République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira-Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de Magister en Mathématiques Appliquées
Option : Analyse Numérique

THÈME

Résolution des Equations aux Dérivées Partielles Elliptiques – Cas Non Linéaire

Présenté par : BLIDI Lamine

Soutenu le 07/12/2009
Devant le jury :

Mr.	**N. Dahmani**	Professeur	U.A.M.Béjaïa	Président
Mr.	**A. Djellit**	Professeur	U.B.M.Annaba	Rapporteur
Mr.	**F. Bouhmila**	Maître de Conférences	U.A.M.Béjaïa	Examinateur
Mme.	**S. Tas**	Maître de Conférences	U.A.M.Béjaïa	Examinatrice

Résolution Des Equations Aux Dérivées Partielles Elliptiques – Cas Non Linéaire

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu M. Djellit pour avoir voulu encadrer et rapporter ce mémoire. Je le remercie, également, pour la patience qu'il a déployé durant cette collaboration.

Je remercie M. Dahmani de l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury. Je ne saurai le remercier assez pour son aide précieuse durant mon cursus.
Je remercie les enseignants du département des Mathématiques. Je pense tout particulièrement à M. Berboucha, M. Bouhmila, M. Mehidi, Mme. Bechir, M. Akroune, M^{me} Tas, M. Boudrahem, M^{me}. et M. Bourraine.

Je remercie M. Bouhmila et M^{me}. Tas qui ont acceptés d'examiner cet humble travail.

Je ne peux que remercier ma famille, et par la même, ma belle famille Aissat, pour leurs encouragements et leur soutien.

Je m'adresse tout particulièrement à ma mère et à mon père. J'ai longtemps médité sur la meilleure formule à utiliser afin de vous rendre le pareil. Je veux dire, une formule qui témoigne le mieux de la joie que votre présence me procure. Je crois que je vais faire simple et vous dire que je vous aime.

En pareille occasion j'aimerais avoir une pensée à mon entraîneur, éducateur et modèle, *Kamel Sellami* parti trop tôt.

Je remercie mes amis *Khaled* et *Amine*, férus de mathématiques. Aux innombrables et agréables moments passés à parler de mathématiques.

Je remercie mes ami(e)s *C.C.C.P*, *Nonor*, *Lakhdar*, *Chafik* et *Amel*. Si agréables et aimables.

Enfin, pour tout le reste et bien plus encore, je remercie *Latifa*, ma femme ; et le petit bout de chou qui me flanque des coups de pieds rageurs, j'ai prénommé *Tito*.

Ce travail leur est dédié.

Introduction

Soient ϕ et ψ deux applications définies sur un espace de Banach de dimension infinie X agissant dans son dual X^*. Nous considérons le problème aux valeurs propres associé au couple (ϕ, ψ) ; Il s'agit de trouver un élément $u \in X$ que l'on nomme *fonction propre*, et un réel λ appelé *valeur propre*, tels que

$$\phi(u) = \lambda \psi(u) \tag{1}$$

Pour ce faire, nous allons nous intéresser à la théorie de Ljusternick et Schnirelmann afin d'établir l'existence d'une infinité de couples de solutions distinctes.

Au début des années 1930 Ljusternick et Schnirelmann ont développé une théorie des points critiques pour des fonctionnelles différentiables sur des variétés Riemanniennes de dimension finie. L'un des principaux outils utilisé, afin d'établir l'existence de points critiques (qui ne sont pas nécessairement des maximas), comme dans le cas de la théorie de Morse, est la déformation de la variété le long des lignes de gradient. Cela requiert la généralisation de la théorie de Ljusternick–Schnirelmann (L–S en abrégé) aux variétés de dimension infinie. Cette généralisation se base sur une supposition fondamental de compacité, la condition de Palais–Smale. Dans l'application de la généralisation de la théorie L–S, aux problèmes de type (1), deux difficultés surgissent. D'un coté, il est impératif d'imposer des restrictions aux opérateurs en question afin de garantir la réalisation de la condition de Palais–Smale. D'autre part, il est nécessaire d'imposer des conditions de régularités à la norme de l'espace de Banach X afin de pouvoir construire un *champ de pseudo-gradient* qui nous permettra de définir un *flot* sur la variété en question.

D'autre part, nous nous intéresserons dans le dernier chapitre à résoudre le problème en question en passant par une autre technique de résolution, à savoir le théorème du point fixe, qui nous permettra, une fois le choix des ensembles et espaces de travail effectué, de conclure à l'existence de solutions sous forme de point fixe d'une fonctionnelle à déterminer.

Chapitre 1

Outils de base

1.1 Résultats préliminaires

Dans toute la suite nous nous intéresserons au problème

$$(1.1) \qquad -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u + f(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

où x est la variable de l'espace, Δ le Laplacien (l'opérateur de Laplace), λ un paramètre réel, g et q des fonctions mesurables. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory.

Toute fonction mesurable h peut se décomposer en deux fonctions mesurables $h = h^+ - h^-$ avec $h^\pm = \max(\pm h, 0)$.

Pour $R > 0$ donné, nous désignons par B_R (resp. B'_R) la boule, centrée à l'origine, de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ (resp. le complémentaire de B_R dans $\mathbb{R}^n$).

Nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 1.1.1 (Opérateur Elliptique)**.** *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Soient n^2 fonctions $a_{ij} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*

Nous ferons les hypothèses suivantes sur les fonctions a_{ij}.

(a) Les fonctions a_{ij} sont bornées, i.e. il existe $C > 0$ tel que

$$|a_{ij}(x)| \leq C, \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall i, j$$

(b) Les fonctions a_{ij} sont symétriques, i.e.

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall i, j.$$

(c) (Ellipticité). Il existe $\alpha_0 > 0$ et α_1 tels que $\forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha_1 |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.2}$$

où $|\xi|^2 = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)$.

Nous allons travailler essentiellement avec le Laplacien, qui coïncide avec la définition ci-dessus en considérant le cas où

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall i, j.$$

Définition 1.1.2. *Si le problème (1.1) admet une solution non triviale $u \in \mathbb{V}\,(u \not\equiv 0)$ pour un certain λ, alors λ est dit **valeur propre**, et u est appelée **fonction propre** du problème (1.1). Le couple (λ, u) est appelé **solution** du problème (1.1).*

Définition 1.1.3. *Soient A et B deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H. Nous appelons **valeur propre principale**, toute valeur propre réelle λ associée à une fonction propre qui ne change pas de signe dans $\mathbb{R}$, i.e.*

$$Au = \lambda Bu, \; u = u^+ \text{ ou } u = u^-$$

Définition 1.1.4. *Soit A une application d'un espace vectoriel normé E dans son dual $E*$, A est dite **coercive** si*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\langle A(x), x \rangle}{\| x \|} = +\infty.$$

1.2 Différentiabilité au sens de Gâteaux et de Fréchet

Définition 1.2.1 (Différentiabilité au sens de Fréchet)**.** *Soit X et Y des espaces de Banach. Soit $U \subset X$ un ouvert, et soit $f : U \longrightarrow Y$. Considérons $x_0 \in U$, on dit que f est differentiable au* *sens de Fréchet au point x_0, si il existe $A \in L(X,Y)$ tel que*

$$\| f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) \|_Y = \circ(\| x - x_0 \|_X)$$

Posons $A = f'(x_0)$ que l'on appellera la différentielle de f au sens de Fréchet au point x_0.

Remarque 1.2.1. *Si f est différentiable au sens de Fréchet en tout point de U, et si $x \mapsto f'(x)$, comme application de U vers $L(X,Y)$, est continue en x_0, alors on dit que f est continûment différentiable en x_0. Si f est continûment différentiable en tout point de U, alors on dit que f est continûment différentiable en U, et l'on note $f \in \mathscr{C}^1(U,Y)$.*

Définition 1.2.2 (Différentiabilité au sens de Gâteaux)**.** *Soit $x_0 \in U$. On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux au point x_0, si pour tout $h \in X$, il existe $df(x_0,h) \in Y$ tel que*

$$\| f(x_0 + th) - f(x_0) - t df(x_0,h) \|_Y = \circ(t) \text{ lorsque } t \to 0$$

pour tout $x_0 + th \in U$. On appelle $df(x_0,h)$ la différentielle au sens de Gâteaux de f au point x.

Remarque 1.2.2 (Propriétés)**.** *Nous avons*

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th)|_{t=0} = df(x_0,h),$$

si f est différentiable au sens de Gâteaux au point x_0.

Par définition nous avons les propriétés suivantes :

(i) Si f est différentiable au sens de Gâteaux au point x_0, alors $df(x_0,h)$ est déterminé de manière unique.

(ii) $df(x_0,th) = t df(x_0,h)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Si f est différentiable au sens de Gâteaux au point x_0, alors pour tout $h \in X$, pour tout $y^* \in Y^*$, la fonction $\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0,th) \rangle$ est différentiable en $t = 0$, et $\varphi'(t) = \langle y^*, df(x_0,h) \rangle$.

(iv) Supposons que $f : U \longrightarrow Y$ *est différentiable en tout point de* U*, et supposons que le segment* $\{x_0 + th; t \in [0,1]\} \subset U$*, alors*

$$\| f(x_0+h) - f(x_0) \|_Y \leq \sup_{0<t<1} \| df(x_0+th,h) \|_Y$$

(v) Si f *est différentiable au sens de Fréchet, alors* f *est différentiable au sens de Gâteaux.*

L'inverse n'est pas vraie, mais l'on a le résultat qui suit :

Théorème 1.2.1. *Supposons que* $f : U \longrightarrow Y$ *est différentiable au sens de Gâteaux. Supposons que pour tout* $x \in U$*, il existe* $A \in L(X,Y)$ *satisfaisant*

$$df(x,h) = A(x)h \qquad \forall h \in X.$$

Si l'application $x \mapsto A(x)$ *est continue au point* x_0*, alors* f *est différentiable au sens de Fréchet au point* x_0*, avec* $f'(x_0) = A(x_0)$*.*

***Démonstration*.** Supposons, sans nuire à la généralité, que le segment $\{x_0 + th; t \in [0,1]\} \subset U$. En vertu du théorème de Hahn-Banach, $\exists y^* \in Y^*$, avec $\| y^* \| = 1$, tel que

$$\| f(x_0+h) - f(x_0) - A(x_0)h \|_Y = \langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0) - A(x_0)h \rangle.$$

Posons

$$\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0+th) \rangle.$$

En vertu du théorème de la moyenne, $\exists \xi \in (0,1)$ tel que

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0) - \langle y^*, A(x_0)h \rangle| &= |\varphi'(\xi) - \langle y^*, A(x_0)h \rangle| \\ &= |\langle y^*, df(x_0+\xi h, h) - A(x_0)h \rangle| \\ &= |\langle y^*, [A(x_0+\xi h) - A(x_0)]h \rangle| \\ &= \circ(\| h \|) \end{aligned}$$

i.e., $f'(x_0) = A(x_0)$ $\square$

1.3 Théorèmes de convergence

Proposition 1.3.1. *Soient* (f_n) *une suite de* L^p *et* $f \in L^p$*, tels que* $\| f_n - f \|_{L^p} \to 0$*. Alors il existe une sous-suite extraite* (f_{n_i}) *telle que*

(a) $f_{n_i}(x) \to f(x) \quad p.p. \quad sur\,\Omega$

(b) $|f_{n_i}(x)| \leq g(x) \quad pour \quad tout \quad i$ *et p.p sur* Ω*, avec* $g \in L^p$*.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. On extrait une sous suite (f_{n_i}) telle que

$$\| f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^i} \quad pour \quad tout \quad i \geq 1 \tag{1.3}$$

En effet, il existe n_1 tel que

$$\| f_m - f_n \|_{L^p} \leq \frac{1}{2} \quad pour \quad m,n \geq n_1$$

on prend ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que

$$\| f_m - f_n \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2} \quad pour \quad m,n \geq n_2$$

On poursuit ainsi de proche en proche jusqu'à l'obtention de (1.3). Montrons que f_{n_i} converge dans L^p. On a

$$\| f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^i} \; pour\, tout\; i \geq 1. \tag{1.4}$$

Posons

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

on a alors

$$\| h_n \| \leq 1.$$

Du théorème de convergence monotone, il vient que p.p. sur Ω, $h_n(x)$ converge vers une limite finie que l'on notera $h(x)$ avec $h \in L^p$.

D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ldots |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq h(x) - h_{n-1}(x).$$

Il en résulte que p.p. sur Ω, $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite que l'on notera $\bar{f}(x)$.

On a p.p. sur Ω

$$(1.5) \qquad |\bar{f}(x) - f_n(x)| \leq h(x) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad i, \quad \textit{p.p.} \quad \textit{sur} \quad \Omega \quad \textit{avec} \quad h \in L^p.$$

Il en résulte, en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue, que $\bar{f} \in L^p$ et que $f_n \to \bar{f}$ dans L^p. Ce qui achève la démonstration du point (a). Pour la démonstration du point(b), il suffit de réitérer le raisonnement en posant $g = \bar{f} + h$. □

Nous ferons également un usage répété de l'astuce d'unicité suivante,

Proposition 1.3.2. *Soit X un espace de Banach et $(x_n)_n$ une suite définie sur X, possédant la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite $(x_{n'})$ de la suite $(x_n)_n$, on peut extraire une nouvelle sous-suite $(x_{n''})$ qui converge vers x. Alors la suite entière $(x_n)_n$ converge vers x.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite ne converge pas vers x. Il existe donc un voisinage V de x et une sous-suite $x_{n'}$ telle que $x_{n'} \notin V$ pour tout n'. Extrayons de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $x_{n''}$ qui, par hypothèse, converge vers x. Il existe donc un n''_0 tel que pour tout $n'' \geq n''_0$, $x_{n''} \in V$, ce qui est une contradiction. D'où le résultat. □

1.4 Espaces de Sobolev à poids

L'équation (1.1) a été largement étudiée ans le cas de domaines bornés. Quand le domaine est non-borné, il est nécessaire d'ajouter des contraintes supplémentaires afin de contrôler le comportement des solutions à l'infini. Une façon d'aborder le problème consiste a chercher des solutions dans des espaces de Sobolev avec poids. En effet, cela permet, d'une part, de décrire de manière explicite le comportement des solutions a l'infini, et d'autre part, si les poids sont bien choisis, d'étendre certaines propriétés essentielles des espaces de Sobolev classiques dans des domaines bornés a des domaines non bornés. L'exemple de l'inégalité de Poincaré, qui s'étend via les inégalités de Hardy, est l'un des apports les plus significatifs de l'utilisation des poids[5]. Rappelons qu'à tout exposant $1 < p < +\infty$ nous associons le conjugué de Sobolev p^* donné par

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

Définition 1.4.1. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y, et on note $X \circlearrowleft Y$, si d'une part $u \in X$ implique que $u \in Y$, et d'autre part s'il existe une constante C ne dépendant pas de u telle que pour tout $u \in X$*

$$\| u \|_Y \leq C \| u \|_X$$

Définition 1.4.2. *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compact dans un espace de Banach Y, et on note $X \circlearrowleft\circlearrowleft Y$, si d'une part $X \circlearrowleft Y$, et d'autre part si toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y.*

Définition 1.4.3. *On appelle **poids** toute fonction $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle, non négative mesurable.*

Définition 1.4.4. *$L^p_a(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace L^p muni du poids a, i.e.*

$$L^p_a(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}^n) : a^{\frac{1}{p}} u \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\} \tag{1.6}$$

Nous définissons, alors, l'espace de Sobolev à poids suivant :

$$W^{1,p}_a(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}^n) : a^{\frac{1}{p}} u \in L^p(\mathbb{R}^n), |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\} \tag{1.7}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{W^{1,p}_a} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^p + a u^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.8}$$

Théorème 1.4.1 (Théorème d'injection de Sobolev)**.** *Soit* $n > 2$*. Alors pour tout* $1 \leq p \leq q \leq 2^* = \dfrac{2n}{n-2}$,

$$W_a^{1,p} \circlearrowleft L^q(\mathbb{R}^n).$$

Nous désignons par $W_{0,a}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *la complétion de* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *dans la norme précedente*

Afin d'alléger les écritures nous poserons, le long de cette section, $X = W_{0,a}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $Y = L_a^p(\mathbb{R}^n)$. Notons par $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ les espaces de fonctions $u \in X, Y$ restreints à Ω.

