République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA

Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Physique théorique

Thème

Sur la généralisation de l'équation de Lévy-Leblond pour une particule de spin 3/2

Présentée par :

HAYOUNE Linda

Soutenu le : 30/06/2016

Devant le Jury composé de :

Président	Mr Abdusalam HOUARI		Université A/Mira, B
Rapporteur	Mr Yazid KASRI		Université A/Mira, B
Examinateur	Mr Hand ZENIIA		Université A/Mira, B
Examinateur	Mr Makhlouf CHENNIT		Université A/Mira, B

Promotion 2015/2016.

Remerciement

Je tiens à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la patience d'accomplir ce modeste travail.

Le messager d'ALLAH (que la paix et le salut d'ALLAH soient sur lui) a dit : « Celui qui ne remercie pas les gens ne remercie pas Allah »

Je tiens donc à exprimer mon profonde gratitude, mon vif remerciement et reconnaissance à mon encadreur. Mr Y. KASRI, pour le savoir et l'assistance très précieuse qu'il nous a apporté pendant la durée de ce travail, pour ces précieux conseils et orientations, ainsi pour son gentillesse et son serviabilité.

Un grand merci à Dr. HAUARI ABDUSALAM d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Mon plus profonde gratitude à Mr. Hend ZENIA et Mr Makhlouf CHENNIT d'avoir examiné ce travail

Ma famille qui me ont toujours encouragés et soutenus durant toutes mes études.

...Et encours merci !

Dédicace :

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant notre reconnaissance et notre profonde gratitude durant toute notre existence.

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père le plus beau et bon de tous les pères

Ma plus belle étoile qui puisse exister dans l'univers ma" Chère mère"

Ma très chère grand-mère que le Dieu la protège et la garde en bonne santé.

Mes chers frères : "Sahib et Wassim"

Mes très chères sœurs : "Hanna et Silia"

Mon cher mari et sa famille.

Ma grande famille : mes oncles et mes tantes, mes cousins et mes cousines.

Toutes mes amies en particulier "Siham, Asma, Lobna, Tawes, Racha, Lina, Nawal, Nasma, Randa".

Table des matières

Introduction

Dès l'élaboration au début des années vingts du siècle passé, du concept de dualité onde-corpuscule pour la matière ennocé par Louis de Broglie , beaucoup de physiciens se sont intéressés à la recherche d'une équation d'onde décrivant l'électron. La première équation a été celle étabile par E. Schrödinger. Ce dernier a formulé l'équation non-relativiste gouvernant une particule massive sans spin.

Dans le domaine relativiste, et en 1926, O. Klein et W. Gordon ont, à l'aide du principe de correspondance et la conservation de l'énergie relativiste, tenté d'établir l'équation d'onde décrivant l'électron. L'équation de Klein-Gordon, bien que relativiste, présentant quelques difficultés d'interprétation, car possédant des solutions à énergie négatives ainsi qu'une densité de probabilité non positive.

En 1928, P. Dirac formula l'équation qui porte son nom et qui décrit de manière satisfaisante l'électron. L'idée de départ de Dirac provenait de la remarque suivante : la densité de probabilité n'était pas positive dans le cas de Klein-Gordon à cause de la présence de dérivée secondes dans l'équation d'onde. Il s'agissait alors de rechercher une équation qui faisait intervenir le temps

via dérivée première. Par symetrie , l'espace aussi (les dérivée) devait appraitre linéairement.

Suite à cette découverte, en 1967, Lévy-Leblond proposa alors d'appliquer le concept de linéarisation dans le domine non-relativiste, c'est à dire, pour l'équation de Schrödinger. Ce travail a permis de formuler l'équation d'onde analogue non-relativiste à l'équation de Dirac. En effet, l'équation de Lévy-Leblond fait intervenir explicitement les matrices de Pauli. Dans ce travail, nous verrons que le concept de linéarisation de Dirac-Lévy-Leblond va nous conduire à l'établissement de l'équation d'une particule de spin 3/2.

Nous allons présenter ce mémoire comme suit

Au chapitre 1, nous étudierons les équations de KG et de Dirac, puis au chapitre. 2, le concept de linéarisation sera abordé dans le cadre non-relativsite et l'équation de Lévy-Leblond sera reproduite. Le chap 3 est consacré à la généralisation pour une particule de spin 3/2. au chapitre 4, des applications seront réalisées. L'oscillateur harmonique pour une particule non relativiste de spin 1/2 puis de spin 3/2 sera traité. Un des résultats important, de ce types d'équations et comme on le verra, est de pouvoir déduire l'intéraction du type spin-orbite comme conséquence d'une théorie complètement non-relativiste. Nous allons terminér par exposer l'essentiel de nos résultats dans la conclusion.

Chapitre 1

Equations d'ondes relativistes

1.1 Équation de Klein-Gordon

1.1.1 Introduction

L'équation de Klein-Gordon décrit une particule de spin 0 [1]. En appliquant les relations de correspondances données par ($\hbar = c = 1$)

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \\ \boldsymbol{p} &\rightarrow i\boldsymbol{\nabla} \end{aligned} \tag{1.1}$$

à l'équation de conservation de l'énergie d'une particule classique relativiste

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \tag{1.2}$$

on obtient l'équation d'onde recherchée

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (-\nabla^2 + m^2)\phi \tag{1.3}$$

On montre que cette dernière admet des solutions à énergie positive et d'autres négative de forme $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$

1.1.2 Équation de continuité et densité de probabilité

Pour pouvoir interpréter la fonction d'onde, il faut définir une densité de probabilité de présence ρ et une densité de courant $\boldsymbol{j}$. On va chercher donc une équation de continuité,e^{2}n suivant une technique de multiplication par des quantitées conjuguées c'est à dire on multiplie l'équation et son adjoint par une quantitée conjugué.

L'équation (1.3) par $-i\phi^*$ donne

$$i\phi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - i\phi^*\nabla^2\phi + im^2\phi^*\phi = 0 \tag{1.4}$$

Et on multiplie la complexe conjuguée de l'équation (1.3) par $-i\phi$ on obtient

$$i\phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* - i\phi\nabla^2\phi^* + im^2\phi\phi^* = 0 \tag{1.5}$$

En faisant la différence entre les deux équations (1.4) et (1.5) on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\left[-i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)\right] = 0 \tag{1.6}$$

l'équation (3.10) a la forme d'une équation de continuité qui est donné par

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j} = 0 \tag{1.7}$$

Où ρ et $\boldsymbol{j}$ perésentent respectivement la densité de probabilité de présence et le courant de probabilité.tel que

$$\begin{aligned} \rho &= i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right) \\ \boldsymbol{j} &= \left[-i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dans l'expression de la densité de probabilité il y a un terme de dérivée temporelle. La présence de ce terme implique que ρ n'est pas toujours positive.

On peut dire que l'équation de Klein-Gordon possède un problème avec les solutions à énergies négatives et un problème d'interpretation.

