République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderahmane MIRA - Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

Mémoire de Master

En vue de l'Obtention du Diplôme de **Master** en Physique
Spécialité : Physique Théorique

THÈME

La géométrie non commutative et application sur l'atome d'hydrogène

Présenté par : Siham HAYOUNE

Devant le jury composé de :

H.GHARBI	M.C.B	U.A.M Béjaia	Président.
L.KHODJA	M.C.B	U.A.M Béjaia	Rapporteur .
T.FOUGHALI	M.A.A	U.A.M Béjaia	Examinateur.

Juin 2013

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier Monsieur ***L.KHODJA*** d'avoir accepté de m'encadré, ainsi que pour son aide et ses précieux conseils, pour sa collaboration afin de réaliser ce travail.

Je remercie vivement Mr ***H.GHARBI*** d'avoir accepter de présider le jury de soutenance et examiner mon travail.

Je remercie également Mr ***T.FOUGHALI*** qui a accepté d'être examinateur de ce travail et pour leur disponibilité.

Enfin j'adresse m'a gratitude à tout les enseignants du département de Physique.

Et merci à tous ceux, qui m'a soutenu pour l'achèvement de ce travail surtout à ***Kriss*** pour son aide et sa patience.

S. Hayoune

Dédicaces

Je dédie ce minuscule travail à :

Mes chers parents ;
Mon frère : Loucif ;
Mes sœurs : Kenza et Maissa ;
Tous mes ami(e)s en particulier : Cira, Wassima, Dia, Soussou, Kriss et Réda ;
Tous ceux qui me sont chère(e)s ;
Tous mes enseignants ;
Tous mes camarades et collègues d'études.

S. Hayoune

Table des matières

Préface

Depuis des années, le mathématicien français Alain Connes, développait une théorie unifiée des forces de l'univers, capable non seulement de combiner les équations de la relativité générale d'Einstein avec celle du modèle standard des particules élémentaires, mais aussi d'expliquer l'origine du boson de Higgs.

Le tour de force de la théorie d'Alain Connes est sa capacité à engendrer les équations de la relativité générale couplées aux équations de Yang-Mills du modèle standard avec leurs groupes de Lie. Cette capacité repose de façon fondamentale tant sur l'hypothèse que la géométrie de l'espace-temps n'est pas décrite par la géométrie courbe à N dimensions classiques de Riemann, mais sur une nouvelle géométrie : ***la géométrie non commutative***.

En partie inspirée par les travaux de Von Neumann sur les équations de la mécanique quantique mise au jour par Heisenberg, Born et Jordan vers 1925, cette géométrie non commutative a été découverte et développée par Alain Connes lui-même. Elle est assez complexe à saisir et plusieurs physiciens travaillant dans le domaine des particules élémentaires avouent humblement ne pas vraiment la comprendre.

Dans le premier chapitre de ce travail, nous allons présenter la géométrie non commutative en quelque ligne puis nous allons définir l'opérateur de Weyl, le produit de Moyal, les cartes de Seiberg-Witten et le décalage de Bopp.

Le deuxième chapitre sera consacré, à étudier l'équation de Dirac non commutative avec les cartes de Seiberg-Witten, et nous allons presenter la méthode de Nikiforov et Uvarov et calculer les corrections non commutative des niveaux d'énergie.

Finalement, dans le troisième et le dernier chapitre nous allons utiliser le décalage de Bopp afin de trouver l'équation de Dirac non commutative modifiée pour un atome d'hydrogène dans un potentiel Coulombien.

CHAPITRE *1*

Introduction à la géométrie non commutative

John Von Neumann a commencé à étudier la géométrie de la mécanique quantique, ses travaux a été à l'origine du domaine des mathématiques que nous appelons aujourd'hui les algèbres d'opérateurs. -dans ses propres mots " la géométrie injustifiée " : une nouvelle branche était née, la géométrie non commutative.

Dans ce premier chapitre, on va commencer par présenter la géométrie non commutative, ensuite on va montrer les deux méthodes : l'opérateur de Weyl et le produit de Moyal qu'on va les utiliser pour réduire le formalisme des opérateurs non commutatifs au formalisme ordinaire. A la fin de ce chapitre on a décrire les cartes de Seiberg-Witten et le décalage de Bopp.

1.1 La géométrie non commutative

Jusqú'à la découverte de la mécanique quantique en 1925, la géométrie classique était basée sur la dualité (entamée par Descartes) et l'introduction des coordonnées cartésiennes, entre géométrie et algèbre commutative.
L'algèbre commutative, est une algèbre où le produit de deux quantités algébriques ne dépend pas de l'ordre des termes (c'est-à-dire que AB=BA).
La mécanique quantique dans un espace-temps commutatif satisfaite aux relations de commutation suivantes :

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{1.1}$$

$$[x_i, x_j] = 0 \tag{1.2}$$

$$[p_i, p_j] = 0 \tag{1.3}$$

Avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique (atome), s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position, qui ne commutent plus.

Le but de la géométrie non-commutative est de généraliser la dualité entre espace géométrique et algèbre. Loin d'être une simple généralisation, l'intérêt initial de la théorie provient de phénomènes entièrement nouveaux et inattendus qui n'ont pas de contrepartie dans le cas commutatif. Le premier de ces phénomènes est l'apparition naturelle du "temps" à partir de la non-commutativité. Il s'agit là du résultat clé de la thèse d'Alain Connes qui illustre son propos : " ce n'est pas la même chose d'ouvrir une canette de bière et de la boire, et d'essayer de la boire puis de l'ouvrir " . Alain a permis de donner une classification des algèbres d'opérateurs (algèbres de Von Neumann).

La géométrie Riemannienne commutative (classique) qui provient de la découverte de la géométrie non-euclidienne au 19^e siècle et sert de cadre à la relativité générale d'Einstein a été ainsi généralisée au cadre " quantique ". Les notions clé de mesure des distances et de courbure s'étendent au cadre non-commutatif mais acquièrent un sens nouveau. La géométrie non-commutative traite à la fois des espaces de dimension non-entière, des espaces de dimension infinie, et surtout des espaces de nature " quantique ", et enfin de l'espace-temps lui-même.

Dans la théorie générale des espaces non-commutatifs, la notion de point est remplacée par celle " d'état " du système qui joue un peu le rôle de " nuage de points " et qui est de nature " quantique ".Toutefois, la mesure des distances, grâce à sa formulation spectrale, continue à avoir un sens et se réduit à la longueur du plus court chemin entre deux points dans le cas classique. Cette nouvelle géométrie prolonge la géométrie classique de Riemann, mais chacune des notions classiques acquiert un sens nouveau. Par exemple, la courbure d'un espace, qui joue un rôle essentiel dans la formulation des équations d'Einstein de la relativité générale, continue à avoir un sens mais devient, pour un espace à quatre dimensions, le calcul de la surface de cet espace.

Les travaux de Gelfand et Naimark dans les années 1940 firent un pas de plus en établissant un pont entre la topologie et les algèbres : ils montrèrent que les C*-algèbres fournissent une théorie des espaces topologiques non commutatifs dans le sens où la catégorie des C*-algèbres commutatives est équivalente à la catégorie des espaces topologiques.Ce lien permit alors de développer des techniques analogues en topologie et en algèbre d'opérateurs et un certain nombre de notions géométriques trouvèrent leurs équivalents algébriques.

Les C*-algèbres commutatives sont les algèbres de Banach des fonctions continues (nulles a l'infini) sur un espace topologique localement compact. Donc on peut considerer les C*-algèbres non commutatives comme des " espaces (localement) compacts non commutatifs ". Selon Connes la géométrie non commutative est basée sur l'application de certains outils de la géométrie a certaines C*-algèbres non commutatives naturelles, qui peuvent être considérées comme des variétés différentielles non commutatives .

Dans l'algèbre non commutative on met un chapeau $\hat{}$ sur un symbole classique qui convient le même symbole dans la version non-commutative, par example la position x devienne $\hat{x}$. Et dans un espace non commutatif, les relations de commutation de la mécanique quantique devraient être remplacées par :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \tag{1.4}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \tag{1.5}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \tag{1.6}$$

où θ_{ij} est une matrice antisymétrique, appelée paramètre de non-commutativité.

Dans un espace-temps non commutatif la position ne commute pas mais le moment commute.

1.2 L'opérateur de Weyl

On défini un espace non commutatif, comme on a décrit avant, en remplaçant les coordonnées locales x^i par les opérateurs hermitien $\hat{x}^i$ obéissant aux relations de commutation :

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij} \tag{1.7}$$

La quantification de Weyl fournit une correspondance entre l'algèbre des champs sur $\Re^D$ et l'algèbre des opérateurs de théorie des champs quantique.
Pour n'importe quelle fonction $f(x)$ définie sur un espace euclidien à D dimensions $\Re^D$, on peut décrire sa transformée de Fourier par [1] :

$$\tilde{f}(k) = \int e^{-ik_i x^i} f(x) d^D x \tag{1.8}$$

avec : $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}^*(k)$, si $f(x)$ est une fonction réelle.

On définit le symbole de Weyl par :[1]

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i} \tag{1.9}$$

où $\tilde{f}(k)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$.

L'opérateur de Weyl est hermitien si $f(x)$ est une fonction réelle.

$$\begin{aligned}
\hat{W}^\dagger[f] &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}^*(k) e^{-ik_i \hat{x}^i} \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(-k) e^{-ik_i \hat{x}^i} \\
&= \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k') e^{ik'_i \hat{x}^i} \\
&= \hat{W}[f]
\end{aligned}$$

On peut écrire l'opérateur de Weyl comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{W}[f] &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i} \\
&= \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} d^D x f(x) e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \hat{x}^i} \\
&= \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x)
\end{aligned}$$

où

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i x^i} e^{ik_i \hat{x}^i} \tag{1.10}$$

$\hat{\Delta}(x)$ décrit une base mixte pour les opérateurs et les champs sur un espace-temps, et comme l'opérateur de Weyl est hermitien donc $\hat{\Delta}(x)$ aussi est hermitienne $\hat{\Delta}^{\dagger}(x) = \hat{\Delta}(x)$.

Dans le cas commutatif $\theta^{ij} = 0$ ($[x^i, x^j] = 0$) la carte $\hat{\Delta}(x)$ réduite à une fonction delta $\delta^D(\hat{x} - x)$, et l'opérateur de Weyl devient :

$$\begin{aligned} \hat{W}[f]|_{\theta=0} &= \int d^D x f(x) \delta^D(\hat{x} - x) \\ &= f(\hat{x}) \end{aligned}$$

Nous pouvons présenter les dérivés des opérateurs par une dérivation linéaire anti-hermitienne $\hat{\partial}_i$ qui est définie par les relations de commutation suivantes :

$$[\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j \quad , \qquad [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0$$

on peut montrer que :

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\Delta}(x)] = \hat{\partial}_i \hat{\Delta}(x) = -\partial_i \hat{\Delta}(x) \tag{1.11}$$

puisque :

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_i e^{ik_i(\hat{x}^i - x^i)} &= ik_i e^{ik_i(\hat{x}^i - x^i)} \\ \partial_i e^{ik_i(\hat{x}^i - x^i)} &= -ik_i e^{ik_i(\hat{x}^i - x^i)} \end{aligned}$$

On utilise la formule de Baker-Campbell-Hausdforff

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} e^{ik_i\hat{x}^i} e^{ik'_i\hat{x}^i} &= e^{i(k_i+k'_i)\hat{x}^i} e^{\frac{1}{2}(ik_i)(ik'_j)[\hat{x}^i,\hat{x}^j]} \\ &= e^{i(k_i+k'_i)\hat{x}^i} e^{-\frac{i}{2}k_i k'_j \theta^{ij}} \end{aligned}$$

Pour trouver le produit des opérateurs $\hat{\Delta}(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{ik_i\hat{x}^i} e^{ik'_i\hat{x}^i} e^{-ik_i x^i} e^{-ik'_i y^i} \\ &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k_i+k'_i)\hat{x}^i} e^{-\frac{i}{2}k_i k'_j \theta^{ij}} e^{-i(k_i x^i + k'_i y^i)} \end{aligned}$$

on a : $\quad \hat{W}[e^{ik_i x^i}] = e^{ik_i\hat{x}^i}$, donc

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \hat{W}[e^{i(k_i+k'_i)x^i}] e^{-\frac{i}{2}k_i k'_j \theta^{ij}} e^{-i(k_i x^i + k'_i y^i)} \\ &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k_i+k'_i)z^i} \hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2}k_i k'_j \theta^{ij}} e^{-i(k_i x^i + k'_i y^i)} \end{aligned}$$

1.3 Le produit star

Le produit star de Moyal a été introduit la première fois pendant les développements de la mécanique quantique (la signification statistique possible de la mécanique quantique et la relation entre les quantités physique et les opérateurs de la mécanique quantique).

Le produit star (noté $\star$) est une déformation associative de la loi habituelle du produit. Il apparaît comme un outil pour exprimer les lois quantiques en termes des variables de commutation ($x^i \star x^j$ correspondrait au produit d'opérateur $\hat{x}^i\hat{x}^j$. Le $\star$-commutateur $[x^i, x^j]_\star = x^i \star x^j - x^j \star x^i$ correspond alors à $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]$), tel que le produit de deux opérateurs de Weyl $\hat{W}[f]$ et $\hat{W}[f]$ correspondant aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions.[1]

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \hat{W}[f \star g] \tag{1.13}$$

On commence par le premier terme

$$\begin{aligned}
\hat{W}[f]\hat{W}[g] &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)e^{ik_i\hat{x}^i} \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D}\tilde{g}(k')e^{ik'_i\hat{x}^i} \\
&= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D k'}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k')e^{ik_i\hat{x}^i}e^{ik'_i\hat{x}^i}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, après on pose $k + k' = q$ et on trouve :

$$\begin{aligned}
\hat{W}[f]\hat{W}[g] &= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D k'}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k')e^{i(k_i+k'_i)\hat{x}^i}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_ik'_j} \\
&= \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D q}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q-k)e^{i(q_i)\hat{x}^i}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}(k_iq_j-k_ik_j)}
\end{aligned}$$

On a θ^{ij} est antisymétrique ($\theta^{ij} = -\theta^{ji}$) et k_ik_j est symétrique ($k_ik_j = k_jk_i$), donc $\theta^{ij}k_ik_j = \theta^{ji}k_jk_i = -\theta^{ij}k_ik_j$ (i,j sont des indices muets)

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D q}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q-k)e^{iq_i\hat{x}^i}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_iq_j} \tag{1.14}$$

On passe au deuxième terme

$$\hat{W}[f \star g] = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\widetilde{(f \star g)}(q)e^{iq_i\hat{x}^i} \tag{1.15}$$

En comparant entre (1.14) et (1.15) et d'après (1.13)

$$\widetilde{(f \star g)}(q) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\tilde{f}(k)\tilde{g}(q-k)e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_iq_j}$$

où $\widetilde{(f \star g)}(q)$ est la transformée de fourier de $(f \star g)(q)$

$$\begin{aligned}
(f \star g)(q) &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \widetilde{(f \star g)}(q) e^{iq_i x^i} \\
&= \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q-k) e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij} k_i q_j} e^{iq_i x^i} \\
&= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_i} \theta^{ij} \overrightarrow{\partial_j}\right) g(x) \\
&= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{i_1 j_1} \ldots \theta^{i_1 j_1} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} f(x) \partial_{j_1} \ldots \partial_{j_n} g(x)
\end{aligned}$$

On peut écrire le produit star de deux fonction au premier ordre de θ, comme suit

$$f \star g = f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_i} \theta^{ij} \overrightarrow{\partial_j}\right) g(y)|_{x=y} \tag{1.16}$$

$$= f(x)g(y) + \frac{i}{2} \theta^{ij} \partial_i f(x) \partial_j g(y) + O(\theta^2)|_{x=y} \tag{1.17}$$