Théorème 1.4.2. *Soit*

$$X(B_R) \circlearrowleft\circlearrowleft Y(B_R) \tag{1.9}$$

pour tout $R > 0$*, et*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\| u \|_Y \ (B_R')}{\| u \|_X} = 0. \tag{1.10}$$

Alors

$$X \circlearrowleft\circlearrowleft Y.$$

Démonstration. De (1.9) et (1.10), il existe $C > 0$ tel que

$$\| u \|_Y \leq C \| u \|_X \ . \tag{1.11}$$

Toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ appartient à X et Y du fait que X et Y sont définies en tant que complétion de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans leur normes respectives, ainsi (1.11) signifie que X s'injecte dans Y. Nous allons nous intéresser à la compacité de cette injection. Soit

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{dans } X.$$

D'où, en particulier,

$$\| u_n \|_X \leq C. \tag{1.12}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe, de (1.10) et (1.12), un rayon R_ε tel que

$$\| u_n \|_Y (B'_{R_\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{3} C^{-1} \| u_n \|_X \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.13}$$

En vertu de la continuité de la mesure, on obtient

$$\lim_{R \to \infty} \| u_n \|_Y (B'_R) = 0, \tag{1.14}$$

Ainsi, il existe, éventuellement un nouveau rayon, R_ε tel que (1.13) est vérifiée, de plus

$$\| u \|_Y (B'_{R_\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.15}$$

Par ailleurs, pour cet ε et le rayon R_ε, on peut exhiber un entier n_ε tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$,

$$\| u - u_n \|_Y (B_{R_\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.16}$$

En combinant (1.13), (1.15) et (1.16), on obtient, pour ε donné, un rayon R_ε et consécutivement un entier n_ε tels que

$$\| u - u_n \|_Y \leq \| u - u_n \|_Y (B_{R_\varepsilon}) + \| u \|_Y (B'_{R_\varepsilon}) + \| u_n \|_Y (B'_{R_\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, le résultat s'en suit. □

Théorème 1.4.3 (Théorème d'injection de Kondrashov)**.** *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors*

$$W^{1,p}(B_R) \circlearrowleft\circlearrowleft L^q(B_R) \tag{1.17}$$

pour tout $1 \leq q < 2^*$ *et* $R > 0$

Remarque 1.4.1. *L'injection (1.17) n'est plus réalisée si on remplace* B_R *par* $\mathbb{R}^n$.*[1]*

Théorème 1.4.4. *Soient $n > 2$, $1 < p < q < 2^*$, a, b des fonctions non nulles, non négatives et mesurables. b localement bornée, de plus*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in B'_R} (b(x))^{2^*-p}(a(x))^{q-2^*} = 0. \tag{1.18}$$

Alors

$$W_a^{1,p}(\mathbb{R}^n) \circlearrowleft\circlearrowleft L_b^q(\mathbb{R}^n)$$

Démonstration. b étant localement bornée, alors en vertu du théorème (1.4.3) on obtient

$$W_a^{1,p}(B_R) \circlearrowleft W^{1,p}(B_R) \circlearrowleft\circlearrowleft L^q(B_R) \circlearrowleft L_b^q(B_R),$$

ainsi (1.9) est vérifiée.

Par ailleurs, grâce à l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}\int\limits_{B'_R} b|u|^q \mathrm{d}x &\leq \left(\int\limits_{B'_R} b^{\frac{2^*-p}{2^*-q}}|u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-q}{2^*-p}} \left(\int\limits_{B'_R} |u|^{2^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-p}{2^*-p}} \\ &\leq C(R)\left(\| a^{\frac{1}{p}} u \|_p + \| \nabla u \|_2 \right)^q\end{aligned}$$

avec $C(R) \to 0$ lorsque $R \to \infty$ grâce à (1.18).

Ainsi, les conditions du Théorème 1.4.2 étant vérifiées, on obtient le résultat. □

Théorème 1.4.5. *Soient $n > 2$, $1 < p < q < 2^*$, a et b deux fonctions non identiquement nulles, non négatives et mesurables, b localement bornée. De plus,*

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in B'_R} \frac{b(x)}{a(x)} = 0 \\ &\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in B'_R} b(x) = 0\end{aligned} \tag{1.19}$$

Alors

$$W_a^{1,p}(\mathbb{R}^n) \circlearrowleft\circlearrowleft L_b^q(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. De l'inégalité de Hölder et en vertu du théorème d'injection de Sobolev on a

$$\begin{aligned}
\int_{B'_R} b|u|^q \mathrm{d}x &\leq \left(\| b^{\frac{1}{p}} u \|_p^{p\frac{2^*-q}{2^*-p}} \| b^{\frac{1}{2^*}} u \|_{2^*}^{2^* \frac{q-p}{2^*-p}} (B'_R) \right) \\
&\leq C\left(\sup_{x\in B'_R} \left(\frac{b(x)}{a(x)}\right)^{\frac{q}{p}} \| a^{\frac{1}{p}} u \|_p^q + \sup_{x\in B'_R} (b(x))^{\frac{q}{2^*}} \| u \|_{2^*}^q \right) \qquad (1.20)\\
&\leq C(R)\Big(\| a^{\frac{1}{p}} u \|_p + \| \nabla u \|_2 \Big)^q
\end{aligned}$$

avec $C(R) \to 0$ lorsque $R \to \infty$ et ce grâce à (1.19).

Ainsi, les conditions du Théorème 1.4.2 étant vérifiées, on obtient le résultat. □

Théorème 1.4.6. *Soient $n > 2$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < 2^*$, et soit $b \in L^r(\mathbb{R}^n)$ une fonction non identiquement nulle et non négative avec*

$$\frac{2^*}{2^*-q} < r \begin{cases} +\infty, & p \leq q, \\ \leq \dfrac{p}{p-q}, & p > q. \end{cases}$$

Alors

$$W^{1,p} \circlearrowleft\circlearrowleft L_b^q(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout R

$$\int_{B_R} b|u|^q \mathrm{d}x \leq \| b \|_r (B_R) \| u \|_{\frac{rq}{r-1}}^q \leq C(B_R)(\| u \|_p + \| u \|_{2^*-\varepsilon})^q$$

car $p \leq \dfrac{rq}{r-1} < 2^*$. Ce qui nous permet, en vertu du théorème (1.4.3), de vérifier (1.9).

Par ailleurs, en réitérant le même raisonnement, on a

$$\int_{B'_R} b|u|^q \mathrm{d}x \leq \| b \|_r (B'_R) \| u \|_{\frac{rq}{r-1}}^q \leq C(R)(\| u \|_p + \| u \|_{2^*})^q$$

avec $C(R) \to 0$ lorsque $R \to \infty$, ce qui nous permet d'obtenir (1.10). Ainsi, étant dans les conditions du Théorème 1.4.2, le résultat s'en suit. □

1.5 Opérateurs de Nemytskii

Définition 1.5.1. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory si, et seulement si*

(a) $f(.,s)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $s \in \mathbb{R}$

(b) $f(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.5.2. *Nous disons que F est un opérateur de Nemytskii, associé à une fonction de Carathéodory $f(x,u)$de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'il est défini par*

$$F(u)(x) = f(x,u(x)). \tag{1.21}$$

L'introduction des fonctions de Carathéodory est motivé par le souci de rendre l'opérateur de composition F mesurable dés que u l'est. En effet, supposons qu'il existe une suite de fonctions $(u_n)_n$, telle que $u_n \to u$ p.p., $f(x,u_n(x))$ est mesurable grâce à (a). En vertu de (b) on a $f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x))$ p.p., donc $f(x,u(x))$ est mesurable.[7]

Proposition 1.5.1 (Théorème de Continuité)**.** *Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \le p,q < \infty$ des réels et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. On suppose qu'il existe $\sigma \in L^q(\Omega)$ et $\rho \ge 0$ tels que la condition de croissance suivante :*

$$|f(.,u)| \le \sigma(.) + \rho|u|^{\frac{p}{q}} \qquad \textit{pour tout } u \in \mathbb{R} \textit{ et p.p. sur } \Omega \tag{1.22}$$

est satisfaite. Alors, F tel que défini par (1.21) est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant vers u. En vertu du Lemme1.3.1, il existe $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(u_{n_i})_i$ telles que

$$u_{n_i} \to u, \qquad |u_{n_i}| \le g \quad p.p.\ dans\ \Omega.$$

On en déduit que p.p. sur Ω on a $f(x,u_{n_i}(x)) \to f(x,u(x))$ et

$$|f(x,u_{n_i}(x))| \le \sigma(x) + \rho|g(x)|^{\frac{p}{q}}.$$

En vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue on conclut que $F(u_{n_i}) \to F(u)$ dans $L^q(\Omega)$. En vertu de l'unicité de la limite, toute la suite $(F(u_n))_n$ converge vers Fu dans $L^q(\Omega)$. D'où le résultat. $\square$

Soient f une fonction de Carathéodory et $1 < p < +\infty$. Supposons qu'il existe une constante C et $\sigma(x) \in L^{p'}$, avec $p' = \dfrac{p}{p-1}$ tels que

$$|f(x,u)| \leq \sigma(x) + C|u|^{p-1} \tag{1.23}$$

Posons

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds.$$

Alors, la fonctionnelle

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,u(x))dx \tag{1.24}$$

est défini sur $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.5.1. *Soit la fonctionnelle V telle que définie par (1.24), alors $V' : W^{1,p} \longrightarrow W^{1,q}$ définie par*

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)vdx \qquad \textit{pour tout } v \in W^{1,p'}, \tag{1.25}$$

est continue pour $1 \leq p \leq q$

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoins du lemme suivant :

Lemme 1.5.1 (Théorème de Vainberg–Krasnoselskii)**.** *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, et supposons qu'il existe $C > 0$, $1 \leq p \leq q < +\infty$ et une fonction $g \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$ tels que*

$$|f(x,u) \leq g(x) + C|u|^p \qquad \textit{p.p. tout } x \in \Omega \textit{ et pour tout } u \in \mathbb{R} \tag{1.26}$$

Alors, en considérant une suite $(u_n)_n \subset L^q(\Omega)$ *telle que*

$$u_n \to u \qquad \textit{dans } L^q(\Omega)$$

lorsque $n \to +\infty$*, on obtient*

$$f(.,u_n(.)) \to f(.,u(.)) \qquad \textit{dans } L^{\frac{q}{p}}(\Omega).$$

Démonstration. [*du Théorème 1.5.1*] Soit $(u_n) \subset W^{1,p}$ une suite fortement convergente vers $u \in W^{1,p}$. Alors en vertu de l'inégalité de Hölder et du fait de la supposition (1.23) on obtient

$$\begin{aligned} |\langle V'(u_n) - V'(u), v\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x,u_n) - f(x,u))vdx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{B_R} (f(x,u_n) - f(x,u))vdx \right| + \left| \int_{B'_R} (C(|u|^{p-1} + |u_n|^{p-1}) + \sigma(x))vdx \right| \\ &\leq \left| \int_{B_R} (f(x,u_n) - f(x,u))vdx \right| + C(\| u \|_p^{p-1} + \| u_n \|_p^{p-1} + \| \sigma(x) \|_{\frac{p}{p-1}})(B'_R) \| v \|_p \end{aligned}$$

où C ne dépend pas de n et R, la fonction $\sigma \in L^{\frac{p}{p-1}}$. Du fait que (u_n) converge fortement vers u dans $W^{1,p}$, pour un certain $\varepsilon > 0$ il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ il existe un certain R tel que

$$C(\| u \|_p^{p-1} + \| u_n \|_p^{p-1}) + \| \sigma(x) \|_{\frac{p}{p-1}} (B'_R) \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, $f(x,u) \in W^{1,q}(B_R)$ pour $1 \leq p \leq q$, car

$$\| f \|_p^p (B_R) \leq \| f \|_q^q (B_R) \| 1 \|^{1-\frac{p}{q}} (B_R),$$

$$|t|^p \leq |t|^q + 1, \qquad 1 \in W^{1,q}(B_R).$$

Nous pouvons, donc, appliquer le théorème de Vainberg–Krasnoselskii afin d'exhiber un entier $n_0 \geq n_1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x,u_n) - f(x,u))vdx \right| \leq \\ &\qquad \leq \left| \int_{B_R} |f(x,u_n - f(x,u)|^{\frac{q-1}{q}} dx \right|^{\frac{q}{q-1}} \| v \|_q (B_R) \leq \varepsilon \| v \|_q (B_R). \end{aligned}$$

Ainsi, pour ε donné, on peut choisir R et puis n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$\| V'(u_n) - V'(u) \|_* \leq \sup_{\|v\|_p=1} \langle V'(u_n) - V(u), v\rangle \leq \varepsilon C.$$

en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ on obtient le résultat voulu pour V. □

1.6 Régularité des solutions

Définition 1.6.1. *Une fonction localement mesurable $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée **solution faible** du problème (1.1) si ∇u et $f(., u(.))$ sont localement intégrable et pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla \varphi + q\varphi)dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)\varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} gu\varphi dx.$$

Définition 1.6.2. *Une fonction $u \in \mathscr{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est appelée **solution classique** de l'équation (1.1) si pour cette fonction u l'équation (1.1) est vérifiée en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.*

Théorème 1.6.1. *Toute solution classique $u \in \mathscr{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation (1.1) est une solution faible.*

Démonstration. Il suffit de multiplier l'équation (1.1) par $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et d'intégrer par parties. □

La régularité de la solution faible dépends des caractéristiques de f, nous devons, donc, rajouter d'autres conditions sur f.

i. Pour toute boule $B_R \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, il existe une fonction continue $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{\psi(t)}{|t|^{2^*}} = 0$$

telle que

$$tf(x,t) \geq \psi(t)$$

p.p. tout $x \in B_R$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

ii. La fonction f est localement bornée, i.e. pour R et M positifs, il existe $A = A(M)$ tel que p.p. tout $x \in B_R$ et pour tout $|t| \leq M$ on a,

$$|f(x,t)| \leq A.$$

iii. La fonction f est telle que pour toute fonction $\omega \in \mathscr{C}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ la fonction $f(.,\omega(.)) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement de Hölder sur $\mathbb{R}^n$, i.e. que $f(.,\omega(.))$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et que pour toute boule B_R il existe une constante $\alpha \in]0,1[$ telle que

$$\sup_{\substack{y\in B_R \\ z\in B_R \\ y\neq z}} \frac{|f(x,\omega(y)) - f(x,\omega(z))|}{|y-z|^\alpha} < +\infty$$

Théorème 1.6.2. *Soit $u \in W^{1,p}$ une solution faible de (1.1) uniformément bornée, et soit f une fonction de Carathéodory telle que la fonction $f(.,u(.))$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}^n$. Alors, uniformément,*

$$u \to 0 \qquad \textit{lorsque } |x| \to \infty. \tag{1.27}$$

Pour la démonstration nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.6.1. *Soient f satisfaisant les conditions i. et ii. et u une solution faible de (1.1) telle que pour tout B_R on a,*

$$\| \nabla u \|_2 \,(B_R) + \| u \|_\infty \,(B_R) \leq C.$$

Alors, $u \in \mathscr{C}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout B_R on a,

$$\sup_{x\in B_R} |\nabla u| \leq C'$$

où C' ne dépends pas de u.

Démonstration. [Démonstration du Théorème 1.6.2] Grâce aux conditions du théorème, on est en mesure d'appliquer le Lemme 1.6.1. On obtient donc,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\nabla u| \leq C' \tag{1.28}$$

Pour une certaine constante C'. Supposons que (1.27) n'est pas vraie. Alors il existerait un certain $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_i) \subset \mathbb{R}^n$, avec $|x_i| \to \infty$ quand $i \to \infty$, telle que

$$|u(x_i)| \geq \varepsilon \tag{1.29}$$

Pour tout i choisissons une sous-suite de (x_i) telle que

$$\inf_{i \neq j} |x_i - x_j| \geq \frac{\varepsilon}{C'}. \tag{1.30}$$

En vertu de (1.28) et (1.29) on a

$$|u(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout } x \text{ avec } |x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2C'}. \tag{1.31}$$

Ainsi, de (1.30) et (1.31) on a,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{|x-x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2C'}} |u|^p dx \geq \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{\varepsilon}{2})^p \mathrm{mes} B_{\frac{\varepsilon}{2C'}} = +\infty,$$

avec $\mathrm{mes} B_{\frac{\varepsilon}{2C'}}$, la mesure des ensembles $B_{\frac{\varepsilon}{2C'}}$. Ce qui contredit le fait que $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ainsi la démonstration est achevée. □

1.7 Inégalité de Hardy

Proposition 1.7.1 (Inégalité de Hardy). *Pour $\alpha + n \neq 2$, il existe $C = C(\alpha, n) > 0$ tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-2} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha} |\nabla u(x)|^2 dx \tag{1.32}$$

pour tout $u \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$.

Chapitre 2

Résultats d'existence des valeurs propres

2.1 Théorie de Ljusternick–Schnirelmann

2.1.1 Introduction

La théorie de Ljusternick–Schnirelmann est, conjointement avec la théorie de Morse, l'un des outils les plus classiques et les plus puissants pour l'étude de l'existence des points critiques. Dans la suite nous allons exposer les résultats nécessaires à l'application de cette théorie.

Nous allons traiter les problèmes de la forme

$$Au = \lambda Gu + F(x,u) \tag{2.1}$$

où x est la variable de l'espace, A est un opérateur linéaire elliptique d'ordre deux, λ un paramètre réel, G est l'opérateur de multiplication et F est un opérateur non linéaire. Les opérateurs A, G et F sont définis dans un espace de Hilbert H. Notons que dans le cas où $F \equiv 0$, nous retrouvons le cadre linéaire. Dans ce cas nous appliquons la théorie de Weinberger pour en déduire l'existence d'une suite dénombrable de couples de solutions non triviales (λ_n, u_n), où u_n est le vecteur propre associé à la énième valeur propre λ_n. En outre, soit α un nombre réel positif. En posant $a(u) = (Au, u)$, $g(u) = (Gu, u)$ et $M_\alpha = \{u \in H; g(u) = \alpha\}$, nous obtenons :

$$\lambda_n = \min_{H_n} \max_{u \in H_n \cap M_1} a(u) = a(u_n).$$

Ici H_n est un sous-espace de H de dimension n. Dans ce cas u_n est dit *point critique* de la fonctionnelle a par rapport à la variété M_1, et la valeur $a(u_n)$ est dite *niveau critique*.

Plus généralement, soient a et g deux fonctionnelles non linéaires, différentiables au sens de Gâteaux. Nous pouvons définir les valeurs propres et les vecteurs propres pour le couple $a', g' : H \longrightarrow H^*$ (H^* est l'espace dual de H), si l'équation

$$\lambda g'(u) - a'(u) = 0 \tag{2.2}$$

admet des solutions non triviales.

