République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira-Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de Magister en Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Applications

THÈME

Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection

réalisé par : Kessoum Khaled

Année 2010-2011

Soutenu le 13/12/2010
Devant le jury :

Mr.	**A. Dahmani**	Professeur	U.A.M.Béjaïa	Président
Mr.	**R. Benabidallah**	Maître de Conférences	U.M.M.Tizi Ouzou	Rapporteur
Mr.	**F. Bouhmila**	Maître de Conférences	U.A.M.Béjaïa	Examinateur
Mr.	**N. Mehidi**	Professeur	U.A.M.Béjaïa	Examinateur

Remerciements

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à Monsieur M. Benabidallah pour avoir voulu encadrer et rapporter ce mémoire, je le remercie aussi pour la confiance qu'il m'a accordé.

Je remercie M. Dahmani de l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury, Je tiens aussi à le remercier aussi pour son aide précieuse durant mon cursus et à l'attention porté à notre égard.

Je remercie les enseignants du département des Mathématiques. Je pense tout particulièrement à M. Berboucha, M. Bouhmila, Mme. Bechir, M. Akroune, M^{me} Tas, M. Boudrahem, M^{me}. et M. Bourraine.

Je tiens aussi à remercier M. Mehidi. Á la mémorable année passé à son cours de topologie

je remercie aussi M. Morseli pour son aide précieuse durant l'année préparatoire et ainsi que tout les autres enseignants: M.Louni, M^{me}.Khellas et M.Kerray.

Je remercie M. Bouhmila et M. Mehidi qui ont acceptés d'examiner cet humble travail.

Je ne peux que remercier ma famille, je m'adresse tout particulièrement à ma mère et à mon défunt père, mes frére, soeurs et oncles et cousins.

Je remercie mon ami *Lamine*, Aux innombrables et agréables moments passés ensemble.

Enfin J'aimerai dédier ce mémoire à mon défunt pére.

Table des matières

CHAPITRE 1

Quelques outils de base d'analyse

Ce chapitre constitue une introduction. On rappelera quelques notions basiques des mathématiques qui seront utilisées dans ce mémoire, un grand nombre de ces notions sont des résultats classiques bien connus. Nous présenterons dans la section (1.3) quelques résultats sur les intégrales singulières, et le théorème de Calderon-Zygmund et ses conséquences qui sont des outils indispensables dans le chapitre 2.

1.1 Espaces de Sobolev

Nous présenterons dans cette section quelques brèves notions fondamentales sur les espaces de Sobolev. Les théorèmes sont cités sans démonstration, pour plus de détail on pourra consulter par exemple [1], [13] [22] [24].
Soit $k \leq 0$ un entier et $1 \leq p \leq \infty$. On définit les espace de Sobolev:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \ 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

et on introduit la norme suivante pour l'espace vectorielle $W^{k,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,p} &= \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \Big)^{1/p} && \text{si } \ 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{k,\infty} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} && \text{si } \ p = \infty. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ muni de la norme (1.1.1) est un espace de Banach, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et reflexif pour $1 < p < \infty$. Nous définissons aussi l'espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ comme étant le complété de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme (1.1.1). Dans le cas où $p = 2$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert et on le note usuellement $H^k(\Omega)$.

Dans la suite on aura souvent à faire à des fonction $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Théorème 1.1.1 (Meyers-Serrin). *Soit Ω un domaine quelconque de $\mathbb{R}^n$, soit $u \in W^{m,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, alors il existe une suite $\{u_n\}$ telle que $u_n \in C^m(\Omega) \cap W^{m,q}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{m,q}(\Omega)$. De plus, si Ω est localement lipschitzien alors, on peut choisir $u_n \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$.*

On introduit la semi-norme suivant définit sur tout espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

$$(1.1.2)\qquad \begin{aligned} |v|_{k,p} &= \Big(\sum_{|\alpha=k|} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \Big)^{1/p}, &&\text{si } \ 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{k,\infty} &= \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} &&\text{si } \ p = \infty. \end{aligned}$$

Le résultat suivant affirme que la semi-norme $|\cdot|_{k,2}$ est au fait une norme dans $H_0^k(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{k,2}$.

Proposition 1.1.1 (inégalité de Poincaré). *Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout entier $k \geq 0$, il existe une constante $C = C(k,\Omega) > 0$ tel que*

$$(1.1.3)\qquad \|v\|_{k,2} \leq C|v|_{k,2}, \ \ \textit{pour tout} \ \ v \in H_0^1(\Omega).$$

1.1.1 Dual des espaces de Sobolev

Si $1 \leq p < \infty$ p' son conjugué $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$. On note par $W^{-k,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$. La norme correspondante est notée par $\|\cdot\|_{-k,p'}$ et elle définie par

$$\|f\|_{-k,p'} = \sup_{v \in W_0^{k,p}(\Omega) v \neq 0} \frac{< f,v >}{\|v\|_{k,p}}.$$

les théorèmes suivants caractérisent les fonctions de $W^{-k,p'}(\Omega)$.

Théorème 1.1.2. *Soit $1 < p < \infty$ et $f \in W^{-k,p}(\Omega)$. Alors il existe une unique $u_f \in W_0^{k,p}(\Omega)$ tel que*

$$(1.1.4)\qquad < f,v >= \int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^k D^\alpha u_f D^\alpha v dx, \ \ v \in W_0^{k,p'}(\Omega).$$

De plus, il existe une constante $c(N,k,p,\Omega) > 0$ *tel que*

$$c\|u_f\|_{k,p} \leq \|f\|_{-k,p} \leq \|u_f\|_{k,p}. \tag{1.1.5}$$

Théorème 1.1.3. *Soit* $1 < p < \infty$ *et* $f \in W^{-k,p}(\Omega)$. *Alors il existe une famille* $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\leq k}$, $f_\alpha \in L^p(\Omega)$ *tel que*

$$f = \sum_{|\alpha|=0}^{k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.1.6}$$

De plus,

$$\|f\|_{-k,p} \leq \inf \sum_{|\alpha|=0}^{k} \|f_\alpha\|_p, \tag{1.1.7}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les familles $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\leq k}$ *telles que (1.1.4) est vérifiée.*

1.1.2 La notion de trace des fonctions de $W^{m,p}$

Théorème 1.1.4. *Soit* $1 \leq p < \infty$, *et* Ω *un domaine localement lipschitzien. Alors, il existe une application linéaire et continue* $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *telle que*

$$\gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} \quad pour\ tout \quad v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ est caractérisé par

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega); \gamma_0(v) = 0\}.$$

Notons par $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ le sous-espace de $L^q(\partial\Omega)$ constitué de fonctions u tel que

$$\|u\|_{1-1/q,q(\partial\Omega)} \equiv \|u\|_{q,\partial\Omega} + [u]_{1-1/q,q} < \infty, \tag{1.1.8}$$

où

$$[u]_{1-1/q,q} \equiv \Big(\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(y) - u(y')|^q}{|y - y'|^{n-2+q}} d\sigma_y d\sigma_{y'} \Big)^{1/q} \tag{1.1.9}$$

On montre que $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ est un sous-ensemble dense de $L^q(\partial\Omega)$ et complet par la norme (1.1.2). On a le théorème suivant dû à Gagliardo.

Théorème 1.1.5. *Supposons* Ω *localement lipschitzien et soit* $q \in (1,\infty)$. *Si* $u \in W^{1,q}(\Omega)$, *alors* $\gamma_0(u) \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ *et*

$$\|\gamma_0(u)\|_{1-1/q,q(\partial\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{1,q,\Omega}. \tag{1.1.10}$$

Inversement, Il exite un opérateur L linéaire et continu

$$L : W^{1-1/q,q}(\partial\Omega) \to W^{1,q}(\Omega)$$

tel que

$$\gamma_0(L(u)) = u \quad \mu - p.p. \quad dans \quad \partial\Omega, \quad u \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega),$$

et on a

$$\|L(u)\|_{1,q,\Omega} \leq c_2 \|u\|_{1-1/q,q(\partial\Omega)} \tag{1.1.11}$$

les constantes c_i, $i = 1{,}2$, dépendent seulement de n, q, et Ω.

1.1.3 théorèmes de l'immersion de Sobolev

Théorème 1.1.6 (théorème de Sobolev-Kondrashov). *Soit Ω un domaine localement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$, $m > 0$ et $k \leq m$, alors*

$$\begin{aligned} &W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad si \quad 1/q = 1/p - (m-k)/n > 0 \\ &W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \forall q \in [1,\infty) \quad quand \quad 1/p = (m-k)/n, \\ &W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega) \quad si \quad 1/p < (m-k)/n. \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

De plus si le domaine Ω est borné, alors la dernière injection est vérifiée dans $C^k(\overline{\Omega})$, et on a

$$\begin{aligned} &W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad si \quad 1 \leq q < np/(n-(m-k)p) \\ &W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \forall q \in [1,\infty) \quad quand \quad n = (m-k)p. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

les symboles $\hookrightarrow$ désigne une injection continue et $\hookrightarrow\hookrightarrow$ désigne une injection compacte.

1.2 Espace fonctionnel relatif aux problème de Stokes

Le traitement du problème de Stokes dans le chapitre 2 requiert certains espaces de fonctions impliquant l'opérateur de divergence de fonctions vectorielles.
Soit $\mathcal{V}$ l'espace

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}. \tag{1.2.1}$$

On définit alors l'espace suivant

$$V = \text{la fermeture de } \ \mathcal{V} \ \text{ dans } \ H_0^1(\Omega).$$

Pour caractériser l'espace V nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

Théorème 1.2.1. *Soit Ω un domaine borné localement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$ satisfaisant*

$$(1.2.2) \qquad < \mathbf{f},\mathbf{v} >= 0 \ \textit{ pour tout } \ \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Alors il existe une fonction $p \in L^2(\Omega)$ tel que $\mathbf{f} = \nabla p$.

Remarque 1.2.1. *Ce théorème est une version faible d'un théorème plus générale de De Rham où Ω est une variété et $\mathbf{f}$ est supposé être une distribution vectorielle quelconque. La démonstration qu'on donnera ici du théorème suit celle donnée dans [21] et [11].*

Pour montrer le théorème 1.2.4 nous aurons besoin de quelques résultats.

Théorème 1.2.2 (Peetre-Tartar). *Soit E_1, E_2 et E_3 trois espaces de Banach, A un opérateur dans $L(E_1,E_2)$ et B un opérateur compact dans $L(E_1,E_3)$ tels que*

$$(1.2.3) \qquad \|u\|_{E_1} \simeq \|Au\|_{E_2} + \|Bu\|_{E_3}, \ \ \|\cdot\|_i \ \textit{ désigne la norme de } \ E_i \ \ i = 1,2,3.$$

Alors, on a les propriétés suivantes:

(i) *$ker(A)$ est de dimension fini dans E_1*

(ii) *$Im(A)$ est fermé dans E_2, et A est un isomorphisme de $E_1/ker(A)$ dans $Im(A)$.*

(iii) *IL existe une constante C_0 telle que, si F est un espace de Banach et $D \in L(E_1,F)$ nul sur $ker(A)$, alors*

$$(1.2.4) \qquad \|Du\|_F \leq C_0 \|D\|_{L(E_1,F)} \|Au\|_{E_2}, \ \ \forall u \in E_1.$$

(iv) *Si G est une espace de Banach et $M \in L(E_1,G)$ tel que*

$$(1.2.5) \qquad Mu \neq 0 \ \ \forall u \in ker(A) - 0,$$

alors

$$(1.2.6) \qquad \|u\|_{E_1} \cong \|Au\|_{E_2} + \|Mu\|_G.$$

Démonstration

(i) On pose $X = ker(A)$ et on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$ induite de E_1. Soit $\{x_n\}$ est une suite de X telle que $\|x_n\|_1 \leq 1$, comme B est compact $B(x_n)$ reste dans une partie relativement compacte de E_3, on peut en extraire une suite $\{B(x_n)\}$ convergente dans E_3, cette suite est donc de Cauchy dans E_3, et comme $A(u_m) = 0$ on en déduit que $\{u_m\}$ est une suite de Cauchy dans E_1, par conséquent elle converge puisque E_1 est complet. On a donc démontré que la boule fermée unité de $(X,\|\cdot\|_1)$ est compact. D'aprés le théorème de Riesz (voir théorème VI.5 [4]) X doit être de dimension fini.

Maintenant qu'on sais que $ker(A)$ est sous-espace E_1 de dimension fini, on peut introduire l'espace quotient

$$X = E_1/ker(A)$$

qui est un espace de Banach par la norme quotient

$$\|\dot{u}\|_X = \inf_{u \in \dot{u}} \|u\|_{E_1}.$$

(ii) X est un sous espace de dimension fini, il admet donc un supplémentaire topologique Y (fermé) i.e., $X \cap Y = \{0\}$ et il existe $\pi_X \in L(E_1,X)$ et $\pi_Y \in L(E_1,Y)$ tels que $u = \pi_X(u) + \pi_Y(u)$ pour tout $u \in E_1$. Y muni de la norme induite de E_1 est un espace de Banach. On montre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|A(x)\|_1 \geq \alpha\|x\|_1, \ \text{ pour tout } \ x \in Y.$$

En effet, supposons le contraire, alors il existe une suite $\{x_n\} \subset Y$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $A(x_n) \to 0$, on montre comme dans le point (i) qu'il existe une sous-suite $\{x_m\}$ qui est de Cauchy dans Y et donc sa limite $x \in Y$ vérifie $A(x) = 0$, i.e, $x \in X$ par conséquent $x = 0$, or $\|x\|_1 = \lim_{m \to 0} \|x_m\|_1 = 1!$.

Soit maintenant $\{f_n\}$ une suite de $Im(A)$ convergente dans E_2 et f sa limite. On a $f_n = A(x_n) = A(\pi_X(x_n) + \pi_Y(x_n)) = A(\pi_Y(x_n))$. Posons $y_n = \pi_Y(x_n)$, on a alors d'aprés l'inégalité précédente

$$\alpha\|y_n - y_m\|_1 \leq \|A(y_n) - A(y_m)\|_1 = \|f_n - f_m\|_2, \ \text{ pour tout } \ n,m > 0,$$

on en déduit donc que la suite $\{y_m\}$ est de Cauchy dans Y et sa limite y satisfait $A(y) = f$, ce qui montre que $Im(A)$ est fermé. Donc $Im(A)$ est un espace de Banach, comme A

est linéaire, continue et bijective de X dans $Im(A)$ on déduit grâce au théorème de l'application ouverte de Banach (voir corollaire II.6 de [4]) que $A : X \to Im(A)$ est un isomorphisme.

(iii) Comme D s'annule sur $ker(A)$, on peut écrire

$$Du = D\dot{u} = DA^{-1}Au \quad \forall u \in E_1.$$

Par conséquent

$$\|Du\|_F \leq \|D\|_{L(E_1,F)} \|A^{-1}\|_{L(Im(A),X)} \|Au\|_{E_2} \quad \forall u \in E_1,$$

Ce qui donne (1.2.4) en posant $C_0 = \|A^{-1}\|_{L(Im(A),X)}$.

(iv) Finalement, montrons qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|Au\|_{E_2} + \|Mu\|_G \geq C\|u\|_{E_1} \quad \forall u \in E_1.$$

On procède par l'absurde comme dans le point (ii). Soit $\{u_n\}$ une suite de E_1 telle que

$$\lim_{n\to\infty} (\|Au_n\|_{E_2} + \|Mu_n\|_G) = 0 \quad \text{et} \quad \|u_n\|_{E_1} = 1.$$

Alors, il existe une sous-suite $\{u_m\}$ telle que $\{Bu_m\}$ converge dans E_3. Donc $\{u_m\}$ est une suite de Cauchy dans E_1 et par conséquant

$$\lim_{m\to\infty} u_m = u \in E_1$$

avec

$$Au = 0, \quad Mu = 0 \quad \text{et} \quad \|u\|_{E_1} = 1.$$

Or, (1.2.5) implique que $u = 0$, ce qui donne une contradiction.

Le théorème suivant est une partie d'un résultat plus général dû à Nečas [13]. Sa démonstration est longue et délicate, nous l'omettons ici.

Théorème 1.2.3 (Nečas). *Soit Ω un domaine borné localement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une constante $C > 0$, dépendant seulement de Ω, tel que*

(1.2.7) $$\|p\|_2 \leq C(\|\nabla p\|_{H^{-1}} + \|p\|_{H^{-1}}) \quad \forall p \in L^2(\Omega).$$

Corollaire 1.2.1. *Soit Ω un domaine borné localement liptschizien de $\mathbb{R}^n$. L'opérateur grad : $L^2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^N$ donné par $u \to (\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n})$ est de rang fini dans $H^{-1}(\Omega)$. De plus il existe une constante $C > 0$, dépendant seulement de Ω tel que*

(1.2.8) $$\|\dot{p}\|_{L^2/\mathbb{R}} \leq C\|\nabla \dot{p}\|_{H^{-1}} \quad \forall \dot{p} \in L^2/\mathbb{R}.$$

Si ω est un ouvert de Ω de mesure positif. Alors il existe une constante C_ω dépendant seulement de ω et Ω tel que

$$\|p\|_2 \leq C_\omega(\|\nabla p\|_{2,\omega} + \|p\|_{H^{-1}}) \quad \forall p \in L^2(\Omega). \tag{1.2.9}$$

Démonstration

On applique le théorème de Peetre-Tartar (théorème 1.2.2). On pose $E_1 = L^2(\Omega)$, $E_2 = (H^{-1}(\Omega))^N$, $E_3 = H^{-1}(\Omega)$, $A = grad$, et B l'injection. Notons que l'injection $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, et donc l'injection duale $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ l'est aussi.

Pour satisfaire les hypothèse du théorème de Peetre nous devons montrer que la norme $\|\nabla u\|_{H^{-1}} + \|u\|_{H^{-1}}$ est équivalente à la norme L^2 et que l'espace $L^2(\Omega)$ muni de cette norme est complet. On sait que l'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ est continue, i.e., pour tout $u \in L^2(\Omega)$, $\|u\|_{H^{-1}} \leq c\|u\|_{L^2}$, par ailleur $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, $i = 1,...N$ et donc par le théorème 1.1.3, on obtient $\|\nabla u\|_{H^{-1}} \leq c\|u\|_{L^2}$, pour tout $u \in L^2(\Omega)$. On en déduit donc l'inégalité

$$\|\nabla u\|_{H^{-1}} + \|u\|_{H^{-1}} \leq c\|u\|_{L^2}, \text{ pour tout } u \in L^2(\Omega).$$

L'inégalité inverse est donnée par le théorème de Nečas (théorème 1.2.3), ce qui montre l'équivalence des normes.

Pour montrer (1.2.8) il suffit de remarquer que $\mathbb{R} = ker(grad)$. Finalement , posons $G = L^2(\omega)$ et soit $M : G = L^2(\Omega) \to G = L^2(\omega)$ l'application identité. Comme ω est de mesure positif, $Mc \neq 0$ pour tout $c \neq 0$, et (1.2.9) suit de (1.2.6).

Corollaire 1.2.2. *Soit Ω un domaine borné localement lipschizien de $\mathbb{R}^n$. Si*

$$p \in L^2_{loc}(\Omega) \quad et \quad \nabla p \in H^{-1}(\Omega)$$

alors $p \in L^2(\Omega)$.