1.2 Équation de Dirac

Pour surmonter les difficultées rencontrées avec l'équation de Klein-Gordon, Dirac proposa une équation de type

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi \tag{1.9}$$

à $\boldsymbol{\alpha}$ et β sont des coefficient à determiner. En substituant les expressions (1.1) dans (1.9) on aura

$$(E - \boldsymbol{\alpha p} - \beta m)\psi = 0 \tag{1.10}$$

Pour determiner $\boldsymbol{\alpha}$ et β on impose à ψ de satisfaire l'equation de Klein-Gordon

$$(E^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2)\psi = 0 \tag{1.11}$$

En multipliant (1.10) à gauche par $(E + \boldsymbol{\alpha p} + \beta m)$ ce qui donne

$$(E + \boldsymbol{\alpha p} + \beta m)(E - \boldsymbol{\alpha p} - \beta m)\psi = 0 \tag{1.12}$$

En utilisant la convention de sommation on peut ecrire

$$[E^2 - \beta^2 m^2 - (\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k)\, p_k p_l - m\,(\alpha_k \beta + \beta \alpha_k)\, p_k]\psi = 0, \quad k, l = 1, 2, 3 \tag{1.13}$$

Par identification avec (1.11) on peut définir les relations suivantes

$$\begin{array}{ll} \alpha_k^2 = 1 & \alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 0 \quad k, l, = 1, 2, 3 \qquad \text{et} \quad k \neq l \\ \beta^2 = 1 & , \quad \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \end{array} \tag{1.14}$$

Donc (1.10) représente l'équation de Dirac qui décrite une particule relativiste de spin 1/2 avec $\boldsymbol{\alpha}$ et β des operateurs hermétiques qui satisfait les relations (1.14)

En effet, les relations (1.14) ne peuvent être satisfaites que par des matrices quadratiques hermitiennes.

La première relation dans (1.14) indique que ces matrices ont des valeurs propres +1 et -1, et si on rajoute la deuxième relation, on montre qu'elles sont de trace nulle.

Dans ce cas il n'y a que les matrices de Pauli qui peuvent satisfait ces relations.et qui sont données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

On représente alors les matrices $\boldsymbol{\alpha}$ et β par des matrices 4×4 en blocs

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

avec la fonction d'onde ψ qui a quatre composantes.

1.2.1 Equation de continuité et densité de probabilité

On utilise la même technique que pour l'équation de KG

En multipliant l'équation (1.9) par $-i\psi^+$

$$\psi^+ \frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\psi^+ \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\nabla} - i\beta m \psi^+)\psi \tag{1.17}$$

Et aussi la conjuguée de (1.9) par $-i\psi$

$$-\psi \frac{\partial}{\partial t}\psi^+ = (\psi \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\nabla} - i\beta m \psi)\psi^+ \tag{1.18}$$

La différence entre (3.22) et (3.23) donne

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) + \boldsymbol{\nabla}(\psi^+\psi) = 0 \tag{1.19}$$

D'où

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^+\psi \\ \boldsymbol{j} &= \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi \end{aligned} \tag{1.20}$$

Dans ce cas on voit clairement que la densité de courant est positive, ainsi le problème avec l'équation de KG est résolu en utilisant la méthode de linéarisation.

1.2.2 Forme covariante de l'équation de Dirac

On avaient vu précédement l'équation de Dirac telle qu'elle était proposé par Dirac lui même, sous forme d'une équation facile à interpréter, et aussi dans l'étude du passage à la limite non relativiste. Nous allons donné une autre forme dite covariante, qui est plus utile dans les circonstances où la covariance relativiste joue un rôle prépondérant [1]

Pour celà, on multiplie l'équation (1.10) à gauche dans les deux côtés par β, et on pose

$$\gamma^{\mu} \equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3,) \equiv (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}) \tag{1.21}$$

$$\gamma^0 \equiv \beta \qquad \boldsymbol{\gamma} \equiv \beta\boldsymbol{\alpha} \tag{1.22}$$

La forme covariante s'écrit

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0 \tag{1.23}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g_{\mu\nu} \tag{1.24}$$

avec $g_{\mu\nu}$ la métrique de l'espace de Minkowski donnée par

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

Avec $p_{\mu} \rightarrow i\partial_{\mu}$,et $\partial_{\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, m est la masse de la particule, les γ sont des matrices 4×4, dont les propriéés s'obtiennent à partir de celles de $\boldsymbol{\alpha}$ et β.On donne les relations suivantes

$$(\gamma^{\mu})^{+} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0 \tag{1.26}$$

$$\gamma_{\mu} = g_{\mu\upsilon}\gamma^{\nu} \tag{1.27}$$

On note que

$$\gamma_0 = \gamma^0, \qquad \gamma_k = -\gamma^k \tag{1.28}$$

$$\gamma^\mu = \gamma_\mu^+ = \gamma_\mu^{-1} \tag{1.29}$$

1.2.3 L'oscillateur de Dirac

L'oscillateur de Dirac ([17]-[19]) est étudié pour la première fois par Itô et al. [6], qui considéré l'équation de Dirac avec l'impulsion $\boldsymbol{p}$ qui est remplacée par $\boldsymbol{p} - im\beta w\boldsymbol{r}$, et aprés par M.Moshinski et A. Szczepaniak [7] en (1989), qui a donné le nom de l'oscillateur de Dirac (DO), car à la limite non relativiste, il devient un oscillateur harmonique avec un terme puissant de couplage spin-orbite. Le DO a beaucoup d'intérêts, ici il représente l'un des exemples de la solution éxacte de l'équation de Dirac [8], et aussi il rentre dans beaucoup de recherches [26] qui ont une relation avec les symmetries [27], les supersymmetrie [18, 28] , les généralisations au cas des systèmes à plusieurs particules ([29]-[31]) , et dans l'étude des particules avec des spins grand ([32]-[34]).

Nous allons maintenant chercher la limite non relativiste. L'équation de Dirac dans un système de mesure où $\hbar$ et c sont différents de 1 s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p} + mc^2\beta\right)\psi \tag{1.30}$$

$\hbar$:constante de Planck, c :est la vitesse de lumière

Les matrices de Pauli vérifient

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{1.31}$$

Les indices répétés sont sommés de 1 jusqu'à 3

On cherche une expression qui doit être linéaire en $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{r}$, et qui peut être interpretée comme un oscillateur harmonique dans la limite non relativiste.On choisi la substitution

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\beta \tag{1.32}$$

l'équation(1.30) devient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [c\boldsymbol{\alpha}\ .(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\beta) + mc^2\beta]\psi \tag{1.33}$$

En remplaçant $\boldsymbol{\alpha}$, β et ψ dans (1.33) on aura

$$E\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \left[c\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\beta) + mc^2\beta\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{1.34}$$

$$\left(E - mc^2\right)\varphi = c\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}\right)\chi \tag{1.35}$$

$$\left(E + mc^2\right)\chi = c\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\right)\varphi \tag{1.36}$$

En multipliant (1.35) par $E + mc^2$, et en utilisant (1.36) et (1.31)

$$(E^2 - m^2c^4)\varphi = \left[c^2\left(p^2 + m^2\omega^2r^2\right) - 3\hbar\omega mc^2 - 4mc^2\frac{\omega}{\hbar}\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}\right]\varphi \tag{1.37}$$

avec : $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{2}\ \boldsymbol{\sigma}$

Si on écrit $E = mc^2 + \varepsilon$, le terme $E^2 - m^2c^4$ dans l'équation (1.37) devient approximativement $2mc^2\varepsilon$ si $\varepsilon \ll mc^2$. Ainsi, dans la limite non relativiste l'énergie ε devient la valeur propre de l'opérateur du coté droit devisé par $2mc^2$.Et donc

$$\varepsilon\varphi = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{2\omega}{\hbar}\left(\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}\right)\right]\varphi \tag{1.38}$$

Ce résultat correspond à l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique de fréquence ω, avec un terme du couplage spin-orbite de force $-(2\omega/\hbar)$,et c'est à cause de ce comportement de l'équation de Dirac dans la limite non relativiste qu'on dit que l'équation (1.33) correspond à l'oscillateur de Dirac.