Nous disons que $u_0 \in M_\alpha$ est un point critique de la fonctionnelle a par rapport à la variété M_α s'il existe un nombre réel λ tel que

$$\lambda g'(u_0) - a'(u_0) = 0.$$

Le nombre $\gamma = a(u_0)$ est dit *niveau critique*. Si les fonctionnelles a et g sont quadratiques alors $\gamma = \alpha\lambda$. Dans le cas contraire, il faudrait examiner l'ensemble Γ de tous les niveaux critiques et en déduire les propriétés de l'ensemble Λ de toutes les valeurs propres. Ce concept est remarquablement développé dans la théorie de Ljusternick–Schnirelmann. La théorie en question est l'analogue non linéaire du principe de Courant–Hilbert, et stipule que l'ensemble Γ est au moins dénombrable. De plus, l'équation (2.2) a un nombre infini de solutions sur chaque variété M_α[15].

Définition 2.1.1. *On appelle* ***valeur critique****, de la fonctionnelle ϕ, de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur X, un nombre $c \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in X$, tel que*

$$\phi(u) = c, \qquad d\phi(u) = 0.$$

Remarque 2.1.1. *La détermination d'une valeur critique entraîne de fait l'existence d'un point critique.*

Une valeur non critique, i.e. pour laquelle $d\phi(u) \neq 0$, est appelée ***valeur régulière***.

2.1.2 Condition de Palais-Smale

Définition 2.1.2. *Soient X un espace de Banach, X^* l'espace dual, $J \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$. Une suite $(u_n) \subset X$ satisfaisant, pour un certain $c \in \mathbb{R}$,*

$$J(u_n) \to c \qquad \text{dans } \mathbb{R}$$

$$J'(u_n) \to 0 \qquad \text{dans } X'$$

est appelée suite de Palais–Smale.

Définition 2.1.3. *Soit une fonctionnelle J de classe $\mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$. Soit $c \in \mathbb{R}$, on dit que J vérifie la condition de Palais–Smale au niveau c, si de toute suite $(u_n)_n \subset X$ de Palais–Smale on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.*

Définition 2.1.4 (Condition de Palais-Smale)**.** *Soient F et $G \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$. Nous posons :*

$$M_\alpha = \{v \in X : Gv = \alpha\},\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{2.3}$$

Nous supposons que $G'v \neq 0$ pour tout $v \in M_\alpha$. Nous disons que F satisfait la condition de Palais-Smale sur M_α si, et seulement si, de toute suite $(u_n) \subset M_\alpha$ telle que

$$\exists c > 0 : |Fu_n| \leq c\, et\, F'_\alpha u_n = F'u_n - \frac{\langle F'u_n, u_n\rangle}{\langle G'u_n, u_n\rangle} G'u_n \to 0\, dans X^*$$

nous pouvons extraire une sous-suite convergente.

Notons ici que F'_α représente une extension, sur X, de la dérivée tangentielle de F sur M_α.

Bien souvent les techniques du calcul variationnel aboutissent, non pas directement à l'existence de points critiques, mais à l'existence de suite de Palais–Smale. Afin de conclure à l'existence d'un point critique, il faut une condition supplémentaire de compacité. D'où l'utilité de la condition de Palais–Smale.

2.1.3 Lemme de déformation

Dans cette section nous nous intéressons à l'un des outils les plus importants de cette théorie. Nous débuterons par présenter le lemme de déformation dans le cadre général, i.e. appliquer à un espace de Banach quelconque. Nous nous intéresserons ensuite au même lemme dans le cas d'une variété.

Soit X un espace de Banach, et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} K_{a,\varepsilon} &= \{u \in X,\, |J(u) - a| \leq \varepsilon\}, \\ A_a &= \{u \in X, J(u) \leq a\}. \end{aligned}$$

Considérons également,

$$\| J(u) \|_* = \sup_{\|v\|=1} \langle J(u), v \rangle$$

qui définit une norme sur X^*.

Champ de pseudo–gradient

La notion de *champ de pseudo–gradient* fût introduite par Palais [1] afin de pouvoir surmonter des difficultés techniques dans la démonstration du lemme de déformation. L'idée principale de cette démonstration repose sur la résolution d'une équation différentielle avec condition initiale,

1. R.S. Palais, *Morse Theory on Hilbert Manifolds*. Topology 2 (1963) 299–340

du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\overline{\eta}}{dt} & = & -2\delta g(J(\overline{\eta}))\dfrac{J'(\overline{\eta})}{\| J'(\overline{\eta}) \|^2} \qquad \text{dans } \mathbb{R}^+, \\ \overline{\eta}(t & = & 0) = u, \end{array}\right. \tag{2.4}$$

(pour les détails voir la démonstration du Théorème 2.1.2). La partie droite de l'équation (2.4) est supposée nulle aux points où $J'(\eta) = 0$. Les difficultés tiennent au fait que $J'(u)$ n'appartient plus à X lorsque la partie droite de (2.4) doit s'annuler dans X. Une moindre régularité de J — supposée de classe $\mathscr{C}^2$— ne règle pas le problème. Ces considérations ont fortement motivés l'introduction de cette notion.

Définition 2.1.5. *Soient X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $\mathscr{C}^1$. Une application $W : X \longrightarrow X$ est appelée* ***champ de pseudo–gradient*** *(p–g en abrégé) si*

(1) $\| W(u) \| \leq 2 \| J'(u) \|_*$ *pour tout $u \in X$,*

(2) $\langle J'(u), W(u)\rangle \geq \| J'(u) \|_*^2$ *pour tout $u \in X$,*

(3) l'application W est localement lipschitzienne.

Théorème 2.1.1 (Théorème d'existence)**.** *Soient X un espace de Banach séparable et $J \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$. Alors un champ de pseudo–gradient de J existe.*

Démonstration. Soit u_0 un point arbitraire de X. Comme par définition $\| J'(u) \| = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle J'(u), x\rangle$ et que $\| J'(u) \| \neq 0$, il existe $v \in X$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \langle J'(u_0), v\rangle & \geq & \dfrac{3}{4} \| J'(u_0 \|_*, \\ \| v \| & = & 1. \end{array} \tag{2.5}$$

En posant

$$W_0(u_0) = \frac{3}{2} \| J'(u_0) \|_* \, v \tag{2.6}$$

on obtient, alors à partir de (2.5),

$$\langle J'(u_0), W_0(u_0)\rangle \geq \frac{9}{8} \| J'(u_0) \|_*^2 \tag{2.7}$$

La valeur de $J'(u)$ dépends continûment de u dans X^*. Les relations (2.5), (2.6) expriment le fait que dans un voisinage U_ε de u_0

$$\begin{aligned} &\| W_0(u_0) \| \leq 2 \| J'(u_0) \|_* \\ &\langle J'(u_0), W_0(u_0) \rangle \geq \| J'(u_0) \|_*^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

pourvu que

$$W_0(u) = W_0(u_0) \qquad \text{pour } u \in U_\varepsilon. \tag{2.9}$$

Ainsi, il est possible de recouvrir X par des ouverts U_ε^i sur lesquels on définit des applications constantes W_i satisfaisant les relations analogues à (2.8) et (2.9) pour certains u_i donné.

Un résultat général de topologie nous permet de trouver, pour tout recouvrement par des ouverts (U_ε^i) d'un espace de Banach séparable, un recouvrement localement fini (V_ε^i), i.e. un recouvrement tel que pour tout $u \in X$ il existe un ensemble fini d'indexes i avec $u \in V_\varepsilon^i$.

Il s'agit, maintenant de construire un recouvrement (V_ε^i) de telle sorte que la fonctionnelle soit localement lipschitzienne. Considérons la fonctionnelle $g_i : V_\varepsilon^i \longrightarrow \mathbb{R}$, avec

$$g_i(u) = \inf_{v \in \partial V_\varepsilon^i} \| u - v \|$$

et soit

$$g_i(u) = 0 \qquad \text{en dehors de } V_\varepsilon^i.$$

Les fonctionnelles g_i sont localements lipschitziennes. En effet, de la definition de la norme, on a

$$\begin{aligned} \| g_i(u) - g_i(v) \| &= \left| \inf_{u' \in \partial V_\varepsilon^i} \| u - u' \| - \inf_{v' \in \partial V_\varepsilon^i} \| v - v' \| \right| \\ &\leq \inf_{\substack{u' \in \partial V_\varepsilon^i \\ v' \in \partial V_\varepsilon^i}} \| u - u' - v + v' \| \leq \| u - v \| . \end{aligned}$$

Considérons, alors, l'application $W : X \longrightarrow X$ avec,

$$W(u) = \frac{\sum_i g_i(u) W_i(u)}{\sum_i g_i(u)}$$

(3) Montrons qu'il s'agit bien d'un champ de p–g. Le recouvrement en question étant localement fini, le numérateur comme le dénominateur sont lipschitziens, en tant que sommes finies de termes lipschitziens. De plus, le dénominateur ne peut être nul, car tous les V_ε^i sont des ouverts et tout point appartient au mois à un ouvert V_ε^i. Ainsi, le rapport est également lipschitzien.

(1) De la définition même de la norme et de (2.8) on a

$$\| W(u) \| \leq \frac{\sum_i g_i(u) \| W(u) \|}{\sum_i g_i(u)} \leq 2 \frac{\sum_i g_i(u) \| J'(u) \|_*}{\sum_i g_i(u)} = 2 \| J'(u) \|_* .$$

pour tout $u \in X$

(2) De façon analogue, en vertu de (2.8), on a

$$\langle J'(u), W(u) \rangle = \frac{\sum_i g_i(u) \langle J'(u), W_i(u) \rangle}{\sum_i g_i(u)} \geq \| J'(u) \|_*^2$$

$\square$

Théorème 2.1.2 (Lemme de déformation)**.** *Supposons qu'il existe des constantes $a, C > 0$, $\varepsilon > 0$ telles que pour tout $u \in K_{a,\varepsilon}$*

$$\| J'(u) \| \geq C \tag{2.10}$$

*est vérifiée. Alors, pour tout δ avec $\varepsilon > \delta > 0$ il existe une application continue $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$, appelée **flot**, telle que*

1. *$\eta(t,u) = u$ pour tout $u \notin K_{a,\varepsilon}$,*
2. *$\eta(0,u) = u$ pour tout $u \in X$,*
3. *$\eta(1, A_{a+\delta}) \subset A_{a-\delta}$.*

***Démonstration*.** Définissons une fonction lipschitzienne $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [a-\varepsilon, a+\varepsilon], \\ 1 & \text{si } t \in [a-\delta, a+\delta], \\ \text{linéaire} & \text{ailleurs}, \end{cases} \tag{2.11}$$

et considérons l'équation

$$
(2.12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overline{\eta}}{\mathrm{d}t} &= -2\delta g(J(\overline{\eta}))\dfrac{W(\overline{\eta})}{\| J'(\overline{\eta}) \|^2} \qquad \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \overline{\eta}(t &= 0) = u, \end{cases}
$$

où W est le champ de p–g associé à J. La partie droite de (2.12) est localement lipschitzienne grâce à (3). De plus elle est uniformément bornée pour tout $\overline{\eta} \in X$. En effet, en vertu de (1) on obtient, pour tout $\overline{\eta} \in X$

$$
\left\| 2\delta g(J(\overline{\eta}))\frac{W(\overline{\eta})}{\| J'(\overline{\eta}) \|^2} \right\|_* \leq 4\delta \| J'(\overline{\eta}) \|_*^{-1} \leq 4\delta C^{-1}.
$$

Ainsi, l'équation (2.12) admet une unique solution $\overline{\eta} \in X$. On définit alors l'application $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$ donnée par

$$
(2.13) \qquad \eta(t,u) = \overline{\eta}(t) \qquad \text{avec } \overline{\eta}(t=0) = u
$$

La condition (1) découle de la définition. (2) est vérifiée car la partie droite de (2.12) est identiquement nulle pour $u \notin K_{a,\varepsilon}$, grâce à (2.11).

Intéressons nous à (3). Pour tout t et u, on a

$$
(2.14) \qquad J(\eta(t,u)) - J(\eta(0,u)) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}J(\eta(s,u))}{ds} ds.
$$

En différentiant, on obtient en vertu de (2.12)

$$
(2.15) \qquad \begin{aligned} \frac{dJ(\eta)}{dt} &= \left\langle J'(\eta), \frac{d\eta}{dt} \right\rangle \\ &= -2\delta g(J(\eta))\left\langle J'(\eta), \frac{W(\eta)}{\| J'(\eta) \|_*^2} \right\rangle \\ &\leq -2\delta g(J(\eta))\frac{\| J'(\eta) \|_*^2}{\| J'(\eta) \|_*^2} = -2\delta g(J(\eta)). \end{aligned}
$$

Ce qui implique que pour $u \in K_{a,\delta}$, on a

$$
(2.16) \qquad J(\eta(1,u)) = J(\eta(0,u)) - \int_0^1 2\delta dt \leq a + \delta - 2\delta = a - \delta
$$

de manière analogue, pour tout $u \in A_{a-\delta}$, on a

$$
(2.17) \qquad J(\eta(1,u)) = J(\eta(0,u)) - 2\delta \int_0^1 g(J(\eta(t,u(t))))dt \leq J(\eta(0,u)) \leq a - \delta.
$$

En conclusion, on a

$$J(\eta(1,u)) \leq a-\delta, \qquad \text{pour tout } u \in A_{a+\delta}.$$

$\square$

Champ de pseudo–gradient tangent

Dans ce qui suit nous nous intéresserons au cas où M est une variété sur un espace de Banach X. Il s'agit de l'existence d'une fonctionnelle $g \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$ telle que

$$M = \{u \in X; \quad g(u) = 0\}$$

et $g'(u) \neq 0 \quad$ pour tout $u \in M$. L'espace tangent à M en u est donné par

$$T_uM = \{v \in X; \quad \langle g'(u), v\rangle = 0\}.$$

Un point critique de f sur M est un point $u \in M$ tel que $\langle f'(u), v\rangle = 0$ pour tout $v \in T_uM$. D'où u satisfait

$$f'(u) = \lambda g'(u)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient X un espace de Banach, $G \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$ et M définie par

$$M = \{u \in X; G(u) = 0\}, \tag{2.18}$$

On définit la fonctionnelle $J : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on suppose de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons en plus des hypothèses ci-dessus que

$$\forall u \in M, \quad G'(u) \neq 0. \tag{2.19}$$

Pour tout $u \in M$ on pose

$$\| J'(u) \|_* = \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|=1}} \{\langle J'(u), v\rangle \quad \text{et} \quad \langle G'(u), v\rangle = 0\}. \tag{2.20}$$

Alors on a la définition suivante :

Définition 2.1.6. *Pour tout $u \in M$, on dit que $v \in X$ est un* ***pseudo–gradient tangent*** *de J en u, si on a*

$$\begin{cases} \| v \| \leq 2 \| J'(u) \|_*, \\ \langle J'(u), v \rangle \geq \| J'(u) \|_*^2, \qquad \langle G'(u), v \rangle = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Définition 2.1.7. *Désignons par*

$$M_r = \{u \in M; \forall \lambda \in \mathbb{R}, J'(u) - \lambda G'(u) \neq 0\}$$

l'ensemble des points réguliers (non critiques) de J sur M, une application $W : M_r \longrightarrow X$ est appelée ***champ de pseudo–gradient tangent*** *de J si W est localement lipschitzienne sur M_r et si pour tout $u \in M_r$, $W(u)$ est un pseudo–gradient tangent de J en u.*

Théorème 2.1.3 (Théorème d'existence)**.** *Soient X un espace de Banach, $J \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$, $G \in \mathscr{C}^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$, M définie par (2.18). On suppose que G vérifie (2.19). Alors, il existe W un champ de p–g tangent de J sur M_r, tel que W soit défini et localement lipschitzien sur un voisinage ouvert $\tilde{M}_r$ de M_r. De plus, si G et J sont paires, on peut choisir $\tilde{M}_r$ symétrique par rapport à l'origine et W impair.*

Démonstration. Soit $u_0 \in M_r$. De la définition de $\| J'(u_0) \|_*$, il existe $y_0 \in X$ tel que

$$\| y_0 \| = 1, \quad \langle G'(u_0), y_0 \rangle = 0, \qquad \text{et} \qquad \langle J'(u_0), y_0 \rangle \geq \frac{2}{3} \| J'(u_0) \|_* .$$

En posant $v_0 = \frac{5}{3} \| J'(u_0) \|_* \, y_0$, on obtient

$$\begin{cases} \| v_0 \| = \frac{5}{3} \| J'(u_0) \|_*, \\ \langle J'(u_0), v_0 \rangle \geq \frac{10}{9} \| J'(u_0) \|_*^2, \qquad \langle G'(u_0), v_0 \rangle = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, soit $z_0 \in X$ tel que $\| z_0 \| = 1$ et

$$\langle G'(u_0), z_0 \rangle \geq \frac{2}{3} \| G'(u_0) \| .$$

L'existence d'un tel z_0 est garanti par l'hypothèse $u_0 \in M$, i.e. $G'(u_0) \neq 0$. Considérons alors

$$x_0 = \frac{z_0}{\langle G'(u_0), z_0 \rangle},$$

ainsi on a $\langle G'(u_0), x_0 \rangle = 1$ et $\| x_0 \| \| G'(u_0) \| \leq \frac{3}{2}$. Ainsi, il existe $R_1 = R_1(u_0) > 0$ tel que pour tout $u \in B(u_0, R_1)$ on ait

$$\langle G'(u_0), x_0 \rangle \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \| x_0 \| \| G'(u_0) \| \leq 2.$$

Alors en posant pour $u \in B(u_0, R)$ avec $R = R(u_0) < R_1$

$$v = v(u, u_0) = v_0 - \frac{\langle G'(u_0), v_0 \rangle}{\langle G'(u_0), x_0 \rangle} x_0.$$

$v(u, u_0)$ est un p–g tangent de J en tout $u \in B(u_0, R) \cap M_r$ et $u \mapsto v(u, u_0)$ est localement lipschitzienne sur $B(u_0, R(u_0))$. En considérant $\tilde{M}_r = \bigcup_{u_0 \in M_r} B(u_0, R(u_0))$. Il s'agit là d'un recouvrement de M_r par des ouverts. Pareillement à la démonstration du Théorème 2.1.1, il est possible de trouver un recouvrement localement fini $(\omega_j)_{j \in I}$ (I fini), plus fin que $(B(u_0, R(u_0))_{u_0 \in M_r}$, et une partition de l'unité localement lipschitzienne $(\theta_j)_{j \in I}$ subordonnée à $(\omega_j)_{j \in I}$, avec pour chaque $j \in I$ il existe $u_{0j} \in M_r$ tel que $\omega_j \subset B(u_{0j}, R(u_{0j}))$. En posant

$$V(u) = \sum_{j \in I} \theta_j(u) v(u, u_{0j}), \tag{2.22}$$

On obtient alors un champ de p–g tangent de J sur M_r, bien défini comme somme fini dans un voisinage de tout point u, et localement lipschitzien essentiellement grâce au fait que $(\theta_j)_{j \in I}$ est lipschitzienne.