Démonstration

On pose

$$X = \{p \in L^2_{loc}(\Omega); \nabla p \in H^{-1}(\Omega)\}$$

et

$$[p]_\omega = \|p\|_{2,\omega} + \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

où ω est un ouvert borné de Ω de mesure positif tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. $[\cdot]_\omega$ définit une norme sur X et de (1.2.9) on déduit qu'elle est équivalente à la norme $\|\cdot\|_2$ de $L^2(\Omega)$. Donc $L^2(\Omega)$

muni de la norme $[\cdot]_\omega$ est un espace de Banach, il suffit alors de montrer que $L^2(\Omega)$ est dense dans X pour la norme $[\cdot]_\omega$.
Supposons d'abord que Ω est étoilé par rapport à un de ses points, y, on peut supposer sans perte de généralité que y est l'origine. Donc on a

$$\theta\overline{\Omega} \subset \Omega \ \ \forall\theta \in [0,1) \ \text{ et } \ \overline{\Omega} \subset \theta\Omega \ \ \forall\theta > 1.$$

On prend ici, $\theta > 1$ et on pose $\Omega_\theta = \theta\Omega$. Pour une fonction continue ϕ définie sur Ω on définit ϕ_θ en posant

$$\phi_\theta(x) = \phi(x/\theta) \ \ \forall x \in \Omega_\theta$$

De même pour une distribution, $u \in D'(\Omega)$ on peut définir une distribution $u_\theta \in D'(\Omega_\theta)$ par:

$$< u_\theta,\phi >= \theta^n < u,\phi_{1/\theta} > \quad \forall\phi \in D(\Omega_\theta).$$

Il est facile de vérifier

$$\nabla(u_\theta) = (1/\theta)(\nabla u)_\theta \ \ \forall u \in D'(\Omega),$$

$$\lim_{\theta\to 1} \|u_\theta - u\|_2 = 0 \ \ \forall u \in L^2(\Omega),$$

$$\lim_{\theta\to 1} \|u_\theta - u\|_{H^{-1},\Omega} = 0 \ \ \forall u \in H^{-1}(\Omega).$$

Donc, si $p \in X$ alors $p_\theta \in L^2(\Omega)$ pour tout $\theta > 1$. On obtient d'aprés ce qui précède que

$$\lim_{\theta\to 1}[p_\theta - p]_\omega = 0.$$

Par conséquent $p \in L^2(\Omega)$. Dans le cas général on utilise la propriété suivante:
Un domaine borné localement lipschitzien est réunion d'un nombre finis de domaines étoilés localement lipschitzien. voir corollaire 2.1.1 du chapitre 2.

Lemme 1.2.1. *Soit Ω un domaine borné localement lipschizien de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$ telle que $< f,\varphi >= 0$ pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\nabla \cdot \varphi = 0$. Alors il existe $p \in L^2(\Omega)$ tel que*

$$f = \nabla p.$$

Démonstration

Posons $Y = \{\nabla p : p \in L^2(\Omega)\} \subset H^{-1}(\Omega)$ et $Z = \{u \in H_0^1(\Omega) : \nabla \cdot u = 0\}$. Il faut donc montrer que si $f \in Z^\perp$, alors $f \in Y$. Par le lemme 1.2.1 Y est fermé dans $H^{-1}(\Omega)$, donc il est suffisant de montrer $Y^\perp \subset Z$, car $Z^\perp \subset Y^{\perp\perp} = \overline{Y} = Y$. $u \in Y^\perp$ si $(u,\nabla p) = 0$ pour tout $p \in L^2(\Omega)$. Or pour $p \in C_0^\infty(\Omega)$, $(u,\nabla u) = -(\nabla \cdot u,p)$, donc $u \in Y^\perp$, i.e., $\nabla \cdot u = 0$. Donc $u \in Z$.CQFD

Démonstration du théorème 1.2.4

Soit $\{\Omega_n\}$ une suite croissante de domaines localement lipschitzien telle que $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ et $\cup\Omega_n = \Omega$.

Soit $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega_n)$ tel que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Pour ϵ assez petit la régularisé $\rho_\epsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\nabla \cdot (\rho_\epsilon * u) = \rho_\epsilon * \nabla \cdot u = 0$. Donc $(f,u) = \lim_{\epsilon \to 0}(f,\rho_\epsilon * u) = 0$. En appliquant le lemme 1.2.2 sur Ω_n, $f|_{\Omega_n} = p_n$ avec $p_n \in L^2(\Omega_n)$.

$(p_{n+1} - p_n)$ est constante dans Ω_n, on peut donc supposer que $p_{n+1} = p_n$ dans Ω_n, et on obtient $f = \nabla p$ avec $p \in L^2_{loc}(\Omega)$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 1.2.2 pour conclure.

Le théorème suivant donne une caractérisation de l'espace V.

Théorème 1.2.4. *Soit Ω un domaine borné localement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$V = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}. \tag{1.2.10}$$

Démonstration

On note par $V^\bullet$ l'espace du second membre de 1.2.15. L'inclusion $V \subset V^\bullet$ est évidente. Pour montrer que $V = V^\bullet$, il suffit de montrer que chaques forme linéaire continue L définie sur $V^\bullet$, nulle sur V, est identiquement nulle. Notons que L admet une représentation du type

$$L(v) = \sum_{i=1}^{m} < l_i,v_i > , \quad l_i \in H^{-1}(\Omega). \tag{1.2.11}$$

En effet V est un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$, et toute forme linéaire continue sur V peut être prolongée en une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, le théorème 1.1.2 nous donne la décomposition 1.2.16.

Soit $\mathbf{l} = (l_1,\dots,l_m) \in H^{-1}(\Omega)$ tel que $< \mathbf{l},\mathbf{v} >= 0$, pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Par le théorème 1.2.4

$$\mathbf{l} = \nabla p, \quad p \in L^2(\Omega),$$

donc

$$< l_i,v_i >=< D_i p,v_i >= -(p,D_i v_i), \quad \text{pour tout} \quad v_i \in H_0^1(\Omega).$$

On obtient alors pour tout $\mathbf{v} \in V^\bullet$,

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{m} < l_i,v_i >= -(p,\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

i.e., L est identiquement nulle sur $V^\bullet$.CQFD

1.3 Transformations et intégrales singulières

Définition 1.3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $K(x,y) : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ et Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. Par transformation intégrale de noyau K on entend une fonction Φ définie par*

$$\Phi(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy. \tag{1.3.1}$$

Dans cette section nous présenterons quelques inégalités relatives à Φ et f, sous différentes hypothèses sur le noyau. Considérons d'abord le cas où

$$K(x,y) = K(x-y),$$

où $k(z)$ est définie dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, dans ce cas la transformation (1.4.1) n'est que le produit de convolution noté par $K * f$et on a le résultat suivant dû à Young

Théorème 1.3.1. *Supposons que*

$$K \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Si

$$f \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{q} \geq 1 - \frac{1}{s},$$

alors

$$K * f \in L^r(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1,$$

et on a l'inégalité suivante

$$\|K * f\|_r \leq \|K\|_p \|f\|_q. \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.2. *Dans le cas où le noyau K est de la forme*

$$K(x,y) = \frac{k(x,y)}{|y|^\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad y \in \Omega, \tag{1.3.3}$$

où $k(x,y)$ est une fonction régulière donnée. Alors si, $0 < \lambda < n$ et $k(x,y) \equiv 1$ le noyau est dit faiblement singulier, et l'intégrale (1.4.1) est dite faiblement singulière. Si $\lambda = n$ avec $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et si $k(x,y)$ vérifie les conditions suivantes

(i) *Pour tout x,y et tout $\alpha > 0$*

$$k(x,y) = k(x,\alpha y) \tag{1.3.4}$$

(ii) *Pout tout $x \in \Omega$, $k(x,y)$ est intégrable sur la sphère $|y| = 1$ et*

$$\int_{|y|=1} k(x,y) = 0, \tag{1.3.5}$$

(iii) *Il existe un nombre $k > 0$ et $C > 0$ tel que*

$$\int_{|y|=1} |k(x,y)|^q dy \leq C, \quad \textit{uniformément par rapport à } x. \tag{1.3.6}$$

nous dirons que le noyau est singulier et l'intégrale (1,5) est dite aussi singuliere.

Théorème 1.3.2. *Supposons que le domaine Ω est borné, K est faiblement singulier, et $f \in L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$.Supposons que $\lambda = n(1 - 1/q)$, alors la fonction Φ définie dans (1.4.1) appartient à $L^r(\Omega)$ quelque soit $r \in [1,\infty)$, et on a l'estimation suivante*

$$\|\Phi\|_r \leq c\|f\|_q. \tag{1.3.7}$$

Démonstration

Posons

$$\tilde{K}(x-y) = \begin{cases} |x-y|^{-\lambda} & \text{si } x,y \in \Omega \\ 0 & \text{si } x,y \not\in \Omega. \end{cases}$$

On a alors

$$\Phi(x) = \int_\Omega |x-y|^{-\lambda} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}(x-y)f(y)dy,$$

Il est clair que

$$\tilde{K} \in L^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{pout tout } s < n/\lambda, \tag{1.3.8}$$

Donc on déduit du théorème de Young 1.4.1 que si $f \in L^q(\Omega)$ alors

$$\phi \in L^q(\Omega), \ \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{q} - 1 \tag{1.3.9}$$

et on a l'inégalité suivante

$$\|\Phi\|_r \leq C_2\|f\|_q$$

et comme $\lambda = n(1 - 1/q)$ alors $\tilde{K} \in K^s(\Omega)$ pour tout s vérifiant $\frac{1}{s} > \frac{q-1}{q}$, on déduit alors que

$$\Phi \in L^r(\Omega), \ \text{pout tout } r \in [1,\infty).$$

Lemme 1.3.1. *Soit $M(x,y)$ une fonction définie sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, différentiable en la variable y et homogène de degré $1-n$ par rapport à y, i.e.*

$$M(x,\alpha y) = \alpha^{1-n} M(x,y), \ \ \alpha > 0.$$

supposons que

$$\int_{|y|=1} \Big|\frac{\partial M(x,y)}{\partial y_i}\Big|^q dy \leq C \ \ \textit{uniformément en} \ \ x.$$

Alors $M_i(x,y) \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y_i}$ est un noyau singulier.

Démonstration

Il suffit de montrer que $k(x,y) = M_i(x,y)|y|^n$ vérifie les propriétés (1.4.4)-(1.4.6). Á priori, les conditions (1.4.4)-(1.4.5) sont trivialement vérifiées, de plus pout tout $x \in \Omega$ on obtient par une intégration par parties

$$\int_{r_1 \leq |y| \leq r_2} M_i(x,y)dy = \int_{|\eta|=r_2} M(x,\eta)(\eta_i/r_2)d\sigma_\eta - \int_{|\eta|=r_1} M(x,\eta)(\eta_i/r_1)d\sigma_\eta.$$

En faisant le changement de variable $y = \frac{\eta}{r_2}$ (resp. $y = \frac{\eta}{r_1}$) dans la première intégrale du second membre de la précédente égalité (resp. dans la deuxième) on obtient

$$\int_{r_1 \leq |y| \leq r_2} M_i(x,y)dy = \int_{|\eta|=1} M(x,r_2\eta)\eta_i r_2^{n-1} d\sigma_\eta - \int_{|\eta|=r_1} M(x,r_1\eta)\eta_i r_1^{n-1} d\sigma_\eta.$$

et donc par l'hypothèse d'homogénéité on obtient

$$\int_{r_1 \leq |y| \leq r_2} M_i(x,y)dy = 0, \ \text{ pout tout } \ 0 < r_1 < r_2,$$

on a alors

$$\int_{1 \leq |y| \leq 1+1/m} \frac{k_i(x,y)}{|y|^n} dy = 0, \ \text{ pout tout } \ m \in \mathbb{N}^*$$

et donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\int_{|y|=1} k_i(x,y)dy = 0,$$

on a donc vérifié la propriété (1.4.6), ce qui termine la démonstration.

Le théorème suivant est dû à Calderon-Zygmund, voir par exemple [18].

Théorème 1.3.3 (Théorème de Calderon-Zygmund). *Supposons que $K(x,y)$ est un noyau singulier. Alors, si*

$$f \in L^q(\mathbb{R}^n), 1 < q < \infty,$$

la fonction suivante est bien définie

$$\Phi(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y| \geq \epsilon} K(x,y) f(x-y) dy \tag{1.3.10}$$

pour presque tout $x \in \Omega$ *et appartient à* $L^q(\mathbb{R}^n)$. *De plus, on l'inégalité suivante*

$$\|\Phi\|_q \leq c\|f\|_q. \tag{1.3.11}$$

La constante c *est de la forme*

$$c(q,n)\|k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \partial B_1)}. \tag{1.3.12}$$

le théorème suivant est une conséquence importante du théorème de Calderon-Zygmund dû à Agmon, Douglis, Nirenberg ([6] théorème 3.3).

Théorème 1.3.4. *Considérons le noyau suivant*

$$K(x',x_n) = \frac{\tilde{\omega}(x'/|x|,x_n/|x|)}{|x|^{n-1}}, \quad x' = (x_1,...,x_{n-1}).$$

Supposons que $D_i K$, $i = 1,...,n$, *et* $D_n^2 K$ *sont continues dans* $\mathbb{R}^n_+$ *et bornées dans l'hémisphère* $\mathbb{R}^n_+ \cap S_n$ *par une constante positive* κ. *Supposons de plus que*

$$\int_{|x'|=1} \tilde{\omega}(x',0) dx' = 0. \tag{1.3.13}$$

Posons $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ *et soit* Φ *est fonction telle que*

$$\Phi \in L^q(\Sigma), \quad et \quad [\Phi]_{1-1/q,q} < \infty,$$

alors la transformation intégrale

$$u(x',x_n) = \int_\Sigma K(x',x_n)\Phi(y')dy' \tag{1.3.14}$$

appartient à $L^q(\mathbb{R}^n_+)$ *et on a l'inégalité suivante:*

$$|u|_{1,q} \leq c\kappa[\Phi]_{1-1/q,q}, \tag{1.3.15}$$

avec $c = (n,q)$.

CHAPITRE 2

Résolution de quelques problèmes aux limites

2.1 Un problème lié à l'opérateur de divergence

Formulation du problème

Le problème consiste, essentiellement, à représenter une fonction scalaire comme la divergence d'une fonction vectorielle dans un espace de fonctions adéquat et déterminer les estimations correspondantes, ces estimations jouent un rôle trés important dans l'estimation de la densité (chapitre 3), les principales références sont [3] [9].
On considère un domaine Ω borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Voici l'enoncé du problème: soit

$$f \in L^q(\Omega)$$

tel que

$$\int_\Omega f = 0 \tag{2.1.1}$$

trouver une fonction $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} \in W_0^{1,q}(\Omega) \\ &\nabla.\mathbf{v} = f \\ &\|\mathbf{v}\|_{1,q} \leq c\|f\|_q \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Ou c est une constante qui dépend seulement de n, q, et Ω.
La démonstration donnée ici, suit l'approche de Bogovskii (1979, 1980), basée sur une formule de représentation explicite de la solution dans le cas ou le domaine est de forme particulière, en suite étendre pour des domaines plus généraux. Nous allons d'abords résoudre le problème pour des domaines étoilés.

Définition 2.1.1. *On dit qu'un domaine Ω est étoilé par rapport à un point $x_0 \in \Omega$ si il existe une fonction positive $h : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\Omega = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n ; |x - x_0| < h(\frac{x - x_0}{|x - x_0|}) \Big\}.$$

On dit que Ω est étoilé par rapport à une boule B si il est étoilé par rapport à chaque point de B.

Lemme 2.1.1. *Soit Ω un domaine localement lipschitzien. Alors il existe m domaines $G_1,...,G_m$ et m boules ouvertes $B_1,...,B_m$ tel que*

(i) $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^m G_i$;

(ii) *Les domaines $\Omega_i = \Omega \cap G_i, i = 1,...,m$, sont localement lipschitziens et étoilés par rapport à B_i avec $\overline{B_i} \subset \Omega_i$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \partial\Omega$. Par hypothèse, il existe une boule $B_r(x_0)$ et une fonction $\zeta = \zeta(x')$, $x' = (x_1,...,x_{n-1}) \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$,où D est domaine, tel que

$$|\zeta(\xi') - \zeta(\eta')| < \kappa|\xi' - \eta'|, \;\; \xi',\eta' \in D,$$

pour un certain $\kappa > 0$, les points $x = (x',x_n) \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ satisfont

$$x_n = \zeta(x'), \;\; x' \in D,$$

et les points $x \in \Omega \cap B_r(x_0)$ satisfont

$$x_n < \zeta(x'), \;\; x' \in D.$$

Nous prendrons x_0 comme origine des coordonnées. Notons par $y_0 \equiv (0,...,0,y_n)$ les points de Ω qui sont intersection de l'axe x_n avec $B_r(x_0)$ et considérons le cône $\Gamma(y_0,\alpha)$ de vertexe y_0, axe x_n,et d'angle de révolution $\alpha < \frac{\pi}{2}$. il est facile de voir que, pour α suffisamment petit, pour tout rayon ρ appartenant à $\Gamma(y_0,\alpha)$ et commençant par le point y_0, coupe $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ en un seul point. En effet, supposons que ρ coupe $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ en deux points $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ et notons par $\alpha' < \alpha$ l'angle formé par ρ et l'axe des x_n. Quite à faire un changement de système de coordonnées en effectuant une rotation autour de l'axe des x_n on peut supposer sans perte de généralité

$$z^{(1)} = (z_1^{(1)},0,...,0,\zeta(z_1^{(1)},0,...,0)),\;\; z_1^{(1)} > 0$$

$$z^{(2)} = (z_1^{(2)},0,...,0,\zeta(z_1^{(2)},0,...,0)),\;\; z_1^{(2)} > 0$$

et donc on aura

$$\tan\alpha' = \frac{z_1^{(1)}}{\zeta(z_1^{(1)},0,...,0) - y_n}$$

$$\tan\alpha' == \frac{z_1^{(2)}}{\zeta(z_1^{(2)},0,...,0) - y_n}$$

ce qui implique

$$\frac{|\zeta(z_1^{(1)},0,...,0) - \zeta(z_1^{(2)},0,...,0)|}{|z_1^{(1)} - z_1^{(2)}|} = \frac{1}{\tan\alpha'} \geq \frac{1}{\tan\alpha}.$$

donc

$$\tan\alpha \leq \frac{1}{2\kappa},$$

ce qui constitue une contradiction, i.e., ρ coupe $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ en un seul point. Notons à présent par $\sigma = \sigma(z)$ l'intersection de $\Gamma(y_0,\alpha/2)$ avec le plan orthogonale à l'axe des x_n au point $z = (0,...,z_n)$ avec $z_n > y_n$, et posons

$$R = R(z) \equiv dist(\partial\sigma,z).$$

En prenant z suffisamment proche de y_0 (par exemple, $z = \overline{z}$), $\sigma(\overline{z})$ serai entièrement contenu dans Ω et, de plus, chaque rayon commençons par un point de $\sigma(\overline{z})$ et contenu dans $\Gamma(y_0,\alpha/2)$ coupera l'axe x_n avec un angle plus petit que α et donc, par ce qui a été démontré plus haut, coupera $\partial\Omega \cap B_r(x_0)$ à un seul point. Soit C un cylindre dont l'axe coïncide avec l'axe des x_n et tel que

$$C \cap \partial\Omega = \Gamma(y_0,\alpha/2) \cap \partial\Omega$$

et donc, en posant

$$G = C \cap B_r(x_0),$$

on a, G est localement lipschitzien et $G \cap \Omega$ est étoilé par rapport à chaque points de la boule $B_{R(\overline{z})}(\overline{z})$. Comme $x_0 \in \partial\Omega$ est arbitraire, on peut recouvrir $\partial\Omega$ par des domaines du type de G, et comme $\partial\Omega$ est compact on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $\{G_1,...,G_m\}$ satifaisant à toutes les conditions du lemme, CQFD.

