs Malika, Nadia, Nacira, Aziz, Rahima, karim, Karima, et en particulier Wassila

A la mémoire de ma grand-mère paternel

A mes nièces Dalissia, Ilina, Ikrame que j'aime beaucoup

A mes tantes et oncles, et mes cousines

A mes beaux frères et belles sœurs

A tous mes amis(es) sans exception

A mon binôme Madjid et sa famille

SOUHILA

Je dédie ce modeste travail

A la mémoire de mon défunt frère

A mes parents qui ma beaucoup aidé durant mes études

A mes frères, Omar et sa femme, Massi et sa futur femme Sonia, Remtane

A mes sœurs, badiaa, saida et son marie.

A mes nièces et mes neveux en particulier Hilda

A ma chère Souhila et sa famille

MADJID

Remerciements

✚ Nous souhaitons en premier lieu exprimer toute notre gratitude à notre promoteur Mr L. Ramdani pour nous avoir encadrés, pour ses nombreux conseils, son soutien et ses qualités humaines. Nos remerciements vont également aux membres de notre jury pour avoir accepté d'examiner et de juger notre travail.

Qu'il veuille bien accepter nos remerciements les plus sincères.

✚ Il nous est agréable d'exprimer nos remerciements à toutes les personnes qui, par leur aide, leurs conseils et leur encouragement, ont contribué la réalisation de ce mémoire.

✚ Nous nous en voudrions de ne pas remercier tout le personnel encadrant dans le département de Génie Civil, pour avoir contribué à notre formation de Master, sans oublier aussi HASSIBA la secrétaire du département.

✚ Nous remercions tous nos amis qui nous ont aidé et en particulier B.Mohemed Amine

✚ Nous tenons à remercier nos deux familles pour leur soutien moral et matériel sans égal durant tous nos études.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
FORMULATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRES EN ELASTICITE LINEAIRE	3
1.1 INTRODUCTION	3
1.2 FORMULATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRES DYNAMIQUES.....	4
1.2.1 Formulation par brique élémentaire.....	4
1.2.2 Formulation par la méthode intégrale (théorème de divergence)	6
1.3 EQUATION D'EQUILIBRE STATIQUE.....	8
1.4 EQUATION D'ELASTICITE LINEAIRE EN 3D	9
1.4.1 Équation cinématique	9
1.4.2 Loi constitutive de Hooke isotrope	10
1.5 CAS D'ELASTICITE PLANE.....	11
1.5.1 Etat plan de contrainte.....	11
1.5.2 Etat plan de déformation	13
DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS.....	15
2.1 INTRODUCTION	15
2.2 LES GRANDES LIGNES DE LA MEF	16
2.3 DIFFERENTES FORME DES ELEMENTS	17
2.4 FORMULATION VARIATIONELLE (INTEGRAL)	19
2.4.1 Enoncé du principe des travaux virtuels	19
2.5 CHOIX DU CHAMP DES DEPLACEMENTS (INTERPOLATION).....	21
2.6 EXPRESSION DES MATRICES ELEMENTAIRES	23
2.6.1 Expression de la matrice rigidité	23
2.6.2 Expression de la matrice masse	25
2.6.3 Expression de vecteur chargement.....	26
APPLICATION AU CAS STATIQUE	28
3.1 INTRODUCTION	28
3.2 APPLICATION POUR LE CAS D'UNE SEMELLE FILANTE	28
3.2.1 Système étudié	29
3.2.2 Influence de module de Young sur le comportement de la fondation	32
3.2.3 Etude des contraintes.....	43
3.3 APPLICATION POUR LE CAS D'UN TUNNEL.....	48
3.3.1 Système étudié	49
3.3.2 Etude du déplacement	51
3.3.3 Etude des contraintes.....	55
3.4 CONCLUSION	57
APPLICATION AU CAS DYNAMIQUE.....	59
4.1 INTRODUCTION	59

4.2	PRESENTATION DE SYSTEME CONSIDERE.....	59
4.3	ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES.....	62
4.4	ETUDE DE LA REPOSE SISMIQUE	65
4.4.1	L'excitation dynamique considérée.....	65
4.5	RESULTATS ET INTERPRETATION	65
4.5.1	Influence de l'accélérogramme sur les déplacements au niveau de la crête du barrage.....	65
4.5.2	Etude des contraintes.....	68
4.5.3	Les difformées du barrage.....	71
	CONCLUSION GENERALE	74
	BIBLIOGRAPHIE.....	76

TABLE DES FIGURES

Figure 1.1. Brique élémentaire isolé (translation selon x)	5
Figure 1.2. Portion de volume considérée	7
Figure 1.3. : Etat plane de contrainte	12
Figure 1.4 : Etat plane de déformation	13
Figure 2.1. Étapes générales de la méthode des éléments finis.	16
Figure 2.2 : types d'éléments	18
Figure 3.1: la géométrie de système semelle filante-sol (3D)	30
Figure 3.2: le maillage correspondant au système (3D)	30
Figure 3.3: La géométrie du système semelle filante-sol (2D)	31
Figure 3.4: le maillage de système (2D)	31
Figure 3.5: les nœuds considérés suivant la largeur et la longueur pour les deux cas.	32
Figure 3.6: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec $E=100\text{MPa}$	34
Figure 3.7: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec $E=1000\text{MPa}$	34
Figure 3.8: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec $E=1900\text{MPa}$	34
Figure 3.9: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec $E=2800\text{MPa}$	35
Figure 3.10: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=100\text{MPa}$	36
Figure 3.11: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=1000\text{MPa}$	36
Figure 3.12: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=1900\text{MPa}$	37
Figure 3.13: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=2800\text{MPa}$	37
Figure 3.14: déformé de la fondation pour les deux modèles (2D, et 3D) pour les différentes valeurs de E	38

Figure 3.15: déformé de la fondation aux différentes positions de la 3D pour les différentes valeurs de E	39
Figure 3.16: déformé de la fondation pour le cas de la modélisation en déformation plane.....	40
Figure 3.17: déplacement u_2 en fonction de module d'Young.....	40
Figure 3.18: chargement en fonction de temps	41
Figure 3.19: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=100\text{MPa}$	42
Figure 3.20: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=1000\text{MPa}$	42
Figure 3.21: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=1900\text{MPa}$	43
Figure 3.22: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=2800\text{MPa}$	43
Figure 3.23: Distributions des contraintes pour les différentes valeurs de (E) dans les deux cas de modélisation	46
Figure 3.24: Distributions des contraintes pour les différentes valeurs de (E) et aux différentes positions de la 3D	47
Figure 3.25: l'évolution des contraintes pour les différentes valeurs de E.....	48
Figure 3.26: géométrie du modèle (3D)	49
Figure 3.27: maillage correspond au modèle (3D).....	49
Figure 3.28 : géométrie du modèle (2D)	50
Figure 3.29: maillage correspond au modèle (2D).....	50
Figure 3.30: déformé de la voûte du tunnel en 3D et 2D	51
Figure 3.31: différentes coupes de la déformé de la voûte du tunnel en 3D	52
Figure 3.32: déplacement vertical de la voûte du tunnel pour les deux cas (2D) et (3D).....	53
Figure 3.33: déplacement vertical à la tête de la voûte pour les différentes positions de la 3D et celle de 2D.....	54
Figure 3.34: déplacement vertical au point (1) suivant la longueur pour les deux cas (2D et (3D).....	54
Figure 3.35: distribution des contraintes dans la voûte du tunnel en 3D et 2D	55
Figure 3.36: distribution des contraintes dans la voûte aux différentes positions de la 3D.....	56
Figure 3.37: distribution des contraintes dans la voûte du tunnel pour les différentes positions de la 3D et 2D	57
Figure 3.38: déformé de la moitié de la cavité du tunnel pour les deux cas de modélisation (3D et 2D)	Erreur ! Signet non défini.
Figure 3.39: distribution des contraintes pour la moitié de la cavité du tunnel en 3D et 2D.....	Erreur ! Signet non défini.
Figure 4.1: Géométrie du barrage en 3D.....	60
Figure 4.2: le maillage correspondant au système 3D	60
Figure 4.3: Géométrie du barrage en 2D	61
Figure 4.4: le maillage correspondant.....	61

Figure 4.5: modes de déformation Abaqus (2D)	63
Figure 4.6: modes de déformation Abaqus (3D)	64
Figure 4.7: Accélération sismique du séisme de l'Impérial Valley d'El-Centro	65
Figure 4.8: Déplacements relatifs horizontaux en crête du barrage de Pine Flat au niveau 0.25L.....	66
Figure 4.9: Déplacements relatifs horizontaux en crête du barrage de Pine Flat au niveau 0.5L.....	66
Figure 4.10: Déplacements relatifs horizontaux en crête du barrage de Pine Flat pour 2D.....	66
Figure 4.11: Déplacement horizontal en crête de barrage à l'instant $t=2.55s$ pour les différentes positions en 3D et 2D.....	67
Figure 4.12: Déplacement horizontal suivant la longueur en crête de barrage à $t=2.55s$ pour les deux cas (2D et 3D).....	67
Figure 4.13: Déplacement vertical suivant la hauteur à $t=2.55s$ pour les deux cas (2D et 3D).....	68
Figure 4.14: contrainte dans le barrage sous l'effet d'accélérogramme d'El-Centro à l'instant $t=2.55s$ pour les deux cas (2D et 3D)	69
Figure 4.15: différentes coupes de la 3D	70
Figure 4.16: contrainte dans le barrage pour les différentes positions de 3D et 2D	71
Figure 4.17: déformée du barrage sous l'effet d'accélérogramme d'El-Centro à l'instant $t=2.55s$ pour les deux cas (2D et 3D)	72
Figure 4.18: contrainte dans le barrage sous l'effet d'accélérogramme d'El-Centro à l'instant $t=2.55s$ pour les deux cas (2D et 3D).....	73

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : Caractéristiques géométrique du système.....	31
Tableau 3.2 : Caractéristiques mécaniques de la semelle	32
Tableau 3.3 : Déplacements u_2 aux différents nœuds de la largeur et pour les différentes positions selon la longueur	33
Tableau 3.4 : tassement de la fondation aux différents nœuds de la longueur suivant les différentes positions de la largeur pour les quatre variantes de (E).....	35
Tableau 3.5 : contraintes dans la fondation aux différents nœuds de la largeur suivant les différentes positions de la longueur de 3D et 2D pour les quatre variantes de (E).....	44
Tableau 3.6 : contraintes dans la fondation aux différents nœuds de la longueur suivant les différentes positions de la largeur pour les quatre variantes de (E)	45
Tableau 3.7 : Caractéristiques mécanique et géométrique du système.....	50
Tableau 4.1 : caractéristiques mécaniques et géométriques du barrage.....	62
Tableau 4.2 : période (en secondes) du barrage seul	62

NOTATIONS

symbole	désignation
V	Le domaine
A	Contour
∂	Opérateur de dérivée partielle
ρ	Masse volumique
γ	Vecteur d'Accélération
ω	Fréquence
δ	Fonction de Dirac
ε	Tenseur de déformation
D	Matrice d'élasticité
f	Vecteur des forces de volume
u	Déplacement
T	L'effort de cohésion
U	Vecteur déplacement
M	Matrice masse
C	Matrice d'amortissement
N	Fonction de forme
L	Opérateur différentielle
σ	Teneur de contrainte
ν	Coefficient de poisson
a	Coefficient arbitraire
τ	Contrainte de cisaillement
G	Module de coulomb
B	Matrice de déformation
N	Vecteur unitaire
E	Module de Young
x, y, z	Cordonnée principale

INTRODUCTION GENERALE

Les structures mécaniques sont susceptibles de présenter des comportements très divers, selon les caractéristiques de leurs matériaux constitutifs, les chargements subis, la nature des Liaisons entre éléments structuraux le concept d'élément fini fournit, un cadre générique permettant la définition des méthodes de calcul approchées des structures dans toute leur diversité, adaptées à la prise en compte de configurations géométriques complexes et de comportements varies [16].

Pour poser les bases nécessaires à l'introduction de la méthode des éléments finis, on s'appuie sur des rappels des équations d'équilibre en élasticité linéaire tridimensionnelles et bidimensionnelles.

Pour le dimensionnement des structures de génie civil, plusieurs problèmes tridimensionnels peuvent être simplifiés et traités en bidimensionnels (contrainte plane ou bien déformation plane).

Les exemples les plus rencontrés dans la littérature sont les barrages, tunnels et autre.

Dans notre projet de fin d'étude nous allons nous intéresser à ces deux types de modélisations et essayer de voir le rapport de fiabilité de certaine modélisation bidimensionnelle (barrage, tunnels, semelles filantes) par rapport à la modélisation tridimensionnelle de ces derniers pour le cas statique et dynamique. Ce travail contient une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale.

Dans le premier chapitre, nous allons exposer deux méthodes de formulation des équations d'équilibres en élasticité linéaire pour les deux cas bidimensionnel et tridimensionnel, et fait l'objet à l'introduction au deuxième chapitre qui concerne la discrétisation par élément finis et la formulation des matrices caractéristiques.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude statique, dont on présentera deux parties : la première partie porte sur la modélisation d'une semelle filante dans les espaces bis et

tridimensionnels basée sur la méthode des éléments finis en utilisant le code ABAQUS, et La deuxième partie comporte la modélisation d'un tunnel.

Au dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude dynamique d'un barrage poids sous l'effet d'un chargement sismique pour les deux cas de modélisation.

On clôture notre manuscrit par une conclusion générale et quelques recommandations.

CHAPITRE 1

FORMULATION DES EQUATIONS

D'EQUILIBRES EN ELASTICITE LINEAIRE

1.1 Introduction

En mécanique des solides et des milieux continus, on établit des règles et relation fondamentales intrinsèques, certaines indépendamment des propriétés particulières des matériaux, d'autres valables pour des classes étendues. Ce caractère général donne une grande puissance pour les applications ultérieures. Lorsque le matériau est solide et obéit à un comportement linéaire réversible (loi de Hooke, linéarisation matérielle) et que les déformations et déplacements sont très petits (linéarisation géométrique), on aboutit à la théorie de l'élasticité, branche la plus développée de la mécanique des solides. [11, 5,4].

Pour aboutir à un ensemble d'équations rendant possible la résolution de tous problèmes, la mécanique des solides nécessite trois principes :

- La statique se consacre aux forces internes transmises par la matière ; elle établit le concept de contrainte et ses propriétés, puis, à partir des lois du mouvement d'Euler, dans les équations gouvernantes l'équilibre statique ou dynamique locale instantané du solide.
- La cinématique est l'étude géométrique du changement de forme du solide ; elle établit la mesure de la déformation locale, puis livre des relations liant déformations et déplacements

- Les lois constitutives ou de comportement permettent de caractériser le matériau constituant le solide et fournissent des relations reliant statique et cinématique ; la réponse physique macroscopique de la matière apparaît à ce niveau, puisque ces lois font appel aux résultats provenant de l'observation expérimentale [11]. [18].

Le but du présent chapitre est la formulation des équations d'élasticité linéaire, pour le cas tridimensionnel ainsi que les deux états plans de contrainte et de déformation, pour le cas statique et dynamique.

1.2 Formulation des équations d'équilibres dynamiques

Les équations d'équilibre peuvent être élaborées par au moins deux démonstrations : l'une basée sur des équations locales (équilibre d'une brique élémentaire) et l'autre sur des équations intégrales (équilibre globale) [2].

1.2.1 Formulation par brique élémentaire

Soit un solide élastique, linéaire ou on découpe un parallépipède rectangle, ou brique élémentaire de côtés $d x_i$, parallèles aux axes x_i . Sur ce corps isolé agissent des tractions de surface sur les six faces et des forces de volume f_i .

On s'intéresse à la variation de tenseur contrainte en fonction de la position de point, on cherche la relation qui gouverne les changements des composantes σ_{ij} lors de passage d'un point à un point voisin distant de $d x_i, d x_j, d x_k$.

Les variations sont schématisées dans la figure (1.1), qui ne montre que les composantes parallèles à l'axe x_1 , par simplicité.

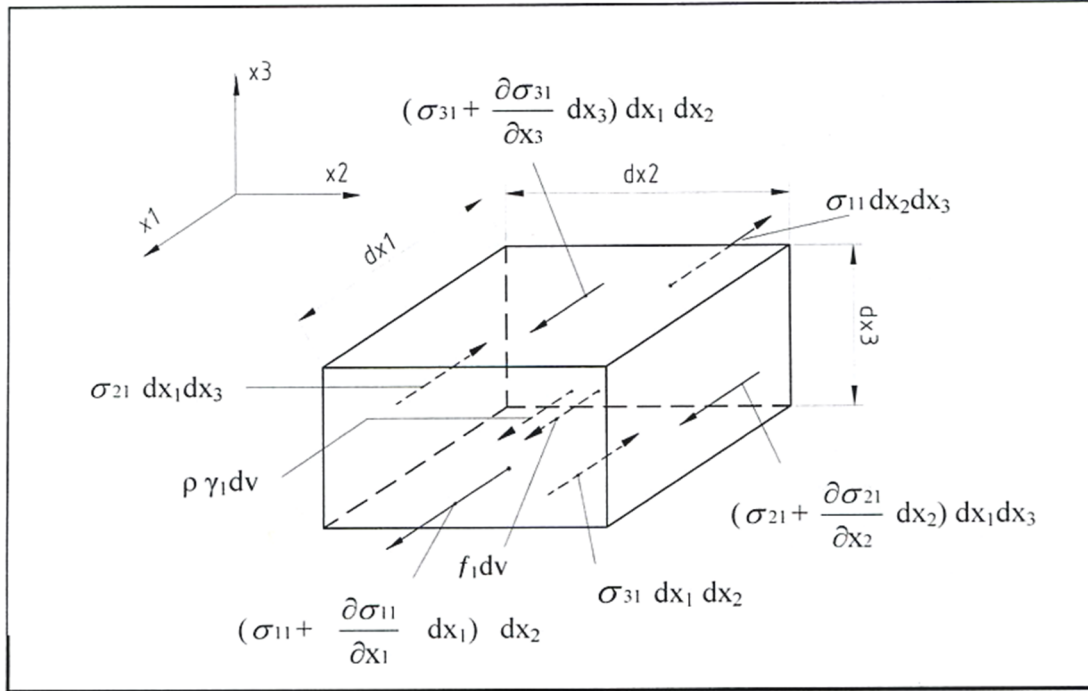


Figure 1.1. Brique élémentaire isolé (translation selon x_1)

La projection sur x_1 de la somme des forces appliquées sur ce corps infiniment petit, de centre M et de cotés dx_1 , dx_2 et dx_3 est nulle. Les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (1.1), donc la loi de quantité de mouvement selon x_1 s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_{11} dx_2 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \\
 & + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
 & + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \gamma_1 dx_1 dx_2 dx_3
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Après simplification, le système (1.1) donne suivant l'axe x_1 , l'équation suivant :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \gamma_1 \tag{1.2}$$

L'application de la même procédure permet d'obtenir les projections de l'équation de mouvement suivant les directions x_2 et x_3 finalement, on aboutit à:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho \gamma_1 \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho \gamma_2 \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \gamma_3
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$: contraintes normales

$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$: contraintes de cisaillement

f_1, f_2, f_3 : forces volumiques

$\rho \gamma_1, \rho \gamma_2, \rho \gamma_3$: forces d'inertie

Selon le principe de réciprocité des contraintes tangentielles, qui stipule que sur deux facettes orthogonales, les composantes des contraintes tangentielles perpendiculaires à l'arête commune sont égales et simultanément dirigées vers cette arête ou opposées à celle-ci.

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \tag{1.4}$$

Donc le système (1.3) devient s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j} + f_i = \rho \gamma_i \tag{1.5}$$

1.2.2 Formulation par la méthode intégrale (théorème de divergence)

Les équations d'équilibre précédents peuvent être obtenues d'une manière mathématique directe grâce au théorème de divergence.

On considère une portion de volume V quelconque d'un solide en équilibre, Ce dernier est soumis à des forces volumiques et à des forces d'inertie. On note, f_v les forces de volumes et f_s les forces de surface qui s'applique sur le contour A , l'égalité des forces s'écrit :

$$F_V + F_S = m\gamma \tag{1.6}$$

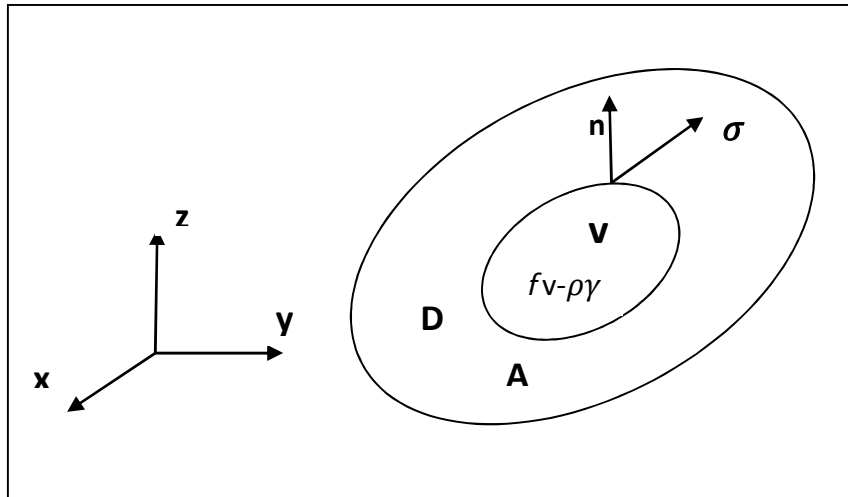


Figure 1.2. Portion de volume considérée

F_V : vecteur de force de volume

F_S : vecteur contrainte agissent en tout point de surface A

γ : Accélération de la partie dv ayant la masse m

La somme des forces de volume est :

$$\int_V f_i dv \quad (1.7)$$

La somme des forces de surface est :

$$\int_A t_i dA \quad (1.8)$$

La somme des forces d'inertie est :

$$\int_V \rho \gamma_i dv \quad (1.9)$$

L'égalité des forces s'écrit :

$$\int_V f_i dV + \int_A t_i dA = \int_V \rho \gamma_i dV \quad (1.10)$$

Avec :

$$\gamma = \frac{d^2 u}{d t^2} = \ddot{U} \quad (1.11)$$

L'effort de cohésion s'exprime par :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.12)$$

σ_{ij} : tenseur des contraintes.

γ_i : vecteur d'accélération.

n_j : vecteur unitaire perpendiculaire à la surface.

L'intégral de surface peut être réécrit à un intégral de volume par le théorème de divergence (Gauss) comme suit :

$$\int_A t_i dA = \int_A \sigma_{ij} n_j dA = \int_V \sigma_{ij,j} dV \quad (1.13)$$

L'équation (1.12) devient :

$$\int_V \sigma_{ij,j} dV + \int_V f_i dV = \int_V \rho \gamma_i dV \quad (1.14)$$

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i) dV = 0 \quad (1.15)$$

Donc, l'équation d'équilibre dynamique devient :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i \quad (1.16)$$

Sous forme matricielle :

$$\text{div} [\sigma]^T + f_v = \rho \gamma \quad (1.17)$$

$$\text{div} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \quad (1.18)$$

Par le théorème de réciprocité :

$$[\sigma]^T = [\sigma] \quad (1.19)$$

$$\text{div}[\sigma] + f_v = \rho \gamma \quad (1.20)$$

1.3 Equation d'équilibre statique

L'ensemble des équations (1.3) constitue les équations différentielles de conservation de la quantité de mouvement ou simplement équation local de mouvement. En l'absence de mouvement lorsque le milieu est au repos le vecteur d'accélération γ est nul, on obtient les équations d'équilibres statiques :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Donc :

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{1.22}$$

$$\sigma_{i,j,j} + f_i = 0 \tag{1.23}$$

Sous forme matricielle :

$$\text{div}[\sigma] + f_v = 0 \tag{1.24}$$

1.4 Equation d'élasticité linéaire en 3D

Ce sont les relations et l'équation usuelle d'un milieu élastique continu (relation déformation-déplacement, relation contrainte déformation).

1.4.1 Équation cinématique

Les déformations sont les dérivées des déplacements, elle s'écrit sous forme indicielle comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.25}$$

u_i : Déplacement suivant x_i

Sous forme matricielle :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{1.26}$$

[L] : Opérateur différentielle donné par

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

1.4.2 Loi constitutive de Hooke isotrope

Les équations constitutives, qui décrivent le comportement du milieu, rendent compte de la relation entre les tensions et les déformations. Pour un solide élastique linéaire, la loi de Hooke établit une relation linéaire entre les contraintes et les déformations :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.28)$$

D_{ijkl} : Le tenseur d'élasticité linéaire.

Pour des raisons de simplicités on écrit :

$$\sigma = D\varepsilon$$

Avec :

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

s y m .

E : Module de Young.

ν : Coefficient de Poisson.

1.5 Cas d'élasticité plane

Vu la symétrie des tenseurs et dans le but d'alléger les écritures le problème d'élasticité plane peut être défini comme suit :

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{x y} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x y} \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

u et v sont les composantes de déplacement dans le sens x et y .

Le vecteur des déformations $\{\varepsilon\}$ s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

$[L]$: Est un opérateur différentielle, il est donné par :

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

La matrice $[D]$ diffère selon que c'est un état de contrainte plane ou de déformation plane.

1.5.1 Etat plan de contrainte

On considère une paroi (fig. 1.3), De plan moyen situé dans (x, y) , et d'épaisseur t constante est petit vis-à-vis des déformations mesurées selon x et y (paroi mince), soumise à des forces parallèle au plan (x, y) , et constantes dans le sens d'épaisseur.

