République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département De Recherche Opérationnelle

Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle
Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

L'approche du développement en série de Taylor pour l'analyse du modèle (s, S) de gestion de stocks

Présenté par :
M^{elle} **Bennaï Yasmina**
M^{elle} **Smaïl Latifa**

Devant le jury composé de :

Président	M^r M.Boualem	MCA	Université de Béjaïa
Rapporteur	M^{me} F.Aoudia	MCB	Université de Béjaïa
Examinateur	M^{lle} K.Bouchama	MAB	Université de Béjaïa
Examinateur	M^r B.Brahmi	MCB	Université de Béjaïa

Juin 2013

Remerciements

À travers ce modeste travail, nous tenons à remercier en premier lieu le bon Dieu de nous avoir guidé vers le chemin de la lumière et du savoir.

Nous tenons à remercier : tous les enseignants de la Recherche Opérationnelle pour nous avoir aidés et dirigés tout au long de nos études.

Nous exprimons nos sincères remerciements et reconnaissances à notre promotrice M^{me} F. AOUDIA, qui nous a beaucoup aidé et nous lui exprimons notre profonde gratitude pour nous avoir guidé afin de mener à bien cette étude.

Nous voudrons également exprimer nos vifs remerciements aux membres du jury qui ont bien voulu examiner ce travail.

Nous remerions également et chaleuresements nos familles et nos amis pour nous avoir aidés et motivés tout au long de ce travail.

Et dans le souci de n'oublier personne, que tout ceux qui ont aidé, de près ou de loin, trouvent l'expression de notre profonde gratitude.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :
Mes parents, les personnes les plus chères à mes yeux,
Mes très chères soeurs : Sabrina, Chahinez et Cylia,
Mes très chèrs frères : Nabil, Nassim et Madani,
Mes très chèrs cousins et cousines,
Mes très chères copines de chambre,
Ma très chère binôme Yasmina et toute sa famille,
Tous mes amis (es) sans exception.

Latifa

Dédicaces

Je dédie ce travail à :
Mes parents,
Mes frères : Brahim, Meriem, et l'inattendu Yacine,
Ma famille,
Ma binôme Latifa,
Mes très cheres amies : Amina, Kahina, Linda, Nawel et Nora,
Et à tous ceux qui me sont chers.

Yasmina

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Un stock est une réserve que l'on constitue pour une utilisation future. Il représente un capital immobilisé et entraîne des coûts pour son maintien, il représente aussi un large potentiel de risque. De nombreuses raisons imposent aux entreprises de constituer des stocks :

- Raisons financières : Lorsque les prix des matières premières sont bas, l'entreprise a intérêt de construire des stocks en achetant des quantités plus importantes, pour éviter d'acheter plus tard à un prix plus élevé.
- Raisons économiques : Le lancement d'une commande entraîne un coût, appelé coût fixe de commande (réglage des machines, organisation des équipes,...). Pour minimiser ces coûts, on sera amené à produire la plus grande quantité possible pour éviter de supporter ces coûts à chaque fois en produisant en petites quantités.
- Raisons de sécurité : Dans la pratique, on est souvent confronté aux caractères aléatoires de la demande et du délai de livraison.

L'idéal pour une entreprise est évidemment de prévoir la demande des produits que ses clients vont acheter, afin de minimiser les différents coûts liés à la gestion des stocks et d'éviter au maximum de tomber en pénurie. Le choix d'un modèle de gestion des stocks repose essentiellement sur la nature des variables et sur les hypothèses qu'on peut formuler à partir de la situation actuelle, afin de pouvoir modéliser le système. On distingue deux types de variables, déterministes et aléatoires. Pour le cas déterministe, le modèle de Wilson sera le mieux adapté pour ce type de problème et dans l'autre cas, plusieurs modèles, appelés modèles stochastiques, ont été proposés, on cite en particulier : les modèles de gestion (s,S), (s,nQ) et (R,s,S).

L'un des grands progrès dans l'étude mathématique de la gestion des stocks était la preuve de l'optimalité de la politique (s, S) pour certains problèmes. Les premiers travaux dans ce cadre pour les modèles dynamiques de gestion des stocks avec demande aléatoire et coût de lancement fixe sont de Arrow et al (1951) [6]. En 1963, Scarf [35] a prouvé l'optimalité de la politique (s,S) pour le problème à horizon fini. L'optimalité d'une politique (s,S) stationnaire pour le problème à horizon infini (cas continu), a été prouvée par Iglehart en 1963 [23]. Ce dernier a obtenu la distribution stationnaire du niveau net des stocks avec une politique (s, S) en utilisant des arguments de la théorie de renouvellement. Il a également développé une expression explicite du coût moyen stationnaire $\mathcal{L}(s, S)$, $s < S$ associé à la politique (s, S). En 1965, Veinott et Wagner [38] ont aussi prouvé l'optimalité de la politique (s,S), en considérant une demande discrète et en établissant une version discrète des résultats de Iglehart.

Les modèles stochastiques de gestion des stocks sont plus réalistes, car ils prennent en considération le comportement incertain de certains paramètres. En général, ces modèles sont compliqués et ne peuvent être résolus que d'une manière approximative [30]. Parmi les méthodes d'approximation qui ont été développées sur les modèles stochastiques, on retient la méthode du développement en série.

La méthode du développement en série nous permet de retrouver la distribution stationnaire d'un système perturbé sous forme d'une série qui dépend de la distribution stationnaire du système idéal, des matrices de transition des systèmes idéal et perturbé, et de la matrice de déviation du système idéal. Cette méthode a prouvé son application à des systèmes d'attente gouvernés par une chaîne de Markov apériodique irréductible et à espace d'états fini [20, 22, 11, 7, **?**, 1].

Dans ce mémoire on se propose d'appliquer pour la première fois, la méthode du développement en série aux modèles de gestion des stocks, en particulier, pour le système à revue continue (s, S). La perturbation concerne le paramètre de la loi de la demande, du moment que les fluctuations touchent beaucoup plus le processus de la demande. En effet, elle peut être plus importante que prévu (nouveaux clients) ou moins importante à cause des retards pouvant se produire. Les résultats utilisés sont ceux concernant les chaînes de Markov discrètes à espace d'états fini [2].

Ce mémoire est structuré comme suit :
Après cette introduction générale, on trouve le premier chapitre qui est consacré aux notions générales sur la gestion des stocks, les différentes politiques de control, et une énumération des différents modèles existants.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons un bref aperçu sur les modèles stochastiques de gestion des stocks, puis nous détaillons le modèle à revue continue (s, S).

Le troisième chapitre est consacré aux différentes méthodes d'analyse des modèles stochastiques, où nous avons détaillé la méthode du développement en série de Taylor.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons cette dernière au modèle détaillé au deuxième chapitre.

Enfin, nous achèverons notre travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre I

Généralités sur la gestion des stocks

Les problèmes de la gestion des stocks demeurent parmi les plus étudiés par les spécialistes de la Recherche Opérationnelle, qui tentent de maintenir au niveau minimum les stocks, tout en gardant une certaine indépendance vis-à-vis des fournisseurs. Les stocks sont un facteur de flexibilité de l'entreprise, mais ils constituent une charge financière et une immobilisation des capitaux.

Afin de bien se situer, nous présentons dans ce chapitre des rappels de certaines notions de base liées à la gestion scientifique des stocks.

I.1 Définition d'un stock

Un stock peut être vu comme l'accumulation des produits qui peut être destinée à satisfaire une demande future. Dans une entreprise, on trouve des stocks à différents stades du processus de production :

- Le stock de la matière première : désigne les articles qui ne sont pas encore entrés dans le processus de fabrication.
- Le stock des pièces de rechange, de maintenance et de fournitures diverses : englobe les articles utilisés en production mais qui ne font pas partie des produits et leur nomenclature.
- Le stock en cours de fabrication : produits entrés dans le processus de fabrication et en cours de transformation.
- Le stock de distribution : produits finis qui se trouvent dans le dépôt de distribution.

I.2 Définition de la gestion de stocks

La gestion des stocks est une fonction pivot dans l'entreprise. Son rôle consiste à rechercher l'optimum des volumes du stock pour assurer un approvisionnement optimal et satisfaire les besoins de l'utilisateur en temps opportun [19].

Selon Pierre ZERMATI [28], "gérer un stock, c'est faire en sorte, qu'il soit constamment apte à répondre aux demandes des clients, des utilisateurs, des articles stockés. Bien gérer un stock doit satisfaire, dans des conditions économiques, cette exigence".

I.2.1 Les avantages d'un stock

Un stock permet de [27] :

– Parer aux aléas de la consommation.

– Assurer la consommation régulière d'un produit bien que sa production ne l'est pas.

– Des stocks peuvent être aussi constitués dans un but typiquement commercial :

• On achète à bas prix pour ensuite revendre à la bourse.

• En achetant en grandes quantités, on bénéficie en général d'une réduction du prix unitaire.

I.2.2 Les inconvénients d'un stock

Le stock n'a pas seulement des avantages, mais il possède aussi des inconvénients, dont on peut citer [27] :

– Le caractère périssable de certains produits.

– La pénurie et les coûts engendrés par l'entretien et la protection des stocks.

– L'insuffisance et l'encombrement des surfaces de stockage, ...etc.

I.3 Classification des stocks

I.3.1 Nécessité d'un classement

Une entreprise dans sa gestion n'accorde pas la même priorité à chacun des articles. Elle ne gère pas de la même façon les fournitures de bureau et les articles destinés à la production. De même, dans un ensemble de produits, la vis de diamètre 5 dont la valeur est faible ne sera pas gérée de manière identique au corps du produit dont la valeur est très importante. Donc il est nécessaire d'adopter une classification des produits selon deux critères [14] :

– Critère de destination (fournitures de bureau, production, service après-vente) ;
– Critère de valeur (valeur cumulée des articles apparaissant dans les mouvements de stocks ou valeur en stock).

I.3.2 Classement ABC

Il consiste à élaborer un classement des articles en fonction de leurs contributions aux résultats de l'entreprise et cela en suivant la proportion représentée dans la valeur totale de la consommation des stocks. Les stocks sont répartis en trois catégories :

– La catégorie A : 10% des articles consommés représentent 75% de la valeur totale des stocks.
– La catégorie B : 40% des articles consommés représentent 20% de la valeur totale des stocks.
– La catégorie C : 50% des articles consommés représentent 5% de la valeur totale des stocks.

Lorsque on utilise ce classement, on applique des méthodes d'analyse et de control rigoureuses aux articles de catégorie A, des méthodes souples pour ceux la catégorie B et des choix raisonnés pour les articles classés en C.

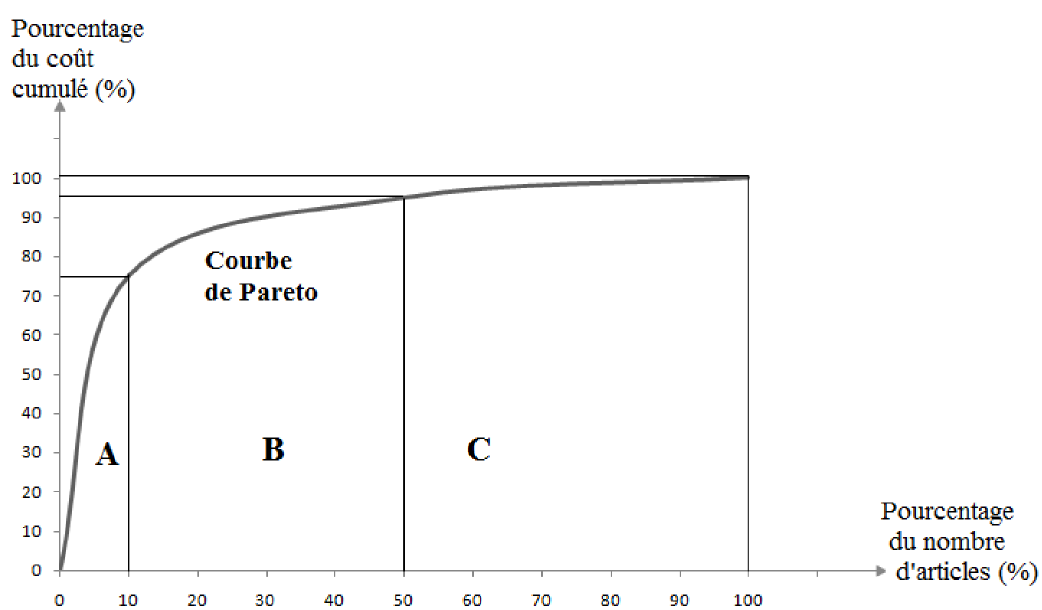

FIGURE I.1: Analyse ABC.