- Si $\theta = 0$ le produit star de deux fonctions égal au produit ordinaire de ces fonctions donc on trouve le cas commutative.

$$f(x) \star g(x) = f(x)g(x)$$

1.4 Les cartes de Seiberg-Witten

Considérons une théorie de jauge commutative. Le groupe de jauge peut être général, et ne sera pas explicite. Le potentiel de jauge est A_μ, avec l'intensité de champ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \tag{1.18}$$

La transformation de jauge δ, avec le paramètre de jauge λ, agira en tant que

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda + i[\lambda, A_\mu] \equiv D_\mu \lambda \tag{1.19}$$

$$\delta F_{\mu\nu} = i[\lambda, F_{\mu\nu}] \tag{1.20}$$

D'abord on doit étudie la théorie abélienne, de sorte que tous les commutateurs disparaissent et les expressions simplifient. Quand on travaille avec une théorie non abélienne, la structure de jauge sera alors codée dans les commutateurs et les anticommutateurs.
Du côté non commutatif, la multiplication habituelle des fonctions est remplacée par le produit star (1.17), et on peut écrire le commutateur star au premier ordre de θ comme suit :

$$
\begin{aligned}
[f,g]_\star &= f\star g - g\star f \\
&= fg + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\partial_\sigma g - gf - \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho g\partial_\sigma f + O(\theta^2) \\
&= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\partial_\sigma g - \frac{i}{2}\theta^{\sigma\rho}\partial_\sigma g\partial_\rho f + O(\theta^2) \\
&= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\partial_\sigma g + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\sigma g\partial_\rho f + O(\theta^2) \\
&= [f,g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\{\partial_\rho f, \partial_\sigma g\} + O(\theta^2)
\end{aligned}
$$

dans le cas abélien ($[f,g]=0$), réduit

$$[f,g]_\star = i\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f\partial_\sigma g + O(\theta^2)$$

Sur un espace non commutatif vit la théorie de jauge non commutative avec le potentiel de jauge $\hat{A}_\mu$ et l'intensité de champ [2,3]

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star \tag{1.21}$$

la transformation de jauge $\hat{\delta}$ avec le paramètre de jauge $\hat{\lambda}$ [2,3] et

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}\hat{A}_\mu &= \partial_\mu\hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_\star \equiv \hat{D}_\mu\hat{\lambda} && (1.22) \\
\hat{\delta}\hat{F}_{\mu\nu} &= i[\hat{\lambda}, \hat{F}_{\mu\nu}]_\star && (1.23)
\end{aligned}
$$

Les cartes de Seiberg-Witten (Seiberg-Witten maps) sont des cartes entre la théorie de jauge commutative et non commutative, qui sont compatible avec des transformations de jauge. Autrement, les cartes de Seiberg-Witten nous permettent de considerer les champs non commutatifs $\hat{\psi}, \hat{A}_\mu, \hat{F}_{\mu\nu}$, comme des fonctionnelles des champs ordinaires $\psi, A_\mu, F_{\mu\nu}$. Donc nous pouvons écrire

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu(A_\mu;\theta) \quad ; \quad \hat{F}_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu}(A_\mu;\theta) \quad ; \quad \hat{\lambda} = \hat{\lambda}(\lambda, A_\mu;\theta)$$

Les cartes se résument au diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
A_\mu \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & A_\mu + \delta A_\mu \arrow[d] \\
\hat{A}_\mu \arrow[r, "\hat{\delta}"] & \hat{A}_\mu + \hat{\delta}\hat{A}_\mu
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad \widehat{A_\mu + \delta A_\mu} = \hat{A}_\mu + \hat{\delta}\hat{A}_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\delta A_\mu} = \hat{\delta}\hat{A}_\mu
$$

$$\delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_\star \tag{1.24}$$

pour résoudre l'équation (1.24),on développe les variables non commutatives ordre par ordre en θ [4].

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\mu &= A_\mu + A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)} + ... && (1.25)\\
\hat{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^{(1)} + F_{\mu\nu}^{(2)} + ... && (1.26)\\
\hat{\lambda} &= \lambda + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + ... && (1.27)
\end{aligned}$$

Les équations de champ de jauge U(1) [4] :

$$\partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu} - ie[\hat{A}^\mu, \hat{F}_{\mu\nu}]_\star = 0 \tag{1.28}$$

avec

$$\begin{aligned}
\delta \hat{A}_\mu &= \partial_\mu \hat{\lambda} + ie[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_\star && (1.29)\\
\hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ie[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star && (1.30)
\end{aligned}$$

Utilisant les carte de Seiberg-Witten (1.25) - (1.26) et le choix (1.28) (solution statique), nous pouvons obtenir le potentiel de Coulomb déformé suivant [4] :

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0 &= -\frac{e}{r} - \frac{e^3}{r^4}\theta^{0j} x_j + O(\theta^2) && (1.31)\\
\hat{A}_i &= \frac{e^3}{4r^4}\theta^{ij} x_j + O(\theta^2) && (1.32)
\end{aligned}$$

1.5 Le décalage de Bopp

Sur un espace des phases non commutatif, l'algèbre non commutatif peut être écrite comme suit :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\overline{\theta}_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

où θ_{ij} est liée à la non commutativité des coordonnées de l'espace alors que $\overline{\theta}_{ij}$ reflète la non commutativité des moments, et les deux sont des matrices antisymétriques avec des éléments constants réels.

Le décalage de Bopp relie les variables non commutatives aux variables commutatives. A partir des relations précédentes, on peut obtenir le décalage de Bopp généralisé comme

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \\ \hat{p}_i &= p_i + \frac{1}{2}\overline{\theta}_{ij}x_j\end{aligned}$$

où $\hat{x}_i$, $\hat{p}_i$ sont les opérateurs des coordonnées et de moment sur l'espace des phases non commutatif, et x_i, p_i sont les opérateurs des coordonnées et de moment sur l'espace des phases habituelle (commutatif).

Après l'application de ce changement, l'effet provoqué par l'espace des phases non commutatif peut être calculée dans l'espace des phases habituelle mais dans un espace non commutatif, on doit écrire

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \qquad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

et le décalage de Bopp devient

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \\ \hat{p}_i &= p_i\end{aligned}$$

Des potentiels plus compliqués peuvent conduire (mener) à un hamiltonien non-local une fois que le décalage de Bopp est effectué.

Dans un espace non commutatif on peut utiliser l'équation de Schrodinger avec le produit et les coordonnées de l'espace-temps ordinaires à condition de décaler l'argument de potentiel d'une quantité égale à $\frac{\tilde{p}}{2}$ (ce qu'on appelle décalage de Bopp)

$$\begin{aligned}f(x)\star g(x) &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\theta^{i_1j_1}...\theta^{i_nj_n}\partial_{i_1}...\partial_{i_n}f(x)\partial_{j_1}...\partial_{j_n}g(x) \\ &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\partial_{i_1}...\partial_{i_n}f(x)\tilde{p}^{i_1}...\tilde{p}^{i_n}g(x)\end{aligned}$$

on a utilisé les relations suivantes :

$$\partial_i = ip_i \qquad \tilde{p}^i = \theta^{ij}p_j$$

on a aussi

$$f(x) = \int dk\tilde{f}(k)e^{ikx} \implies \partial f(x) = \int dk\tilde{f}(k)(ik)e^{ikx}$$

donc

$$\begin{aligned}
f(x) \star g(x) &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \int dk \tilde{f}(k)(ik_{i_1})...(ik_{i_n})\tilde{p}^{i_1}...\tilde{p}^{i_n} g(x) e^{ikx} \\
&= f(x)g(x) + \int dk \tilde{f}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (k.\tilde{p}) g(x) e^{ikx} \\
&= f(x)g(x) + \int dk \tilde{f}(k) e^{ik\left(x-\frac{\tilde{p}}{2}\right)} g(x) - \int dk \tilde{f}(k) e^{ikx} g(x) \\
&= \int dk \tilde{f}(k) e^{ik\left(x-\frac{\tilde{p}}{2}\right)} g(x) \\
&= f\left(x - \frac{\tilde{p}}{2}\right) g(x)
\end{aligned}$$

puisque $\tilde{p}$ et k commute.

1.6 Conclusion

On a montré dans ce chapitre que pour coder la non commutativité de l'espace temps on peut utiliser deux manière soit on utilise un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl ou on doit déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser des fonctions ordinaires définies sur un espace-temps commutatif.

CHAPITRE 2

L'équation de Dirac non commutative avec les cartes de Seiberg-Witten

Dès 1928, *Dirac* a établi une équation d'onde relativiste d'une particule de spin un-demi et on peut considérer cette équation comme un pilier de la théorie quantique. Dans l'atome d'hydrogène, l'électron se déplace dans le champ électrostatique crée par le proton. Il apparaît alors, dans le référentiel propre de l'électron, un champ magnétique qui va interagir avec le spin de l'électron. Cette interaction est appelée le couplage spin-orbite ; elle s'introduit à l'aide de la notion de champ extérieur donné.
A l'aide de l'équation de Dirac on peut citer l'existence de positron, l'antiparticule de l'électron, les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène avec beaucoup plus de précision,...

Dans ce chapitre, on va résoudre l'*équation de Dirac* non commutative dans un champ Coulombien, et on va utiliser les cartes de Seiberg-Witten *"Seiberg-Witten Maps"* pour trouver cette équation. Après on va examiner les niveaux d'énergie du système. À la fin de ce chapitre, on va appliquer la théorie des perturbations pour trouver les corrections sur les niveaux d'énergie.

2.1 L'action

L'action du système est l'intégrale du Lagrangien entre l'instant initial t_0 et l'instant final t.

$$S = \int_{t_0}^{t} L(t')dt' \tag{2.1}$$

On définis l'action de Dirac dans un champ $\hat{A}_\mu$:

$$S = \int d^4x \left[\bar{\hat{\psi}}(i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m)\hat{\psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} \right] \tag{2.2}$$

$$L = \int d^3x \ \mathfrak{L}(x)$$

où $\mathfrak{L}$ est la densité Lagranienne.
avec : $\hat{D}_\mu = \partial_\mu + \imath e \hat{A}_\mu$. et $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu$.

2.2 L'équation de Dirac modifiée

Avec l'approche de Seiberg-Witten, on remplace le produit star dans le Lagrangien (densité Lagrangienne) du système au lieu le produit normal.
Par conséquent l'action de Dirac (2.2) s'écrite comme suit [5] :

$$S = \int d^4x \left[\bar{\hat{\psi}} \star (i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m) \star \hat{\psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \right] \tag{2.3}$$

Et comme on a défini le produit de *Moyal* non commutatif dans le premier chapitre par :

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial_\nu} \right) g(y)|_{x=y} \tag{2.4}$$

On peut le développer jusqú'à l'ordre 1 de θ comme suit :

$$f(x) \star g(x) = f(x)g(y) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(y)|_{y=x} \tag{2.5}$$

D'après le développement du produit de *Moyal* (2.5) on calcule la densité lagrangienne :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \bar{\hat{\psi}} \star \Big(i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m \Big) \star \hat{\psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \\
&= \bar{\hat{\psi}} \star \Big(i\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi} - e\gamma^\mu \hat{A}_\mu \star \hat{\psi} - m\hat{\psi} \Big) - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \\
&= i\gamma^\mu \bar{\hat{\psi}} \star \partial_\mu \hat{\psi} - e\gamma^\mu \bar{\hat{\psi}} \star \hat{A}_\mu \star \hat{\psi} - m\bar{\hat{\psi}} \star \hat{\psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\bar{\hat{\psi}} \star \partial_\mu \hat{\psi} &= \bar{\hat{\psi}} \partial_\mu \hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\hat{\psi}} \partial_\sigma \partial_\mu \hat{\psi} + O(\theta^2) \\
\bar{\hat{\psi}} \star \hat{A}_\mu \star \hat{\psi} &= \bar{\hat{\psi}} \star \left(\hat{A}_\mu \hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \hat{A}_\mu \partial_\sigma \hat{\psi} + O(\theta^2) \right) \\
&= \bar{\hat{\psi}} \hat{A}_\mu \hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\hat{\psi}} \partial_\sigma \left(\hat{A}_\mu \hat{\psi} \right) + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma} \bar{\hat{\psi}} \partial_\rho \hat{A}_\mu \partial_\sigma \hat{\psi} + O(\theta^2) \\
\bar{\hat{\psi}} \star \hat{\psi} &= \bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\hat{\psi}} \partial_\sigma \hat{\psi} + O(\theta^2) \\
\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} &= \hat{F}^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \hat{F}_{\mu\nu} \partial_\sigma \hat{F}^{\mu\nu} + O(\theta^2)
\end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L} = i\gamma^\mu \bar{\hat{\psi}} \partial_\mu \hat{\psi} - \tfrac{1}{2}\gamma^\mu \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\hat{\psi}} \partial_\sigma \partial_\mu \hat{\psi} - e\gamma^\mu \bar{\hat{\psi}} \hat{A}_\mu \hat{\psi} - \tfrac{ie}{2}\gamma^\mu \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\hat{\psi}} \partial_\sigma \left(\hat{A}_\mu \hat{\psi} \right) - \tfrac{ie}{2}\gamma^\mu \theta^{\rho\sigma} \bar{\hat{\psi}} \partial_\rho \hat{A}_\mu \partial_\sigma \hat{\psi} \\
- m\bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} - \tfrac{i}{2} m \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\hat{\psi}} \partial_\sigma \hat{\psi} - \tfrac{1}{4}\hat{F}^{\mu\nu} + \tfrac{i}{8}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \hat{F}_{\mu\nu} \partial_\sigma \hat{F}^{\mu\nu} + O(\theta^2)
\end{gathered}$$

Toutes les lois fondamentales de la physique peuvent s'obtenir par un principe de *moindre action*, qui est défini comme suit :

$$\delta S = 0 \tag{2.6}$$

Puisque $\mathfrak{L}$ est une fonction des champs $\hat{\psi}$, $\partial_\mu \hat{\psi}$ et $\partial_\mu \partial_\nu \hat{\psi}$ ($\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\hat{\psi}, \partial_\mu \hat{\psi}, \partial_\mu \partial_\nu \hat{\psi})$), alors d'après le principe de moindre action on peut en déduire que les équations d'*Euler-Lagrange* (équations de mouvement) prennent la forme [5,6] :

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \hat{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\partial_\mu \hat{\psi} \right)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\nu \hat{\psi} \right)} + O(\theta^2) = 0 \tag{2.7}$$

Ou

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{\hat{\psi}}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\partial_\mu \bar{\hat{\psi}} \right)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\nu \bar{\hat{\psi}} \right)} + O(\theta^2) = 0 \tag{2.8}$$

On calcule les termes un par un

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{\hat{\psi}}} &= i\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi} - e\gamma^\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi} - \frac{ie}{2}\gamma^\mu \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \hat{A}_\mu \partial_\sigma \hat{\psi} - m\hat{\psi} \\
\partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\partial_\nu \bar{\hat{\psi}} \right)} &= \partial_\nu \left(-\frac{1}{2}\gamma^\mu \theta^{\rho\sigma}\delta^\nu_\rho \partial_\sigma \partial_\mu \hat{\psi} - \frac{ie}{2}\gamma^\mu \theta^{\rho\sigma}\delta^\nu_\rho \partial_\sigma \left(\hat{A}_\mu \hat{\psi} \right) - \frac{i}{2} m \theta^{\rho\sigma}\delta^\nu_\rho \partial_\sigma \hat{\psi} \right) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^\mu \theta^{\nu\sigma}\partial_\nu \partial_\sigma \partial_\mu \hat{\psi} - \frac{ie}{2}\gamma^\mu \theta^{\nu\sigma}\partial_\nu \partial_\sigma \left(\hat{A}_\mu \hat{\psi} \right) - \frac{i}{2} m \gamma^\mu \theta^{\nu\sigma}\partial_\nu \partial_\sigma \hat{\psi} \ = 0 \\
\partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\partial_\mu \partial_\nu \bar{\hat{\psi}} \right)} &= 0
\end{aligned}$$

Puisque :

$$\gamma^\mu\theta^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma\partial_\mu\hat{\psi} = \gamma^\mu\theta^{\sigma\nu}\partial_\sigma\partial_\nu\partial_\mu\hat{\psi} = -\gamma^\mu\theta^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma\partial_\mu\hat{\psi} = 0$$

$$\gamma^\mu\theta^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma\left(\hat{A}_\mu\hat{\psi}\right) = \gamma^\mu\theta^{\sigma\nu}\partial_\sigma\partial_\nu\left(\hat{A}_\mu\hat{\psi}\right) = -\gamma^\mu\theta^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma\left(\hat{A}_\mu\hat{\psi}\right) = 0$$

$$\gamma^\mu\theta^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma\hat{\psi} = \gamma^\mu\theta^{\sigma\nu}\partial_\sigma\partial_\nu\hat{\psi} = -\gamma^\mu\theta^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma\hat{\psi} = 0$$

Avec : $\theta^{\nu\sigma} = -\theta^{\sigma\nu}$($\theta$ est antisymétrique). et $\partial_\nu\partial_\sigma = \partial_\sigma\partial_\nu$.