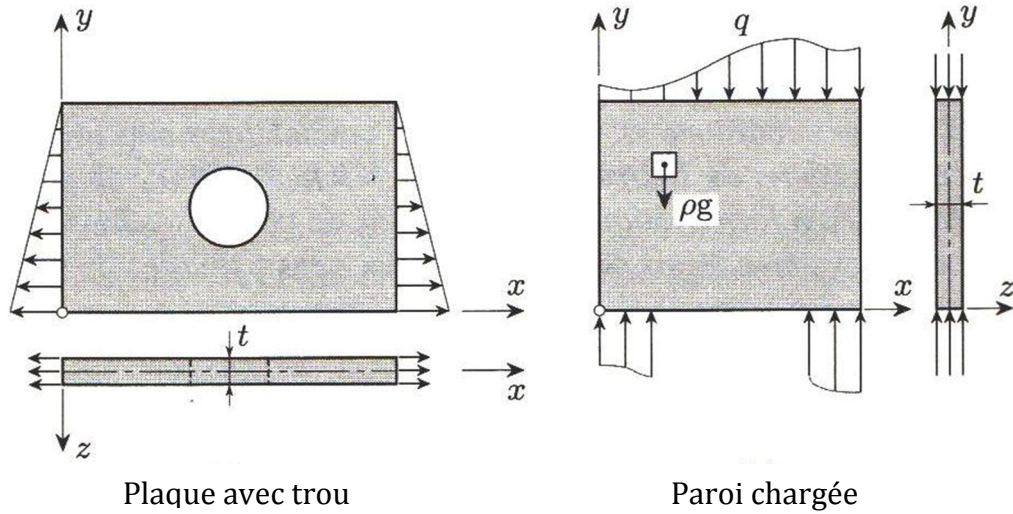


Figure 1.3. : Etat plane de contrainte

Les composantes σ_z , τ_{xz} et τ_{yz} des contraintes sont nulles sur les deux faces $z = \pm t/2$. surtout plan intérieur parallèle à (x, y) , ces composantes ne peuvent prendre que des valeurs très faibles et l'on ne commet pas d'erreur sensible en affirmant qu'elles sont nulles

$$\sigma_z \cong 0 \quad \tau_{xz} \cong 0 \quad \tau_{yz} \cong 0 \quad (1.33)$$

Semblablement, les trois composantes non nulles (tenseur plan)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (\tau_{xy} = \tau_{yx}) \quad (1.34)$$

L'épaisseur t et l'axe z ne jouent donc pas de rôle ici : on peut prendre $t=1$ et négliger toute les quantités associées à z .

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ou, inversement :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x - \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y - \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Donc on peut écrire :

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

La réduction de la loi de Hooke tridimensionnelle à l'état plan en supposant σ_z, τ_{xz} et τ_{yz} nul (1.33) fournit les équations (1.35), mais également

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.38)$$

Cette équation montre que, d'un point (x, y) à l'autre, les déformations et déplacements varie légèrement à travers l'épaisseur de la paroi (effet de coefficient de poisson). C'est pour cette raison que les contraintes (1.33) ne sont, en réalité, pas exactement nulles. On démontre toute fois qu'elles sont essentiellement fonction de z^2 et donc d'autant plus petites que t est faible.

1.5.2 Etat plan de déformation

On considère un solide infiniment long dans la direction z (fig.1.4), sollicité, toutefois, comme au cas précédent (force agissent dans les plans perpendiculaire à z et constante avec z).

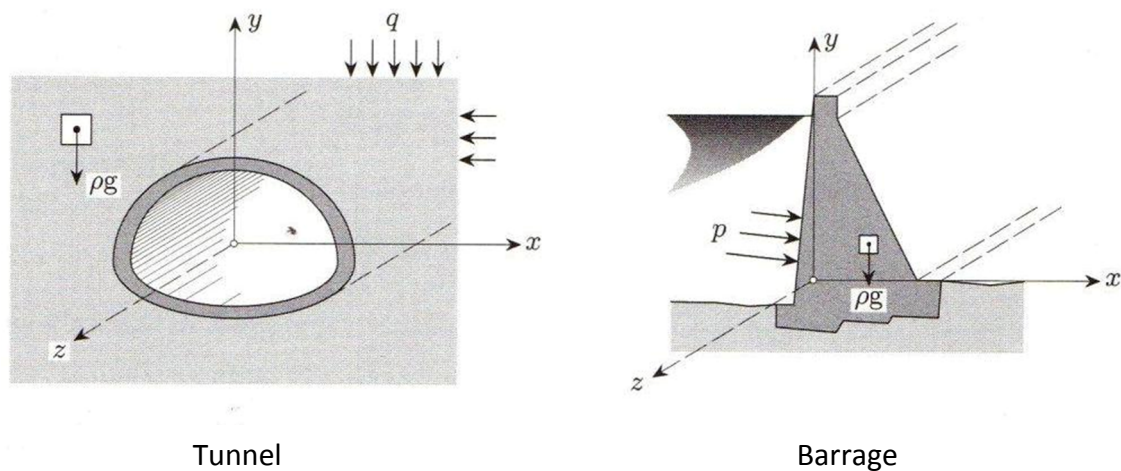


Figure 1.4 : Etat plane de déformation

Toutes les tranches d'épaisseur t de ce solide sont dans le même état et se déforment et déplacent dans leur plan moyen, parallèle au plan (x, y) . Il en résulte

$$\varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (1.39)$$

Les autres composantes de la déformation (tenseur plan)

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (\gamma_{xy} = \gamma_{yx}) \quad (1.40)$$

Les déplacements (u, v) sont constants le long de z . L'épaisseur t et l'axe z ne jouent pas de rôle ici.

La loi de Hooke est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Inversement

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Donc on peut écrire :

$$\varepsilon = D \sigma$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

E : module de Young.

ν : coefficient de poisson.

G : module de coulomb.

La réduction de la loi de Hooke tridimensionnelle à l'état plan fournit les équations (1.41), mais également

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (1.44)$$

Les contraintes σ_z agissent longitudinalement, sur les sections planes parallèles à (x, y) . Si on isole une tranche, elles en garantissent la planéité des deux faces (principe de la coupe). Elles ne constituent pas une inconnue de problème puisqu'elles se calculent une fois σ_x et σ_y obtenues.

CHAPITRE 2

DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

2.1 Introduction

Les problèmes rencontrés par l'ingénieur sont souvent des phénomènes physiques réels qui sont généralement représentés par des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur ces frontières et comme ce domaine représente un milieu continu alors, il possède une infinité de degrés de libertés, ce qui rend la résolution du problème très difficile et même impossible. Pour pouvoir étudier le comportement de ces phénomènes, l'ingénieur est donc amené à remplacer le système continu par un système discret équivalent ayant un nombre fini de degrés de libertés. Cela peut se faire en utilisant des méthodes de résolutions numériques appelées méthode de discrétisation.

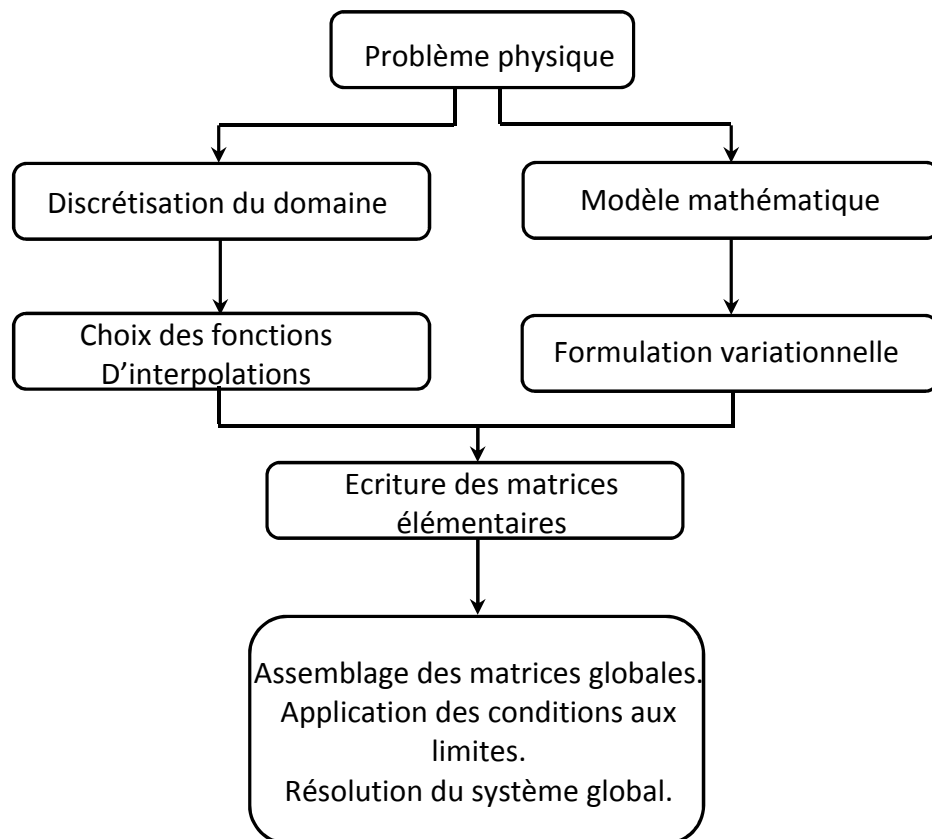
La méthode de discrétisation la plus populaire en génie civil est la méthode des éléments finis. La méthode des différences finies et la méthode de frontière, sont aussi d'emploi courant. En gros, la méthode des différences finies vise à résoudre directement la forme différentielle du problème en cherchant la valeur numérique des inconnus en un certain point, dit nœud formant une grille usuellement régulière. Pour appliquer les deux autres méthodes il faut transformer la forme différentielle en une forme intégrale mathématiquement équivalente et diviser le domaine et la frontière en un maillage d'éléments de formes géométriques simples. On cherche alors la valeur numérique des inconnues en un certain nombre de points typiques de maillage. Les nœuds situés dans le domaine v et sur sa frontière A pour la méthode des éléments finis ou sur la frontière A pour la méthode des éléments de frontière. [10]. [8]. [1].

Le but De ce présent chapitre est la discrétisation par éléments finis des équations d'élasticité linéaire retrouvées dans le chapitre précédent, pour le cas tridimensio-

nel ainsi que les deux états plans de contrainte et de déformation, pour le cas statique et dynamique.

2.2 Les grandes lignes de la MEF

De nos jours la méthode des éléments finis est très réputée pour la résolution des problèmes d'ingénieries, cette dernière est apparue vers 1955 en même temps que les ordinateurs puissants; d'abord appliquée aux calculs des structures et solides. Quand on a réalisé qu'elle représentait une méthode générale de résolution numérique des problèmes aux limites, alors dès 1965 à ce jour cette méthode a pris une extension fantastique. Toute modélisation conduit à des équations différentielles avec des conditions aux limites lui devait accessible : structure solide, chaleur, fluide, électromagnétique,... etc. Que se soit des problèmes statiques ou dynamiques linéaires ou non linéaires, isotropes ou non isotropes. [10,8]. Généralement toute étude faite par la méthode des éléments finis nécessite le passage par les étapes suivantes : [1]. [19]



2.1. Étapes générales de la méthode des éléments finis.

Etape1 : on se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine, avec des conditions aux limites sur le bord nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.

Etape2 : on construit une formulation intégrale du système différentielle à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation variationnelle du problème

Etape3 : on choisit la famille du champ locale, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autre fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement les dérivées). la maille complétée par ces informations est alors appelée "élément".

Etape4 : on ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. C'est dans cette étape que se fait le calcul des matrices élémentaires.

Etape5 : c'est la phase d'assemblage, elle consiste à construire les matrices (rigidité, masse, ...) de tout le domaine (matrices globales), à partir des matrices caractéristiques des différents éléments (matrices élémentaires) probablement calculées dans l'étape(4).

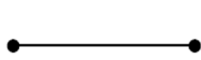
Etape6 : l'assemblage donne naissance à un système global qui peut être linéaire ou non linéaire à résoudre. il définit, soit un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique, soit un problème de propagation qui concerne le cas (dynamique), dans lequel il faut déterminer les variations physiques, et la propagation d'une valeur initiale

2.3 Différentes formes des éléments

Nous présentons les formes de quelques éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions.

Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que le type de frontière. De plus, nous donnons le nombre de nœuds géométrique nécessaire pour le définir. Il faut que le nombre de nœuds géométrique sur chaque frontière soit compatible avec la forme de la courbe qui constitue.

Elément à une dimension



Linéaire (2)



linéaire (3)



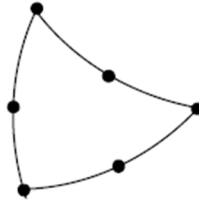
cubique (4)

Elément à deux dimensions

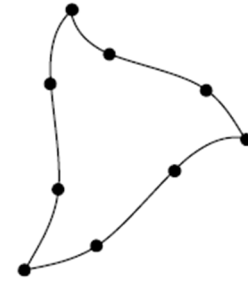
Elément triangulaire



Linéaire (3)

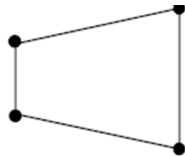


quadrique (6)

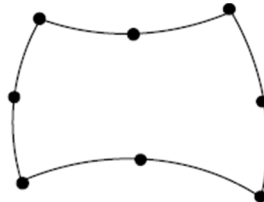


cubique (9)

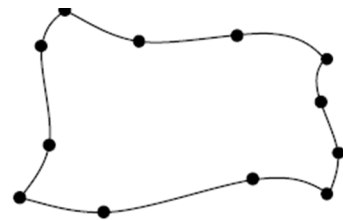
Elément quadrilatéraux



Linéaire (4)



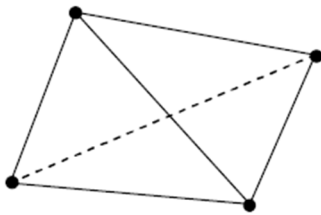
quadrique(8)



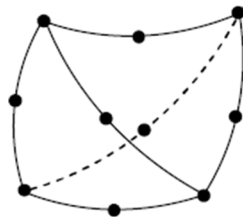
cubique (12)

Eléments à trois dimensions

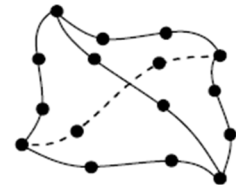
Eléments tétraédriques



Linéaire (4)

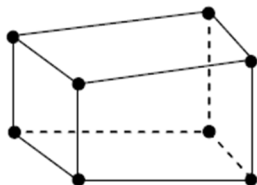


quadratique (10)



cubique (16)

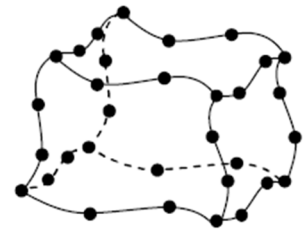
Elément hexaédrique



Linéaire 8



quadratique (20)



cubique 32

2.2 : types d'éléments

On remplace les équations (2.5) et (2.6) dans l'équation (2.4)

On obtient :

$$\delta A = \int_A \delta u_i \sigma_i n_j dA - \int_V \delta \varepsilon_{i,j} \sigma_{i,j} dv \quad (2.7)$$

L'équation (2.2) devient :

$$\begin{aligned} & - \int_V \delta \varepsilon_{i,j} \sigma_{i,j} dv + \int_A \delta u_i \sigma_i n_j dA + \int_V \delta u_i f_i dv - \int_V \delta u_i \rho \gamma_i dv \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

On pose : $\sigma_i n_j = t$ (le vecteur contrainte)

$$- \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv + \int_A \delta u t dA + \int_V \delta u f dv - \int_V \delta u \rho \gamma dv = 0 \quad (2.9)$$

Travail virtuel intérieur

$$W_{int} = - \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv \quad : \text{Travail virtuel intérieur}$$

Travail virtuel extérieur

$$W_s = \int_A \delta u t dA \quad : \text{travail virtuel des forces de surface}$$

$$W_v = \int_V \delta u f dv \quad : \text{travail virtuel des forces de volume}$$

$$W_i = \int_V \delta u \rho \gamma dv \quad : \text{travail virtuel des forces d'inerties}$$

Remarque :

Dans le cas statique l'équation d'équilibre statique s'écrit:

$$- \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv + \int_A \delta u t dA + \int_V \delta u f dv = 0 \quad (2.10)$$

2.5 Choix du champ des déplacements (interpolation)

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaine, et pour ce la on choisissant une interpolation nodal. On obtient pour chaque nœud i de cordonné x_i

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \dots N_n u_n \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \dots N_n v_n \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 \dots N_n w_n$$

On remarque que les fonctions d'interpolation nodale sont les même pour les trois équations, quant à n il représente le nombre de nœud de l'élément choisi, l'expression (2.1) peut s'écrire sous forme matricielle de la manier suivant :

$$U = N U_n \quad (2.12)$$

$$U = \langle u, v, w \rangle^T \quad (2.13)$$

N : Est la matrice des fonctions d'interpolation nodale, et elle est donné par :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Sous forme générale on l'écrie :

$$N = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

U_n Représente les valeurs nodales inconnues qui sont les déplacements aux nœuds

$$\{U_n\} = \langle u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \dots \dots \dots u_n, v_n, w_n \rangle \quad (2.16)$$

$$\{U_n\} = \langle u_i, v_i, w_i \rangle \quad (2.17)$$

Pour le cas d'élasticité tridimensionnelle, chaque nœud doit correspond troie degrés de liberté (u, v, w)

Donc :

$$\{U\} = [N] \{U_n\} \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Nous pouvons servir de l'approximation de $\{U\}$ pour définir ε que nous pouvons écrire sous forme :

$$\{\varepsilon\} = [L][U] = [L][N]\{U\} = [B]\{U\} \quad (2.20)$$

$$[B] = [L][N] \quad (2.21)$$

$[B]$: Matrice de déformation ou "strain matrix" dans la terminologie Anglo-Saxonne, nous pouvons écrire $[B]$ explicitement sous la forme :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Pour le Cas 2D :

Pour le cas d'élasticité bidimensionnelle, chaque nœud doit avoir deux degrés de liberté (u, v)

Donc :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Le champ des déplacements virtuels (fonction poids) s'écrit comme suit :

$$\delta u = [N] \delta U \quad (2.25)$$

$$\delta u = N \delta U \quad (2.26)$$

Le vecteur accélération s'écrit comme suit :

$$\delta \ddot{u} = \mathcal{X} N \dot{U} \dot{\eta} = N \delta \ddot{U} n \quad (2.27)$$

Le vecteur $\{\delta \dot{\eta}\}$ peut s'écrire maintenant comme suit :

$$\delta \varepsilon = \mathcal{X} B U \dot{\eta} \quad (2.28)$$

$$\delta \varepsilon = B \delta U n \quad (2.29)$$

De plus, nous supposons que le matériau est linéaire élastique ; il obéit à la loi de Hooke

$$\sigma = D \varepsilon = D B U n \quad (2.30)$$

2.6 Expression des matrices élémentaires

2.6.1 Expression de la matrice rigidité

L'expression de la matrice rigidité s'obtient à partir de la discrétisation de l'expression de travail virtuel intérieur :

$$W_{i n t} = \int_v \delta \varepsilon^T \sigma \, dv \quad (2.31)$$

En introduisant les expressions des équations (2.29) et (2.30) dans (2.31) :

$$\begin{aligned} W_{i n t} &= \int_v \delta \varepsilon^T \sigma \, dv = \int_v (B \delta U_n)^T D B U_n \, dv \\ W_{i n t} &= \int_v \delta U_n^T B^T D B U_n \, dv = \delta U_n^T K U_n \end{aligned} \quad (2.32)$$

D'où:

$$K = \int_v B^T D B \, dv \quad (2.33)$$

Avec :

K : Matrice rigidité de système

D : Matrice d'élasticité

B : Matrice de déformation

Pour le Cas 3D :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

s y m .

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Pour le Cas 2D :

- Etat plan de contrainte

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

- Etat plan de déformation

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.6.2 Expression de la matrice masse

L'expression de la matrice masse s'obtient à partir de la discrétisation de l'expression de travail virtuelle de la force d'inertie

$$W_i = \int_V \delta u \rho \gamma \, dv = \int_V \delta u \rho \ddot{u} \, dv \quad (2.38)$$

Remplaçant l'équation (2.26) et (2.27) dans (2.38) on obtient :

$$W_i = \delta \underline{\psi}_n^T \int_V N^T \rho N \, dv \ddot{U}_n = \delta \underline{\psi}_n^T M \ddot{U}_n \quad (2.39)$$

Avec :

$$M = \int_V N^T \rho N \, dv \quad (2.40)$$

L'expression de la matrice masse telle qu'elle obtenue en (2.40) est appelé masse cohérent ou répartie qui s'écrit sous forme explicite :

Pour le Cas 3D :

$$M_{ij} = \int_V \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} dv \quad (2.41)$$

$$M_{ij} = \int_V \rho \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} dv \quad (2.42)$$

Pour le Cas 2D :

$$M_{ij} = \int_V \rho \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} dv \quad (2.43)$$

Elle peut être aussi exprimée sous forme concentrée (matrice diagonale) en concentrant la masse sur les nœuds

$$M_{jj} = I \int_V \rho N_j dv \quad (2.44)$$

I : Matrice identité

2.6.3 Expression de vecteur chargement

L'expression de vecteur chargement s'obtient à partir de la discrétisation de l'expression des travaux virtuelles des forces surfacique et forces volumique

$$W_C = \int_V \delta u f dv + \int_A \delta u t dA \quad (2.45)$$

On remplaçant l'équation (2.24) dans (2.39):

$$W_C = \int_V \delta U_n^T N^T f dv + \int_A \delta U_n^T N^T t dA \quad (2.46)$$

$$W_C = \delta U_n^T \left(\int_V N^T f dv + \int_A N^T t dA \right) \quad (2.47)$$

$$W_C = \delta U_n^T F \quad (2.48)$$

$$F = \int_V N^T f dv + \int_A N^T t dA \quad (2.49)$$

F : Le vecteur chargement

L'expression explicite s'écrit:

Pour le Cas 3D :

$$F = \int_A \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} dA + \int_V \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} dv \quad (2.50)$$

Pour le Cas 2D :

$$F = \int_A \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} dA + \int_V \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} dv \quad (2.51)$$

Le vecteur chargement donné par l'expression (2.50) dépend de type de chargement appliqué il est composé d'un chargement surfacique tel que les pressions et d'un chargement volumique comme par exemple le poids propre et les

charges sismique. si on s'intéresse uniquement à la réponse sismique, l'expression du vecteur F s'écrira :

$$F = \int_V N^T r \rho \ddot{u}_g dv \quad (2.52)$$

L'expression explicite s'écrit :

$$F = - \int_A \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \rho \ddot{u}_g dv = M I \ddot{u}_g \quad (2.53)$$

M : matrice masse

\ddot{u}_g : accélération sismique à la base

r : vecteur de couplage dynamique

Donc finalement l'équation d'équilibre dynamique sera donnée par :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (2.54)$$

M , K et F : sont donnés respectivement par les expressions (2.33), (2.40) et (2.49).

Concernant la matrice d'amortissement on utilise généralement l'amortissement de Rayleigh qui exprime la matrice d'amortissement sous forme d'une combinaison linéaire de la matrice masse M et de la matrice de rigidité K [12].

$$C_s = a_1 M + a_2 K \quad (2.55)$$

Avec a_1 et a_2 : coefficients arbitraires satisfaisant les conditions d'orthogonalités qui peuvent être obtenues par :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_n} \begin{Bmatrix} \omega_1 \omega_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Avec :

ω_1 : Fréquence du premier mode.

ω_n : Fréquence du mode supérieur.

ξ : Taux d'amortissement critique.

CHAPITRE 3

APPLICATION AU CAS STATIQUE

3.1 Introduction

En mécanique des solides déformables, les théories utilisant des géométries à deux dimensions plongées dans l'espace tridimensionnel permettent généralement des gains de temps appréciables par rapport aux théories entièrement 3D, aussi bien pour la modélisation que pour le calcul.

Le but de ce présent chapitre est de voir la fiabilité d'une modélisation bidimensionnelle en déformation plane par rapport à une modélisation 3D du même problème.

La première partie de ce présent chapitre, concerne la modélisation d'une semelle filante qui repose sur un massif de sol. Dans la dixième partie, on s'intéressera à la modélisation d'un tunnel.

3.2 Application pour le cas d'une semelle filante

Cette application, concerne l'étude statique d'une semelle filante sous voile qui repose sur un massif de sol avec une interaction parfaite, les conditions aux limites sont prises en compte, encastrement pour la limite inférieure du sol ($y=0$) ; pour les limites latérales les déplacements sont bloqués, le sol de la fondation est considéré à l'état de consolidation (pas de tassement sous son poids propre), la surface libre de la fondation est chargée verticalement par deux types de chargement (une charge constante, et un chargement sinusoïdal).

3.2.1 Système étudié

Soit une semelle filante supposée rectangulaire définie par sa hauteur h , sa largeur b et sa longueur L ; elle est mise en contact directe avec un massif de sol qui définit par sa largeur B , sa longueur L_S et sa profondeur H .

La géométrie du système semelle filante-sol, ainsi le maillage correspondant sont représentés par les figures (3.1), (3.2) pour le cas tridimensionnel, et les figures (3.3), (3.4) pour le cas bidimensionnel. Les caractéristiques géométriques du système semelle filante-sol, utilisées dans ce présent chapitre, sont illustrées dans le tableau (3.1) et les caractéristiques mécaniques par le tableau (3.2).

Pour le cas bidimensionnel la semelle ainsi que le sol de fondation sont modélisés en déformation plane par des éléments finis quadrilatéraux linéaires Q4 avec deux degrés de libertés par nœud qui représentent les deux composantes de champs de déplacement. Pour le cas tridimensionnel la semelle filante ainsi que le sol de fondation, sont discrétisés par des éléments hexaédriques avec trois degrés de libertés par nœud qui représentent les trois composantes du champ des déplacements.