I.4 Types de stock

I.4.1 Stock de sécurité

Il est destiné à pallier au risque dû au caractère aléatoire de l'approvisionnement et de la demande. Il permet de faire face aux augmentations imprévues de la demande et aux fluctuations des délais de production et de livraison. Il est aussi appelé **stock de protection**[15].

I.4.2 Stock moyen

Le stock moyen correspond à la moyenne entre le stock initial et le stock final.

$$Stock\ moyen = \frac{(Quantit\acute{e}\ command\acute{e}e\ +\ stock\ de\ s\acute{e}curit\acute{e})}{2}$$

I.4.3 Stock d'alerte

Supérieur au stock de sécurité, le seuil d'alerte déclenche le processus de commande. Il est calculé pour couvrir la consommation d'articles entre le moment où l'on constate le besoin de réapprovisionner jusqu'à la mise à la disposition de la nouvelle livraison.

I.5 La fonction des stocks

- **Économie d'échelle :** Le premier motif est lié à l'idée d'économie d'échelle, dés que le nombre de commande est réduit. En effet, on remarque l'existence d'un coût entraîné par le lancement d'une commande et qui ne dépend pas de la quantité commandée. Le fait de commander des quantités plus importantes (qui seront stockées) permet de réduire le nombre de commandes et induit naturellement, la baisse des charges dues à la passation de commandes. De plus, en achetant des quantités plus importantes, l'entreprise peut bénéficier d'escomptes sur quantité. Les remises peuvent être intéressantes et importantes par rapport au coût du stockage.
- **Spéculation :** Si l'on peut prévoir les hausses (ou les baisses) des prix, l'entreprise a tout intérêt à constituer des stocks. Ainsi, elle peut éviter d'acheter plus tard à un prix plus élevé. Les produits stockés peuvent aussi être vendus à des prix supérieurs. Dans certaines situations, les stocks peuvent être utilisés pour influencer les prix.
- **Indépendance des activités :** A l'intérieur de l'entreprise, une activité doit disposer des produits dont elle a besoin d'une manière instantanée. Par contre, l'en-

treprise acquiert ces produits auprès de ses fournisseurs dans des délais qui peuvent être beaucoup plus longs. La constitution des stocks permet de garantir la continuité des activités et permet à l'entreprise de produire à un rythme stable.
La présence de stocks intermédiaires dans une chaîne de production réduit le risque d'arrêt de la production en cas de panne de l'une des machines.
De l'autre côté, un niveau faible des stocks augmente le risque de rupture et peut provoquer l'arrêt de production. La non satisfaction de la demande du client peut avoir des conséquences négatives (perte de la confiance du client) en plus du manque à gagner.
- **Parer aux fluctuations de la demande et pallier aux longs délais de livraison :** Les stocks peuvent servir aussi, pour parer aux fluctuations de la demande des clients (elle peut être plus importante que prévu), et pour pallier aux longs délais de livraison (des retards peuvent se produire). Le stock agit donc contre l'effet de l'incertitude.

I.6 Éléments de la gestion des stocks

Depuis le modèle de Harris, des milliers d'articles sont apparus dans le domaine des sciences de gestion et de la Recherche Opérationnelle. On peut se demander pourquoi une telle attention a été donnée aux modèles de gestion des stocks. L'explication est simplement, qu'en pratique, on rencontre plusieurs situations différentes et chacune nécessite une analyse sur mesure [9]. Par exemple, les modèles peuvent différer par rapport aux aspects suivants : nombre de locations et échelons, nombre de produits, processus de la demande, structure des coûts, exigences et mesures de service, possibles moments de commande, traitement des ruptures, délai de livraison des commandes,...etc.
Examinons les éléments constituant ces modèles [30] :
- **Structure de stockage (mono-echelon, multi-echelon) :** C'est la manière dont les magasins de stockage sont organisés. Une structure est à un seul échelon si le même magasin reçoit le produit du fournisseur et le délivre aux utilisateurs. A l'opposé, dans une structure multi-échelons, un magasin, souvent appelé magasin central (ou encore dépôt), reçoit le produit du fournisseur et le transfère vers d'autres magasins, qui, eux-mêmes, peuvent servir d'autres magasins et ce, jusqu'aux magasins qui fournissent directement aux utilisateurs (appelés souvent détaillants).
- **Horizon de la planification (une période, plusieurs périodes, horizon infini) :** C'est la durée de temps sur laquelle le niveau du stock est contrôlé.
- **Article (mono-article, multi-articles) :** Le terme article désigne l'ensemble d'un

produit. La gestion des stocks peut concerner un ou plusieurs produits différents et il peut y avoir des interactions entre eux. Certains produits doivent être stockés sous des conditions contrôlées (humidité, température, ...), d'autres sont périssables ou sujets à l'obsolescence et il est naturel qu'ils doivent être gérés d'une manière différente.

– **Politique de contrôle (périodique, continue) :** On distingue deux types de revue :

  • Les systèmes à revue continue : Ce sont des systèmes où toutes les transactions pertinentes (demandes, commandes, réceptions des commandes,...) sont enregistrées aussitôt qu'elles prennent place, de sorte que le gestionnaire connaît l'état du système à tout moment dans le temps.

  Il va de soit que l'implantation d'un système de ce genre est très coûteuse. Toutefois, une fois installés, ces systèmes sont "généralement" les plus avantageux.

  • Les systèmes à revue périodique : Dans ce cas, l'état du système est examiné seulement à certains points discrets dans le temps. Le gestionnaire peut donc contrôler ces systèmes aux points de revue seulement. Ces systèmes ont l'avantage, en plus d'être moins coûteux, de pouvoir rassembler les commandes de plusieurs produits en une seule commande, en choisissant la même période pour tous les produits. Mais, il a l'inconvénient de nécessiter un niveau de sécurité plus élevé.

– **La demande (déterministe, aléatoire/stationnaire, dynamique) :** Diverses hypothèses peuvent également être posées concernant les caractéristiques de la demande. La plus simple, est de considérer la demande connue (déterministe) et constante dans le temps. C'est l'hypothèse du modèle classique de la quantité économique de commande (EOQ) (Economic Order Quantity). Cependant, cette hypothèse est en général peu réaliste. Il convient donc de considérer des demandes déterministes variables, des demandes aléatoires connues en probabilité et des demandes inconnues. La demande peut être également stationnaire ou dynamique, discrète ou continue. Nous nous intéressons au cas stochastique et l'on distingue deux cas :

  • Demande stationnaire : Dans ce cas, le processus stochastique qui représente la demande est stationnaire, et les variables aléatoires représentant la demande totale durant une certaine période sont indépendantes et identiquement distribuées.

  • Demande non-stationnaire : Dans ce cas, les variables aléatoires représentant la demande totale durant une certaine période ne sont pas identiquement distribuées, et le processus stochastique représentant la demande n'est pas stationnaire. On distingue, le cas d'une demande modulée Markov, ou simplement, demande Markovienne, i.e, une demande dont la distribution dans la période t ne dépend que de la chaîne Markovienne associée au système dans la même période. Soit I_t l'état du système à la période t. La distribution de la variable aléatoire $\xi_t^{'}$ représentant la demande durant la période t, est donnée conditionnellement à I_t :

$$\phi_t(x) = P(\xi_t^{'} < x/I_t = i_t)$$

– **Délai de livraison (nul, fixe, aléatoire) :** C'est le temps entre le moment du lancement d'une commande et le moment de sa réception. La manière de prendre en compte ce délai de livraison a une grande influence sur la complexité du modèle.
– **Réaction aux ruptures (Perte, report) :** Lorsque le niveau du stock n'est pas suffisant pour satisfaire une demande qui arrive, le client peut choisir entre :
• Attendre le prochain réapprovisionnement.
• Annuler sa demande.
Il existe également des modèles avec une mixtures de ces deux hypothèses.
– **Capacité de stockage (finie, infinie, aléatoire) :** Dans certaines situations pratiques, la quantité que peut acquérir le gestionnaire suite à une commande est limitée ou même aléatoire. Cette limitation peut être liée à la capacité de stockage ou de la chaîne de production, mais aussi à d'autres considérations (capacité du fournisseur, par exemple). Autres situations : le prix comme variable de décision, escomptes sur quantité, concurrence entre entreprises, incertitude sur la réception des commandes, plusieurs fournisseurs, fluctuations aléatoires de l'environnement, fournisseurs non fiables, ...
– **Coûts :** Trois types de coûts sont généralement pris (plus ou moins) explicitement en compte. Dans la plupart des modèles classiques, ces coûts sont considérés comme des paramètres fixes.
◦ Coûts de commande : Ce sont des coûts encourus à chaque lancement de commande et qui incluent les coûts administratifs, coûts d'inspection du stock, tests, transport... Ces coûts peuvent être divisés en deux parties : ceux qui ne dépendent pas de la quantité commandée et ceux qui en dépendent. Les premiers sont regroupés en un coût fixe appelé coût de lancement (ou coût fixe de commande). Les autres sont fonction de la quantité commandée.
◦ Coûts de maintien : Ce sont le résultat direct du maintien d'une quantité donnée d'articles en stock et incluent : taxes, assurance, coûts d'immobilisation du capital, coûts d'obsolescence, coûts de fonctionnement (éclairage, chauffage, ...),...
◦ Coûts de rupture (pénuries) : Ce sont des coûts liés à l'absence de produits en cas de demande. Ils sont généralement très difficiles à estimer. En cas de ventes perdues,

le coût de pénurie peut être assimilé au manque à gagner correspondant à une commande. Il correspond souvent à une dépense supplémentaire pour approvisionner exceptionnellement l'article manquant. Parfois, le coût de pénurie est parfaitement connu ; il figure dans certains contrats sous forme d'astreintes.

– **Mesures de service :** Les coûts énumérés sont très difficiles à estimer (en particulier, pour les coûts de pénuries). Pour cette raison, le risque de rupture est fréquemment modélisé à travers une contrainte de maintien d'un niveau de service prédéterminé. Les trois mesures de service suivantes sont les plus utilisées :
  ◦ $P1$-mesure (ou mesure de non-rupture) : Représentant la proportion de cycles dans lesquels aucune rupture n'est enregistrée. Un cycle est l'intervalle de temps entre la réception de deux commandes consécutives.
  La $P1$-mesure vaut :
  $$\frac{Nbre\ \ cycles\ \ sans\ \ rupture}{Nbre\ \ total\ \ cycles}.$$
  ◦ $P2$-mesure (ou mesure de taux de remplissage) : Qui est la proportion de demandes satisfaites directement du stock en main, et elle vaut :
  $$\frac{Nbre\ \ articles\ \ servis\ \ du\ \ stock}{Nbre\ \ articles\ \ demandés}.$$
  ◦ $P3$-mesure (ou mesure de taux de disponibilité) : Qui correspond à la proportion de temps où le niveau du stock est positif. On la retrouve par :
  $$\frac{Temps/\ \ stock > 0}{Temps}.$$
  Dans le cas où les coûts de pénuries peuvent être déterminés, on peut utiliser l'approche coût. Dans cette approche, on essaye de trouver la règle de contrôle optimale par minimisation de la moyenne du coût total (somme des coûts). Si par contre, les coûts de pénuries ne peuvent pas être déterminés, ce qui est souvent le cas, on essaye de trouver la règle de contrôle optimale en minimisant les coûts de commande et de possession sous contrainte de niveau de service. C'est ce qu'on appelle l'approche niveau de service.

I.7 Les modèles déterministes de la gestion des stocks

Il existe deux types de modèles, les modèles déterministes et les modèles stochastiques. Le modèle faisant l'objet de ce mémoire est stochastique, c'est pour cela que dans cette section, nous donnerons simplement un bref aperçu sur les modèles déterministes, puis nous détaillons les modèles stochastiques au prochain chapitre.

Les modèles déterministes sont des systèmes de gestion de stock dans lesquels les éléments sont supposés non soumis au hasard [32].

I.7.1 Modèle de Wilson :

C'est le premier modèle de gestion des stocks (développé par Harris en 1913), connu aussi sous le nom du modèle de la quantité économique de commande (EOQ). Il existe deux types de ce modèle, modèle de Wilson avec demande aléatoire et celui avec pénurie. Les hypothèses de ce modèle sont :

- La demande est connue et est constante à un taux de λ éléments par unité de temps.
- Il n'existe pas de rupture de stock.
- Les éléments sont livrés instantanément après leur commande.