Supposons que G et J soient paires, et remplaçons $R(u_0)$ par $min(R(u_0), R(-u_0))$. (2.18) nous permet de définir M_r, tout comme $\tilde{M}_r$, symétrique par rapport à l'origine. V étant défini par (2.22), on pose $\tilde{V}(u) = -V(-u)$. Ainsi défini, $\tilde{V}$ est aussi un champ de p–g tangent défini sur $\tilde{M}_r$. Considérons $\overline{V}(u) = \frac{(V(u) + \tilde{V}(u)))}{2}$, on obtient alors un champ de p–g tangent et impair. □

Pour les besoins de la démonstration du lemme de déformation dans le cas d'une variété, introduisons la notation suivante

$$[J \leq a] = \{u \in M; \quad J(u) \leq a\}, \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Théorème 2.1.4 (lemme de déformation)**.** *Soient X un espace de Banach, $G \in \mathscr{C}^{1,1}_{loc}(X,\mathbb{R})$, M défini par (2.18) et vérifiant (2.19). On suppose que $F \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$ et $J = F_{|S}$ vérifie la condition de Palais–Smale sur M et que $c \in \mathbb{R}$ n'est pas une valeur critique de J sur M. Alors on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe une application $\eta \in \mathscr{C}(\mathbb{R} \times M, M)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $u \in M$, on a $\eta(0,u) = u$.*
2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, on a $\eta(t,u) = u$.*
3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t,.)$ est un homéomorphisme de M dans M.*
4. *Pour tout $u \in M$, la fonction $t \mapsto J(\eta(t,u))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.*
5. *Si $u \in [J \leq c + \varepsilon]$, alors $\eta(1,u) \in [J \leq c - \varepsilon]$.*
6. *Si J et G sont paires, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t,.)$ est un homéomorphisme impair.*

Démonstration. Considérons $\tilde{M}_r$ un voisinage ouvert de M_r. V un champ de p–g tangent de J tels que V est localement lipschitzien sur $\tilde{M}_r$. Lorsque J et G sont paires, on choisira V impair. Comme c est une valeur régulière de J sur M et J satisfait la condition de Palais–Smale, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\forall u \in [c - \varepsilon_1 \leq J \leq c + \varepsilon_1], \qquad \| J'(u) \|_* \geq \delta.$$

On prendra, de plus, $\delta \leq 1$ et on pose $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \frac{\delta^2}{8})$. Pour $v \in M_r$, soit $\Omega(v) = B(v, \frac{1}{2} d(v, (\tilde{M})^c))$ et $\Omega = \bigcup_{v \in M_r} \Omega(v)$. Considérons, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$A = [J \leq c - \varepsilon_0] \cup [J \geq c + \varepsilon_0] \cup \Omega^c. \qquad B = [c - \varepsilon \leq J \leq c + \varepsilon],$$

On prendra $\alpha(x) = \dfrac{d(x,A)}{(d(x,A)+d(x,B))}$, de sorte que $\alpha(x) = 1$ pour tout $x \in B$ et $\alpha(x) = 0$ pour tout $x \in A$. α est localement lipschitzienne sur X. Notons que lorsque G et J sont paires, A et B sont symétriques par rapport à l'origine, et α est donc une fonction paire.
Soit alors $W(x) = \alpha(x)\min(1, \dfrac{1}{\| V(x) \|})V(x)$ pour $x \in X$. On a $\| W(x) \| \leq 1$ pour tout $x \in X$. De plus, et du fait que $\| V(x) \|$ soit localement lipschitzien nous assure que $\| W(x) \|$ l'est également. Ainsi, pour tout $x \in X$ donné, il existe une unique solution $\eta(.,x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},X)$ de l'équation différentielle

$$(2.23) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta(t,x)}{dt} &= -W(\eta(t,x)) \\ \eta(0,x) &= x \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\eta(t,\eta(s,x)) = \eta(t+s,x)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\eta(t,.)$ est un homéomorphisme de X dans X.
Vérifions que η satisfait les conditions (1)–(6). L'équation (2.23) assure la véracité de la condition (1). Si

$$u \notin [c-\varepsilon_0 \leq J \leq c+\varepsilon_0],$$

alors $W(u) = 0$, et l'unicité de la solution de (2.23) implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\eta(t,u) = u$ d'où la condition (2). Pour la propriété (3). Considérons le cas où $u \in [c-\varepsilon_0 \leq J \leq c+\varepsilon_0]$, seul cas sensible. Comme $t \mapsto \eta(t,u)$ est continue et que $u \in \tilde{M}_r$, pour t assez petit $\eta(t,u)$ reste dans l'ouvert $\tilde{M}_r$ et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(\eta(t,u)) &= \langle G'(\eta(t,u)), \frac{d}{dt}\eta(t,u)\rangle \\ &= -\alpha(\eta)\min(1, \frac{1}{\| V(u) \|})\langle G'(\eta), V(\eta)\rangle. \end{aligned}$$

Comme par définition du champ de p–g tangent on a

$$\langle G'(\eta), V(\eta)\rangle = 0,$$

on conclut que $G(\eta(t,u))$ est constant pour t assez petit, et par conséquent $\eta(t,u)$ demeure sur M pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour vérifier (4), considérons la dérivée de

$t \mapsto J(\eta(t,u))$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\eta) &= \langle J'(\eta), \frac{d\eta}{dt}\rangle \\ &= -\alpha(\eta)\min(1, \frac{1}{\| V(\eta) \|})\langle J'(\eta), V(\eta)\rangle \\ &\leq -\alpha(\eta)\min(1, \frac{1}{\| V(\eta) \|}) \| J'(\eta) \|^2 . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ce qui montre que $J(\eta(t,u))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Vérifions (5), considérons $u \in [J \leq c+\varepsilon]$ et supposons que pour tout $t \in [0,1[$, $\eta(t,u)$ soit dans $[c-\varepsilon < J \leq c+\varepsilon$. Alors d'après l'inégalité (2.24) et le fait que

$\| J'(x) \| \leq \| V(x) \| \leq 2 \| J'(x) \|$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J'(\eta(t,u)) &\leq \frac{-1}{4} \quad \min \quad (1, \frac{1}{\| V(\eta(t,u)) \|}) \| V(\eta(t,u)) \|^2 \\ &\leq \quad \begin{cases} \dfrac{-1}{4} & \text{si } \| V(\eta(t,u)) \| \geq 1, \\ \dfrac{-\delta^2}{4} & \text{si } \| V(\eta(t,u)) \| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\delta \leq 1$, on en conclut que

$$J(\eta(1,u)) \leq \frac{-\delta^2}{4} + J(u) \leq \frac{-\delta^2}{4} + c + \varepsilon,$$

i.e. d'après la définition de ε_0, $J(\eta(1,u)) \leq c-\varepsilon$. Pour vérifier (6), il suffit de voir que W est impair lorsque J est paire. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t,.)$ est impair. □

2.1.4 Notion du Genre

La notion de *genre* découle de la notion de *catégorie* introduite par Ljustenik et Schnirelmann. Il s'agit d'un invariant topologique utilisé dans l'estimation de la borne inférieure du nombre de points critiques. La notion de genre permet de faire la distinction entre deux ensembles fermés, symétriques et ne contenant pas l'origine, ceci à l'aide d'une fonction continue et impaire définies entre les deux ensembles.

Nous désignons par $S(X)$ l'ensemble des parties non vides, fermées, symétriques de X ne contenant pas l'origine, i.e.

$$S(X) = \{A \subset X, A \neq \emptyset, 0 \notin A, A \,\text{symétrique et fermé}\} \tag{2.25}$$

Définition 2.1.8. *Pour $A \in S(X)$, nous appelons "genre" de A le nombre, noté $\gamma(A)$, défini par :*

$$\gamma(A) = \inf\{n \geq 1; \exists \Phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \Phi \textit{ continue et impaire}\} \tag{2.26}$$

avec $\gamma(\emptyset) = 0$.
Si pour $A \in S(X)$, $A \neq \emptyset$, un tel entier n'existe pas alors nous posons $\gamma(A) = +\infty$.

Notons

$$K_n(\alpha) = \{A \in S(X) : A \subset M_\alpha, A \,\text{compact et}\, \gamma(A) \geq n\} \tag{2.27}$$

Proposition 2.1.1 (Propriétés du genre)**.** *Soit X un espace de Banach et A, $B \in S(X)$.*

(a) S'il existe $f : A \longrightarrow B$ continue et impaire, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(b) Si $A \subset B$ alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(c) S'il existe un homéomorphisme impair $f : A \longrightarrow B$ alors $\gamma(A) = \gamma(B)$.

(d) γ est sous-additif : $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.

(e) Si A est compact alors $\gamma(A) < \infty$.

(f) Si A est compact alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que si

$$A_\varepsilon = \{x \in X; d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

alors on a $\gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A)$.

(g) Si $\gamma(B) < \infty$, alors $\gamma(\overline{A \setminus B}) = \gamma(\overline{A \cap B^c}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

Démonstration. (a) Si on a $\gamma(B) = +\infty$, le résultat est direct. Supposons donc que $\gamma(B) < \infty$. Posons $n = \gamma(B)$, par définition du genre il existe une fonction $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, continue et impaire. L'application composée

$$\varphi \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

est continue et impaire. Par conséquent $\gamma(A) \leq n = \gamma(B)$.

(b) et (c) découlent de (a).

(d) Si le genre de A, ou celui de B, est égal à ∞, le résultat est direct. Supposons que A et B sont de genres finis et posons $m = \gamma(A)$, $n = \gamma(B)$. Par définition, il existe φ, ψ continues et impaires,

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \qquad \psi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

En vertu du théorème de Tietze-Urysohn, on peut prolonger φ et ψ en des fonctions continues et impaires définies sur X, que nous notons : $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$. Posons $f(x) = (\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x))$, alors pour $x \in A \cup B$, f définit une fonction de $A \cup B$ dans $\mathbb{R}^{n+m} \setminus \{0\}$. En effet, soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou bien $x \in B$, supposons que $x \in B$ alors $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) \neq 0$, donc pour tout $x \in A \cup B$, $f(x) \neq (0,0)$. De plus $A \cup B$ est fermé et non vide, d'où $\gamma(A \cup B) \leq n + m$.

(e) Soit $x_0 \in A$. Comme $0 \notin A$, on a $x_0 \notin 0$. Posons $R <\| x_0 \|$, on voit bien que

$\overline{B}(x_0, R) \cap \overline{B}(-x_0, R) = \phi$. Posons $\omega = B(x_0, R) \cup B(-x_0, R)$ et $A(x) = \overline{\omega}$ alors en considérant

$$\varphi = \begin{cases} +1 \text{ si } x \in \overline{B}(x_0, R) \\ -1 \text{ si } x \in \overline{B}(-x_0, R) \end{cases}$$

on obtient $\gamma(A(x)) = 1$. Par ailleurs, la famille $(\omega(x))_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert de A, qui de plus est compact. Il existe alors $n \geq 1$ et un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \omega(x_i).$$

En particulier

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} A(x_i).$$

En vertu de la propriété de sous–additivité (propriété (d)) et du fait que $\gamma(A(x_i)) = 1$, alors $\gamma(A) \leq n$. D'où A est de genre fini.

(f) A étant compact, il est donc de genre fini. Soient $\gamma(A) = n$ et $\phi : A \longrightarrow \mathbb{R} \diagdown 0$ une fonction continue et impaire. En vertu du théorème de Tietze–Urysohn il existe un prolongement $\tilde{\phi}$ continu et impaire de X dans $\mathbb{R}^n$.

Soit A_ε comme défini dans l'énoncé de la proposition. Comme A est compact et $0 \notin \phi(A)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$0 \notin \phi(A_\varepsilon).$$

En effet, sinon il existerait une suite $(x_k)_k$ de X, et une suite $(y_k)_k$ de A telles que

$$\tilde{\phi}(x_k) = 0, \qquad \mathrm{d}(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}.$$

Puisque A est compact, on suppose que la suite $y_k \longrightarrow y \in A$ et par conséquent $x_k \longrightarrow y$. On aurait alors $0 = \tilde{\phi}(x_k) \longrightarrow \tilde{\phi}(y)$, i.e. $\tilde{\phi}(y) = 0$. Or, $y \in A$ et $\tilde{\phi}(y) = \phi(y)$ et ϕ ne s'annule pas sur A.

Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\tilde{\phi}$ envoie A_ε dans $\mathbb{R}^n \diagdown 0$. Comme $\tilde{\phi}$ est continue et impaire on a $\gamma(A_\varepsilon) \leq n$, et en vertu de la propriète (b) on a

$$n = \gamma(A) \leq \gamma(A_\varepsilon) \leq n.$$

(g) On a $A \subset B \cup \overline{(A \diagdown B)}$. En utilisant (b) on obtient

$$\gamma(A) \leq \gamma(B) + \gamma(\overline{A \diagdown B}),$$

et puisque $\gamma(B)$ est fini, on a $\gamma(\overline{A \diagdown B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$. □

2.1.5 Principe du Min–Max

Théorème 2.1.5 (Principe du Min–Max)**.** *Soient X un espace de Banach, $G \in \mathscr{C}^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$ et M définis par (2.18) et (2.19). Soient $F \in \mathscr{C}^1(X, \mathbb{R})$ telle que $J = F_{|M}$ n'est pas constante et* *vérifie la condition de Palais–Smale sur M et $\mathscr{B}$ une famille non vide de M. On suppose que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, si $A \in \mathscr{B}$, on a $\eta(1,A) \in \mathscr{B}$. On pose*

$$c_* = \inf_{A\in\mathscr{B}} \sup_{v\in A} J(v).$$

si $c_* \in \mathbb{R}$, alors c_* est une valeur critique de J sur M.

Démonstration. Supposons que c_* n'est pas une valeur critique, en prenant ε assez petit on peut choisir $A \in \mathscr{B}$ tel que $c_* \leq \sup_{v\in A} J(v) \leq c_* + \varepsilon$. Mais par hypothèse, en posant $B = \eta(1,A)$ on a d'une part $B \in \mathscr{B}$ et d'autre part $B \subset [J \leq c_* - \varepsilon]$, ce qui contredit la définition de c_*. □

Afin de montrer l'existence de solutions propres du problème(1.1), nous utilisons essentiellement le théorème suivant, résumant la théorie de Ljusternick–Schnirelmann.

Théorème 2.1.6 (Théorème de Ljusternick–Schnirelmann)**.** *[20] Soient X un espace de Banach, $F \in \mathscr{C}^{1,1}_{loc}(X,\mathbb{R})$ et S défini par*

$$S = \{v \in X, F(v) = \alpha\},\ \alpha \neq 0$$

et vérifiant

$$\forall v \in S, F'(v) \neq 0$$

Soit $G \in \mathscr{C}^1(X,\mathbb{R})$ et $J = G|_S$. On suppose que F et J sont paires, que J n'est pas constante, satisfait la condition de Palais-Smale sur S et que $0 \notin S$.

Pour tout entier $k \geq 1$ on pose :

$$c_k = \inf_{A\in\mathscr{B}_k} \sup_{u\in A} J(v)$$

où

$$\mathscr{B}_k = \{A \in S(X); A \subset S,\ \gamma(A) \geq k\}$$

(i) Pour tout $k \geq 1$ tel que $\mathscr{B}_k \neq \emptyset$ et $c_k \in \mathbb{R}$, c_k est une valeur critique de J sur S. De plus $c_k \leq c_{k+1}$, et si pour un entier $j \geq 1$ on a $\mathscr{B}_{k+j} \neq \emptyset$ et $c_k = c_{k+j} \in \mathbb{R}$, alors $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$,

où :

$$K(c_k) = \{u \in S; J(u) = c_k, \exists\lambda \in \mathbb{R}, tel\, que\, G'(u) = \lambda F'(u)\}.$$

(ii) Si pour tout $k \geq 1$ on a $\mathscr{B}_k \neq \emptyset$ et $c_k \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} c_k = +\infty.$$

Démonstration. La suite $\mathscr{B}_k$ étant décroissante, il apparaît que $c_k \leq c_{k+1}$, pour tout $\mathscr{B}_k \neq \phi$. Supposons que $\mathscr{B}_k \neq \phi$, soit alors $c_k \in \mathbb{R}$. En vertu du Théorème 2.1.4 si $A \in \mathscr{B}_k$ alors $\eta(1,A) \in \mathscr{B}_k$. Par conséquent, d'après le principe de min-max (2.1.5), c_k est une valeur critique de J sur S. Supposons que $\mathscr{B}_{k+j} \neq \phi$ et que $c_k = c_{k+j} \in \mathbb{R}$. Comme J vérifie la condition de Palais-Smale sur S, on sait que $K(c_k)$ est compact, donc de genre fini.