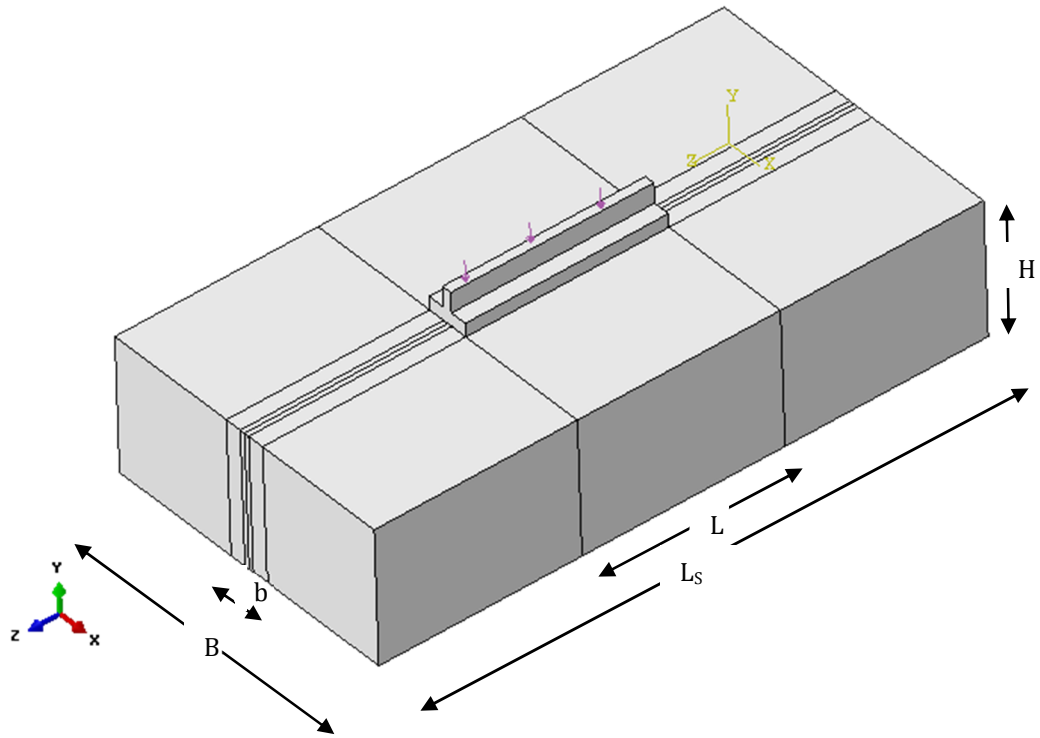


Figure 3.1: la géométrie de système semelle filante-sol (3D)

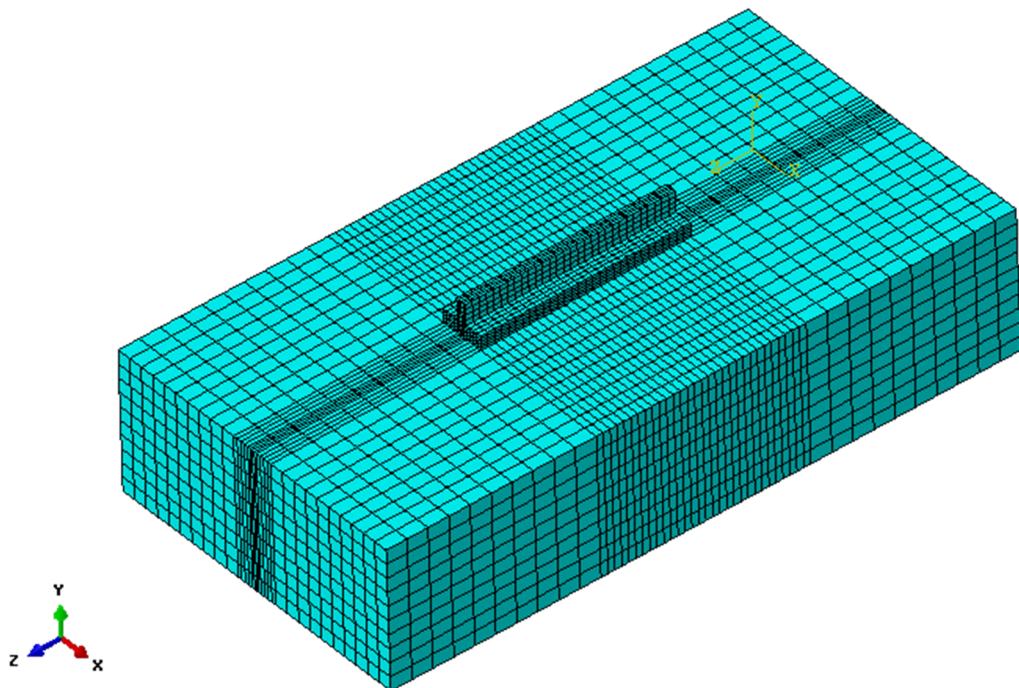


Figure 3.2: le maillage correspondant au système (3D)

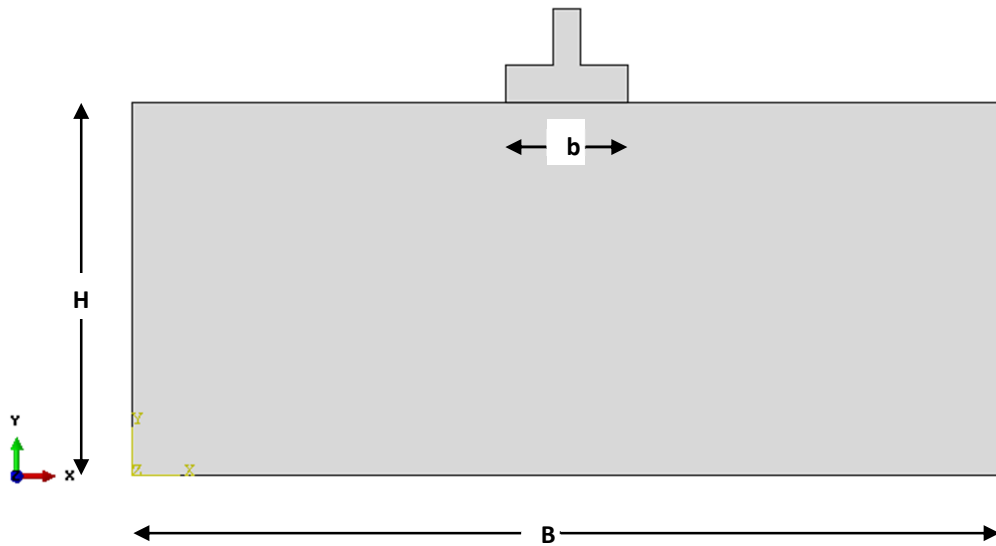


Figure 3.3: La géométrie du système semelle filante-sol (2D)

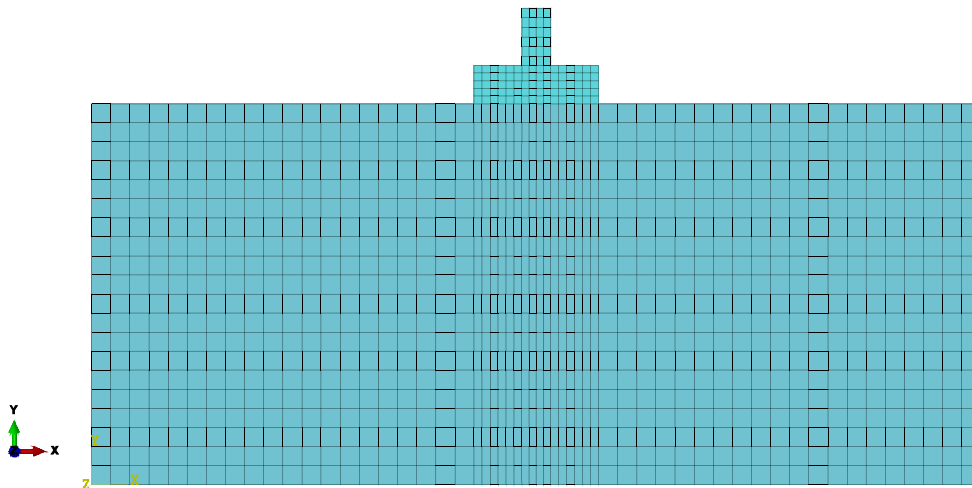


Figure 3.4: le maillage de système (2D)

Tableau 3.1 : Caractéristiques géométrique du système

Géométries		
Semelle	Largeur (b) (m)	1.3
	Langueur (L) (m)	6
	Hauteur(h) (m)	0.4
Sol	Largeur (B) (m)	9.3
	Langueur (L _s) (m)	18
	Hauteur(H) (m)	4

Tableau 3.2 : Caractéristiques mécaniques de la semelle

Matériaux		
semelle	Masse volumique (ρ_s) (t/m ³)	2.5
	Module de Young (E_s) (KPa)	32.10 ⁶
	Coefficient de Poisson (ν)	0.2
sol	Masse volumique (ρ_s) (t/m ³)	1.7
	Module de Young (E_s) (KPa)	(100,1000,1900, 2800). 10 ⁶
	Coefficient de Poisson (ν)	0.3

3.2.2 Influence de module de Young sur le comportement de la fondation

Pour les deux cas bi et tridimensionnels, et en faisant varier le module de Young du sol (100, 1000, 1900, 2800 MPa), on s'intéressera aux différents nœuds de contrôle (n_{x1}, n_{x2}, n_{x3} ; n_{z1}, n_{z2}, n_{z3}) indiqués sur la figure ci-dessous.

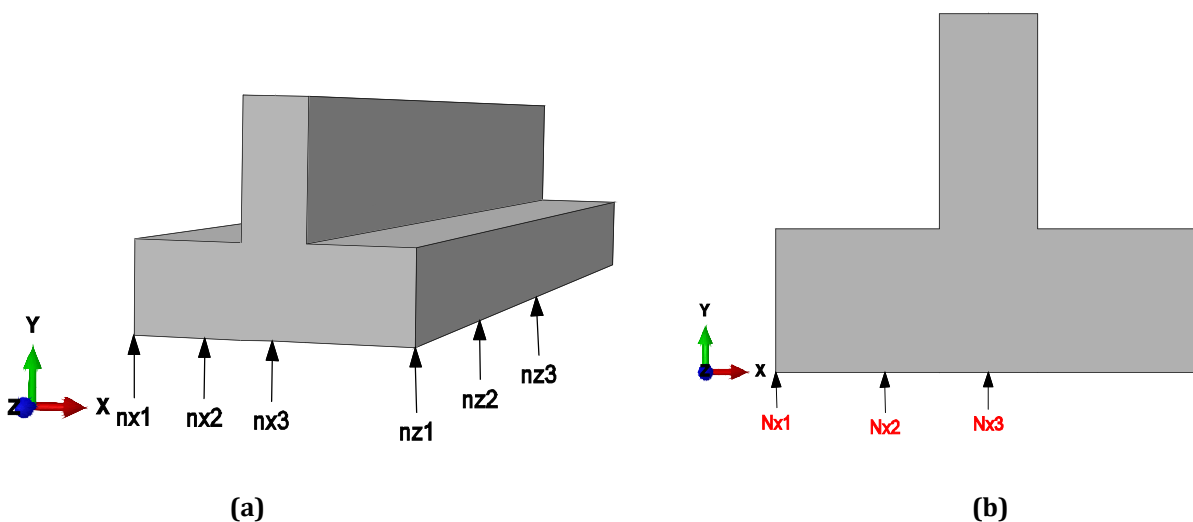


Figure 3.5: les nœuds considérés suivant la largeur et la longueur pour les deux cas

(a) Tridimensionnelle ; (b) bidimensionnelle

3.2.2.1 Etude des déplacements

➤ chargement constant $Q=500\text{KPa}$

On prend les trois nœuds qui sont définis suivant la largeur dans le paragraphe précédant, et on suit l'évolution de ses déplacements ; quatre valeurs de module de Young sont prises en compte dans cette étude (100, 1000, 1900, 2800MPa) pour les deux cas bidimensionnel et tridimensionnel. Les résultats sont groupés dans le tableau ci-après (les déplacements sont donnés en millimètre).

Comme chargement on applique une pression de 500 KPa sur la partie supérieure de la fondation ainsi que son poids propre.

Tableau 3.3 : Déplacements u_2 aux différents nœuds de la largeur et pour les différentes positions selon la longueur

position	E=100 MPa			E=1000 MPa		
	n_{x1}	n_{x2}	n_{x3}	n_{x1}	n_{x2}	n_{x3}
2D	-1,848	-1,864	-1,868	-0,177	-0,190	-0,193
z=0L	-1,488	-1,517	-1,522	-0,121	-0,139	-0,143
z=0.25L	-1,617	-1,630	-1,635	-0,160	-0,171	-0,175
Z=0.5L	-1,658	-1,670	-1,674	-0,170	-0,181	-0,185
	E=1900 MPa			E=2800 MPa		
2D	$-9,09.10^{-2}$	$-1,01.10^{-1}$	$-1,04.10^{-1}$	$-6,04.10^{-2}$	$-6,96.10^{-2}$	$-7,23.10^{-2}$
z=0L	$-5,90.10^{-2}$	$-7,25.10^{-2}$	$-7,60.10^{-2}$	$-3,81.10^{-2}$	$-4,91.10^{-2}$	$-5,21.10^{-2}$
z=0.25L	$-8,26.10^{-2}$	$-9,22.10^{-2}$	$-9,57.10^{-2}$	$-5,51.10^{-2}$	$-6,34.10^{-2}$	$-6,65.10^{-2}$
z=0.5L	$-8,79.10^{-2}$	$-9,77.10^{-2}$	$-1,01.10^{-1}$	$-5,87.10^{-2}$	$-6,72.10^{-2}$	$-7,04.10^{-2}$

D'après le tableau 3.3, on remarque l'augmentation des valeurs du déplacement vertical u_2 de l'extrémité vers le milieu de la fondation suivant la largeur (de nœud n_{x1} vers le nœud n_{x3}). De plus, à chaque fois qu'on augmente la valeur de module de Young du sol on a eu une diminution des déplacements.

Par ailleurs, en comparant les valeurs du déplacement obtenues par la modélisation bidimensionnelle, à celles données par la 3D, on constate une légère amplification des résultats donnés par la modélisation en déformation plane par rapport à la 3D.

Pour mieux illustrer la différence des résultats pour les deux cas, on présente ci-dessous la variation du tassement de la fondation en fonction de la largeur les figures (3.6 à 3.9) pour les différentes valeurs de (E).

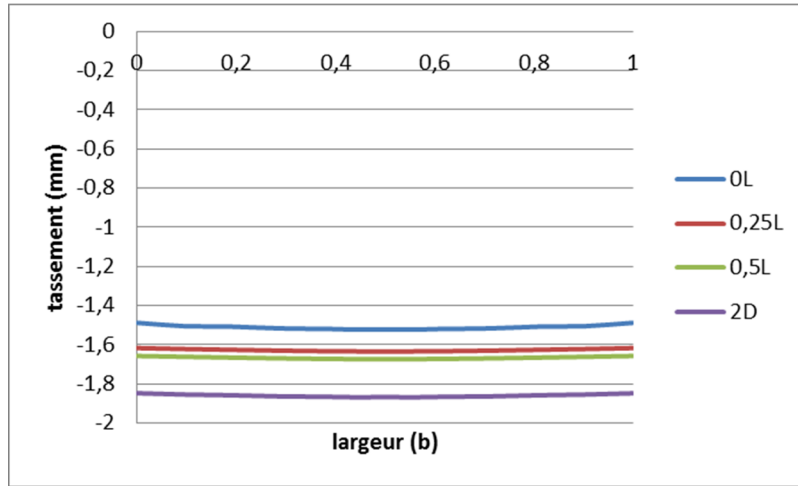


Figure 3.6: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec E=100MPa

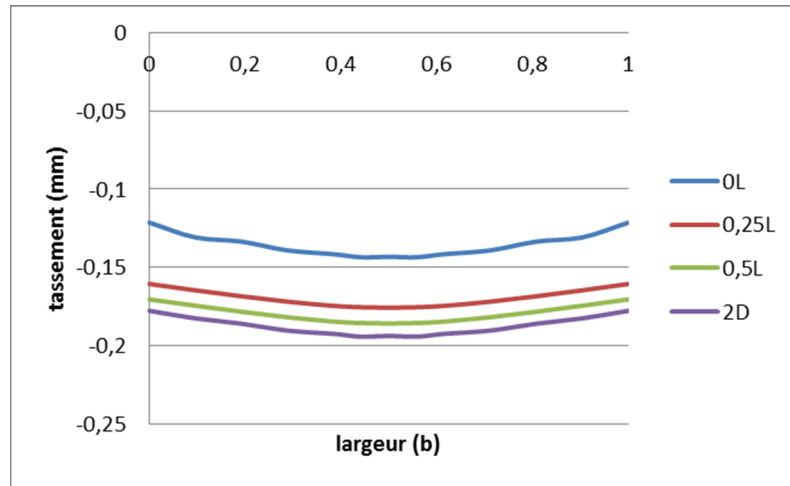


Figure 3.7: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec E=1000MPa

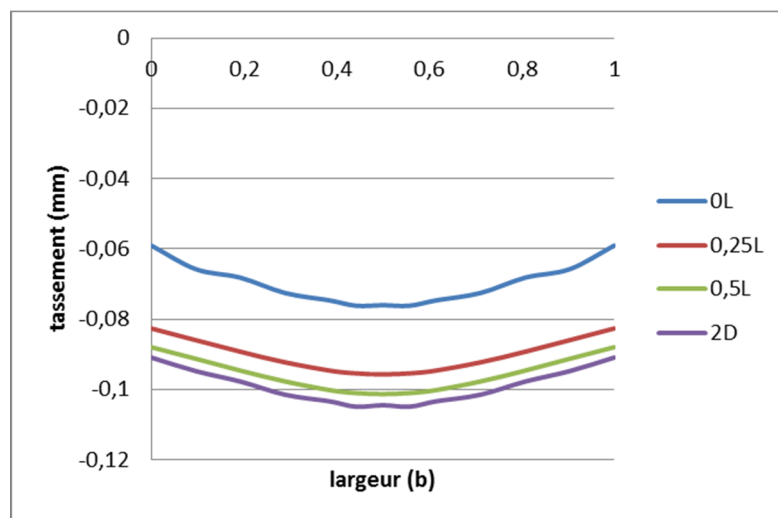


Figure 3.8: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec E=1900MPa

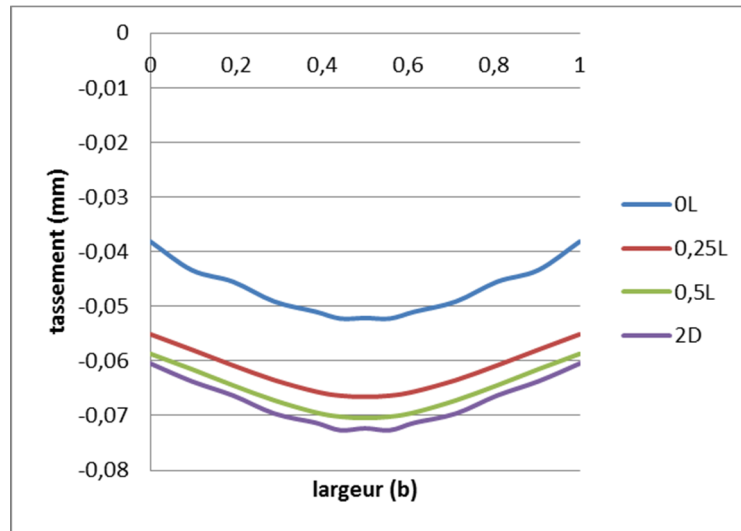


Figure 3.9: tassement de la fondation suivant la largeur pour les deux modèles avec $E=2800\text{MPa}$

D'après ces figures, on remarque que le tassement est très important au milieu de la fondation suivant la largeur due à la concentration de la charge, et la courbe donnée par le bidimensionnel est proche de celle obtenue par le tridimensionnel au niveau du milieu de la fondation c'est-à-dire à $z=0.5L$.

Les résultats obtenus pour les trois nœuds suivant la longueur (n_{z1} , n_{z2} , n_{z3}), sont représentés dans le tableau suivant :

Tableau 3.4 : tassement de la fondation aux différents nœuds de la longueur suivant les différentes positions de la largeur pour les quatre variantes de (E)

position	E=100 MPa			E=1000 MPa		
	n_{z1}	n_{z2}	n_{z3}	n_{z1}	n_{z2}	n_{z3}
x=0b	-1,488	-1,617	-1,658	-0,121	-0,160	-0,170
x=0.25b	-1,517	-1,630	-1,670	-0,139	-0,171	-0,181
x=0.5b	-1,522	-1,635	-1,674	-0,143	-0,175	-0,185
position	E=1900 MPa			E=2800 MPa		
	n_{z1}	n_{z2}	n_{z3}	n_{z1}	n_{z2}	n_{z3}
x=0b	$-5,90.10^{-2}$	$-8,26.10^{-2}$	$-8,79.10^{-2}$	$-3,81.10^{-2}$	$-5,81.10^{-2}$	$-5,87.10^{-2}$
x=0.25b	$-7,25.10^{-2}$	$-9,22.10^{-2}$	$-9,77.10^{-2}$	$-4,91.10^{-2}$	$-6,34.10^{-2}$	$-6,72.10^{-2}$
x=0.5b	$-7,60.10^{-2}$	$-9,57.10^{-2}$	$-1,01.10^{-1}$	$-5,21.10^{-2}$	$-6,65.10^{-2}$	$-7,04.10^{-2}$

Une fois de plus, on remarque l'augmentation des valeurs de déplacement du nœud n_{z1} vers le nœud n_{z3} (de l'extrémité de la fondation vers le milieu suivant la longueur).

Pour mieux illustrer la différence des résultats pour les deux cas de modélisations, on présente ci-dessous la variation du tassement de la fondation en fonction de la longueur, avec prise en compte des différentes valeurs de (E).

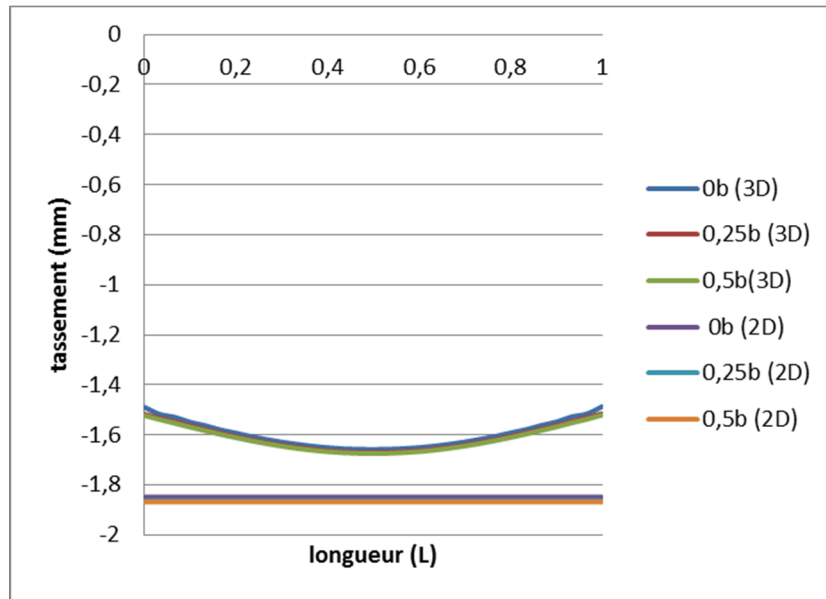


Figure 3.10: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=100\text{MPa}$

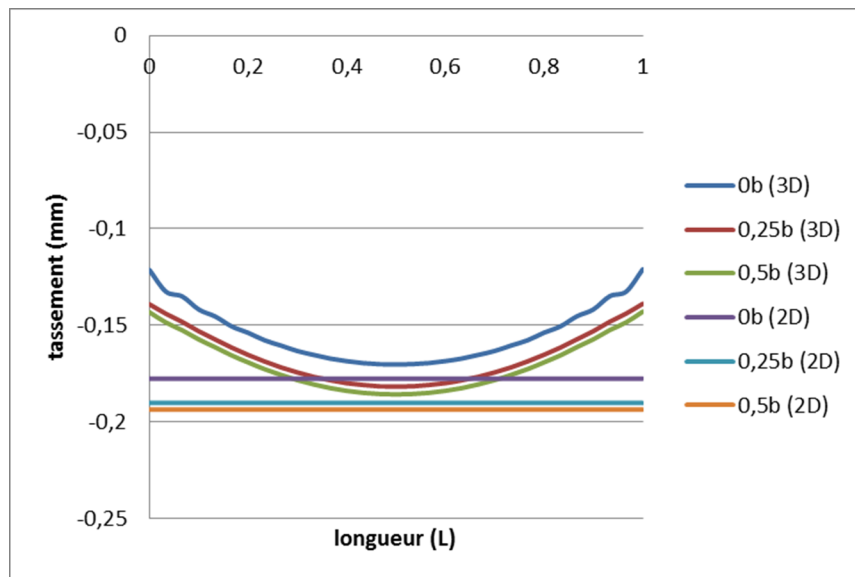


Figure 3.11: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=1000\text{MPa}$

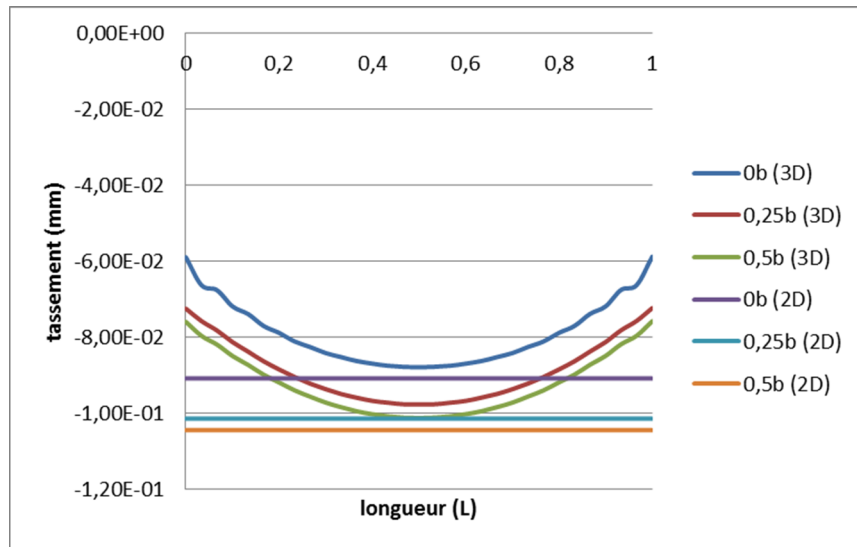


Figure 3.12: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=1900\text{MPa}$