L'objectif est de déterminer les moments de commande (donc la longueur des périodes) et les quantités à commander de manière à minimiser le coût total qui est la somme des coûts suivants :

- Un coût fixe de commande (ou de mise en place) K (pour chaque commande lancée).
- Un coût de commande proportionnel de c par élément commandé.
- Un coût de maintien en stock de h par élément maintenu en stock par unité de temps.

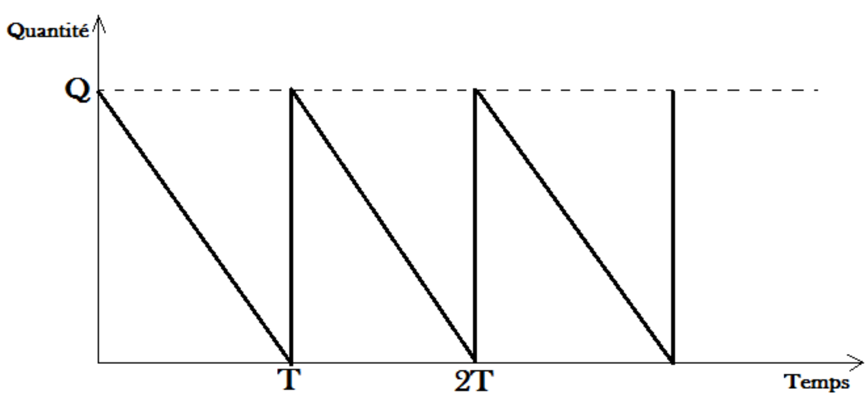

FIGURE I.2: Variations du stock dans le modèle EOQ.

Le coût moyen $G(Q)$ est défini comme suit :

$$G(Q) = C_c + C_h$$

.

Où : C_c est le coût de mise en place ou de commande et C_h, le coût du maintien du stock.

Pour un cycle de durée T, le coût moyen de commande sera :

$$C_c = \frac{K + c * Q}{T}$$

Le coût moyen de maintien en stock :

$$C_h = \frac{h * Q}{2}$$

qui est le coût du maintien du stock moyen $\frac{Q}{2}$.

Par ailleurs, nous avons à satisfaire une demande de λ articles par unité de temps. Alors :

$$\lambda = \frac{Q}{T}.$$

Ce qui donne :

$$G(Q) = \frac{K + c * Q}{T} + \frac{h * Q}{2} = \frac{K + c * Q}{\frac{Q}{\lambda}} + \frac{h * Q}{2}.$$

d'où

$$G(Q) = \frac{K\lambda}{Q} + \lambda c + \frac{hQ}{2}.$$

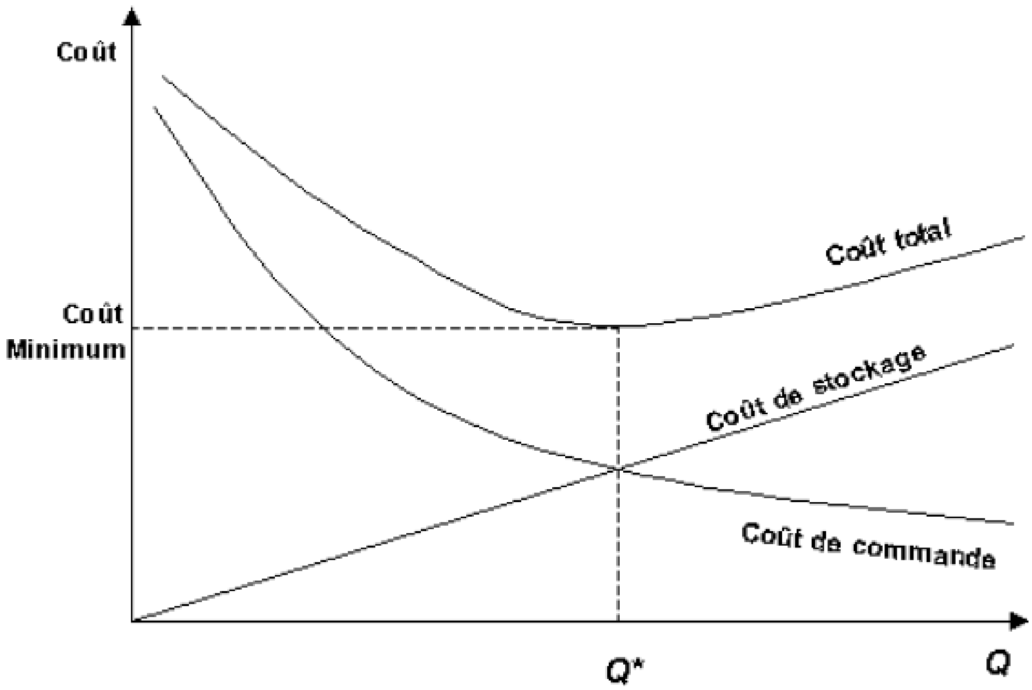

FIGURE I.3: Fonctions des coûts.

La quantité optimale Q^* est celle qui minimise le coût moyen. Il faut alors que la dérivée première de $G(Q)$ soit égale à zéro et que sa dérivée seconde soit supérieure à zéro, ainsi :

$$\acute{G}(Q) = -\frac{K\lambda}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

et

$$G''(Q) = \frac{2K\lambda}{Q^3} > 0.$$

On aura l'optimum lorsque $\acute{G}(Q) = 0$, alors :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$$

qui est l'équation classique de la quantité économique de commande [30].

I.7.2 Modèle de Wilson avec demande aléatoire :

C'est le cas où la demande reste constante dans la même période, mais varie d'une sous-période à une autre. Ce cas est souvent rencontré dans le réapprovisionnement par contrat.

Soient :
θ : Période de gestion divisée en sous-périodes.
T : Longueur d'une sous-période.
γ : Quantité demandée durant une sous-période, pouvant augmenter de manière à provoquer une rupture de stock.
θ_1 : La partie de θ durant laquelle les demandes sont satisfaites.
θ_2 : La partie de θ où on est en rupture de stock.
C_p : Coût de rupture.
L'expression du coût total est en fonction de γ et θ, le minimum est atteint pour :

$$\gamma^* = \sqrt{\frac{2\lambda C_a}{C_s}\frac{C_p + C_s}{C_p}}.$$

Et :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda C_a}{C_s}\ fracC_pC_p + C_s}.$$

Si on désigne le taux de pénurie par ρ avec : $\rho = \frac{C_p}{C_p + C_s}$
On déduit la formule de coût de gestion :

$$K(Q^*) = T\sqrt{2\lambda}C_sC_a\rho,$$

$$\theta^* = \sqrt{\frac{2C_a}{\lambda C_s \rho}}.$$

I.7.3 Modèle de Wilson avec pénurie

Ce modèle est utilisé quand on est souvent confronté à des ruptures de stock, ce qui fait que la demande varie d'une sous-période à une autre.
Soient :
θ : Période de gestion divisée en sous-périodes.
T : Longueur d'une sous-période.
s : Le niveau maximal de stock.
T_1 : La durée dans chaque période T dans laquelle la demande est satisfaite.
T_2 : La période de T durant laquelle il y a rupture de stock.
q : Le nombre total de demandes durant la sous période T.
Q : Demande totale pour une période de gestion.
Les variables du modèle :
C_c : Coût de lancement d'une commande.

C_s : Coût de possession d'une unité de stock.
C_p : Coût de pénurie par unité non livrée et par unité de temps.

L'objectif de ce modèle est de déterminer :
- La quantité économique Q^* à commander pour chaque sous-période T.
- Le stock au début de période.
- La période économique R^*.
- Coût global minimal de gestion $C(Q^*)$ pendant la période de gestion θ.

A la fin de chaque sous-période T, on lance une commande de quantité q destinée, d'une part, à livrer la demande $S' = (q - s)$ qui n'a pas pu être livrée pendant T_2 et d'autre part, à reconstituer le stock S.
Remarque :

Coût global de gestion = Coût global de stockage + Coût global de lancement de commandes + Coût global de pénurie.

La période économique est :

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\frac{2 * C_c * \theta}{Q * C_s}}$$

Le coût global minimal de gestion durant une période θ est :

$$C(Q^*) = \sqrt{\rho}\sqrt{2 * Q * \theta * C_s * C_c}$$

I.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions générales sur la gestion des stocks. Dans ce qui suit nous parlerons des modèles stochastiques de la gestion des stocks, tout en détaillant le modèle (s, S) à revue continue.

Chapitre II

Modèles stochastiques de la gestion des stocks

La recherche sur les modèles stochastiques de la gestion des stocks a commencé après la deuxième guerre mondiale. Dans ces modèles, la demande est un processus stochastique, son but est d'atteindre un niveau de service donné, en minimisant les coûts de stockage. Il existe deux variables de décision, à savoir la quantité à commander et le moment de lancement de la commande [16].

Dans ce chapitre, nous allons décrire les modèles stochastiques de la gestion des stocks tout en détaillant, en particulier, le modèle à revue continue (s, S), sur lequel s'articule notre mémoire.

II.1 Les processus de stocks

Pour décrire le comportement du système de gestion des stocks, on considère un processus stochastique de demande $\mathcal{D} = \{\xi(t), t \in T\}$, où l'espace d'états peut être $[0, \infty)$ ou $\mathbb{N}$. La variable aléatoire $\xi(t)$ représente la demande totale jusqu'au moment t. Le processus de la demande est composé de deux éléments suivants : Le nombre de clients qui arrivent dans une période donnée et le nombre d'articles demandés par chaque client. Chacun de ces deux éléments peut être aléatoire. Ainsi, on peut écrire le processus de la demande :

$$\xi(t) = D_1 + D_2 + ... + D_{N(t)} \tag{II.1}$$

où $N(t)$ est un processus aléatoire représentant le nombre de client.
Par définition, le processus $\mathcal{D}$ de la demande est croissant et pour $T = [0, \infty)$, il est supposé que ce processus est cadlag. (Voir Annexe)

Dans le cas où l'espace d'états est $[0, \infty)$, l'élément est dit indivisible, et dans le cas où l'espace d'états est $\mathbb{N}$, l'élément est dit divisible. On suppose que les clients arrivent suivant un certain processus de renouvellement $N = \{N(t), t \geq 0\}$ avec des temps d'inter-arrivées T_i, $i \in \mathbb{N}^*$, indépendants et identiquement distribués. La quantité demandée par le $n^{ème}$ client est une variable aléatoire D_i. On suppose que les variables aléatoires D_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition commune $F_{D(d)} = P(D_1 \leq d)$ satisfaisant $F_D(0) = 0$ et $F_D(\infty) = 1$. On dira alors que la demande est un processus de renouvellement composé. Dans le cas particulier où les clients arrivent suivant un processus poissonnien, la demande sera un processus de poisson composé ayant les propriétés suivantes :

$$\mathbb{E}(\xi_i(t)) = \lambda t \mathbb{E}(D_1)$$

$$\mathbb{V}(\xi_i(t)) = \lambda t \mathbb{E}(D_1^2)$$

Il est également supposé que les demandes individuelles D_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes du processus $N(t)$ des arrivées des clients.
De plus, pour définir les coûts associés à un modèle de gestion des stocks avec une certaine règle de contrôle, on a besoin d'introduire les différents processus suivants définis sur le même espace d'états que le processus de demande. On considère d'abord le processus $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(t), t \in T\}$, donné par

$$\mathcal{I}(t) = \{\text{Nombre d'article en stock à l'instant } t\}$$

qui est le processus du stock physique ou du stock en main. On l'appelle également niveau du stock. Comme le processus de la demande est cadlag, ce processus est aussi cadlag.