Raisonnons par l'absurde et montrons que $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$. Si $\gamma(K(c_k)) \leq j$, alors en vertu de la propriété (d) du Théorème 2.1.1, il existe $\tau > 0$ tel que, si $\omega = \{v \in S, \mathrm{d}(v,K) < \tau\}$ et $\tilde{K} = \overline{\omega}$, on a alors $\gamma(\overline{K}) = \gamma(K(c_k))$. De nouveau, en vertu de la condition de Palais-Smale, on montre qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\delta > 0$ tels que,

$$\forall v \in [J \leq c_k + \varepsilon_1] \diagdown ([K < c_k - \varepsilon_1] \cup \omega), \qquad \| J'(v) \|_* \geq \delta.$$

Soit $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \dfrac{\delta^2}{8})$. D'aprés le Théorème 2.1.3, il existe un champ de pseudo-gradient tangent V impair et un voisinage ouvert $\tilde{S}_r$ symétrique par rapport à l'origine sur lequel V est défini et localement lipschitzien.

Soit $R(v) = \dfrac{1}{2}\min(\| v \|, \mathrm{d}(v, (\tilde{S}_r)^c))$ pour $v \in S_r$, et

$$\Omega = \bigcup_{v \in S_r} B(v, R(v)).$$

Si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on choisit maintenant une fonction localement lipschitzienne $\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$\alpha(v) = \begin{cases} 0 \text{ si } v \in [j \leq c_k - \varepsilon_0] \cup [J \geq c_k + \varepsilon_0] \cup \tilde{K} \cup \Omega^c. \\ 1 \text{ si } v \in [c_k - \varepsilon \leq J \leq c_k + \varepsilon] \diagdown \omega. \end{cases}$$

On construit alors le flot $\eta(t,x)$ comme solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\eta(t,x) = -\alpha(\eta)min(1,\frac{1}{\| V(\eta) \|})V(\eta), \qquad \eta(0,x) = x \in S$$

d'aprés le Théorème 2.1.4 le flot $\eta(t,.)$ est un homéomorphisme impair de S dans S et $\eta(1,[J \leq c_k + \varepsilon] \diagdown \omega) \subset [J \leq c_k - \varepsilon]$. Supposons que $A \in \mathscr{B}_{k+j}$ est tel que

$$c_k \leq \sup_{v \in A} J(v) \leq c_k + \varepsilon,$$

d'aprés la propriété (g) de la Proposition 2.1.1, on a

$$\gamma\overline{(A \diagdown \tilde{K})} \geq \gamma(A) - \gamma(\tilde{K}) \geq k + j - j.$$

en posant $B = \eta\left(1,\overline{A \diagdown \tilde{K}}\right)$, puisque $\eta(1,.)$ est un homéomorphisme de S dans lui même. D'aprés l'inégalité précédente on a $B \in \mathscr{B}_k$. Ce qui donne l'inégalité

$$c_k \leq \sup_{v \in B} J(v) \leq c_k - \varepsilon$$

qui est impossible.

Par conséquent on a $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$. D'où le premier point du théorème.

Concernant le second point, remarquons qu'il est impossible que la suite soit stationnaire, i.e. pour $k \geq 1$ on a $c_k = c_{k+j}$ pour tout $j \geq 1$. En effet, on sait que J vérifie la condition de Palais-Smale et par conséquent $K(c_k)$ est compact. Donc de genre fini. Dans le cas contraire, i.e. si $c_k = c_{k+j}$, on a $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$ ce qui est impossible (sauf peut-être pour un nombre fini de j). Ainsi donc, si c_k ne tend pas vers l'infini, alors nécessairement, elle converge vers $c \in \mathbb{R}$ avec $c > c_k$ por tout $k \geq 1$. Dans ce cas on a

$$K = \{u \in S; c_1 \leq J(u) \leq c, \quad \exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ telle que } G'(u) = \lambda u\},$$

est compact. Donc de genre fini, soit $\gamma(K) = n$. En réitérant ce raisonnement on exhibe un petit

$\tau > 0$ tel que si

$$\omega = \{v \in S; \mathrm{d}(v, K) < \tau\},$$

et

$$\tilde{K} = \overline{\omega}$$

alors $\gamma(\tilde{K}) = \gamma(K) = n$. En considérant ε_1 et $\delta > 0$ comme ci dessus et en posant

$$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \frac{\delta^2}{8}, \frac{c}{2}, \frac{(c - c_1)}{2})$$

on construit alors, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, le flot η de sorte que $\eta(1, [J \leq c + \varepsilon] \diagdown \omega) \subset [J \leq c - \varepsilon]$. Si on considère un entier $k \geq 1$ tel que $c_k > c - \varepsilon$. Considérons alors $A_0 \in \mathscr{B}_{k+n}$ tel que $\sup\limits_{v \in A_0} J(v) \leq c + \varepsilon$. Et si on pose $A = A_0 \diagdown \omega$ on a $A \in \mathscr{B}_k$ et $M = \eta(1, A) \in \mathscr{B}_k$. On obtient donc, $c_k \leq \sup\limits_{v \in M} J(v)$ et $M \subset [J \leq c - \varepsilon]$, ce qui contredit l'hypothèse $c_k < c - \varepsilon$. $\square$

2.2 Hypothèses

Nous introduisons les fonctions suivantes, définies dans $\mathbb{R}^n$

$$\rho(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.28}$$

et pour $\alpha > 0$ donné, nous notons :

$$\rho_\alpha(x) = \rho^\alpha(x)\left(1 + \log\sqrt{1 + |x|^2}\right)^{-1} \tag{2.29}$$

Nous posons :

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \rho^{2\alpha}(x) \; si \; n > 2 \\ \rho_\alpha^2(x) \; si \; n = 2 \end{cases} \tag{2.30}$$

$L^2_{p_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace L^2 muni du poids p_α, i.e.

$$L^2_{p_\alpha}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) : p_\alpha^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\} \tag{2.31}$$

Nous définissons l'espace de Sobolev à poids suivant :

$$\mathbb{V} = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) : p_1^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^n), |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \tag{2.32}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{\mathbb{V}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + p_1 u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.33}$$

Pour $n \geq 2$, $\mathbb{V}$ est un espace de Hilbert séparable [9]. Pour $n \geq 3$, $\mathbb{V}$ s'injecte de façon continue dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, où 2^* désigne le conjugué de Sobolev de 2, i.e. $2^* = \frac{2n}{n-2}$ [18].

Notons $\mathbb{V}^*$ le dual topologique de $\mathbb{V}$. Soit A un opérateur défini de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}^*$, pour $u \in \mathbb{V}$ nous définissons $\| \, . \, \|_*$ par :

$$\| Au \|_* = \sup_{\substack{v \in \mathbb{V} \\ \|v\|_{\mathbb{V}} = 1}} |(Au, v)| \tag{2.34}$$

Nous définissons des parties de $\mathbb{V}$ comme suit :

$$\mathbb{V}_{\pm} = \left\{ u \in \mathbb{V} : \int_{\mathbb{R}^n} g u^2 dx \gtrless 0 \right\} \tag{2.35}$$

Nous supposons que :

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists \eta \geq \frac{n}{2} : c_1 p_\eta(x) \leq q(x) \leq c_2 p_\eta(x) \quad p.p. \; dans \; \mathbb{R}^n \tag{2.36}$$

En particulier, $q \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

$$\exists c > 0, \exists \theta > \eta : |g(x)| \leq c p_\theta(x) \quad p.p. \; dans \; \mathbb{R}^n \tag{2.37}$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; \text{ est une fonction impaire, i.e. } f(x, -u) = -f(x, u) \tag{2.38}$$

$$f \; est \; une \; fonction \; de \; \text{Carathéodory} \tag{2.39}$$

$$|f(x, u)| \leq \sigma(x) + \rho(x)|u|^\gamma \quad pour \; tout \; x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \tag{2.40}$$

$$1 < \gamma < 1 + \frac{4}{n-2} \tag{2.41}$$

$$0 \leq \rho(x) \in L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^n), \gamma_1 = \frac{2^*}{2^* - (\gamma+1)} \tag{2.42}$$

$$\begin{gathered} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho^{\frac{2}{\beta}}(x) u^2 dx \leq |\alpha| \quad pour\, tout\; u \in M_\alpha \\ \text{avec } \beta = \frac{2(2^* - (\gamma+1))}{2^* - 2} \end{gathered} \tag{2.43}$$

$$0 \leq \sigma(x) \in L^{\frac{n}{2}}_{p_1^{\frac{n}{2}}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{(2^*)'}(\mathbb{R}^n) \tag{2.44}$$

$$f(x,y)y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{2.45}$$

2.3 Résultats d'existence

Une formulation variationnelle du problème (1.1) est donnée par :

$$\begin{cases} Trouver\, u \in \mathbb{V}, u \not\equiv 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u \nabla v + quv) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u) v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} guv dx, \forall v \in \mathbb{V} \end{cases} \tag{2.46}$$

Le problème (2.46) est équivalent à trouver des solutions non triviales u de l'équation :

$$\phi'(u)v = \lambda \psi'(u)v \quad pour \quad tout \quad v \in \mathbb{V}. \tag{2.47}$$

où ϕ', ψ' désignent les dérivées au sens de Gâteaux des fonctionnelles :

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + qu^2) dx - \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^u f(x,s) ds$$

et

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} gu^2 dx$$

D'après la théorie de Ljusternick-Schnirelmann, la résolution de l'équation (2.47) revient exactement à la recherche des points critiques de la fonctionnelle ϕ sur la variété :

$$M_\alpha = \left\{ u \in \mathbb{V} : \psi(u) = \frac{\alpha}{2} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{V} : \int_{\mathbb{R}^n} gu^2 dx = \alpha \right\}, \alpha \neq 0. \tag{2.48}$$

Remarque 2.3.1. *Dans ce qui suit, nous ne considérons que les variétés M_α avec $\alpha > 0$. Le cas $\alpha < 0$ se traite de la même façon.*

Proposition 2.3.1. *(i) $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{V},\mathbb{R})$, $\psi \in \mathscr{C}^{1,1}_{loc}(\mathbb{V},\mathbb{R})$, ϕ et ψ sont paires.*

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}, K_n(\alpha) \neq \emptyset$.

En particulier, si X_n est un sous espace de dimension n de $\mathbb{V}$ alors, $\gamma(M_\alpha \cap X_n) = n$.

***Démonstration**.* (i) Compte tenu des hypothèses (2.36),(2.37), (2.39)-(2.44), les fonctionnelles ϕ et ψ sont continues sur $\mathbb{V}$ et comme ϕ' et ψ' sont aussi continues alors ϕ et $\psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{V},\mathbb{R})$.

De plus, ψ' est lipschitzienne. En effet, pour tout u, v, $w \in \mathbb{V}$ nous avons

$$\begin{aligned} \left|\psi'(u-v)w\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} g(u-v)wdx\right| &\leq c\int_{\mathbb{R}^n} p_\theta |u-v \parallel w| dx \\ &\leq c' \parallel u-v \parallel_{\mathbb{V}} \parallel w \parallel_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

d'où

$$\left\|\psi' u - \psi' v\right\|_* \leq c' \parallel u-v \parallel_{\mathbb{V}}$$

(ii) Soit X_n un sous espace de $\mathbb{V}$ tel que $\dim X_n = n$. Remarquons que $X_n \cap M_\alpha$ est un ensemble symétrique, fermé, compact et ne contenant pas l'origine. Donc $\gamma(X_n \cap M_\alpha)$ est bien défini.

Soit S la sphère unité dans $\mathbb{V}_+$, i.e.

$$S = \{u \in \mathbb{V}_+ : \parallel u \parallel_{\mathbb{V}} = 1\}$$

Notons par P la projection radiale dans $\mathbb{V}$

$$\begin{aligned} P : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ u &\longrightarrow \frac{1}{\parallel u \parallel_{\mathbb{V}}} u, u \neq 0 \end{aligned}$$

L'opérateur P ainsi défini est une bijection entre M_α et S. En effet, P agit comme une multiplication par un scalaire. Nous avons alors

$$P(X_n \cap M_\alpha) = X_n \cap P(M_\alpha) = X_n \cap S$$

Ceci implique que P est un homéomorphisme entre $X_n \cap M_\alpha$ et $X_n \cap S$ et puisqu'il est impair, nous avons

$$\gamma(X_n \cap M_\alpha) = \gamma(X_n \cap S)$$

d'où $\gamma(X_n \cap M_\alpha) = n$ d'après les propriétés du genre (Lemme 2.1.1).

□

Nous définissons les opérateurs :

$$J, G, F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^*$$

$$Ju = -\Delta u + qu \tag{2.49}$$

$$Gu = gu \tag{2.50}$$

$$Fu = f(x,u) \tag{2.51}$$

Proposition 2.3.2. *Les opérateurs G et F définis par (2.50) et (2.51) respectivement sont compacts.*

Démonstration. Comme la fonction g satisfait l'hypothèse (2.37), l'opérateur de multiplication G défini par (2.50) est compact. En effet, soit (u_n) une suite faiblement convergente vers $u \in \mathbb{V}$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(u_n - u)v dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) \| u_n - u \| v| dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} p_{\theta - \frac{1}{2}}(x)|u_n - u| p_{\frac{1}{2}}(x)|v| dx$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(u_n - u)v dx \right| \leq c \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} + \int_{\mathbb{R}^n} \right) p_{2\theta - 1}(x)|u_n - u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \| v \|_{\mathbb{V}}$$

Donc

$$\| G(u_n-u) \|_* \leq c\left(\| u_n-u \|_{L^2(B_R)} + \frac{1}{(1+R^2)^{2(\theta-1)}} \| u_n-u \|_{\mathbb{V}} \right)$$

La restriction de la suite (u_n) étant faiblement convergente dans $H^1(B_R)$, converge fortement dans $L^2(B_R)$. D'autre part, (u_n) est bornée dans $\mathbb{V}$, alors pour R suffisamment grand $\| G(u_n-u) \|_*$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

Nous allons montrer maintenant que l'opérateur F est compact. Soit $(u_n)_n$ une suite faiblement convergente vers $u_0 \in \mathbb{V}$. Nous avons

$$(2.52) \quad \sup_{\substack{v\in\mathbb{V} \\ \|v\|_{\mathbb{V}}=1}} (Fu_n - Fu_0, v) \leq \sup_{\substack{v\in\mathbb{V} \\ \|v\|_{\mathbb{V}}=1}} \int_{B_R} |f(x,u_n) - f(x,u_0) \| v| dx + \\ + \sup_{\substack{v\in\mathbb{V} \\ \|v\|_{\mathbb{V}}=1}} \int_{B'_R} |f(x,u_n) - f(x,u_0) \| v| dx$$

La restriction de la suite u_n sur B_R étant faiblement convergente dans $H^1(B_R)$ converge fortement dans $L^2(B_R)$ vers u_0. En vertu de la continuité de l'opérateur de Nemytskii associé à la fonction f de $L^2(B_R)$ dans $L^2(B_R)$, la suite $f(.,u_n)$ converge fortement dans $L^2(B_R)$ vers $f(.,u_0)$ et par conséquent la première quantité à droite de l'inégalité (2.52) tend vers zéro quand n tend vers l'infini. D'autre part, nous avons

$$\sup_{\substack{v\in\mathbb{V} \\ \|v\|_{\mathbb{V}}=1}} \int_{B'_R} |f(x,u_n) - f(x,u_0) \| v| dx \leq \sup_{\substack{v\in\mathbb{V} \\ \|v\|_{\mathbb{V}}=1}} \int_{B'_R} (2\sigma + \rho(|u_n|^\gamma + |u_0|^\gamma))|v| dx$$

$$\begin{aligned} \int_{B'_R} \sigma |v| dx &\leq \left(\int_{B'_R} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{B'_R} \sigma^{(2^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \\ &\leq c \| v \|_{\mathbb{V}} \left(\int_{B'_R} \sigma^{(2^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathbb{V}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{B'_R} \rho |u|^{\gamma} |v| dx &\leq \left(\int_{B'_R} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{\gamma}{2^*}} \left(\int_{B'_R} (\rho |v|^{\frac{2^*}{2^*-\gamma}} dx \right)^{\frac{2^*-\gamma}{2^*}} \\
&\leq c' \parallel u \parallel_{\mathbb{V}}^{\gamma} \left(\int_{B'_R} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{B'_R} \rho^{\gamma_1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \\
&\leq c'' \parallel u \parallel_{\mathbb{V}}^{\gamma} \parallel v \parallel_{\mathbb{V}} \left(\int_{B'_R} \rho^{\gamma_1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{\substack{v \in \mathbb{V} \\ \|v\|_{\mathbb{V}}=1}} \int_{B'_R} |f(x,u_n) - f(x,u_0) \parallel v| dx \leq C \left(\left(\int_{B'_R} \sigma^{(2^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} + \left(\int_{B'_R} \rho^{\gamma_1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \right)$$

Compte tenu des hypothèses (2.42) et (2.44), la deuxième quantité à droite de l'inégalité (2.52) tend vers zéro quand R tend vers l'infini. □

Proposition 2.3.3. *La fonctionnelle ϕ est bornée inférieurement et satisfait la condition de Palais-Smale sur M_α.*

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ fixé, $u \in M_\alpha$. Compte tenu des hypothèses imposées sur les fonctions q et f, la quantité $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} qu^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^u f(x,s) ds$ est positive. Nous avons alors,

$$\phi(u) \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

En appliquant l'inégalité de Hardy pour $\alpha = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\phi(u) &\geq \frac{1}{4} \min(1,C) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2} |u(x)|^2 dx \right) \\
&\geq \frac{1}{4} \min(1,C) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-2} |u(x)|^2 dx \right) \\
&= \frac{1}{4} \min(1,C) \parallel u \parallel_{\mathbb{V}}^2
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha = \left| \int_{\mathbb{R}^n} gu^2 dx \right| \leq c' \parallel u \parallel_{\mathbb{V}}^2$, grâce à l'hypothèse (2.37), nous avons

$$\phi(u) \geq c'' \alpha$$

ce qui prouve que ϕ est borné inférieurement sur M_α.