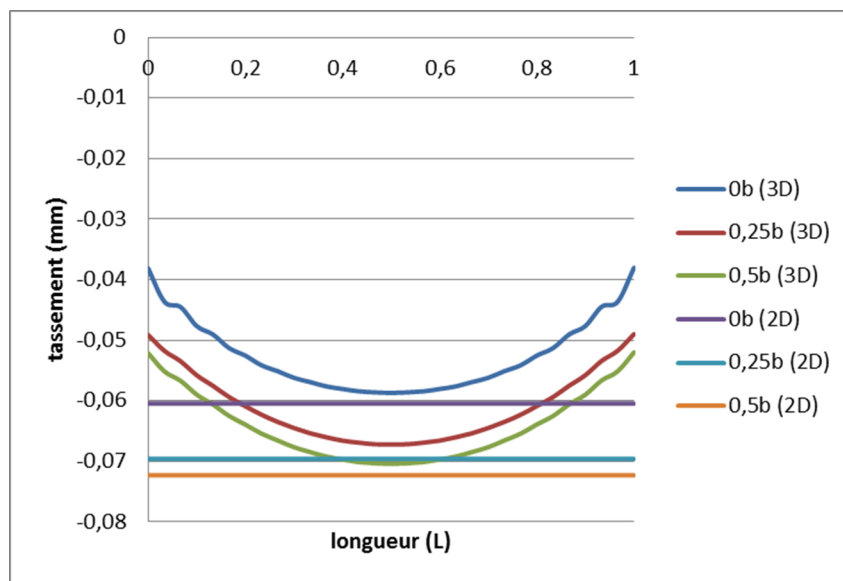
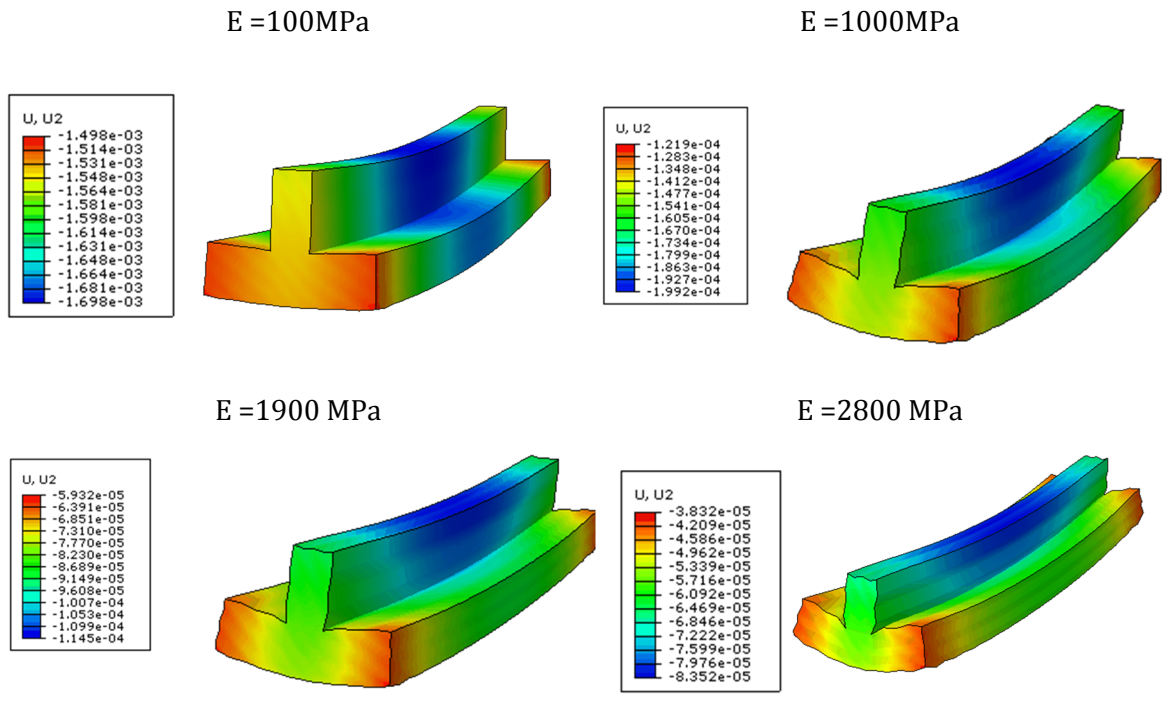


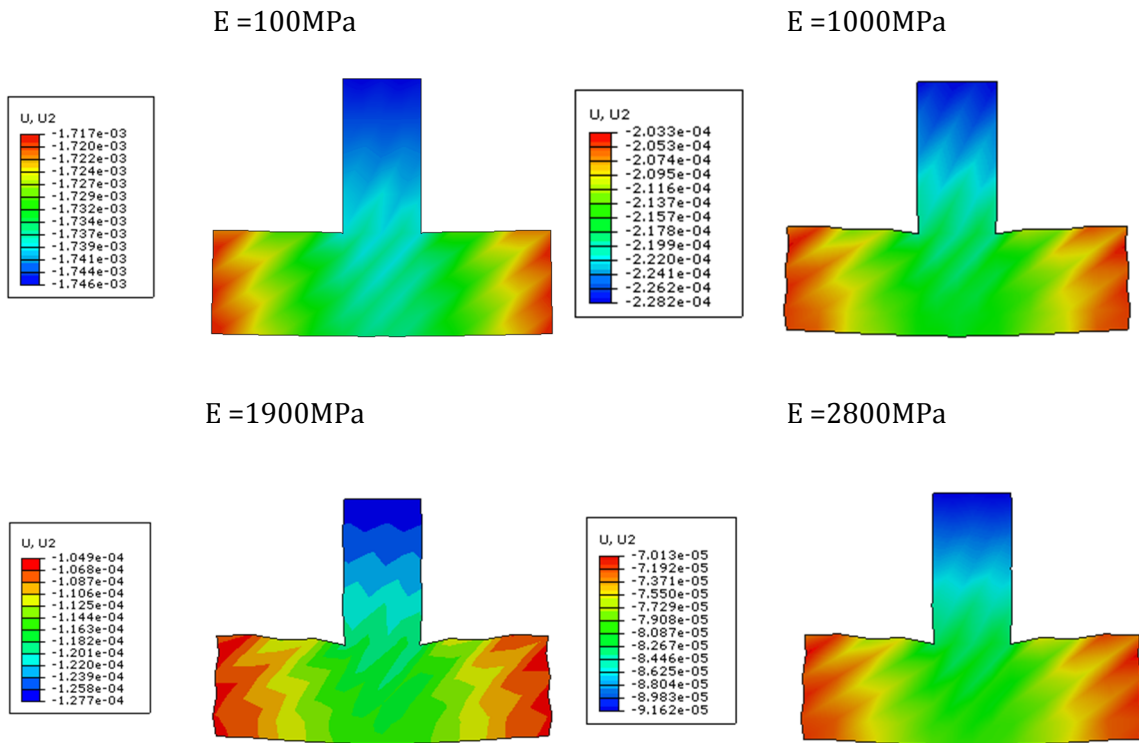
Figure 3.13: tassement de la fondation suivant la longueur aux différentes positions pour $E=2800\text{MPa}$

D'après ces figures on voit que la déformé de la semelle filante nous donne une flexion avec une valeur maximal obtenue au milieu de la fondation ($0,5L$) pour le cas tridimensionnel à cause de la rigidité flexionnelle de la semelle filante. Par contre pour le cas bidimensionnel, on remarque l'absence de cette flexion.

Les figures suivantes nous montrent la déformé de la semelle filante pour chaque valeur de E dans les deux cas de modélisation, on remarque que la déformé est très importante au milieu de la fondation (Les valeurs du déplacement sont données en mètre).



Modèle (3D)



Modèle (2D)

Figure 3.14: déformé de la fondation pour les deux modèles (2D, et 3D) pour les différentes valeurs de E

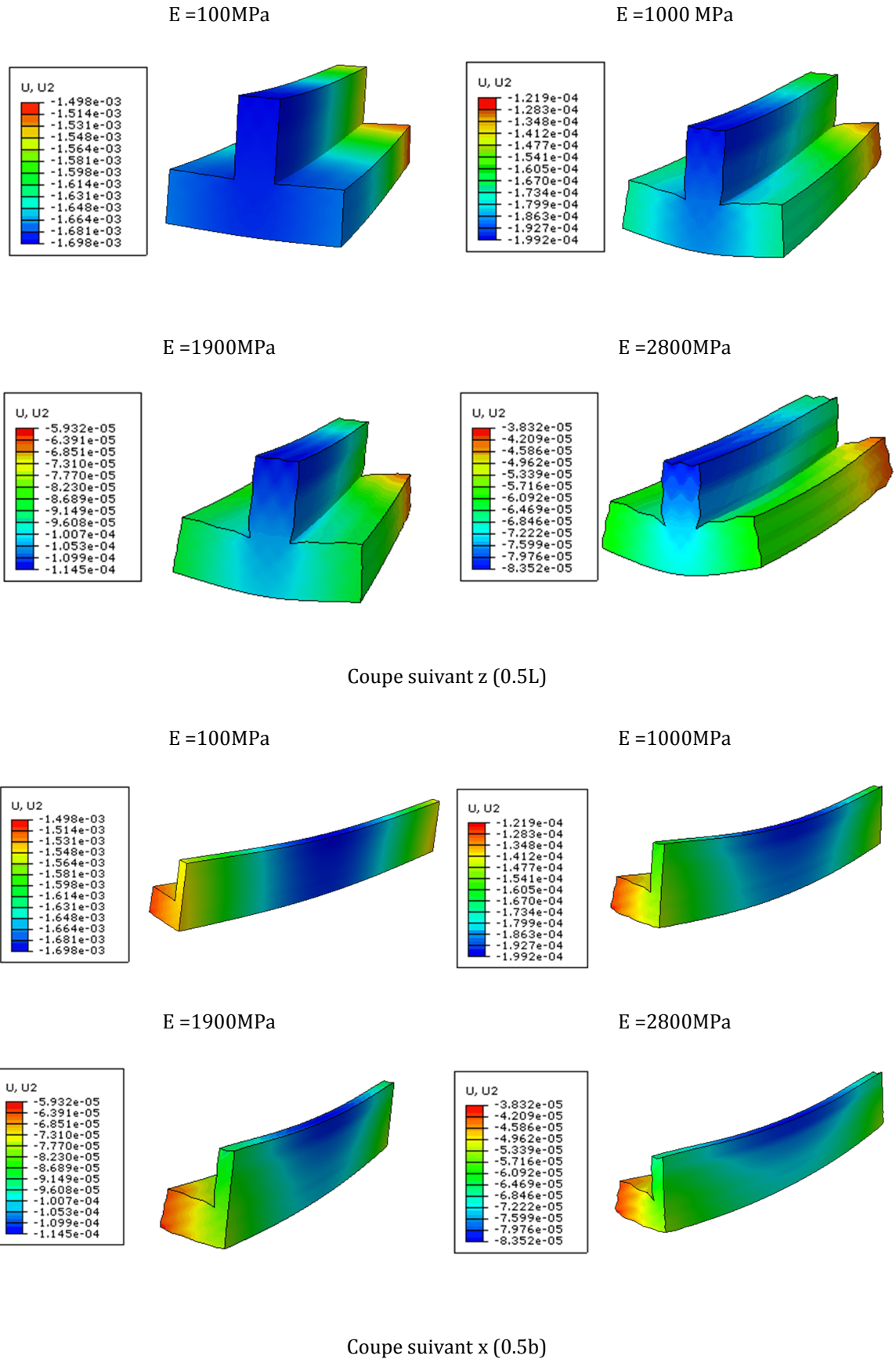


Figure 3.15: déformé de la fondation aux différentes positions de la 3D pour les différentes valeurs de E

Remarque :

D'après les figures 3.10 à 3.13, on constate que le tassement de la fondation donnée par la modélisation bidimensionnelle a été uniforme selon la longueur. Comme conséquence, il n'y a pas une flexion suivant l'axe z, une option ABAQUS nous a permis de montrer le comportement de la fondation sur toute sa longueur pour le cas de la modélisation en déformation plane.

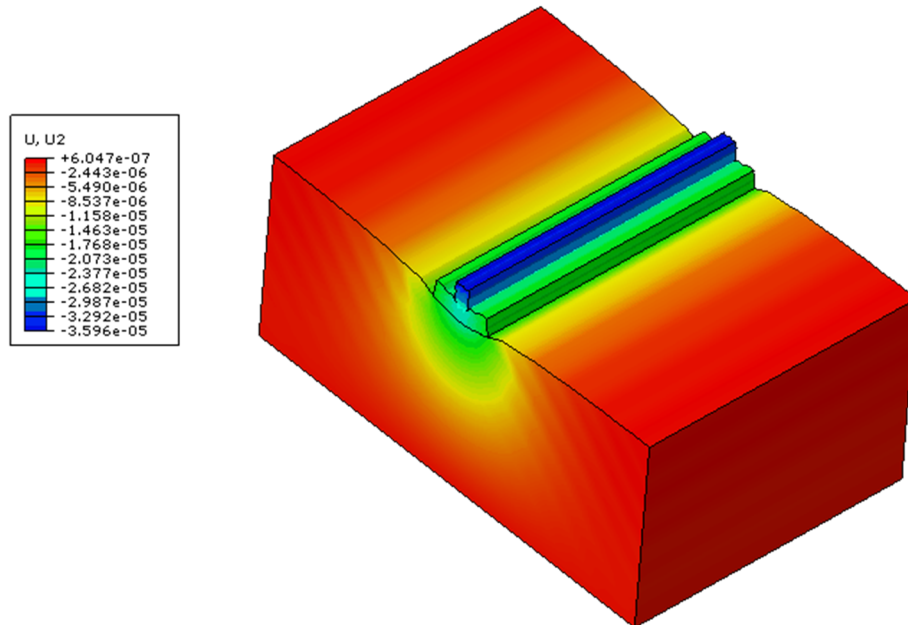


Figure 3.16: déformé de la fondation pour le cas de la modélisation en déformation plane

Les valeurs du déplacement u_2 obtenues au milieu de la fondation (n_{x3}) pour les différentes valeurs du module de Young sont représentées sous forme d'un histogramme afin de bien illustrer l'influence de module de Young sur le tassement de la fondation

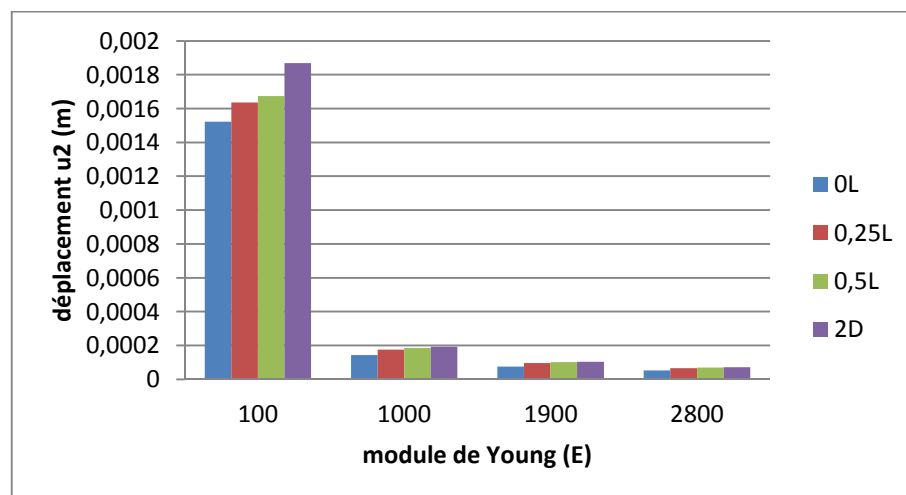


Figure 3.17: déplacement u_2 en fonction de module d'Young

On remarque à partir de la figure 3.17 :

- les déplacements sont importants pour un sol de faible rigidité ($E=100\text{MPa}$), et la valeur maximale des déplacements est donné par la modélisation bidimensionnelle.
 - Les écarts des valeurs du déplacement entre le bidimensionnel et le tridimensionnel dans le sol rigide sont faibles par rapport à ceux obtenus pour le cas d'un sol souple.
 - dans le sol rigide on voit la convergence des résultats obtenus par la modélisation bidimensionnelle et ceux obtenus par la modélisation tridimensionnelle au niveau de $0.5L$.
- **chargement sinusoïdal $F=Q \sin(t)$**

Dans le but de tester l'influence de la variation de la charge sur le tassement de la fondation en plus de poids propre de la fondation, un chargement sous forme d'une fonction sinusoïde est appliqué sur la surface supérieure de la fondation. La fonction choisie est sous la forme $F=Q \sin(t)$, pour une période qui varie de 0s à $t=20\text{s}$ avec un pas de temps 0.1s , et une magnitude $Q=500\text{KPa}$, pour mieux illustrée la variation de chargement considéré en fonction de temps on représente la figure ci-dessous

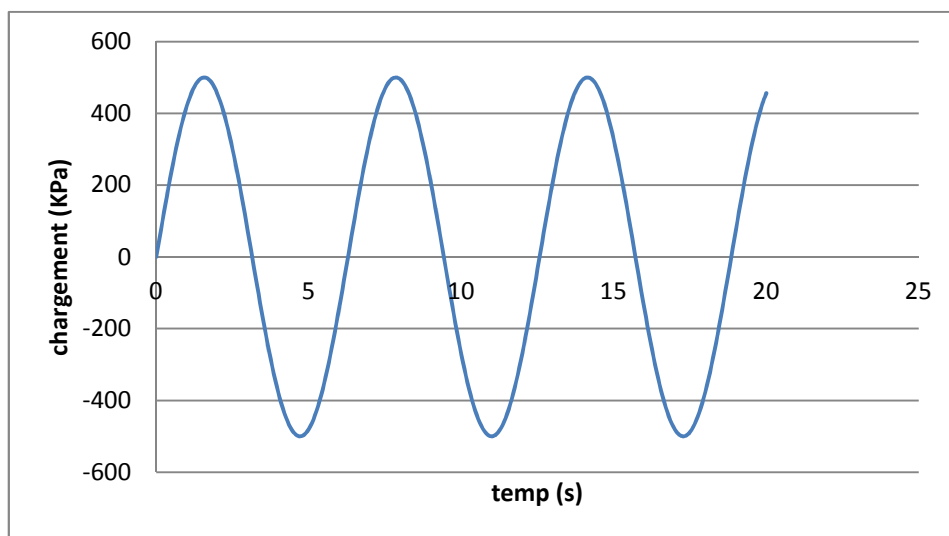


Figure 3.18: chargement en fonction de temps

Là encore, nous réalisons deux cas de modélisation bi et tridimensionnelle, pour différentes variantes du module de Young, avec les différentes positions suivant z ($0L$, $0.25L$, $0.5L$), les valeurs de déplacement vertical (u_2) au niveau du nœud (n_{x3}) sont représentées dans les figures suivantes.

Pour cette application on adaptera deux step, dans le premier on considère uniquement le poids propre de la semelle pendant une période de 1 seconde ($t=1s$), puis on affecte le deuxième step dans lequel on applique le chargement représenté par la figure (3.18) au niveau de la surface de la fondation.

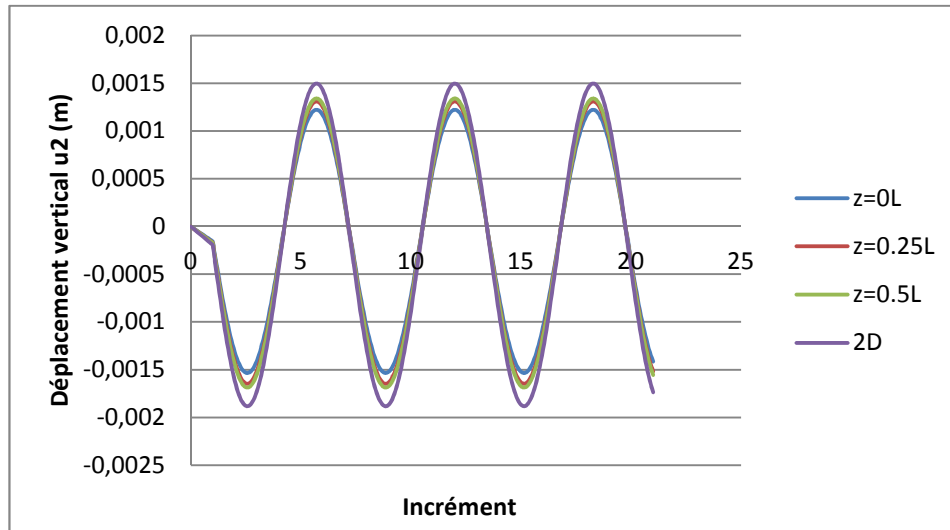


Figure 3.19: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=100\text{MPa}$

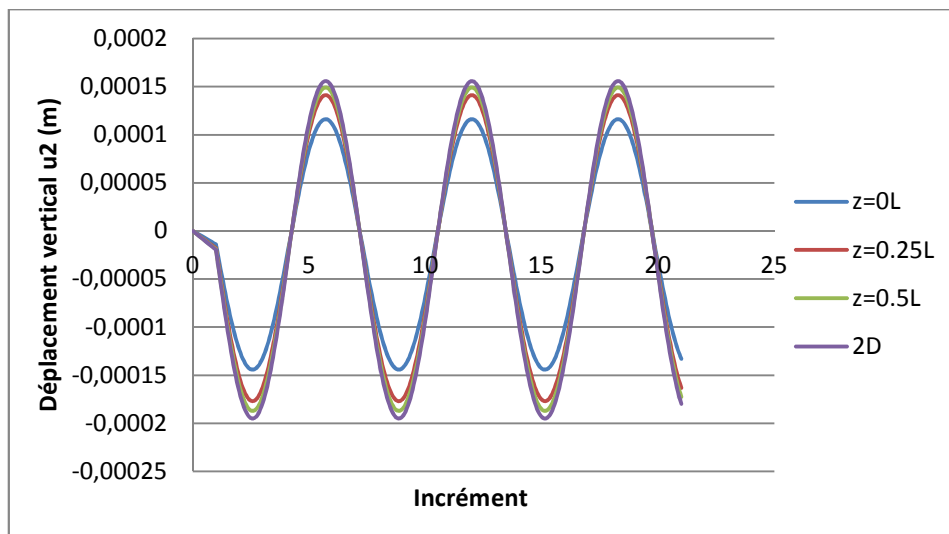


Figure 3.20: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=1000\text{MPa}$

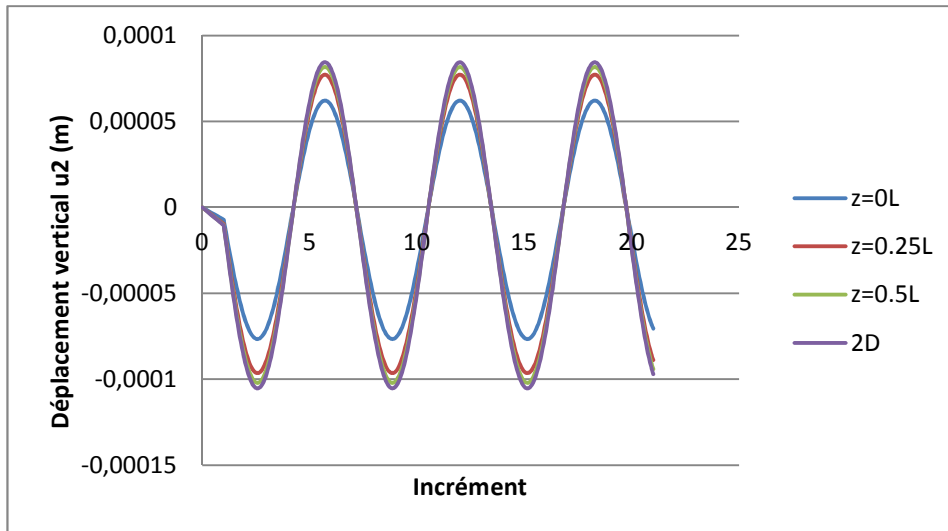


Figure 3.21: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=1900\text{MPa}$

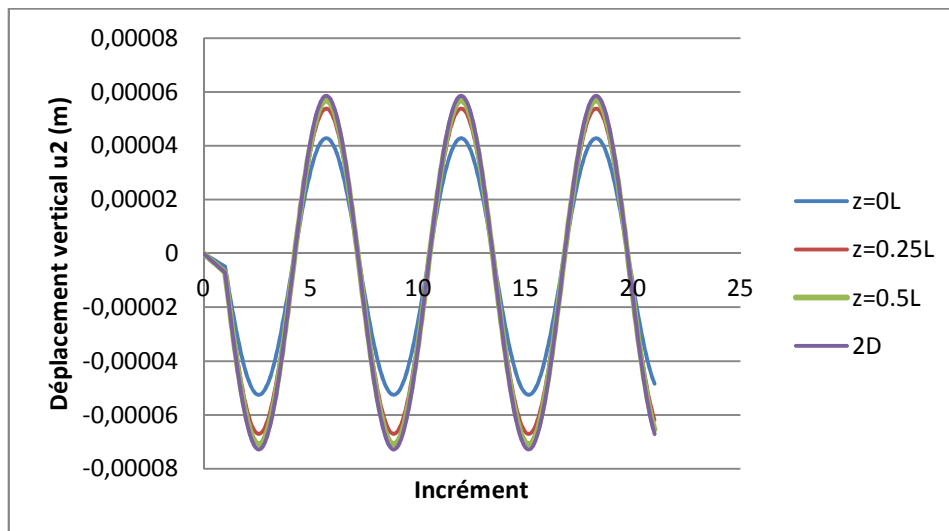


Figure 3.22: déplacement u_2 en fonction du chargement pour $E=2800\text{MPa}$

Ici, la comparaison entre les résultats de « 2D » et de « 3D » montrent que la variation de chargement n'influence pas sur les résultats de déplacement pour les deux cas de modélisation par rapport aux résultats retrouvés pour le cas de la charge constante. Car le bidimensionnel représente la 3D à ($z=0.5L$), ce qui confirme les résultats trouvés dans le cas d'application d'un chargement constant.