Corollaire 2.1.1. *Soit Ω un domaine borné et locallement lipschtizien, alors il existe des domaines $\{\Omega_1,...,\Omega_m\}$ et des boules ouvertes $\{B_1,...,B_m\}$ avec $\overline{B_i} \subset \Omega_i$, pour tout $i = 1,...m$, tels que*

(i) $\Omega = \cup_{i=1}^{m} \Omega_i$;

(ii) Ω_i *est étoilé par rapport à B_i, $i = 1,...,m$.*

Démonstration

Par le lemme 2.1.1 il existe m domaines localement lipschitzien $G_1,...,G_m$ tels que $\Omega_i = \Omega \cap G_i$ est étoilé par rapport à une boule B_i avec $\overline{B_i} \subset \Omega_i$ et vérifiant la propriété (i). Soit G_0 un domaine vérifiant $\overline{G_0} \subset \Omega$ tel que $\{G_0,G_1,...,G_m\}$ forme un recouvrement ouvert de $\overline{\Omega}$. Comme Ω est borné, on peut trouver ν boule ouvertes $G_{m+1},...,G_{m+\nu}$ tel que

$$\overline{G_0} \subset \bigcup_{i=m+1}^{m+\nu} G_i$$

$$\overline{\left\{ \bigcup_{i=m+1}^{m+\nu} G_i \right\}} \subset \Omega.$$

Il s'en suit donc que

$$\mathcal{G} = \{G_1,...,G_m,G_{m+1},...,G_{m+\nu}\}$$

est un recouvrement de Ω avec $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=m+1}^{m+\nu} G_i$. Posant

$$\Omega_i = \Omega \cap G_i, \quad i = 1,...,m+\nu$$

il est clair que Ω_i, vérifie les propriétés (i)-(ii).

2.1.1 Existence dans des domaines étoilés

Lemme 2.1.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, un domaine étoilé par rapport à une boule $B_R(x_0) \subset \Omega$. Alors pour toute fonctions $f \in L^q(\Omega)$ satisfaisant la condition (2.1.1), le problème (2.1.2) admet au moins une solution $\mathbf{v}$. De plus, la constante c admet l'estimation suivante*

$$c \leq c_0[\delta(\Omega)/R]^n(1 + \delta(\Omega)/R), \tag{2.1.3}$$

avec c_0 dépendant seulement de n et q. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ alors $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$. Si $f \in W_0^{m,q}(\Omega)$, alors $\mathbf{v} \in W_0^{m+1,q}(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{m,q} \leq c\|f\|_{m,q} \tag{2.1.4}$$

où c satisfait à (2.1.3).

Démonstration

Supposant d'abord que $f \in C_0^\infty(\Omega)$. On sait que l'opérateur de divergence est invariant par translation, il suffit donc de démontrer le lemme pour un domaine Ω étoilé par rapport à la boule centrée à l'origine de rayon égal à 1 qu'on notera par B.

Soit ω une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

(i) $supp(\omega) \in B$,

(ii) $\int_B \omega = 1$

On va montrer que le fonction vectorielle

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) &= \int_\Omega F(y)\Big[\frac{x-y}{|x-y|^n}\int_{|x-y|}^\infty \omega\Big(y+s\frac{x-y}{|x-y|}\Big)s^{n-1}ds\Big]dy \\ &\equiv \int_\Omega F(y)\mathbf{N}(x,y)dy \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

résout le problème (2.1.2). En faisant le changement de variable $r = \frac{s}{|x-y|}$ dans l'intégrale (2.1.5) on obtient la forme equivalente suivante de $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}(x) = \int_\Omega F(y)(x-y)\Big[\int_1^\infty \omega(y+r(x-y))r^{n-1}dr\Big]dy \tag{2.1.6}$$

Et un autre changement de variable nous donne

$$\mathbf{v}(x) = \int_\Omega F(y)\frac{x-y}{|x-y|^n}\Big[\int_0^\infty \omega\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y|+r)^{n-1}dr\Big]dy \tag{2.1.7}$$

(Pour obtenir (2.1.7), on effectue le changement de variable $s = |x-y| + r$ dans (2.1.5))

Montrons que $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Faisant le changement de variable $z = x - y$ dans (2.1.6), on obtient

$$\mathbf{v}(x) = \int_\Omega \Big[f(x-z)z\int_1^\infty \omega(x-z+rz)r^{n-1}dr\Big]dz \tag{2.1.8}$$

Il est clair que $\mathbf{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pour le montrer, il suffit d'appliquer sur (2.1.8) le théorème de différentiation des intégrales dépendants d'un paramètre.

Posant

$$E = \{z \in \Omega : z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2,\ \ z_1 \in supp(f),\ \ z_2 \in B,\ \ \lambda \in [0,1]\}.$$

Il est clair que E est fermé, et si $z = \lambda(z_1 - z_2) + z_2 \in E$ alors on a pour $\overline{z} \in B$, et comme Ω est étoilé par rapport à chaque point de B,

$$|z - \overline{z}| = |\lambda(z_1 - z_2) + z_2 - \overline{z}| \leq h\Big(\frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|}\Big) + 2 \leq \sup_{x \in \partial B} h(x) + 2,$$

et donc E est borné, on en déduit que E est un sous ensemble compact de Ω. Fixons $x \in \Omega - E$. On a pout tout $y \in supp(f)$ et pour tout $r \geq 1$,

$$y + r(x - y) \not\in \overline{B}$$

par conséquent, $\omega(y + r(x - y)) = 0$, i.e., par (2.1.6), $\mathbf{v}(x) = 0$. On conclut donc que

$$\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.1.9}$$

Comme f est à support compact dans Ω on peut quand c'est nécessaire, remplacer l'intégration sur Ω par une intégration sur $\mathbb{R}^n$.

On a en dérivant (2.1.5)

$$D_j v_i(x) = \int_\Omega F(y) D_j N_i(x,y) dy.$$

Soit x un point de Ω et $B_\epsilon(x)$ une boule appartenant à Ω, en divisant $\mathbb{R}^n$ en $B_\epsilon(x)$ et $B_\epsilon(x)^c$ et en intégrant par parties dans l'intégrale sur $B_\epsilon(x)$ on obtient

$$D_j v_i(x) = \int_{B_\epsilon(x)} F(y) N_i(x,y) dy + \int_{B_\epsilon^c(x)} F(y) D_j N_i(x,y) dy + \int_{\partial B_\epsilon(x)} F(y) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} N_i(x,y) d\sigma_y.$$

Il est clair que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{B_\epsilon(x)} F(y) N_i(x,y) dy = 0,$$

on en déduit donc

$$D_j v_i(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\int_{B_\epsilon^c(x)} F(y) D_j N_i(x,y) dy + \int_{\partial B_\epsilon(x)} F(y) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} N_i(x,y) d\sigma_y \Big). \tag{2.1.10}$$

On a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|=\epsilon} F(y) \frac{x_j - y_j}{|x - y|} N_i(x,y) d\sigma_y = F(x) \int_\Omega \frac{(x_j - y_j)(x_i - y_i)}{|x - y|^2} \omega(y) dy. \tag{2.1.11}$$

En effet, notons par I_ϵ l'intégrale de gauche de (2.1.11). En utilisant la formule suivante valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et intégrable

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \Big(\int_{\partial B(x_0, r)} f d\sigma_x \Big) dr,$$

on obtient

$$\int_\Omega \frac{(x_j-y_j)(x_i-y_i)}{|x-y|^2}\omega(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(x_j-y_j)(x_i-y_i)}{|x-y|^2}\omega(y)dy$$
$$= \int_0^\infty \Big(\int_{|x-y|=s} \frac{(x_j-y_j)(x_i-y_i)}{|x-y|^2}\omega(y)d\sigma_y\Big) ds,$$

en faisant le changement de variable $z=\frac{x-y}{s}$ et en appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\int_\Omega \frac{(x_j-y_j)(x_i-y_i)}{|x-y|^2}\omega(y)dy = \int_{|z|=1}\Big[z_iz_i\int_0^\infty \omega(x+rz)r^{n-1}dr\Big]d\sigma_z.$$

D'autre part, on a

$$I_\epsilon(x) = \int_{|x-y|=\epsilon} F(y)\frac{(x_j-y_j)(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+1}}\Big[\int_\epsilon^\infty \omega\Big(y+s\frac{x-y}{|x-y|}\Big)s^{n-1}ds\Big]d\sigma_y,$$

en faisant le changement de variable $z=\frac{x-y}{\epsilon}$, on obtient

$$I_\epsilon(x) = \int_{|z|=1}\Big[z_iz_jF(x-\epsilon z)\int_\epsilon^\infty \omega(x+(s-\epsilon)z)s^{n-1}dr\Big]d\sigma_z,$$
$$= \int_{|z|=1}\Big[z_iz_jF(x-\epsilon z)\int_0^\infty \omega(x+rz)(r+\epsilon)^{n-1}dr\Big]d\sigma_z.$$

Montrons à présent (2.1.11), on a d'aprés ce qui précéde

$$\Delta_\epsilon(x) \equiv \Big|I_\epsilon(x) - F(x)\int_\Omega \frac{(x_j-y_j)(x_i-y_i)}{|x-y|^2}\omega(y)dy\Big|$$
$$= \Big|\int_{|z|=1}\Big[z_iz_jF(x-\epsilon z)\int_0^\infty \omega(x+rz)(r+\epsilon)^{n-1}dr\Big]d\sigma_z$$
$$- F(x)\int_{|z|=1}\Big[z_iz_j\int_0^\infty \omega(x+rz)r^{n-1}dr\Big]d\sigma z\Big|$$

Comme $(r+\epsilon)^{n-1} = r^{n-1}+o(1)$ au voisinage de ϵ, on obtient donc, pour $\epsilon\to 0$

$$\Delta_\epsilon(x) \le \int_{|z|=1} |F(x)-F(x-\epsilon z)|d\sigma_z + o(1),$$

ce qui montre (2.1.11). Nous allons maintenant montrer que $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{B^c_\epsilon(x)} F(y)D_jN_i(x,y)dy$ existe.

On a, pour y fixé dans (2.1.6)

$$\begin{aligned} D_jN_i(x,y) =& D_j(x_i-y_i)\Big[\int_1^\infty \omega(y+r(x-y))r^{n-1}dr\Big] \\ =& \delta_{ij}\int_1^\infty \omega(y+r(x-y))r^{n-1}dr \\ &+ (x_i-y_i)\int_1^\infty D_j\omega(y+r(x-y))r^{n-1}dr \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

en effectuant le changement de variable $s = |x-y|(r-1)$ on obtient

$$\begin{aligned} D_jN_i(x,y) =&\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^n}\int_0^\infty \omega\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y|+r)^{n-1}dr \\ &+\frac{x_i-y_i}{|x-y|^{n+1}}\int_0^\infty D_j\omega\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y|+r)^{n}dr \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

En developpant les deux expressions $(|x-y|+r)^n$ et $(|x-y|+r)^{n-1}$ en utilisant la formule du binôme, on obtient la décomposition suivante de $D_jN_i(x,y)$

$$D_jN_i(x,y) = K_{ij}(x,x-y) + G_{ij}(x,y), \tag{2.1.14}$$

ou

$$K_{ij}(x,x-y) = \frac{k_{ij}(x,x-y)}{|x-y|^n} \tag{2.1.15}$$

avec

$$k_{ij}(x,x-y) = \delta_{ij}\int_0^\infty \omega\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)r^{n-1}dr + \frac{x_i-y_i}{|x-y|^{n+1}}\int_0^\infty D_j\omega\Big(x+r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)r^{n}dr$$

et on a l'estimation suivante pour G_{ij}

$$|G_{ij}(x,y)| \le c\frac{\delta(\Omega)^{n-1}}{|x-y|^{n-1}}, x,y\in\Omega, \tag{2.1.16}$$

Où $c = c(\omega,n)$. Il est clair que, pout tout i et j, $K_{ij}(x,z)$ est un noyau singulier. En effet, $k_{ij}(x,z)$ satisfait à toutes les conditions (1.3.4)-(1.3.6), A priori, les conditions (1.3.4)et (1.3.5) sont trivialement vérifiées. De plus,

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} k_{ij}(x,z)dz =&\delta_{ij}\int_{|z|=1}\Big[\int_0^\infty \omega(x+rz)r^{n-1}dr\Big]dz \\ &+\int_{|z|=1} z_i\Big[\int_0^\infty D_j\omega(x+rz)r^n dr\Big]dz \\ =&\int_{\mathbb{R}}[\delta_{ij}\omega(x+y)+y_iD_j\omega(x+y)]dy = 0 \end{aligned}$$

et donc la condition (1.3.6) est aussi vérifiée, iL suffit maintenant d'utiliser le théorème de Calderon-Zygmund pour conclure.

On peut à présent réecrire (2.1.9) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} D_jv_i(x) &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{B^c_\epsilon(x)} K_{ij}(x,x-y)F(y)dy + \int_\Omega G_{ij}(x,y)f(y)dy \\ &+ F(x)\int_\Omega \frac{(x_j-y_j)(x_i-y_i)}{|x-y|^2}\omega(y)dy \\ &\equiv F_1(x)+F_2(x)+F_3(x). \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

On va maintenant montrer que (2.1.5) est une solution au problème (2.1.2). Remarquons d'abord

$$\begin{aligned} H_{ij}(x) \equiv & \int_\Omega \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}\omega(y)dy \\ = & \int_\Omega \frac{z_i z_j}{|z|^2}\omega(x+z)dz, \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} H_{ii}(x) = \int_\Omega \omega(x+z)dz = 1. \tag{2.1.18}$$

De (2.1.10)-(2.1.12), (2.1.18) et de la propriété (i) de ω on a

$$\begin{aligned} \nabla.\mathbf{v}(x) =& V.p. \int_\Omega F(y)\Big(n\int_1^\infty \omega(y+r(x-y))r^{n-1}dr \\ & + \sum_{i=1}^{n}\int_1^\infty (x_i-y_i)D_i\omega(y+r(x-y))r^n\Big)dy \\ & + \sum_{i=1}^{n} F(x)\int_\Omega \frac{(x_i-y_i)(x_i-y_i)}{|x-y|^2}\omega(y)dy \\ =& V.p. \int_\Omega F(y)\Big[n\int_1^\infty \omega(y+r(x-y))r^{n-1}dr \\ & + \int_1^\infty r^n\Big(\frac{d}{dr}\omega(y+r(x-y))\Big)dr\Big]dy + F(x) \\ =& V.p. \int_\Omega F(y)\Big[\int_0^\infty \frac{d}{dr}\big(\omega(y+r(x-y))r^n\big)dr\Big]dy \\ & + F(x) \\ =& -\omega(x)\int_\Omega F(x)dx + F(x) \end{aligned}$$

où le signe V.p. désigne la valeur principale de Cauchy, et comme la valeur de l'intégrale de F sur Ω est égale à 0, alors

$$\nabla.\mathbf{v}(\mathbf{x}) = F(x), x \in \Omega, \tag{2.1.19}$$

Il reste à vérifier que $\mathbf{v}$ satisfait l'estimation de (2.1.2). Pour $1 < q < \infty$, par le théorème de Calderon-Zygmund on obtient

$$\|F_1\|_q \le c_1\|F\|_q,$$

l'inégalité de Young et (2.1.13) nous donnent

$$\|F_2\|_q \le c_2\sigma(\Omega)^n\|F\|_q.$$

et finalement, on a l'estimaton suivante de F_3

$$\|F_3\|_q \leq c_2\sigma(\Omega)^n\|F\|_q.$$

Les constantes c_2 et c_3 dépendent de ω,n,q et ne dépendent pas de Ω, pour la constante c_1, elle est majorée par (1.3.12) donnée dans le théorème 1.3.3 de Calderon-Zygmund, on a

$$|k_{ij}(x,z)| \leq \int_0^\infty |\omega(x+rz)|r^{n-1}dr + \int_0^\infty |D_j\omega(x+rz)|r^{n-1}dr$$

D'autre part pour $|z| = 1$, si $r \geq \|x-z\|$, alors $\|x+rz\| \geq 1$ et donc $\omega(x+rz) = 0$, en effet

$$\|x+rz\| = \|x-z+(1+r)z\| \geq (1+r) - \|x-z\| \geq 1$$

par conséquent

$$c_1 \leq \sup_{x\in\Omega,|z|=1} |k_{ij}(x,z)| \leq c_4\delta(\Omega)^n(1+\delta(\Omega)),$$

où $c_4 = c_4(n,q,\omega)$. En combinant les inégalité précédente on obtient

$$|\mathbf{v}|_{1,q} \leq c_q\delta(\Omega)^n(1+\delta(\Omega))\|F\|_q \tag{2.1.20}$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré sur (2.1.20) on retrouve l'estimation (2.1.2$_3$).
Pour compléter la démonstration du lemme il nous reste à montrer la solvabilité pour $f \in L^q(\Omega)$. Soit $f \in L^q(\Omega)$ vérifiant la condition (2.1.1) et $\{f_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ une suite de fonctions convergeant vers f dans $L^q(\Omega)$. alors, la suite de fonctions

$$g_m = f_m - \varphi\int_\Omega f_m, \;\; m \in \mathbb{N}$$

avec

$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega \varphi = 1$$

converge aussi vers f dans $L^q(\Omega)$, et on a $\int_\Omega g_m = 0, \forall m \in \mathbb{N}$. par ce qui précède, pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe une solution $\mathbf{v}_m \in C_0^\infty(\Omega)$.La suite $\mathbf{v}_m$ vérifie l'estimation (2.1.2$_3$), on peut donc en extraire une sous suite qui converge faiblement dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ vers une fonction $\mathbf{v} \in W_0^{1,q}(\Omega)$. il est clair que $\mathbf{v}$ est solution du problème.

2.1.2 Existence dans des domaines plus généraux

Le but de cette sous-section est d'étendre le résultat précédent pour des domaines plus généraux.