Il peut arriver que la quantité demandée par un client ne soit pas disponible en stock. Comme on l'a déjà vu, deux possibilités sont considérées. Dans notre analyse on suppose que

Hypothèse II.1. *Les demandes arrivant lorsque le niveau du stock est nul peuvent être satisfaites plus tard, au moment où une commande est reçue.*

Cela veut dire que les commandes ne seront jamais ignorées et qu'aucune vente n'est perdue. Les modèles avec cette hypothèse sont dits "modèles avec arriérés de commandes". On définit maintenant le processus $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(t), t \in T\}$, donné par

$$\mathcal{B}(t) = \{\text{Nombre d'article en attente à l'instant } t\}$$

En utilisant les deux processus stochastiques, on obtient la définition du processus du niveau net du stock $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(t), t \in T\}$ donnée par

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{I}(t) - \mathcal{B}(t)$$

Pour tout $t \in T$. Ce processus peut décrire complètement le système. Toutes les expressions des coûts et des mesures de service peuvent être écrites en fonction de $\mathcal{N}$ uniquement. Pour simplifier l'analyse, on a besoin d'introduire un autre processus stochastique. Avant cela, on suppose que

Hypothèse II.2. *Une commande lancée à un moment "t" donné arrive après un temps L, où L est une constante connue.*

Cela veut dire que dans notre analyse, on ne considère que les modèles à délai de livraison déterministe. On suppose également que

Hypothèse II.3. *Au moment de chaque commande, un coût fixe K est encouru. Ce coût est indépendant de la taille de la commande et il est appelé "coût fixe de commande".*

Considérons maintenant le processus $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(t), t \geq 0\}$, donné par

$$\mathcal{O} = \{ \text{ Nombre d'articles commandés et non encore reçus à l'instant } t\}$$

Il est maintenant possible de définir le processus de la position du stock $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(t), t \geq 0\}$ écrivant,

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{N}(t) + \mathcal{O}(t)$$

L'analyse du système peut être réduite à l'analyse du processus de la position du stock. En effet, Sahin [33, 34] a montré la relation ci-après entre le processus $\mathcal{N}$ du niveau net du stock et le processus $\mathcal{P}$ de la position du stock.

Théorème II.1. *[33] Sous les hypothèses (II.1) et (II.2) et si le processus $\mathcal{D}$ de la demande est cadlag alors*

$$\mathcal{N}(t+L) = \mathcal{P}(t) - (\xi(t+L) - \xi(t)), P - presuqe\ sûrement \tag{II.2}$$

pour tout $t \geq 0$.

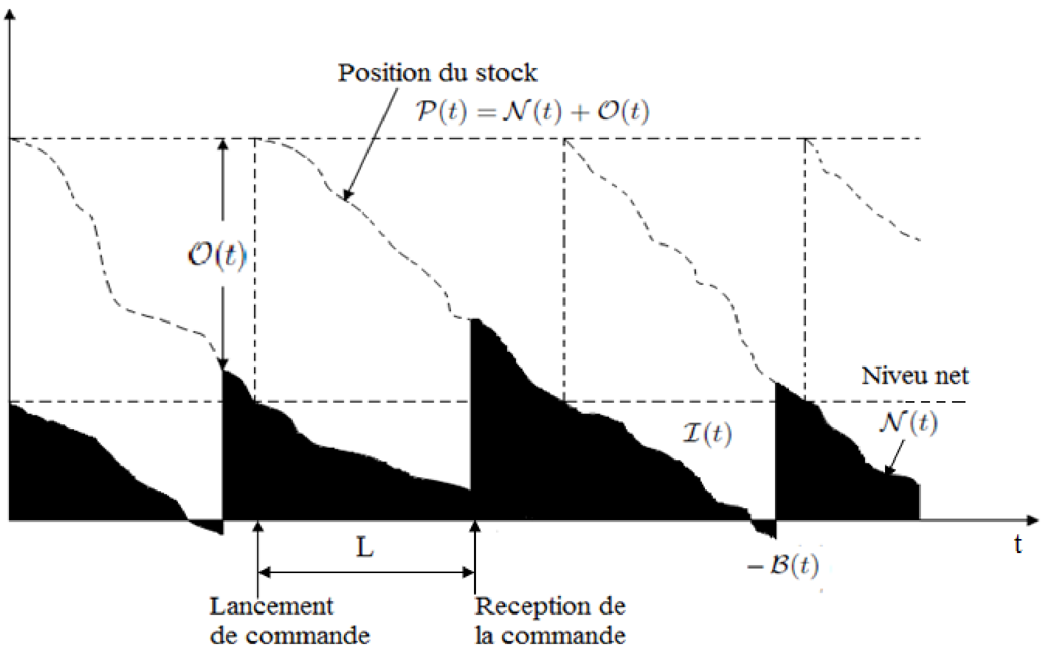

FIGURE II.1: Les différents processus du stock.

II.2 Les politiques de commande

Il existe deux types [30] :

1. **Revue continue :** Elle se fait selon l'une des politiques suivantes :
   • Politique (s, S). Quand le niveau du stock est inférieur ou égal à s, une commande est immédiatement placée. La quantité commandée est telle que le niveau du stock devient S.
   • Politique (S, S). C'est un cas particulier de la politique (s, S) $(s = S)$. Suivant cette politique, chaque demande d'articles par les clients entraîne le lancement d'une commande. Elle est utilisée essentiellement dans les systèmes de gestion des stocks d'éléments réparables (éléments chers à faible demande).
   • Politique (s, nQ). Lorsque le niveau des stocks x chute au dessous du niveau s (point de commande), une commande de nQ articles est lancée où, Q est la quantité de commande de base et n est le plus petit entier vérifiant $x + nQ > s$.
2. **Revue périodique :** Elle se fait selon l'une des politiques suivantes :
   • Politique (R, s, S). Cette politique est équivalente à la politique (s, S) pour les systèmes à revue continue. Le système est examiné chaque R unités de temps, et si la quantité en stock est inférieure ou égale à s, on commande suffisamment d'articles pour atteindre le niveau S.

• Politique (R, S). Suivant cette politique, le système est examiné chaque R unités de temps et une commande est lancée pour atteindre le niveau S. Notons qu'il s'agit d'un cas particulier de la politique (R, s, S), avec $s = S$.
• Politique (R, s, nQ). C'est l'équivalent de la politique (s, nQ) pour les systèmes à revue continue. Le système est examiné chaque R unités de temps et les commandes sont lancées aux moments de la revue si la quantité en stock est inférieure ou égale à s.
Il existe plusieurs variantes de ces politiques de commande. Toutefois, elles sont rarement utilisées en pratique.

II.3 Systèmes à revue continue

Supposons que le processus de la demande $\mathcal{D}$ est un processus de renouvellement composé à taux d'arrivées $\lambda > 0$ et que les variables aléatoires $D_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$, représentant les demandes individuelles des clients sont indépendantes et identiquement distribuées, avec une fonction de répartition commune F_D, satisfaisant $F_D(0) = 0$ et $\mathbb{E}(D_1) < \infty$. Le processus $\mathcal{D}$ de la demande est alors donné par,

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} D_n, \quad D_0 = 0,$$

où $N = \{N(t), \quad t \geq 0\}$ est le processus d'arrivée des clients. Les inter-arrivées des clients forment un processus $\{T_n, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$. Notons que les moments d'arrivées des clients sont donnés par $\sigma_n = T_1 + ... + T_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\sigma_0 = 0)$ et le processus stochastique de comptage $\{N(t), \quad t \geq 0\}$ est donné par,

$$N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\sigma_n \leq t\}}.$$

Notons que les inter-arrivées $T_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et que leur fonction de répartition commune F_T satisfait $F_T(0) = 0$ et $\mathbb{E}(T_1) = \lambda^{-1} < \infty$. Supposons également, que les demandes individuelles des clients $D_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes du processus N d'arrivée et que la fonction de coûts f utilisée vérifie

$$\mathbb{E}(\int_0^T f(\mathcal{N}(s))ds) < \infty,$$

pour tout $T \geq 0$.

II.3.1 Le modèle (s,S) classique

Suivant cette politique, la position du stock est inspectée continûment dans le temps. Une commande est lancée si la position du stock, au moment d'arrivée d'un client, est inférieure ou égale au point de commande $s \leq S$. La taille de la commande est telle que la position du stock sera remise au niveau S (figure II.2). Les variables s et S sont des variables de décision qui doivent être choisies d'une manière optimale suivant la structure de la fonction de coûts considérée.

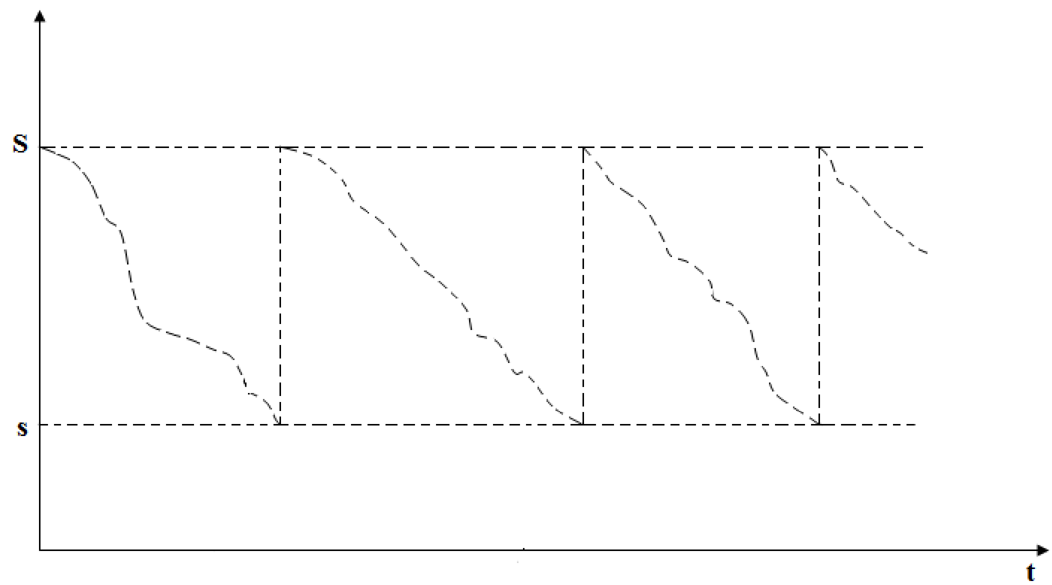

FIGURE II.2: Le modèle (s, S).

On veut montrer que le processus stochastique

$$X = \{(\mathcal{P}(t), \xi(t+L) - \xi(t)), t \geq 0\}$$

est un processus régénératif pur (voir Annexe), avec comme points de régénération la séquence $\sigma_n, n \in \mathbb{N}$, donnée par

$$\sigma_n = \sum_{t=1}^{n} T_t, \sigma_0 = 0,$$

et on doit donc déterminer une distribution initiale

$$F(d_1, d_2) = P(\mathcal{P}(0) < d_1, \xi(L) < d_2), \tag{II.3}$$

pour laquelle la relation

$$F(d_1, d_2) = P(\mathcal{P}(\sigma_n) < d_1, \xi(\sigma_n + L) - \xi(\sigma_n) < d_2), \tag{II.4}$$

soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le moment aléatoire σ_n dénote le moment d'arrivée du $n^{ème}$ client et $\xi(\sigma_n + L) - \xi(\sigma_n)$ représente la demande totale durant l'intervalle $[\sigma_n, \sigma_n + L]$. On obtient en vertu des hypothèses que la variable aléatoire $\xi(\sigma_n + L) - \xi(\sigma_n)$ est indépendante de $\{\xi(t), t \leq \sigma_n\}$ et de même distribution que $\xi(L)$. De plus, la variable aléatoire $\mathcal{P}(\sigma_n)$ est complètement déterminée par sa valeur initiale à $t = 0$ et par la réalisation du processus de la demande $\{\xi(t), t \leq \sigma_n\}$ et cela veut dire que $\xi(\sigma_n + L) - \xi(\sigma_n)$ est indépendante de $\mathcal{P}(\sigma_n)$. On peut écrire,

$$P(\mathcal{P}(\sigma_n) < d_1, \xi(\sigma_n + L) - \xi(\sigma_n) < d_2) = P(\mathcal{P}(\sigma_n) < d_1)P(\xi(L) < d_2), \tag{II.5}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et par suite, on cherche une distribution invariante du processus stochastique $\{\mathcal{P}(\sigma_n), n \in \mathbb{N}\}$. Pour ce faire, considérons le processus stochastique $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$, donné par

$$V_n = S - \mathcal{P}(\sigma_n)$$

Par définition de la règle de contrôle, on a

$$V_{n+1} = (V_n + D_{n+1})\mathbb{I}_{\{V_n + D_{n+1} < S - s\}}, \tag{II.6}$$

où D_{n+1} dénote la demande du $(n+1)^{ème}$ client. Par hypothèse, la variable aléatoire D_{n+1} est indépendante de V_n et comme les variables aléatoires $D_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes et identiquement distribuées, il s'en suit que V est une chaîne de Markov. Le théorème suivant donne la distribution invariante de la chaîne de Markon V.