En posant $B = J + F$ nous avons $\phi'(u)v = (Bu, v)$ et $\psi'(u)v = (Gu, v)$.

Notons par ϕ'_α la dérivée de ϕ suivant M_α

$$\begin{aligned}
\phi'_\alpha(u) &= \phi'(u) - \frac{1}{\alpha}\phi'(u)u\psi'(u) \\
&= Bu - \frac{1}{\alpha}(Bu, u)Gu
\end{aligned}$$

Soit $(u_n)_n \subset M_\alpha$ telle que

$$\phi(u_n) \quad est \quad \text{borné}$$

$$\phi'_\alpha(u_n) = \phi'(u_n) \quad - \quad \frac{1}{\alpha}(\phi'(u_n), u_n)\psi'(u_n) \longrightarrow 0 \quad dans\,\mathbb{V}^* \tag{2.53}$$

En vertu de la coercivité de ϕ, $(u_n)_n$ est bornée dans $\mathbb{V}$, par conséquent Gu_n converge.

La suite numérique

$$(Bu_n, u_n) = (Ju_n, u_n) + (Fu_n, u_n)$$

est bornée et par conséquent admet une sous-suite convergente. D'autre part, de (2.53) nous avons

$$\phi'_\alpha(u_n) = Bu_n - \frac{1}{\alpha}(Bu_n, u_n)Gu_n \longrightarrow 0$$

ce qui entraîne la convergence de Bu_n. D'autre part, Fu_n converge.

Comme $B = J + F$ alors Ju_n converge. Puisque (Ju, u) est coercive sur $\mathbb{V}$ alors (u_n) est convergente. □

Théorème 2.3.1. *Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, posons*

$$C_n(\alpha) = \inf_{K \in K_n(\alpha)} \sup_K 2\phi(u)$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n(\alpha) \in M_\alpha$ et $\lambda_n(\alpha) \in \mathbb{R}$ tels que

$$C_n(\alpha) = 2\phi(u_n(\alpha)) \quad et \quad \lambda_n(\alpha) = \frac{\phi'(u_n(\alpha))u_n(\alpha)}{\alpha}$$

et $(u_n(\alpha), \lambda_n(\alpha))$ est solution propre du problème (1.1).

Démonstration. Le résultat découle immédiatement de l'application du Théorème 2.1.6 et des Propositions 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3. □

Remarque 2.3.2. *Si $\alpha > 0$ alors $u_n(\alpha) \in \mathbb{V}_+$ et $\lambda_n(\alpha) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\alpha < 0$ alors $u_n(\alpha) \in \mathbb{V}_-$ et $\lambda_n(\alpha) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 2.3.4. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ nous avons*

$$\| u_n(\alpha) \|_{\mathbb{V}} \to +\infty \quad et \quad |\lambda_n(\alpha)| \to +\infty \quad quand \quad n \to +\infty.$$

Démonstration. Nous avons par définition

$$\begin{aligned}
2\phi(u) &= (Ju,u) + 2(Fu,u) \\
|(Fu,u)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x,u) \| u| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sigma |u| dx + \int_{\mathbb{R}^n} \rho |u|^{\gamma+1} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sigma^{(2^*)'} dx \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho^{\gamma_1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{2^*} dx \right)^{\frac{\gamma+1}{2^*}}
\end{aligned}$$

L'injection de $\mathbb{V}$ dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ étant continue, nous obtenons

$$|(Fu,u)| \leq C_1 \| u \|_{\mathbb{V}} + C_2 \| u \|_{\mathbb{V}}^{\gamma+1}$$

D'autre part, nous avons $(Ju,u) \leq C_3 \| u \|_{\mathbb{V}}^2$. Par conséquent :

$$2\phi(u) \leq C_1 \| u \|_{\mathbb{V}} + C_2 \| u \|_{\mathbb{V}}^{\gamma+1} + C_3 \| u \|_{\mathbb{V}}^2$$

Soit $u_n(\alpha)$ une fonction propre du problème (1.1) alors,

$$C_n(\alpha) = 2\phi(u_n(\alpha)) \leq C_1 \| u_n(\alpha) \|_{\mathbb{V}} + C_2 \| u_n(\alpha) \|_{\mathbb{V}}^{\gamma+1} + C_3 \| u_n(\alpha) \|_{\mathbb{V}}^2$$

Puisque $C_n(\alpha) \to +\infty$ [20] quand $n \to +\infty$ alors $\| u_n(\alpha) \|_{\mathbb{V}} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ nous avons

$$\alpha \lambda_n(\alpha) = (\phi'(u_n(\alpha)), u_n(\alpha)) \geq c \| u_n(\alpha) \|_{\mathbb{V}}^2 \to +\infty$$

d'où $|\lambda_n(\alpha)| \to +\infty$. □

Chapitre 3

Théorème du point fixe sur un cône

3.1 Introduction

Ici nous étudions l'existence de solutions positives non triviales du problème non linéaire que nous formulons sous la forme

$$(3.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + f(x,u), & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer le couple de solutions (λ, u) qui vérifie (3.1). Ici, λ est un paramètre réel, la fonction g est mesurable. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de Carathéodory.

Nous exposons dans ce qui suit une étude spectrale et l'existence d'une petite valeur propre principale positive du problème linéaire associé à (3.1), i.e. $f \equiv 0$. Puis nous démontrons l'existence d'une solution positive du système (3.1) à l'aide d'un théorème du point fixe, type *Krasnoselsk'ii*, sur un cône défini dans un espace de Banach. Dans toute la suite nous considérons $n \geq 3$.

Définition 3.1.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint, défini et borné inférieurement sur $\mathbb{V}$. Nous disons que A préserve la positivité si pour φ positive, $A\varphi$ est positif.*

3.2 Hypothèses

Nous supposons que

$$\exists c > 0, \exists \alpha > 1; |g(x)| \leq c p_\alpha(x) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

$$\exists K > 0 \text{ tel que } g(x) \geq K \tag{3.3}$$

$$|f(x,u)| \leq a(x)|u|^\beta + b(x) \tag{3.4}$$

$$0 < \beta < \frac{2^*}{2} \tag{3.5}$$

$$0 \leq p_1^{-\frac{1}{2}} a \in L^\gamma(\mathbb{R}^n), \gamma = \frac{2.2^*}{2^* - 2\beta} \tag{3.6}$$

$$0 \leq p_1^{-\frac{1}{2}} b \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{3.7}$$

$$\exists c > 0, \exists \mu > 0; \mu \geq \lambda_1^+ \text{ tel que} \tag{3.8}$$

$$f(x,u) \geq 2\mu p_\alpha(x) u - c p_\alpha(x) \text{ pour } u \geq 0 \tag{3.9}$$

Nous supposons aussi que

$$\lim_{\|u\|_V \to 0} \frac{f(x,u)}{p_1(x)|u|} = 0 \tag{3.10}$$

uniformément pour $x \in \mathbb{R}^n$.

3.3 Le cas Linéaire

Nous allons nous intéresser au cas où $f \equiv 0$. Nous établissons l'existence d'une valeur propre principale positive et un principe du maximum. Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x) u, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

3.3.1 Existence d'une valeur propre principale positive

Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on pose

$$\| u \|_g = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) u^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu des hypothèses (3.2) et (3.3), $\| u \|_g$ définie une norme sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ équivalente à la norme usuelle.

De ce fait, l'injection de $\mathbb{V}$ dans $(L^2(\mathbb{R}^n), \| \, . \, \|_g)$ demeure compacte.

Nous définissons G, l'opérateur de multiplication par g, dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$Gu = g(x) u, \qquad u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 3.3.1. *L'opérateur $\big(-\Delta\big)^{-1}$ est continue de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $H_0^1(\mathbb{R}^n)$*

Démonstration. Le résultat découle de l'injection $L^2(\mathbb{R}^n) \circlearrowleft (H^1)^*$. □

Proposition 3.3.2. *L'opérateur de multiplication G est compact.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Lemme 2.3.2. □

Proposition 3.3.3. *L'opérateur*

$$\big((-\Delta)^{-1} g(x)\big) = \big(-\Delta\big)^{-1} \circ G \tag{3.12}$$

est autoadjoint, compact et positif.

Démonstration. Considérons la formulation variationnelle du problème (3.11), et posons

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \, dx \qquad \text{et} \qquad b(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u v \, dx$$

Alors, en vertu de la symétrie des formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$, on conclut que l'opérateur défini par (3.12) est autoadjoint.

La compacité découle du fait que l'opérateur en question est la composée de deux applications, l'une continue, à savoir $\big(-\Delta\big)^{-1}$ et l'autre, G, compacte.

L'opérateur (3.12) est positif en vertu de l'inégalité de Hardy et de l'hypothèse (3.3). □

On peut appliquer les résultats de la théorie spectrale classique des opérateurs auto adjoints compacts sur les espaces de Hilbert. Ce qui nous assure que

1. Les valeurs propres sont réelles et de multiplicité finie.
2. Le spectre est constitué par (au plus) deux infinités dénombrables de valeurs propres, une positive et l'autre négative, tendant vers zéro.

Notons par λ_1 l'inverse de la première valeur propre, et par φ_1 la fonction propre associée qui vérifie

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1 g(x)\varphi_1, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

La formule de Courant–Fischer nous donne,

$$\lambda_1 = \inf\{\frac{\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\varphi)^2\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi^2\, dx}, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{3.13}$$

Proposition 3.3.4. *La valeur propre λ_1 est simple et il existe une fonction propre φ_1 qui est strictement positive et continue dans $\mathbb{R}^n$.*

Pour la démonstration de cette proposition, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.3.1 (Stampacchia, 1965). *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et L un opérateur elliptique, i.e. qui vérifie (1.2), supposons de plus que $g(x) \in L^{\frac{r}{2}}(\Omega)$ avec $r > n$. On pose*

$$\Omega(x,\rho) = \Omega \cap B_\rho(x),$$

où $B_\rho(x)$ est la boule de rayon ρ et centrée en x, de façon que $\Omega(x,\rho) \equiv B_\rho$ pour toute boule $B_\rho \subset \Omega$, posons également pour $x_0 \in \overline{\Omega}$

$$m(r) = \inf_{\Omega(x_0,r)} u(x), \qquad M(r) = \sup_{\Omega(x_0,r)} u(x)$$

et

$$\omega(r) = M(r) - m(r).$$

Soit $u(x)$ une solution de $Lu = 0$. Alors $u(x)$ vérifie une condition de Hölder dans chaque compact de Ω, i.e. il existe deux constantes K et α, avec $0 < \alpha < 1$, telles que si $x \in \Omega$ et $0 < \rho < R < d(x, \partial\Omega)$, on ait

$$\omega(\rho) \leq K\Big(\frac{\int_{\Omega(x,R)} u^2 dx}{R^n}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{\alpha}. \tag{3.14}$$

Lemme 3.3.2 (Inégalité de Harnack)**.** *Soit L un opérateur satisfaisant (1.2), supposons qu'il existe $K > 0$ et $\nu > 1$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant $u(x) \geq 0$ et $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors, pour toute boule $B_{4R}(y) \subset \mathbb{R}^n$, on a*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u \tag{3.15}$$

où $C = C(n, \frac{K}{\alpha_0}, \nu R)$, avec α_0 tel que introduit dans la condition d'ellipticité (1.2)

Démonstration. Commençons par conclure, en vertu du Lemme 3.3.1 appliqué à l'opérateur (3.12), que toute solution $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ du problème (3.11) dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est une fonction continue dans $\mathbb{R}^n$.

Montrons que λ_1 est simple et qu'elle possède une fonction propre associée qui est strictement positive.

Remarquons d'abord que λ_1 est de multiplicité finie. Supposons qu'elle n'est pas simple, alors il existe une fonction propre, que l'on notera ψ et qui change de signe. Il s'en suit que

$$\psi^+ = \max(\psi, 0)$$

est également une fonction propre associée à λ_1.

Posons

$$\Omega_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \psi(x) > 0\}.$$

Et λ_+ l'inverse de la première valeur propre de $\Big(\big(-\Delta\big)^{-1} g\Big)$ défini sur Ω_+ avec condition aux bords de Dirichlet. Alors

$$\lambda_1 = \lambda_+.$$

Comme $\Omega_+ \neq \mathbb{R}^n$ alors ψ et ψ^+ sont linéairement indépendant.

Ainsi, en considérant tous les domaines Ω_* tels que

$$\Omega_+ \subset \Omega_* \subset \mathbb{R}^n,$$

nous pouvons construire un nombre infini de fonction propre linéairement indépendante et associée à λ_1, ce qui contredit le fait que l'ordre de multiplicité de λ_1 est finie. Ainsi donc, λ_1 est simple est toute fonction propre qui lui est associée ne change pas de signe.

Considérons, une fonction propre non négative ϕ associée à λ_1. Il s'agit de montrer que $\phi > 0$. Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi(y) = 0$. Soient $R > 0$ et $r > 0$ tels que

$$B(x,r) \subset B(x,R).$$

En appliquant le Lemme 3.3.2 à l'opérateur $\big(-\Delta - \lambda_1 g(x)\big)$ on obtient

$$\sup_{B(x,4r)} \phi \leq C \inf_{B(y,r)} \phi = 0,$$

et donc $\phi = 0$ dans $B(y,r)$ pour tout $r > 0$. En conclusion, $\phi \equiv 0$, ce qui est impossible, car ϕ est une fonction propre. $\square$

Remarque 3.3.1. *[12] (3.13) nous permet la caractérisation variationnelle suivante de λ_1,*

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|u|^2\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx; \qquad \forall u \in \mathbb{V}. \tag{3.16}$$

Nous avons vu dans la Proposition 3.3.4 que le problème (3.22) admet une valeur propre principale. Nous allons montrer que cette valeur propre est la seule valeur propre principale positive du problème en question.

Identité de Picone

Nous allons introduire *l'identité de Picone* qui nous permettra de démontrer que les premières valeurs propres, λ_1^+ et λ_1^-, sont principales.

Proposition 3.3.5. *Pour tout $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tels que $v > 0$ alors on a l'inégalité dite* ***identité de Picone***

$$|\nabla u|^2 - \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right)\nabla v \geq 0 \tag{3.17}$$

avec égalité si, et seulement si, $u = \lambda v$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Reprenons l'expression de l'identité de Picone et développons là,

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 \quad - \quad & \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right)\nabla v \qquad \text{(qui est bien définie car } v > 0\text{).} \\ = \quad & |\nabla u|^2 - 2\frac{u}{v}\nabla u \nabla v + u^2 \frac{\nabla v}{v^2}\nabla v \\ = \quad & |\nabla u - \frac{u}{v}\nabla v|^2 \qquad (3.18) \end{aligned}$$

qui est nécessairement positive. D'où le résultat.

Concernant le cas de l'égalité, Supposons donc que

$$|\nabla u|^2 - \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right)\nabla v = 0$$

ainsi de (3.18) on obtient

$$|\nabla u - \frac{u}{v}\nabla v|^2 = 0$$

ce qui nous donne,

$$\nabla u = \frac{u}{v}\nabla v$$

et donc,

$$\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla v}{v}$$

par suite,

$$\log u = \log v + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

d'où

$$u = v \exp c.$$

En prenant $\lambda = \exp c \in \mathbb{R}$, on obtient le résultat.