3.2.3 Etude des contraintes

Dans tout programme d'éléments finis, les contraintes sont déterminées élément par élément selon la relation contraintes-déformations-déplacements (σ , ϵ , u) après résolution du système algébrique.

Pour notre cas on a choisi le critère de Von Mises qui s'écrit sous forme :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3.1)$$

Nous nous intéressons dans cette présente étude au champ des contraintes, en quelques endroits de la fondation comme indiqué sur la figure 3.5, pour les différentes valeurs de module d'élasticité (E).

On reporte les valeurs des contraintes de Von Mises les plus défavorables pour les deux cas de simulation dans le tableau ci-après (les valeurs sont données en KPa).

Tableau 3.5 : contraintes dans la fondation aux différents nœuds de la largeur suivant les différentes positions de la longueur de 3D et 2D pour les quatre variantes de (E)

position	E=100 MPa			E=1000 MPa		
	n _{x1}	n _{x2}	n _{x3}	n _{x1}	n _{x2}	n _{x3}
2D	241,09	378,95	590,36	207,02	318,52	504,43
z=0L	593,80	617,23	887,36	397,63	453,75	659,05
z=0.25L	419,67	411,92	545,78	243,20	306,41	467,57
z=0.5L	510,53	471,29	578,47	258,73	315,84	480,57
position	E=1900 MPa			E=2800 MPa		
	n _{x1}	n _{x2}	n _{x3}	n _{x1}	n _{x2}	n _{x3}
2D	186,81	280,42	446,75	173,32	254,80	405,51
z=0L	332,10	393,78	571,00	294,44	358,87	516,82
z=0.25L	205,33	271,02	420,01	185,23	247,43	384,13
z=0.5L	214,12	278,85	432,77	192,03	254,29	395,60

D'après les résultats obtenus, par le logiciel ABAQUS, on remarque la diminution des valeurs de contraintes avec l'augmentation de la valeur du module de Young (E), et les valeurs obtenues par la modélisation tridimensionnelle sont plus importantes que celles données par la modélisation bidimensionnelle.

En outre, à chaque fois qu'on s'éloigne de l'extrémité vers le milieu (de n_{x1} vers n_{x3}) suivant la largeur on voit l'augmentation des contraintes due à la réaction de la semelle à l'effort appliqué à ce niveau. On remarque aussi, la convergence des valeurs des contraintes obtenues pour le cas bidimensionnel vers celles obtenues dans le cas tridimensionnel au niveau de 0.5L.

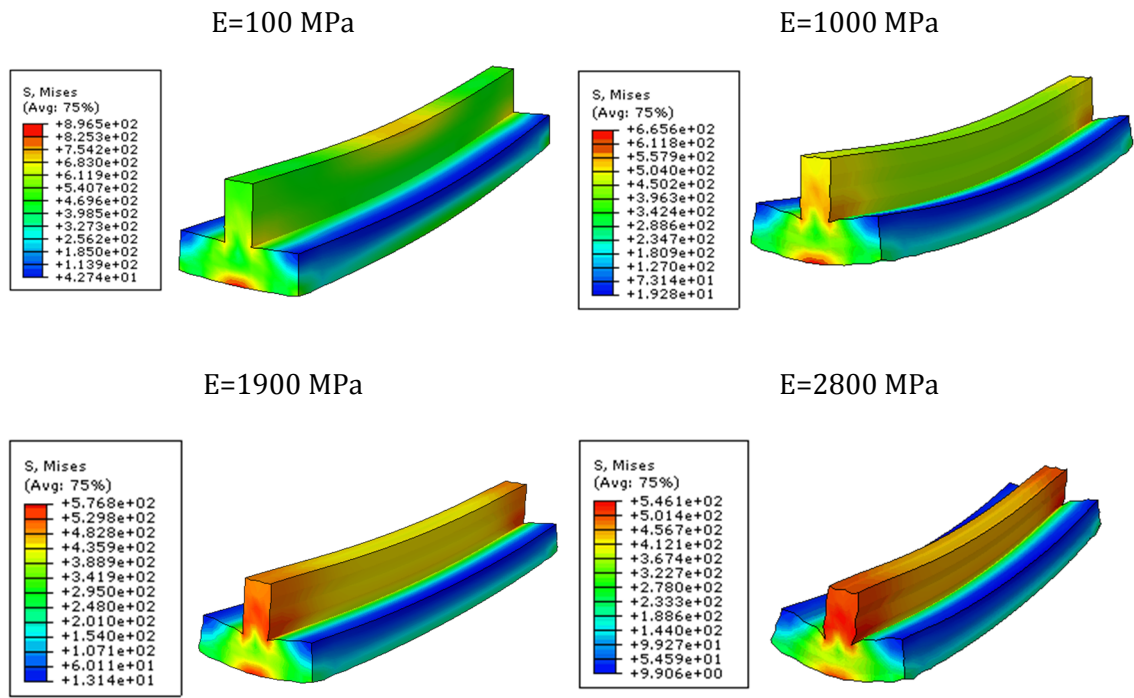
Le tableau ci-après reporte les valeurs des contraintes aux différents nœuds suivant la longueur pour les deux cas de simulation :

Tableau 3.6 : contraintes dans la fondation aux différents nœuds de la longueur suivant les différentes positions de la largeur pour les quatre variantes de (E)

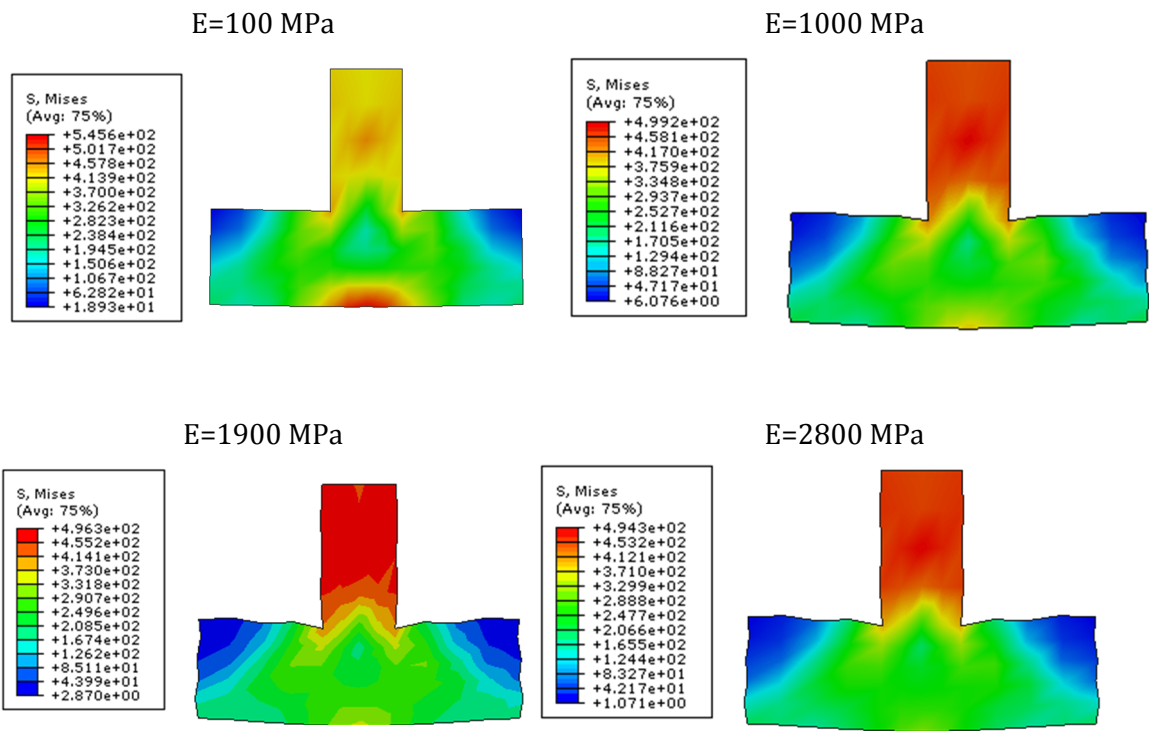
position	E=100 MPa			E=1000 MPa		
	n _{z1}	n _{z2}	n _{z3}	n _{z1}	n _{z2}	n _{z3}
x=0b	593,80	419,67	510,53	397,63	243,20	258,73
x=0.25b	617,23	411,92	471,29	453,75	306,41	315,84
x=0.5b	887,36	445,78	578,47	659,05	467,57	480,57
position	E=1900 MPa			E=2800 MPa		
	n _{z1}	n _{z2}	n _{z3}	n _{z1}	n _{z2}	n _{z3}
x=0b	332,10	205,33	214,12	294,44	185,23	192,03
x=0.25b	393,78	271,02	278,85	358,87	247,43	254,29
x=0.5b	571,00	420,01	432,77	516,82	384,13	395,60

En voit bien d'après ce tableau que la concentration des contraintes est obtenue au niveau des extrémités n_{z1} selon la longueur, et la diminution des valeurs des contraintes avec l'augmentation de la rigidité de sol.

Les figures ci-après montrent la distribution des contraintes dans la semelle filante pour les différentes valeurs du module de Young, et les deux cas de modélisation, on remarque que les contraintes sont concentrées aux extrémités de la semelle et plus précisément au nœud de contrôle n_{x3}. (Les valeurs des contraintes sont données en KPa)

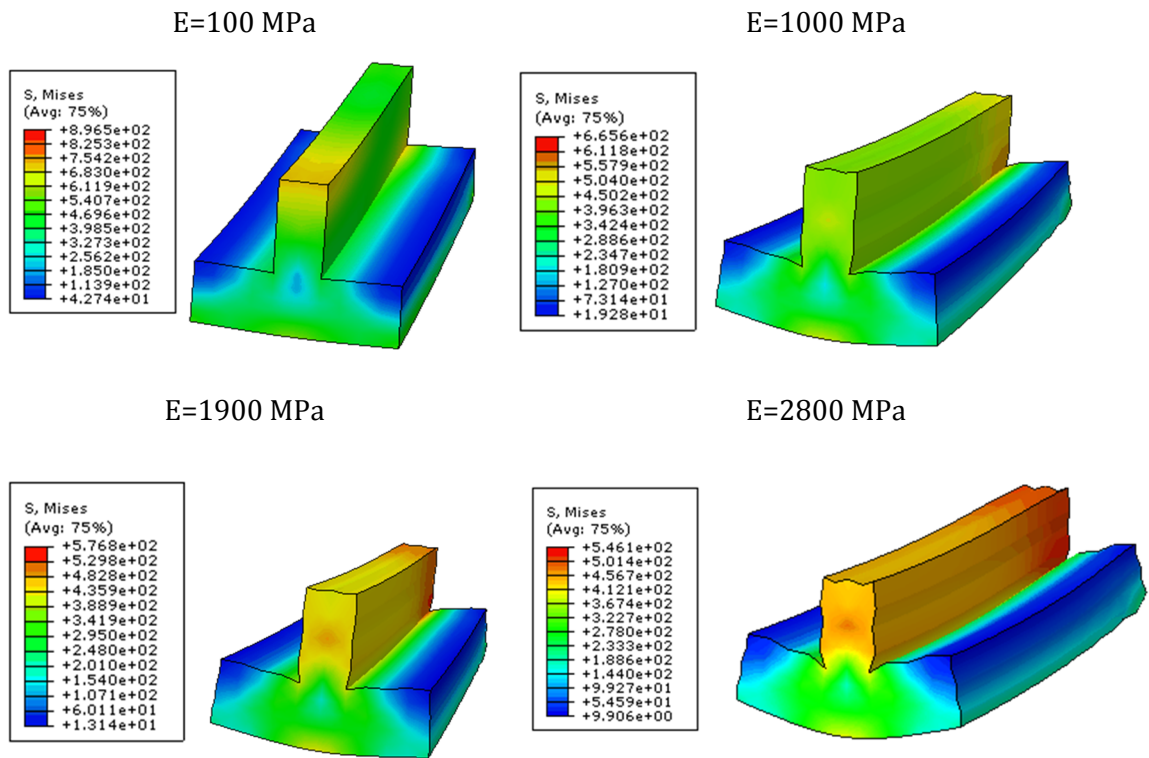


(a) Modèle 3D

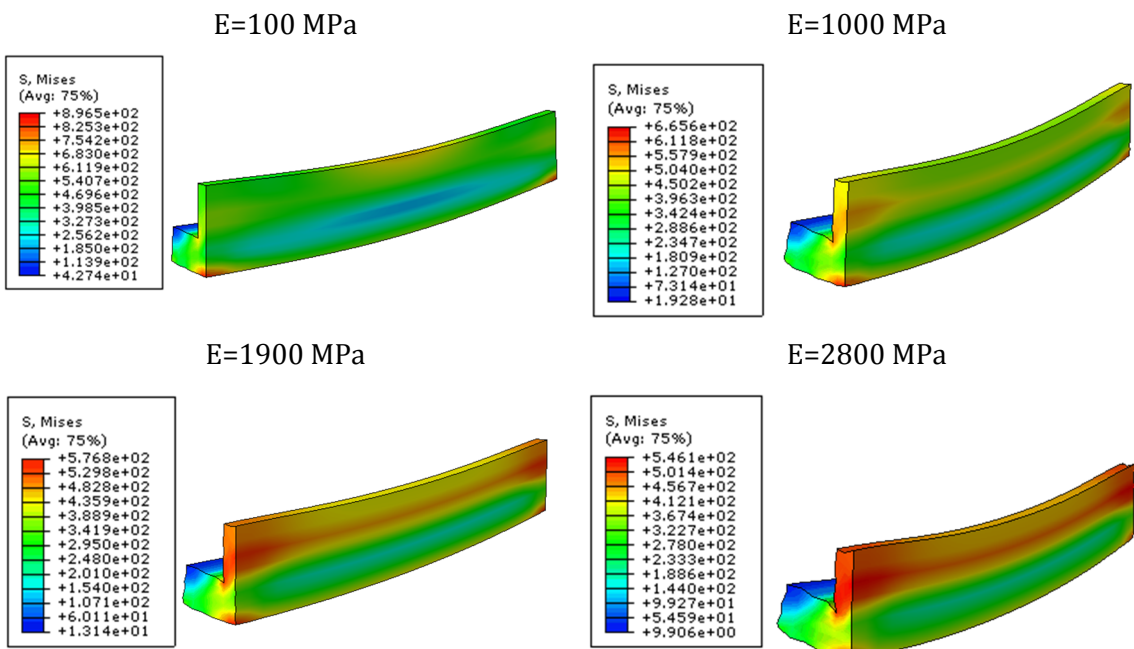


(a) Modèle 2D

Figure 3.23: Distributions des contraintes pour les différentes valeurs de (E) dans les deux cas de modélisation



Coupes suivant z (0.5L)



Coupes suivant x (0.5b)

Figure 3.24: Distributions des contraintes pour les différentes valeurs de (E) et aux différentes positions de la 3D

Pour mieux illustrées le champ de concentration des contraintes au nœud (nx3), on consigne les valeurs maximal des contraintes sous forme d'un histogramme

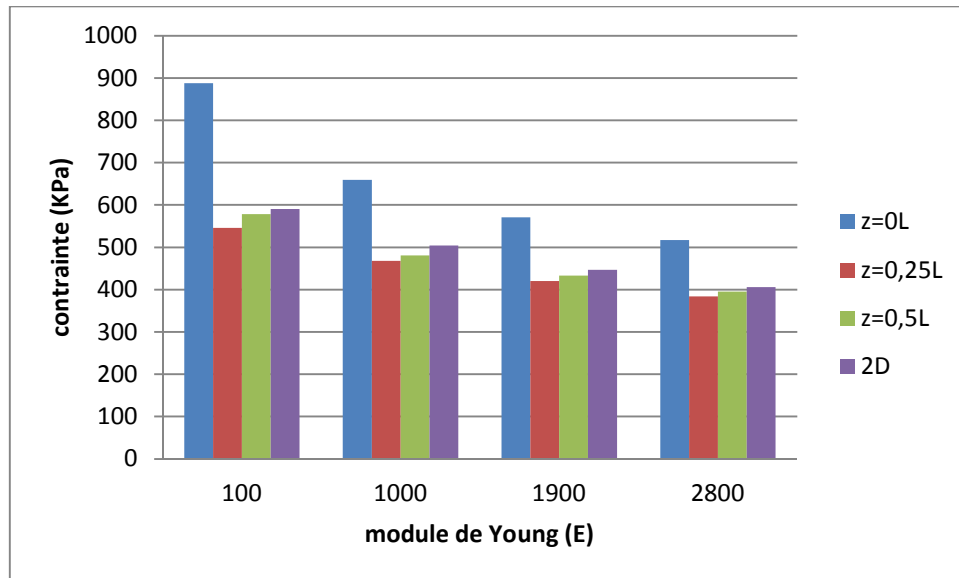


Figure 3.25: l'évolution des contraintes pour les différentes valeurs de E

D'après cette figure on remarque :

- La concentration des contraintes sont à l'extrémité de la fondation ($z=0L$) quel que soit la valeur du module de Young
- Les valeurs maximales des contraintes données par la modélisation bidimensionnelle et tridimensionnelle se trouve dans le sol de faible rigidité ($E=100\text{MPa}$)
- La Convergence des résultats obtenus par la modélisation bidimensionnelle vers ceux obtenus par la modélisation tridimensionnelle à ($z=0.5L$)
- Les écarts des valeurs de contraintes entre le bidimensionnel et le tridimensionnel à $z=0L$ diminuent avec l'augmentation de la rigidité de sol.
- Les écarts des valeurs de contraintes entre le bidimensionnel et le tridimensionnel dans le sol souple sont remarquables.

3.3 Application pour le cas d'un tunnel

Dans cette partie, on s'intéressera à l'étude des concentrations de contraintes et des déplacements dans une voûte d'un tunnel encastré à sa base.

3.3.1 Système étudié

Pour la modélisation du tunnel on adoptera des éléments linéaires triangulaires avec deux degrés de liberté pour le cas bidimensionnel, et des éléments tétraédriques avec trois degrés de liberté dans le cas de modélisation tridimensionnelle

La géométrie du tunnel, le maillage correspondant sont définis dans les figures (3.26 à 3.29), les caractéristiques géométriques et mécaniques sont définis dans le tableau (3.7).

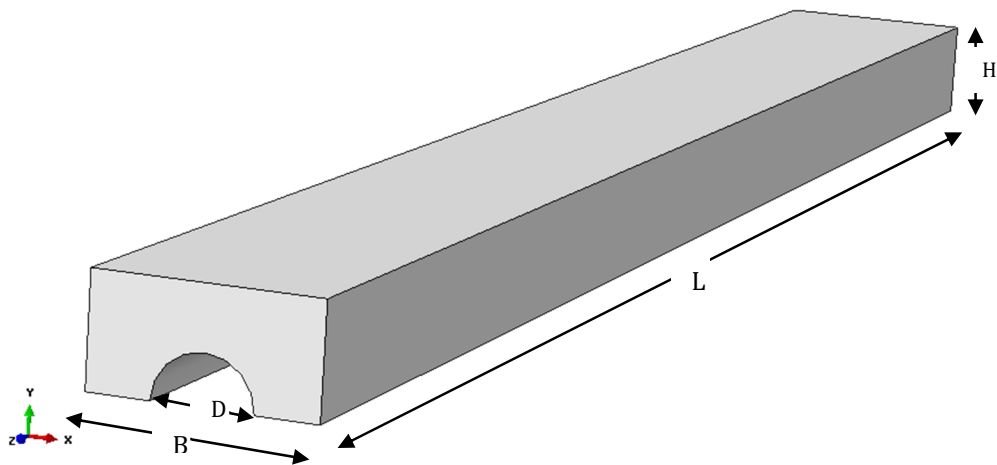


Figure 3.26: géométrie du modèle (3D)

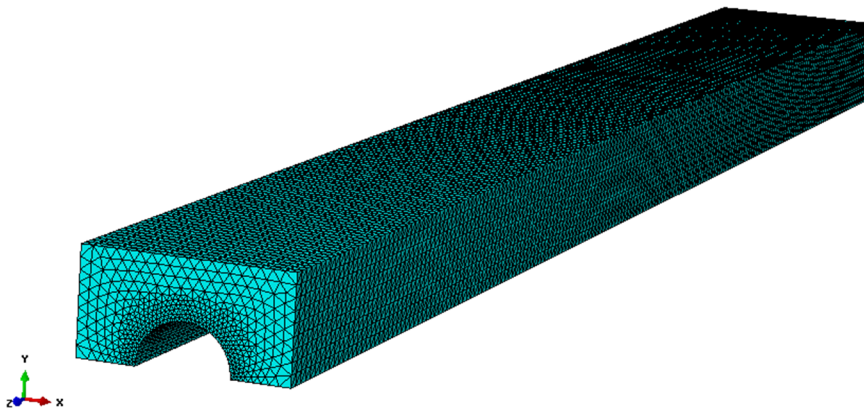


Figure 3.27: maillage correspond au modèle (3D)

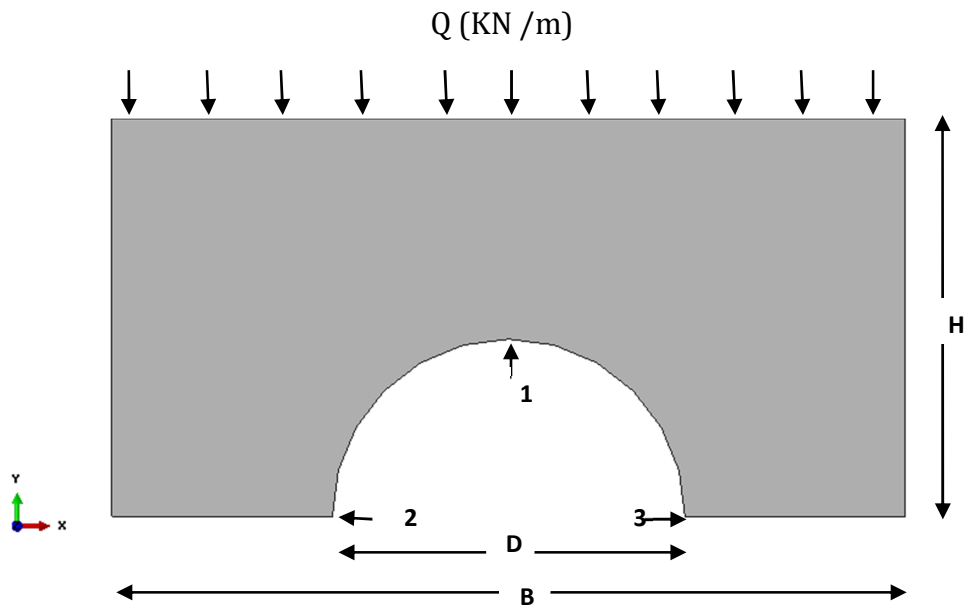


Figure 3.28 : géométrie du modèle (2D)

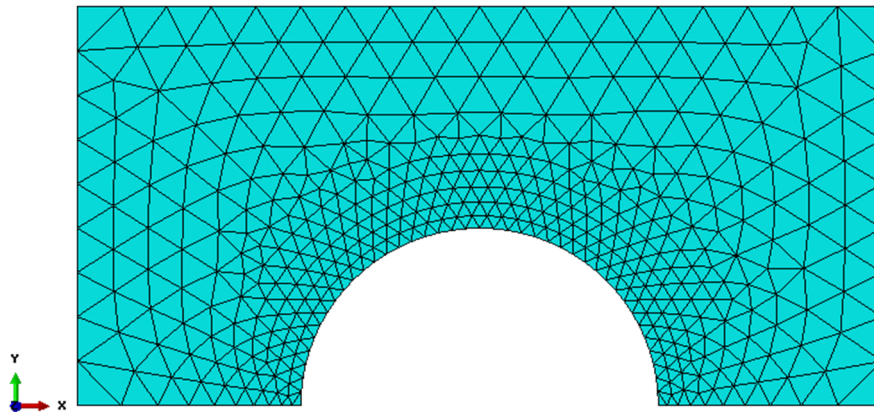


Figure 3.29: maillage correspond au modèle (2D)

Tableau 3.7: Caractéristiques mécanique et géométrique du système

D (m)	H (m)	L (m)	B (m)	E (MPa)	ν	Q (KN/m ²)
8	9	180	18	2800	0.4	500

Avec :

D : le diamètre de la voûte

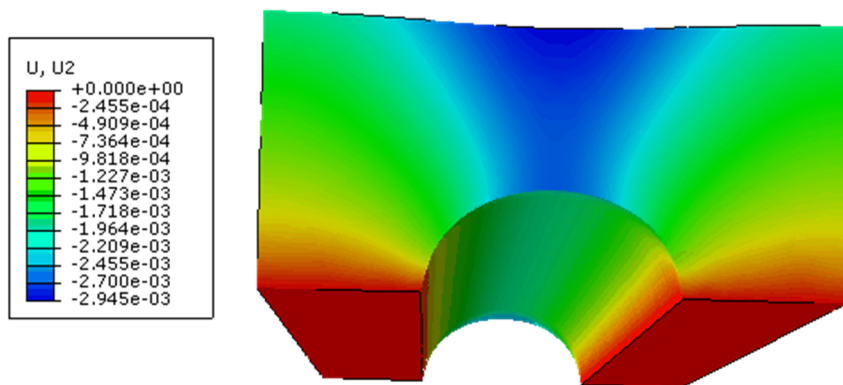
H : la hauteur totale du tunnel

L : la longueur du tunnel

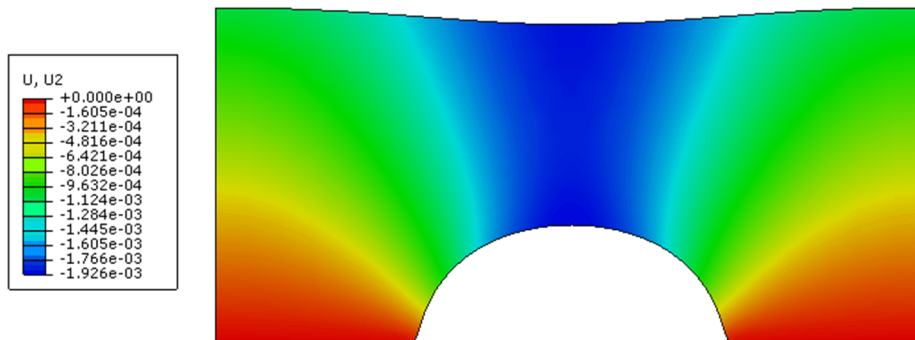
B : la largeur du tunnel

3.3.2 Etude du déplacement

On s'intéresse à la voûte d'un tunnel, et on suit l'évolution des déplacements pour les deux cas de modélisation (2D) et (3D), la déformé du tunnel et Les déplacements obtenus par le logiciel ABAQUS se résume aux graphiques suivants.