Lemme 2.1.3. *soit* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *tel que*

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k, \quad N \geq 1,$$

Ou chaques Ω_k *est un domaine étoilé par rapport à une boule ouverte* B_k *tel que* $\overline{B}_k \subset \Omega_k$, *et soit* $f \in L^q(\Omega)$ *une fonction satisfaisant (2,1). Alors il existe* N *fonctions* f_k *tel que pout tout* $k = 1,...,N$*:*

(i) $f_k \in L^q(\Omega)$

(ii) $supp(f_k) \subset \overline{\Omega}_k$

(iii) $\int_{\Omega_k} f_k = 0$

(iv) $\|f_k\|_q \leq C\|f\|_q$

Démonstration

Le cas $N = 1$ est trivial. Supposons donc $N \geq 2$, posant

$$D_i = \bigcup_{s=i+1}^{N} \Omega_s, \quad \text{et} \quad F_i = \Omega_i \cap D_i, \quad i = 1,...,N-1.$$

Comme Ω est connexe, on déduit que $F_i \neq \varnothing$ et donc $|F_i| > 0$. Posant

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{\chi_1(x)}{|F_1|} \int_{\Omega_1} f & \text{si } x \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } x \in D_1 - \Omega_1 \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} [1-\chi_1]f(x) - \frac{\chi_1(x)}{|F_1|} \int_{D_1 - \Omega_1} f & \text{si } x \in D_1 \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_1 - D_1 \end{cases}$$

Ou χ_1 est la fonction caractéristique de l'ensemble F_1. on a les propriétés suivantes

$$f = f_1 + g_1$$

$$\int_{\Omega_1} f_1 = \int_{D_1} g_1 = 0$$

$$supp(f_1) \subset \overline{\Omega}_1 \quad , \quad supp(g_1) \subset \overline{D}_1$$

$$f_1 \in L^q(\Omega_1) \quad , \quad g_1 \in L^q(D_1).$$

Pour montrer la première assertion il suffit de remarquer que

$$\Omega = (D_1 - \Omega_1) \cup (\Omega_1 - D_1) \cup (\Omega_1 \cap D_1)$$

les autres sont évidentes. Pour les mêmes raisons, on peut décomposer g_1 comme suit

$$g_1 = f_2 + g_2$$

ou f_2 et g_2 sont des fonctions de $L^q(\Omega_2)$ et $L^q(D_2)$ respectivement, et vérifiant

$$\int_{\Omega_2} f_2 = \int_{D_2} g_2 = 0$$

$$supp(f_2) \subset \overline{\Omega}_2 \quad , \quad supp(g_2) \subset \overline{D}_2$$

On obtient ainsi par cette procédure le schémas d'itération suivant pour déterminer des fonctions f_k. On pose $g_0 = f$ et pout $k = 1,...,N-1$

$$g_k(x) = \begin{cases} [1-\chi_k]g_{k-1}(x) - \frac{\chi_k(x)}{|F_k|}\int_{D_k-\Omega_k} f & \text{si } x \in D_k \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_k - D_k \end{cases} \tag{2.1.21}$$

avec $F_k = \Omega_k \cap D_k$ et χ_k est la fonction caractéristique de F_k, les fonctions f_k sont données par

$$f_k(x) = \begin{cases} g_{k-1}(x) - \frac{\chi_k(x)}{|F_k|}\int_{\Omega_k} g_{k-1} & \text{si } x \in \Omega_k \\ 0 & \text{si } x \in D_k - \Omega_k \end{cases} \tag{2.1.22}$$

$f_N(x) = g_{N-1}(x)$

Les relations (2.1.21) et (2.1.22) définissent complètement les fonctions f_k et les propriétés (i)-(iv) sont vérifiées. Il reste à montrer l'estimation (v), en utilisant l'inégalité de Hölder dans (2.1.22) on obtient pour $k = 1,...,N$

$$\|f_k\|_{q,\Omega_k} \leq \|g_{k-1}\|_{q,\Omega}(1+|F_k|^{1/q-1}|\Omega_k|^{1-1/q}) \times (1+|F_{k-1}|^{1/q-1}|D_{k-1}-\Omega_{k-1}|^{1-1/q}).$$

En estimant $\|g_{k-1}\|_{q,\Omega}$ en terme de $\|g_{k-2}\|_{q,\Omega}$ et ainsi de suite on obtient (v).

Les lemmes (2.1.2) et (2.1.3) nous permettent de démontrer le théorème suivant du à Bogovskij.

Théorème 2.1.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tel que*

$$\Omega = \cup_{k=1}^{N} \Omega_k, \quad N \geq 1,$$

ou chaque Ω_k est étoilé par rapport à une boule ouverte B_k tel que $\overline{B}_k \subset \Omega_k$. Soit $f \in L^q(\Omega)$ vérifiant (2.1.1), alors il existe au moins un solution $\mathbf{v}$ de (2.1.2). Si f est à support compacte dans Ω, alors $\mathbf{v}$ l'est aussi.

Démonstration

On décompose f comme dans le lemme précédent, on construit dans chaque domaine Ω_k une solution $\mathbf{v}_k$ de (2.1.2) qui correspond à la fonction $f_k, k = 1,...,N$. Nous étendrons les fonctions $\mathbf{v}_k$ par 0 en dehors de Ω_k, il est clair que la fonction

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{v}_k$$

appartient à $W_0^{1,q}(\Omega)$ et est une solution de $(2,2_1)$. De plus on a du lemme 2.1.2 et dla propriété (v) du lemme 2.1.3, on a

$$\|\mathbf{v}\|_{1,q} \leq \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{v}_k\|_{1,q} \leq c \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_q \leq cC\|f\|_q \tag{2.1.23}$$

ce qui montre la première partie du théorème. Montrons la seconde partie, on définit pour tout Ω_k le domaine suivant

$$\Omega_k^{(\rho)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \Omega, x = \rho y\},$$

où $\rho \in (1/2,1)$. On a

$$\overline{\Omega_k^{(\rho)}} \subset \Omega_k, \quad \text{pout tout} \;\; k = 1,...,N,$$

et si Ω_k est étoilé par rapport à la boule $B_R(x_{0k})$, alors $\Omega_k^{(\rho)}$ est étoilé par rapport à la boule $B_{\rho R}(x_{0k})$. Posant

$$\Omega^{(\rho)} = \cup_{k=1}^{N} \Omega_k^{(\rho)}$$

et soit par $\rho_1 \in (1/2,1)$ un nombre tel que

$$\Omega^{(\rho)} \;\; \text{est connexe}$$

$$supp(f) \subset \Omega^{(\rho)},$$

pour tout $\rho \in [\rho_1,1)$. En vertue du lemme 2.1.3, on peut décomposer f en une somme de N fonctions f_k^ρ vérifiant les propriétés suivantes:

$$f_k^\rho \in L^q(\Omega_k^{(\rho)}), \quad supp(f_k^\rho) \subset \overline{\Omega_k^{(\rho)}}, \quad \int_{\Omega_k^{(\rho)}} f_k^\rho = 0, \quad k = 1,...,N.$$

De plus, en tenant compte de

$$|\Omega_k^{(\rho)}| = \rho^n |\Omega_k|, \;\; |\Omega_k^{(\rho)} \cap \Omega_{k'}^{(\rho)}| = \rho^n |\Omega_k \cap \Omega_{k'}|,$$

on obtient de la propriété (v) du lemme 2.1.3

$$\|f_k^\rho\|_q \leq C\|f\|_q \tag{2.1.24}$$

où C est une constante dépendant de Ω_k mais ne dépend pas de $\rho \in [\rho_1,1)$. On résout le problème (2.1.1), (2.1.2) dans chaque $\Omega_k^{(\rho)}$ et on note $\mathbf{v}_k^{(\rho)} \in W_0^{1,q}(\Omega_k^{(\rho)})$ la solution correspondante. Prolongeant $\mathbf{v}_k^{(\rho)}$ en dehors de $\Omega_k^{(\rho)}$ par zéro, on pose alors

$$\mathbf{v}^{(\rho)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{v}_k^{(\rho)},$$

la fonction ainsi définie vérifie l'équation ($2.1.2_2$), appartient à $W_0^{1,q}(\Omega)$, et elle est à support compacte dans Ω. De plus, en procédant comme dans (2.1.23) et en utilisant (2.1.24) on trouve que $\mathbf{v}^\rho$ satisfait à ($2.1.2_3$) avec une constante c dépendant seulement de n, q et de Ω, et elle est indépendante de ρ donc de f, ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque 2.1.1. *D'aprés le corollaire 2.1.1, les domaines locallements liptschitziens satisfont à l'hypothèse du théorème 2.1.1, il existe aussi une classe de domaine plus large que la précédente qui satisfait à l'hypothèse du théorème 2.1.1, les domaines qui vérifient la propriété du cone, en effet d'aprés le théorème de Gagliardo (théorème 4.8 [1]) un domaine qui possède la propriété du cone peut être représenté par une réunion finies de domaines locallement liptschitzien.*

Corollaire 2.1.2. *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{v} = F, & \\ \mathbf{v} \in W^{1,q}(\Omega), & \text{dans } \ \Omega. \\ \mathbf{v} = \mathbf{a}, \ \ \text{sur } \ \partial\Omega, & \end{cases}$$

où Ω un domaine locallement liptschitzien de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Supposons

$$F \in L^q(\Omega), \ \ \mathbf{a} \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega), \ \ 1 < q < \infty,$$

tel que

$$\int_\Omega F = \int_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot n.$$

Alors, le problème admet une solution $\mathbf{v}$ et on a l'estimation suivante

$$\|\mathbf{v}\|_{1,q} \leq c(\|F\|_q + \|\mathbf{a}\|_{1-1/q,q(\partial\Omega)}) \tag{2.1.25}$$

Démonstration

Il existe une fonction $\mathbf{A} \in W^{1,q}(\Omega)$ telle que $\gamma_0 \mathbf{A} = \mathbf{a}$, on cherche alors une solution $\mathbf{v}$ de la forme $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{A}$ où $\mathbf{u}$ est une solution au du problème (2.1.1)-(2.1.2) avec $f \equiv F - \nabla \cdot \mathbf{A}$ dont l'existence est assuré par par le théorème 2.1.1, et on a l'estimation suivante

$$\|\mathbf{v}\|_{1,q} \leq c(\|f\|_q + \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_q).$$

par conséquent on obtient en particulier l'inégalité (2.1.25).

Nous allons à présent étendre le théorème 2.1.1 pour des fonctions f plus régulière et obtenir de ce fait des solutions $\mathbf{v}$ plus régulières.

Lemme 2.1.4. *Soit Ω un domaine borné et localement lipschitzien. Alors il existe un recourvrement ouvert $\{G_1,...,G_m,G_{m+1},...,G_{m+\nu}\}$ de $\overline{\Omega}$ tel que*

(i) *$\Omega_i \equiv \Omega \cap G_i$ est étoilé par rapport à une boule B_i avec $\overline{B}_i \subset \Omega_i$ pour $i = 1,...,m+\nu$;*

(ii) *$\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^{m} G_i$;*

(iii) *$\Omega = \cup_{i=1}^{m+\nu} \Omega_i$.*

De plus, si f est une fonction de $C_0^\infty(\Omega)$ et satisfaisant (2.1.1), alors on a la décomposition $f = \sum_{i=1}^{m+\nu} f_i$ où les f_i vérifient les conditions suivantes

(iv) *$f_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$;*

(v) *$\int_\Omega f_i = 0$;*

(vi) *$\|f_i\|_{m,q} \leq C\|f\|_{m,q}$, pour tout $m \geq 0$ et $q \geq 1$,*

Démonstration

Par le lemme 2.1.1 il existe m domaines localement lipschitzien $G_1,...,G_m$ tels que $\Omega_i = \Omega \cap G_i$ est étoilé par rapport à une boule B_i avec $\overline{B_i} \subset \Omega_i$ et vérifiant la propriété (ii). Soit G_0 un domaine vérifiant $\overline{G_0} \subset \Omega$ tel que $\{G_0,G_1,...,G_m\}$ forme un recouvrement ouvert de $\overline{\Omega}$. Comme Ω est borné, on peut trouver ν boule ouvertes $G_{m+1},...,G_{m+\nu}$ tel que

$$\overline{G_0} \subset \bigcup_{i=m+1}^{m+\nu} G_i$$

$$\overline{\left\{ \bigcup_{i=m+1}^{m+\nu} G_i \right\}} \subset \Omega.$$

Il s'en suit donc que

$$\mathcal{G} = \{G_1,...,G_m,G_{m+1},...,G_{m+\nu}\}$$

est un recouvrement de Ω avec $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=m+1}^{m+\nu} G_i$. En posant

$$\Omega_i = \Omega \cap G_i, \quad i = 1,...,m+\nu$$

on obtient les propriétés (i)-(iii). Soit à présent $f \in C_0^\infty(\Omega)$, montrons l'existence des f_i satisfaisant aux propriétés (iv)-(vi). Soit

$$\{\psi_1,...,\psi_{m+\nu}\}$$

une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{G}$, i.e.

(a) $\psi_i \in C_0^\infty(G_i), \ \ i = 1,...,m+\nu;$

(b) $\sum_{i=1}^{m+\nu} \psi_i(x) = 1, \ \ \text{pour tout} \ \ x \in \Omega.$

posant

$$D_2 = \bigcup_{i=2}^{m+\nu} \Omega_i, \ \ \Psi_2 = \sum_{i=2}^{m+\nu} \psi_i(x).$$

Remarquons que

$$\psi_1(x) + \Psi_2(x) = 1, \ \ \text{pour tout} \ \ x \in \Omega$$

on peut donc décomposer f en une somme de deux fonctions f_1 et g_1 tels que

$$f_1 = \psi_1 f - \chi_1 \int_\Omega \psi_1 f,$$

$$g_1 = \Psi_2 f - \chi_1 \int_\Omega \Psi_2 f,$$

où

$$\chi_1 \in C_0^\infty(\Omega_1 \cap D_2), \quad \int_\Omega \chi_1 = 1.$$

Comme $\psi_1 \in C_0^\infty(G_1)$ et $f \in C_0^\infty(\Omega)$, il s'en suit immédiatement que

$$f_1 \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

et on a de plus,

$$\Psi_1 = \sum_{i=2}^{m} \psi_i(x) + \sum_{i=m+1}^{m+\nu} \psi_i(x)$$

on rappelant la définition des $G_2,...,G_m,G_{m+1},...,G_{m+\nu}$ et que $f \in C_0^\infty(\Omega)$, on déduit que

$$g_1 \in C_0^\infty(D_2).$$

Il est clair que

$$\int_\Omega f_1 = \int_\Omega g_1 = 0.$$

On décomposer en suite g_1 par la même procédure. Plus précisemment on pose

$$D_3 = \bigcup_{i=3}^{m+\nu} \Omega_i, \quad \Psi_3 = \sum_{i=3}^{m+\nu} \psi_i(x),$$

et

$$f_2 = \psi_2 g_1 - \chi_2 \int_\Omega \psi_2 g_1,$$

$$g_2 = \Psi_3 g_1 - \chi_2 \int_\Omega \Psi_3 f,$$

où

$$\chi_2 \in C_0^\infty(\Omega_2 \cap D_3), \quad \int_\Omega \chi_2 = 1.$$

De l'expression de g_1 et de la propriété (b) de la partition de l'unité, on obtient la forme equivalente suivante de f_2:

$$\begin{aligned} f_2 =& \psi_2(1-\psi_1)f - \chi_1\psi_2 \int_\Omega (1-\psi_1)f - \chi_2 \int_\Omega \psi_2(1-\psi_1)f \\ &+ \chi_2 \int_\Omega \psi_2\chi_1 \int_\Omega (1-\psi_1)f, \end{aligned}$$

ce qui montre que $f_2 \in C_0^\infty(\Omega_2)$, et la propriété (vi). De plus,

$$g_1 = f_2 + g_2, \quad g_2 \in C_0^\infty(D_3),$$

$$\int_{\Omega_2} f_2 = \int_{D_3} g_2 = 0.$$

En s'inspirons du schéma d'itération utilisé dans la démonstration du lemme 2.1.3 on établi les propriétés (iv)-(vi) pour tout $i = 1,...,m+\nu$.

Le rédultat précédent nous permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. *Soit Ω un domaine localement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soit*

$$f \in W_0^{m,q}(\Omega), \quad m \geq 0, \quad 1 < q < \infty,$$

satisfaisant à (2.1.1), alors il existe un solution au problème (2.1.2) $\mathbf{v} \in W_0^{m+1,q}(\Omega)$ vérifiant (2.1.2) et . De plus, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ alors $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$.

Démonstration

Supposons que $f \in C_0^\infty(\Omega)$, notons par Ω_i et f_i les domaines et fonctions introduits dans le lemme 2.1.4, et soit $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega_i)$ la solution du problème (2.1.1)-(2.1.2) donnée par le lemme 2.1.2. Par le lemme 2.1.2 et le lemme 2.1.4, on a

$$\|\nabla \mathbf{v}_i\|_{m,q} \leq c\|f\|_{m,q}$$

où $c = c(n,q,\Omega)$. Donc la fonction

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i$$

appartient à $C_0^\infty(\Omega)$ et satisfait (2.1.2) dans Ω et l'inégalité

$$\|\nabla \mathbf{v}_i\|_{m,q} \leq c\|f\|_{m,q} \tag{2.1.26}$$

Supposons que $f \in W_0^{m,q}(\Omega)$, $m \geq 0$, $1 < q < \infty$. Soit $\{f_k\}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant (2.1.1) et converge vers f dans $W_0^{m,q}(\Omega)$ et soit $\{\mathbf{v}_k\}$ les solutions correspondantes. Par l'inégalité de poincaré on trouve que $\{\mathbf{v}_k\}$ est borné dans $W_0^{m+1,q}(\Omega)$, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers une fonction $\mathbf{v} \in W_0^{m+1,q}(\Omega)$ qui est solution de $(2.1.2_1)$ et satisfait l'estimation (2.1.4).

2.2 Le problème de Stokes dans des domaines bornés

le système de Stokes modélise un écoulement d'un fluide visqueux incompressible de mouvement indéfiniment lent, il s'agit d'une approximation du système d'équations de Navier-Stokes incompressible(ou le terme nonlinéaire est négligé).
Nous allons considérer le cas stationnaire. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, le problème de Stokes est décrit par le système suivant

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v} = \nabla p + f, \\ \nabla . \mathbf{v} = g, \end{cases} \quad dans \;\; \Omega. \tag{2.2.1}$$

assujetti aux conditions aux limites

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \;\; dans \;\; \partial\Omega \tag{2.2.2}$$

et comme Ω est borné, la fonction $\mathbf{v}_0$ doit satisfaire la condition de compatibilité :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} d\sigma_x = \int_{\Omega} g dx. \tag{2.2.3}$$

Le but de cette section, est de montrer l'existence, l'unicité, et la regularité d'une solution pour le problème, (2.16)-(2.18). Nous allons suivre pour cela, l'approche classique de Cattabriga basé sur les idées de Agmon, Douglis, et Nirenberg. Cette méthode consiste à transformer le problème à un autre problème analogue dans l'espace tout entier et le demi espace en utilisons une procédure de localisation, la démonstration dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n_+$ de l'existence et l'unicité de la solution devient plus facile, dans la mesure ou on peut fournir une solution explicite du problème.

2.2.1 formulation variationnelle

Considérons le cas homogène, i.e., $g = 0$ et $\mathbf{v}_0 = 0$, alors on a la définition suivante:

Définition 2.2.1. *une fonction* $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *est dite solution faible pour le problème de stokes ssi*

(i) $\mathbf{v} \in V$ *(V est l'espace défini dans le chapitre 1);*

(ii) $\mathbf{v}$ *vérifie l'identité*

$$(\nabla \mathbf{v},\nabla \varphi) = - < \mathbf{f},\varphi > , \ \ \textit{pout tout} \ \ \varphi \in V. \tag{2.2.4}$$

Remarque 2.2.1. *Pour justifier la formulation variationnelle du problème , on procède formellement comme suit; soit* $\mathbf{v}$,p *deux solution classique de (2.2.1). Multiplions* $(2.2.1)_1$ *par une fonction* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *telle que* $\nabla \cdot \varphi = 0$, *i.e.,* $\varphi \in \mathcal{V}$. *On trouve*

$$\int_\Omega \Delta v \cdot \varphi dx = \int_\Omega \nabla p \cdot \varphi dx + \int_\Omega f \cdot \varphi dx$$

en intégrant par partie les deux membres de l'égalité par partie on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \varphi d\sigma(x) &= \int_\Omega p\nabla \cdot \varphi dx - \int_{\partial\Omega} pn \cdot \varphi d\sigma(x) - \int_\Omega f \cdot \varphi dx. \\ &= - \int_{\partial\Omega} pn \cdot \varphi d\sigma(x) - \int_\Omega f \cdot \varphi dx.\end{aligned}$$

en tenant compte de $(2.2.1)_2$, *on obtient*

$$(\nabla \mathbf{v},\nabla \varphi) \equiv \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \varphi = - \int_\Omega f \cdot \varphi dx \equiv -(f,\varphi) \ \ \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{2.2.5}$$

Et donc par continuité (2.2.5) est vérifiée dans la fermeture de $\mathcal{V}$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Si le domaine* Ω *est locallement liptschitzien alors par (2.2.2)* $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$ *et comme* $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ *on en déduit grâce au théorème 1.2.4 que* $\mathbf{v} \in V$.
Remarquons que la fonction p n'apparaît pas dans (2.2.5), à vraie dire, dans le calcul servant à trouver (2.2.5), si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *non necessairement solenoidale, on trouve au lieu de (2.2.5)*

$$(\nabla v,\nabla \varphi) = - < f,\varphi > +(p,\nabla \cdot \varphi), \ \ \textit{pour tout} \ \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.2.6}$$

On peut, au fait, pour f *assez régulière associer à tout solution faible* v *une fonction* p, *qui est dans notre cas la pression, tel que (2.2.6) soit vérifiée, plus précisemment on a le lemme suivant*

Lemme 2.2.1. *Soit* Ω *un domaine borné et locallement liptschitzien de* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *et* $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$, $1 < q < \infty$. *Une fonction vectorielle* $\mathbf{v} \in V$ *satisfait (2.2.5) si et seulement si il existe une fonction* $p \in L^2(\Omega)$ *tel que (2.2.6) est vérifiée pour tout* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Démonstration

L'implication inverse est évidente, montrons l'implication réciproque. Soit $\mathbf{v} \in V$ et vérifiant (2.2.5), ceci implique d'aprés le théorème 1.2.5 que les traces $\gamma_0 v_i = 0$ dans $H^{1/2}(\Omega)$

et que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Comme $D_i\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, $i = 1,...n$, on en déduit grâce aux théorème que $\Delta\mathbf{v} \in H^{-1}(\Omega)$, en intégrant par partie (2.2.5) on obtient

$$< \Delta\mathbf{v} - \mathbf{f},\varphi >= 0, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Et donc d'aprés le théorème 1.2.1, il existe $p \in L^2(\Omega)$ tel que on ai au sens des distribution

$$\Delta\mathbf{v} - \mathbf{f} = \nabla p$$

i.e., on obtient la relation (2.2.6).