Théorème II.2. *[30] La distribution invariante de la chaîne de Markov $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$, donnée par la relation (II.5) est de la forme*

$$F_{inv}(v) = \frac{1 + H(v)}{1 + H(S - s)}, 0 \leq v \leq S - s$$

où $H = \sum_{n=1}^{\infty} F_D^{n^*}$ est la fonction de renouvellement associée à la fonction de répartition F_D de la variable aléatoire D_1 .

On a ensuite le résultat suivant :

Théorème II.3. *[17, 9] Pour tout modèle (s, S) avec comme processus de demande un processus de renouvellement composé, et si les hypothèses $(II.1)$ et $(II.2)$ sont vérifiées, alors le processus stochastique*

$$X = (\mathcal{P}(t), \xi(t+L) - \xi(t), t \geq 0)$$

ayant la distribution initiale

$$P(\mathcal{P}(0) < d_1, D(L) < d_2) = P(S - V_{eq} < d_1)P(D(L) < d_2)$$

avec V_{eq} la variable aléatoire distribuée suivant la distribution

$$P(V_{eq} < v) = \frac{1 + H(v)}{1 + H(S-s)}, 0 \leq v \leq S - s$$

et V_{eq} indépendante du processus $\mathcal{D}$ de la demande, est un processus régénératif pur avec comme points de régénération la séquence $\sigma_n = \sum\limits_{t=1}^{n} T_t, n \in \mathbb{N}^*, \sigma_0 = 0$, contenant le sous ensemble de points de lancement des commandes.

En utilisant la relation $(II.2)$, on peut écrire

$$\mathcal{N}(t+L) = \mathcal{P}(t) - (\xi(t+L) - \xi(t)) \stackrel{d}{=} S - V_{eq} - \xi(t+L), P - p.s, \tag{II.7}$$

pour tout $0 \leq t < \sigma_1 = T_1$, où $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité en distribution .
Il est maintenant possible de déterminer le coût moyen associé à la politique (s, S). Posons

$$\xi_1(t) = \xi(t) + V_{eq}.$$

Théorème II.4. *[17, 9] Si le processus de demande est un processus de renouvellement composé, sous les conditions du théorème $(II.3)$, le coût moyen $\Phi(s, S)$ est donné par :*

$$\lambda K P(D_1 + \xi_1(0) \geq S - s) + \lambda \mathbb{E}\Big(\int\limits_0^{T_1} f(S - \xi_1(t+L))dt\Big).$$

Cette expression peut être simplifiée pour un processus de demande Poisson composé.

Théorème II.5. *[17, 9] Si le processus de demande est un processus de Poisson composé, sous les conditions du théorème $(II.3)$, le coût moyen $\Phi(s, S)$ de la politique (s, S) pour* *une fonction de coût f non négative et coût de commande $K > 0$, est donné par*

$$\lambda K P(D_1 + \xi_1(0) \geq S - s) + \mathbb{E}(f(S - \xi_1(L))).$$

Le nombre moyen de demandes mises en attente par unité de temps, le niveau moyen du stock physique par unité de temps et la P_3-mesure de service pour le modèle (s, S) sont données par :

Théorème II.6. *[17, 9] Si le Processus de demande est un processus de renouvellement composé, sous les conditions du théorème $(II.3)$, le nombre moyen $B_1(s, S)$ de demandes mises en attente par unité de temps est donné par*

$$B_1(s, S) = \lambda \mathbb{E}\Big(\int_0^{T_1} max\{\xi_1(t + L) - S, 0\}dt\Big).$$

Le niveau moyen $B_2(s, S)$ du stock physique est donné par

$$B_2(s, S) = \lambda \mathbb{E}\Big(\int_0^{T_1} max\{S - \xi_1(t + L), 0\}dt\Big).$$

La proportion du de temps $P_3(s, S) = \lambda \mathbb{E}\Big(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{S - \xi_1(t+L) > 0\}}dt\Big)$

Notons que d'autres expressions de coûts et de mesures de service peuvent être obtenues, comme celles données par le théorème (II.7).

Théorème II.7. *[17, 9] Si le processus de demande est un processus de renouvellement composé, sous les conditions du théorème $(II.3)$, le nombre de moyen $B_3(s, S)$ de rupture est donné par*

$$B_3(s, S) = \lambda(P(\xi_1(L) \leq S) - P(\xi_1(L) + D_1 \leq S)).$$

La mesure de non rupture $P_1(s, S)$ est donnée par

$$P_1(s, S) = 1 - P(\xi(L) + V_{eq} \leq S) + P(\xi(L) + D_1 + V_{eq} \leq S).$$

Le nombre moyen $B_4(s, S)$ d'unités en rupture est donné par

$$B_4(s, S) = \lambda(\mathbb{E}(\xi_1) + \mathbb{E}(max(S - \xi_1(L) - D_1, 0)) - \mathbb{E}(max(S - \xi_1(L), 0)).$$

Le taux de remplissage du stock $P_2(s,S)$ (P_2-mesure de service) est donné par

$$P_2(s,S) = \frac{\mathbb{E}(max(S-\xi_1(L),0)) - \mathbb{E}(max(S-\xi_1(L)-D_1,0))}{\mathbb{E}(D_1)}$$

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un bref aperçu sur les modèles stochastiques de la gestion des stocks, en détaillant le modèle (s,S). Dans ce qui suit, nous parlerons de l'approche du développement en série et son application au modèle considéré, afin de prévoir la valeur approchée de ses caractéristiques en cas de déviation de certains paramètres, à savoir par exemple celui lié au processus de la demande.

Chapitre III

Méthodes d'analyse dans les modèles stochastiques

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes méthodes de résolution des problèmes de gestion des stocks, puis nous résumons le résultat d'application de la méthode du développement en série pour les chaînes de Markov à espace d'état fini.

III.1 Les méthodes de résolution

Il en existe plusieurs, selon qu'elles soient exactes, itératives, ou encore approchées.

III.1.1 Les méthodes exactes

Elles fournissent la solution exacte après un nombre fini d'opérations arithmétiques. L'idée de ces méthodes est de transformer le système en un système ayant la même solution mais plus facile à résoudre (la méthode de Gauss-Jordan)[12].

III.1.2 Les méthodes itératives

Ces méthodes consistent à déterminer successivement les termes d'une suite de solutions approchées du problème considéré. Lorsque l'application de l'une de ces méthodes est justifiée, la suite ainsi formée converge vers la solution exacte du problème. Le premier terme de la suite est choisi d'une manière arbitraire, puis chacun des termes suivants est calculé à partir du terme précédent. Ces méthodes ont un large champs d'application, dans le domaine des files d'attente, les méthodes de Gauss Seidel et Gradient conjugué ont été déjà appliquées au modèle markovien avec arrivées par groupe dans [12], F. Aoudia a appliqué pour la première fois la méthode de Gradient Double Conjugué pour un système complexe à source finie et à vacance de serveur [5].

III.1.3 Les méthodes approximatives

- **Méthode des fonctions tests élaborée par V. V. Kalashnikov :** Elle consiste à construire une fonction test, permettant de comparer le comportement des modèles (idéal et réel). Ceci nous conduit à estimer exactement les caractéristiques du système réel. La difficulté majeure de cette méthode réside dans le choix de la fonction test. Les premiers travaux concernant cette méthode ont été réalisés par Kalashnikov et Tsitsiashvili [25].
- **Méthode métrique (V. M Zolotarev) :** Cette méthode, basée sur la théorie des métriques de probabilité, considère le problème de stabilité comme un des problèmes de continuité. Les résultats obtenus par cette méthode ont été synthétisés par S. T. Rachev [31].
- **Méthode de convergence faible introduite par D. Stoyan :** elle est basée sur des outils de la théorie de la convergence faible. Cette méthode [37] s'applique surtout aux processus markoviens homogènes.
- **Méthode de renouvellement proposée par A. A.Borovkov [10] :** Il s'agit d'une approche permettant de prouver les théorèmes de stabilité et d'ergodicité des processus aléatoire décrivant le comportement d'une classe de modèles stochastiques, elle est basée sur la théorie d'événement de renouvellement qui apparaissent lors de la description de ces modèles.
- **Méthode de stabilité forte :** élaborée au début des années 80 par D. Aïssani et N. V. Kartashov [4]. Les auteurs ont notamment étudié la propriété de stabilité de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov récurrente au sens de Harris dans des espaces de phase quelconques.Elle a été aussi appliquée aux modèles stochastiques de la gestion des stocks, à titre d'exemple, l'étude faite par B. Rabta [30], où il a appliqué la théorie de stabilité forte à l'étude de la sensibilité des modèles de gestion des stocks, un intérêt particulier a été donné aux modèles de type (s, S) (à revue continue). Il a aussi montré la v-stabilité forte du modèle (R, s, S) (à revue périodique), il a obtenu aussi des estimations de la déviation de la distribution stationnaire du stock en main par rapport la perturbation de la loi de la demande et le niveau de commande.
- **Méthode de stabilité absolue :** Cette méthode consiste à utiliser les techniques d'algèbre linéaire et de calcul matriciel pour l'obtention des bornes sur la norme $\| \, . \, \|_1$ du vecteur stationnaire d'une chaîne de Markov discrète, irréductible et finie.

Les premiers résultats dans ce cadre ont été obtenu par Schweitzer en 1968 [36] puis par Meyer en 1980 [29].
I. C. F. Ipsen et C. D. Meyer en 1994 [24] ont obtenu des bornes pour l'erreur relative des probabilités stationnaires et ont montré que les éléments du vecteur stationnaire réagissent d'une manière **uniforme** à la perturbation de la matrice de transition. Cette méthode a été appliquée par B. Rabta aux modèles stochastiques de gestion des stocks, en particulier le modèle (R,s,S) [30], puis il a fait une comparaison avec les résultats de la méthode de stabilité forte.

– **Méthode du développement en série proposée par B. Heidergott et A. Hordijk :** C'est une méthode assez récente, elle nous permet d'écrire, sous certaines conditions, la distribution stationnaire du système perturbé sous forme d'une série, qui dépend de la distribution stationnaire du système idéal, et d'une série qui dépend de la perturbation de la matrice de transition du système idéal et de la matrice de déviation du même système. Différents résultats ont été élaborés dans ce contexte [2, 3, 21, 22, 20, 5].

Dans ce mémoire, nous tentons d'appliquer la méthode du développement en série pour le modèle stochastique de gestion des stocks (s, S).

III.2 Le Développement en série de Taylor

Cette méthode est applicable à tout les systèmes qui peuvent être décrit par une chaîne de Markov irréductible, apériodique et à espace d'états fini. L'étude du développement en série de Taylor dans l'évaluation des performances des réseaux stochastiques a été introduite pour la première fois par M. Zazanis [39] et par W.B. Gong et J.Q. Hu [18]. Puis sont apparus les travaux de F. Baccelli et S. Hasenfuss [8] et H. Ayhan et F. Baccelli [7] qui ont étudié le développement en série pour les réseaux stochastiques linéaires (max, +). Le développement en série de Taylor pour la distribution stationnaire des chaînes de Markov à espace d'état fini a été élaboré par X-R. Cao [11]. Cependant, c'est B. Heidergott et A. Hordijk [20] qui ont ensuite appliqué le développement en série de Taylor pour les chaînes de Markov à espace d'états général. Récemment, les mêmes auteurs ont étudié le développement en série pour les chaînes de Markov à espace d'états fini [22], puis pour les processus de Markov à espace d'états dénombrable [21]. Ils ont également élaboré un algorithme pour le calcul numérique de la distribution stationnaire. En 2011 K, Abbas, B. Heidergott et D. Aissani [2, 1]ont présenté une nouvelle approche pour l'analyse des perturbations des systèmes de files d'attente. Ils ont développé les performances du système considéré à l'étude d'une série de Taylor par rapport à un paramètre d'intérêt, où ils ont fait usage d'un résultat fondamental sur une série pour les chaînes de Markov [20]. L'utilité de cette nouvelle approche repose sur deux facteurs :

1. Convergence rapide de la série (un polynôme de Taylor d'ordre faible donne déjà une bonne approximation).
2. La capacité de calcul du terme du reste de la série de Taylor d'une manière efficace de telle sorte que l'ordre du polynôme de Taylor suffisant pour atteindre la précision désirée de l'approximation peut être décidé a priori.

Dans ce chapitre, nous résumons le résultat d'application de cette nouvelle approche pour les chaînes de Markov à espace d'état fini.