Modèle (3D)



Modèle (2D)

Figure 3.30: déformé de la voûte du tunnel en 3D et 2D

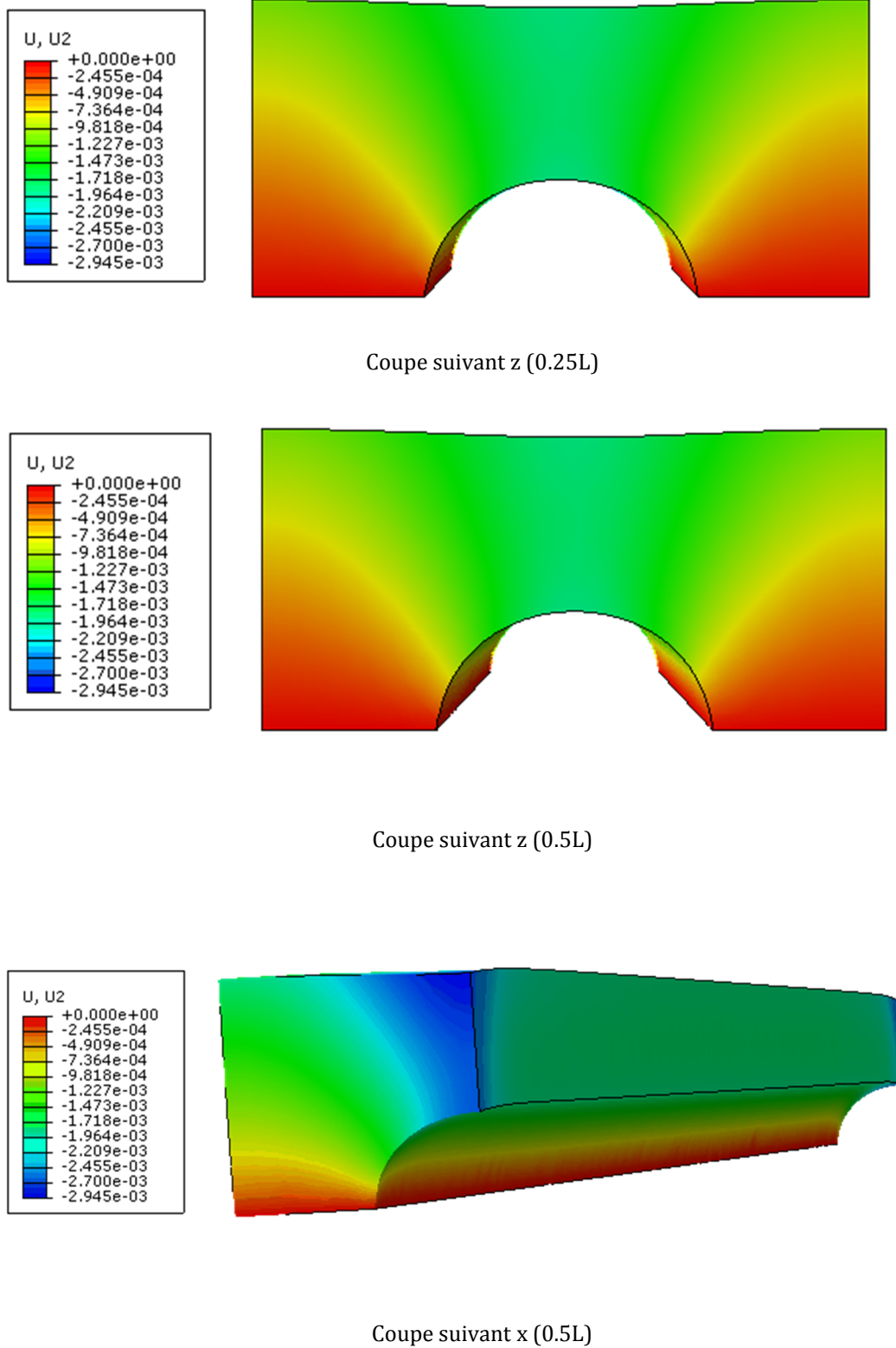


Figure 3.31: différentes coupes de la déformé de la voûte du tunnel en 3D

Une première analyse de la déformé de la figure (3.31) met en évidence un déplacement supérieur pour le cas tridimensionnel (2.945 mm) par rapport à celui obtenu par la modélisation bidimensionnelle (1.926 mm).

Afin de mieux apprécier l'évolution des déplacements pour les différentes positions de la voûte (0L, 0.25L, 0.5L) en 3D et en 2D, on reporte les résultats sur la figure (Fig 3.32) avec la comparaison entre les deux cas de modélisation.

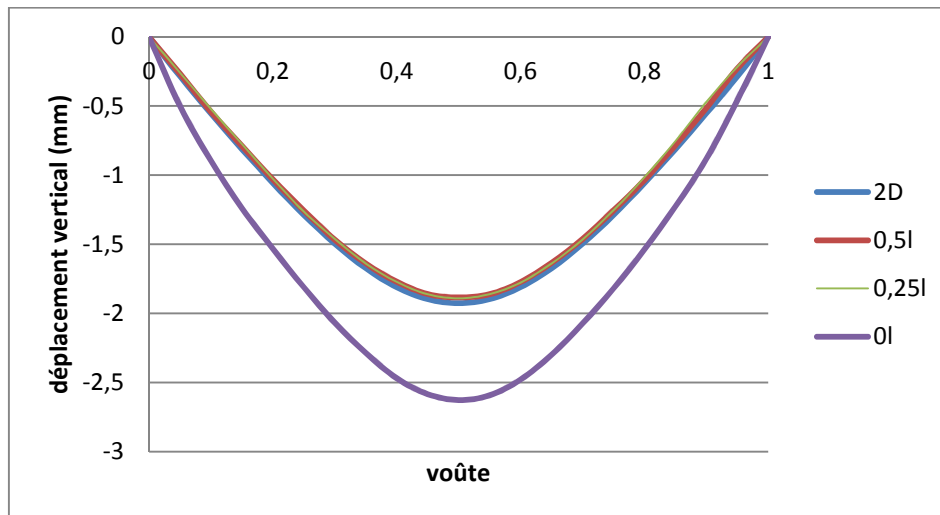


Figure 3.32: déplacement vertical de la voûte du tunnel pour les deux cas (2D) et (3D)

On voit bien d'après la figure (3.32) que le déplacement vertical (u_2) obtenu dans la partie supérieure de la voûte au point (1) est très important à cause de la concentration des charges, et la partie inférieure de la voûte aux points (2 et 3) nous donne des déplacements nuls à cause de l'encastrement.

On remarque aussi que les déplacements sont amplifiés au niveau des fronts de taille ($z=0$ L) lorsqu'à ce niveau il n'y a pas de blocage des déplacements suivant z (les extrémités sont libres). A chaque fois qu'on s'éloigne de cette position vers le milieu (0.25L, 0.5L) les déplacements diminuent progressivement.

Afin de comparer les résultats de déplacement obtenus par la modélisation bidimensionnelle par rapport à ceux des déplacements obtenus avec la modélisation tridimensionnelle aux différentes positions, on présente sur la figure (3.33) le déplacement vertical (u_2) au niveau du nœud (n_1).

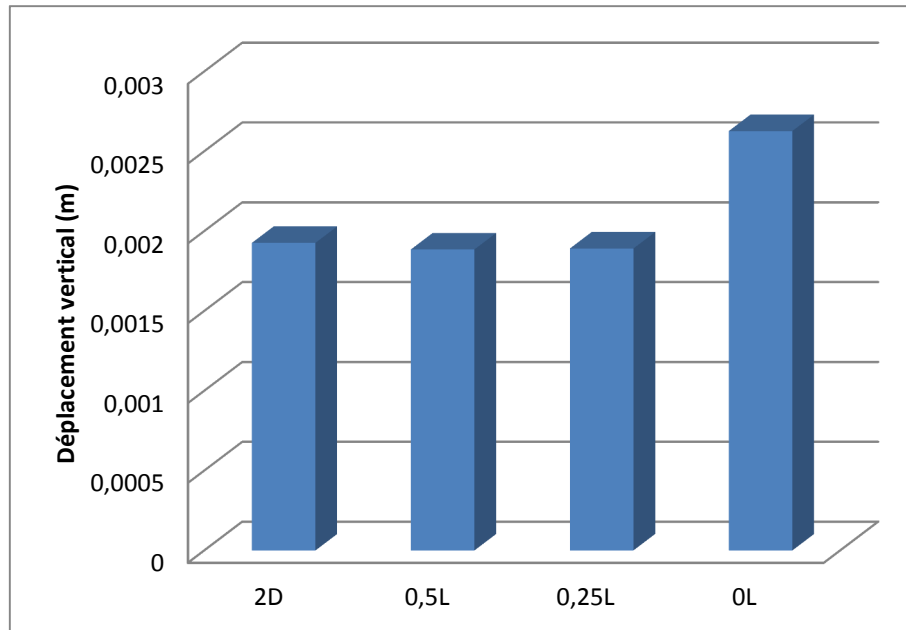


Figure 3.33: déplacement vertical à la tête de la voûte pour les différentes positions de la 3D et celle de 2D

On constate, d'après la figure, que la valeur du déplacement donnée par le modèle 2D est très proche de celle donnée par le modèle 3D au niveau de (0.5L).

La figure ci-dessus montre bien le déplacement de la voûte au nœud (1) suivant sa longueur pour les deux cas de modélisations.

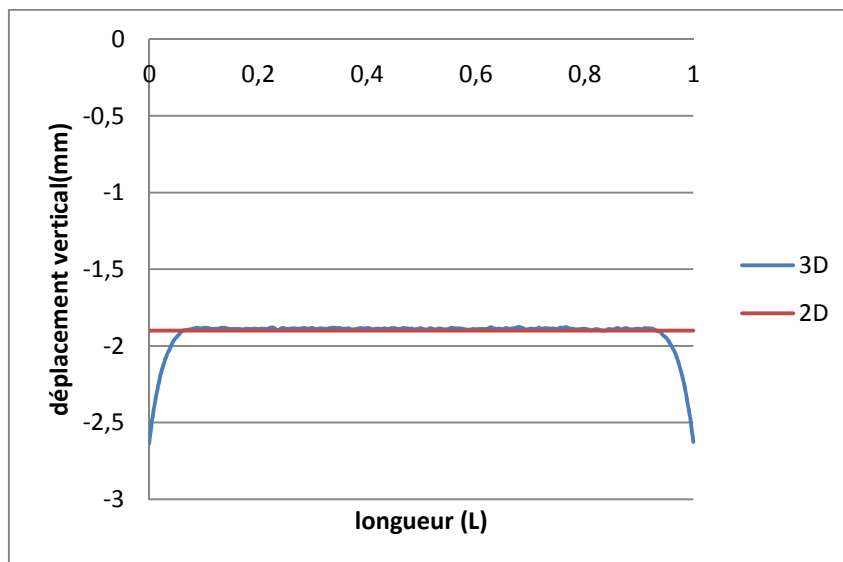
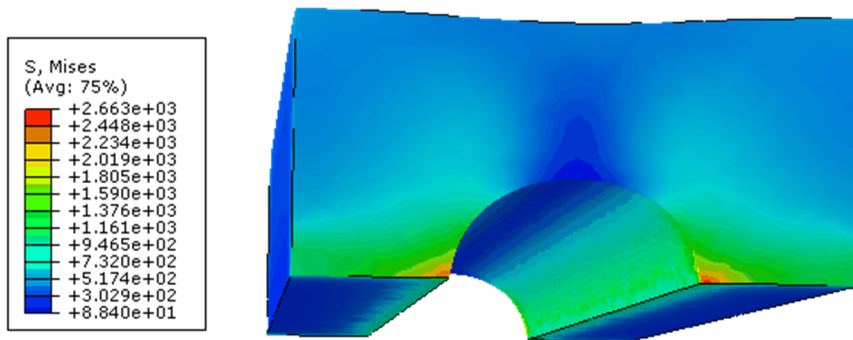


Figure 3.34: déplacement vertical au point (1) suivant la longueur pour les deux cas (2D et (3D)

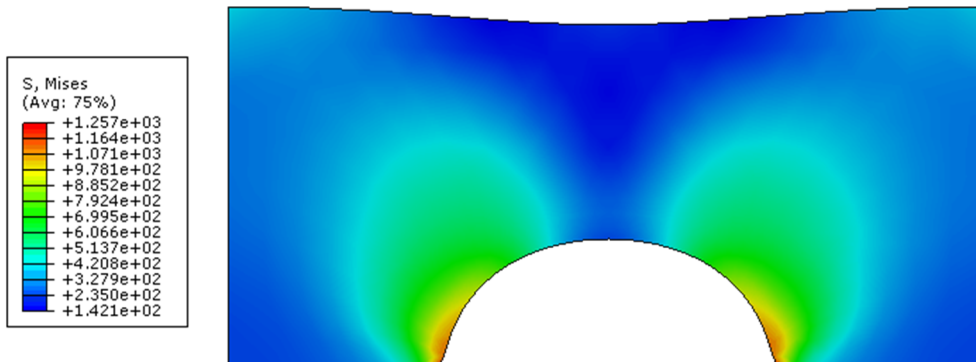
A partir des informations fournies par les deux modèles qui sont représentés dans la figure (3.34) on constate que les déplacements au point (1) sont constants sur toute la longueur du tunnel pour le cas bidimensionnel, cette valeur est sensiblement la même que pour le cas 3D au niveau de (0.5l).

3.3.3 Etude des contraintes

Nous nous intéressons ensuite à l'évolution des contraintes pour les deux cas de simulation, la concentration de la contrainte est localisé à la partie inférieure de la voûte au niveau de l'encastrement, les figures ci-après montrent bien la répartition des contraintes. (Les valeurs de contrainte sont données en KPa)

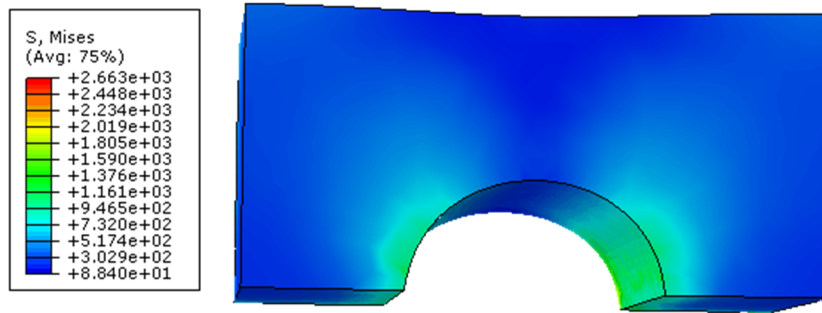


Modèle (3D)

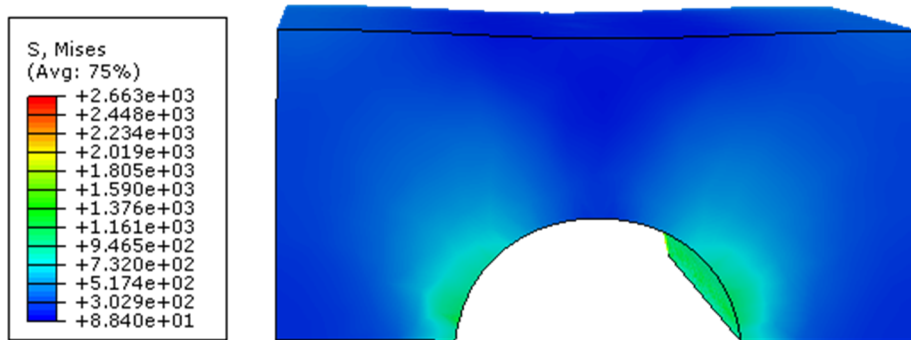


Modèle (2D)

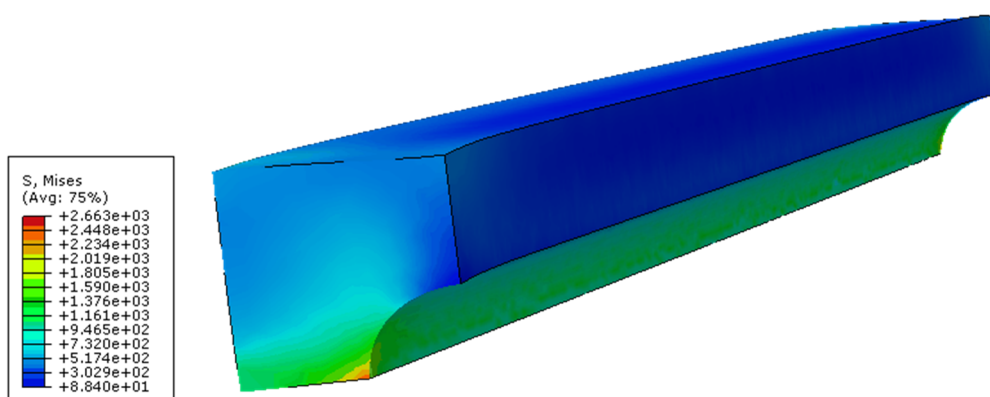
Figure 3.35: distribution des contraintes dans la voûte du tunnel en 3D et 2D



Coupe suivant z (0.25L)



Coupe suivant z (0.5L)



Coupe suivant x (0.5b)

Figure 3.36: distribution des contraintes dans la voûte aux différentes positions de la 3D

Une fois de plus le champ de concentration des contraintes maximales sont donné par la modélisation tridimensionnelle. Pour mieux apprissiez la concentration des contraintes, on consigne les valeurs des contraintes aux points (2) sous forme d'un histogramme.

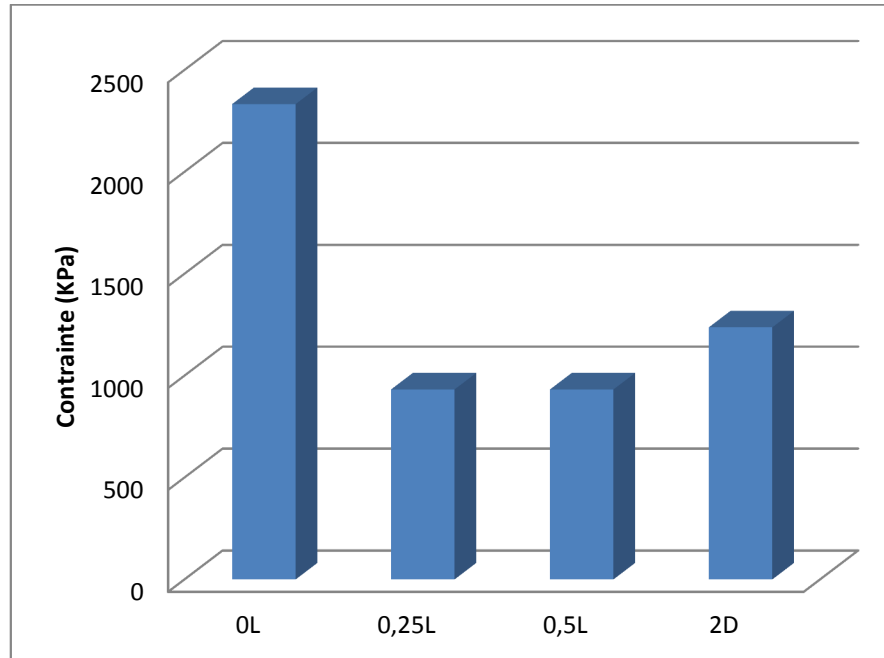


Figure 3.37: distribution des contraintes dans la voûte du tunnel pour les différentes positions de la 3D et 2D

On voit que les résultats des contraintes obtenus par la modélisation tridimensionnelle à ($z=0.5L$) sont proches de ceux obtenus par la modélisation bidimensionnelle, et au niveau de $z=0L$ les valeurs des contraintes sont plus grandes par rapport à celles obtenues pour $z=0,25L$ et $z=0,5L$ aussi que le modèle 2D.

3.4 Conclusion

La comparaison des résultats obtenus pour les différentes valeurs de E , permet de constater l'effet du module de Young sur le tassement de la fondation, les résultats des déplacements dans le sol rigide sont nettement réduits ce qui implique une diminution de la flèche.

La comparaison entre les deux cas de simulation 2D et 3D permet de constater que les résultats obtenus par la modélisation en déformation plane tendent toujours vers le milieu de la 3D.

L'étude tridimensionnelle de la fondation a montré l'effet de la longueur sur les valeurs de déplacement, et le comportement de la fondation pour le cas tridimensionnel par apport au modèle réduit (2D).

CHAPITRE 4

APPLICATION AU CAS DYNAMIQUE

4.1 Introduction

Ce présent chapitre est consacré à la présentation du comportement dynamique d'un barrage poids pour les deux cas de simulation (2D et 3D). En premier lieu on s'intéressera à la détermination des modes propres et les fréquences du barrage dans le cas des vibrations libres, puis en passe à l'étude de la réponse sismique du barrage en terme de déplacement, contrainte et déformation.

Dans cette présente étude, on va comparer les résultats obtenus par la modélisation tridimensionnelle à ceux obtenus par la modélisation bidimensionnelle.

4.2 Présentation de système considéré

Dans notre étude, on va s'intéresser au cas du barrage de Pine Flat au Kings River en Californie USA. Le comportement mécanique du barrage, est supposé linéaire, élastique et isotrope. Les caractéristiques mécaniques et physiques requises pour l'étude sont : la masse volumique (ρ_b), le coefficient de poisson (ν_b) et le module de Young (E_b).

La monolithe du barrage, de hauteur H_B et de largeur A_C à la crête et A_B à la base, est discrétisé en N éléments quadrilatéraux isoparamétriques à deux degrés de liberté par nœud en bidimensionnel. Pour le cas tridimensionnel le barrage est discrétisé par des éléments hexaédriques avec trois degrés de liberté par nœud.

La géométrie du barrage est montrée sur la figure (4.1) en 3D et le maillage correspondant sur la figure (4.2). La figure 4.3 montre la géométrie de barrage en 2D et le maillage correspondant est montré sur la figure (4.4). Les dimensions du barrage sont données dans le tableau 4.1 avec les propriétés mécaniques constituant la structure du barrage.