Théorème 2.2.1. *Soit Ω un domaine borné locallement liptschitzien de $\mathbb{R}^n$. Considérons le problème de Stokes (2.2.1)-(2.2.2) et supposons $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{v}_0 \in H^{1/2}(\Omega)$, tel que (2.2.3) est vérifiée. Alors le problème (2.2.1)-(2.2.2) admet une solution*

$$\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \ \ p \in L^2(\Omega).$$

$\mathbf{v}$ *est unique et p est unique à une constante prés.*

Démonstration

Dans le cas où $\mathbf{v}_0 = 0$ et $g = 0$ on a vu que le problème est réduit à trouver $\mathbf{v} \in V$ vérifiant (2.2.5). le théorème de Lax-Milgram appliqué sur la forme bilinéaire $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})$ et la forme linéaire $b(\mathbf{v}) = - < f,\mathbf{v} >$ dans l'espace de Hilbert V (V est séparable car il est un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$) nous donne une solution unique $\mathbf{v}$ au problème homogène.

Considérons le cas non homogème. D'aprés le corollaire 2.1.2 il existe $\mathbf{v}_1 \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = g, \ \ \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \ \text{ dans } \ \partial\Omega.$$

En posant $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$, on voit que le problème (2.2.1)-(2.2.2) est réduit au problème de Stokes homogène suivant:

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{u} + \nabla p = f - \Delta\mathbf{v}_1 \in H^{-1}(\Omega), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = 0, \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

qui admet donc une solution $\mathbf{u}$, p unique (p unique à un constante prés) et donc de $\mathbf{v}$ et p.

2.2.2 Existence, unicité, et estimations en norme L^p dans l'espace entier. La solution fondamentale de Stokes

Le but de cette sous-section est d'établir l'existence et l'unicité du problème de Stokes dans l'espace entier et établir des estimations adéquate sur les solutions. Ceci nous permettra de dériver des estimations intérieurs des solutions du problème de Stokes dans des domaines borné aux paragraphe 2.2.4

Nous fairons dans toute la suite la convention d'Einstein sur la sommation répétées des indices. On considére le tenseur symétrique $\mathbf{U}$ et le champ de vecteur $\mathbf{q}$ définis par la relation

$$\begin{aligned} U_{ij}(x-y) &= \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\Big)\Phi(|x-y|) \\ q_j(x-y) &= -\frac{\partial}{\partial y_j}\Delta\Phi(x-y), \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

où x,$y \in \mathbb{R}^n$, δ_{ij} est le symbole de Kronecker et Φ est une fontion arbitraire de $\mathbb{R}$, qui est de classe C^∞ pout $t \not= 0$. Notons que $\partial|x-y|/\partial x_i = -\partial|x-y|/\partial y_i$, on obtient par un simple calcul de (2.2.7) pour $x \not= y$ et pout x,$y = 1$,...,n

$$\begin{aligned} &\Delta U_{ij}(x-y) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x-y) = \delta_{ij}\Delta^2\Phi(x-y) \\ &\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_{ij}(x-y) = 0. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Il suffit donc de choisir Φ comme solution fondamentale de l'équation biharmonique. On a donc pour $n = 2$,

$$\Phi(|x-y|) = |x-y|^2 \log(|x-y|)/8\pi$$

et on a

$$\begin{aligned} U_{ij}(x-y) &= -\frac{1}{4\pi}\Big[\delta_{ij}\log\frac{1}{|x-y|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}\Big] \\ q_j(x-y) &= \frac{1}{2\pi}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^2}. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Pour $n = 3$, on a

$$\Phi(|x-y|) = -\frac{|x-y|}{8\pi}$$

les champs de vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{q}$ deviennent

$$\begin{aligned} U_{ij}(x-y) &= -\frac{1}{4\pi}\Big[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}\Big] \\ q_j(x-y) &= \frac{1}{4\pi}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^3}. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Pour $n > 3$ on obtient

$$
\begin{aligned}
U_{ij}(x-y) &= -\frac{1}{2n(n-2)\omega_n}\Big[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^{n-2}} + (n-2)\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^n}\Big] \\
q_j(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}.
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

Pour ce choix de Φ il s'en suit que les champs de vecteurs (2.2.9) et (2.2.10) satisfont pour $x \neq y$

$$
\begin{aligned}
&\Delta U_{ij}(x-y) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x-y) = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_{ij}(x-y) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.2.12}
$$

La pair $\mathbf{U}$,$\mathbf{q}$ est appelée la **solution fondamentale** de l'équation de Stokes.

Il est facile d'obtenir des propriétés asymptotique de $\mathbf{U}$ et de $\mathbf{q}$, les estimations suivantes sont établies pour $|x| \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}(x) &= O(\log|x|) \quad si \quad n = 2, \\
\mathbf{U}(x) &= O(|x|^{-n+2}) \quad si \quad n > 2, \\
D^\alpha \mathbf{U}(x) &= O(|x|^{-n-|\alpha|+2}), \ \ |\alpha| \geq 1, \ \ n \geq 2 \\
D^\alpha \mathbf{q}(x) &= O(|x|^{-n-|\alpha|+1}), \ \ |\alpha| \geq 0, \ \ n \geq 2.
\end{aligned}
\tag{2.2.13}
$$

Considérons à présent le problème nonhomogène de Stokes suivant

$$
\begin{cases}
\Delta \mathbf{v} = \nabla p + f, \\
\nabla . \mathbf{v} = g,
\end{cases}
\quad dans \ \ \mathbb{R}^n.
\tag{2.2.14}
$$

On a le théorème suivant

Théorème 2.2.2. *Supposons* $\mathbf{f} \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$*,* $g \in W^{m+1,q}(\mathbb{R}^n)$*,* $m \geq 0$*,* $1 < q < \infty$*,* $n \geq 2$*, alors il existe une paire de fonctions* $\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(B_R)$ *et* $p \in W^{m+1,q}(B_R)$ *pour tout* $R > 0$*, satisfaisant p.p. le système de Stokes nonhomogène (2.2.14). De plus, pour tout* $l \in [0,m]$*,* $|\mathbf{v}|_{l+2,q}$ *et* $|p|_{l+1,q}$ *sont finis et il existe une constante* $c = c(n,q,l)$ *telle que on ai, si* $q \geq n$

$$
|\mathbf{v}|_{l+2,q} + |p|_{l+1,q} \leq c(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q}),
\tag{2.2.15}
$$

si $n/2 \leq q < n$

$$
|\mathbf{v}|_{l+1,s_1} + |p|_{l,s_1} + |\mathbf{v}|_{l+2,q} + |p|_{l+1,q} \leq c(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q})
\tag{2.2.16}
$$

avec $s_1 = nq/(n-q)$, *et si* $1 < q < n/2$

$$|\mathbf{v}|_{l,s_2} + |\mathbf{v}|_{l+1,s_1} + |p|_{l,s_1} + |\mathbf{v}|_{l+2,q} + |p|_{l+1,q} \leq c(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q}) \tag{2.2.17}$$

avec $s_2 = nq/(n-2q)$. *On a aussi, si* $\mathbf{f},g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *alors* $\mathbf{v},p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et elles vérifient pour* $|x| \to \infty$ *(2.2.22). Finalement, si* $\mathbf{v}_1,p_1$ *est une autre solution de (2.2.14) avec* $|\mathbf{v}_1|_{l+2,q}$ *fini pour un certain* $l \in [0,m]$, *alors*

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}|_{l+2,q} = 0, \quad |p_1 - p|_{l+1,q} = 0.$$

Démonstration

Supposons que f et g sont des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nous allons démontrer en utilisant (2.2.9) et (2.2.10) l'existence d'une solution pour (2.2.14), vérifiant des estimations L^q adéquates. Pour cela on introduit les potentiels de volume de Stokes suivants

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(x-y)\cdot\mathbf{F}(x)dy \\ \pi(x) &= -\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q}(x-y)\cdot\mathbf{F}(y)dy, \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

où $\mathbf{F} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(x-y)\cdot F(x)dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(z)\cdot F(x+z)dz \\ \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q}(x-y)\cdot F(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q}(z)\cdot F(x+z)dz \end{aligned}$$

on en déduit que $u,\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, il est clair que $\mathbf{u},\pi$ est une solution de (2.2.14) avec $g = 0$ et $\mathbf{F} = \mathbf{f}$. On a en effet $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, en utilisant (2.2.7) et le fait que $\Delta\Phi(|x-y|) = \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace donnée par

$$\mathcal{E}(x-y) = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\log|x-y| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{[n(2-n)\omega_n|x-y|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}(x) - \nabla\pi(x) &= \Delta\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\Phi(|x-y|)F(y)dy \\ &= \Delta(\mathcal{E} * \mathbf{F})(x) = \mathbf{F}(x). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Nous allons maintenant chercher une solution $\mathbf{v}$, p de (2.2.14) de la forme $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{h}$, $p = \pi$ où

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(x-y)\cdot(\mathbf{f} - \Delta\mathbf{h})(y)dy, \;\; \pi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(x-y)\cdot\mathbf{h}(y)dy,$$

avec

$$h = \nabla(\mathcal{E} * g) = \mathcal{E} * \nabla g. \tag{2.2.20}$$

Comme $\Delta \mathbf{h} = \Delta(\mathcal{E} * \nabla g) = \nabla g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et

$$\nabla \cdot h = g, \tag{2.2.21}$$

on déduit donc de (2.2.19) et (2.2.21) que $\mathbf{v}$,p est une solution de (2.2.14). De plus on obtient de (2.2.13) les estimations asymptotiques suivantes pour $|x| \to \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) &= O(\log|x|) \quad si \quad n = 2, \\ \mathbf{v}(x) &= O(|x|^{-n+2}) \quad si \quad n > 2, \\ D^\alpha \mathbf{v}(x) &= O(|x|^{-n-|\alpha|+2}), \quad |\alpha| \geq 1, \quad n \geq 2 \\ D^\alpha p(x) &= O(|x|^{-n-|\alpha|+1}), \quad |\alpha| \geq 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Nous allons à présent établir des estimation L^q pour $\mathbf{v}$ et p. En appliquant le théorème de Calderon-Zygmund sur (2.2.20) on obtient

$$|\mathbf{h}|_{l+1,q} \leq c|g|_{l,q}, \quad \text{pout tout} \quad l \geq 0 \tag{2.2.23}$$

où $c = c(n,q)$. D'autre part, considérons l'identité suivante avec $|\alpha| = l$

$$\begin{aligned} D_{ij} D^\alpha u_k(x) = &\int_{\mathbb{R}^n} D_i U_{kl}(x-y) D_j D^\alpha F_l(y) dy \\ = &\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} D_{ij} U_{kl}(x-y) D^\alpha F_l(y) dy \\ &+ \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| = \epsilon} D_i U_{kl}(x-y) D^\alpha F_l(y) n_j(y) dy, \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

où on a noté par n_j la composante j-ème de la normal extérieure à la sphère $|x-y| = \epsilon$. Il est facile de voir que $D_i U_{kl}$ est homogène de degré $1-n$, et donc par le lemme 1.3.1, $D_{ij} U_{kl}$ est un noyau singulier. De plus, on obtient par le même lemme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| = \epsilon} D_i U_{kl}(x-y) D^\alpha F_l(y) n_j(y) dy = A_{ijkl} D^\alpha F_l(x)$$

où A_{ijkl} est un tenseur constant d'ordre 4. En adjoignant cette formule avec (2.2.24) on obtient

$$D_{ij} D^\alpha u_k(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} D_{ij} U_{kl}(x-y) D^\alpha F_l(y) dy + A_{ijkl} D^\alpha F_l(x).$$

On peut donc appliquer le thèorème de Calderon-Zygmund, avec l'inégalité (2.2.23) pour obtenir

$$|\mathbf{u}|_{l+2,q} \leq c_1(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q}), \text{ pour tout } l \geq 0, q > 1, \tag{2.2.25}$$

où $c_1 = c_1(n,q)$. De la même manière on montre

$$|\pi|_{l+1,q} \leq c_2(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q}). \tag{2.2.26}$$

De (2.2.23), (2.2.25) et (2.2.26) on obtient l'estimation suivante pour $\mathbf{v}, p$

$$|\mathbf{v}|_{l+2,q} + |p|_{l+1,q} \leq c_1(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q}), \text{ pour tout } l \geq 0, q > 1 \tag{2.2.27}$$

avec $c = c(n,q)$.

Les autres estimations sont obtenues directement de (2.2.18) et (2.2.20), en effet, remarquant

$$\begin{aligned} |D_i D^\alpha \mathbf{u}(x)| + |D^\alpha \pi(x)| &\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha \mathbf{F}(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \\ |D^\alpha \mathbf{h}(x)| &\leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha g(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy. \end{aligned}$$

Si $1 < q < n$, en appliquant les injections de Sobolev on obtient

$$|\mathbf{v}|_{l+1,s_1} + |p|_{l,s_1} \leq c_3(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q}), \ s_1 = \frac{nq}{n-q}. \tag{2.2.28}$$

De même, si $1 < q < n/2$ de (2.2.28) on a

$$|\mathbf{v}|_{l,s_2} \leq c_4(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q}), \ s_2 = \frac{nq}{n-2q}. \tag{2.2.29}$$

Supposons à présent que $\mathbf{f} \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in W^{m+1,q}(\mathbb{R}^n)$, $m \geq 0$ et $q \in (1,\infty)$. On peut les approximer par des suite $\{\mathbf{f}_k\}$, $\{g_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$. Notons par $\{\mathbf{v}_k, p_k\}$ la suite correspondante de solutions de (2.2.14), on voit que chaque solution satisfait à (2.2.27) pour tout $l \in [0,m]$ et si, $1 < q < n$ (respectivement, $1 < q < n/2$), elle satisfait aussi à (2.2.28) (respectivement à (2.2.29)). En utilisant alors ces estimations, on montre facilement l'existence de fonctions $\mathbf{v}$ et p tel que

$$D^\alpha \mathbf{v} \in L^q(\mathbb{R}^n) \ \ \forall 0 \leq |\alpha| \leq m+2, \text{ et } D^\alpha p \in L^q(\mathbb{R}^n) \ \ \forall 0 \leq |\alpha| \leq m+1.$$

et

$$\lim_{k\to\infty}(D^\alpha \mathbf{v}_k,\psi) = (D^\alpha \mathbf{v},\psi),\ \ 0 \le |\alpha| \le m+2$$
$$\lim_{k\to\infty}(D^\beta \nabla p_k,\psi) = (D^\beta \nabla p_k,\psi),\ \ 0 \le |\beta| \le m$$

Pour tout $\psi \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$. Ceci implique, en particulier que $\mathbf{v}$, p satisfait à (2.2.14) p.p. dans $\mathbb{R}^n$. De plus en utilisant le lemme auxiliaire suivant:

Lemme auxiliaire

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine arbitraire et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\nabla u \in L^q_{loc}(\Omega)$, $q \ge 1$. Alors $u \in L^q_{loc}(\Omega)$.

On obtient

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(B_R),\ \ p \in W^{m+1,q}(B_R),\ \ \text{pour tout}\ \ R > 0.$$

Pour la démonstration du lemme auxiliaire voir [9]. Pour la démonstration de l'unicité voir [5] ou [9].

2.2.3 Existence, unicité, et estimation L^q dans le demi-espace

Dans cette sous-section nous allons démontrer un théorème similaire au théorème 2.2.1 pour le problème nonhomogène de Stokes dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+$, $n \ge 2$. Ici, la situation est tout à fait différente à cause de la présence d'une frontière. Nous allons commencer par le problème auxiliaire suivant:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{W} = \nabla S, & \\ \nabla.\mathbf{W} = 0, & \textit{dans}\ \ \mathbb{R}^n_+. \\ \mathbf{W} = \mathbf{\Phi},\ \ \text{sur}\ \ \Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}, & \end{cases} \tag{2.2.30}$$

Lemme 2.2.2. *Supposons $\mathbf{\Phi} \in C^m(\Sigma)$, $m \ge 1$, avec $\mathbf{\Phi} = O(\log|\xi|)$ pour $|\xi| \to \infty$,i.e., $\mathbf{\Phi}$ ne croit pas rapidement, et $D^\alpha \mathbf{\Phi} \in C(\Sigma)$, $1 \le |\alpha| \le m$. Alors les fonctions $\mathbf{W}$ et S définies dans (2.2.32) ci-dessous, sont de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n_+$ et satisfont (2.2.30). De plus, si $\mathbf{\Phi} \in W^{m,q}(\Sigma)$ et $\sum_{|\alpha|=m}[D^\alpha \mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q}$ est fini, alors $\mathbf{W}$ et S satisfont à (2.2.30) et on a pour tout $k \in [0,m]$, $1 < q < \infty$*

(i) $|\mathbf{W}|_{k+1,q}$ *et* $|S|_{k,q}$ *sont finis;*

(ii) $\mathbf{W}$, *S satisfont l'inégalité suivante*

(2.2.31) $$|\mathbf{W}|_{k+1,q} + |S|_{k,q} \leq c \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha \mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q}.$$

où $0 \leq k \leq m.$

Démonstration

On introduit les fonctions suivantes

(2.2.32) $$\begin{aligned} W_j(x) &= \int_\Sigma K_{ij}(x'-y',x_n)\mathbf{\Phi}_i(y')dy' \\ S(x) &= -\, D_i \int_\Sigma k(x'-y',x_n)\mathbf{\Phi}_i(y')dy', \end{aligned}$$

où $z' = (z_1,...,z_n)$ et

(2.2.33) $$\begin{aligned} K_{ij}(x'-y',x_n) =& \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{(|x'-y'|^2+x_n^2)^{(n+2)/2}}, \;\; y_n = 0, \\ k(x'-y',x_n) =& \frac{4}{4\omega_n} \frac{x_n}{(|x'-y'|^2+x_n^2)^{n/2}}, \;\; y_n = 0. \end{aligned}$$

On montre facilement que $\mathbf{W}$ et S sont de classe C^∞, $\mathbf{W}$ et S vérifient $(2.2.30_{1,2})$. Montrons à présent que

(2.2.34) $$\lim_{x_n \to 0} \mathbf{W}(x',x_n) = \mathbf{\Phi}(x'). \;\text{ pout tout }\; x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

fixons $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, et soit $B_\epsilon \in \mathbb{R}^{n-1}$ une boule centré en ξ tel que

(2.2.35) $$\sup_{y \in B_\epsilon} |\mathbf{\Phi}(\xi) - \mathbf{\Phi}(y)| < \epsilon.$$

Par un calcul facile sur $(2.2.26_1)$, on montre facilement les propriétés suivantes :

(i) $\int_{B_\epsilon} K_{ij}(\xi - y',x_n)dy' = \delta_{ij} + o(1)$ pour $x_n \to 0$,

(ii) $\int_\Sigma |K_{ij}(\xi - y',x_n)|dy' \leq c$

avec c est une constante indépendante de x_n et de ξ. De même, en utilisant la propriété $\mathbf{\Phi} = O(\log|\xi|)$ on obtient

(iii) $\int_{\Sigma - B_\epsilon} K_{ij}(\xi - y',x_n)\mathbf{\Phi}_i(y')dy' = o(1)$ quand $x_n \to 0$.