Chapitre 2

Particule de spin 1/2 : Equation de Lévy-Leblond

2.1 Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation différentielle là quelle satisfait la fonction d'onde $\psi(r,t)$ associée à toute particule dans un état libre ou lié à l'approximation non relativiste. Elle a été proposé en 1926 par le physicien Autrichien Erwin Schrödinger . Elle est considérée comme l'équation fondamentale de la mécanique ondulatoire. En mécanique quantique l'évolution de la fonction d'onde est décrite par l'équation de Schrödinger.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = H\ \psi(r,t).$$

2.2 Linéarisation par la méthode de Lévy-Leblond

On va faire une linéarisation de cette équation, en suivant la méthode de Dirac refaite après par Lévy-Leblond [2][3].On écrit l'opérateur de Schrödinger tel que

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta = E - \frac{p^2}{2m} \tag{2.1}$$

L'équation de Schrödinger s'écrit alors

$$(E - \frac{p^2}{2m})\psi = 0 \tag{2.2}$$

On voit directement qu'il y a une assymetrie dans l'équation (2.2), qui est dû au fait que le terme de derivée par rapport au temps est linéaire, alors que le terme de dérivée spatiale intervient quadratiquement. Pour enlever cette assymétrie , on essaie de construire une équation d'onde dont la forme générale est

$$\hat{\Theta}\ \psi = (AE + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + c)\psi = 0 \tag{2.3}$$

où $A, \boldsymbol{B}$ et c étant des opérateurs linéaires qui ne doivent pas dépendre de E où $\boldsymbol{p}$. Et on exige aussi que les solutions ψ de l'équation(2.3) doivent être aussi solutions de l'équation de Schrödinger Il existe alors un opérateur

$$\hat{\Theta}' = A^{'}E + \boldsymbol{B}'.\boldsymbol{p} + c^{'} \tag{2.4}$$

Tel que la multiplication de (2.3) par cet opérateur revient à l'équation de Schrödinger c'est à dire

$$\hat{\Theta}'\hat{\Theta} = 2m\ (E - \frac{p^2}{2m}) \tag{2.5}$$

où le facteur $2m$ est arbitraire, Et les opérateurs $A^{'}, \boldsymbol{B}'$,et $c^{'}$ne doivent pas aussi contenir E ou $\boldsymbol{p}$.

Pour construire $A, A^{'}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}'\,et\ c, c^{'}$ on multiplie l'équation (2.3) par (2.4)

$$(A^{'}E + B_i^{'}p_i + c^{'})(A\ E + B_j\ p_j + c) = 2mE - p_kp_k \tag{2.6}$$

Les indices répetés sont sommés de 1 jusqu'à 3.

En faisant l'identification des deux côtés de l'équation (2.6), nous obtenons les relations

$$\begin{array}{ll} A^{'}A = 0, & \\ A^{'}c + c^{'}A = 2m, & A^{'}B_i + B_i^{'}A = 0 \\ c^{'}c = 0, c^{'}B_i + B_i^{'}c = 0, & B_i^{'}B_j + B_j^{'}B_i = -2\delta_{ij},\ \ (i,j = 1,2,3) \end{array} \tag{2.7}$$

Pour simplifier ces conditions On définie des nouveaux opérateurs

$$\begin{array}{ll} B_4 = i(A + \frac{1}{2m}c), & B_4^{'} = i(A^{'} + \frac{1}{2m}c^{'}) \\ B_5 = A - \frac{1}{2m}c & B_5^{'} = A^{'} - \frac{1}{2m}c^{'} \end{array} \tag{2.8}$$

Donc (2.7) devient

$$B'_\mu B_\nu + B'_\nu B_\mu = -2\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu,\nu = 1 \quad à \quad 5) \tag{2.9}$$

On peut encore avoir d'autre transformation pour ces relations Soit M un opérateur arbitraire non singulier avec $M^{-1}M = 1$.

On choisit

$$\begin{aligned} B_\alpha = M\gamma_\alpha, \qquad & B'_\alpha = -\gamma_\alpha M^{-1}, \alpha = 1 \quad à \quad 4 \\ B_5 = -iM, \qquad & B_5 = -iM^{-1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

On insert (2.10) dans (2.9) on trouve les relations d'anti commutation

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \qquad\qquad \alpha,\beta = 1 \quad à \quad 4 \tag{2.11}$$

Les relations d'anti commutation (2.11) définissent une algèbre connue sous le nom d'algèbre de Clifford [24], elles peuvent être représentées par des matrices et conduit à l'algèbre des matrices complexes 4× 4 comme une représentation particulière. En utilisant la relation (2.11) on montre que les matrices γ_α peuvent être représentées par

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad (i = 1,2,3), \tag{2.12}$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Les σ_i sont les matrices de Pauli, et $0, \mathbf{1}$ sont des matrices 2×2.

Pour trouver la représentation matricielle des B_ν on prend

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = M^{-1} \tag{2.14}$$

En remplaçant M, et M^{-1} dans (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} B_i = M\gamma_i &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, i = 1,2,3 \\ B_4 = M\gamma_4 &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \\ B_5 = -iM &= -i\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour trouver A et C on va résoudre (2.8), en tenant compte de (2.15), on écrit

$$A = \frac{1}{2}(B_5 - iB_4), \qquad c = -m\,(iB_4 + B_5) \tag{2.16}$$

Et on aura finalement

$$A = -i\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c = 2mi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Puisque $A, \boldsymbol{B}$ et C sont des matrices 4×4, donc la fonction d'onde dans l'équation (2.3) doit être un objet à quatre composantes

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Et φ, χ sont des spineurs à 2 composantes.

En remplaçant les matrices $A, \boldsymbol{B}, c$ dans l'équation d'onde(2.3), et enfin l'équation d'onde s'écrit

$$\left[-i\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} p + 2mi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \tag{2.19}$$

C'est l'équation qui est linéaire en E et p.

Les composantes du spineur $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger.

2.3 Nouvelle dérivation de l'équation de Lévy-Leblond

On veut utiliser une méthode pour linéariser l'équation de Schrödinger, le but est de trouver une équation d'onde pour le spin 1/2 mais d'une façon qui peut se généraliser pour les spins plus grands (1,3/2...).L'équation (2.1) peut être écrite aussi sous forme

$$(2mE - \boldsymbol{p}^2)\psi = 0 \tag{2.20}$$

Avec les relations (1.1) et le choix $\hbar = 1$

Dans l'équation (2.20), on voit que le terme d'énergie apparait linéaire alors que le terme d'impulsion apparait quadratiquement, et cela mène à une dissymetrie entre les variables spatiales et temporelles.On exige alors que l'équation d'onde doit être de premier ordre dans toutes les derivées.Et rendre les termes linéaire : ce qu'on appelle méthode de linéarisation faite en premier lieu par Dirac pour linéariser l'équation de Klein Gordon comme on l'avait présenté dans le chapitre précédant, et par la suite par Lévy-leblond pour linéariser l'équation de Schrödinger.