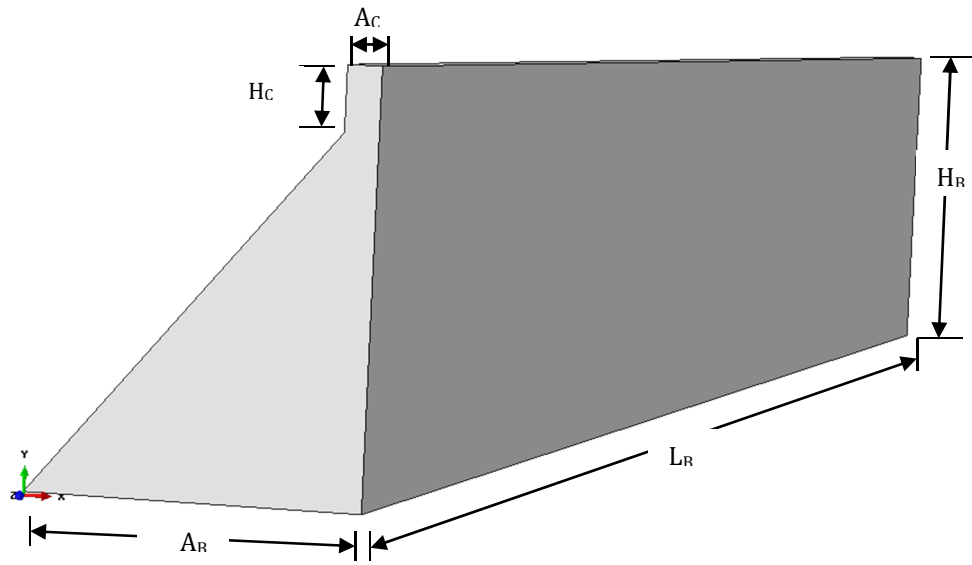


Figure 4.1: Géométrie du barrage en 3D

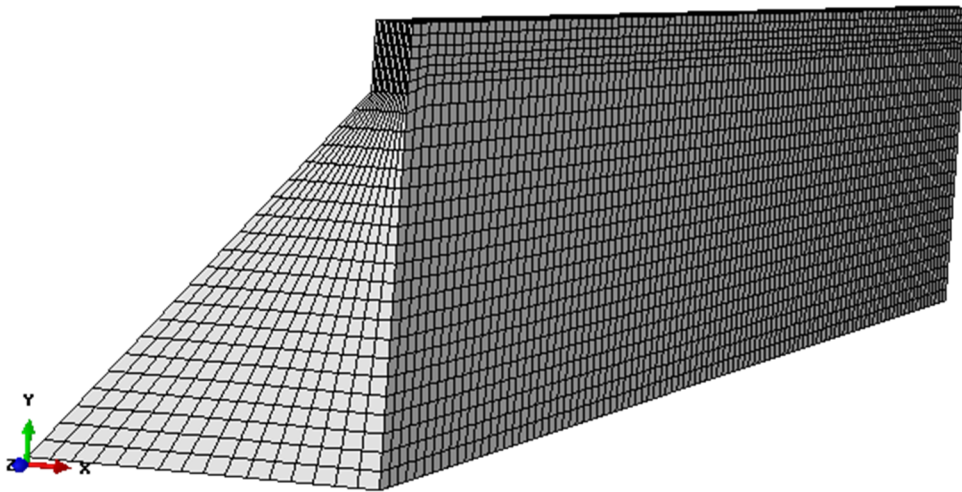


Figure 4.2: le maillage correspondant au système 3D

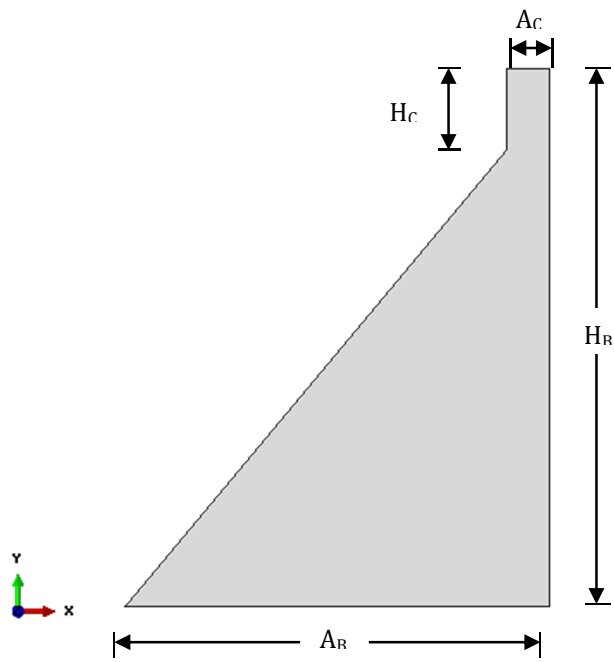


Figure 4.3: Géométrie du barrage en 2D

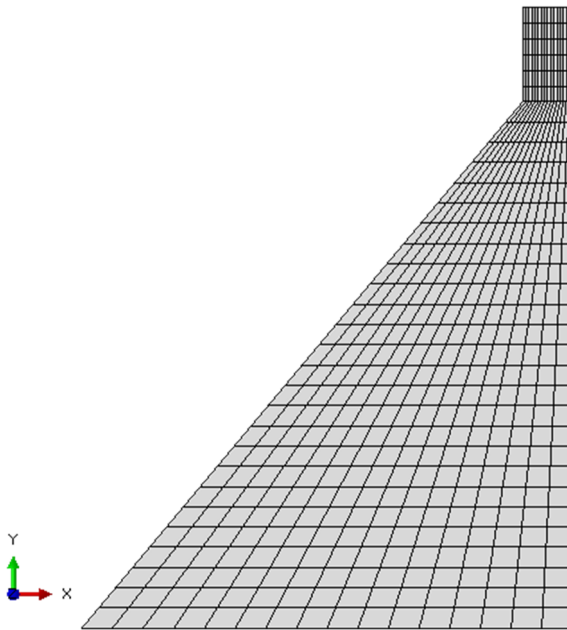


Figure 4.4: le maillage correspondant

Tableau 4.1 : caractéristiques mécaniques et géométriques du barrage

H_B (m)	H_C (m)	A_B (m)	A_C (m)	L_B (m)	E (MPa)	ν	ρ (t/m ³)
122	18.5	96	9.75	1000	34470	0.2	2.483

4.3 Etude des vibrations libres

A fin de prévoir et de comprendre le comportement dynamique d'une structure donnée (cas du barrage), on doit connaître ses paramètres modaux : les fréquences et les modes propres.

La résolution du problème aux fréquences et modes propres d'un modèle d'éléments finis, correspond aux problèmes de valeurs et vecteurs propres d'un système matriciel.

Le tableau 4.2 montre les résultats de calcul des périodes de vibration en considérant le barrage vide (sans interaction fluide-structure), pour les deux cas 2D et 3D. Les résultats obtenus pour le cas 2D sont comparés à ce donnés par la référence [20].

Tableau 4.2 : période (en secondes) du barrage seul

mode	1	2	3	4	5
Référence [20]	0.2595	0.1293	0.0926	0.0737	0.0491
Abaqus 2D	0.2595	0.1315	0.0919	0.0747	0.0499
Abaqus 3D	0.2578	0.2533	0.2460	0.2362	0.2245

On note dans ce tableau, que les périodes propres obtenues par le logiciel (Abaqus) sont proches de celles obtenues par la référence [20].

D'autre part, on peut remarquer que les périodes obtenues par la modélisation tridimensionnelle sont plus grandes que celles obtenues par la modélisation bidimensionnelle à partir du deuxième mode.

Par ailleurs, l'écart entre les périodes propres obtenues pour les différents modes de la 3D est très petit.

En outre, pour une comparaison de plus, les trois premiers modes propres de vibration du barrage sont représentés dans les figures 4.5 et 4.6, la figure 4.5 montre les modes obtenus pour le cas bidimensionnel, et la figure 4.6 ceux obtenus pour le cas tridimensionnel.

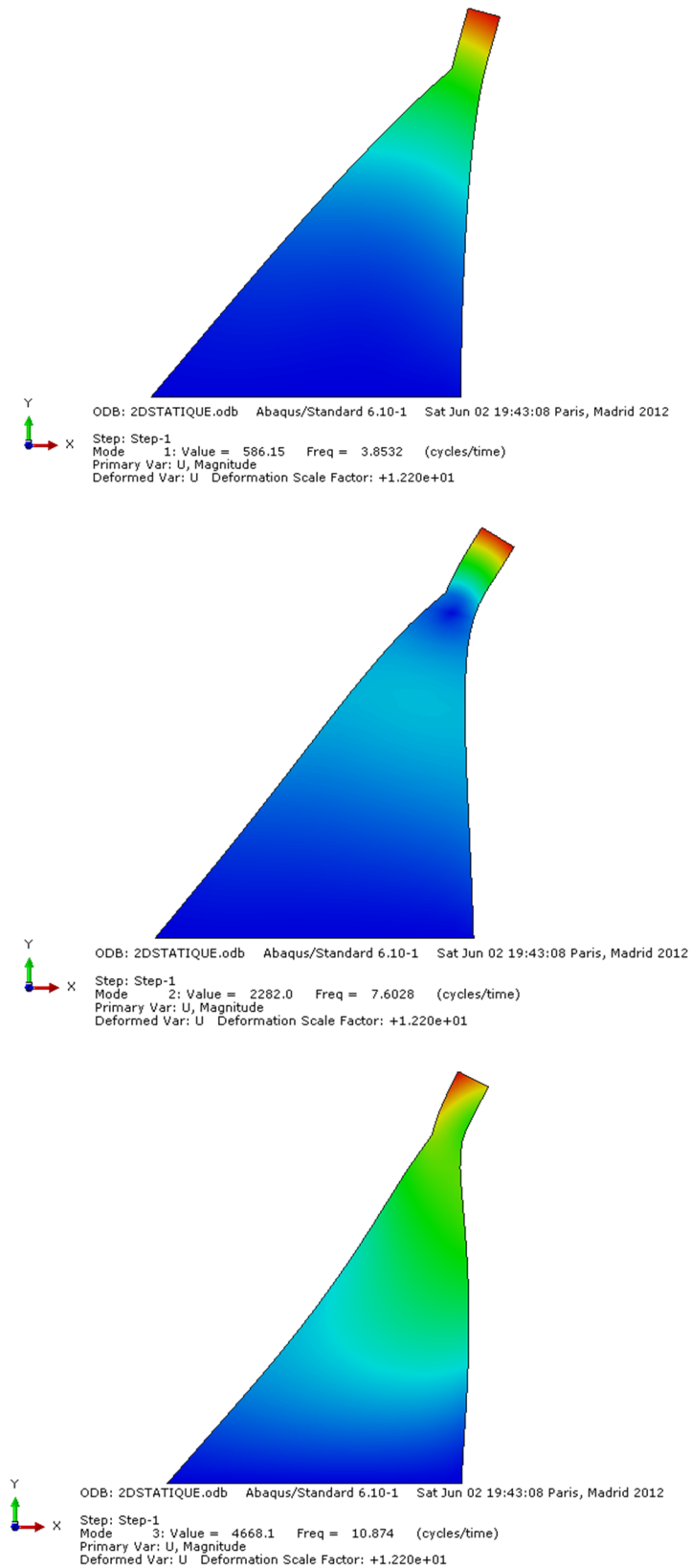
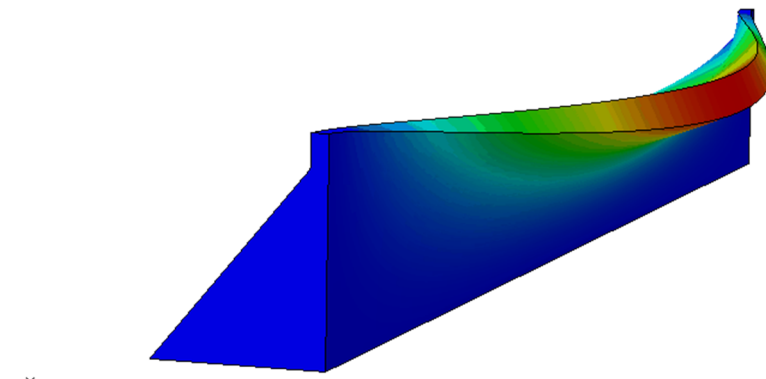
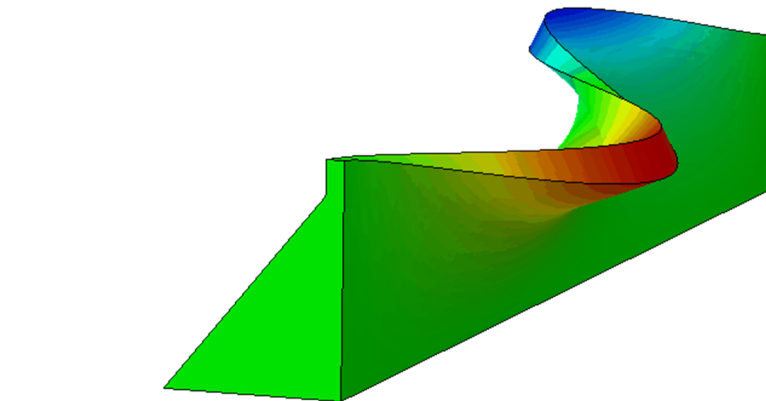


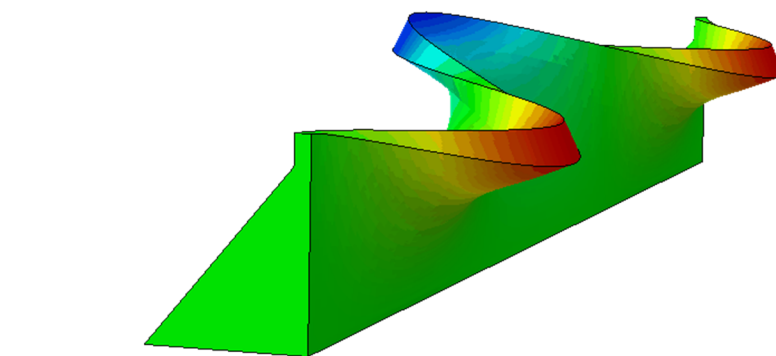
Figure 4.5: modes de déformation Abaqus (2D)



ODB: 3DS.odb Abaqus/Standard 6.10-1 Sat Jun 02 21:46:39 Paris, Madrid 2012
 Step: Step-1
 Mode 1: Value = 593.65 Freq = 3.8778 (cycles/time)
 Primary Var: U, U1
 Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.000e+02



ODB: 3DS.odb Abaqus/Standard 6.10-1 Sat Jun 02 21:46:39 Paris, Madrid 2012
 Step: Step-1
 Mode 2: Value = 614.91 Freq = 3.9466 (cycles/time)
 Primary Var: U, U1
 Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.000e+02



ODB: 3DS.odb Abaqus/Standard 6.10-1 Sat Jun 02 21:46:39 Paris, Madrid 2012
 Step: Step-1
 Mode 3: Value = 652.03 Freq = 4.0640 (cycles/time)
 Primary Var: U, U1
 Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +1.000e+02

Figure 4.6: modes de déformation Abaqus (3D)

4.4 Etude de la réponse sismique

La prévision du comportement dynamique des structures de grandes dimension, telles que les barrages, est équivalente à l'analyse sismique.

4.4.1 L'excitation dynamique considérée

L'excitation dynamique considérée dans cette étude, est l'enregistrement accélérométrique des composantes horizontales du séisme de l'Impérial Valley du 18 mai enregistré à la station d'EL-Centro. La figure 4.6, représente les dix premières secondes de cet accélérogramme, celles les plus critiques.

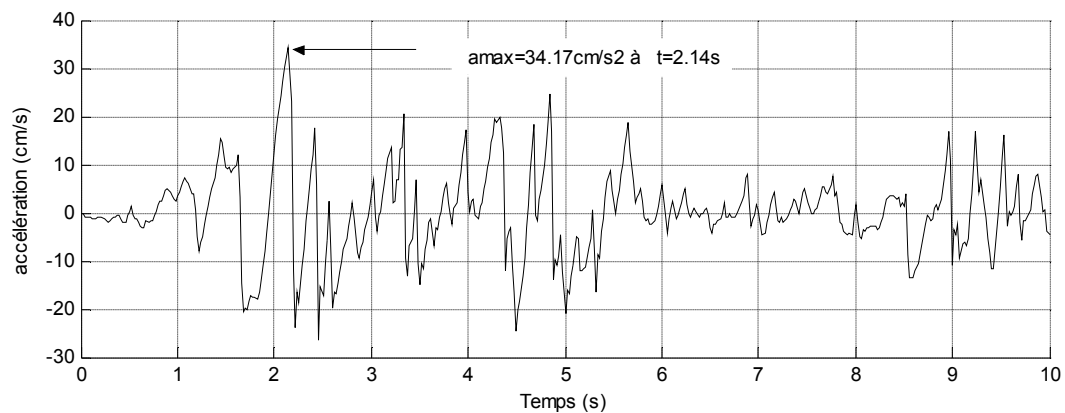


Figure 4.7: Accélération sismique du séisme de l'Impérial Valley d'El-Centro

4.5 Résultats et interprétation

4.5.1 Influence de l'accélérogramme sur les déplacements au niveau de la crête du barrage

L'histoire temporelle des déplacements, vitesses et accélérations de chaque degré de liberté de la structure du barrage est donné par la solution de l'équation du mouvement donné par l'expression (2.54). La réponse en déplacements obtenue par le logiciel ABAQUS à la crête du barrage est représentée sur les figures suivantes pour les deux cas de modélisation bi et tridimensionnelles.

Les solutions sont calculées en fixant le taux d'amortissement critique du béton à 5%.

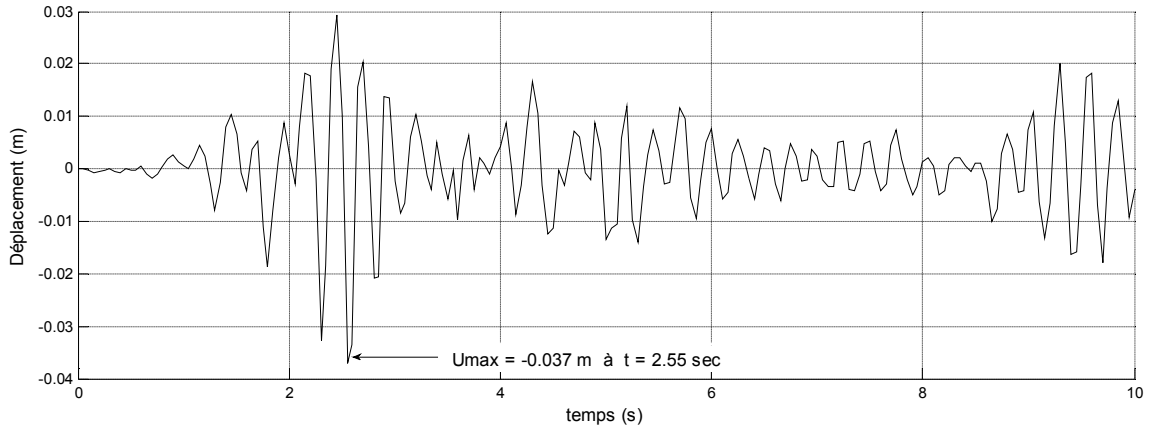


Figure 4.8: Déplacements relatifs horizontaux en crête du barrage de Pine Flat au niveau 0.25L

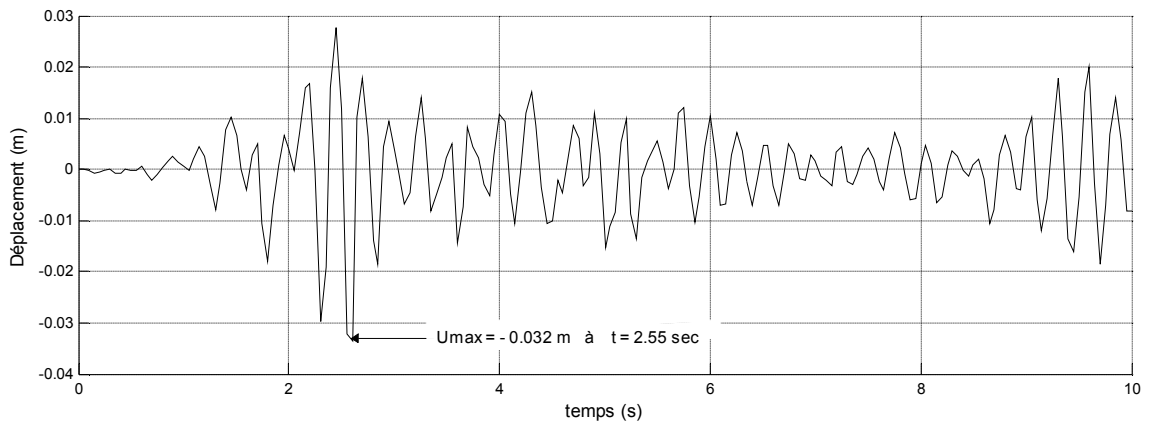


Figure 4.9: Déplacements relatifs horizontaux en crête du barrage de Pine Flat au niveau 0.5L

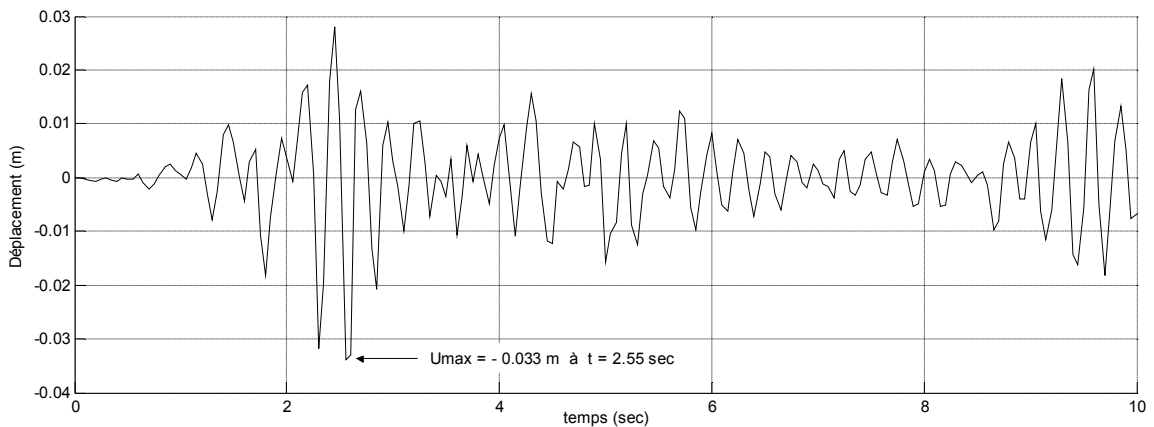


Figure 4.10: Déplacements relatifs horizontaux en crête du barrage de Pine Flat pour 2D

Tout en se basant sur ces figures, on peut conclure que, les courbes suivent la même allure et les pics des déplacements en valeurs absolue obtenus par la modélisation bidimensionnelle sont proches de celles obtenues avec la modélisation tridimensionnelle, et la valeur maximale des déplacements produite au même instant ($t=2.55$ sec).

On résume dans la figure 4.11, les valeurs maximales des déplacements horizontaux en crête du barrage pour les deux cas de simulations à l'instant $t = 2.55$ sec.

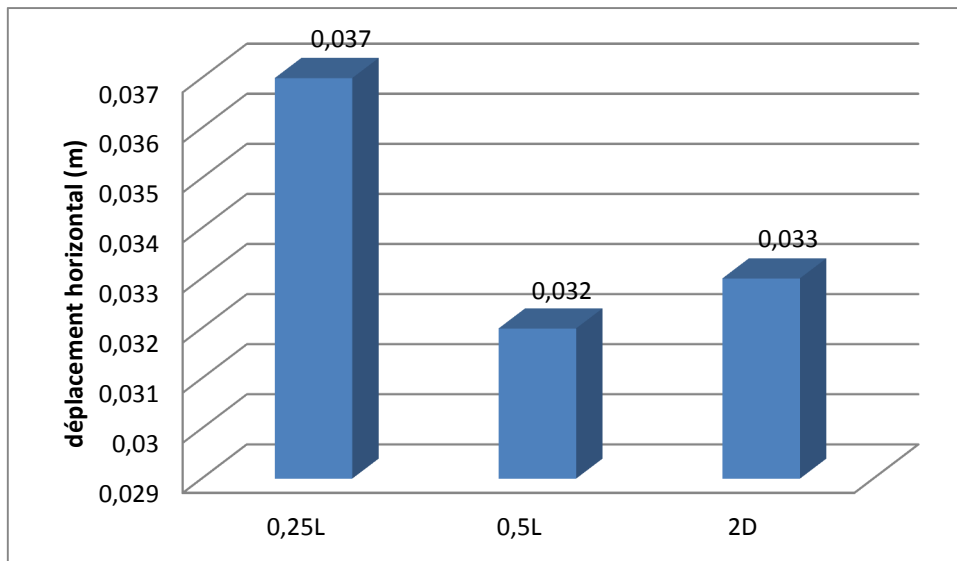


Figure 4.11: Déplacement horizontal en crête de barrage à l'instant $t=2.55$ s pour les différentes positions en 3D et 2D

On voit, d'après la figure 4.11, le rapprochement des résultats donnés par le modèle 2D à ceux de la 3D au niveau de 0.5L. Et que le déplacement du modèle 3D au niveau de 0.25L est plus grand que le déplacement à 0.5L ainsi que le modèle 2D.

La variation des déplacements en fonction de la distance horizontale (la longueur) à la crête du barrage pour les deux approches (2D et 3D), est bien montrée sur la figure suivante.

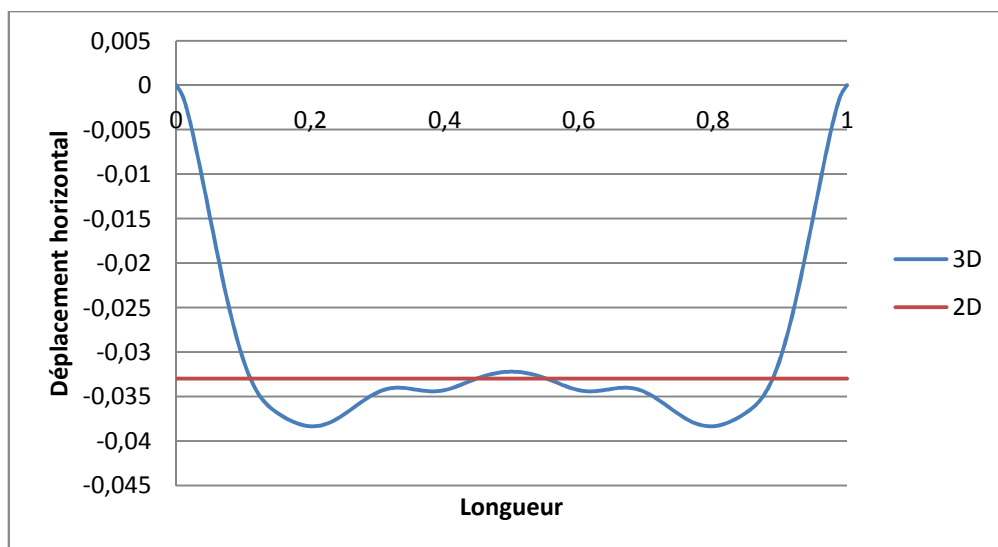


Figure 4.12: Déplacement horizontal suivant la longueur en crête de barrage à $t=2.55$ s pour les deux cas (2D et 3D)

La figure 4.12 montre que le comportement en terme de déplacement horizontal relatif à la crête du barrage donné par le modèle réduit 2D est uniforme sur toute sa longueur, ce qu'est le cas contraire pour le modèle 3D. En terme comparatif le 2D représente la 3D au niveau du milieu.

La variation des déplacements en fonction de la distance verticale (la hauteur du barrage) à $t=2.55\text{sec}$, sont illustrés dans la figure ci-dessous.