Par conséquent, en utilisant (i) et (iii) on obtient pour $x_n \to 0$,

$$\begin{aligned} W_j(\xi,x_n) - \mathbf{\Phi}_j(\xi) &= \int_{B_\epsilon} K_{ij}(\xi - y',x_n)\mathbf{\Phi}_i(y')dy' - \mathbf{\Phi}_j(\xi) \\ &\quad + \int_{\Sigma - B_\epsilon} K_{ij}(\xi - y',x_n)\mathbf{\Phi}_i(y')dy' \\ &= \int_{B_\epsilon} K_{ij}(\xi - y',x_n)[\mathbf{\Phi}_i(y') - \mathbf{\Phi}_i(\xi)]dy' + o(1), \end{aligned}$$

et donc compte tenu de (2.2.28) et de (ii) on déduit

$$\limsup_{x_n \to 0} |\mathbf{W}(\xi,x_n) - \mathbf{\Phi}(\xi)| \leq c\epsilon.$$

Et comme ϵ est arbitraire on déduit (2.2.34).

Il nous reste maintenant à établir les estimations en norme L^q pour $\mathbf{W}$ et S. Pour $|\alpha| \leq m$, on obtient de (2.2.32)

$$\begin{aligned} D'^{\alpha} W_j &= \int_{\Sigma} K_{ij}(x'-y',x_n) D'^{\alpha} \mathbf{\Phi}_i(y')dy' \\ D'^{\alpha} S(x) &= -\, D_i \int_{\Sigma} k(x'-y',x_n) D'^{\alpha} \mathbf{\Phi}_i(y')dy', \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

où

$$D'^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}},$$

Il est clair de (2.2.33) que $K_{ij}(x',x_3)$, $i,j = 1,2,3$ et $k(x',x_3)$ sont de classe C^{∞} pour $x_3 > 0$, avec des dérivées qui sont bornées dans l'hémisphère $\{|x|^2 = 1, \;\; x_3 > 0\}$. D'autre part, on a

$$K_{ij}(x',x_3) = \frac{3}{2\pi} \frac{\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|}\frac{x_3}{|x|}}{|x|^2} = \frac{\Omega_{ij}\left(\frac{x'}{|x|},\frac{x_3}{|x|}\right)}{|x|^2}$$

$$k(x',x_3) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{x_3}{|x|}}{|x|^3} = \frac{\omega\left(\frac{x'}{|x|},\frac{x_3}{|x|}\right)}{|x|^2}$$

et notons que

$$\Omega_{ij}(x',0) = \omega(x',0) = 0 \;\; \text{pour tout} \;\; x' \neq 0,$$

on en déduit que K_{ij} et k satisfont toutes les hypothèses du théorème (1.3.4). Donc, si $D^{\alpha}\mathbf{\Phi} \in L^q(\Sigma)$ et que $[D^{\alpha}\mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q} < \infty$, $1 < q < \infty$, on obtient

$$\nabla D'^{\alpha}\mathbf{W}, \;\; D'^{\alpha} S \in L^q(\mathbb{R}^n_+)$$

et on a l'estimation suivante

$$|D'^{\alpha}\mathbf{W}|_{1,q} + \|D'^{\alpha} S\|_q \leq c[D^{\alpha}\mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q}, \tag{2.2.37}$$

avec $c = c(q,n,\alpha)$. Nous allons établir maintenant une estimation similaire à (2.2.37) pour les dérivées en x_3, on considére d'abords le cas $|\alpha| = 1$. Appliquons l'opérateur différentiel D_3 à l'équation (2.2.30$_2$), en utilisant l'inégalité (2.2.37) on obtient

$$\|D_3^2 W_3\|_q \leq \|D_3 D_2 W_2\|_q + \|D_3 D_1 W_1\|_q \leq 2c[\nabla\mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q}. \tag{2.2.38}$$

Posons

$$\mathbf{W}' = (W_1,W_2), \ \ \Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \ \ \nabla' = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)$$

on obtient de $(2.2.30_1)$

$$\begin{aligned} \Delta W_3 =& D_3 S \\ D_3^2 \mathbf{W}' =& -\Delta \mathbf{W}' + \nabla' S \end{aligned}$$

et donc, en utilisant (2.2.37) on obtient

$$\|D_3^2\mathbf{W}'\|_q + \|D_3 S\|_q \leq 8c[\nabla \mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q},$$

en combinant cette dernière inégalité avec (2.2.38) on obtient

$$|\mathbf{W}|_{2,q} + |S|_{1,q} \leq c[\nabla \mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q},$$

avec $c = c(n,q,\alpha)$. si $|\alpha| \geq 1$, en utilisant les mêmes arguments on obtient l'estimation (2.2.24).

La démonstration du dernier point du théorème ce fait d'une manière tout à fait analogue (voir [9]).

Considérons à présent le problème

$$(2.2.39) \qquad \begin{cases} \Delta \mathbf{v} = \nabla p + f \\ \nabla.\mathbf{v} = g, & \textit{dans} \ \ \mathbb{R}^n_+. \\ v = 0, \ \ \text{sur} \ \ \Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}, \end{cases}$$

Nous allons montrer l'existence d'une solution vérifiant des estimations adéquates. Ceci se faira en réduisant le problème (2.2.39) au problème (2.2.30). Nous allons commencer par montrer le lemme suivant

Lemme 2.2.3. *Supposons $\mathbf{f},g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, alors il existe une solution $\mathbf{v},p$ de classe C^∞ du système nonhomogène de Stokes (2.2.39). De plus, si $m \geq 0$ est un entier arbitraire, et $q \in (1,\infty)$ les semi-normes*

$$\sum_{l=0}^m |\mathbf{v}|_{l+2,q} \quad \textit{et} \quad \sum_{l=0}^m |p|_{l+1,q}$$

sont finies, et on a pour tout $l \in [0,m]$ l'inégalité suivant:

$$(2.2.40) \qquad |\mathbf{v}|_{l+2,q} + |p|_{l+1,q} \leq c(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q})$$

avec $c = (n,l,q)$. *Si*

$$\mathbf{f} \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n_+), \;\; g \in W^{m+1,q}(\mathbb{R}^n_+),$$

alors

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(C), \;\; p \in W^{m+1,q}(C),$$

pour tout cube ouvert $C \in \mathbb{R}^n_+$, *de plus* $\mathbf{v}$ *et* p *satisfont à l'inégalité (2.2.40), pour tout* $l \in [0,m]$, *et* $\mathbf{v}$ *est de trace nulle sur la frontière.*

Démonstration

Nous allons d'abors étendre les fonctions $\mathbf{f}$ et g sur l'espace entier $\mathbb{R}^n$ en utilisant le lemme auxiliaire suivant ([24] lemme 6.37)

Lemme

Soit $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ et un entier $k \geq 1$, alors il existe une fonctions $\tilde{u} \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ tel que u soit égale à la restriction de $\tilde{u}$ sur l'espace $\mathbb{R}^n_+$, de plus on l'inégalité suivante:

$$\|D^\beta \tilde{u}\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq C\|D^\beta u\|_{q,\mathbb{R}^n_+},$$

pour tout $q \in [1,\infty]$ et $|\beta| \in [0,k]$.

Notons $\mathbf{f}_s$ et g_s les prolongement sur $\mathbb{R}^n$ de $\mathbf{f}$ et g respectivement données par lemme précédent, avec $\mathbf{f}_s, g_s \in C_0^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ et s suffisamment grand et on a

$$\begin{aligned} &\|D^\beta \mathbf{f}_s\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq c\|D^\beta \mathbf{f}\|_{q,\mathbb{R}^n_+} \\ &\|D^\beta g_s\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq c\|D^\beta g\|_{q,\mathbb{R}^n_+} \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

où $0 \leq |\beta| \leq s+1$ et c est une constante qui dépend de s, n et de q. On cherche une solution de la forme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{W}$, $p = p_1 + S$, où $\mathbf{v}_1$, p_1 est la solution de (2.2.14) avec $\mathbf{f} = \mathbf{f}_s$ et $g = g_s$ donnée par le théorème 2.2.2, il est clair qu'il suffit de trouver $\mathbf{W}$, S tel que

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{W} = \nabla S, & \\ \nabla . \mathbf{W} = 0, & \text{dans } \; \mathbb{R}^n_+. \\ \mathbf{W} = -\mathbf{v}_1, \;\; \text{sur } \; \Sigma. & \end{cases} \tag{2.2.42}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathbf{\Phi} \equiv -\mathbf{v}_1|_\Sigma$ satisfait aux proriétés de la première partie du lemme 2.2.2. Par conséquent, par le même lemme $\mathbf{W}$, S vont obéir à l'estimation (2.2.31). On déduit donc du théorème 2.2.1 que $\mathbf{\Phi} \in C^\infty(\Sigma)$. De plus, $\mathbf{\Phi}(\xi) = O(\log|\xi|)$

et $D^\alpha \mathbf{\Phi} \in C^0(\Sigma)$ pour tout $|\alpha| \in [1,s]$ si $n = 2$, quand $\mathbf{\Phi} \in C^m(\Sigma)$ pour tout $m \in [0,s]$ si $n = 3$. Montrons à présent que pour tout $|\alpha| \in [1,s]$ et tout $q > 1$

$$\begin{aligned} &D^\alpha \mathbf{\Phi} \in L^q(\Sigma), \\ &[D^\alpha \mathbf{\Phi}]_{1-1/q} < \infty. \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

Rappelant que $\mathbf{v}_1$ est donnée par $(2.2.17_1)$ avec $\mathbf{F} \equiv \mathbf{f}_s - \Delta \mathbf{h}_s = \mathbf{f}_s - \nabla g_s$ où $\mathbf{h}_s$ est donnée par (2.2.19) et $g \equiv g_s$, de $(2.2.21_2)$ on obtient

$$D^\alpha \mathbf{\Phi}(x') = O(|x'|^{-n+1}) \ \text{ quand } \ |x'| \to \infty,$$

et donc $D^\alpha \mathbf{\Phi}(x') \in \mathbb{R}^{n-1}$ et comme $D^\alpha \mathbf{\Phi} \in C^0(\Sigma)$ on en déduit $(2.2.37_1)$. D'autre part, par le théorème 1.1.5 et le théorème 2.2.1, on obtient pour tout $|\alpha| \geq 0$

$$\begin{aligned} [D^\alpha \nabla \mathbf{v}_1]_{1-1/q} &\leq c \|D^\alpha \nabla \mathbf{v}_1\|_{q,\mathbb{R}^n_+} \\ &\leq (\|D^\alpha \mathbf{f}_s\|_{q,\mathbb{R}^n} + \|D^\alpha g_s\|_{q,\mathbb{R}^n}). \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

En appliquant le lemme 2.2.2 et en utilisant (2.2.44) et (2.2.41) on obtient l'estimation (2.2.40) ce qui termine la démonstration du lemme.
Le théorème suivant est un résultat d'unicité pour la solution du problème (2.2.33).

Théorème 2.2.3. *Soient* $\mathbf{u} \in W^{m+2,q}(C)$, $\pi \in W^{m+1,q}(C)$ *(*$m \geq 0$*,* C *est un cube arbitraire dans* $\mathbb{R}^n_+$*,* $(n \geq 2)$ *une solution au système de Stokes (2.2.33) avec* $\mathbf{f} = g = 0$*. Supposons qu'il existe* $l \geq 0$ *et* $q \in (1,\infty)$ *tel que* $|\mathbf{u}|_{l+2,q}$ *soit fini. Alors*

$$|\mathbf{u}|_{l+2,q} = |\pi|_{l+1,q} = 0.$$

en particulier, si $l = 0$*, alors*

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} x_n, \ \ \pi = const.$$

avec $\mathbf{a} = (a_1,...,a_{n-1},0)$ *est un vecteur constant.*

Démonstration voir [9].
On peut rassembler les résultats précédents dans le théorème suivant qui est l'analogue du théorème (2.2.1) dans le demi-espace

Théorème 2.2.4. *Soit* $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$*. Pour tout*

$$\mathbf{f} \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n_+), \quad g \in W^{m+1,q}(\mathbb{R}^n_+)$$

et

$$\Phi \in W^{m+1}(\Sigma) \quad \textit{avec} \qquad \sum_{|\alpha|=m+1} [D^\alpha \Phi]_{1-1/q,q} < \infty,$$

$m \geq 0$, $1 < q < \infty$, $n \geq 2$, il existe une pair de fonctions $\mathbf{v}$, p telle que

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(C), \;\; p \in W^{m+1,q}(C),$$

pour tout cube ouvert $C \subset \mathbb{R}^n_+$, solution du problème de Stokes (2.2.39) avec la condition au bords nonhomogène. De plus, pour tout $l \in [0,m]$ les semi-normes $|\mathbf{v}|_{l+2,q}$ et $|p|_{l+1,q}$ sont finies et on a

$$|\mathbf{v}|_{l+2,q} + |p|_{l+1,q} \leq c\Big(|\mathbf{f}|_{l,q} + |g|_{l+1,q} + \sum_{|\alpha|=l+1} << D^\alpha \Phi >>_{1-1/q,q}\Big), \tag{2.2.45}$$

où $c = c(n,q,m)$. Finalement, si $\mathbf{v}_1$, p_1 est une autre solution de (2.2.39) et si il existe $l \in [0,m]$ tel que $|\mathbf{v}_1|_{l+2,q}$ est fini, alors

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|_{l+2,q} = |p - p_1|_{l+1,q} = 0.$$

En particulier, si $l = 0$, il existe un vecteur $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_{n-1},0)$ tel que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{a} x_n, \;\; p = p_1 + const.$$

2.2.4 Estimations intérieurs en norme L^q

Dans cette sous-section nous établirons des estimations et propriétés des solutions généralisées à l'intérieur du domaine, en utilisant les résultats établis dans la sous-section 2.2.2. On considère en effet, une paire de fonctions $\mathbf{v}$ et p avec $\mathbf{v} \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ au sens des distribution et $p \in L^1_{loc}$ satisfaisant à l'identité (2.2.4) pout tout fonctions $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, nous allons montrer dans cette sous-section, que pour vu que la donnée, f est suffisemment régulière, $\mathbf{v}$ et p obéissent à des inégalités en norme L^q, qui montrent au fait que toute solution faible est de classe $C^\infty(\Omega)$ à conditions bien sûr que f l'est.

Théorème 2.2.5. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soient $\mathbf{v} \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$, $p \in L^q_{loc}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, vérifiant (2.2.6) pour tout $\varphi \in C_0^\infty$. Supposons que $\mathbf{v}$ est de divergence nulle (au sens des distributions), alors si*

$$\mathbf{f} \in W^{m,q}_{loc}(\Omega), \qquad m \geq 0,$$

Alors,

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}_{loc}(\Omega), \quad p \in W^{m+1,q}_{loc}(\Omega).$$

De plus l'inégalité suivant est vérifiée:

$$|\mathbf{v}|_{m+2,q,\Omega'} + |p|_{m+1,q,\Omega'} \leq c(\|f\|_{m,q,\Omega''} + \|\mathbf{v}\|_{1,q,\Omega''-\Omega'} + \|p\|_{q,\Omega''-\Omega'}), \tag{2.2.46}$$

où, Ω'' et Ω' sont des sous-domaines bornés arbitraires de Ω tels que $\overline{\Omega'} \subset \Omega''$, $\overline{\Omega''} \subset \Omega$ et $c = (n,q,m,\Omega',\Omega'')$.

Démonstration

Montrons d'abord que les régularisées de $\mathbf{v}$ et p obéissent au système de Stokes sur tout sous-domaine Ω_0 tel que $\overline{\Omega}'' \subset \overline{\Omega_0} \subset \Omega$. soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, alors d'aprés le théorème 1.3.1 $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\epsilon < dis(\Omega_0,\partial\Omega)$.