Pour ce faire on pose une équation de forme

$$(AE + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + c)\psi = 0 \tag{2.21}$$

Où A, $\boldsymbol{B}$ (B_1, B_2, B_3)et c sont des quantités indépendantes de E et $\boldsymbol{p}$, qu'on va déterminer par la suite.

Si on multiplie l'équation (2.21) par

$$A^{'}E - \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + c^{'} \tag{2.22}$$

où $A^{'}$ et $c^{'}$ sont deux autres inconnues

On aura

$$[A^{'}AE^2 + \left(A^{'}B_i - B_iA\right)p_iE + (A^{'}c + c^{'}A)E - B_jB_ip_jp_i + (c^{'}B_i - B_ic)p_i + c^{'}c]\psi = 0 \tag{2.23}$$

Où $i, j, k = 1, 2, 3$.ici on a utilisé la convention sommation où les indices répétés sont sommés.

L'identification de l'équation (2.23) avec (2.20) donne les relations suivantes

$$A^{'}A = c^{'}c = 0 \qquad A^{'}B_i - B_iA = 0 \tag{2.24}$$

$$A^{'}c + c^{'}A = 2m \qquad c^{'}B_i - B_ic = 0 \tag{2.25}$$

$$B_jB_ip_jp_i = \boldsymbol{p}^2 \tag{2.26}$$

2.3.1 Particule de spin 1/2

On va reproduire l'équation de Lévy Leblond d'une autre manière.et on va déterminer A, $\boldsymbol{B}$ (B_1, B_2, B_3)et c pour le cas de spin 1/2.

On sait que les matrices de Pauli obétient à l'identité suivante

$$\sigma_i \sigma_j p_i p_j = (\ p_i)^2 1_{2\times 2} \tag{2.27}$$

Où :$1_{2\times 2}$ représente la matrice identité et σ_i, σ_j représentent les matrices de Pauli

Maintenant si on compare les deux équations (2.26) et (2.27) , on remarque qu'on ne peut pas poser $B_j = \sigma_j$; en effet, si on pose cette dernière, la deuxième condition dans (2.24) va donner $A^{'} = A$, ce qui contredit la première condition dans la même équation.

Alors, puisqu'on a dans (2.27) un produit de matrices σ qui vérifie l'équation (2.27), donc on doit choisir une autre forme de B_i qui vérifie toutes les conditions mais qui intervient toujours les matrices σ .

On prend

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Avec 0 et σ_i sont respectivement matrice 2×2, et matrices de Pauli représentées en blocs.

B_i déterminés, on utilise les relations dans (2.24) et (2.25) pour trouver A et c

On obtient

$$\left(A^{'} + \frac{c'}{2m}\right) B_i = B_i \left(A + \frac{c}{2m}\right) \qquad i = 1,2,3 \tag{2.29}$$

$$\left(A^{'} + \frac{c'}{2m}\right)\left(A + \frac{c}{2m}\right) = 1_{2\times 2} \tag{2.30}$$

1 est la matrice identité 2×2

Si on prend (2.28) en considération on remarque qu'il suffit de prendre $\left(A + \frac{C}{2m}\right)$ égal à la matrice identité et on détermine A et c directement

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c = 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

A et C sont des matrices 4×4 représentés par blocs.

D'où la fonction d'onde$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ a 4 composantes

Où φ et χ sont deux spineurs à deux composantes tel que : $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$.

Et finalement on écrit (2.21) sous la forme

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} p_i + 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \tag{2.32}$$

Cette dernière représente une équation de premier ordre qui n'est rien d'autre que l'équation de Lévy-Leblond reproduit d'une autre manière, et qui décrit une particule non relativiste de spin 1/2.

On peut vérifier que φ et χ sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger

L'équation (2.32) peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} E & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \tag{2.33}$$

$$E\varphi + \sigma_i p_i \chi = 0 \tag{2.34}$$

$$\sigma_i p_i \varphi + 2m\chi = 0 \tag{2.35}$$

(2.35) nous donne

$$\sigma_i p_i \varphi = -2m\chi \tag{2.36}$$

On remplace dans (2.34)

$$-2mE\chi + \sigma_i p_i \sigma_j p_j \chi = 0 \tag{2.37}$$

$$\left(E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \right) \chi = 0 \tag{2.38}$$

Donc χ est solution de l'équation de Schrödinger, ainsi que φ

$$\left(E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\varphi = 0 \tag{2.39}$$

Remarque :

Maintenant on va vérifier que les matrices A, B et C satisfont au système d'équations (2.24),(2.25) et (2.26) :

$$AA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

$$CC' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

$$A'B_i - B_iA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

$$A'C + C'A = 2m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

$$C'B_i - B_iC = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Particule de spin 1/2 soumise à un champs électromagnétique On va maintenant prendre le cas d'une particule de spin 1/2 dans un champ électromagnétique.

On fait la substitution

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - eV(x,t), \quad \text{et} \quad -i\hbar\,\boldsymbol{\nabla} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(x,t) \tag{2.45}$$

Les équations (2.34) et (2.35) deviennent

$$\begin{gathered} (E - eV)\varphi + \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \tfrac{e}{c}\mathbf{A}\right)\chi = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \tfrac{e}{c}\mathbf{A}\right)\varphi + 2m\chi = 0 \end{gathered} \tag{2.46}$$

La deuxième équation dans le système (2.46) donne

$$\chi = -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\varphi \tag{2.47}$$

En insérant (2.47) dans la première équation du système on obtient

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\varphi = 0 \tag{2.48}$$

On développe le deuxième terme en utilisant l'identité suivante pour les matrices de Pauli

$$(\sigma.\boldsymbol{A})(\sigma.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{2.49}$$

On aura

$$-\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] = -\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + -\frac{i}{2m}\boldsymbol{\sigma}\left[\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\times\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] \tag{2.50}$$

Le deuxième terme du côté droit s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{-i}{2m}\boldsymbol{\sigma}\left[\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\times\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] &= \frac{i}{2m}\boldsymbol{(}\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p}) \\ &= \frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}\left[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p}\right] \\ &= \frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}) \end{aligned} \tag{2.51}$$

En remplaçant le dernier résultat dans (2.50) on trouve

$$-\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] = -\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}) \tag{2.52}$$

Finalement l'équation (2.48) s'écrit

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{i}{2m}(\frac{e}{c})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A})\right]\varphi = 0 \tag{2.53}$$

Et maintenant on a $\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ et $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ l'équation (2.53) s'écrit finalement

$$\left[E - eV - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B}\right]\varphi = 0 \tag{2.54}$$

L'équation (2.54) n'est autre que l'équation de Pauli, et le dernier terme représente l'énergie d'interaction entre le champ magnétique et le moment magnétique interne de la particule.

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma} = \mu_B\boldsymbol{\sigma} \tag{2.55}$$

où μ_B représente le magnéton de Bohr.

On a l'opérateur de spin de la particule est donné par $S = (1/2)\sigma$, on peut écrire

$$\boldsymbol{\mu} = g_{spin}\mu_B\boldsymbol{S} = 2\mu_B\boldsymbol{S} \tag{2.56}$$

Où le facteur g_{spin} représente le rapport gyromagnétique. Ainsi, une theorie non relativiste est capable de prévoir la valeur correcte du moment magnétique intrinsèque d'une particule de spin 1/2 [2].

Chapitre 3

Généralisation pour une particule de spin 3/2

3.1 Particule de spin 3/2

On reprend les équations (2.24) , (2.25) et(2.26) dans le cas de particule de spin 1/2.