Les équations d'Euler-Lagrange (de mouvement) donnent l'équation de Dirac modifiée dans un champ $\hat{A}_\mu$:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\hat{\psi} - e\gamma^\mu\hat{A}_\mu\hat{\psi} - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\hat{A}_\mu\partial_\sigma\hat{\psi} - m\hat{\psi} &= 0 \quad (2.9) \\ \left((i\gamma^\mu\partial_\mu - m) - e\gamma^\mu\hat{A}_\mu - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\hat{A}_\mu\partial_\sigma\right)\hat{\psi} &= 0 \quad (2.10) \end{aligned}$$

Nous étudions l'équation de Dirac pour une interaction de Coulomb $\left(-\frac{e}{r}\right)$ dans un espace non commutatif.
Pour un espace-espace non commutatif $\theta^{0i} = 0$, où $i = 1, 2, 3$

$$\left((i\gamma^\mu\partial_\mu - m) - e\gamma^\mu\hat{A}_\mu - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\hat{A}_\mu\partial_\sigma\right)\hat{\psi} = 0 \quad (2.11)$$

Avec[4] :

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= -\frac{e}{r} \quad (2.12) \\ \hat{A}_i &= \frac{e^3}{4r^4}\theta^{ij}x_j \quad (2.13) \end{aligned}$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu - m &= i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m \\ -e\gamma^\mu\hat{A}_\mu &= -e\gamma^0\hat{A}_0 - e\gamma^i\hat{A}_i = \frac{e^2}{r}\gamma^0 - \frac{e^4}{4r^4}\gamma^i\theta^{ij}x_j \\ -\frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\hat{A}_\mu\partial_\sigma &= -\frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{00}\partial_0\hat{A}_\mu\partial_0 - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{0i}\partial_0\hat{A}_\mu\partial_i - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{i0}\partial_i\hat{A}_\mu\partial_0 - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{ij}\partial_i\hat{A}_\mu\partial_j \\ &= -\frac{ie}{2}\gamma^\mu\theta^{ij}\partial_i\hat{A}_\mu\partial_j = -\frac{ie}{2}\gamma^0\theta^{ij}\partial_i\hat{A}_0\partial_j - \frac{ie}{2}\gamma^i\theta^{ij}\partial_i\hat{A}_i\partial_j \\ &= \frac{ie^2}{2}\gamma^0\theta^{ij}\partial_i\left(\frac{1}{r}\right)\partial_j + O(\theta^2) = \frac{ie^2}{2}\gamma^0\theta^{ij}\left(-\frac{x_i}{r^3}\right)\partial_j + O(\theta^2) \\ &= \frac{e^2}{2r^3}\gamma^0\varepsilon^{ijk}\theta^k x_i p_j + O(\theta^2) = \frac{e^2}{2r^3}\gamma^0\theta^k\left(r\times p\right)^k + O(\theta^2) \\ &= \frac{e^2}{2r^3}\gamma^0\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2) \end{aligned}$$

Où

$$\partial_i\left(\frac{1}{r}\right) = \partial_i\left(x_i x_i\right)^{-\frac{1}{2}} = -x_i\left(x_i x_i\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x_i}{r^3}$$

Finalement l'équation de Dirac devient :

$$\left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m + \frac{e^2}{r}\gamma^0 - \frac{e^4}{4r^4}\gamma^i\theta^{ij}x_j + \frac{e^2}{2r^3}\gamma^0\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2)\right]\hat{\psi} = 0 \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad & i\gamma^0\partial_0\hat{\psi} = \left(-i\gamma^i\partial_i + m - \frac{e^2}{r}\gamma^0 + \frac{e^4}{4r^4}\gamma^i\theta^{ij}x_j - \frac{e^2}{2r^3}\gamma^0\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2)\right)\hat{\psi}\\
\Longrightarrow\quad & i\underbrace{\gamma^0\gamma^0}\partial_0\hat{\psi} = \left(-i\underbrace{\gamma^0\gamma^i}\partial_i + \gamma^0 m - \frac{e^2}{r}\underbrace{\gamma^0\gamma^0} + \frac{e^4}{4r^4}\underbrace{\gamma^0\gamma^i}\theta^{ij}x_j - \frac{e^2}{2r^3}\underbrace{\gamma^0\gamma^0}\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2)\right)\hat{\psi}\\
\Longrightarrow\quad & i\partial_0\hat{\psi} = \left(-i\alpha_i\partial_i + \beta m - \frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{4r^4}\alpha_i\theta^{ij}x_j - \frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2)\right)\hat{\psi}\\
\Longrightarrow\quad & i\partial_0\hat{\psi} = \hat{H}\hat{\psi}
\end{aligned}$$

Avec : $\gamma^0\gamma^0 = 1$, $\gamma^0\gamma^i = \alpha_i$, $\gamma^0 = \beta$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}^{\theta}_{pert}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 &= -i\alpha_i\partial_i + \beta m = (\vec{\alpha}.\vec{p}) + \beta m - \frac{e^2}{r}\\
\hat{H}^{\theta}_{pert} &= -\frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + \frac{e^4}{4r^4}\alpha_i\theta^{ij}x_j + O(\theta^2)\\
&= -\frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + \frac{e^4}{4r^4}\varepsilon^{ijk}\theta^k\alpha_i x_j + O(\theta^2)\\
&= -\frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + \frac{e^4}{4r^4}\theta^k\left(\alpha\times r\right)^k + O(\theta^2)\\
&= -\frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + \frac{e^4}{4r^4}\vec{\theta}.\left(\vec{\alpha}\times\vec{r}\right) + O(\theta^2)\\
&= -\frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + \frac{e^4}{4}\vec{\theta}.\left(\vec{\alpha}\times\frac{\vec{r}}{r^4}\right) + O(\theta^2)
\end{aligned}$$

$\hat{H}_0$ est l'Hamiltonien relativiste
$\hat{H}^{\theta}_{pert}$: termes de structure fine.

L'équation de Dirac non commutative donc prend la forme :

$$i\partial_0\hat{\psi} = \left[(\vec{\alpha}.\vec{p}) + \beta m - \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + \frac{e^4}{4}\vec{\theta}.\left(\vec{\alpha} \times \frac{\vec{r}}{r^4}\right) + O(\theta^2)\right]\hat{\psi} \tag{2.15}$$

avec les matrices α et β sont données :

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

σ_i sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3 Les niveaux d'énergie de H_0

Les niveaux d'énergie des états liés ce sont les valeurs propres du spectre discret de l'Hamiltonien.
L'équation de Dirac peut être résolue exactement pour un électron plongé dans un potentiel Coulombien et l'on obtient les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.[7,8,9,10]

Dans cette section, nous examinons les solutions de l'équation de Dirac en absence du champ extérieur, donc pour $\theta = 0$ l'équation de Dirac est donnée par :

$$i\partial_0\hat{\psi}(t, r, \vartheta, \varphi) = \left[(\vec{\alpha}.\vec{p}) + \beta m - \frac{e^2}{r}\right]\hat{\psi}(t, r, \vartheta, \varphi)$$

On utilise la méthode de séparation des variables pour calculer $\hat{\psi}(t, r, \vartheta, \varphi)$. Si E est l'énergie de l'état stationnaire, les solutions stationnaires sont de la forme :

$$\hat{\psi}(t, r, \vartheta, \varphi) = \hat{\psi}(r, \vartheta, \varphi)e^{-iEt} \tag{2.16}$$

où $\hat{\psi}(r, \vartheta, \varphi)$ est la solution de l'équation de Schrodinger (équation aux valeurs propres) indépendante du temps

$$H\hat{\psi}(r, \vartheta, \varphi) = E\hat{\psi}(r, \vartheta, \varphi).$$

Avec :

$$\hat{\psi}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}(r, \vartheta, \varphi) \\ \hat{\chi}(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

où $\hat{\phi}(r, \vartheta, \varphi)$ et $\hat{\chi}(r, \vartheta, \varphi)$ sont des spineurs à deux composantes

Et on va utiliser la méthode de *Nikiforov* et *Uvarov* pour trouver les solutions. [11]

On obtient deux équations couplées :

$$\left(i\partial_0 + \frac{e^2}{r} - m\right)\hat{\phi} + i\sigma_i\partial_i\hat{\chi} = 0 \tag{2.18}$$

$$\left(i\partial_0 + \frac{e^2}{r} + m\right)\hat{\chi} + i\sigma_i\partial_i\hat{\phi} = 0 \tag{2.19}$$

Les spineur $\hat{\phi}(r,\vartheta,\varphi)$ et $\hat{\chi}(r,\vartheta,\varphi)$ sont définis par :[11]

$$\hat{\phi}(r,\vartheta,\varphi) = f(r)\Omega_{jlM}(\vartheta,\varphi) = f(r)\begin{pmatrix} A_{jlM}Y_l^{M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ B_{jlM}Y_l^{M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$\hat{\chi}(r,\vartheta,\varphi) = (-1)^{\frac{(l-l'+1)}{2}} g(r)\Omega_{jlM}(\vartheta,\varphi) = (-1)^{\frac{(l-l'+1)}{2}} g(r)\begin{pmatrix} A_{jlM}Y_l^{M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ B_{jlM}Y_l^{M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Avec :

$$A_{jlM} = \begin{cases} \sqrt{\frac{j+M}{2l+1}}, & \text{si } l = j - \frac{1}{2}\,; \\ -\sqrt{\frac{j-M+1}{2l+1}}, & \text{si } l = j + \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.22}$$

$$B_{jlM} = \begin{cases} \sqrt{\frac{j-M}{2l+1}}, & \text{si } l = j - \frac{1}{2}\,; \\ \sqrt{\frac{j+M+1}{2l+1}}, & \text{si } l = j + \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.23}$$

où

$\Omega_{jlM}(\vartheta,\varphi)$ est un bi-spineur sphérique.

$Y_l^{M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)$ et $Y_l^{M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)$ sont les harmoniques sphériques.

$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}...$ et $-j \leqslant M \leqslant j$, l et l' prennent les valeurs $j - \frac{1}{2}$ et $j + \frac{1}{2}$ avec : $l' = 2j - l$.

j est le nombre quantique caractérisant le moment angulaire totale de la particule.

M est un nombre quantique.

l et l' sont les moments quantiques orbitaux.

On remplace l'équation (2.20)et(2.21) dans (2.18)et(2.19), pour obtenir le système d'équation pour $f(r)$ et $g(r)$

$$\frac{df}{dr} + \frac{1+\eta}{r}f - \left(E + m + \frac{\mu}{r}\right) g = 0 \tag{2.24}$$
$$\frac{dg}{dr} + \frac{1-\eta}{r}g - \left(E - m + \frac{\mu}{r}\right) f = 0 \tag{2.25}$$

Avec :

$$\mu = e^2 \qquad et \quad \eta = \begin{cases} -(l+1), & \text{pour } l = j - \frac{1}{2}\,; \\ l, & \text{pour } l = j + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On peut écrire le système d'équations (2.24)et (2.25) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{df}{dr} \\ \frac{dg}{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\eta}{r} & E + m + \frac{\mu}{r} \\ E - m + \frac{\mu}{r} & -\frac{1-\eta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

posons $\quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1+\eta}{r} & E + m + \frac{\mu}{r} \\ E - m + \frac{\mu}{r} & -\frac{1-\eta}{r} \end{pmatrix}$

Appliquons la transformation linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \qquad et \qquad \begin{pmatrix} \frac{d\upsilon_1}{dr} \\ \frac{d\upsilon_2}{dr} \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix}$$

avec : $\quad \tilde{A} = CAC^{-1}$

On prend : $\quad C = \begin{pmatrix} \mu & \nu - \eta \\ \nu - \eta & \mu \end{pmatrix} \qquad$ avec $\quad \nu = \sqrt{\eta^2 - \mu^2}$

Avec un simple calcule on trouve :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{E\mu}{\nu} - \frac{1+\nu}{r} & m + \frac{E\eta}{\nu} \\ m - \frac{E\eta}{\nu} & \frac{\nu-1}{r} - \frac{E\mu}{\nu} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\frac{d\upsilon_1}{dr} = \left(\frac{E\mu}{\nu} - \frac{1+\nu}{r}\right)\upsilon_1 + \left(m + \frac{E\eta}{\nu}\right)\upsilon_2 \tag{2.27}$$
$$\frac{d\upsilon_2}{dr} = \left(m - \frac{E\eta}{\nu}\right)\upsilon_1 + \left(\frac{\nu-1}{r} - \frac{E\mu}{\nu}\right)\upsilon_2 \tag{2.28}$$

D'après l'équation (2.27) :

$$\upsilon_2 = \frac{1}{\left(m + \frac{E\eta}{\nu}\right)}\frac{d\upsilon_1}{dr} - \frac{\left(\frac{E\mu}{\nu} - \frac{1+\nu}{r}\right)}{\left(m + \frac{E\eta}{\nu}\right)}\upsilon_1 \tag{2.29}$$

En portant (2.29) dans (2.28), on obtient :

$$\frac{d\upsilon_2}{dr} = \left(m - \frac{E\eta}{\nu}\right)\upsilon_1 + \frac{\left(\frac{\nu-1}{r} - \frac{E\mu}{\nu}\right)}{\left(m + \frac{E\eta}{\nu}\right)}\frac{d\upsilon_1}{dr} - \frac{\left(\frac{E\mu}{\nu} - \frac{1+\nu}{r}\right)\left(\frac{\nu-1}{r} - \frac{E\mu}{\nu}\right)}{\left(m + \frac{E\eta}{\nu}\right)}\upsilon_1 \tag{2.30}$$