III.2.1 Préliminaires et notations

Considérons une chaîne de Markov X irréductible, apériodique à espace d'état fini ($E = \{0, 1, ..., N\}$). Soit $P = (p_{i,j})_{i,j \in E}$ sa matrice de transition associée, et π_P sa distribution stationnaire unique. Notons par $P^{(l)}$ la dérivée d'ordre l de P. La matrice $P^n = (p^n_{i,j})_{i,j \in S}$, représente la n^{eme} puissance de la matrice de transition P.

Supposons que la matrice de transition P soit perturbée en $Q = P + \Delta$, de sorte que Q soit la matrice de transition résultante d'une autre chaîne de Markov X' ayant une distribution stationnaire π_Q.

III.2.2 La matrice de déviation

Définition III.1. *[22] On appelle matrice de déviation de la chaîne X ayant l'opérateur de transition P, la matrice :*

$$D_P = \sum_{n=0}^{\infty}(P^n - \Pi_P),$$

lorsqu'elle existe.

Où Π_P est une matrice carrée de lignes égales à π_P^T.

L'étude des propriétés et des conditions d'existence de cette matrice a fait l'objet de plusieurs travaux (voir par exemple [26, 13]).

D'après Heidergott et al [21], la matrice de déviation D_P existe pour toute chaîne de Markov à espace d'état fini et apériodique.

Théorème III.1. *[20] Soit $\lambda \in \Theta$ et soit $\Theta_0 \subset \Theta$ un intervalle fermé contenant λ. A condition que les paramètres de P soient n fois dérivables par rapport à λ, il s'avère que :*

$$\pi_P^{(n)} = \pi_P K_P(n)$$

. Avec :

$$K_\lambda(n) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq h_l \leq n \\ h_1 + h_2 + \cdots + h_m = n}} \frac{n!}{h_1! h_2! \ldots h_m!} \prod_{l=1}^{m} (P^{(h_l)} D_P).$$

III.2.3 La représentation en série de π_Q

La distribution stationnaire π_Q peut s'écrire sous forme d'une série de Taylor comme suit :

$$\pi_Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \pi_P^{(n)}.$$

Où $\pi_P^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de π_P.

En se basant sur l'equation ci-dessus, nous présentons la notation suivante :
Soit $l \geq 0$, alors

$$H(l, \Delta) = \sum_{n=0}^{l} \frac{\Delta^n}{n!} \pi_P^{(n)},$$

est dite une approximation en série de degrés l pour π_Q. Soit $R(l, \Delta)$, avec

$$R(l, \Delta) = \pi_Q - H(l, \Delta),$$

appelé le reste d'ordre l de la série.

Un polynôme de Taylor donne une approximation, et l'erreur induite par cette approximation peut être exprimée par la forme du reste de Lagrange comme suit :

$$R(l, \Delta) = \int_0^{\Delta} \frac{x^l}{l!} \pi_Q^{l+1} dx. \tag{III.1}$$

D'un point de vue numérique, l'expression $(III.1)$, est plutôt inutile comme le montre le théorème (III.1), il s'avère que :

$$\pi_Q^{(l+1)} = \pi_Q K_Q(l+1)$$

Ce qui implique que pour calculer le reste de l'approximation, nous devons connaître la valeur exacte de la quantité que nous voulons approximer.
Pour palier à ce problème, nous proposons une forme alternative du reste.

L'idée principale est d'utiliser le développement de Taylor pour approximer $\pi_Q^{(l+1)}$ et le remplacer dans $(III.1)$ de la manière suivante :
Soit :

$$G_P(l,m,\delta) = \sum_{n=0}^{m} \frac{\delta^n}{n!} \pi_P^{l+1+n},$$

le polynôme de Taylor d'ordre m de π_P^{l+1} ; i.e ;

$$\pi_Q^{l+1} \approx G_P(l,m,\delta),$$

Pour m suffisamment grand, on aura (en remplaçant l'expression ci-dessus dans l'équation $(III.1)$)

$$R_P(l,\Delta) \approx \int_0^{\Delta} \frac{x^l}{l!} G_\lambda(l,m,x)dx$$

$$= \int_0^{\Delta} \frac{x^l}{l!} \sum_{n=0}^{m} \frac{\delta^n}{n!} \pi_P^{l+1+n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{l!n!} \pi_P^{(l+1+n)} \int_0^{\Delta} x^{l+n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{\Delta^{l+1+n}}{l!n!(l+1+n)} \pi_P^{(l+1+n)}.$$

Notons par :

$$g_P(l,m,\Delta) = \sum_{n=0}^{m} \frac{\Delta^{l+1+n}}{l!n!(l+1+n)} \pi_P^{(l+1+n)}. \tag{III.2}$$

l'expression de l'approximation du reste.

Pour :$|g_P(l,m,\Delta) - R_P(l,\Delta)|$ petit pour m petit, nous utiliserons $g_P(l,m,\Delta)$ dans notre approche (série de Taylor) pour déterminer l'ordre du polynôme suffisant pour atteindre la précision de l'approximation désirée.

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait une synthèse sur l'application de la méthode du développement en série aux chaînes de Markov à espace d'états fini. Le prochain chapitre sera consacré pour l'application de cette méthode au modèle de stock de type (s,S).

Chapitre IV

Développement en série du modèle stochastique (s, S)

Dans ce chapitre nous allons appliquer la méthode du développement en série de Taylor au modèle à revue continue de gestion des stocks (s, S).

IV.1 Modélisation

Considérons le modèle (s, S) avec une demande suivant une loi de poisson composée. Les clients arrivent suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Le nombre de clients arrivant durant une période T est alors une variable poissonnienne $N(T)$.
Le $n^{\grave{e}me}$ client demande une quantité aléatoire D_n. Supposons que les D_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi commune :

$$\begin{aligned} d_k &= P(D_i = k) \quad k = 1, 2, ... \\ &= \tfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

La demande totale durant une période de longueur T est alors :

$$\xi(T) = \sum_{i=1}^{N(T)} D_i.$$

Notons par σ_n, l'instant d'arrivée du $n^{\grave{e}me}$ client.
Si après avoir servi le client, le niveau du stock est inférieur ou égal à s, une commande est lancée de manière à ramener le stock au niveau S, en satisfaisant la demande du client. Supposons que le délai de livraison est nul.

Notons par X_n et $\mathcal{P}_n$ respectivement le niveau net et la position du stock juste après le départ du $n^{ème}$ client (et éventuellement, le lancement d'une commande).
La position du stock $\mathcal{P}_{n+1}$ après le départ du client $(n+1)$ est donnée par :

$$\mathcal{P}_{n+1} = \begin{cases} S & \text{si } \mathcal{P}_n - D_{n+1} \leq s, \\ \\ \mathcal{P}_n - D_{n+1} & \text{si } \mathcal{P}_n - D_{n+1} > s. \end{cases}$$

La variable aléatoire $\mathcal{P}_{n+1}$ dépend uniquement de $\mathcal{P}_n$ et D_{n+1}, où D_{n+1} est indépendante de n et de l'état du système. Les inter-arrivées sont exponentielles. Alors, $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{s+1, ..., S\}$.

Probabilités de transition :
Supposons qu'à la date σ_n, $\mathcal{P}_n = i$. Nous avons alors :

$$P_{ij} = P(\mathcal{P}_{n+1} = j / \mathcal{P}_n = i) = \begin{cases} \sum\limits_{k=i-s}^{\infty} d_k & \text{si } j = S, s < i \leq S, \\ \\ d_{i-j} & \text{si } s < j < i < S, \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice de transition de la chaîne $(\mathcal{P}_n)$ est alors donnée par :

	$s+1$	$s+2$	...	$S-1$	S
$s+1$	0	0	...	0	1
$s+2$	d_1	0	...	0	$\sum\limits_{k=2}^{\infty} d_k$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$S-1$	d_{S-s-2}	d_{S-s-3}	...	0	$\sum\limits_{k=S-s-1}^{\infty} d_k$
S	d_{S-s-1}	d_{S-s-2}	...	d_1	$\sum\limits_{k=S-s}^{\infty} d_k$

Probabilités stationnaires :

La chaîne de Markov $(\mathcal{P}_n)$ est irréductible et apériodique. Elle admet une distribution stationnaire unique π donnée par la solution du système :

$$\begin{cases} \pi.P = \pi \\ \\ \sum\limits_{i=s+1}^{S} \pi_i = 1. \end{cases}$$

De plus, cette distribution stationnaire est indépendante de l'état initial.

Comme le modèle (s, S) peut être décrit par une chaîne de Markov irréductible, apériodique et à espace d'états fini $E = \{s+1, ..., S\}$, donc, on peut lui appliquer le méthode du développement en série de Taylor, comme prévu.

IV.2 Application analytique

Nous allons maintenant effectuer une perturbation au niveau de la loi de la demande, cette perturbation concernera le paramètre de la loi de la demande noté λ.
Cette perturbation "Δ" nous donnera une nouvelle chaîne de Markov $(\mathcal{P'}_n)$, de matrice de transition Q et de distribution stationnaire $\pi_Q = \pi_{\lambda+\Delta}$.

Nous cherchons à approximer π_Q par un polynôme en Δ. Pour cela, nous ferons appel à l'approche du développement en série de Taylor. Ce développement s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi_{\lambda+\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \pi_\lambda^{(n)}.$$

Où $\pi_\lambda^{(n)}$ correspond à la $n^{ème}$ dérivée de π_λ par rapport à λ.
Soit :

$$H_\lambda(l, \Delta) = \sum_{n=0}^{l} \frac{\Delta^n}{n!} \pi_\lambda^{(n)}$$

le $l^{ème}$ ordre de l'approximation de Taylor de $\pi_{\lambda+\Delta}$ en λ, et soit :

$$R_\lambda(l, \Delta) = \pi_{\lambda+\Delta} - H_\lambda(l, \Delta)$$

le reste d'ordre l du polynôme.
Pour $s + 1 \leq k \leq S$, d_k est n fois dérivable par rapport à λ. Donc, les "n" premières dérivées de P existent.
Soit $P^{(l)}$, la dérivée d'ordre l de P par rapport à λ, on aura donc :

$$P^{(l)}(i, j) = \frac{d^{(l)}}{d\lambda^{(l)}} P(i, j), \quad s + 1 \leq i, j \leq S$$

Ou, plus spécifiquement, la matrice $P^{(l)}(i,j)$ s'écrit :

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & s+1 & s+2 & \ldots & S-1 & S \\
\hline
s+1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
s+2 & d_1(l) & 0 & \ldots & 0 & \sum\limits_{k=2}^{\infty} d_k(l) \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
S-1 & d_{S-s-2}(l) & d_{S-s-3}(l) & \ldots & 0 & \sum\limits_{k=S-s-1}^{\infty} d_k(l) \\
S & d_{S-s-1}(l) & d_{S-s-2}(l) & \ldots & d_1(l) & \sum\limits_{k=S-s}^{\infty} d_k(l)
\end{array}
$$

Où : $d_k(l) = \frac{d^l}{d\lambda^l} d_k, \quad s+1 \leq k \leq S.$

On pose D_λ, la matrice de déviation définie par :

$$D_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (P_\lambda^n - \Pi_\lambda),$$

Où Π_λ est une matrice carrée dont ses lignes sont égales à π_λ^T. Soit

$$R_\lambda(l, \Delta) = \int_0^\Delta \frac{x^l}{l!} \pi_{\lambda+x}^{l+1} dx, \tag{IV.1}$$

le reste de Lagrange. Comme c'est déjà indiqué dans le troisième chapitre, pour atteindre la précision de l'approximation désirée, nous utiliserons la formule suivante

$$g_P(l, m, \Delta) = \sum_{n=0}^{m} \frac{\Delta^{l+1+n}}{l!n!(l+1+n)} \pi_P^{(l+1+n)}.$$

IV.3 Application numérique

Nous allons maintenant illustrer l'application de la méthode du développement en série sur un exemple numérique. Considérons le système de gestion des stocks de type (s,S) avec une demande suivant une loi de Poisson. Nous allons effectuer plusieurs perturbation au niveau du paramètre de la loi de la demande (λ en $\lambda' = \lambda + \Delta$), pour étudier la sensibilité de notre modèle. Pour les paramètres du modèle, nous prenons les valeurs suivantes :

```
******************************** Les inputs ********************************

introduire le niveau minimal du stock:
s=3
introduire le niveau maximal du stock:
S=6
introduire le taux:
lambda=5
```