Supposons maintenant que $u = \lambda v$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Remplaçons u par sa valeur dans l'identité de Picone, on obtient

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^2 - \nabla\Big(\frac{u^2}{v}\Big)\nabla v &= \lambda^2|\nabla v|^2 - \lambda^2\nabla\Big(\frac{v^2}{v}\Big)\nabla v \\
&= \lambda^2|\nabla v|^2 - \lambda^2(\nabla v)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.2. *Remarquons que si λ est valeur propre du problème (3.22) relativement à g, alors $(-\lambda)$ est valeur propre du problème (3.22) relativement à $(-g)$. Il suffit donc de montrer que λ_1^+ est principale.*

Démonstration. Soit λ_1^+ la valeur propre principale positive du problème (3.22) et soit φ_1 la fonction propre associée à λ_1^+. Soit λ une valeur propre positive du problème (3.22) et soit φ la fonction propre associée à λ. Supposons que λ est principal, i.e. que φ est strictement positive. En appliquant l'identité de Picone à φ_1 et φ, on obtient

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2|\nabla(\frac{\varphi_1}{\varphi})|^2\,dx &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi_1|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1^2\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\,dx \\
&= \textstyle(\lambda_1^+ - \lambda)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_1^2\,dx
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme λ est valeur propre positive du problème (3.22), et d'après le principe du Min–Max on a, $\lambda_1^+ \le \lambda$. Par ailleurs, sachant que $\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^-$, en appliquant l'identité de Picone à φ_1 et φ_1^+, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_1|^2\Big|\nabla\Big(\frac{\varphi_1^+}{\varphi_1}\Big)\Big|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi_1^+|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_1^+)^2\frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_1}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1^+ g(x)(\varphi_1^+)^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1^+ g(x)(\varphi_1^+)^2\,dx = 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

On obtient donc,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2\Big|\nabla\Big(\frac{\varphi_1}{\varphi}\Big)\Big|^2 dx = (\lambda_1^+ - \lambda)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_1\,dx = 0.$$

ce qui implique que, d'une part $\varphi = c\varphi_1$ et d'autre part que $\lambda = \lambda_1^+$. $\square$

3.3.2 Principe du maximum

Le principe du maximum est l'une des caractéristiques les plus importantes des équations elliptiques du second ordre, qui les distinguent, ainsi, des équations d'ordre supérieur. Dans la majorité des cas, le principe du maximum ne fait appel qu'à la condition d'ellipticité (tout au plus à la régularité des coefficients intervenant dans la définition de l'opérateur). Cette caractéristique fait du principe du maximum un outil puissant dans l'établissement des estimations *a priori* des solutions d'équations linéaires ou non linéaires elliptiques.

Définition 3.3.1 (Principe du Maximum)**.** *Un opérateur A défini d'un espace de Banach X dans lui même, satisfait le principe du maximum si pour tout u de X, u est positif et non identiquement nul, dés que Au est positif et non identiquement nul.*

Proposition 3.3.6. *[11] Supposons que (3.2) est vérifiée, de plus* $f \in L^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)$. *Alors le problème (3.22) satisfait le principe du maximum si, et seulement si,* $\lambda_1 > \lambda$.

Démonstration. Soit φ_1 la fonction propre associée à λ_1. Alors φ_1 ne change pas de signe. Multiplions le problème (3.22) par φ_1 et intégrons sur $\mathbb{R}^n$.

$$-\Delta u\varphi_1 = \lambda g(x)\varphi_1 u + f(x,u)\varphi_1$$

ce qui donne,

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_1 u\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_1 u\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)\varphi_1\,dx,$$

Ainsi,

$$(\lambda_1 - \lambda)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_1 u\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)\varphi_1\,dx.$$

Si le principe du maximum est vérifiée, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)\varphi_1\,dx > 0$$

ce qui implique que

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_1 u\, dx > 0.$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_1 u\, dx > 0$$

et donc, $\lambda_1 - \lambda > 0$ d'où, $\lambda_1 > \lambda$.

Inversement, soit $\lambda_1 > \lambda$, et utilisons le fait que $u = u^+ - u^-$. Multiplions l'equation du problème (3.22) par u^- et intégrons sur $\mathbb{R}^n$. On obtient,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla u^-\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u u^-\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u) u^-\, dx.$$

Du fait que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u^+ \nabla u^-\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) u^+ u^-\, dx = 0,$$

on obtient,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^-|^2\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|u^-|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u) u^- dx.$$

En vertu de la caractérisation variationnelle de λ_1, on obtient

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|u^-|^2\, dx \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|u^-|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u) u^-\, dx,$$

et donc,

$$0 < (\lambda_1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|u^-|^2\, dx \leq - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u) u^-\, dx \leq 0.$$

D'où, $u \geq 0$. □

3.4 Le cas non linéaire – Solutions sur un cône

Définition 3.4.1. *On appelle* ***cône*** *tout sous-ensemble K qui vérifie,*

(a) K est non vide et non trivial (i.e. contient des points différents de zéro).

(b) $\lambda K \subset K$ pour tout $\lambda \geq 0$.

(c) *K est convexe.*

(d) *K est fermé.*

(e) $K \cap (-K) = \{0\}$.

Définition 3.4.2. *Soit X un espace de Banach. Soit $K \subset X$ un cône donné. On définit une relation d'ordre partiel $\leqq$ par rapport à K, donnée par*

$$x \leqq y \quad \textit{si, et seulement si,} \quad x - y \in K$$

Nous nous intéressons à l'étude du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{V}, u \geq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ tel que} \\ -\Delta u = \lambda g(x)u + f(x,u) \end{array} \right. \tag{3.21}$$

où $F(.,.)$ est l'opérateur de Nemytskii associé à f, λ est un paramètre réel.

Proposition 3.4.1. *L'opérateur de Nemytskii F est compact de $\mathbb{V}$ dans $L^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)$*

Démonstration. Soit (u_n) une suite bornée dans $\mathbb{V}$. Pour $R > 0$, nous avons

$$\| F(.,u_p) - F(.,u_q) \|_{L^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(1 + R^2\right) \int_{B_R} |f(x,u_p) - f(x,u_q)|^2 dx +$$
$$+ \int_{B'_R} p_1^{-1} |f(x,u_p) - f(x,u_q)|^2 dx$$

La suite des restrictions de $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $H^1(B_R)$, alors par passage à une sous-suite extraite elle converge fortement dans $L^2(B_R)$. Comme l'opérateur de Nemytskii est continu de $L^2(B_R)$ dans $L^2(B_R)$, alors

$$\int_{B_R} |f(x,u_p) - f(x,u_q)|^2 dx \to 0 \text{ quand } p,q \to +\infty.$$

D'autre part,

$$\int_{B'_R} p_1^{-1} |f(x,u_p) - f(x,u_q)|^2 dx \leq \int_{B'_R} p_1^{-1} |f(x,u_p)|^2 dx + \int_{B'_R} p_1^{-1} |f(x,u_q)|^2 dx$$

Pour le premier terme du membre de droite nous avons,

$$\begin{aligned}\int_{B'_R} p_1^{-1}|f(x,u_p)|^2 dx &\leq \int_{B'_R} p_1^{-1}\left|a(x)u_p^{\beta}+b(x)\right|^2 dx+ \\ &\leq 2\int_{B'_R} p_1^{-1}a(x)^2|u_p|^{2\beta}+|b(x)|^2\,dx\end{aligned}$$

nous avons $\int_{B'_R} p_1^{-1}|b(x)|^2\,dx \to 0$ quand $R\to+\infty$, car $p_1^{\frac{-1}{2}}b\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons maintenant estimer le terme restant. Comme $\mathbb{V}$ s'injecte de façon continue dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{B'_R} p_1^{-1}a(x)^2(u_p)^{2\beta}\,dx &\leq \left(\int_{B'_R}(u_p)^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2\beta}{2^*}}\left(\int_{B'_R}(p_1^{-1}a(x)^2)^{\frac{2^*}{2^*-2\beta}}\,dx\right)^{\frac{2^*-2\beta}{2^*}} \\ &\leq c^{2\beta}\left(\int_{B'_R}\left|\nabla u_p\right|^2 dx\right)^{\beta}\left(\int_{B'_R}(p_1^{-1}a(x)^2)^{\gamma}_1 dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \\ &\leq c^{2\beta}\parallel u_p\parallel^{2\beta}\left(\int_{B'_R}(p_1^{-1}a(x)^2)^{\gamma_1}\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\end{aligned}$$

Comme (u_p) est bornée dans $\mathbb{V}$ et $p_1^{-\frac{1}{2}}a\in L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ nous concluons que $\int_{B'_R} p_1^{-1}a(x)^2(u_p)^{2\beta}$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini.

On réitère le même raisonnement pour $\int_{B'_R} p_1^{-1}|f(x,u_q)|^2\,dx$.

Ainsi $\int_{B'_R} p_1^{-1}|f(x,u_p)-f(x,u_q)|^2\,dx$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini.

Par conséquent, $(F(.,u_n))$ est une suite de Cauchy dans $L^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)$ et donc elle converge. D'où le résultat. $\square$

3.4.1 Théorème du point fixe sur un cône

Soient X un espace de Banach, $K\subset X$ un cône et $F: K\longrightarrow X$. De plus, supposons que $F(0)=0$. Nous allons intéresser aux points fixes se trouvant dans $K\setminus\{0\}$. Pour cela, nous allons considérer une région annulaire

$$\{x\in K;\quad 0<r\leqq|x|\leqq R\}$$

sur laquelle nous allons imposer des conditions sur les bords afin que F puisse admettre des points fixes à l'intérieur de la région annulaire.

Posons $K_r = K \cap B_r$. Commençons par donner quelques définitions.

Définition 3.4.3 (Homotopie)**.** *Deux applications continues F et F' définie dans $\overline{B_r}$ sont **homotopes**, s'il existe une application continue $h(x,t)$ définie dans $\overline{B_r} \times [0,1]$ telle que pour tout $x \in \overline{B_r}$ on ait*

$$h(x,0) = F(x), \quad et \quad h(x,1) = F'(x).$$

et pour tout $x \in \partial B_r$ et tout $t \in [0,1]$ on a

$$h(x,t) \neq 0.$$

*L'application $h(x,t)$ est alors appelée une **homotopie**.*

Théorème 3.4.1. *[14][Définition et propriétés du Degré de Leray–Schauder] Soient X un espace de Banach, $r > 0$, et*

$$B_r = \{u \in X; \quad \| u \|_X < r\}.$$

Soit F un opérateur compact, défini dans $\overline{B_r}$ à valeurs dans X, tel que

$$Fu \neq u$$

pour tout $u \in \partial B_r$, alors il existe un entier

$$d[u - Fu; B_r, \Theta]$$

appelé le degré de Leray–Schauder de l'opérateur $u - Fu$ par rapport à B_r au point Θ, tel que

(1) $d[u; B_r, \Theta] = 1$.

(2) $d[u - Fu; B_r, \Theta] = d[u - Fu; \Omega_1, \Theta]$ *pour tout ouvert Ω_1 de B_r, et tel que $\Theta \notin (u - Fu)\big(\overline{B_r} \setminus \Omega_1\big)$.*

(3) $d[u-h(\cdot,t)u;B_r,\Theta(t)]$ *ne dépends pas de* $t\in[0,1]$ *pour toute application compacte* h : $\overline{B_r}\times[0,1]\longrightarrow X$*, avec* $\Theta:[0,1]\longrightarrow X$ *continue et* $\Theta(t)\neq\big(u-h(\cdot,t)u\big)\big(\partial\Omega\big)$ *dans* $[0,1]$.

(4) Si $d[u-Fu;B_r,\Theta]\neq 0$ *alors il existe* $u_0\in B_r$ *tel que*

$$Fu_0=u_0.$$

(5) Si G *est une application compacte, également définie dans* B_r *et à valeurs dans* X*, et si*

$$u-Fu-tGu\neq\Theta,$$

pour tout $u\in\partial B_r$ *et tout* $t\in[0,1]$*, alors*

$$d[u-Fu;B_r,\Theta]=d[u-Gu-Fu;B_r,\Theta].$$

(6) Si de plus, l'opérateur F *est impair, i.e.* $F(u)=-F(-u)$ *pour tout* $u\in\overline{B_r}$*, alors le degré*

$$d[u-Fu;B_r,\Theta]$$

est impair et non nul.

Définition 3.4.4. *Soit* K *un sous ensemble non vide de* X*.* K *est appelé une rétraction de* X *s'il existe une application continue* $R:X\longrightarrow K$ *telle que* $Rx=x$ *dans* K*.*

Définition 3.4.5 (Index de points fixes)**.** *Soient* K *un cône définie dans un espace de Banach* X*,* Ω *un ouvert de* K *et* $F:\overline{\Omega}\longrightarrow K$ *compacte telle que* $Im(F)\cap\partial\Omega=\varnothing$*. Si* $T:X\longrightarrow K$ *est une rétraction, alors le degré de Leray–Schauder* $d[u-FTu;T^{-1}(\Omega),0]$ *existe.*

Remarque 3.4.1. *De la propriété d'invariance de l'homotopie et des propriétés (2) et (3) du Théorème 3.4.1, il s'en suit que cet entier est le même pour toutes les rétractions de* X *sur* K*. Par convention, cet entier est noté* $i(F,\Omega,K)$*.*

Nous avons alors, le théorème suivant

Théorème 3.4.2. *Soient X un espace de Banach, $K \subset X$ un cône et $F : \overline{K_R} \longrightarrow K$, et soit $\gamma : \mathfrak{B} :\longrightarrow \mathbb{R}^+$, où $\mathfrak{B}$ désigne l'ensemble des parties bornées de X, et qui vérifie*

$$\gamma(FB) \geq \gamma(B),$$

pour tout $B \subset \Omega$ bornée et $\gamma(B) > 0$. Supposons que

1. *$Fx \neq \lambda x$, pour $|x| = R$ et $\lambda > 1$.*
2. *Il existe un petit rayon $r \in (0,R)$ et un élément $e \in K \setminus \{0\}$ tel que $x - Fx \neq \lambda e$ pour $|x| = r$ et $\lambda > 0$.*

Alors F admet un point fixe dans la région annulaire donnée par $\{x \in K; \quad r \leqq |x| \leqq R\}$.

***Démonstration*.** S'il n'existe aucun point fixe dans $\partial K_R = \{x \in K; \quad |x| = R\}$, ni dans ∂K_r, alors on a

$$i(F, K_R \setminus \overline{K_q}) = i(F, K_R) - i(F, K_r).$$

Remarquons que tF, avec $t \in [0,1]$, constitue une homotopie admissible sur $\overline{K_r}$. En vertu de la supposition (1), il s'en suit que

$$i(F, K_r) = i(0, K_r) = 1.$$

La propriété d'invariance de l'homotopie implique, également, que

$$i(FK_r) = i(F + \lambda e, K_r) \qquad \text{pour tout } \lambda \geqq 0,$$

Par ailleurs, $F + \lambda e$ n'admet pas de points fixes dans $\overline{K_r}$ si λ est suffisamment grand, on a

$$i(F, K_r) = 0.$$

D'où,

$$i(F, K_R \setminus \overline{K_r}) = 1$$

En conséquence, F admet un point fixe dans le cône. □

Remarque 3.4.2. *Nous appliquons, à notre problème, le théorème du point fixe dans le cône, qui est résumé dans le théorème suivant*

Théorème 3.4.3. *Soit C un cône dans un espace de Banach X et soit $\Phi : C \longrightarrow C$ un opérateur compact. Supposons qu'il existe r, R, $0 < r < R$, $t_0 > 0$ tels que*

1. $x \neq t\Phi(x), \forall t, 0 \leq t \leq 1$ *et* $|x| = r, x \in C$
2. *Il existe une application compacte*

$$\mathbb{F} : B_R \times [0, +\infty[\longrightarrow C$$

telle que

(a) $\mathbb{F}(x, 0) = \Phi(x)$ *pour* $x \in C, |x| = R$.

(b) $\mathbb{F}(x, t) \neq x$ *pour* $x \in C, |x| = R, t \geq 0$.

(c) $\mathbb{F}(x, t) \neq x$ *pour* $x \in C, |x| \leq R, t \geq t_0$.

Alors, Φ *admet un point fixe* $x \in C$, $r < |x| < R$.

Dans toute la suite nous supposerons $n \geq 3$. Le problème que nous étudions devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda g(x) u + f(x, u), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x) \underset{|x| \to +\infty}{\to} 0 & \end{array} \right. \tag{3.22}$$

Proposition 3.4.2. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe un unique $u \in \mathbb{V} \cap H^2(\mathbb{R}^n)$ solution de (3.22).*

Démonstration. Considérons la forme bilineaire $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T(u, v) = < u, v > - \int_{\mathbb{R}^n} (g(x)u, u),$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire définie sur $\mathbb{V}$ par $\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v \, dx$. T est continue et de la condition formulée sur g, à savoir, $g(x) \leq \tilde{\lambda} < \lambda_1$ on obtient

$$\begin{array}{rcl} (g(x)u, u) & \leq & \tilde{\lambda}(u, u) < \lambda_1 \\ \int_{\mathbb{R}^n} (g(x)u, u) \, dx & \leq & \dfrac{\tilde{\lambda}}{\lambda_1} \int_{\mathbb{R}^n} (u, u) \, dx < 1 \end{array}$$

Ce qui nous permet d'obtenir

$$T(u,u) \geq (1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_1}) \parallel u \parallel^2, \qquad \text{pour tout } u \in \mathbb{V} \text{ et } \parallel u \parallel_{\mathbb{V}}^2 = \langle u,u \rangle.$$

Alors en vertu du théorème de Lax-Milgram, la fonctionnelle linéaire définie par

$$v \in \mathbb{V} \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (v, f(x,u))\, dx$$

possède un unique représentant u pour la forme bilinéaire T, telle que,

$$T(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} (v, f(x,u)), \qquad \text{pour tout } v \in \mathbb{V}.$$

$\square$

Proposition 3.4.3. *Supposons que $g(x) \leq \tilde{\lambda} < \lambda_1^+(g)$, $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ solution de (3.22). Alors,*

(3.23) $$-\Delta u \leq g(x)u, \text{ avec } u \geq 0$$

implique que $u \equiv 0$.