Pour trouver l'équation de la fonction υ_1 on dérive l'équation (2.27) par rapport à r :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\upsilon_1}{dr^2} &= \left(\frac{E\mu}{\nu} - \frac{1+\nu}{r}\right)\frac{d\upsilon_1}{dr} + \frac{1+\nu}{r^2}\upsilon_1 + \left(m + \frac{E\eta}{\nu}\right)\frac{d\upsilon_2}{dr} \\
&= \left(\frac{E\mu}{\nu} - \frac{1+\nu}{r}\right)\frac{d\upsilon_1}{dr} + \frac{1+\nu}{r^2}\upsilon_1 + \left(m + \frac{E\eta}{\nu}\right)\left(m - \frac{E\eta}{\nu}\right)\upsilon_1 + \left(\frac{\nu-1}{r} - \frac{E\mu}{\nu}\right)\frac{d\upsilon_1}{dr} \\
&\quad - \left(\frac{\nu-1}{r} - \frac{E\mu}{\nu}\right)\left(\frac{E\mu}{\nu} - \frac{1+\nu}{r}\right)\upsilon_1 \\
&= -\frac{2}{r}\frac{d\upsilon_1}{dr} + \frac{\nu + m^2r^2 + \nu^2 - 2E\mu r}{r^2}\upsilon_1 - \frac{E^2}{\nu^2}\left(\eta^2 - \mu^2\right)\upsilon_1
\end{aligned}$$

on a $\quad \nu^2 = (\eta^2 - \mu^2)$
Donc :

$$\frac{d^2\upsilon_1}{dr^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\upsilon_1}{dr} - \frac{(E^2 - m^2)r^2 + 2E\mu r - \nu(\nu+1)}{r^2}\upsilon_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d^2\upsilon_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\upsilon_1}{dr} + \frac{(E^2 - m^2)r^2 + 2E\mu r - \nu(\nu+1)}{r^2}\upsilon_1 = 0} \tag{2.31}$$

De la même manière, on montre que υ_2 vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d^2\upsilon_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\upsilon_2}{dr} + \frac{(E^2 - m^2)r^2 + 2E\mu r - \nu(\nu-1)}{r^2}\upsilon_1 = 0} \tag{2.32}$$

2.3.1 Solutions de l'équation de Dirac par la méthode Nikiforov et Uvarov

♦ Les solutions de l'équation (2.31)

L'équation (2.31) est du type hypergéométrique (voir l'annexe A) [11] :

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(r)}{\sigma(r)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}u = 0 \tag{2.33}$$

$\sigma(r)$ et $\tilde{\sigma}(r)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, $\tilde{\tau}(r)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1

Par comparaison entre (2.31) et (2.33) :

$$\tilde{\tau}(r) = 2, \quad \sigma(r) = r, \quad \tilde{\sigma}(r) = (E^2 - m^2)r^2 + 2E\mu r - \nu(\nu+1).$$

posons :

$$\upsilon_1(r) = \Phi_1(r)y(r) \tag{2.34}$$

Donc on doit écrire l'équation (2.33) comme suit

$$\sigma(r)y'' + \tau(r)y' + \lambda y = 0 \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
\pi(r) &= \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} \\
&= \frac{1-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2}{2}\right)^2 - \left(E^2 - m^2\right) r^2 - 2E\mu r + \nu(\nu+1) + kr} \\
&= \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(E^2 - m^2\right) r^2 - 2E\mu r + kr}
\end{aligned}$$

Avec : $\quad \lambda = k + \pi' \implies k = \lambda - \pi'$

Le radicande $\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(E^2 - m^2\right) r^2 - 2E\mu r + kr = \left[r\sqrt{m^2 - E^2}\right]^2 \pm \left(\nu + \frac{1}{2}\right)$
$\Delta = (k - 2E\mu)^2 + 4\left(E^2 - m^2\right)\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 \longrightarrow 0$

$$\implies k = 2E\mu \pm 2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m^2 - E^2}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\pi(r) &= \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left[r\sqrt{m^2 - E^2} \pm \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]^2} \\
&= \frac{-1}{2} \pm r\sqrt{m^2 - E^2} \pm \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \\
&= \begin{cases} \nu + r\sqrt{m^2 - E^2}, \\ -(1+\nu) + r\sqrt{m^2 - E^2}, \\ -(1+\nu) - r\sqrt{m^2 - E^2}, \\ \nu - r\sqrt{m^2 - E^2}, \end{cases}
\end{aligned}$$

pour une dérivée négative dans $[0, +\infty[$, il reste 2 cas :

- **Le** 1^{er} **cas**

On calcule la solution de l'équation différentielle (2.31) pour le $1^{er} cas$

$$k = 2E\mu + 2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.36}$$

$$\lambda = k + \pi' = 2E\mu + 2\nu\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.37}$$

$$\pi(r) = -(1+\nu) - r\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.38}$$

$$\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r) = -2\nu - 2r\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.39}$$

On a $\Phi_1'(r)/\Phi_1(r) = \pi(r)/\sigma(r)$ (voir l'annexe A) [11].

Donc :

$$\frac{\Phi_1'}{\Phi_1} = -(1+\nu)\frac{1}{r} - \sqrt{m^2 - E^2} \implies \int \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\ dr = \int -(1+\nu)\frac{1}{r} - \sqrt{m^2 - E^2}\ dr$$

$$\implies \ln \Phi_1 = -(1+\nu)\ln r - r\sqrt{m^2 - E^2} = \ln r^{-(1+\nu)} - r\sqrt{m^2 - E^2}$$

$$\implies \Phi_1 = e^{\ln r^{-(1+\nu)} - r\sqrt{m^2 - E^2}} = r^{-(1+\nu)} e^{-r\sqrt{m^2 - E^2}}$$

Les valeurs propres de l'équation (2.35) sont donnée par (voir l'annexe A) :

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 2n\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.40}$$

Pour déduire l'énergie du système, on compare entre (2.37) et (2.40) :

$$n\sqrt{m^2 - E^2} = E\mu + \nu\sqrt{m^2 - E^2}$$

$$\implies E = \frac{m(n-\nu)}{\sqrt{\mu^2 + (n-\nu)^2}} \tag{2.41}$$

La solution de l'équation (2.33) est donnée par (voir l'annexe A) :

$$y(r) = y_n(r) = \frac{B_{nl}}{\rho(r)}\frac{d^n}{dr^n}\left[\sigma^n \rho(r)\right] \tag{2.42}$$

avec : $\quad (\sigma\rho)' = \tau\rho$

D'abord on va trouver $\rho(r)$

$\sigma'\rho + \sigma\rho' = \tau\rho$

avec $\quad \sigma = r, \quad \tau = -2\nu - 2r\sqrt{m^2 - E^2}$

$$\begin{aligned}
\rho + r\rho' &= \left(-2\nu - 2r\sqrt{m^2 - E^2}\right)\rho \\
\Longrightarrow \frac{\rho'}{\rho} &= -(2\nu+1)\frac{1}{r} - 2\sqrt{m^2 - E^2} \\
\Longrightarrow \ln\rho &= \ln r^{-(2\nu+1)} - 2r\sqrt{m^2 - E^2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(r) = r^{-(2\nu+1)} e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}} \tag{2.43}$$

on remplace (2.43) dans l'équation (2.42) et on obtient :

$$y(r) = y_n(r) = \frac{B_{nl}}{r^{-(2\nu+1)} e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}} \frac{d^n}{dr^n}\left[r^{n-(2\nu+1)} e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}\right] \tag{2.44}$$

On a trouvé $\Phi_1(r)$ et $y(r)$ donc d'après (2.34) on peut obtenir :

$$\upsilon_1(r) \quad = \quad \Phi_1(r)y(r) = \frac{B_{nl} r^{-(1+\nu)} e^{-r\sqrt{m^2-E^2}}}{r^{-(2\nu+1)} e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}} \frac{d^n}{dr^n}\left[r^{n-(2\nu+1)} e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \upsilon_1(r) = B_{nl} r^{\nu} e^{r\sqrt{m^2-E^2}} \frac{d^n}{dr^n}\left[r^{n-(2\nu+1)} e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}\right] \tag{2.45}$$

On applique le changement de variable suivant :

$$x = 2r\sqrt{m^2 - E^2}, \qquad \alpha = -(2\nu+1)$$

L'équation (2.45) devient :

$$\begin{aligned}
\upsilon_1(r) &= B_{nl} x^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} \left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} e^{\frac{x}{2}} \left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{-n-\alpha} x^{n+\alpha} e^{-x}\right] \\
&= B_{nl} x^{-\frac{1}{2}(\alpha+1)} \left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} e^{\frac{x}{2}} \left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^n \left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{-n-\alpha} n! e^{-x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x) \\
&= n! B_{nl} \left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)} x^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\alpha}(x)
\end{aligned}$$

Avec $\quad L_n^{\alpha}(x)$: les polynômes de Laguerre (voir l'annexe B).
Posons $B = n! B_{nl} \left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}$

$$\Longrightarrow \quad \upsilon_1(r) = B x^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\alpha}(x) \tag{2.46}$$

Les polynômes de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ sont définis pour $\alpha > -1$, et dans notre cas :

$$\alpha = -(2\nu + 1) > -1 \quad \Longrightarrow \quad \nu < 0$$

mais on a $\nu = \sqrt{\eta^2 - \mu^2} \geqslant 0$, donc ce cas est rejeté(exclu).

- **Le** 2^{me} **cas**

On doit refaire les étapes précédentes (du 1^{re} cas) pour calculer la solution de l'équation (2.31) pour le 2^{me} cas.

$$k = 2E\mu - 2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.47}$$

$$\lambda = k + \pi' = 2E\mu - 2(\nu + 1)\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.48}$$

$$\pi(r) = \nu - r\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.49}$$

$$\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r) = 2(\nu + 1) - 2r\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.50}$$

On a $\Phi_1'(r)/\Phi_1(r) = \pi(r)/\sigma(r)$.[1] (voir l'annexe A)

Donc

$$\frac{\Phi_1'}{\Phi_1} = \nu\frac{1}{r} - \sqrt{m^2 - E^2} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\ dr = \int \nu\frac{1}{r} - \sqrt{m^2 - E^2}\ \ dr$$

$$\Longrightarrow \quad \ln \Phi_1 = \ln r^\nu - r\sqrt{m^2 - E^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_1 = r^\nu e^{-r\sqrt{m^2 - E^2}}$$

Les valeurs propres de l'équation (2.35) sont donnée par :

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 2n\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.51}$$

Comparons entre (2.48)et (2.51) :

$$n\sqrt{m^2 - E^2} = E\mu - (\nu + 1)\sqrt{m^2 - E^2}$$

$$\Longrightarrow \quad E = \frac{m(n + \nu + 1)}{\sqrt{\mu^2 + (n + \nu + 1)^2}} \tag{2.52}$$

On cherche $\rho(r)$ pour ce cas

$\sigma'\rho + \sigma\rho' = \tau\rho$

avec $\sigma = r, \quad \tau = 2(\nu+1) - 2r\sqrt{m^2 - E^2}$

$$\begin{aligned} \rho + r\rho' &= \left(2(\nu+1) - 2r\sqrt{m^2-E^2}\right)\rho \\ \Longrightarrow \frac{\rho'}{\rho} &= \frac{2\nu+1}{r} - 2\sqrt{m^2-E^2} \\ \Longrightarrow \ln\rho &= \ln r^{2\nu+1} - 2r\sqrt{m^2-E^2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(r) = r^{2\nu+1}e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}} \tag{2.53}$$

on remplace (2.53) dans l'équation (2.42) et on obtient

$$y(r) = y_n(r) = \frac{B_{nl}}{r^{2\nu+1}e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}}\frac{d^n}{dr^n}\left[r^{n+2\nu+1}e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}\right] \tag{2.54}$$

On a trouvé $\Phi_1(r)$ et $y(r)$ donc d'après (2.34) on peut obtenir

$$\upsilon_1(r) = \Phi_1(r)y(r) = \frac{B_{nl}r^{\nu}e^{-r\sqrt{m^2-E^2}}}{r^{2\nu+1)}e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}}\frac{d^n}{dr^n}\left[r^{n+(2\nu+1)}e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \upsilon_1(r) = B_{nl}r^{-(\nu+1)}e^{r\sqrt{m^2-E^2}}\frac{d^n}{dr^n}\left[r^{n+(2\nu+1)}e^{-2r\sqrt{m^2-E^2}}\right] \tag{2.55}$$

Pour $x = 2r\sqrt{m^2-E^2}$ et $\alpha = 2\nu+1$ et on utilise les polynômes de Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$ (voir l'annexe B), l'équation (2.55) devient

$$\upsilon_1(r) = n!B_{nl}\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}x^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}e^{-\frac{x}{2}}L_n^{\alpha}(x)$$

Posons $B = n!B_{nl}\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}$

$$\Longrightarrow \quad \upsilon_1(r) = Bx^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}e^{-\frac{x}{2}}L_n^{\alpha}(x) \tag{2.56}$$

Avec :

$$\alpha = 2\nu + 1 > -1 \quad \Longrightarrow \quad \nu > -1 > 0$$

et $\nu = \sqrt{\eta^2 - \mu^2} \geqslant 0$, donc ce cas est vérifié.

Donc la solution de l'équation (2.31) est :

$$\boxed{\upsilon_1(r) = Bx^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\alpha}(x)} \tag{2.57}$$

avec : $\quad B = n! B_{nl} \left(2\sqrt{m^2 - E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}$, $\alpha = 2\nu + 1$, et $x = 2r\sqrt{m^2 - E^2}$

et :

$$\lambda = \lambda_n = 2n\sqrt{m^2 - E^2} = 2E\mu - 2(\nu + 1)\sqrt{m^2 - E^2}$$

$$\Longrightarrow \quad E\mu = (n + \nu + 1)\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.58}$$

Et on a dans (2.52)

$$E = E_{n,l} = \frac{m(n + \nu + 1)}{\sqrt{\mu^2 + (n + \nu + 1)^2}}$$

On doit remplacé n par $n - 1$ ($n \longrightarrow n - 1$), parce que l'équation (2.58) est vérifiée pour n = -1

Donc l'énergie après le décalage devient

$$\begin{aligned} E\mu &= (n + \nu)\sqrt{m^2 - E^2} \\ E &= E_{n,l} = \frac{m(n + \nu)}{\sqrt{\mu^2 + (n + \nu)^2}} \qquad\qquad n = 0, 1, 2... \end{aligned}$$

Et $L_n^{\alpha}(x) \longrightarrow L_{n-1}^{\alpha}(x)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \upsilon_1(r) = Bx^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_{n-1}^{\alpha}(x), & \text{pour n=1,2...}\,; \\ \upsilon_1(r) = Bx^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_{-1}^{\alpha}(x) = 0, & \text{pour n = 0.} \end{cases}$$

♦ Les solutions de l'équation (2.32)

Pour calculer $\upsilon_2(r)$, on va refaire toutes les étapes du'on a suivi pour trouver $\upsilon_1(r)$. L'équation (2.32) est du type hypergéométrique [11] :

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(r)}{\sigma(r)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}u = 0 \tag{2.59}$$

où : $\tilde{\tau}(r) = 2, \quad \sigma(r) = r, \quad \tilde{\sigma}(r) = (E^2 - m^2)r^2 + 2E\mu r - \nu(\nu - 1).$
posons :

$$\upsilon_2(r) = \Phi_2(r)y(r) \tag{2.60}$$

$$k = 2E\mu \pm 2\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\sqrt{m^2 - E^2}$$

$$\pi(r) = \begin{cases} (\nu - 1) + r\sqrt{m^2 - E^2}, \\ -\nu + r\sqrt{m^2 - E^2}, \\ -\nu - r\sqrt{m^2 - E^2}, \\ (\nu - 1) - r\sqrt{m^2 - E^2}, \end{cases}$$

- **Le 1^{er} cas**

$$\begin{aligned} k &= 2E\mu + 2\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\sqrt{m^2 - E^2} \\ \lambda &= k + \pi' = 2E\mu + 2\nu\sqrt{m^2 - E^2} \\ \pi(r) &= -\nu - r\sqrt{m^2 - E^2} \\ \tau(r) &= \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r) = 2 - 2\nu - 2r\sqrt{m^2 - E^2} \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = r^{-\nu}e^{-r\sqrt{m^2 - E^2}} \tag{2.61}$$

$$\lambda = \lambda_n = 2n\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.62}$$

$$n\sqrt{m^2 - E^2} = E\mu + \nu\sqrt{m^2 - E^2} \implies E = \frac{m(n-\nu)}{\sqrt{\mu^2 + (n-\nu)^2}}$$

$$\rho(r) = r^{-(2\nu-1)}e^{-2r\sqrt{m^2 - E^2}} \tag{2.63}$$

$$\upsilon_2(r) = \Phi_2(r)y(r) = n!B'_{nl}\left(2\sqrt{m^2 - E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(3\beta - 1)} x^{\frac{1}{2}(3\beta - 1)}e^{-\frac{x}{2}}L_n^{\beta}(x)$$

$$\upsilon_2(r) = B' x^{\frac{1}{2}(3\beta-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\beta}(x) \tag{2.64}$$

où : $B' = n! B'_{nl} \left(2\sqrt{m^2 - E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(3\beta-1)}$, $\beta = -2\nu + 1$ et $x = 2r\sqrt{m^2 - E^2}$

$$\beta = -2\nu + 1 > -1 \implies \nu < 1$$

mais on a $\nu = \sqrt{\eta^2 - \mu^2} \geqslant 0$, donc ce cas est rejeté(exclu).