On a cette équation d'onde

$$(AE + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{p} + c)\,\psi = 0. \tag{3.1}$$

D'après multiplication par

$$\left(A'E - \boldsymbol{B}'.\boldsymbol{p} + c'\right). \tag{3.2}$$

Et l'identification avec l'équation de Schrödinger

$$\left(E - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\psi = 0. \tag{3.3}$$

On aura ces équations

$$\left\{\begin{array}{c} AA' = cc' = 0 \\ A'c + c'A = 2m \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{c} A'B_i - B_iA = 0 \\ c'B_i - B_ic = 0 \end{array}\right. . \tag{3.4}$$

Ainsi que

$$B_iB_jp_ip_j = p^2. \tag{3.5}$$

Le problème que se pose à déterminer les inconnues A, $\boldsymbol{B}$,et c

3.2 Détermination des opérateurs A, $\boldsymbol{B}$,et c

Les trois matrices adécrivant une particule de spin 3/2, sont donnés par (dans la représentation ou la troisième composante est diagonale)

$$s_1 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$s_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$$s_3 = \hbar \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Maintenant nous introduisons trois nouvelles matrices k_i (de dimension 4×2) qui seront très utiles par la suite

$$k_1 = \hbar \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \; k_2 = \hbar \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ i\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \; k_3 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

A l'aide des matrices K , on montre que la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{4}{9}\hbar^{-2}\left(k_j k_i^+ + s_j s_i\right) p_j p_i = p^2 I_{4\times 4}. \tag{3.10}$$

ou nous avons utilisés les matrices k_i^+ transposées conjuguées des k_i et données par

$$k_1^+ = \hbar \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$k_2^+ = \hbar \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -i\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & -i\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$k_3^+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Vérification de l'identité (3.10)

En remplaçant dans l'équation (1.10) les matrices par leurs expressions, on obtient la première quantité notée $Q_1 = (\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})\,(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p})$

$$Q_1 = \left(\sqrt{3}\hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} p_1 + i\hbar\alpha \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} p_2 + \hbar \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} p_3 \right)^2 \tag{3.14}$$

Où le paramètre α est égale à $\sqrt{3}$. Le calcul donne la matrice suivante

$$Q_1 = \hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(p^2 + 2p_3^2\right) & \sqrt{3}p_3\,(p_1 - ip_2) & \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(p_1 - ip_2)^2 & 0 \\ \sqrt{3}p_3\,(p_1 + ip_2) & \frac{1}{4}\left(7p^2 - 6p_3^2\right) & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(p_1 - ip_2)^2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(p_1 + ip_2)^2 & 0 & \frac{1}{4}\left(7p^2 - 6p_3^2\right) & -\sqrt{3}p_3\,(p_1 - ip_2) \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(p_1 + ip_2)^2 & -\sqrt{3}p_3\,(p_1 + ip_2) & \frac{3}{4}\left(p^2 + 2p_3^2\right) \end{pmatrix}$$

Nous passons au calcul de $Q_2 = (\boldsymbol{K}.\boldsymbol{p})\left(\boldsymbol{K}^{+}.\boldsymbol{p}\right)$. D'abord le premier facteur nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{K}.\boldsymbol{p}) &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} \sqrt{3}i & 0 \\ 0 & i \\ i & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i \end{pmatrix} p_2 + \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} p_3 \right) \\ &= \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\sqrt{3}p_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}p_1 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar p_3 & \frac{1}{2}ip_2 - \frac{1}{2}p_1 \\ \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}ip_2 & \sqrt{2}\hbar p_3 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}p_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}p_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour le second, on obtient après calcul le résultat suivant

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{K}^{+}.\boldsymbol{p}\right) &= \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}i & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -\sqrt{3}i \end{pmatrix} p_2 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} p_3 \right) \\ &= \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3}p_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}p_2 & p_3 & \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}ip_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}ip_2 & p_3 & \frac{1}{2}\sqrt{3}p_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}p_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.16}$$

En remplaçant les expressions obtenues, on arrive à

$$Q_2 = \hbar^{-2} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(p^2 - p_3^2\right) & -\sqrt{3}p_3\left(p_1 - ip_2\right) & -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 - ip_2\right)^2 & 0 \\ -\sqrt{3}p_3\left(p_1 + ip_2\right) & \frac{1}{2}\left(p^2 + 3p_3^2\right) & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 - ip_2\right)^2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 + ip_2\right)^2 & 0 & \frac{1}{2}\left(p^2 + 3p_3^2\right) & \sqrt{3}p_3\left(p_1 - ip_2\right) \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 + ip_2\right)^2 & \sqrt{3}p_3\left(p_1 + ip_2\right) & \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(p^2 - p_3^2\right) \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

La quantité recherchée

$$Q = Q_1 + Q_2$$

s'écrit tout simplement de la sorte

$$\begin{aligned} Q \;=\; & \hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(p^2 + 2p_3^2\right) & \sqrt{3}p_3\left(p_1 - ip_2\right) & \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(p_1 - ip_2\right)^2 & 0 \\ \sqrt{3}p_3\left(p_1 + ip_2\right) & \frac{1}{4}\left(7p^2 - 6p_3^2\right) & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(p_1 - ip_2\right)^2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(p_1 + ip_2\right)^2 & 0 & \frac{1}{4}\left(7p^2 - 6p_3^2\right) & -\sqrt{3}p_3\left(p_1 - ip_2\right) \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(p_1 + ip_2\right)^2 & -\sqrt{3}p_3\left(p_1 + ip_2\right) & \frac{3}{4}\left(p^2 + 2p_3^2\right) \end{pmatrix} + \\ & +\hbar^{-2} \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\left(p^2 - p_3^2\right) & -\sqrt{3}p_3\left(p_1 - ip_2\right) & -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 - ip_2\right)^2 & 0 \\ -\sqrt{3}p_3\left(p_1 + ip_2\right) & \frac{1}{2}\left(p^2 + 3p_3^2\right) & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 - ip_2\right)^2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 + ip_2\right)^2 & 0 & \frac{1}{2}\left(p^2 + 3p_3^2\right) & \sqrt{3}p_3\left(p_1 - ip_2\right) \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(p_1 + ip_2\right)^2 & \sqrt{3}p_3\left(p_1 + ip_2\right) & \frac{4}{9}\left(p^2 - p_3^2\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A l'aide d'opérations algébrique simple, il n'est pas difficile de montrer alors

$$\left(\boldsymbol{K}.\boldsymbol{p}\right)\left(\boldsymbol{K}^{+}.\boldsymbol{p}\right) + \left(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p}\right)\left(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{p}\right) = \frac{4}{9}\hbar^{-2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

qui n'est autre que le résultat recherché.