***Démonstration*.** Du fait que $u \geq 0$, on obtient,

$$(-\Delta u, u) \leq (g(x)u, u) \leq g(x)(u,u) \leq \tilde{\lambda}(u,u)$$

Par conséquent,

$$\lambda_1^+(g) \int_{\mathbb{R}^n} u^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \leq \tilde{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} u^2.$$

Ainsi donc, $u \equiv 0$. $\square$

Estimation *a priori*

Nous allons reprendre les notations et les techniques développés dans [13],

$$\Omega_M = \{y \in \mathbb{R}^n; M \leq y\}$$

$$\Omega_{M,N} = \{y \in \mathbb{R}^n; M \leq y \leq N\}$$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; |x_y| \leq r\}; \qquad B_r = B_r(0).$$

$$S_r(x) = \partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; |x-y| = r\}; \qquad S_r = S_r(0).$$

$$Q_c(\Omega) = \{q \in \mathscr{C}^{\alpha}_{loc}(\Omega; I); q(x) < c, x \in \Omega\}; \quad I = (0, \infty).$$

$$Q_{c,c'}(\Omega) = \{q \in \mathscr{C}^{\alpha}_{loc}(\Omega; I); 0 < c \leq q(x) \leq c'\}$$

$$\omega_n = \text{Le volume de la boule unité de } \mathbb{R}^n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n}\Gamma(\frac{n}{2}).$$

$$\text{avec } \Gamma(x-y) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n}.$$

De plus, $f(x,u)$ vérifie l'hypothèse

$$\exists P, p \in \mathscr{C}^{\alpha}_{loc}(I \times I; I) \text{ satisfaisant } p(|x|,u) \leq f(x,u) \leq P(|x|,u). \tag{3.24}$$

Considérons la première solution du problème 3.22 et qui satisfait, pour $|x|$ suffisamment grand,

$$0 < c < u(x) < c'. \tag{3.25}$$

De plus nous supposerons, pour les besoins de la démonstration, que P, et p sont non décroissante.

Définissons l'opérateur intégrale suivant :

$$T[u](x) = c - \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) f(y, u(y)) dy. \tag{3.26}$$

nous avons alors,

Proposition 3.4.4. *L'opérateur T, défini par (3.26), envoi $Q_{c,c'}(\Omega_M)$ dans lui même, pour un certain M suffisamment grand, dés lors que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} tP(t,c')dt < \infty. \tag{3.27}$$

Démonstration. Soit $u \in Q_{c,c'}(\Omega_M)$, nous avons,

$$\begin{aligned}
T[u](x) =& c - \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) f(y,u(y))dy \\
&\leq c + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_M^{|x|} P(\rho,c') \int_{S_\rho} |x-y|^{2-n} ds d\rho \\
&+ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{|x|}^{\infty} P(\rho,c') \int_{S_\rho} |x-y|^{2-n} ds d\rho \\
&\leq c + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \Big(\int_M^{|x|} \rho^{n-1} |x|^{2-n} P(\rho,c') d\rho + \int_{|x|}^{\infty} \rho P(\rho,c') d\rho \Big) \\
&\leq c + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_M^{\infty} \rho P(\rho,c') d\rho < c'
\end{aligned}$$

Pourvu que M soit assez grand. Notons que si $P(r,t)$ et $p(r,t)$ sont non croissante en t, la démonstration est identique. $\square$

Proposition 3.4.5. *Sous les mêmes hypothèses que celles du Lemme 3.4.4, T est continu et compact.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n \subset Q_{c,c'}(\Omega_M)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Big| T[u_n](x) - T[u](x) \Big| \leq& \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| dy = \\
&= \int_{\Omega_{M,N}} \Gamma(x-y) |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| dy + \\
&\quad + \int_{\Omega_N} \Gamma(x-y) |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| dy, \quad 0 < M < N.
\end{aligned}$$

La seconde intégrale est majorée par

$$2 \int_{\Omega_N} \Gamma(x-y) P(|y|,c') dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

à condition que N soit suffisamment grand. A supposer que $f \in \mathscr{C}^{\alpha}_{loc}$ alors il existe une constante K, dépendante de N, telle que

$$|f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| \leq K |u_n(y) - u(y)|^{\alpha}$$

uniformément dans $\Omega_{M,N}$. Considérons n_0 suffisamment grand de sorte que,

$$\text{pour } n > n_0,\ |u_n - u|^\alpha < \frac{\varepsilon}{2}\Big[K \int_{\Omega_{M,N}} \Gamma(x-y)dy\Big]^{-1}.$$

Ainsi, la première intégrale est inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}$, ce qui démontre la continuité de T.

Montrons que T est compact. L'image de T est uniformément bornée, nous ne pourrons utiliser le théorème d'Ascoli–Arzela que si l'image est equicontinue dans Ω_M. Soient $x, x' \in \Omega_M$, posons $S = |x - x'|$ et $\xi = \frac{1}{2}(x + x')$. Alors pour $u \in Q_{c,c'}(\Omega_M)$,

$$T[u](x) - T[u](x') = \int_{\Omega_M} \Big(\Gamma(x-y) - \Gamma(x'-y)\Big) f(y,u(y))dy = I_1 + I_2.$$

où

$$I_1 = \int_{B_\delta(\xi)} \Big(\Gamma(x-y) - \Gamma(x'-y)\Big) f(y,u(y))dy$$

et

$$I_2 = \int_{\Omega_M \setminus B_\delta(\xi)} \Big(\Gamma(x-y) - \Gamma(x'-y)\Big) f(y,u(y))dy.$$

Commençons par estimer I_1, on obtient

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{2}{n(n-2)\omega_n} \int_{\Omega_M \setminus B_\delta(\xi)} |x-y|^{2-n} f(y,u(y))dy \\ &\leq \frac{2}{n(n-2)\omega_n} \frac{\delta^{n-2}}{2} \int_M^\infty \int_{S_\rho} P(\rho, c')dsd\rho. \end{aligned}$$

Afin de majorer I_1, nous posons $B_\delta(\xi) = B_{\frac{\delta}{4}}(x) \cup B_{\frac{\delta}{4}}(x') \cup \Omega$ où $\Omega = B_\delta(\xi) \setminus \Big(B_{\frac{\delta}{4}}(\xi) \cup B_{\frac{\delta}{4}}(x')\Big)$

Donc,

$$\begin{aligned} I_1 &= \Big(\int_{B_{\frac{\delta}{4}}(x)} + \int_{B_{\frac{\delta}{4}}(x')} + \int_\Omega\Big) \Big(\Gamma(x-y) - \Gamma(x'-y)\Big) f(y,u(y))dy \\ &= I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_3| &= \int_{B_{\frac{\delta}{4}}(x)} \big|\Gamma(x-y) - \Gamma(x'-y)\big| f(y,u(y))\, dy \\ &\leq \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_{\frac{\delta}{4}}(x)} |x-y|^{2-n} P(|y|,c')\, dy + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_{\frac{\delta}{4}}(x)} |x'-y|^{2-n} P(|y|,c')\, dy \end{aligned}$$

Ainsi, ces intégrales tendent vers zéro lorsque δ tend vers zéro uniformément en x et x'. $\square$

3.4.2 Existence de points fixes

Nous allons construire, à partir de (3.22), Φ et $\mathbb{F}$ qui satisfont aux conditions du Théorème 3.4.3.

Théorème 3.4.4. *Le problème (3.22) admet au moins une solution positive pour tout λ tel que*

$$0 \leq \lambda < \lambda_1^+$$

Démonstration. La Proposition 3.4.2 nous permet de définir l'application $S : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ où u est l'unique solution de

$$\big(-\Delta - \lambda g(x)\big)u = f(x,v).$$

En vertu de la théorie générale de l'étude spectrale, et de la Proposition 3.4.2, nous savons qu'il s'agit là d'un opérateur continu et inversible.
Soit $\mathbb{P}$ le cône des fonctions positives de $\mathbb{V}$, i.e.

$$\mathbb{P} = \{u \in \mathbb{V};\ u \geq 0\}$$

Nous définissons alors une application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{P} \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = S^{-1} \circ F(u). \end{array}$$

Φ est un opérateur linéaire, continu et compact dans $\mathbb{P}$, car composé d'un opérateur continu, S^{-1} et d'un autre compact, à savoir F. En vertu du principe du maximum, nous avons $\Phi(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}$.
Φ vérifie la condition (1) du Théorème 3.4.3. En effet, supposons qu'il existe $u \in \mathbb{P}$, $t \in [0,1]$, tel que $u = t\Phi(u)$. En vertu de l'hypothèse (3.10) on a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\| u \|_{\mathbb{V}} \leq r \Longrightarrow f(x,u) \leq \varepsilon p_1(x) u$$

Nous avons alors,

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u & \leq & g(x)u + \varepsilon p_1(x) u \\ & \leq & (g(x) + \varepsilon p_1(x))u \end{array}$$

nous pouvons choisir ε suffisamment petit pour que l'on ait

$$g(x)+\varepsilon p_1(x) \leq \tilde{\lambda} \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, en vertu du Lemme 3.4.3 on a $u \equiv 0$. Pour tout $0 \leq \lambda < \lambda_1^+$, pour tout $v \in \mathbb{V}$ et $t > 0$, nous définissons $u \in \mathbb{P}$ solution du problème

$$-\Delta u = \lambda g(x)u + f(x, v+t).$$

Nous définissons une application,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F} : B_R \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{P} \\ (v,t) & \longmapsto & u = \mathbb{F}(v,t) = S^{-1} \circ F(v+t) \end{array}$$

On voit bien que $\mathbb{F}(.,0) = \Phi(.)$. Vérifions que l'application $\mathbb{F}$ satisfait aux conditions (2b) et (2c) du Théorème 3.4.3. Soit $\mathbb{F}(u,t) = u$, pour un certain $u \in \mathbb{P}$, et soit φ_1 la fonction propre associée à λ_1. Multiplions l'équation (3.22) par φ_1 et intégrons sur $\mathbb{R}^n$, on obtient,

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u+t)\varphi_1\,dx.$$

alors la condition (3.9), implique

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx + 2\mu \int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha(x)(u+t)\varphi_1\,dx - c\int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha(x)\varphi_1\,dx$$

En vertu de (3.2)

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx + 2\mu \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx + \\ 2\mu t \int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha(x)\varphi_1\,dx - c\int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha(x)\varphi_1\,dx$$

ce qui nous donne

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx \geq (\lambda+2\mu) \int_{\mathbb{R}^n} g(x)u\varphi_1\,dx + (2\mu t - c)\int_{\mathbb{R}^n} p_\alpha(x)\varphi_1\,dx$$

Remarquons qu'en vertu de (3.8)

$$\lambda + 2\mu \geq \lambda_1, \qquad \text{car } \lambda \geq 0.$$

et donc,

$$2\mu t - c \leq 0 \Longrightarrow t \leq \frac{c}{2\mu}.$$

Pour avoir $u \neq \mathbb{F}(u,t)$ pour $t > t_0$, il suffit de prendre $t_0 = \dfrac{c}{2\mu}$.

Alors, en vertu du Théorème 3.4.3, la fonctionnelle Φ admet, pour tout λ satisfaisant $0 \leq \lambda < \lambda_1$, un point fixe $u \in \mathbb{P}$ qui est solution positive du problème (3.22). $\square$

Conclusion

Ce modeste travail nous a permis d'approcher le domaine des equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, sans pour autant totalement y accéder, tant les ramifications de cette branche des mathématiques semblent *"infinies"*. La connaissance des autres méthodes de résolution de ce type de problèmes, aussi divers que variés, nous permettra sûrement de répondre aux questions soulevés par ce travail.

Plusieurs problèmes connexes sont à explorer. Nous pensons essentiellement aux problèmes de perte de compacité, à la nature des espaces fonctionnelles qui conditionnent fortement la nature de la solution, aux problèmes non coercifs ainsi que Les problèmes d'approximation des solutions par des méthodes numériques

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[2] W. Allegretto, Y. X. Huang, *Eigenvalues of the Indefinite Weight p–Laplacian in Weighted Spaces*, Funkcialaj Ekvacioj, 38, pp. 233–242, (1995).

[3] A. Ambrosetti, *Critical points and nonlinear variational problems*, Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 49, pp. 1-139, (1992).

[4] A. Ambrosetti and G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge ; Cambridge University Press, (1993).

[5] T. Z. Boulmezaoud, *Espaces de Sobolev avec Poids pour l'Equation de Laplace dans le Demi-Espace* $\mathbb{R}^n$. Equations aux dérivées partielles. Acad. Sci. Paris, T. 328, Série I, pp. 221-226, (1999).

[6] L. Cardoulis, *Existence of Solutions for Elliptic Systems Involving Operators in Divergence Form*, EJDE, Conference 16, pp. 59–80, (2007).

[7] K-C. Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2005).

[8] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tome 5, Masson, Paris, (1990).

[9] A. Djellit, N. Benouhiba, *Asymptotic Estimates for the Eigenvalues of Some Nonlinear Elliptic Problems*, Antalya, Turkey–Dynamical Systems and Applications, Proceedings, pp. 310–322, 5-10 July (2004).

[10] A. Djellit, N. Benouhiba, *Existence de Valeurs Propres Principales pour un Problème Elliptique en Dimension 2*, Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste Vol. XXXI, pp. 49–60, (1999).

[11] A. Djellit, S. Tas, *Study of some noncooperative linear elliptic systems*, Applications of Mathematics n°3 49, pp. 185–199, (2004).

[12] A. Djellit, A. Yechoui, *Existence and non-existence of a principal eigenvalue for some boundary value problems*, Maghreb Math. Rev., Vol. 6, 1, pp. 29–37, (1997).

[13] A.L. Edelson,*Asymptotic prperties of semilinear equations*, Canadian Mathematical Society, Vol. 32(1), pp. 34–46, (1989).

[14] S. Fu*č*ik, A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations*, Studies in Applied Mechanics, Elsevier Scientific Publishing Company, (1980).

[15] S. Fu*č*ik, J. Ne*č*as, J. Sou*č*ek, V. Sou*č*ek, *Spectral analysis of nonlinear operators*, Lectures notes in Mathematics 346 Springer-Verlag, Berlin, (1970).

[16] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer–Verlag, Berlin, (1983).

[17] P. Gurka, B. Opic, *Continuous and Compact Imbeddings of Weighted Sobolev Spaces. I.*, Czechoslovak Mathematical Journal 38 , no. 4, pp. 730–744, (1988).

[18] B. Hanouzet, *Espace de Sobolev à Poids, Application au Problème de Dirichlet dans un demi espace*, Rend. Sem. Univ. Padova, pp. 227–272, (1971).

[19] Z. Jin, *Principal Eigenvalues with Indefinite Weight Functions*, Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 38, 5, pp. 1945–1959, May (1997).

[20] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, Paris, (1986).

[21] I. Kuzin and S ; Pohozaev, *Entire Solutions of Semilinear Elliptic Equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications Vol.33, Birkhäuser, Bassel ; Boston ; Berlin, (1997).

[22] E.S. Noussair and C.A. Swanson, *Semilinear elliptic eigenvalue problems in* $\mathbb{R}^n$, Hiroshima Mathematical Journal 15, pp. 127–140, (1985).

[23] B. Opic, A. Kufner, *How to Define Reasonably Weighted Sobolev Spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 25, No. 3, pp. 537–554, (1984).

[24] P. H. Rabinowitz, *Variationnal Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems*, in Eigevalues of Nonlinear Problems, CIME, Cremonese, Rome, pp. 141–195, (1974).

[25] M. A. S. Souto, *A priori estimates and existence of positive solutions of nonlinear cooperative elliptic systems*, Differential Integral Equations, 8, pp.1245–1258, (1995).

[26] G. Stampacchia, *Le Problème de Dirichlet pour les Equations Elliptiques du Second Ordre à Cœfficients Discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 15, 1, pp. 189–258, (1965).

[27] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II–B*, Springer–Verlag, New York, (1980).

[28] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III*, Springer–Verlag, New York, (1980).

Résumé

Nous allons traiter les problèmes de la forme

$$Au = \lambda Gu + F(x,u),$$

où x est la variable de l'espace, λ est un paramètre réel, A un opérateur elliptique d'ordre deux, G l'opérateur de multiplication et F un opérateur non linéaire. Les trois opérateurs étant définis dans un espace de Hilbert réel, H. Dans le cas où F est identiquement nul on retrouve le cadre linéaire, et dans ce cas nous appliquons la théorie de Weinberger. Dans le cas contraire, nous nous intéressons à la théorie de Ljusternik–Schnirelmann, qui est l'analogue non linéaire du principe de Courant–Hilbert. D'autre part, si le problème en question décrit un système non linéaire de n fonctions inconnues, nous utilisons un théorème du point fixe pour montrer l'existence de solutions.

Mots clés : *Théorie de Ljusternick–Schnirelmann, points critiques, Degrés topologiques, Théorème du point fixe sur un cône, Espace Sobolev à poids.*

Abstract

We will treat problems of the form

$$Au = \lambda Gu + F(x,u),$$

where x is the variable space, λ is a real parameter, A an elliptic operator of second order, the multiplication operator G and F a non-linear operator. The three operators are defined in a Real Hilbert space, H. When F is identically zero one find the linear framework, in which case we apply the Weinberger theory. Otherwise, we are interested the theory of Ljusternik - Schnirelmann, which is the analogous linear principle of Courant - Hilbert. On the other hand, if the problem in question describes a nonlinear system of n unknown functions, we use a fixed point theorem to show the existence of solutions.

Keywords : *Ljusternick–Schnirelmann theory, critical points theory, Topological degree, fixed point theorem over a cone, Sobolev spaces with weights.*