- **Le** 2^{me} **cas**

$$\begin{aligned}
k &= 2E\mu - 2\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\sqrt{m^2 - E^2} \\
\lambda &= k + \pi' = 2E\mu - 2\nu\sqrt{m^2 - E^2} \\
\pi(r) &= (\nu - 1) - r\sqrt{m^2 - E^2} \\
\tau(r) &= \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r) = 2\nu - 2r\sqrt{m^2 - E^2}
\end{aligned}$$

$$\Phi_2 = r^{\nu-1} e^{-r\sqrt{m^2 - E^2}} \tag{2.65}$$

$$\lambda = \lambda_n = 2n\sqrt{m^2 - E^2} \tag{2.66}$$

$$n\sqrt{m^2 - E^2} = E\mu - \nu\sqrt{m^2 - E^2} \implies E = \frac{m(n-\nu)}{\sqrt{\mu^2 + (n+\nu)^2}}$$

$$\rho(r) = r^{(2\nu-1)} e^{-2r\sqrt{m^2 - E^2}} \tag{2.67}$$

$$\upsilon_2(r) = B' x^{\frac{1}{2}(\beta-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\beta}(x) \tag{2.68}$$

où : $B' = n! B'_{nl} \left(2\sqrt{m^2 - E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\beta-1)}$, $\beta = 2\nu - 1$ et $x = 2r\sqrt{m^2 - E^2}$ Avec

$$\beta = 2\nu - 1 > -1 \implies \nu > 0$$

et $\nu = \sqrt{\eta^2 - \mu^2} \geqslant 0$, donc ce cas est vérifié.
Donc la solution de l'équation (2.32) est :

$$\boxed{\upsilon_2(r) = B' x^{\frac{1}{2}(\beta-1)} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\beta}(x)} \tag{2.69}$$

avec : $B' = n! B'_{nl} \left(2\sqrt{m^2 - E^2}\right)^{-\frac{1}{2}(\beta-1)}$, $\beta = 2\nu - 1$ et $x = 2r\sqrt{m^2 - E^2}$

Finalement :

$$\begin{aligned} \upsilon_1(r) &= Bx^{\nu}e^{-\frac{x}{2}}L_{n-1}^{2\nu+1}(x), && (2.70)\\ \upsilon_2(r) &= B'x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}L_{n}^{2\nu-1}(x), && (2.71)\end{aligned}$$

On doit calculé la valeur de B' en fonction de B :

$$\begin{aligned} \frac{d\upsilon_1(r)}{dr} &= 2\sqrt{m^2-E^2}Bx^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[(\nu-\frac{x}{2})L_{n-1}^{2\nu+1}(x)+x(L_{n-1}^{2\nu+1}(x))'\right] && (2.72)\\ (\frac{E\mu}{\nu}-\frac{1+\nu}{r})\upsilon_1 &= Bx^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[\frac{E\mu}{\nu}x-2\sqrt{m^2-E^2}(1+\nu)\right]L_{n-1}^{2\nu+1}(x) && (2.73)\\ (m+\frac{E\eta}{\nu})\upsilon_2 &= B'(m+\frac{E\eta}{\nu})x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}L_{n}^{2\nu-1}(x) && (2.74)\end{aligned}$$

D'après l'équation (2.27) on peut trouver

$$2\sqrt{m^2-E^2}Bx^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[(\nu-\frac{x}{2})L_{n-1}^{2\nu+1}(x)+x\left(L_{n-1}^{2\nu+1}(x)\right)'\right]=Bx^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}$$
$$\times\left[\frac{E\mu}{\nu}x-2\sqrt{m^2-E^2}(1+\nu)\right]L_{n-1}^{2\nu+1}(x)+B'\left[m+\frac{E\eta}{\nu}\right]x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}L_{n}^{2\nu-1}(x)$$

on a $(L_n^{\alpha}(x))'=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$ [12]
pour $x\longrightarrow 0$ $L_n^{\alpha}(0)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$

$$\Longrightarrow \quad B=\frac{\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu}B' \qquad (2.75)$$

Donc (2.70)et (2.71) devient

$$\begin{aligned} \upsilon_1(r) &= \frac{\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu}B'x^{\nu}e^{-\frac{x}{2}}L_{n-1}^{2\nu+1}(x), && (2.76)\\ \upsilon_2(r) &= B'x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}L_{n}^{2\nu-1}(x), && (2.77)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \eta-\nu\\ \eta-\nu & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2\nu(\eta-\nu)}\begin{pmatrix}\mu & \eta-\nu\\ \eta-\nu & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\upsilon_1\\ \upsilon_2\end{pmatrix} \qquad (2.78)$$

D'après (2.76), (2.77) et (2.78) on trouve $f(r)$ et $g(r)$

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{2\nu(\eta-\nu)}\left[\mu\upsilon_1(r)+(\eta-\nu)\upsilon_2\right] \\ &= \frac{B'}{2\nu(\eta-\nu)}x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[\frac{\mu\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu}xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)+(\eta-\nu)L_n^{2\nu-1}(x)\right] \\ &= \frac{B'}{2\nu(\eta-\nu)}x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[f_1xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)+f_2L_n^{2\nu-1}(x)\right] \end{aligned}$$

Avec :

$$f_1=\frac{\mu\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu} \qquad f_2=\eta-\nu$$

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{1}{2\nu(\eta-\nu)}\left[(\eta-\nu)\upsilon_1(r)+\mu\upsilon_2\right] \\ &= \frac{B'}{2\nu(\eta-\nu)}x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[\frac{(\eta-\nu)\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu}xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)+\mu L_n^{2\nu-1}(x)\right] \\ &= \frac{B'}{2\nu(\eta-\nu)}x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[g_1xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)+g_2L_n^{2\nu-1}(x)\right] \end{aligned}$$

Avec :

$$g_1=\frac{(\eta-\nu)\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu} \qquad g_2=\mu$$

La constante de normalisation :

On doit déterminer la constante de normalisation B'

$$\int_0^{+\infty} r^2\|\psi\|dr=\int_0^{+\infty} r^2(f^2+g^2)dr=1 \tag{2.79}$$

Mais on a supposé que : $x=2r\sqrt{m^2-E^2}$ ce qui donne :

$$\frac{1}{\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^3}\int_0^{+\infty} x^2(f^2+g^2)dx=1 \tag{2.80}$$

Donc :

$$\frac{1}{\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^3}\int_0^{+\infty} x^2(f^2+g^2)dx=\frac{1}{(2\sqrt{m^2-E^2})^3}\left[\frac{B'}{2\nu(\eta-\nu)}\right]^2\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{2\nu}\times$$
$$\times\left[\left(f_1^2+g_1^2\right)x^2\left(L_{n-1}^{2\nu+1}(x)\right)^2+\left(f_2^2+g_2^2\right)\left(L_n^{2\nu-1}(x)\right)^2+2\left(f_1f_2+g_1g_2\right)xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)L_n^{2\nu-1}(x)\right]dx$$

On calcule les intégrales terme par terme on utilise les propriètés des polynômes de Laguerre (voir l'annexe B)

$$\begin{aligned}\left(f_1^2+g_1^2\right)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{2\nu+2}\left(L_{n-1}^{2\nu+1}(x)\right)^2 dx &= \left(f_1^2+g_1^2\right)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha_1+1}\left(L_{n-1}^{\alpha_1}(x)\right)^2 dx\\ &= \left(f_1^2+g_1^2\right)(\alpha_1+2n-1)\frac{\Gamma(\alpha_1+n)}{(n-1)!}\\ &= \left(f_1^2+g_1^2\right)(2\nu+2n)\frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Avec : $\alpha_1 = 2\nu+1$ et Γ : appelée fonction gamma(fonction spéciale).(voir l'annexe C)

$$\begin{aligned}\left(f_2^2+g_2^2\right)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{2\nu}\left(L_{n}^{2\nu-1}(x)\right)^2 dx &= \left(f_2^2+g_2^2\right)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha_2+1}\left(L_{n}^{\alpha_2}(x)\right)^2 dx\\ &= \left(f_2^2+g_2^2\right)(\alpha_2+2n+1)\frac{\Gamma(\alpha_2+n+1)}{n!}\\ &= \left(f_2^2+g_2^2\right)(2\nu+2n)\frac{\Gamma(2\nu+n)}{n!}\end{aligned}$$

Avec : $\alpha_2 = 2\nu-1$.

$$\begin{aligned}(f_1f_2+g_1g_2)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{2\nu+1}L_{n-1}^{2\nu+1}(x)L_n^{2\nu-1}(x)dx &= (f_1f_2+g_1g_2)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha_1}L_{n-1}^{\alpha_1}(x)L_n^{\alpha_1-2}(x)dx\\ &= -2\left(f_1f_2+g_1g_2\right)\frac{\Gamma(\alpha_1+n)}{(n-1)!}\\ &= -2\left(f_1f_2+g_1g_2\right)\frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Avec : $\alpha_1 = 2\nu+1$.

Donc :

$$\int_0^{+\infty} r^2(f^2+g^2)dr = \frac{2}{\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^3}\left[\frac{B'}{2\nu(\eta-\nu)}\right]^2 \times$$

$$\times\left[\left(f_1^2+g_1^2\right)(\nu+n)\frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{(n-1)!}+\left(f_2^2+g_2^2\right)(\nu+n)\frac{\Gamma(2\nu+n)}{n!}-2\left(f_1f_2+g_1g_2\right)\frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{(n-1)!}\right]$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
f_1^2+g_1^2 &= \frac{\left[(\eta-\nu)^2+\mu^2\right](m^2-E^2)}{(E\eta-m\nu)^2}=\frac{2\eta(\eta-\nu)\,(m^2-E^2)}{(E\eta-m\nu)^2}\\
f_2^2+g_2^2 &= (\eta-\nu)^2+\mu^2=2\eta(\eta-\nu)\\
f_1f_2+g_1g_2 &= \frac{2\mu(\eta-\nu)\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu}
\end{aligned}$$

On utilise les propriétés de la fonction gamma Γ (voir l'annexe C), et on trouve :

$$\int_0^{+\infty} r^2(f^2+g^2)dr = \frac{B'^2\Gamma(2\nu+n)}{\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^3\nu^2(\eta-\nu)(E\eta-m\nu)n!}\times$$

$$\times\left[\frac{\eta(m^2-E^2)(\nu+n)(2\nu+n)n}{E\eta-m\nu}+\eta(\nu+n)(E\eta-m\nu)-2\mu\sqrt{m^2-E^2}(2\nu+n)n\right]$$

$$=\frac{B'^2\Gamma(2\nu+n)}{\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^3\nu^2(\eta-\nu)(E\eta-m\nu)n!}\left[\frac{\mu E\eta(E\eta+m\nu)}{\sqrt{m^2-E^2}}+\frac{\mu E\eta(E\eta-m\nu)}{\sqrt{m^2-E^2}}-2\mu\frac{E^2\eta^2-m^2\nu^2}{\sqrt{m^2-E^2}}\right]$$

$$=\frac{B'^2\Gamma(2\nu+n)}{\left(2\sqrt{m^2-E^2}\right)^3\nu^2(\eta-\nu)(E\eta-m\nu)n!}\left[\frac{2\mu m^2\nu^2}{\sqrt{m^2-E^2}}\right]$$

puisque :

$$\begin{aligned}
(n+\nu) &= \frac{\mu E}{\sqrt{m^2-E^2}}\\
n(n+2\nu) &= \frac{E^2\eta^2-m^2\nu^2}{m^2-E^2}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} r^2(f^2+g^2)dr=1\Longrightarrow \frac{B'^2\mu m^2\Gamma(2\nu+n)}{4\left(m^2-E^2\right)^2(\eta-\nu)(E\eta-m\nu)n!}=1$$

$$\Longrightarrow B'=2(m^2-E^2)\sqrt{\frac{(\eta-\nu)(E\eta-m\nu)n!}{m\mu\Gamma(2\nu+n)}}$$

Finalement les solutions sont donnée par :

$$\begin{aligned}
f(r) &= \frac{(m^2-E^2)}{\nu}\sqrt{\frac{(E\eta-m\nu)n!}{m\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)}}x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[f_1xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)+f_2L_n^{2\nu-1}(x)\right]\\
g(r) &= \frac{(m^2-E^2)}{\nu}\sqrt{\frac{(E\eta-m\nu)n!}{m\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)}}x^{\nu-1}e^{-\frac{x}{2}}\left[g_1xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)+g_2L_n^{2\nu-1}(x)\right]
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\mu\sqrt{m^2 - E^2}}{E\eta - m\nu} & f_2 = \eta - \nu \\ g_1 &= \frac{(\eta - \nu)\sqrt{m^2 - E^2}}{E\eta - m\nu} & g_2 = \mu \end{aligned}$$

2.4 Les corrections de l'énergie

Pour calculer les corrections relativistes dans le cas de l'atome d'hydrogène, on utilise la théorie des perturbations, qui est applicable lorsque l'Hamiltonien H du système peut être mis sous la forme

$$H = H_0 + \lambda H_{pert} \tag{2.81}$$

λ : paramètre réel sans dimension et petit devant 1 ($\lambda \ll 1$).
où les états et les valeurs propres de H_0 sont connus, et H_{pert} est petit devant H_0.
La correction E_n^1 du premier ordre de l'énergie est alors simplement donnée par $< \psi_n|H_{pert}|\psi_n >$, c'est-à-dire la valeur moyenne de la perturbation dans l'état propre correspondant de l'Hamiltonien principal.[7,13]

Dans cette section, nous cherchons les modifications apportées aux niveaux d'énergie du système et à ses états stationnaires par l'adjonction de la perturbation H_{pert}.