Détermination de B_i

L'analyse de l'équation (3.10), et par analogie au cas de la particule de spin 1 [**?**], nous justifie le choix suivant de la matrice B_i

$$B_i = \frac{2}{3}\hbar^{-1} \begin{pmatrix} 0 & k_i & s_i \\ k_i^{+} & 0 & 0 \\ s_i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Il n'est alors pas compliqué de montrer que $B_j B_i p_j p_i$ n'est pas égale à $\boldsymbol{p}^2$, c'est à dire

$$B_j B_i p_j p_i \neq \boldsymbol{p}^2, \tag{3.20}$$

en effet,

$$B_jB_ip_jp_i = \frac{4}{9}\hbar^{-2}\begin{pmatrix} 0 & k_j & s_j \\ k_j^+ & 0 & 0 \\ s_j & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k_i & s_i \\ k_i^+ & 0 & 0 \\ s_i & 0 & 0 \end{pmatrix}p_jp_i,$$

$$= \frac{4}{9}\hbar^{-2}\begin{pmatrix} k_jk_i^+ + s_js_i & 0 & 0 \\ 0 & k_j^+k_i & k_j^+s_i \\ 0 & s_jk_i & s_js_i \end{pmatrix}p_jp_i. \tag{3.21}$$

Par analogie encore une fois, avec le cas de la particule de spin 1, et dans le but de strouver une solution au problème trouvé et qui consiste à égaliser les deux cotés de la relation (3.10) , nous prenons en considération dans l'identification le fonction d'onde ψ. Cela veut dire qu'il s'agira pour nous de trouver une solution B_i vérifiant

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

ici φ et χ sont des pineurs à quatre composantes, ω à deux composantes,

donc l'équation (3.4)et (3.5) s'écrivent

$$(B_jB_ip_jp_i)\,\psi = p^2\psi \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{9}\hbar^{-2}\left[\left(k_jk_i^+ + s_js_i\right)p_jp_i\right]\varphi = p^2\varphi \\ \frac{4}{9}\hbar^{-2}\left(k_j^+p_j\right)\left[(k_ip_i)\,\omega + (s_ip_i)\,\chi\right] = p^2\omega \\ \frac{4}{9}\hbar^{-2}\left(s_jp_j\right)\left[(k_ip_i)\,\varphi + (s_ip_i)\,\chi\right] = p^2\chi \end{cases} \tag{3.24}$$

La première équation est satisfaite à p^2

Donc on va résoudre la deuxième et la troisième équation dans l'équation (3.24)

Si

$$\begin{cases} \omega = -\left(2\alpha/3\right)\left(k_j^+p_j\right)\varphi \\ \chi = -\left(2\alpha/3\right)(s_ip_i)\,\varphi, \quad \alpha = (2m\hbar)^{-1} \end{cases}$$

La deuxième équation dans l'équation (3.24) s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}\hbar^{-2}\left(k_j^+p_j\right)\left[(k_ip_i)\,\omega + (s_ip_i)\,\chi\right] &= \frac{4}{9}\hbar^{-2}(2m\hbar)^{-1}\left(k_j^+p_j\right)\left[(k_ip_i)\left(k_j^+p_j\right) + (s_ip_i)\,(s_jp_j)\right]\varphi \\ &= \frac{4}{9}\hbar^{-2}(2m\hbar)^{-1}\left(k_j^+p_j\right)p^2\varphi \\ &= \frac{4}{9}\hbar^{-2}p^2(2m\hbar)^{-1}\left(k_j^+p_j\right)\varphi \\ &= p^2\omega \end{aligned} \tag{3.25}$$

La troisième équation dans l'équation (3.24) devient

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9}\hbar^{-2}(2m\hbar)^{-1}(s_jp_j)\left[(k_ip_i)\left(k_j^+p_j\right)+(s_ip_i)(s_jp_j)\right]\varphi \\ = & \frac{4}{9}\hbar^{-2}(2m\hbar)^{-1}(s_jp_j)\,p^2\varphi = p^2\chi \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.3 L'équation d'onde de spin 3/2

$$(AE+\boldsymbol{B}.\boldsymbol{p}+c)\,\psi=0$$

Avec A, B et c sont des matrice et ψ est telle que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}E+\frac{2}{3}\hbar^{-1}\begin{pmatrix} 0 & k_j & s_j \\ k_j^+ & 0 & 0 \\ s_j & 0 & 0 \end{pmatrix}p_j+2m\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix}=0. \tag{3.27}$$

Cette équation on peut se réduire à une dimension par $(6s+1=10)$ composantes, ce résultat coïncide avec l'équation Hurley([38]) d'une particule de spin 3/2.

Maintenant, on va démontrer que les composantes φ ,χ ,et ω du spineur sont aussi solutions de l'équation de Schrödinger.

A partir de l'équation (3.27)

$$\begin{pmatrix} E & \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{p} & \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p} \\ \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{k}^{+}\overrightarrow{p} & 2m & 0 \\ \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p} & 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix}=0,$$

sous forme d'un systéme d'équation on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} E\varphi+\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{p}\right)\omega+\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}\right)\chi=0 \\ \frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\overrightarrow{k}^{+}\overrightarrow{p}\right)\varphi+2m\omega=0 \\ \frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}\right)\varphi+2m\chi=0 \end{array}\right. \tag{3.28}$$

Pour la composante φ

On multipliant la première équation par $(2m)$

la deuxième et la troisième dans l'équation (3.28) s'écrivent

$$\begin{aligned}\omega &= -\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{k}^{+}\overrightarrow{p}}{2m}\right)\varphi,\\ \chi &= -\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}}{2m}\right)\varphi.\end{aligned}$$

Et on remplace dans la première équation dans l'équation (3.28) on obtient

$$2m\left(E\varphi-\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{p}\right)\frac{2}{3}\hbar^{-1}\frac{\left(\overrightarrow{k}^{+}\overrightarrow{p}\right)}{2m}-\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}\right)\frac{2}{3}\hbar^{-1}\frac{\left(\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}\right)}{2m}\right)\varphi=0$$

$$2mE\varphi-\frac{4}{9}\hbar^{-2}\left(\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{k}^{+}\overrightarrow{p}+\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}\right)\varphi=0$$

$$\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\varphi=0 \tag{3.29}$$

Donc la composante φ est satisfaite la solution de l'équation de Schrödinger.

Pour la composante ω

On sait que

$$\left(2mE-p^2\right)\varphi=0.$$

La deuxième équation dans l'équation (3.28) devient

$$\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\overrightarrow{k}^{+}\overrightarrow{p}\right)\left(2mE-\boldsymbol{p}^2\right)\varphi=0, \tag{3.30}$$

$$\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\frac{2}{3}\hbar^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{k}^{+}\overrightarrow{p}}{2m}\right)\varphi=0, \tag{3.31}$$

$$\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\omega=0. \tag{3.32}$$

Donc les composantes φ et ω sont aussi les solutions de l'équation de Schrödinger ainsi que χ.

Chapitre 4

Particule de spin s=1/2 et s=3/2 soumise au petentiel de l'oscillateur harmonique

4.1 Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est un système d'une grande importance en mécanique classique, car il décrit des petites oscillations de systèmes physiques autour d'une position équilibre stable, son importance n'est pas moindre en mécanique quantique ,puisque il entre dans beaucoup de problèmes contenant des oscillations quantiques [22].

En physique classique l'hamiltoniene de la particule relative s'écrit.

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$$

L'hamiltoniene devient

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2. \tag{4.1}$$

m : est la masse d'oscillateur.

ω : la fréquence d'oscillateur.

Nous allons analyser l'oscillateur harmonique en utilisant l'équation d'onde linéaire en r.