On a en utilisant théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\varphi_\epsilon dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_i v_j \partial_i(\varphi_j)_\epsilon dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_i v_j (\partial_i \varphi_j)_\epsilon dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_i v_j(x) \Big[\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big) \partial_i \varphi_j(y) dy\Big] dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_i \varphi_j(y) \Big[\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega\Big(\frac{x-y}{\epsilon}\Big) \partial_i v_j(x) dx\Big] dy, \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_i \varphi_j (\partial_i v_j)_\epsilon dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_i \varphi_j \partial_i (v_j)_\epsilon dx,
\end{aligned}$$

en intégant par partie, et en utilisant le fait que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$,on obtient

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\varphi_\epsilon dx = -\int_{\Omega_0} \Delta\mathbf{v} \cdot \varphi dx. \tag{2.2.47}$$

De la même manière, on obtient aussi

$$\int_\Omega p \nabla \cdot \varphi_\epsilon dx = \int_{\Omega_0} \nabla p_\epsilon \cdot \varphi dx. \tag{2.2.48}$$

De plus, comme $\mathbf{v}$ est de divergence nulle (au sens des distribution), alors pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ on a

$$\int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla\psi_\epsilon dx = -\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \mathbf{v}_\epsilon \psi dx = 0. \tag{2.2.49}$$

Et donc, si $\mathbf{f} \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors on conclut de (2.2.4), (2.2.26), (2.2.27) et (2.2.28)

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_\epsilon = \nabla p_\epsilon + \mathbf{f} \\ \nabla . \mathbf{v}_\epsilon = 0, \qquad\qquad dans \ \ \mathbb{R}^n_+. \\ v = 0, \ \ \text{sur} \ \ \Omega_0. \end{cases} \tag{2.2.50}$$

Nous allons d'abords montrer le théorème pour $m = 0$. On considére la fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à l'unité sur $\overline{\Omega}'$ et zéro sur le complémentaire de Ω''. Une telle fonction existe, il suffit de prendre par exemple la régularisée $(\chi_{\Omega'})_\epsilon$ de la fonction caractéristique de Ω' et prendre ϵ suffisamment petit. On choisit $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}''$ et posons

$$\mathbf{u} = \varphi \mathbf{v}_\epsilon, \ \ \pi = \varphi p_\epsilon.$$

Un simple calcul nous donne

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{v}_\epsilon + 2\nabla\varphi \cdot \nabla \mathbf{v}_\epsilon + \varphi \Delta \mathbf{v}_\epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{v}_\epsilon + \varphi \nabla \cdot \mathbf{v}_\epsilon \\ \nabla \pi &= p_\epsilon \nabla \varphi + \varphi \nabla p_\epsilon, \end{aligned}$$

En multipilions (2.2.50) par φ il est facile de voir que $\mathbf{u}$ et π satisfont

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \nabla \pi + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= g, \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \varphi \mathbf{f}_\epsilon, \\ \mathbf{f}_2 &= -p_\epsilon \nabla \varphi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla \mathbf{v}_\epsilon + \mathbf{v}_\epsilon \Delta \varphi, \\ g &= \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}_\epsilon. \end{aligned}$$

On peut considérer le problème (2.2.51) dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$, en étendant les fonctions $\mathbf{v}_\epsilon$, p_ϵ par 0 en dehors de Ω''. Comme $D^2\mathbf{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on peut alors appliquer le théorème 2.2.2 avec $m = 0$ pour déduire l'estimation suivante

$$\|D^2\mathbf{u}\|_q + \|\nabla\pi\|_q \leq c_1\big(\|\varphi \mathbf{f}_\epsilon\|_q + \|\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_\epsilon)\|_q + \|\nabla\varphi \cdot \nabla \mathbf{v}_\epsilon\|_q + \|\mathbf{v}_\epsilon \Delta\varphi\|_q + \|p_\epsilon \nabla\varphi\|_q\big), \tag{2.2.52}$$

où $c_1 = c_1(n,q)$. De (2.2.52) et les propriétés de la fonction φ on obtient

$$\|D^2\mathbf{v}_\epsilon\|_{q,\Omega'} + \|\nabla p_\epsilon\|_{q,\Omega'} \leq c\big(\|\mathbf{f}_\epsilon\|_q + \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,q,\Omega''-\Omega'} + \|p_\epsilon\|_{q,\Omega''-\Omega'}.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on montre ainsi le théorème pour $m = 0$. Le cas général se fait par récurrence. Supposons en effet que le théorème est vrai pour $m = l - 1$, $l \geq 1$, montrons qu'il est aussi vrai pour $m = l$. Par hypothèse on a

$$\mathbf{v} \in W^{l+1,q}_{loc}(\Omega), \;\; p \in W^{l,q}_{loc}(\Omega)$$

et

$$|\mathbf{v}|_{l+1,q,\Omega_1} + |p|_{l,q,\Omega_1} \leq c(\|f\|_{l,q,\Omega''} + \|\mathbf{v}\|_{1,q,\Omega''-\Omega_1} + \|\mathbf{v}\|_{q,\Omega''-\Omega_1}) \tag{2.2.53}$$

où $\overline{\Omega}' \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega''$. On choisit dans (2.2.51) φ de classe C^∞ égal à 1 dans $\overline{\Omega}'$ et 0 en dehors de Ω_1, en appliquant alors le théorème 2.2.2 aux solutions de (2.2.51) et en utilisant l'estimation (2.2.53) on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_\epsilon|_{l+2,q,\Omega'} + |p_\epsilon|_{l+1,q,\Omega'} &\leq c_1(\|f\|_{l,q,\Omega_1} + \|\mathbf{v}_\epsilon\|_{1,q,\Omega_1-\Omega'} + \|p\|_{q,\Omega_1-\Omega'}), \\ &\leq c_1(\|f\|_{l,q,\Omega''} + \|\mathbf{v}\|_{1,q,\Omega''-\Omega'} + \|p\|_{q,\Omega''-\Omega'}). \end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on montre ainsi le théorème pour tout $m \geq 0$, ce qui termine la démonstration.

2.2.5 Estimations en norme L^q au voisinage de la frontière

Dans cette sous-section sont établies des estimations analogues à celles données dans le théorème 2.2.4, mais au voisinage de la frontière i.e., dans un sous-domaine de Ω dont la frontiére est une portion de la frontière de Ω. celà permettera d'obtenir la régularité des solutions faibles jusqu'à la frontière. la méthodes consiste à introduire un changement de variable approprié de façon que le problème de Stokes se transforme en un problème similaire mais dans le demi-plan.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant

Lemme 2.2.4 ([6] Lemme 14.2 page 669). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et σ une portion régulière de la frontière de Ω et soit $\phi \in W^{m-1/q,q}(\sigma)$, $m \geq 1$, $1 < q < \infty$, à support compacte dans σ. Effectuons le changement de variable (2.2.56) ci-dessous, et notons par $\widehat{\phi}$, $\widehat{\sigma}$ les transformés de ϕ et σ sous ce changement de variable, donc $\widehat{\phi}$ peut être considérée comme définie sur tout l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ à support compact dans $\widehat{\sigma}$. Alors, il existe une constante c indépendante de ϕ tel que*

$$c^{-1}\|\phi\|_{m-1/q,q(\sigma)} \leq \|\widehat{\phi}\|_{m-1/q,q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c\|\phi\|_{m-1/q,q(\sigma)}.$$

Théorème 2.2.6. *Soit Ω un domaine arbitraire de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soit Ω_0 un sous-domaine borné de Ω tel que $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega = \sigma$, avec σ est une portion de la frontière de Ω de classe C^{m+2}, $m \geq 0$. Considérons les fonctions suivantes:*

$$\mathbf{v} \in W^{1,q}(\Omega_0), \;\; p \in L^q(\Omega_0), \;\; 1 < q < \infty,$$

tel que

$$\begin{aligned}
(\nabla\mathbf{v},\nabla\psi) &= -<\mathbf{f},\psi> + (p,\nabla\cdot\psi), \;\; \textit{pour toute} \;\; \psi \in C_0^\infty(\Omega_0),\\
(\mathbf{v},\nabla\varphi) &= 0 \;\; \textit{pour toute} \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega_0),\\
\mathbf{v} &= \mathbf{v}_* \;\; \textit{sur} \;\; \sigma.
\end{aligned}$$

Alors, si

$$\mathbf{f} \in W^{m,q}(\Omega_0), \;\; \mathbf{v}_* \in W^{m+2-1/q,q}(\sigma).$$

On obtient

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(\Omega'), \;\; p \in W^{m+1,q}(\Omega'),$$

pour tout Ω' satisfaisant

(i) *$\Omega' \Subset \Omega_0$;*

(ii) *$\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$ est une sous-région strictement intérieur à σ.*

Finalement, on a l'estimation suivante:

$$\|\mathbf{v}\|_{m+2,q,\Omega'} + \|p\|_{m+1,q,\Omega'} \leq c(\|\mathbf{f}\|_{q,\Omega_0} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-1/q,q,\sigma} + \|\mathbf{v}\|_{1,q,\Omega_0} + \|p\|_{q,\Omega_0}) \tag{2.2.54}$$

où, $c = c(m,n,q,\Omega',\Omega_0)$.

Démonstration

Supposons qu'il existe une portion σ de $\partial\Omega$ qui est de classe C^2, i.e., il existe un système de coordonnées $\{x_1,...,x_n\}$ d'origine x_0 et une fonction $\zeta = \zeta(x_1,...,x_{n-1})$ qui représente σ, quitte à faire une rotation des coordonnées avec l'origine, on peut toujours supposer

$$\nabla\zeta(0) = 0. \tag{2.2.55}$$

Soit Ω_0 un sous-domaine de Ω tel que $\sigma = \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$, et considérons la paire de fonctions

$$\mathbf{v} \in W^{2,q}(\Omega_0), \;\; p \in W^{1,q}(\Omega_0), \;\; 1 < q < \infty,$$

solutions du problème Stokes dans le domaine Ω_0 correspondant aux données $\mathbf{f} \in L^q(\Omega_0)$ et $\mathbf{v}_* \in W^{2-1/q,q}(\sigma)$. Si on convient que l'axe positif des x_n est dirigé vers l'intérieur de Ω, alors pour $d > 0$ suffisamment petit le cylindre

$$D = \{x \in \Omega : |x'| < d,\ \ \zeta < x_n < \zeta + 2d\}$$

est continu dans Ω_0. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ donnée par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega - D \\ 0 & \text{si } x \in \overline{D'} \end{cases}$$

où

$$D' = \{x \in \Omega : |x'| < \delta,\ \ \zeta < x_n < \zeta + 2\delta,\ \ \delta < d\}.$$

en effectuant le changement de variable

$$y_i' = x_i', \quad y_n = x_n - \zeta, \tag{2.2.56}$$

les fonctions $\mathbf{v}$, p, $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_*$, et φ se transforme par les nouvelles coordonnées en $\widehat{\mathbf{v}}$, $\widehat{p}$, $\widehat{\mathbf{f}}$, $\widehat{\mathbf{v}}_*$, et $\widehat{\phi}$, repsectivement, quand aux cubes D et D', ils se transforment en

$$\hat{D} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y'| < d,\ \ 0 < y_n < 2d\}$$

et

$$\hat{D}' = \{y \in \mathbb{R}^n : |y'| < \delta,\ \ 0 < y_n < 2\delta\},$$

respectivement. Si f et $\widehat{f}$ sont deux fonctions liées par la transformation (2.2.56), alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y_i} - \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y_n}\frac{\partial \zeta}{\partial x_i},\ \ i = 1,\ldots,n-1. \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} &= \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y_n} \\
\frac{\partial \widehat{f}}{\partial y_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \zeta}{\partial y_i},\ \ i = 1,\ldots,n-1.
\end{aligned}$$

En posant

$$\mathbf{u} = \widehat{\phi}\widehat{\mathbf{v}},\ \ \pi = \widehat{\phi}\widehat{p}$$

et étendant toutes les fonctions par la valeur 0 en dehors de $\widehat{D}$, on obtient aprés un calcul simple mais long

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta \mathbf{u} = \nabla \pi + \mathbf{F} & \\ \nabla . \mathbf{u} = g, & \quad dans \ \ \mathbb{R}^n_+. \\ \mathbf{u} = \mathbf{\Phi}, \ \text{ sur } \ \Sigma. & \end{array}\right. \tag{2.2.57}$$

où

$$\begin{aligned} F_i &= \widehat{\varphi}\widehat{f_i} + D_j(b_{ji}\pi) + D_j(a_{jk}D_k u_i) + \alpha_i\widehat{p} + \beta\widehat{v}_i + \gamma_j D_j\widehat{v}_i \\ g &= D_j(c_{ji}u_i) + \eta_i\widehat{v}_i \\ \Phi_i &= \widehat{\varphi}\widehat{v}_{*i} \end{aligned} \tag{2.2.58}$$

et a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, α_j, β, γ_j et η_j sont des fonctions continûment différentiables dans la fermeture de $\widehat{D}$. De plus, les fonctions a_{jk}, b_{jk} et c_{jk} sont bornées par $A|\nabla\zeta|$ où la constante A est indépendante de d, quand aux fonctions α_j, β, γ_j et η_j sont nulles dans le complémentaire de $\widehat{D}$. en rappelant (2.2.55) on voit que

$$a_{jk}(0) = b_{jk}(0) = c_{jk}(0) = 0. \tag{2.2.59}$$

De (2.2.58) on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|_{q,\mathbb{R}^n_+} &\le c_1\Big(\|\widehat{\mathbf{f}}\|_{q,\widehat{D}} + \|\widehat{p}\|_{q,\widehat{D}} + \|\widehat{\mathbf{v}}\|_{1,q,\widehat{D}} + a\|D^2\mathbf{u}\|_{q,\mathbb{R}^n_+} + b\|\nabla\pi\|_{q,\mathbb{R}^n_+}\Big) \\ \|g\|_{1,q,\mathbb{R}^n_+} &\le c_2\Big(\|\widehat{\mathbf{v}}\|_{1,q,\widehat{D}} + c\|D^2\mathbf{u}\|_{q,\mathbb{R}^n_+}\Big) \end{aligned} \tag{2.2.60}$$

où les constantes c_1 et c_2 peut êtres choisies indépendantes de d, et

$$\begin{aligned} a &= \max_{j,k}\max_{\widehat{D}}(a_{jk}) \\ b &= \max_{j,k}\max_{\widehat{D}}(b_{jk}) \\ c &= \max_{j,k}\max_{\widehat{D}}(c_{jk}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a du lemme 2.2.4

$$\mathbf{\Phi} \in W^{1,q}(\Sigma), \ \ [\nabla\mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q} < \infty$$

et on a

$$D^2\mathbf{u} \in L^q(\mathbb{R}^n_+)$$

On peut donc appliquer le théorème 2.2.4 avec $m = 0$ au système (2.2.57), en particulier les fonctions $\mathbf{u}$ et π satisfont à l'inégalité (2.2.45). On a

$$\|\widehat{\mathbf{f}}\|_{q,\widehat{D}} + \|\widehat{\mathbf{v}}\|_{1,q,\widehat{D}} \leq c_3\big(\|\mathbf{f}\|_{q,D} + \|\mathbf{v}\|_{1,q,D} + \|p\|_{q,D}\big) \tag{2.2.61}$$

et, en utilisant le lemme 2.2.4, le théorème 1.1.5 et les propriétés de la fonction φ, on obtient

$$[\nabla\mathbf{\Phi}]_{1-1/q,q} \leq c_4\|\widehat{\varphi}\widehat{\mathbf{v}}_*\|_{2-1/q,q(\Sigma)} \leq c_5\|\mathbf{v}_*\|_{2-1/q,q(\sigma)}, \tag{2.2.62}$$

où c_3, c_4, et c_5 sont des constantes ne dépendant pas de d, $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$, p, et $\mathbf{\Phi}$. En adjoignant les inégalité (2.2.60)-(2.2.62) et en utilisant (2.2.45) on obtient

$$\begin{aligned}\big[1 - c_6(a+c)\big]\|D^2\mathbf{u}\|_{q,\mathbb{R}^n_+} + (1 - c_7 b)\|\nabla\pi\|_{q,\mathbb{R}^n_+}\\ \leq c_8\big(\|\mathbf{f}\|_{q,D} + \|\mathbf{v}_*\|_{2-1/q,q(\sigma)} + \|\mathbf{v}\|_{1,q,D} + \|p\|_{q,D}\big)\end{aligned} \tag{2.2.63}$$

où c_6, c_7, et c_8 sont des constantes ne dépendant pas de d, $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$, p, et $\mathbf{\Phi}$. En rappelant (2.2.59), on peut choisir d assez petit pour que la conditions suivante soit satisfaite:

$$(a+c) < 1/c_6, \;\; b < 1/c_7.$$

Donc, de (2.2.63) et l'inégalité évidente suivante:

$$\|w\|_{l,q,D'} \leq \|\varphi w\|_{l,q,D} \leq c_9\|\widehat{\varphi}\widehat{w}\|_{l,q,\mathbb{R}^n_+} \leq c_{10}\|\varphi w\|_{l,q,D} \tag{2.2.64}$$

vérifiée pour tout $l \geq 0$ et pour un choix adéquat de c_9, c_{10}, on obtient finalement

$$\|\mathbf{v}\|_{2,q,D'} + \|p\|_{1,q,D'} \leq c_{11}(\|\mathbf{f}\|_{q,D} + \|\mathbf{v}_0\|_{2-1/q,q(\sigma)} + \|\mathbf{v}\|_{1,q,D} + \|p\|_{q,D}),$$

où c_{11} est indépendante de $\mathbf{v}$, p, $\mathbf{f}$ et $\mathbf{v}_0$. Il est facile à présent de généraliser cette estimation au cas où

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(\Omega_0), \;\; p \in W^{m+2,q}(\Omega_0), \;\; m > 0.$$

Ce qui correspond aux donnée

$$\mathbf{f} \in W^{m,q}(\Omega_0), \;\; \mathbf{v}_0 \in W^{m+2-1/q,q}(\sigma) \tag{2.2.65}$$

et σ est supposé de classe C^{m+2}. Pour atteindre ce but, il faut utiliser le théorème 2.2.4 et un raisonnement par récurrence comme dans le théorème 2.2.5. On obtient au final l'estimation (2.2.54).

Maintenant le cas où

$$\mathbf{v} \in W^{1,q}(\Omega_0), \;\; p \in L^q(\Omega_0)$$

On peut montrer (voir [5] ou [9]) en utilisant la méthode des quotient différentiels de Nirenberg et des estimations bien adéquate que

$$\mathbf{v} \in W^{2,q}(D'), \;\; p \in W^{1,q}(D').$$

Et donc $\mathbf{v}$ et p vérifie aussi l'estimation (2.2.54).

2.2.6 Existence, unicité, et estimations en norme L^q dans un domaine borné

Les estimations intérieurs et au voisinage de la frontière nous permettrons de dériver des estimations dans tout le domaine Ω pour les solutions généralisé, dans le cas où Ω est borné et régulier. Posons

$$\|w\|_{k,q/\mathbb{R}} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|w + c\|_{k,q} \tag{2.2.66}$$

On a le résultat de régularité suivant:

Lemme 2.2.5. *Soit* $\mathbf{v} \in W^{1,q}(\Omega)$, $p \in L^q(\Omega)$ *une solution au problème de Stokes (2.2.1)-(2.2.3) dans un domaine borné* $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *de classe* C^{m+2}, $m \geq 0$, *correspondant aux données*

$$\mathbf{f} \in W^{m,q}(\Omega), \;\; \mathbf{v}_* \in W^{m+2-1/q,q}(\partial\Omega).$$

Alors,

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(\Omega), \;\; p \in W^{m+1,q}(\Omega),$$

De plus, on l'estimation suivante:

$$\|\mathbf{v}\|_{m+2,q} + \|p\|_{m+1,q/\mathbb{R}} \leq c\big(\|\mathbf{f}\|_{m,q} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-1/q,q(\partial\Omega)}\big) \tag{2.2.67}$$

où $c = c(m,n,q,\Omega)$.