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= < \psi_n|H^{\theta}_{pert}|\psi_n > \\ &= \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^2 \hat{\psi}^{\dagger}_{njlM}(r,\vartheta,\varphi) \left[\frac{e^4}{4}\vec{\theta}.\left(\vec{\alpha} \times \frac{\vec{r}}{r^4}\right) - \frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L}\right] \hat{\psi}_{njl'M'}(r,\vartheta,\varphi) \end{aligned}$$

Avec : $d\Omega$ est l'angle solide situé dans la direction $\Omega(\vartheta,\varphi)$.

$$\begin{aligned} \Delta E_n = &\left(\frac{e^4}{4}\vec{\theta}.\right) \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^{-2} \hat{\psi}^{\dagger}_{njlM}(r,\vartheta,\varphi) \left(\vec{\alpha} \times \vec{r}\right) \hat{\psi}_{njl'M'}(r,\vartheta,\varphi) \\ &- \left(\frac{e^2}{2}\right) \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^{-1} \hat{\psi}^{\dagger}_{njlM}(r,\vartheta,\varphi) (\vec{\theta}.\vec{L}) \hat{\psi}_{njl'M'}(r,\vartheta,\varphi) \\ = &\Delta E_n^1 + \Delta E_n^2 \end{aligned}$$

On calcule le premier intégrale

$$\Delta E_n^1 = \left(\frac{e^4}{4}\vec{\theta}.\right)\int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^{-2}\hat{\psi}^{\dagger}_{njlM}(r,\vartheta,\varphi)\left(\vec{\alpha}\times\vec{r}\right)\hat{\psi}_{njl'M'}(r,\vartheta,\varphi)$$

$$= \left(\frac{e^4}{4}\theta^{ij}\right)\int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^{-2}x_j \begin{pmatrix} f(r)\Omega^{\dagger}_{jlM}(\vartheta,\varphi) & (-1)^{\frac{(l-l'+1)}{2}} g(r)\Omega^{\dagger}_{jlM}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(r)\Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi) \\ (-1)^{\frac{(l-l'+1)}{2}} g(r)\Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(l-l'+1)}{2}}\left(\frac{e^4}{2}\theta^{ij}\right)\int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^{-2}x_j f(r)g(r)\Omega^{\dagger}_{jlM}(\vartheta,\varphi)\ \sigma_i\ \Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi)$$

$$= \left(\frac{e^4}{2}\right)\underbrace{\int_0^{4\pi} d\Omega\Omega^{\dagger}_{jlM}(\vartheta,\varphi)\ \left[\vec{\theta}.\left(\vec{\sigma}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]\ \Omega_{jl'M'}(\vartheta,\varphi)}_{\textit{la partie ongulaire}}\underbrace{\int_0^{\infty} drr^{-1}f(r)g(r)}_{\textit{la partie radiale}}$$

On note que $\frac{\vec{r}}{r}$ ne dépend pa de r (est un vecteur unitaire).

Commençons par la partie radiale $\varrho^{(1)} = \int_0^{\infty} drr^{-1}f(r)g(r)$

$$\int_0^{\infty} drr^{-1}f(r)g(r) = \int_0^{\infty} dxx^{-1}f(r)g(r)$$
$$= \frac{(m^2-E^2)^2(E\eta - m\nu)n!}{m^2\nu^2\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)}\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{2\nu-3}\times$$
$$\times\left[f_1g_1x^2\left(L_{n-1}^{2\nu+1}(x)\right)^2 + f_2g_2\left(L_n^{2\nu-1}(x)\right)^2 + (f_1g_2+f_2g_1)xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)L_n^{2\nu-1}(x)\right]$$
$$= \frac{(m^2-E^2)^2(E\eta - m\nu)n!}{m^2\nu^2\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)}\ \left[I_1+I_2+I_3\right]$$

$$I_1 = f_1g_1\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{2\nu-1}\left(L_{n-1}^{2\nu+1}(x)\right)^2 = f_1g_1\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}\left(L_{n-1}^{\alpha_1}(x)\right)^2$$

Les polynômes de Laguerre est reliés aux fonctions hypergéométriques confluentes (voir l'annexe B) [5,12,14], par :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} F(-n;\alpha+1;x) \tag{2.82}$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx e^{-x} x^{\alpha-1} [F(-n;\gamma;x)]^2 &= \frac{n!\Gamma(\alpha)}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)} \{1 + \frac{n(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha)}{1^2\gamma} + \\ &\quad \frac{n(n-1)(\gamma-\alpha-2)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{1^2 2^2 \gamma(\gamma+1)} + ... \\ &\quad ... + \frac{n(n-1)...1(\gamma-\alpha-n)...(\gamma-\alpha+n-1)}{1^2 2^2 ... n^2 \gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\} \end{aligned} \tag{2.82'}$$

On utilise (2.82), (2.82′) et les propriétés de la fonction gamma (voir l'annexe C) pour trouver I_1 et I_2

$$\begin{aligned} I_1 &= f_1 g_1 \left[\frac{\Gamma(n+\alpha_1)}{(n-1)!\Gamma(\alpha_1+1)}\right]^2 \int_0^\infty dx e^{-x} x^{\alpha_1-2} [F(-n+1;\alpha_1+1;x)]^2 \\ &= f_1 g_1 \left[\frac{\Gamma(n+\alpha_1)}{(n-1)!\Gamma(\alpha_1+1)}\right]^2 \frac{(n-1)!\Gamma(\alpha_1-1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+2)...(\alpha_1+n-1)} \left\{1 + \frac{2(n-1)}{\alpha_1+1}\right\} \\ &= f_1 g_1 \left[\frac{\Gamma(n+\alpha_1)}{(n-1)!\Gamma(\alpha_1+1)}\right]^2 \frac{(n-1)!\Gamma(\alpha_1-1)\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+n)} \left\{\frac{\alpha_1+2n-1}{\alpha_1+1}\right\} \\ &= f_1 g_1 \frac{(\alpha_1+2n-1)\Gamma(\alpha_1+n)}{\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1+1)(n-1)!} \end{aligned}$$

Avec :

$$f_1 g_1 = \frac{\mu(\eta-\nu)(m^2-E^2)}{(E\eta-m\nu)^2}, \qquad \alpha_1 = 2\nu+1.$$

Maintenant on fais la même chose pour I_2, et on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 &= f_2 g_2 \int_0^\infty dx e^{-x} x^{2\nu-3} \left(L_n^{2\nu-1}(x)\right)^2 = f_2 g_2 \int_0^\infty dx e^{-x} x^{\alpha_2-2} \left(L_n^{\alpha_2}(x)\right)^2 \\ &= f_2 g_2 \left[\frac{\Gamma(n+\alpha_2+1)}{n!\Gamma(\alpha_2+1)}\right]^2 \int_0^\infty dx e^{-x} x^{\alpha_2-2} [F(-n;\alpha_2+1;x)]^2 \\ &= f_2 g_2 \frac{(\alpha_2+2n+1)\Gamma(n+\alpha_2+1)}{\alpha_2(\alpha_2-1)(\alpha_2+1)n!} \end{aligned}$$

Avec :

$$f_2 g_2 = \mu(\eta-\nu), \qquad \alpha_2 = 2\nu-1.$$

$$\begin{aligned} I_3 &= (f_1 g_2 + f_2 g_1) \int_0^\infty dx e^{-x} x^{2\nu-2} L_{n-1}^{2\nu+1}(x) L_n^{2\nu-1}(x) \\ &= (f_1 g_2 + f_2 g_1) \int_0^\infty dx e^{-x} x^{\alpha_1-3} L_{n-1}^{\alpha_1}(x) L_n^{\alpha_1-2}(x) \end{aligned}$$

On a la règle de recurrence suivantes [15] :

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha+1} &= x^{-1}[(n+\alpha+1)L_n^{\alpha} - (n+1)L_{n+1}^{\alpha}] \\ L_n^{\alpha-1} &= L_n^{\alpha} - L_{n-1}^{\alpha} \end{aligned}$$

On peut l'utiliser pour trouverI_3

$$\begin{aligned} I_3 = (f_1g_2 + f_2g_1) \ \ [\ \ & (n+\alpha_1-2)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_n^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) \\ & -(n+\alpha_1-2)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_{n-1}^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) \\ & -(n+1)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_{n+1}^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) \\ & +(n+1)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_n^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) \ \ ] \end{aligned}$$

On doit utiliser la formule suivante pour calculer chaque intégrale [12].

$$\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha}L_k^{\alpha}(x)L_n^{\beta}(x) = \frac{\Gamma(n-k+\beta-\alpha)\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(k+1)} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned} (n+\alpha_1-2)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_n^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) &= (n+\alpha_1-2)\frac{\Gamma(1)\Gamma(n+\alpha_1-1)}{\Gamma(0)\Gamma(2)\Gamma(n+1)} = 0 \\ (n+\alpha_1-2)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_{n-1}^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) &= (n+\alpha_1-2)\frac{\Gamma(n+\alpha_1-2)}{\Gamma(n)} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha_1-1)}{\Gamma(n)} \\ (n+1)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_{n+1}^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) &= (n+1)\frac{\Gamma(0)\Gamma(n+\alpha_1)}{\Gamma(-1)\Gamma(2)\Gamma(n+2)} \\ &= -(n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha_1)}{\Gamma(n+2)} \\ (n+1)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}L_n^{\alpha_1-2}(x)L_{n-1}^{\alpha_1}(x) &= (n+1)\frac{\Gamma(1)\Gamma(n+\alpha_1-1)}{\Gamma(0)\Gamma(2)\Gamma(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} &= \frac{n!}{(n-1)!} = n \implies \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} = \lim_{n\to 0}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = \lim_{n\to 0} n = 0 \\ \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} &= n-1 \implies \frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-1)} = \lim_{n\to 0}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} = \lim_{n\to 0}(n-1) = -1 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
I_3 &= (f_1g_2+f_2g_1)\left[-\frac{\Gamma(n+\alpha_1-1)}{\Gamma(n)}+(n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha_1)}{\Gamma(n+2)}\right] \\
&= (f_1g_2+f_2g_1)\left[-\frac{\Gamma(n+\alpha_1-1)}{(n-1)!}+(n+1)\frac{(n+\alpha_1-1)\Gamma(n+\alpha_1-1)}{(n+1)!}\right] \\
&= (f_1g_2+f_2g_1)\frac{(\alpha_1-1)\Gamma(n+\alpha_1-1)}{n!}
\end{aligned}$$

Avec :

$$f_1g_2+f_2g_1=\frac{2\eta(\eta-\nu)\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu}, \qquad \alpha_1=2\nu+1.$$

On a calculer I_1, I_2 et I_3, donc on peut déduire ΔE_n^1

$$\varrho^{(1)}=\int_0^\infty drr^{-1}f(r)g(r)=\frac{(m^2-E^2)^2(E\eta-m\nu)n!}{m\nu^2\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)}\ [f_1g_1\frac{(\alpha_1+2n-1)\Gamma(\alpha_1+n)}{\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1+1)(n-1)!}+$$

$$f_2g_2\frac{(\alpha_2+2n+1)\Gamma(n+\alpha_2+1)}{\alpha_2(\alpha_2-1)(\alpha_2+1)n!}+(f_1g_2+f_2g_1)\frac{(\alpha_1-1)\Gamma(n+\alpha_1-1)}{n!}]$$

$$=\frac{(m^2-E^2)^2(E\eta-m\nu)}{m\nu^2\mu(\eta-\nu)}\ \left[f_1g_1\frac{n(\nu+n)(2\nu+n)}{2\nu(2\nu+1)(\nu+1)}+f_2g_2\frac{(\nu+n)}{2\nu(2\nu-1)(\nu-1)}+2\nu(f_1g_2+f_2g_1)\right]$$

$$=\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3\frac{\eta(m^2-E^2)(1-\nu^2)+3E\mu^2(E\eta-m)}{m^2\mu\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}$$

Où

$$\begin{aligned}
f_1g_1 &= \frac{\mu(\eta-\nu)(m^2-E^2)}{(E\eta-m\nu)^2}. \\
f_2g_2 &= \mu(\eta-\nu). \\
f_1g_2+f_2g_1 &= \frac{2\eta(\eta-\nu)\sqrt{m^2-E^2}}{E\eta-m\nu}.
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve $\varrho^{(1)}$ c'est la même résultat obtenu par [16] Alors on peut écrire ΔE_n^1 comme suit :

$$\Delta E_n^1=\left(\frac{e^4}{2}\right)\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3\frac{\eta(m^2-E^2)(1-\nu^2)+3E\mu^2(E\eta-m)}{m^2\mu\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}$$
$$\times\int_0^{4\pi}d\Omega\Omega_{jlM}^\dagger(\vartheta,\varphi)\ \left[\vec{\theta}.\left(\vec{\sigma}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]\ \Omega_{jl'M'}(\vartheta,\varphi)$$

Revenons a la partie angulaire $\Theta^{(1)} = \int_0^{4\pi} d\Omega \Omega^{\dagger}_{jlM}(\vartheta,\varphi) \ \left[\vec{\theta}.\left(\vec{\sigma} \times \frac{\vec{r}}{r}\right)\right] \ \Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi)$
On peut écrire :

$$\left(\vec{S} \times \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\left[(S_y z - S_z y)\vec{i} - (S_x z - S_z x)\vec{j} + (S_x y - S_y x)\vec{k}\right]$$

On doit choisir la direction $\vec{k}$ $(\theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = \theta \neq 0)$, donc :

$$\vec{\theta}.\left(\vec{\sigma} \times \frac{\vec{r}}{r}\right) \quad = \quad \theta_3 \left(\vec{\sigma} \times \frac{\vec{r}}{r}\right)_z$$

On a :

$$\left(\vec{S} \times \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\left[(S_y z - S_z y)\vec{i} - (S_x z - S_z x)\vec{j} + (S_x y - S_y x)\vec{k}\right]$$

Et on a les formes sphériques suivante [7] :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\pi}{3} r[Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi) - Y_1^1(\vartheta,\varphi)] \\ y &= i\frac{2\pi}{3} r[Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi) + Y_1^1(\vartheta,\varphi)] \\ z &= \frac{4\pi}{3} r Y_1^0(\vartheta,\varphi) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \left(\vec{\sigma} \times \frac{\vec{r}}{r}\right)_z &= \frac{1}{r}(S_x y - S_y x) \\ &= i\frac{2\pi}{3}\left[(S_x + iS_y)Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi) + (S_x - iS_y)Y_1^1(\vartheta,\varphi)\right] \\ &= i\frac{2\pi}{3}\left[S_+ Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi) + S_- Y_1^1(\vartheta,\varphi)\right] \end{aligned}$$

Avec : $\quad S_{\pm} = S_x \pm iS_y$

On doit écrire donc :

$$\Theta^{(1)} = i\frac{2\pi}{3}\theta \int_0^{4\pi} d\Omega[S_+ Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi) + S_- Y_1^1(\vartheta,\varphi)] \left(\begin{array}{cc} A_{jlM} Y_l^{\dagger\ M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) & B_{jlM} Y_l^{\dagger\ M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{array} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{c} A_{jlM'} Y_l^{M'-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ B_{jlM'} Y_l^{M'+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{array} \right)$$

Maintenant on calcule le deuxième intégrale ΔE_n^2

$$\Delta E_n^2 = \left(-\frac{e^2}{2}\right)\int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^{-1}\hat{\psi}_{njlM}^{\dagger}(r,\vartheta,\varphi)(\vec{\theta}.\vec{L})\hat{\psi}_{njl'M'}(r,\vartheta,\varphi)$$

$$= \left(-\frac{e^2}{2}\right)\int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{\infty} drr^{-1}\begin{pmatrix} f(r)\Omega_{jlM}^{\dagger}(\vartheta,\varphi) & (-1)^{\frac{(l-l'+1)}{2}}g(r)\Omega_{jlM}^{\dagger}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}(\vec{\theta}.\vec{L})\times$$

$$\times\begin{pmatrix} f(r)\Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi) \\ (-1)^{\frac{(l-l'+1)}{2}}g(r)\Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{e^2}{2}\right)\underbrace{\int_0^{4\pi} d\Omega\Omega_{jlM}^{\dagger}(\vartheta,\varphi)(\vec{\theta}.\vec{L})\Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi)}_{\textit{la partie ongulaire}}\underbrace{\int_0^{\infty} drr^{-1}(f(r)^2+g(r)^2)}_{\textit{la partie radiale}}$$