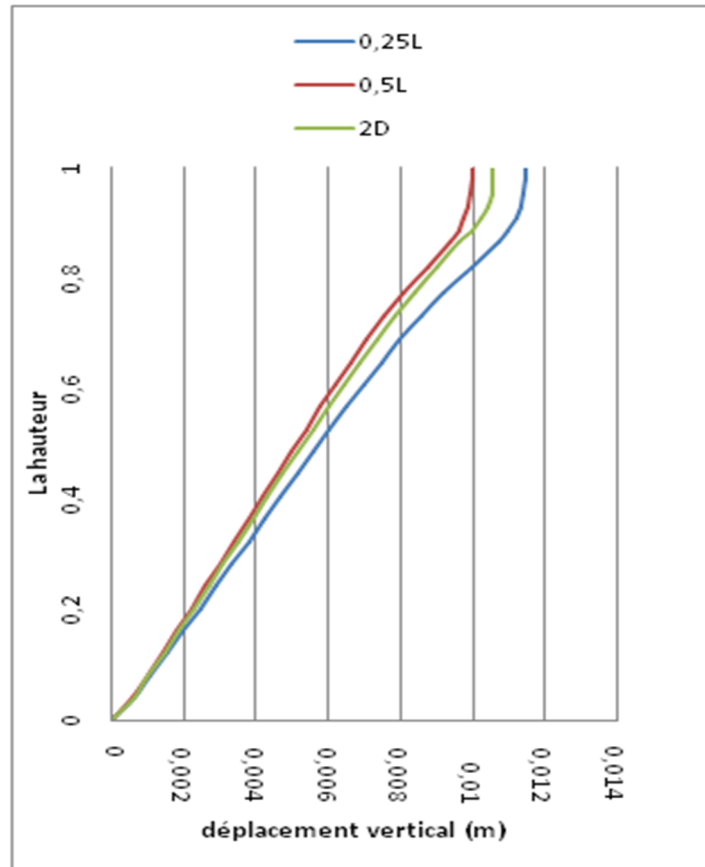


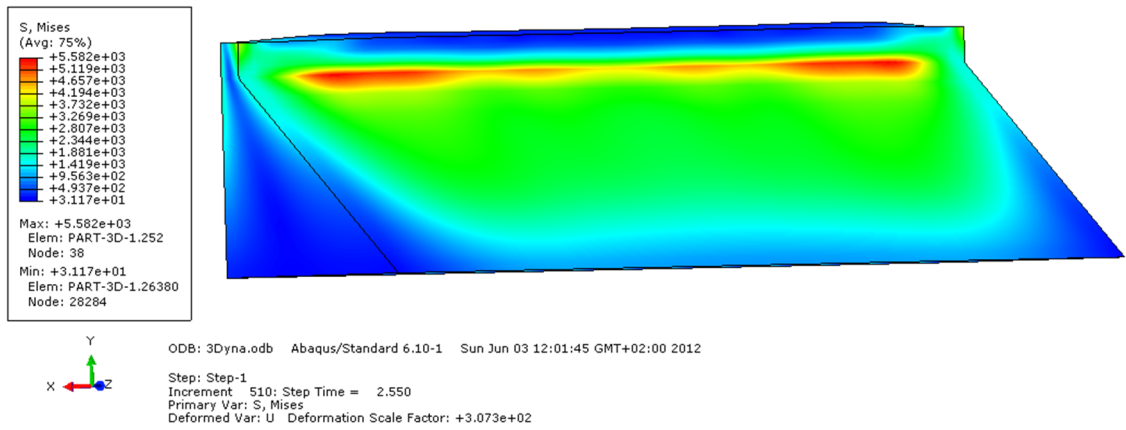
Figure 4.13: Déplacement vertical suivant la hauteur à $t=2.55\text{s}$ pour les deux cas (2D et 3D)

D'après la figure 4.13 on remarque, que les déplacements verticaux dans le cas bidimensionnel sont un peu proches de ceux obtenus par la 3D au niveau de 0,5L, et la valeur maximale donnée à la crête du barrage.

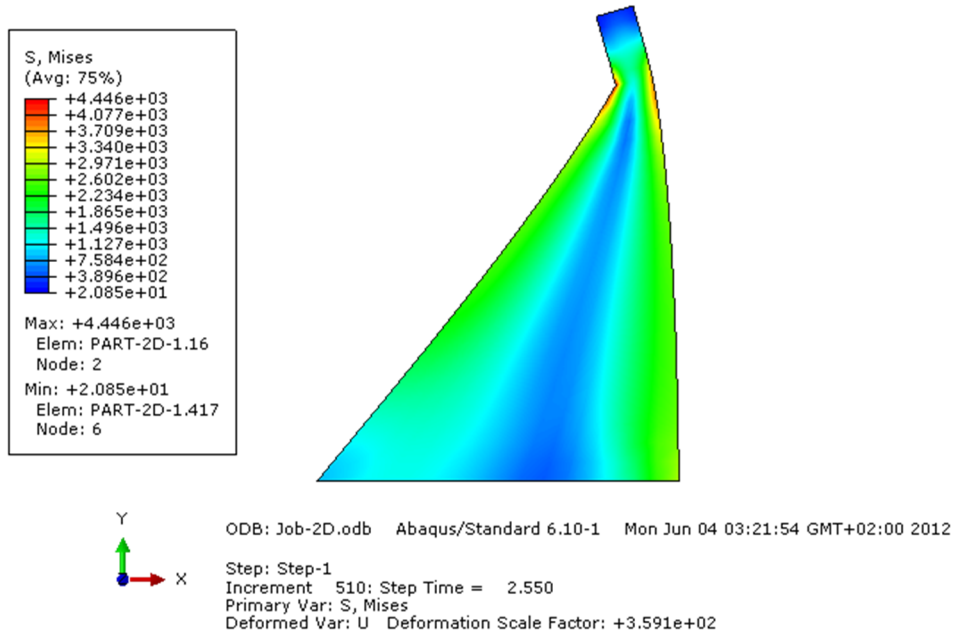
En outre, les amplifications importantes dans la réponse temporelle obtenue par les deux modèles à la crête du barrage, montrent l'influence de la rigidité sur les déplacements du barrage.

4.5.2 Etude des contraintes

Pour voir la distribution des contraintes dans le barrage sous l'effet de l'accélérogramme d'El-Centro à l'instant $t=2.55\text{sec}$ pour les deux cas de simulations (2D et 3D), on présente les résultats dans les figures ci-après.

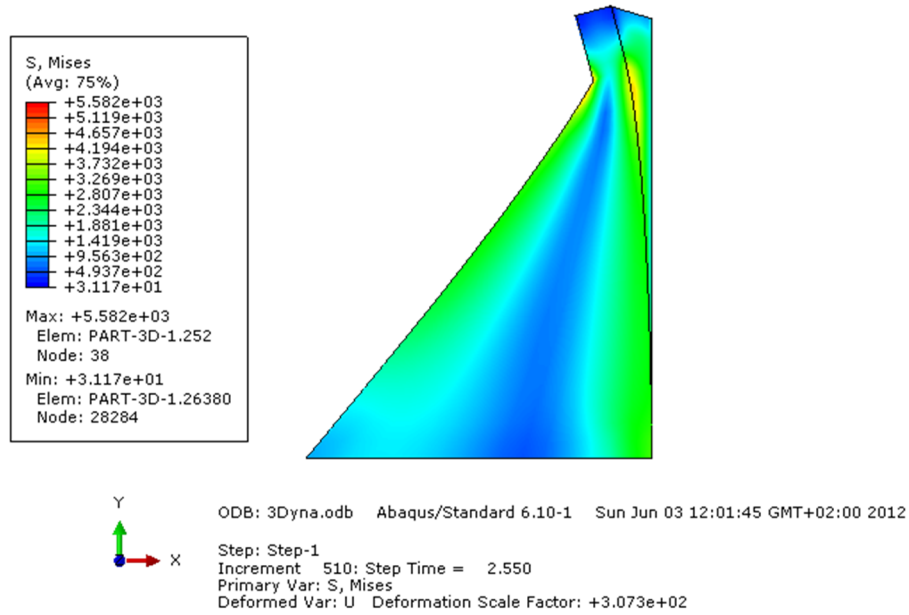


Modèle 3D

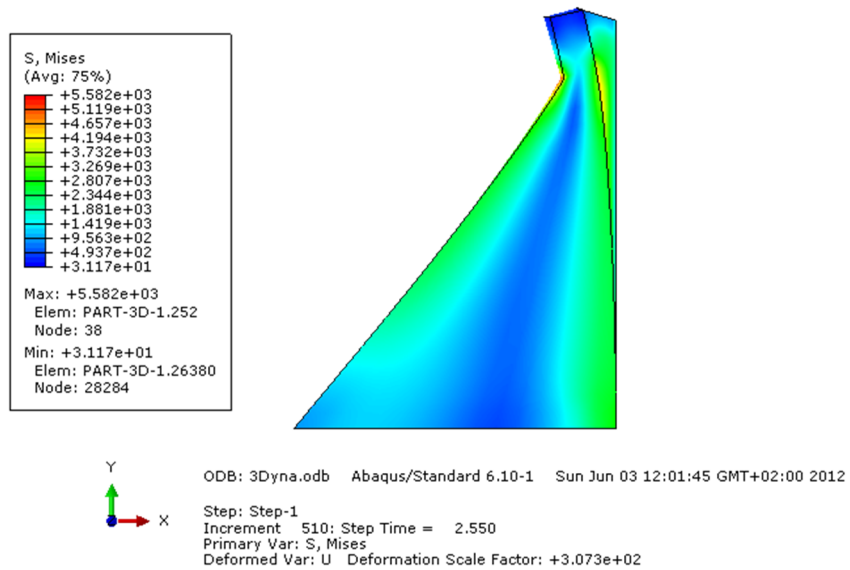


Modèle 2D

Figure 4.14: contrainte dans le barrage sous l'effet d'accélérogramme d'El-Centro à l'instant $t=2.55\text{sec}$ pour les deux cas (2D et 3D)



Coupe suivant z (0.25L)



Coupe suivant z (0.5L)

Figure 4.15: différentes coupes de la 3D

Qualitativement, les deux champs ont des allures très proches, mais on constate que le champ 3D représente une forte concentration de contrainte au niveau de (0.25L, et 0.5L) par rapport aux extrémités (0L), là où la réaction de barrage à l'effort sismique est très importante. Pour effectuer une comparaison plus précise, on reporte les valeurs des contraintes pour les différentes positions du barrage sur la figure 4.16.

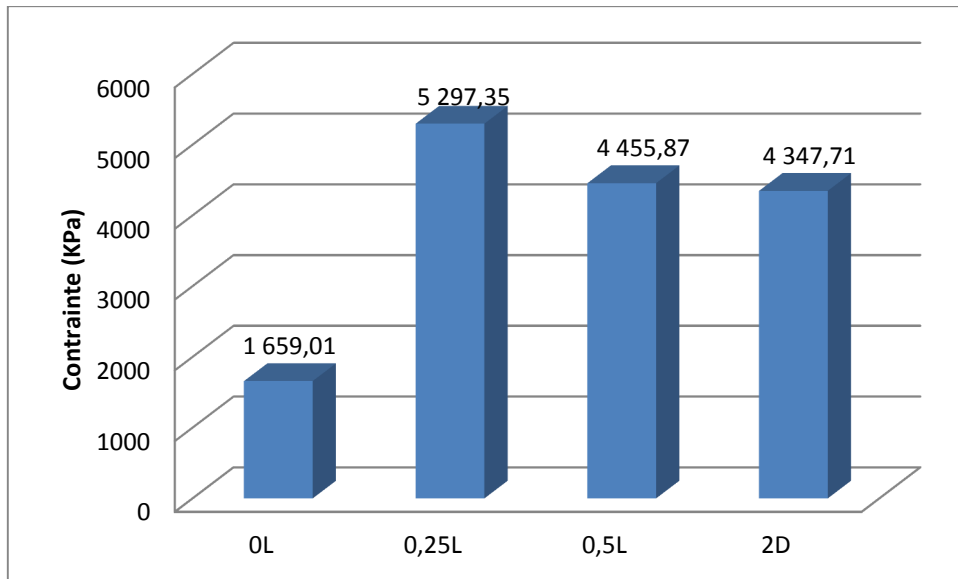
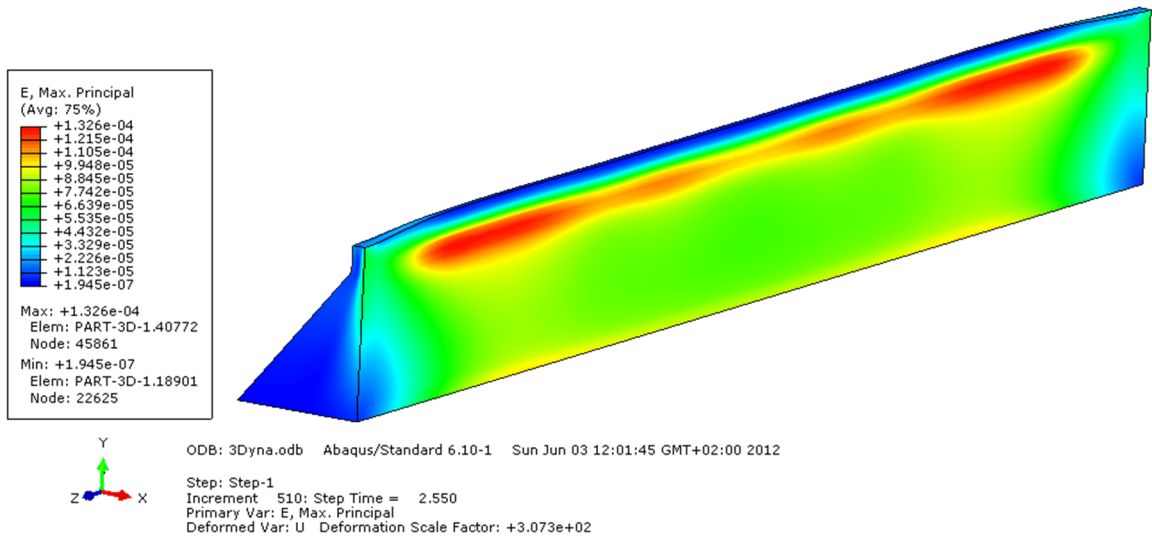


Figure 4.16: contrainte dans le barrage pour les différentes positions de 3D et 2D

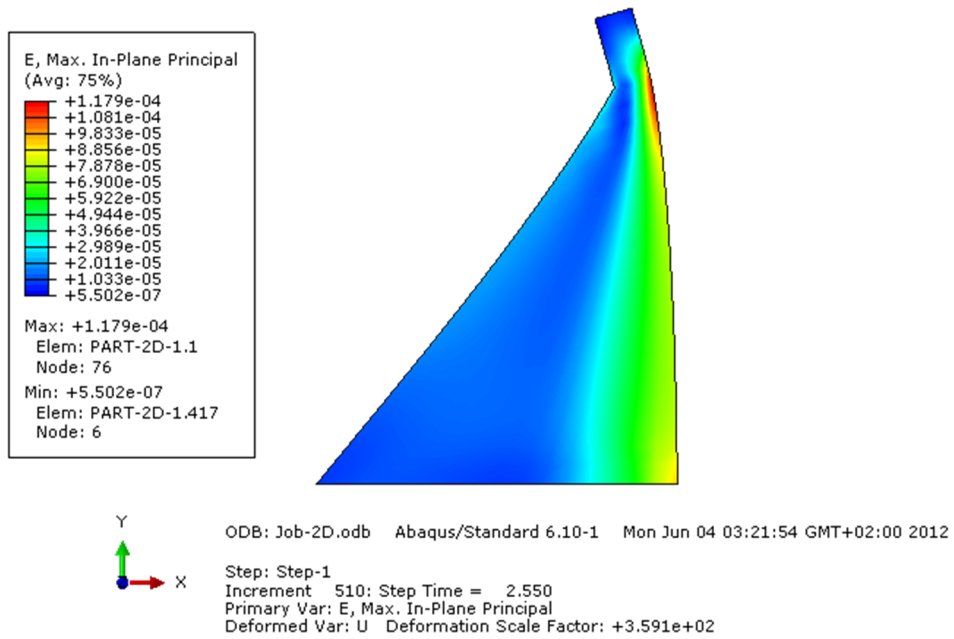
On voit sur la figure 4.16, l'importance des contraintes dans les zones loies des extrémités (0.25L, 0.5L). Cette figure montre aussi que les résultats donnés par le modèle bidimensionnel sont presque les mêmes avec ceux calculés par la 3D à 0.5L. Et à 0.25L le 3D présente des contraintes plus importantes par rapport au cas 2D.

4.5.3 Les déformées du barrage

Nous nous s'intéressons maintenant à la déformé du barrage, calculable par les deux approches (2D et 3D). Les figures ci-dessous représentent une carte de cette quantité obtenue, en 3D pour les différentes positions et en 2D.

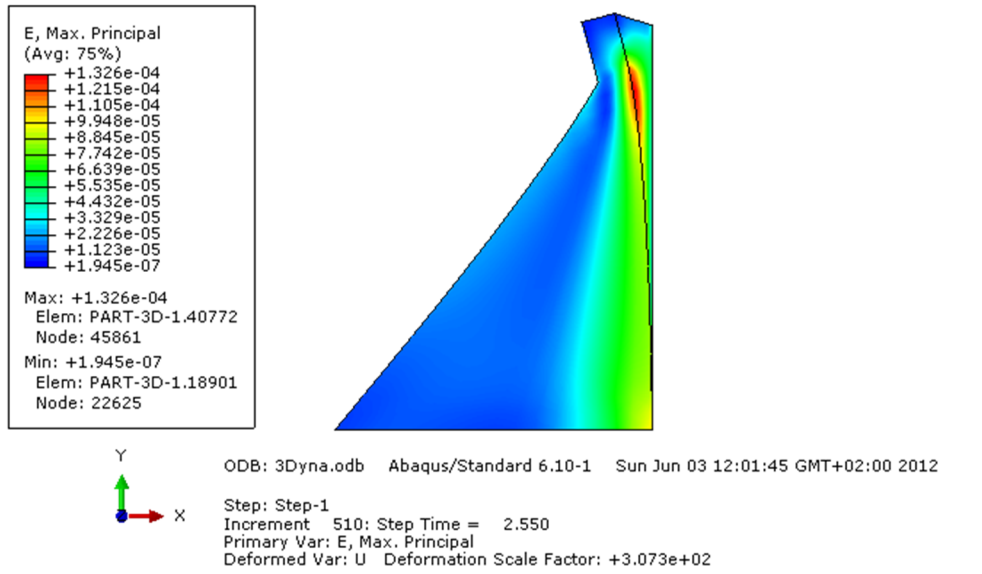


Modèle (3D)

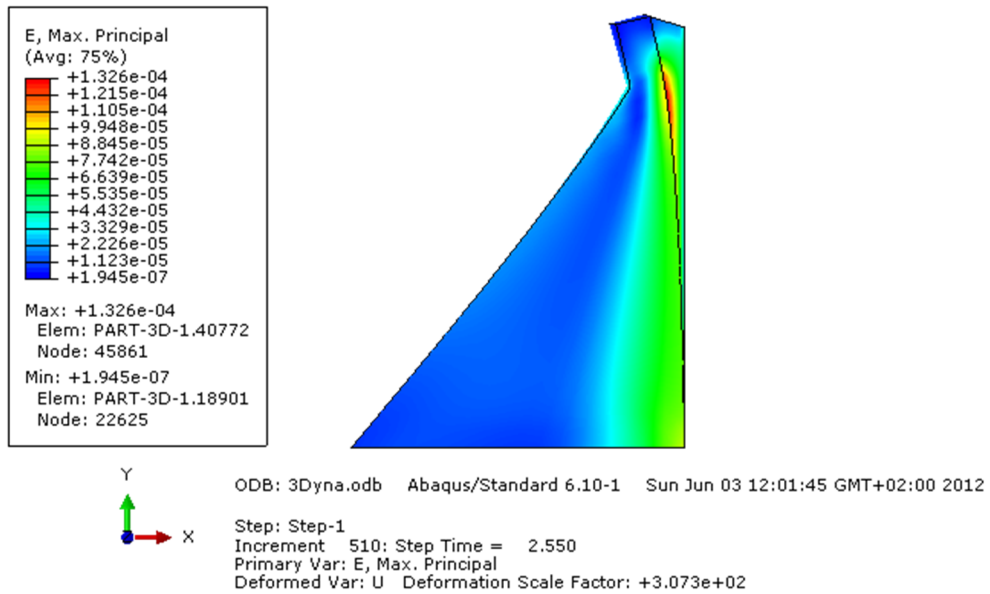


Modèle (2D)

Figure 4.17: déformée du barrage sous l'effet d'accélérogramme d'El-Centro à l'instant t=2.55s pour les deux cas (2D et 3D)



Coupe suivant z (0.25L)



Coupe suivant z (0.5L)

Figure 4.18: contrainte dans le barrage sous l'effet d'accélérogramme d'El-Centro à l'instant $t=2.55s$ pour les deux cas (2D et 3D)

On voit bien d'après ces figures que la déformée est importante dans la partie amont du barrage pour les deux cas de modélisation, et la valeur maximal donnée par le modèle 3D ($1.326 \cdot 10^{-4}$), Un peut plus grande de celle trouver par le modèle 2D ($1.179 \cdot 10^{-4}$).

CONCLUSION GENERALE

Dans ce présent travail, nous avons fait une étude comparative pour deux approches (2D, et 3D), on a choisi un cadre théorique du type mécanique des milieux continus en statique et en dynamique. L'étude numérique a été effectuée par un logiciel d'élément finis ABAQUS.

Les résultats obtenus nous ont permis de conclure pour chaque application :

L'étude statique d'une semelle filante sur un massif de sol montre que :

- ✓ L'augmentation de la rigidité du sol conduit à une diminution de tassement de la fondation ainsi que la convergence des résultats pour les deux modèles bidimensionnel et tridimensionnel à 0.5L.
- ✓ La diminution des contraintes avec l'augmentation de la valeur du module de Young, mènent à la convergence des résultats 2D vers ceux de la 3D au niveau du milieu de la fondation.
- ✓ Le champ de concentration des contraintes maximales est donné par la modélisation tridimensionnelle.

L'étude statique de la voûte d'un tunnel en terme de déplacement et contrainte, nous a conduit à montrer que :

- ✓ A chaque fois qu'on s'éloigne de l'extrémité vers le milieu du tunnel, les résultats calculés en termes des déplacements et contraintes diminuent, c'est là qu'on obtient la convergence des résultats donnés par le 2D avec ceux de la 3D.

L'étude de comportement dynamique du barrage poids encastré, nous a conduits à faire les conclusions suivantes :

- ✓ La réponse du barrage à l'excitation sismique en terme de déplacement est très importante à la crête, et le champ 3D donne des valeurs plus grandes par apport à celles de 2D

- ✓ D'autre part, le bidimensionnel représente la 3D au niveau de 0.5L (le milieu du barrage).

La finalité de notre étude nous conduit à dire que :

- Le cas 2D correspond toujours au milieu du modèle.
- Pour le cas de la semelle filante, plus le modèle est rigide, plus les résultats de la 2D converge vers ceux de la 3D.
- Moins l'ouvrage considéré est important plus les résultats de la 2D convergent vers ceux de la 3D.

En vu de ces résultats obtenus, on peut dire que le calcule 2D est valable pour des ouvrages de taille moyenne, rigide et dont les conditions aux limites font qu'on s'intéresse plus particulièrement au milieu du modèle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] : Amar Khenane, « *méthode des éléments finis. Enoncé des principe de base* », office des publications universitaires.
- [2] :A.seghir, « *Note de cours d'élasticité* », département de G.civil, université A. Mira de Bejaia 2010/2011
- [3] :S. Forest & M. Amestoy, « *mécanique des milieux continue* », Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [4] :L. Khezzar& A. Haddad, « *Mécanique des Milieux continue. Une introduction* », Office des Publications Universitaires.
- [5] :M.D.Pedro&J.Botsis « *Introduction a la Mécanique des Solides et des Structures* », Presses polytechniques et universitaires Romandes.
- [6] :J.L. Batoz&Gounidhatt « *Modélisation des structures par éléments finis, solide élastique* », volume1.
- [7] :M. Part, « *Emploi des éléments Finis en Génie Civil. La Modalisation des Ouvrages* », A.F.P.C.
- [8] :L. ramdani& R. Bendahmane « *Etude de la réponse sismique des réservoirs de stockage* ».mémoire de fin d'étude, université A. Mira de Bejaia 2006.
- [9] :N.Belhamedi&A.Bourooba « *Etude de la réponse sismique des Barrages Poids en Béton par la méthode des éléments finis* », mémoire de fin d'étude, université A. Mira de Bejaia 2005.
- [10] : François Frey&J.Jirosek « *analyse des structures et milieux continue, Méthode des élément finis* », Presses polytechniques et Universitaire Romandes. Volume6
- [11] : François Frey, « *analyse des structures et milieux continue, Mécanique des solides* », traité de génie civil de l'école polytechnique. Fédérale de laussane.volume3.
- [12] :O.C. Zienkiewicz&R.L.Taylor, « *la méthode des éléments finis. Formulation de base et problème linéaires* », Afnor, technique, 1991.
- [13] : Yves debar, « *méthode des éléments finis .élasticité à une dimension* », université du Mans. Master modélisation numérique et réalité virtuelle. <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>.

[14] :Vuong_Dieu Trinh, « *thèse doctoral spécialité mécanique* », l'école nationale supérieure d'arts et métiers.

[15] : Yves debarde, « *Elasticité* », institut universitaire de technologie du Mans.

[16] : Marc bonnet &AttilioFrangi « *analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis* ».bonnet@ins.polytechnique.fr. Attilio. frangi@polimi.it.

[17] : Stéphanie Basseville& Frédéric Feyel. « *Méthodes de Résolution en éléments finis* », Ecole Nationale supérieure des Mines de Paris. Enseignement spécialisé « éléments finis », S3733-S3735.

[18] :J. Garrigues, « *Statique des solides élastiques en petite Déformations* », école supérieur de mécanique de marseille.

[19] :A.Seghir, « note de cour MEF », département génie civil, université A. Mira de Bejaia 2011/2012 .

[20] :A.Seghir, « *thèse doctoral spécialité Génie Civil* », département génie civil, université A. Mira de Bejaia.