4.2 Pour une particule de spin 1/2

Comme application de l'équation (4.17) en prend l'exemple du potentiel de l'oscillateur harmonique

On choisit donc la substitution suivante

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - im\omega\eta\boldsymbol{r} \tag{4.2}$$

$\boldsymbol{p}$ étant l'impulsion de l'oscillateur, ω la fréquence,et $\boldsymbol{r}$ est le vecteur position($\boldsymbol{r} \equiv x_i$) ,et η est une matrice tele que

$$\eta = 2A^2 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

On utilise la substitution (4.2) dans l'équation (2.21)

$$\left[AE + \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{p} - im\omega\eta\boldsymbol{r}) + c\right]\psi = 0 \tag{4.4}$$

En remplaçant les valeurs de A, B et C on obtient

$$\left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & 0 \end{pmatrix} - im\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{r}\right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

Avec $\sigma_i p_i \equiv (\sigma_1 p_1, \sigma_2 p_2, \sigma_3 p_3)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E - im\omega\boldsymbol{r} & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & im\omega\boldsymbol{r} + 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \tag{4.6}$$

On arrive finalement à écrire un système d'équation couplés en φ et χ

$$2m\chi = -\sigma_i\left(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r}\right)\varphi \tag{4.7}$$

$$E\varphi = -\sigma_i\left(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}\right)\chi \tag{4.8}$$

Pour découpler le système d'équations on multiplie (4.21) par $\sigma_i\left(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r}\right)$ ce qui donne

$$2m\sigma_i\left(\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r}\right)\chi=-\sigma_i\left(\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r}\right)\sigma_i\left(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r}\right)\varphi \quad (i=1,2,3) \tag{4.9}$$

En utilisant (4.23) en trouve :

$$(2mE)\,\varphi=\left[\sigma_i\sigma_j\left(\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r}\right)\left(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r}\right)\right]\varphi \quad (i,j=1,2,3) \tag{4.10}$$

On a aussi les matrices de Pauli vérifient l'identité suivante

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{4.11}$$

δ_{ij} est le Chroneker, et ϵ_{ijk}est le symbole de Levy-Cevita

On remplace $\sigma_i\sigma_j$ dans (4.27) on aura

$$(2mE)\varphi=\left(\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k\right)\left(p_ip_j-im\omega p_ir_j+im\omega r_ip_j+m^2\omega^2r_ir_j\right)\varphi \tag{4.12}$$

En développant le côté droit de (4.12)

$$\begin{aligned}
&[\delta_{ij}p_ip_j+im\omega\delta_{ij}\left(r_ip_j-p_ir_j\right)+m^2\omega^2\delta_{ij}r_ir_j+i\epsilon_{ijk}\sigma_kp_ip_j\\
&-m\omega\epsilon_{ijk}\sigma_k\left(r_ip_j-p_ir_j\right)+im^2\omega^2\epsilon_{ijk}\sigma_kr_ir_j]\varphi\\
=\;&\left[p^2+m^2\omega^2r^2-\frac{3}{2}\hbar\omega-2m\omega\sigma_k\epsilon_{ijk}(r_ip_j)\right]\varphi
\end{aligned} \tag{4.13}$$

On a la relation $\epsilon_{ijk}r_ip_j=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ on remplace dans (4.13)

$$2mE\varphi=\left[p^2+m^2\omega^2r^2-3\hbar m\omega-\frac{4m\omega}{\hbar}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\frac{\hbar}{2}\sigma\right]\varphi \tag{4.14}$$

$$\Rightarrow E\varphi=\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2-\frac{3}{2}\hbar\omega-\frac{2\omega}{\hbar}\left(\boldsymbol{L}.\boldsymbol{s}\right)\right]\varphi \tag{4.15}$$

Où

$$\boldsymbol{s}=\frac{\hbar}{2}\sigma, \qquad \boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{4.16}$$

$\boldsymbol{L}$ représente le moment angulaire,$\boldsymbol{s}$ représente le spin de la particule

L'équation (4.15) correspond à l'oscillateur harmonique standard de fréquence ω avec l'addition de terme du couplage spin-orbite $(\boldsymbol{L.s})$.de force $-\frac{2\omega}{\hbar}$.Et ce résultat coïncide avec celui obtenu par la limite non relativiste de l'oscillateur de Dirac [?].

4.3 Particule de spin 3/2

L'équation d'onde de particule de spin 3/2 donnée comme suit

$$\left(AE + \frac{2}{3}\hbar^{-1}\boldsymbol{B.p} + c\right)\psi = 0, \tag{4.17}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{2}{3}\hbar^{-1}\begin{pmatrix} 0 & k_j & s_j \\ k_j^+ & 0 & 0 \\ s_j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = 2m\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et avec la substitution du potentielle de l'oscillateur harmonique par

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - im\omega\eta\boldsymbol{r} \tag{4.18}$$

Où

$$\eta = 2A^2 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Donc l'équation(4.17)s'écrit

$$\left[\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\hbar^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{k}\,\overrightarrow{p}_+ & \overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p}_+ \\ \overrightarrow{k^+}\,\overrightarrow{p}_- & 0 & 0 \\ \overrightarrow{s}\,\overrightarrow{p_-} & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2m\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{4.20}$$

Sous forme d'un système d'équation

$$\left\{\begin{array}{c} E\varphi = \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{k}\left(\overrightarrow{p} + im\omega\overrightarrow{r}\right)\omega + \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{s}\left(\overrightarrow{p} + imw\overrightarrow{r}\right)\chi \\ \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{k^+}\left(\overrightarrow{p} - im\omega\overrightarrow{r}\right)\varphi = 2m\omega \\ \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{s}\left(\overrightarrow{p} - im\omega\overrightarrow{r}\right)\varphi = 2m\chi \end{array}\right. \tag{4.21}$$

En multipliant la première équation dans l'équation(4.21) par $2m$

$$(2mE)\,\varphi = 2m\left[\left(\frac{2}{3}\hbar^{-1}\right)\overrightarrow{k}\,(\overrightarrow{p}+im\omega\overrightarrow{r})\,\omega + \frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{s}\,(\overrightarrow{p}+im\omega\overrightarrow{r})\,\chi\right]. \tag{4.22}$$

La deuxième et la troisième équation dans l'équation (4.21) devient

$$\begin{cases} \omega = -\frac{2}{3}\hbar^{-1}\frac{\overrightarrow{k^{+}}(\overrightarrow{p}-imw\overrightarrow{r})}{2m}\varphi \\ \chi = -\frac{2}{3}\hbar^{-1}\frac{\overrightarrow{s}(\overrightarrow{p}-imw\overrightarrow{r})}{2m}\varphi \end{cases} \tag{4.23}$$

En insérant ces équations dans la première équation de (4.21) on arrive

$$\begin{aligned}(2mE)\,\varphi &= 2m\left(\frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{k}\,(\overrightarrow{p}+im\omega\overrightarrow{r})\left(-\frac{2}{3}\hbar^{-1}\frac{\overrightarrow{k^{+}}\,(\overrightarrow{p}-im\omega\overrightarrow{r})}{2m}\varphi\right)+\right) && (4.24)\\ &+\frac{2}{3}\hbar^{-1}\overrightarrow{s}\,(\overrightarrow{p}+im\omega\overrightarrow{r})\left(-\frac{2}{3}\hbar^{-1}\frac{\overrightarrow{s}\,(\overrightarrow{p}-imw\overrightarrow{r})}{2m}\varphi\right), && (4.25)\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{9}\hbar^{-2}\left(k_i k_j^{+} + s_i s_j\right)\left[p_i p_j - im\omega p_i r_j + im\omega r_i p_j + m^2 w^2 r_i r_j\right]\varphi, \tag{4.26}$$