D'abord on va calculer la partie radiale $\varrho^{(2)} = \int_0^{\infty} drr^{-1}(f(r)^2+g(r)^2)$

$$\int_0^{\infty} drr^{-1}(f(r)^2+g(r)^2) = \int_0^{\infty} dxx^{-1}(f(r)^2+g(r)^2)$$

$$= \frac{(m^2-E^2)^2(E\eta-m\nu)n!}{m\nu^2\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)}\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{2\nu-3}\times$$

$$\times\left[(f_1^2+g_1^2)x^2\left(L_{n-1}^{2\nu+1}(x)\right)^2+(f_2^2+g_2^2)\left(L_n^{2\nu-1}(x)\right)^2+(f_1f_2+g_1g_2)xL_{n-1}^{2\nu+1}(x)L_n^{2\nu-1}(x)\right]$$

$$= \frac{(m^2-E^2)^2(E\eta-m\nu)n!}{m\nu^2\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)}\quad[J_1+J_2+J_3]$$

On doit utilisé (2.82), (2.82′) et les propriétés de la fonction gamma (voir l'annexe C) pour trouver J_1 et J_2

Posons $\alpha_1 = 2\nu+1$

$$\begin{aligned} J_1 &= (f_1^2+g_1^2)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{2\nu-1}\left(L_{n-1}^{2\nu+1}(x)\right)^2 \\ &= (f_1^2+g_1^2)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{\alpha_1-2}\left(L_{n-1}^{\alpha_1}(x)\right)^2 \\ &= (f_1^2+g_1^2)\frac{(\alpha_1+2n-1)\Gamma(n+\alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_1-1)(\alpha_1+1)(n-1)!} \\ &= (f_1^2+g_1^2)\frac{(\nu+n)\Gamma(n+2\nu+1)}{2\nu(2\nu+1)(\nu+1)(n-1)!} \end{aligned}$$

Posons $\alpha_2 = 2\nu-1$

$$\begin{aligned} J_2 &= (f_2^2+g_2^2)\int_0^{\infty} dxe^{-x}x^{2\nu-3}\left(L_n^{2\nu-1}(x)\right)^2 \\ &= (f_2^2+g_2^2)\frac{(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)}{2\nu(2\nu-1)(\nu-1)n!} \end{aligned}$$

Et a l'aide de la règle de recurrence et la formule (2.83) on calcule J_3

$$\begin{aligned}
J_3 &= (f_1 f_2 + g_1 g_2) \int_0^\infty dx e^{-x} x^{2\nu-2} L_{n-1}^{2\nu+1}(x) L_n^{2\nu-1}(x) \\
&= (f_1 f_2 + g_1 g_2) \left[-(n+\alpha_1-2) \frac{\Gamma(n+\alpha_1-2)}{\Gamma(n)} + (n+1) \frac{\Gamma(n+\alpha_1)}{\Gamma(n+2)} \right] \\
&= (f_1 f_2 + g_1 g_2) \frac{(\alpha_1-1)\Gamma(n+\alpha_1-1)}{n!} \\
&= 2\nu (f_1 f_2 + g_1 g_2) \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!}
\end{aligned}$$

On obtient à la fin

$$\int_0^\infty drr^{-1}(f(r)^2 + g(r)^2) = \frac{(m^2-E^2)^2(E\eta - m\nu)n!}{m\nu^2\mu(\eta-\nu)\Gamma(2\nu+n)} \; [(f_1^2+g_1^2)\frac{(\nu+n)\Gamma(n+2\nu+1)}{2\nu(2\nu+1)(\nu+1)(n-1)!} +$$

$$(f_2^2+g_2^2)\frac{(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)}{2\nu(2\nu-1)(\nu-1)n!} + 2\nu(f_1 f_2 + g_1 g_2)\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!}]$$

$$= \frac{(m^2-E^2)^2(E\eta - m\nu)}{m\nu^2\mu(\eta-\nu)} \; [(f_1^2+g_1^2)\frac{n(\nu+n)(n+2\nu)}{2\nu(2\nu+1)(\nu+1)} +$$

$$(f_2^2+g_2^2)\frac{(\nu+n)}{2\nu(2\nu-1)(\nu-1)} + 2\nu(f_1 f_2 + g_1 g_2)]$$

$$\varrho^{(2)} = 2\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{3E\eta(E\eta-m) - m^2(\nu^2-1)}{m^2\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}$$

Donc :

$$\Delta E_n^2 = -e^2\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{3E\eta(E\eta-m) - m^2(\nu^2-1)}{m^2\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}$$

$$\int_0^{4\pi} d\Omega\Omega_{jlM}^\dagger(\vartheta,\varphi)(\vec{\theta}.\vec{L})\Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi)$$

Ensuite on va calculer la partie angulaire $\Theta^{(2)} = \int_0^{4\pi} d\Omega\Omega_{jlM}^\dagger(\vartheta,\varphi)(\vec{\theta}.\vec{L})\Omega_{jlM'}(\vartheta,\varphi)$

On a

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta^{jk} \quad \Longrightarrow \quad \theta_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_{321}\theta^{21} + \frac{1}{2}\varepsilon_{312}\theta^{12} = \theta^{12} \\
\vec{\theta}.\vec{L} &= \theta_3 L_z = \theta L_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta^{(2)} &= \theta\int_0^{4\pi} d\Omega \begin{pmatrix} A_{jlM}Y_l^{\dagger\ M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) & B_{jlM}Y_l^{\dagger\ M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix} L_z \begin{pmatrix} A_{jlM'}Y_l^{M'-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ B_{jlM'}Y_l^{M'+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix} \\ &= \theta\int_0^{4\pi} d\Omega \begin{pmatrix} A_{jlM}Y_l^{\dagger\ M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) & B_{jlM}Y_l^{\dagger\ M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M'-\frac{1}{2})A_{jlM'}Y_l^{M'-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ (M'+\frac{1}{2})B_{jlM'}Y_l^{M'+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Avec : $L_zY_l^M(\vartheta,\varphi) = MY_l^M(\vartheta,\varphi)$

Les règles de choix pour les transitions possibles entre les niveaux $(Nl_j^M \to Nl_j^{M'})$ sont $\Delta l = 0$ et $\Delta M = 0, 1$, où $N = n + |\eta|$ décrit le nombre quantique principal non relativiste. On doit prendre $N = 2$, et on calcule les corrections pour les niveaux $2P_{1/2}$ et $2P_{3/2}$

2.4.1 Les corrections pour le niveau $2P_{1/2}$

Le niveau $2P_{1/2}$ correspond à $(n = 1, j = \frac{1}{2}, l = 1, M = \pm\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned}\Delta E_{2P_{1/2}} &= \Delta E^1_{2P_{1/2}} + \Delta E^2_{2P_{1/2}} \\ &= \left(\frac{e^4}{2}\right)\varrho^{(1)}_{2P_{1/2}}\Theta^{(1)}_{2P_{1/2}} - \left(\frac{e^2}{2}\right)\varrho^{(2)}_{2P_{1/2}}\Theta^{(2)}_{2P_{1/2}}\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}\varrho^{(1)} &= \left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{\eta(m^2-E^2)(1-\nu^2)+3E\mu^2(E\eta-m)}{m^2\mu\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)} \\ \varrho^{(2)} &= 2\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{3E\eta(E\eta-m)-m^2(\nu^2-1)}{m^2\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}\end{aligned}$$

Les corrections angulaires pour $2P_{1/2}$ correspondantes

$$\Theta^{(1)}_{2P_{1/2}} = i\frac{2\pi}{3}\theta\int_0^{4\pi} d\Omega[S_+Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi)+S_-Y_1^1(\vartheta,\varphi)] \begin{pmatrix} A_{jlM}Y_l^{\dagger\ M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) & B_{jlM}Y_l^{\dagger\ M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} A_{jlM'}Y_l^{M'-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ B_{jlM'}Y_l^{M'+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}$$

On a la propriété d'orthogonalité [7] $\int_0^{4\pi} d\Omega Y_l^{\dagger\ M}(\vartheta,\varphi)Y_{l'}^{M'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{MM'}$

et [7] $Y_1^{\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$, $Y_1^0(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$

on applique l'integration par partie et on trouve

$$\Theta^{(1)}_{2P_{1/2}} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Theta^{(2)}_{2P_{1/2}} &= \theta \int_0^{4\pi} d\Omega \begin{pmatrix} A_{jlM} Y_l^{\dagger\ M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) & B_{jlM} Y_l^{\dagger\ M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M'-\frac{1}{2}) A_{jlM'} Y_l^{M'-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ (M'+\frac{1}{2}) B_{jlM'} Y_l^{M'+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \theta \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\varrho^{(2)}(n=1, j=\tfrac{1}{2}, l=1, M=\pm\tfrac{1}{2}) = 2\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{3E\eta(E\eta-m)-m^2(\nu^2-1)}{m^2\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{2P_{1/2}} &= -\left(\frac{e^2}{2}\right) \varrho^{(2)}_{2P_{1/2}} \left[\pm\frac{2}{3}|\theta|\right] && (2.84) \\
&= \mp 6.57668 \times 10^6 |\theta|\ (eV)^3 && (2.85)
\end{aligned}$$

Selon [17] la précision théorique actuelle sur le déplacement de Lamb de $2P$ est d'environ 0.08 kHz. De la division (2.85), nous obtenons la borne :

$$\theta \lesssim (4GeV)^{-2} \tag{2.86}$$

2.4.2 Les corrections pour le niveau $2P_{3/2}$

Le niveau $2P_{3/2}$ correspond à $(n=0, j=\frac{3}{2}, l=1, M=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2})$.

$$\begin{aligned}
\Delta E_{2P_{3/2}} &= \Delta E^1_{2P_{3/2}} + \Delta E^2_{2P_{3/2}} \\
&= \left(\frac{e^4}{2}\right) \varrho^{(1)}_{2P_{3/2}} \Theta^{(1)}_{2P_{3/2}} - \left(\frac{e^2}{2}\right) \varrho^{(2)}_{2P_{3/2}} \Theta^{(2)}_{2P_{3/2}}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\varrho^{(1)} &= \left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{\eta(m^2-E^2)(1-\nu^2)+3E\mu^2(E\eta-m)}{m^2\mu\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)} \\
\varrho^{(2)} &= 2\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{3E\eta(E\eta-m)-m^2(\nu^2-1)}{m^2\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}
\end{aligned}$$

Les corrections angulaires pour $2P_{3/2}$ correspondantes

$$\Theta^{(1)}_{2P_{3/2}} = i\frac{2\pi}{3}\theta \int_0^{4\pi} d\Omega [S_+ Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi) + S_- Y_1^1(\vartheta,\varphi)] \begin{pmatrix} A_{jlM} Y_l^{\dagger\ M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) & B_{jlM} Y_l^{\dagger\ M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A_{jlM'} Y_l^{M'-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ B_{jlM'} Y_l^{M'+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}$$

On a la propriété d'orthogonalité [7] $\int_0^{4\pi} d\Omega Y_l^{\dagger\ M}(\vartheta,\varphi) Y_{l'}^{M'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{MM'}$

et [7] $Y_1^{\pm 1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$, $Y_1^0(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$

on applique l'integration par partie et on trouve

$$\Theta^{(1)}_{2P_{3/2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \Theta^{(2)}_{2P_{3/2}} &= \theta \int_0^{4\pi} d\Omega \begin{pmatrix} A_{jlM} Y_l^{\dagger\ M-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) & B_{jlM} Y_l^{\dagger\ M+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M'-\frac{1}{2}) A_{jlM'} Y_l^{M'-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \\ (M'+\frac{1}{2}) B_{jlM'} Y_l^{M'+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \theta \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\varrho^{(2)}(n=0, j=\frac{3}{2}, l=1, M=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}) = 2\left(\sqrt{m^2-E^2}\right)^3 \frac{3E\eta(E\eta-m)-m^2(\nu^2-1)}{m^2\nu(\nu^2-1)(4\nu^2-1)}$

$$\Delta E_{2P_{3/2}} = -\left(\frac{e^2}{2}\right)\varrho^{(2)}_{2P_{3/2}}\left[\pm|\theta|, \pm\frac{1}{3}|\theta|\right] \tag{2.87}$$

$$= 1.578 \times 10^6 \left[\pm|\theta|, \pm\frac{1}{3}|\theta|\right](eV)^3 \tag{2.88}$$

De la division (2.88), nous obtenons la borne [17] :

$$\theta \lesssim (2GeV)^{-2} \quad ou \quad \theta \lesssim (1.2GeV)^{-2} \tag{2.89}$$

La transition entre les états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$

Il est irrité de mentionner que le second terme de la perturbation dans (2.15) n'enlève pas la dégénérescence des états des niveaux d'énergie, parce qu'il est une matrice non diagonale. Cependant, par exemple, les éléments de matrice non nuls entre les états $2S_{1/2}(n=1, j=1/2, l=0, M=\pm 1/2)$ et $2P_{1/2}(n=1, j=1/2, l=1, M=\pm 1/2)$ de la règle sélection $\Delta L = 1$ et $\Delta M = 0, \pm 1$ donne la transition possible [5] :

$$< 2P_{1/2}|\frac{e^4}{4}\vec{\theta}.\left(\vec{\alpha}\times\frac{\vec{r}}{r^4}\right)|2S_{1/2} >= \frac{e^4}{4}\varrho_{2S_{1/2}\to 2P_{1/2}}\Theta_{2S_{1/2}\to 2P_{1/2}} \tag{2.90}$$

où

$$\Theta_{2S_{1/2}\to 2P_{1/2}} = \frac{2}{3}\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

et

$$\varrho_{2S_{1/2}\to 2P_{1/2}} = \frac{2(m^2 - E_1^2)^{3/2}E_1}{m^2}\frac{m + 2m\nu_1 - 3E_1\eta}{\nu_1(4\nu_1^2 - 1)(\nu_1^2 - 1)} \tag{2.92}$$

avec [5] :

$$\eta = 1, \quad \nu_1 = \sqrt{1 - e^4}, \quad E_1 = \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{e^2}{1+\nu_1}\right)^2}}$$

A partir de (2.90)-(2.92) il y'a une division d'énergie des niveaux égale [5] :

$$\Delta E_{2S_{1/2}\to 2P_{1/2}} = 2\frac{e^4}{4}\frac{4\left(\sqrt{m^2 - E^2}\right)^3 E_1}{3m^2}\frac{m + 2m\nu_1^2 - 3E_1}{\nu_1(4\nu_1^2 - 1)(\nu_1^2 - 1)}|\theta| \simeq \alpha|\Delta E_{2P_{1/2}}|. \tag{2.93}$$

2.5 Conclusion

La non commutativité d'un espace-temps enlève la dégénérescence des niveaux d'énergie.
La division (2.93) est très similaire à l'effet Zeeman. Cependant, il reste toujours aussi important dans le cas du traitement de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la QCD non commutative. Ce terme est nécessaire pour conserver l'invariance de l'équation de Dirac modifié sous les carte Seiberg-Witten.

CHAPITRE 3

L'équation de Dirac non commutative avec le décalage de Bopp

Dans ce chapitre, on doit appliquer le décalage de Bopp pour résoudre le potentiel coulombien dans un espace non commutatif, et pour cela on trouve l'équation de Dirac modifiée de l'atome d'hydrogène.

3.1 L'équation de Schrodinger

L'équation de Schrodinger joue un rôle fondamental en mécanique quantique car elle régit l'évolution dans le temps du système physique.

Considérons un atome d'hydrogène formé d'un noyau et d'un electron avec une charge -e ($e > 0$), et une masse m dans un champ Coulombien. En mécanique quantique l'évolution de la fonction d'onde est décrite par l'équation de Schrodinger. [18]

$$\imath\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \hat{H}\psi(x) \tag{3.1}$$

est une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps.

$$\hat{H} = (\vec{\alpha}.\vec{p}) + \gamma^o m + eA_o(q) \tag{3.2}$$

où $\hat{H}$ est l'hamiltonien de Dirac.

et le potentiel Coulombien est donnée par

$$A_o(q) = A_o(\hat{x}_i) = -\frac{Ze}{r} \tag{3.3}$$

avec $\quad r = \sqrt{\hat{x}_i \hat{x}_i}$, et Z = 1.