A l'aide d'un programme réalisé avec MATLAB, nous allons calculer la distribution stationnaire du système perturbé en passant par les étapes suivantes :
1. Détermination de la matrices de transition, la matrice de déviation et le projecteur stationnaire :

• La matrice de transition de la chaîne $(\mathcal{P}_n)$ est donnée par :

```
************************ La matrice de transition ************************

P =

         0         0    1.0000
    0.0337         0    0.9663
    0.0842    0.0337    0.8821
```

• La distribution stationnaire de la chaîne $(\mathcal{P}_n)$ est donnée par :

```
**********************la distribution stationnaire ***********************

pi =

    0.0763    0.0301    0.8936
```

• Le projecteur stationnaire de la chaîne $(\mathcal{P}_n)$ est donné par :

```
____________________________________________________________________________
**************************** Le projecteur  *****************************
____________________________________________________________________________

pro =

    0.0763    0.0301    0.8936
    0.0763    0.0301    0.8936
    0.0763    0.0301    0.8936
```

- La matrice de déviation du système (s, S) est donnée par :

```
____________________________________________________________________________
************************ La matrice de déviation ************************
____________________________________________________________________________

devi =

    0.8546   -0.0570   -0.7976
   -0.1143    0.9420   -0.8277
   -0.0691   -0.0269    0.0960
```

2. Détermination de la distribution stationnaire du système perturbé $\pi_{\lambda+\Delta}$ (piprime) :
Nous avons fixé la perturbation à $\Delta = 0.01$ et $\epsilon = 0.01$, et nous avons obtenu :

```
____________________________________________________________________________
************************** La precision désirée *************************
____________________________________________________________________________
epsilon=0.01
____________________________________________________________________________
*************************** La perturbations ****************************
____________________________________________________________________________
delta=0.01
* piprime=*

piprime =

    0.0753    0.0298    0.8949
```

3. L'erreur sur la distribution stationnaire $\| \pi_\lambda - \pi_{\lambda+\Delta} \|$ telle que
$\| \pi_\lambda - \pi_{\lambda+\Delta} \| = \sum_{i=s+1}^{S} | \pi_{i_\lambda} - \pi_{i_{\lambda+\Delta}} |$ est donnée par :

```
**************La norme de la différence entre pi et piprime**************

ca =

    0.0026
```

Et le reste de l'approximation vaut :

```
**********************Le reste de l'approximation**********************

reste =

  3.9991e-005
```

4. Maintenant nous varions la perturbation Δ. Le reste de l'approximation pour chaque perturbation est donnée par le tableau suivant :

La perturbation(Δ)	Le reste de l'approximation($R(l, \Delta)$)
0.01	$3.9991 * 10^{-5}$
0.02	$1.6248 * 10^{-4}$
0.03	$3.7124 * 10^{-4}$
0.04	$6.7005 * 10^{-4}$
0.05	0.0011
0.06	0.0016
0.07	0.0021
0.08	0.0028
0.09	0.0036
0.1	0.0046

TABLE IV.1: La variation du reste de l'approximation en fonction de la perturbation.

• Les résultats du calcul du reste de l'approximation en faisant varier la perturbation sont présentés graphiquement par la figure suivante :

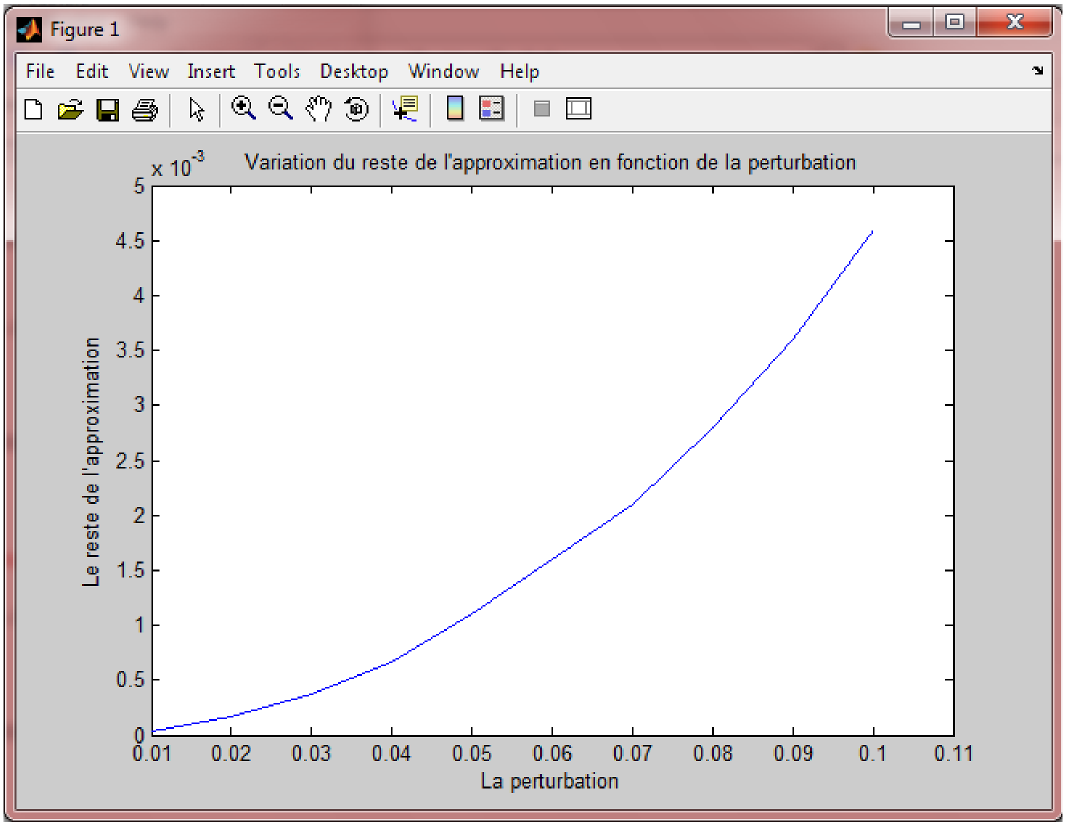

FIGURE IV.1: Valeurs du reste de l'approximation en fonction de la perturbation.

Nous remarquons que la valeur du reste du développement augmente lorsque la valeur de la perturbation augmente.

5. Maintenant, nous analysons la variation du reste, mais cette fois-ci, en fonction de l'ordre de l'approximation. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

• Les résultats du calcul du reste de l'approximation en faisant varier l'ordre du développement pour une perturbation donnée sont présentés graphiquement par la figure suivante :

Δ	L'ordre l	Le reste $R(l, \Delta)$
0.05	1	0.0011
	2	$4.198 * 10^{-5}$
	3	$9.47 * 10^{-7}$
	4	$1.499 * 10^{-8}$
	5	$1.8197 * 10^{-10}$
0.1	1	0.0046
	2	$3.57 * 10^{-4}$
	3	$1.606 * 10^{-5}$
	4	$5.07 * 10^{-7}$
	5	$1.23 * 10^{-8}$
0.15	1	0.011
	2	0.0013
	3	$8.588 * 10^{-5}$
	4	$4.059 * 10^{-6}$
	5	$1.47 * 10^{-7}$

TABLE IV.2: Le reste de l'approximation en fonction de l'ordre de l'approximation.

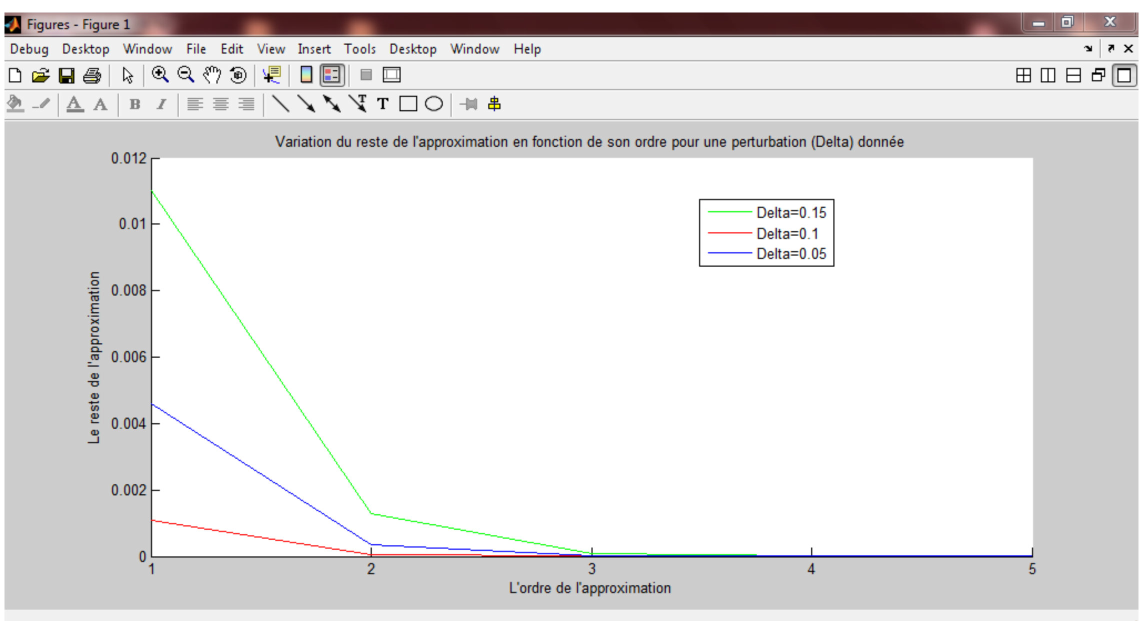

FIGURE IV.2: Le reste de l'approximation en fonction de l'ordre de l'approximation.

Cette figure montre que la valeur du reste diminue, et tend vers 0 lorsque l'ordre de l'approximation augmente. Nous remarquons aussi qu'un petit ordre suffit pour avoir une bonne approximation.

On peut aussi déduire à partir de cette figure que la valeur du reste est une fonction croissante de la perturbation.

La connaissance du vecteur des probabilités stationnaires d'une chaîne de Markov gouvernant un certain modèle stochastique est nécessaire pour retrouver les caractéristiques de ce dernier.

Dans le cadre de ce travail, après avoir déterminé la valeur de la distribution stationnaire de la chaîne représentant la position du stock dans un modèle (s, S), nous nous intéressons à la valeur du stock moyen. Ainsi, en se servant du développement de Taylor déjà retrouvé, on aura donc la valeur de cette caractéristique avant et après perturbation. En effet, sachant que la valeur du stock moyen se calcule à partir de la formule suivante :

$$\bar{X} = \sum_{i=s+1}^{S} i * \pi_i,$$

nous avons retrouvés les valeurs du stock moyen avant et après perturbation, et elles sont donnée par :

```
______________________________________________________________________________
*********************Le stock moyen du système idéal*********************
______________________________________________________________________________

smi =

    5.8173

______________________________________________________________________________
********************Le stock moyen du système perturbé********************
______________________________________________________________________________

smp =

    5.8196
```

L'erreur sur le stock moyen est donnée par :

```
________________________________________________________________________
**********************L'erreur sur le stock moyen***********************
________________________________________________________________________

ans =

    0.0023
```

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons prouvé l'applicabilité de la méthode du développement en série de Taylor au modèle (s, S), puis nous l'avons appliqué à ce même modèle. A l'aide d'un programme écrit sous MATLAB, nous avons illustré cette application par un exemple numérique qui nous a permis d'obtenir les résultats recherchés.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons appliqué pour la première fois la méthode du développement en série de Taylor pour les modèles de gestion des stocks, plus particulièrement au modèle de type (s, S).

Dans un premier temps, nous avons prouvé l'applicabilité de cette méthode au modèle à revue continue (s, S).

Dans un deuxième temps, nous avons illustré l'application de l'approche du développement en série de Taylor au modèle considéré par un exemple numérique, où nous avons calculé la distribution stationnaire du système perturbé, puis nous avons estimé l'erreur entre la distribution obtenue (du système perturbé) et la distribution stationnaire du système idéal, ainsi que le reste de l'approximation. Nous avons constaté que l'erreur calculée est petite pour un ordre d'approximation petit, et que le reste de l'approximation diminue lorsque l'ordre du développement augmente. De plus, nous avons constaté que la valeur du reste est une fonction croissante de la perturbation. La détermination du vecteur stationnaire nous a permis de calculer la valeur du stock moyen.

La méthode du développement en série est une méthode assez récente et il serait intéressant d'effectuer une étude comparative entre cette méthode et la méthode de stabilité forte faite par B.Rabta [30], s'il aurait illustré son application par un exemple numérique, ou encore, refaire la même étude que nous avons fait mais avec un délai de livraison non nul. De plus, il est intéressant de prendre en considération la liaison entre la gestion des stocks et la production.