A l'aide de la propriété

$$k_i k_j^{+} + s_i s_j = i\left(\frac{3\hbar}{2}\right)\varepsilon_{ijk}s_k + \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^2\delta_{ij}. \tag{4.27}$$

En utilisant (4.27) on obtient

$$\begin{aligned}(2mE)\,\varphi &= \frac{4}{9}\hbar^{-2}\left[\left(i\left(\frac{3\hbar}{2}\right)\varepsilon_{ijk}s_k + \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^2\delta_{ij}\right)\left(p_i p_j - imwp_i r_j + imwr_i p_j + m^2 w^2 r_i r_j\right)\right]\varphi,\\ &= \left[\delta_{ij}p_i p_j + \delta_{ij}m^2 w^2 r_i r_j + imw\delta_{ij}\left(r_i p_j - p_i r_j\right) + \frac{2}{3}\hbar^{-1}\varepsilon_{ijk}s_k mw\left(p_i r_j - r_i p_j\right)\right]\varphi.\end{aligned}$$

On sait que $[r_i, p_i] = i\hbar$, et $\varepsilon_{ijk}r_i p_j$= $(\mathbf{r}\times\boldsymbol{p})_{\mathbf{k}}$ .on obtient

$$E\varphi = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2 r^2 - \frac{3}{2}\hbar w - \frac{2}{3\hbar}w\,(\mathbf{L}.\mathbf{s})\right]\varphi.$$

Cette équation représente l'oscillateur harmonique isotropique avec addition du couplage spin-orbite de force $\left(-\frac{2w}{3\hbar}\right)$.

Conclusion

A travers ce mémoire, nous avons construit l'équation d'une particule de spin 3/2 en se basant sur la procédure de Dirac-Lévy-Leblond. Comme application de cette équation, l'oscillateur harmonique a été abordé. Le résultat principal de cette application est la déduction du terme de spin-orbite comme conséquence d'une théorie non-relativiste.

Nous avons également traité le cas de la particule de spin 1/2, dans le cadre de l'équation de Lévy-Leblond. La différence, est comme on l'a vu dans ce travail, est que pour établir l'équation associée à une particule de spin 3/2, la fonction d'onde devait etre prise en compte dans l'identification, et aussi nous avons trouvé une équation adapté à la particule de spin 3/2 qui établit par Hurley, et le dernier chapitre nous avons étudié l'oscillateur harmonique dans le cas de particule de spin 1/2 et particule de spin 3/2. Avec l'addition du terme de couplage spin-orbite. Et on a fait le champ électromagnétique dans le cas de spin 1/2 et on déduire le facture g Lande une théorie non relativiste, et on peut prévoir le moment cinétique intrinsèque.

Bibliographie

[1] A.Messiah :Mécanique Quantique,Tome 2 (Dunod edition 1995).

[2] W.Greiner, Quntum Mechanics :An Introduction(Springer, Berlin, 1989).

[3] J.M.Lévy-Leblond, comme Math. Phys. 6 286 (1967).

[4] D.Sénéchal,departement de physique,faculté des sciences université de Sherbrook.

[5] C Aslangul,Mécanique quantique.(De Boeck, 2007)

[6] D.Itô,K.Mori,and E. Carriere, Nuovo Cimento A 51,1119(1967).

[7] M.Moshinsky and A .Szczepaniak,J.Phys.A 22, L817(1989).

[8] A.Boumali,Thesis, Laboratoire de physique théorique appliquée(LPTA),(2008).

[9] G.Petiau,university of Paris thesis(1936).

[10] R.J.Duffin, Phys.Rev 54,1114(1938).

[11] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A 173, 91-116 (1939).

[12] Y. Nedjadi et R. C. Barrett J.Phys.A 27, 4301 (1994).

[13] E.Schrödinger, Mémoires sur la mécanique ondulatoire(J.Gabay,Paris,1988).

[14] H.Hassanabadi et Z. Molaee Chin. Phys Vol.21, No .12 (2012).

[15] W.Greiner, Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations (Springer, Berlin, 1990).

[16] Y.Kasri, A.Bérard, Y.Grandati and L.Chetouani, Int J Theor Phys (2012).

[17] M. Moreno, A. Zentella : J. Phys. A, Math.Gen. 22, L821 (1989).

[18] Bentez, J. Martinez y Romero, R. P, Nuez-Yepez, H.N, Salas-Brito, A.L : Phys. Rev. Lett. 64, 1643 (1990).

[19] Kukulin, V.I, Loyola, G, Moshinsky, M : Phys. Lett. A 158, 19 (1991).

[20] A. Proca, Comp. Ren. Acad. Sci. Paris 202, 1366 (1936).

[21] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1964).

[22] Y. Kasri, Thesis, Laboratoire de Physique Theorique (2008).

[23] L. E. Balentine : Quantum Mechanics, Modern Developpement, World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd (1998).

[24] R. G. Beil. Peirce, Clifford and Dirac.International Journal of Theoretical Physics, Vol, 43, No, 5, May 2004.

[25] M.Le Bellac, Physique Quantique 2E Edition, CNRS Editions (2007).

[26] M. Bednar, J. Ndimubandi, and A. G. Niktin Can. J. Phys. 75 : 283-290 (1997).

[27] C.Quesne and M.Moshinsky .J. Phys. A : Math Gen .23, 2263 (1990).

[28] J. Beckers and N. Debergh. Phys. Rev. D : Part. Fields, 42, 1255 (1990).

[29] M. Moshinsky, G. Loyola, and C. Villegas . J. Math. Phys. 32, 373 (1991).

[30] M. Moshinsky and G. Loyola. NASA Conf. Publ. 3197, 405 (1993).

[31] A. Del Sol Mesa and M.Moshinsky. Phys. A : Math.Gen .27, 4685 (1994).

[32] J. Beckers, N. Deberg, and A. G. Nikitin. J. Math. Phys. 33, 3387 (1992).

[33] N. Deberg, J. Ndimubandi, and D. Strivay. Z. Phys. C : Part. Fields, 56, 421 (1992).

[34] V.V.Dvoyeglazov. Nouvo Cimento, A, 107, 1785 (1994).

[35] M.Moshinsky and A. Del Sol Mesa. J. Phys. A : Math. Gen. 29, 4217 (1996).

[36] Hagen, C. R. : Commun. Math. Phys. 18, 97 (1970).

[37] Hagen, C. R., Hurley, W. J. : Phys. Rev. Lett. 26, 1381 (1970).

[38] Hurley, W. J. : Phys. Rev. D 3, 2339 (1971).

[39] H. Umezawa, "Quantum Field Theory," North-Holland, Amsterdam (1956).

[40] P. Roman, "Theory of Elementary Particles," North-Holland, Amsterdam (1964).

[41] D. Lurie, Particles and Fields, Interscience Publishers, (1968).

[42] H.Kragh, A J Phys 52, 1024 (1984).

Résumé

A partir de ce travail on a traité la méthode de linéarisation de l’équation d’onde faite par Dirac et aprée par Lévy-Leblond, et en généralisant l’équation d’onde non relativiste pour une particule de spin 3/2. En introduisant la substitution de l’impulsion on retrouve l’oscillateur harmonique avec l’addition du terme de couplage spin-orbite.

Mots-clés : linéarisation, équation de Lévy-Leblond, oscillateur de Dirac, oscillateur de spin 3/2.