3.2 Le potentiel de coulomb modifié

Dans la méthode de Bopp shift on remplace les variables non commutatives au variables commutatives comme suit :

$$\hat{p}_i = p_i$$
$$\hat{x}_i = x_i - \tfrac{1}{2}\theta_{ij} p_j$$

donc le potentiel de Coulomb modifie est donnée par

$$\begin{aligned}
A_o(\hat{x}_i) &= -\frac{e}{\sqrt{\hat{x}_i \hat{x}_i}} \\
&= -\frac{e}{\sqrt{(x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij} p_j)(x_i - \frac{1}{2}\theta_{ik} p_k)}} \\
&= -\frac{e}{\sqrt{x_i x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij} p_j x_i - \frac{1}{2}\theta_{ik} x_i p_k + O(\theta^2)}} \\
&= -\frac{e}{\sqrt{x_i x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}(x_i p_j - \imath\delta_{ij}) - \frac{1}{2}\theta_{ik} x_i p_k + O(\theta^2)}} \\
&= -\frac{e}{\sqrt{x_i x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij} x_i p_j + \frac{\imath}{2}\theta_{ii} - \frac{1}{2}\theta_{ik} x_i p_k + O(\theta^2)}}
\end{aligned}$$

Puisque θ_{ij} est antisymétrique, donc $\theta_{ii} = 0$

$$\begin{aligned}
A_o(\hat{x}_i) &= -\frac{e}{\sqrt{x_i x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij} x_i p_j - \frac{1}{2}\theta_{ik} x_i p_k + O(\theta^2)}} \\
&= -\frac{e}{\sqrt{x_i x_i - \theta_{ij} x_i p_j + O(\theta^2)}} \\
&= -\frac{e}{\sqrt{r^2 - \theta_{ij} x_i p_j + O(\theta^2)}} \\
&= -\frac{e}{r\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}\theta_{ij} x_i p_j + O(\theta^2)}}
\end{aligned}$$

on a : $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$

donc

$$\begin{aligned} A_o(\hat{x}_i) &= -\frac{e}{r}\left[1 + \frac{1}{2r^2}\theta_{ij}x_ip_j + O(\theta^2)\right] \\ &= -\frac{e}{r} - \frac{e}{2r^3}\theta_{ij}x_ip_j + O(\theta^2) \\ &= -\frac{e}{r} - \frac{e}{2r^3}\varepsilon_{ijk}\theta_kx_ip_j + O(\theta^2) \\ &= -\frac{e}{r} - \frac{e}{2r^3}\theta_k(r\times p)_k + O(\theta^2) \\ &= -\frac{e}{r} - \frac{e}{2r^3}\theta_kL_k + O(\theta^2) \\ &= -\frac{e}{r} - \frac{e}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2) \end{aligned}$$

finalement

$$A_o(\hat{x}_i) = -\frac{e}{r} - \frac{e}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2) \tag{3.4}$$

avec : $\theta_{ij} = \varepsilon_{ijk}\theta_k$, ($\varepsilon^{ijk}$: le symbole de Levi-Civita)

et $L_k = (r\times p)_k = \varepsilon^{ijk}x_ip_j$, ($L$: est l'opérateur de moment angulaire)

3.3 L'hamiltonien modifié

On remplace (3.4) dans l'hamiltonien (3.2), et on trouve :

$$\hat{H} = (\vec{\alpha}.\vec{p}) + \gamma^o m - eA_o(q) = (\vec{\alpha}.\vec{p}) + \beta m - \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2) \tag{3.5}$$

Où

$$\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}^\theta_{pert} \tag{3.6}$$

$$\hat{H}_o = (\vec{\alpha}.\vec{p}) + \beta m - \frac{e^2}{r} \tag{3.7}$$

$$\hat{H}^\theta_{pert} = -\frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2) \tag{3.8}$$

avec $\gamma^o = \beta$
où $\hat{H}_o$ est l'hamiltonien relativiste de l'atome d'hydrogène

les terme de $\hat{H}^{\theta}_{pert}$ sont appelés termes de structure fine.

L'équation de Dirac modifie prend la forme suivante :

$$\imath\partial_o\psi(x) = \left[(\vec{\alpha}.\vec{p}) + \gamma^o m - \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L} + O(\theta^2)\right]\psi(x) \tag{3.9}$$

3.4 Conclusion

On remarque que sur un espace-temps non commutatif l'équation du Dirac a un terme de plus sous forme d'une perturbation ($\hat{H}^{\theta}_{pert} = -\frac{e^2}{2r^3}\vec{\theta}.\vec{L}$)

Par rapport à l'équation de Dirac non commutative modifiée (2.15), il manque un terme qui est due à l'invariance des cartes de Seiberg-Witten (l'équation de Dirac (3.9) n'est pas invariante du groupe de jauge non commutatif U(1)), et qui joue le role d'un potentiel vectoriel.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la géométrie non commutative et l'application sur un atome d'hydrogène plongée dans un potentiel Coulombien et nous avons exposé deux approches pour trouver l'équation de Dirac modifiée (non commutative) pour cet atome. Et nous avons utilisé la méthode de Nikiforov et Uvarov et nous avons suivi la méthode des perturbations pour l'équation de Dirac pour calculé des corrections non commutative de l'énergie.

La première approche, nous avons proposé une action non commutative invariante pour une particule de Dirac sous les transformations de jauges infinitésimales généralisées. En utilisant les cartes de Seiberg-Witten (Seiberg-Witten maps) et le produit de Moyal (produit star), Nous avons généralisé l'équation du mouvement avec un espace-espace non commutatif et nous avons dérivé l'équation de Dirac modifiée pour un potentiel de Coulomb pour le premier ordre de θ.
Pour la deuxième approche, nous avons appliqué le décalage de Bopp (Bopp shift) sur le potentiel Coulombien dans l'hamiltonien de système et nous avons obtenu un potentiel de Coulomb modifié, pour cela nous avons arrivé à trouver l'équation de Dirac non commutative (modifiée).
Les deux approches nous ont conduit à trouver presque la même équation de Dirac non commutative avec des termes supplémentaires à l'équation de Dirac commutative, mais avec la premiere approche on a un terme de plus par rapport a l'équation de Dirac q'on a trouvé avec le Bopp shift qui est similaire au terme d'interaction décrivant des particules chargées dans un champ magnétique non nulle. Ce terme non diagonal est un potentiel vectoriel en raison de l'invariance de l'équation de Dirac modifiée aux cartes de Seiberg-Witten .

Nous avons aussi calculé les niveaux d'énergies avec la méthode de Nikiforov et Uvarov, et nous avons constaté que les corrections non commutatives de l'équation de Dirac de l'atome d'hydrogène enleverit la dégénérescence des états des niveaux d'énergie.

Annexe A

Résolution d'une équation différentielle pour les fonction spéciales

Dans un grand nombre de problèmes importants de la physique théorique et mathématique, on est conduit à l'équation différentielle

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0 \tag{3.10}$$

Qui s'appelle équation généralisée du type hypergéométrique. Dans laquelle $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\tilde{\tau}(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 1.
Mettre l'équation (3.10) sous une forme plus simple au moyen du changement $u = \varphi(z)y(z)$
La fonction $\varphi(z)$ se définira par l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z) \tag{3.11}$$

dans laquelle

$$\pi(z) = \frac{1}{2}[\tau(z) - \tilde{\tau}(z)] \tag{3.12}$$

est un polynôme de degré non supérieur à 1.
L'équation (3.10) devient

$$y'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y = 0 \tag{3.13}$$

où
$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z)$

$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tau(\tilde{z}) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z)$
Posons $\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z)$ (λ est une constante), l'équation (3.13) deviendra donc

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \tag{3.14}$$

où est une équation du type hypergéométrique, et ses solutions des fonction du type hypergéométrique.
on définir le polynôme $\pi(z)$ et la constante λ pr :

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0$$

où

$$k = \lambda - \pi'(z) \tag{3.15}$$

Supposant provisoirement la constante k connue, on peut expliciter $\pi(z)$ dans l'équation du second degré :

$$\pi(r) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} \tag{3.16}$$

$\pi(z)$ étant un polynôme, le radicande doit être le carré d'un polynôme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que soit nul le discriminant du polynôme du second degré sous le signe de la racine. Cette condition nous conduit à l'équation, en général du second degré, pour la constante k.

Une fois k trouvé, on cherche $\pi(z)$ par la formule (3.16), puis $\varphi(z)$, $\tau(z)$ et λ à l'aide des formules (3.11), (3.12) et (3.15).

les solution de l'équation (4.5) sont les polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$. pour $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$.
Ces polynômes se laissent expliciter par la *formule de Rodrigues*

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}\left[\sigma^n\rho(z)\right]^{(n)} \tag{3.17}$$

dans laquelle B_n est une constante de normalisation et la fonction $\rho(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z) \tag{3.18}$$

Annexe B

Les polynômes de Laguerre et leurs propriétés

Les polynômes de Laguerre sont définis par :

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n+\alpha} e^{-x} \right) \tag{3.19}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n+\alpha} e^{-x} \right) = n! e^{-x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x) \tag{3.20}$$

sont les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre appeler équation de Laguerre :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{3.21}$$

La fonction génératrice pour les polynômes de Laguerre est

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \tag{3.22}$$

Le n-ième polynôme de Laguerre satisfait l'équation différentielle suivante :

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0 \tag{3.23}$$

On a aussi la suite récurrente suivante :

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \tag{3.24}$$

Et les règle de recurrence suivantes

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha+1} &= \frac{1}{x}[(n+\alpha+1)L_n^{\alpha} - (n+1)L_{n+1}^{\alpha} \\ L_n^{\alpha-1} &= L_n^{\alpha} - L_{n-1}^{\alpha} \end{aligned}$$

Les polynômes satisfont la propriété

$$xL_n'(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \tag{3.25}$$

Les polynômes de Laguerre généralisés sont orthogonaux sur $[0, \infty)$ par rapport à la fonction de poids $x^\alpha e^{-x}$:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{nm} \tag{3.26}$$

et

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\beta(x) L_k^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(n-k+\beta-\alpha)\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(k+1)} \tag{3.27}$$

Les polynômes de Laguerre généralisés obéissent à l'équation différentielle

$$xL_n^{\alpha\prime\prime}(x) + (\alpha+1-x)L_n^{\alpha\prime}(x) + nL_n^\alpha(x) = 0 \tag{3.28}$$

En différentiant la représentation en série d'un polynôme de Laguerre généralisé k fois conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} L_n^\alpha(x) = (-1)^k L_{n-k}^{\alpha+k}(x) \tag{3.29}$$

En utilisant la règle de récurrence

$$xL_n^\alpha(x) = -(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (\alpha+2n+1)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) \tag{3.30}$$

et on déduire que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+1} (L_n^\alpha(x))^2 dx &= \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [xL_n^\alpha(x)] L_n^\alpha(x) dx \\
&= -(n+1) \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_{n+1}^\alpha(x) L_n^\alpha(x) dx \\
&\quad +(\alpha+2n+1) \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(x) dx \\
&\quad -(n+\alpha) \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_{n-1}^\alpha(x) L_n^\alpha(x) dx \\
&= (\alpha+2n+1)\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}
\end{aligned}$$

Les polynômes de Laguerre peuvent être reliés aux fonctions hypergéométriques, plus précisément aux fonctions hypergéométriques confluentes, par

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F(-n; \alpha+1; x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1}{n!\Gamma(\alpha+1)} F(-n; \alpha+1; x) \tag{3.31}$$

avec

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{\alpha-1}[F(-n;\gamma;x)]^2 = \frac{n!\Gamma(\alpha)}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\{1+\frac{n(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha)}{1^2\gamma}+$$
$$\frac{n(n-1)(\gamma-\alpha-2)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{1^2 2^2\gamma(\gamma+1)}+...$$
$$...+\frac{n(n-1)...1(\gamma-\alpha-n)...(\gamma-\alpha+n-1)}{1^2 2^2...n^2\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\} \qquad (3.31')$$

Annexe C

La fonction Gamma et leurs propriétés

La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{3.32}$$

quand la partie réelle de z est strictement positive, $Re(z) > 0$.

La formule d'Euler donne une expression de la fonction Γ pour toute valeur de z complexe hormis les valeurs de z entières négatives où la fonction possède des poles :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)} \tag{3.33}$$

En intégrant par parties l'équation (4.23), on peut facilement montrer que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{3.34}$$

En vérifiant que $\Gamma(1) = 1$, on obtient par récurrence que

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{3.35}$$

Bibliographie

[1] R.J.Szabo, *Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces*, Physics Reports 378 (2003), [arXiv :hep-th/0109162v4] ;
A.R.Camacho and R.J.Szabo, *Introduction to Noncommutative Field Theory*, 2009.

[2] N.Seiberg and E.Witten, *String theory and noncommutative geometry*, J. High Energy Phys.9909, 032 (1999).

[3] K.Ülker and B.Yapiskan, *Seiberg-Witten Maps to All Orders*, Phys. Rev. D77, 065006 (2008), arXiv :0712.0506v1.

[4] A.Stern, *Noncommutative Point Sources*, Phys. Rev.D78, 065006 (2008), arXiv :0709.3831v1[hep-th].

[5] L.Khodja and S.Zaim, *New tratment of the noncommutative Dirac équation with a coulomb potential*, Int. J. Mod. Phys. A27, 1250100 (2012), arXiv :1110.3532.

[6] N.Mebarki,S.Zaim,L.Khodja and H.Aisaoui, *Gauge gravity in noncommutative de Sitter space and pair ceation*, Phys. Scripta 78, 045101 (2008).

[7] C.C-Tannoudji, F.Laloë, *Mécanique Quantique I et II*, Hermann, Paris (1998).

[8] J.Hladik,M.Chryos,P-E.Hladik. *Mécanique Quantique : Atomes et Molécules,Applications technologiques*, Dunod, $3^{\text{ième}}$, 2009.

[9] C.Itzykson and J-B.Zuber, *Quantum Field Theory*, British Library Cataloguing (Data), 1980.

[10] V. B. Berestetskii,E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory* (Pergamon Press, Oxford, 1971).

[11] A.F.Nikiforov and V.B.Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Mir. Moscou, 1978.

[12] G.Andrews,R.Askey and R.Roy, *Special functions*, Cambridge (2000).

[13] A.Messiah, *Mécanique quantique*, Tome 1 et 2, Dunod, 1995.

[14] S.Zaim,L.Khodja and Y.Delenda, *Second-order corrections to the non-commutative Klein-Gordon equation with a Coulomb potential*, Int. J. Mod. Phys. A 23, 4133 (2011), arXiv :1101.0355v6[math-ph].

[15] Abramowitz and A.stegun, *Handbook of mathemathical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, 1970.

[16] S.K.Suslov, *Expectation values in relativistic coulomb problems*, J. Phys. B 42, 185003 (2009), arXiv :0906.3338v9[quant-ph].

[17] M.I.Eides,H.Grotchand and V.A.Shelyuto, *Theory of light hydrogen-like atoms*, Phys. Rep. 342, 63 (2001).

[18] M.Chaichian,T.C.Adorno,M.C.Baldiotti,D.M.Gitman and A.Tureanu,*Dirac Equation in Noncommutative Space for Hydrogen Atom*, Phys.Rev.Lett. 86, 2716 (2001).

Résumé

Le but de ce mémoire est d'appliquer la non commutativité d'un espace-temps sur l'atome d'hydrogène.

On a montré que la non commutativité de l'espace-temps est codée dans le produit star qui considéré comme une déformation du produit ordinaire.

On a trouver que les corrections non commutative enlève la dégénérescence des niveaux d'énergie.

Mots clés : La géométrie non commutative, l'atome d'hydrogène, l'opérateur de Weyl, le produit de Moyal, Seiberg-Witten maps, Bopp-shift, équation de Dirac...