Annexe

Cette annexe est organisé de la manière suivante : Dans la première section, on commence par donner la définition d'un processus cadlag. Dans la deuxième section, on donnera quelques définitions concernant les processus régénératifs.

Notation

Définition IV.1. *Un processus X, défini sur l'espace fondamental $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui admet T comme ensemble associé au temps et E comme espace d'états (on suppose que E est muni d'une topologie. S'il est fini, on le muni de la topologie discrète), est dit cadlag si, pour tout ω de Ω, l'application (la trajectoire) $t \rightarrow X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point t de T. Si E est fini, cela signifie que chaque trajectoire de X est continue à droite et "fixe par morceaux".*

Les processus régénératifs :

La théorie des processus régénératifs joue un rôle important dans l'analyse des modèles de gestion des stocks mono-article [9]. Pour notre cas, il est suffisant de considérer seulement les processus régénératifs purs (non retardés).

On introduit d'abord la définition d'une version simplifiée des processus régénératifs purs qu'on appellera *processus régénératifs purs simplifiés* [4]. Soit T l'axe du temps dénotant soit $[0, \infty)$ (cas continu) ou $\mathbb{N}$ (cas discret).

Définition IV.2. *Un processus stochastique $X = \{X(t), t \in T\}$ dans un espace métrique $\mathcal{E}$ est dit processus régénératif pur simplifié s'il existe une certaine constante positive finie $\sigma \in T$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution du processus stochastique décalé $X_{n\sigma} = \{X(t + n\sigma), t \in T\}$ est indépendant de n.*

Notons que les points $n\sigma$, $n \in N^*$, sont appelés points de régénération du processus régénératif pur simplifié X.

Définition IV.3. *Un processus stochastique $X = \{X(t), t \in T\}$ dans un espace métrique $\mathcal{E}$ est dit processus régénératif pur s'il existe dans T une séquence croissante $\{\sigma_n, n \in \mathbb{N}\}$, avec $\sigma_0 = 0$, de points aléatoires satisfaisant*

- *Les variables aléatoires $\sigma_{n+1} - \sigma$, $n \in \mathcal{N}$, sont indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition commune F_σ, continue à droite et vérifiant $F_\sigma(0) = 0$ et $F_\sigma(\infty) = 1$.*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le processus stochastique $X_{\sigma_n} = \{X(t+\sigma_n), t \in T\}$ est indépendant des variables aléatoires $\sigma_n, \in \mathbb{N}$.*

- *La distribution du processus X_{σ_n} est indépendante de n.*

Dans le cas où les différences $\sigma_{n+1} - \sigma_n$ sont données par $\sigma = \sigma_{n+1} - \sigma_n$ avec probabilité 1, on retrouve la définition (V.2). Une conséquence importante de la définition d'un processus régénératif pur est donnée le résultat suivant

Théorème IV.1. *[9] Si le processus stochastique $X = \{x(t), t \in T\}$ est un processus régénératif pur dans un espace métrique $\mathcal{E}$ et avec une séquence croissante de points de régénération $\{\sigma_n, n \in N\}$ et si la fonction $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction Borélienne mesurable, alors le processus stochastique $\Phi o X = \{\Phi(X(t)), t \in T\}$ est un processus régénératif pur, avec la même séquence de points de régénération. De plus, si $T = [0, \infty)$ et la fonction Φ est continue, alors le processus stochastique $\Phi o X$ est cadlag si X est cadlag.*

Pour introduire une structure de coûts sur un processus régénératif, on considère une fonction borélienne mesurable non-négative $f : E \to \mathbb{R}$, appelée fonction de coût. En utilisant cette fonction et en dénotant par $C = \{C(t) : t \in T\}$ avec $T = [0, \infty)$, le processus stochastique de coûts est donné par :

$$C(t) = \int_0^t f(X(s))ds$$

Lorsque $T = \mathbb{N}$, il est donné par :

$$C(t) = \sum_{n=0}^t f(X(n)).$$

On suppose que ce processus C est bien défini et que $\mathbb{E}(C(t)) < \infty$ pour tout $t \in T$.

Théorème IV.2. *[30] Si le processus $X = \{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ est un processus régénératif pur avec comme point de régénération la séquence croissante $\sigma_n, n \in \mathbb{N}$ de points aléatoires satisfaisant $\mathbb{E}\sigma_1 < \infty$ et si f est la fonction borélienne mesurable vérifiant*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^{\sigma_1} f(X(s))ds\Big) < \infty$$

alors

$$\lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t}\mathbb{E}((t)) = \tfrac{1}{\mathbb{E}\sigma_1}\Big(\int_0^{\sigma_1} f(X(s))ds\Big).$$

Cette dernière limite est appelée coût moyen par rapport à la fonction de coût f.

Bibliographie

[1] K. Abbas, B. Heidergott, and D. Aïssani. A taylor series expansion approach to the functional approximation of finite queues. *Research Memorandum*, 49, 2011.

[2] K. Abbas, B. Heidergott, and D. Aïssani. A functionnal approximation for the M/G/1/N queue. *Discrete Event Dynamic Systems*, 23(1) :93–104, April 2013.

[3] D Aissani. Ergodicité uniforme et stabilité forte des chaines de markov. application aux systemes de files d'attente. *Séminaire Mathématique de Rouen*, 167 :115–121, 1990.

[4] D. Aissani and NV. Kartashov. Ergodicity and stability of markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. In *Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSR, ser. A*, volume 11, pages 3–5, 1983.

[5] F. Aoudia. *Développement en série et stabilité forte dans les systèmes d'Attente avec vacances du serveur.* PhD thesis, Université A Mira BEJAIA, 2008.

[6] T. Arrow, K.J. Harris and J. Marschak. Optimal inventory policy. *Econometrica*, 19 :250–272, 1951.

[7] H. Ayhan and F. Baccelli. Expansion for joint Laplace transforms of stationary waiting times in $(max, +)$-linear systems with poisson input. *Queueing Systems*, 37 :291–328, 2001.

[8] S. Baccelli, F. Hasenfuss and V. Schmidt. Expansion for steady-state characteristics of $(max, +)$-linear systems. *Statistc and Stochastic Models*, 14 :1–24, 1998.

[9] J. Bazsa, E. Frenk and P.D. Iseger. Inventory control and regenerative processes : Theory. Technical report, Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands, 1999.

[10] A. Borovkov. *Processus probabilistes de la théorie des files d'attente*. 1972.

[11] Xi-Ren Cao. The Maclaurin series for performance functions of Markov chains. *Advances in Applied Probability*, 30(3) :676–692, 1998.

[12] Wai K. Ching. *Iterative methods for queuing and manufacturing systems*. Springer Verlag, 2001.

[13] P. Coolen-Schrijner and Erik A. Van Doorn. The deviation matrix of a continous-time markov chains. *Probability in the engeineering and informational sciences*, 16(3) :351–366, 2002.

[14] C. Courtois, A. Martin-Bonnefous and M. Pillet. *Gestion de production*. Les Éditions d'organisation, 2003.

[15] J.F. Dhénin and B. Fourier. *50 thèmes d'initiation à l'économie d'entreprise*. Bréal edition, 1999.

[16] B. Foudad and S. Nait Alitouche. Gestion de stocks et matières premières, modélisation, simulation et application d'une méthode multicritère d'aide à la décision cas Dannone Djurdjura Algérie. Memoire d'ingeniorat en recherche operationnelle, Universite de Bejaïa, 2005.

[17] J. Frenk. Inventory control. Course notes, Department of Economics, Economics Institute, Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands, 2002.

[18] Wei-Bo. Gong and HU. The maclaurin series for the GI/G/1 queue. *Journal of Applied Probability*, pages 176–184, 1992.

[19] A. Haddad and A. Yaiche. Modelisation de la gestion des stocks au niveau de l'alfaditex Remila. Memoire d'ingeniorat en recherche operationnelle, Universite de Bejaïa, 1998.

[20] B. Heidergott and A. Hordijk. Taylor series expansions for stationnary markov chains. *Advance in Applied Probability*, 35 :1046–1070, 2003.

[21] B. Heidergott, A. Hordijk, and M. N Leder. Series expansions for continous-time markov processes. Technical report, Vrije Universiteit, Department of Economics, Amsterdam, 2007.

[22] B. Heidergott, A. Hordijk, and M. Van Uitert. Series expansions for finite-state markov chains. Technical report, Vrije Universiteit, Department of Economics, De Boelelaan 1105, 1081 HV, Amsterdam, May 2006.

[23] Donald L. Iglehart. Optimality of (s, S) policies in the infinite horizon dynamic inventory problem. *Management science*, 9(2) :259–267, 1963.

[24] I. CF. Ipsen and C. D. Meyer. Uniform stability of markov chains. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 15(4) :1061–1074, 1994.

[25] V.V. Kalashnikov and G. Sh. Tsitsiashvili. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. *Queueing theory and reliability*, pages 211–217, 1971.

[26] J. Kemeny, J. Snell and A. Knopp. Denumebrable markov chains. *Van Nostrand, New York*, 1966.

[27] S. Kherbouche, N. *and* Guehtouz. *Gestion de stocks de la pharmacie centrale du secteur sanitaire de Béjaïa (Approche prévisionnelle)*. Mémoire d'ingénieur en Recherche Opérationnelle, Universite Abderrahmane Mira Bejaïa, 1999.

[28] Sow. Mademba. *Contribution à l'amélоration de la gestion des approvisionnements et des stocks à la pharmacie de l'Hopital général de Granol-Yoff*. PhD thesis, Centre Africain D'études Supérieurs en Gestion, 2006.

[29] Carl D. Meyer, Jr. The condition of a finite markov chain and perturbation bounds for the limiting probabilities. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1(3) :273–283, 1980.

[30] B. Rabta. *Nouvelles conditions et nouvelles estimations de la stabilité des chaînes de Markov : Application aux modèles stochastiques de gestion des stocks*. PhD thesis, Universite A/Mira de Bejaïa, 2006.

[31] ST Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, 4(4) :287–317, 1989.

[32] B. Rapacchi. Les séries chronologiques. Centre interuniversitaire de Grenoble. 1993.

[33] I. Sahin. On the stationnary analysis of continous review (s, S) inventory systems with constant lead times. *Operations research*, 27 :717–729, 1979.

[34] I. Sahin. Regenerative inventory systems. *Wiley, New York*, 1989.

[35] Herbert E. Scarf. *Multistage Inventory Models & Techniques*, volume 1. Stanford University Press, 1963.

[36] Paul J. Schweitzer. Perturbation theory and finite markov chains. *Journal of Applied Probability*, pages 401–413, 1968.

[37] D. Stoyan and D. J. Daley. Comparison methods for queues and other stochastic models. *JOHN WILEY & SONS, INC., NEW YORK*, 1983.

[38] A. Veinott and H. Wagner. Computing optimal (s, S) policies. *Mgmt. Sci*, 11 :525–552, 1965.

[39] Y. Zazanis. Analysticity of poisson driven stochastic systems. *Advances applied probability*, 24 :532–541, 1992.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons appliqué pour la première fois l'approche du développement en série de Taylor au modèle de gestion des stocks à revue continue (s,S), après une perturbation du paramètre de la loi de la demande. Nous avons calculé la distribution stationnaire $\pi_{\lambda+\Delta}$ du système perturbé en fonction de celle du système idéal à une précision donnée (ϵ), pour pouvoir estimer l'erreur entre $\pi_{\lambda+\Delta}$et la distribution stationnaire π_{λ} du système idéal, puis nous avons déterminé le stock moyen.

Mots clès : Gestion des stocks, Le modèle (s, S), Développement en série de Taylor, Chaîne de Markov, Distribution stationnaire, Matrice de déviation,simulation

Abstract

In this paper, we apply for the first time the Taylor series expansion approach to inventory management model continuous review (s, S) after a perturbation of the parameter of the law of demand. We calculate the stationary distribution $\pi_{\lambda+\Delta}$ of the disturbed system as a function of that of the stationary distribution of the ideal system for a given accuracy (ϵ), to estimate the error between $\pi_{\lambda+\Delta}$ and the stationary distribution π_{λ} of the ideal system, then we determine the average stock.

Keywords : Inventory control, (s, S) inventory system, Taylor series expansion, Markov Chains, Stationnary distribution, Déviation matrix.Simulation