Démonstration

Puisque $\overline{\Omega}$ est compact, on peut donc le recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes, on déduit des théorèmes 2.2.5 et 2.2.6 que

$$\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(\Omega), \;\; p \in W^{m+1,q}(\Omega)$$

et on l'estimation suivante

$$|\mathbf{v}|_{m+2,q} + |p|_{m+1,q} \leq c_1\big(\|\mathbf{f}\|_{m,q} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-1/q,q(\partial\Omega} + \|p\|_q + \|\mathbf{v}\|_{1,q}\big).$$

En ajoutant aux deux membres de l'inégalité les norme L^q de toutes les dérivées de $\mathbf{v}$ (resp, de p) jusqu'à l'ordre $m+1$ (resp, jusqu'à l'ordre m) et en utilisant l'inégalité d'Ehrling on obtient

$$\|\mathbf{v}\|_{m+2,q} + \|p\|_{m+1,q} \leq c_2\big(\|\mathbf{f}\|_{m,q} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-1/q,q(\partial\Omega} + \|p\|_q + \|\mathbf{v}\|_q\big). \tag{2.2.68}$$

Il est clair que l'inégalité (2.2.68) reste vérifiée si on remplace p par $p+c$, où $c \in \mathbb{R}$. Donc en prenant $\inf_{c\in\mathbb{R}}$ des deux membres de la nouvelle inégalité, on obtient

$$\|\mathbf{v}\|_{m+2,q} + \|p\|_{m+1,q/\mathbb{R}} \leq c\big(\|\mathbf{f}\|_{m,q} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-1/q,q(\partial\Omega} + \|p\|_{q/\mathbb{R}} + \|\mathbf{v}\|_q\big). \tag{2.2.69}$$

Pour montrer l'estimation (2.2.67) il suffit de montrer que

$$\|p\|_{q/\mathbb{R}} + \|\mathbf{v}\|_q \leq c_3\big(\|\mathbf{f}\|_{m,q} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-1/q,q(\partial\Omega}\big). \tag{2.2.70}$$

où, c_3 est indépendante des donnée. l'inégalité (2.2.70) est vérifiée, pourvu que la solution $\mathbf{u}$, p est unique (p à une constante prés). Supposons en effet que cette inégalité n'est pas vérifiée, alors on peut construire une suite

$$\{\mathbf{v}_k\} \in W^{m+2,q}(\Omega), \ \ \{p_k\} \in W^{m+1,q}(\Omega),$$

tel que

$$\|\mathbf{v}_k\|_q + \|p_k\|_{q/\mathbb{R}} = 1, \ \text{ pour tout } \ k \in \mathbb{N},$$

Quand au second membre de (2.2.70) tend vers zéro. Par (2.2.68) on obtient que

$$\|\mathbf{v}_k\|_{m+2,q} + \|p_k\|_{m+1,q/\mathbb{R}}$$

est uniformément borné en k, on peut donc extraire une sous-suite qui converge fortement vers

$$\mathbf{u} \in W^{1,q}(\Omega), \ \ \pi \in L^q(\Omega),$$

respectivement, avec

$$\|\mathbf{u}\|_q + \|\pi\|_{q/\mathbb{R}} = 1.$$

Or cette propriété est contredite par le lemme suivant:

Lemme 2.2.6. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, de classe C^2. Si $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, $p \in L^q(\Omega)$ une solution au problème de Stokes (2.2.1)-(2.2.2) avec $\mathbf{f} = 0$ et $\mathbf{v}_0 = 0$, alors $\mathbf{v} = 0$, $p = const$, p.p. dans Ω.*

Démonstration

Si $q \geq 2$, le théorème est une conséquence immédiate du théorème 2.2.1. Supposons donc que $q < 2$, Par le lemme 2.2.4 on a

$$\mathbf{v} \in W^{2,q}(\Omega), \;\; p \in W^{1,q}(\Omega),$$

et en utilisant le théorème des injections de Sobolev, on obtient

$$\mathbf{v} \in W^{1,r_1}(\Omega), \;\; p \in L^{r_1}(\Omega), \;\; r_1 = nq/(n-q).$$

Si $r_1 \geq 2$ la démonstration est terminée, sinon en utilisant de nouveau le lemme 2.2.4 pour obtenir

$$\mathbf{v} \in W^{2,r_1}(\Omega), \;\; p \in W^{1,r_1}(\Omega),$$

et donc par le théorème des injections de Sobolev on obtient

$$\mathbf{v} \in W^{1,r_2}(\Omega), \;\; p \in L^{r_2}(\Omega), \;\; r_2 = nq/(n-2q) > r_1.$$

En continuant ainsi cette procédure un nombre fini de fois on montre alors

$$\mathbf{v} \in W^{1,2}(\Omega).$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.

Théorème 2.2.7. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, de classe C^{m+2}, $m \geq 0$.Pour tout*

$$\mathbf{f} \in W^{m,q}(\Omega), \;\; \mathbf{v}_* \in W^{m+2-1/q,q}(\partial\Omega),$$

$1 < q < \infty$, avec

$$\int_{\partial} \mathbf{v}_* \cdot n = 0,$$

il existe une et une seul pair de solution $\mathbf{v}$, p tel que

(i) $\mathbf{v} \in W^{m+2,q}(\Omega), \;\; p \in W^{m+1,q}(\Omega)$;

(ii) *$\mathbf{v}$, p satisfait au système de Stokes (2.2.1) p.p. dans Ω et $\mathbf{v}$ satisfait à (2.2.2) au sens de trace.*

De plus, cette solution vérifie l'estimation suivante

$$\|\mathbf{v}\|_{m+2,q} + \|p\|_{m+1,q/\mathbb{R}} \leq c\big(\|\mathbf{f}\|_{m,q} + \|\mathbf{v}_*\|_{m+2-1/q,q(\partial\Omega)}\big), \tag{2.2.71}$$

où $c = c(m,n,q,\Omega)$.

Démonstration

Il suffit de montrer l'existence d'une solution $\mathbf{v} \in W^{1,q}(\Omega)$, $p \in L^q(\Omega)$, le reste serai une conséquence directe du lemme 2.2.5 Considérons la suite $\mathbf{f}_k$ (resp. $\mathbf{v}_{0k}$) suffisamment régulières qui converge vers $\mathbf{f}$ (resp. vers $\mathbf{v}_0$) dans $W^{m,q}(\Omega)$ (resp. dans $W^{m+2-1/q,q}(\partial\Omega)$). Quitte à poser

$$\mathbf{v}_{0k} = \mathbf{v}_k - \Phi \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_k \cdot n, \;\; k \in \mathbb{N}$$

où $\mathbf{v}_k$ est une suite qui converge vers $\mathbf{v}_0$ dans l'espace $W^{m+2-1/q,q}(\partial\Omega)$, et Φ est une fonction de classe C^∞ tel que $\int_{\partial\Omega} \Phi = 1$, on peut toujours supposer que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_{0k} \cdot n = 0.$$

D'aprés le théorème 2.2.1 il existe des solutions

$$\{\mathbf{v}_k\}, \;\; \{p_k\}$$

correspondant aux données $\mathbf{f}_k$ et $\mathbf{v}_{0k}$. En appliquant le lemme 2.2.5, on déduit

$$\mathbf{v}_k \in W^{2,2}(\Omega), \;\; p_k \in W^{1,2}(\Omega), \;\; \text{pour tout} \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Supposons que $n = 2$. En utilisant l'injection suivante:

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \;\; r \in (1,\infty),$$

on obtient

$$\mathbf{v}_k \in W^{1,r}(\Omega), \;\; p_k \in L^r(\Omega), \;\; \text{pour tout} \;\; r \in (1,\infty),$$

pour $\mathbf{v}_k$ c'est moins évident, il suffit au fait de remarquer que

$$\mathbf{v}_k \in W^{1,2}(\Omega), \;\; D^\alpha \mathbf{v}_k \in W^{1,2}(\Omega), \;\; |\alpha| = 1.$$

Et on a donc de nouveau par le lemme 2.2.5

$$\mathbf{v}_k \in W^{2,q}(\Omega), \;\; p_k \in W^{1,q}(\Omega)$$

et l'estimation (2.2.67) est vérifiée. En faisant tendre $k \to \infty$ et en utilisant l'estimation (2.2.67) on obtient alors

$$\mathbf{v}_k \to \mathbf{v} \ \text{ fortement dans } W^{2,q}(\Omega),$$

$$p_k \to p \ \text{ fortement dans } W^{1,q}(\Omega).$$

Il est clair que $\mathbf{v}$, p est solution du système de Stokes (2.2.1) correspondant aux donnée $\mathbf{f}$, et v_0 qui est la trace de $\mathbf{v}$ à la frontière. Pour $n > 2$, on a

$$\mathbf{v}_k \in W^{1,r}(\Omega), \ \ p_k \in L^r(\Omega), \ \text{ pour tout } \ r \in (1{,}2n/(n-2)).$$

Donc, si $2 < n \leq 4$, de nouveau par le lemme 2.2.5 et le théorème d'injection de Sobolev on déduit

$$\mathbf{v} \in W^{2,q}(\Omega), \ \ p \in W^{1,q}(\Omega).$$

On procède en suite de la même maniére qu'on a fait pour le cas $n = 2$. Pour $n > 4$, on appliquant le lemme 2.2.5 deux fois et le théorème d'injection de Sobolov on obtient

$$\mathbf{v}_k \in W^{1,r}(\Omega), \ \ p_k \in L^r(\Omega), \ \text{ pour tout } \ r \in (1{,}2n/(n-4))$$

et donc pour les même raisons on retrouve l'existence pour $4 < n \leq 6$, et ainsi de suite on démontre ainsi l'existence d'une solution pour tout $1 < q < \infty$ et $n \geq 2$.CQFD

2.3 Le système de Lamé

2.3.1 Existence, unicité et régularité

On considère le système d'équations aux dérivées partielles suivant

$$-\eta \Delta u - (\eta + \lambda)\nabla(\nabla \cdot u) = F \ \text{ dans } \ \Omega \tag{2.3.1}$$

avec la condition aux limites

$$u(x) = 0, \ \ x \in \partial\Omega. \tag{2.3.2}$$

Théorème 2.3.1. *Soit* $1 < p < \infty$ *et* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domaine borné, supposons*

$$\eta > 0, \ \ 4\eta + 3\lambda > 0. \tag{2.3.3}$$

(i) Si

$$\Omega \in C^2, \quad F \in W^{-1,p}(\Omega), \tag{2.3.4}$$

alors il existe une unique fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qui satisfait (2.3.1) au sens des distributions et on a l'estimation suivante

$$\|u\|_{1,p} \leq c(p,\Omega)\|F\|_{-1,p}. \tag{2.3.5}$$

(ii) Si

$$\Omega \in C^{k+2}, \quad F \in W^{k,p}(\Omega), \quad k = 1,2,..., \tag{2.3.6}$$

alors $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ et

$$\|u\|_{k+2,p} \leq c(k,p,\Omega)\|F\|_{k,p}. \tag{2.3.7}$$

Démonstration

L'opérateur

$$A = -\mu\Delta - (\mu + \lambda)\nabla\nabla\cdot \tag{2.3.8}$$

est fortement elliptique.

Si $F \in C_0^\infty(\Omega)$ l'existence et l'unicité d'une solution faible dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donnée par le théorème de Lax-Milgram. le système (2.3.1) est elliptique au sens De douglis-Nirenberg (voir [7] page 43-44), et donc la régularité et les estimations sont une conséquence du théorème 10.5 de [7].

CHAPITRE 3

Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection

3.1 Formulation du problème

On considère le système d'équations suivant,

$$\rho(v \cdot \nabla)v - \eta\triangle v - \lambda\nabla(\nabla \cdot v) = -R\nabla(\rho T) - g\rho\vec{e_3} \tag{3.1.1}$$

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0, \tag{3.1.2}$$

$$C_V\rho v \cdot \nabla T - k\triangle T + R\rho T\nabla \cdot v = \eta\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot v)\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \zeta(\nabla \cdot v)^2 \tag{3.1.3}$$

dans le domaine

$$\Omega_\infty = \{x \in \mathbf{R}^3 | 0 < x_3 < h\}$$

où $v = (v_1,v_2,v_3)$ représente le vecteur vitesse, ρ la densité, T la température, p la pression, η et ζ les coefficients de viscosité, κ la conductibilité thermique, g l'accélération gravitationnelle, $\overrightarrow{e}_3 = (0,0,1)$, C_V la capacité calorifère à volume constant et R la constante universelle du gaz, tandis que λ est donné par $\lambda = \frac{1}{3}\eta + \zeta$. On supposera que la pression p est donnée par la loi valable pour les gaz parfait

$$p = R\rho T \tag{3.1.4}$$

On supposera que toutes les fonctions, données ou inconnues, sont périodiques de période 2π par rapport aux coordonnées x_1 et x_2, de sorte que l'étude du système est resteinte au domaine relativement compact

$$\Omega = \Omega'_\tau \times]0,h[,$$

où Ω'_τ est le tore de deux dimension.On désignera par x' son point générique, de sorte que $x = (x',x_3) \in \Omega$ si $0 < x_3 < h$.

Au système (3.1.1)-(3.1.3) on ajoutera les conditions au limites suivantes

$$v|_{x_3} = 0, \;\; v_3|_{x_3=h} = \frac{\partial v_i}{\partial x_3}|_{x_3=h} = 0 \;\; (i = 1,2), \tag{3.1.5}$$

$$T(x',0) = T_0(x') = \overline{T}_0 + \epsilon(x'), \;\; T(x',h) = \overline{T}_0 - \frac{gh}{R + C_V}, \tag{3.1.6}$$

où $\epsilon(x')$ est une fonction définie sur Ω'_τ. Le problème doit être complété par la condition naturelle

$$\int_\Omega \rho(x)dx = M_\rho, \tag{3.1.7}$$

où M_ρ est une constante positive.

Théorème 3.1.1. *Si $\overline{T}_0$ et M_ρ sont suffisamment grands et si $\|\epsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)}$ est suffisamment petit, alors le problème (3.1.1)-(3.1.3), (3.1.5)-(3.1.7) admet au moins une solution $(v,T,\rho) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.*

3.2 Préliminaire à la démonstration

Du point de vue physique, la solution obtenue ici correspond à un état proche de l'état hydrostatique, i.e., une distribution non-homogène de la température autour de $\overline{T}_0$ sur le fond $\{x_3 = 0\}$ peut engendrer un mouvement de convection stationnaire dans un état proche de l'état hydrostatique, du point de vue mathématique la solution (v,T,ρ) sera trouvé dans un voisinage de $(0,\overline{T}_{hs},\overline{\rho}_{hs})$, ou $\overline{\rho}_{hs}$ et $\overline{T}_{hs}$ sont les distributions respectives de densité et de température caractérisant l'état hydrostatique et qui sont données par

$$\overline{\rho}_{hs}(x_3) = \overline{\rho}_{hs}(0)(1 - \frac{gx_3}{\overline{T}_0(R + C_V)})^{\frac{C_V}{R}} \quad , \quad \overline{T}_{hs}(x_3) = \overline{T}_0 - \frac{gx_3}{R + C_V} \tag{3.2.1}$$

(avec $\overline{\rho}_{hs}(0)$ est déterminé par $\int_\Omega \overline{\rho}_{hs}(x)dx = M_\rho$). Ou si on utilise l'exposant diabatique

$$\gamma = \frac{R}{C_V} + 1 \tag{3.2.2}$$

les fonctions $\overline{\rho}_{hs}(x_3)$ et $\overline{T}_{hs}(x_3)$ sont exprimées par

$$\overline{\rho}_{hs}(x_3) = \overline{\rho}_{hs}(0)\Big(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma R\overline{T}_0}gx_3\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad , \quad \overline{T}_{hs}(x_3) = \overline{T}_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma R}gx_3.$$

Il est bien connu que la valeur de γ est liée à la nature du gaz, ici la démonstration sera faite sous la condition

$$1 < \gamma < 2. \tag{3.2.3}$$

Dans la démonstration on prend à vraie dire des fonctions de référence $\overline{T}$ et $\overline{\rho}$ qui sont à leur tour définies dans un voisinage de $\overline{T}_{hs}$ et de $\overline{\rho}_{hs}$. On pose en effet

$$\overline{T}(x',x_3) = \overline{T}_{hs}(x_3) + (1 - \frac{x_3}{h})\epsilon(x'), \tag{3.2.4}$$

$$\overline{\rho}(x',x_3) = C_{M_\rho}\frac{(\overline{T}_{hs}(x_3))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\overline{T}(x',x_3)}, \tag{3.2.5}$$

où

$$C_{M_\rho} = M_\rho\Big[\int_\Omega \frac{(\overline{T}_{hs}(x_3))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\overline{T}(x',x_3)}dx\Big]^{-1}. \tag{3.2.6}$$

On obtient par des calculs élémentaires

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(R\overline{\rho}\overline{T}) = 0, \quad i = 1,2, \qquad -\frac{\partial}{\partial x_3}(R\overline{\rho}\overline{T}) - \overline{\rho}g = g\overline{\rho}\frac{(1-\frac{x_3}{h})\epsilon(x')}{\overline{T}_{hs}(x_3)}, \tag{3.2.7}$$

$$C_V\overline{\rho}\nabla\overline{T} - R\overline{T}\nabla\overline{\rho} = (R + C_V)\overline{\rho}\nabla\Big(\Big(1 - \frac{x_3}{h}\Big)\epsilon\Big) + \overrightarrow{e}_3\frac{g\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}}\Big(1 - \frac{x_3}{h}\Big)\epsilon. \tag{3.2.8}$$

Posons maintenant

$$\vartheta(x) = T(x) - \overline{T}(x), \quad \sigma(x) = \rho(x) - \overline{\rho}(x). \tag{3.2.9}$$

On remarque que, en vertu de (3.1.2) et de (3.2.8), on a

$$\begin{aligned} C_V\rho v\cdot\nabla T + R\rho T\nabla\cdot v &= v\cdot[C_V\rho\nabla T - RT\nabla\rho] \\ &= (R + C_V)\overline{\rho}v\cdot\nabla((1 - \frac{x_3}{h})\epsilon) + v_3\frac{g\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}}\Big(1 - \frac{x_3}{h}\Big)\epsilon \\ &+v\cdot(C_V[\sigma\nabla\overline{T} + \overline{\rho}\nabla\vartheta + \sigma\nabla\vartheta] - R[\vartheta\nabla\overline{\rho} + \overline{T}\nabla\sigma + \vartheta\nabla\sigma]) \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Compte tenu de (3.2.7) et de (3.2.10), le système d'équations (3.1.1)-(3.1.3) pour les inconnues (v,T,ρ) se transforme en le système d'équations pour les inconnues (v,ϑ,σ)

$$-\eta\Delta v - \lambda\nabla(\nabla\cdot v) + R\nabla(\sigma\overline{T} + \overline{\rho}\vartheta) + g\sigma\overrightarrow{e}_3 = F(v,\vartheta,\sigma), \tag{3.2.11}$$

$$\nabla\cdot(\sigma v) = -\nabla\cdot(\overline{\rho}v), \tag{3.2.12}$$

$$-\kappa\Delta\vartheta = G(v,\vartheta,\sigma), \tag{3.2.13}$$

où

$$F(v,\vartheta,\sigma) = -(\overline{\rho}+\sigma)(v\cdot\nabla)v - R\nabla(\sigma\vartheta) + g\frac{\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}(x_3)}\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\epsilon(x')\overrightarrow{e}_3, \tag{3.2.14}$$

$$G(v,\vartheta,\sigma) = \eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot v\Big)\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \zeta(\nabla\cdot v)^2 \tag{3.2.15}$$

$$+\kappa\Delta\Big(\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\epsilon\Big) - (R+C_V)\overline{\rho}v\cdot\nabla\Big(\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\epsilon\Big) - v_3 g\frac{\overline{\rho}}{\overline{T}_{hs}(x_3)}\Big(1-\frac{x_3}{h}\Big)\epsilon(x')$$

$$+v\cdot(R[\vartheta\nabla\overline{\rho} + \overline{T}\nabla\sigma + \vartheta\nabla\sigma] - C_V[\sigma\nabla\overline{T} + \overline{\rho}\nabla\vartheta + \sigma\nabla\vartheta]).$$

Il est clair que que ϑ et σ doivent satisfaire aux conditions suivantes

$$\vartheta|_{x_3=0} = \vartheta|_{x_3=h} = 0, \tag{3.2.16}$$

$$\int_\Omega \sigma(x)dx = 0, \tag{3.2.17}$$

tandis que v doit satisfaire à le même condition (3.1.5). Le problème (3.1.1)-(3.1.3), (3.1.5)-(3.1.7) est transformé en le problème (3.2.11)-(3.2.13), (3.1.5), (3.2.16)-(3.2.17).

Remarque 3.2.1. *Si $(v^*,\vartheta^*,\sigma^*)$ est une solution de (3.2.11)-(3.2.13), (3.1.5), (3.2.16)-(3.2.17), alors il est bien clair que (v^*,T^*,ρ^*) avec $T = \overline{T} + \vartheta^*$ et $\rho^* = \overline{\rho} + \sigma^*$, est une solution au problème (3.1.1)-(3.1.3), (3.1.5)-(3.1.7)*

3.3 Position des équations linéarisés

L'outil principal pour la démonstration de l'existence d'une solution pour le problème (3.2.11)-(3.2.13), (3.1.5), (3.2.16)-(3.2.17) est le théorème du point fixe de Schauder,on appliquera le théorème de Schauder sur un opérateur nonlinéaire Φ qui sera défini à partir des équations linéarisées, la solution sera donc un point fixe de cet opérateur. Pour définir l'opérateur Φ on pose

$$H_a^3(\Omega) = \{v \in H^3(\Omega;\mathbb{R}^3)| \ \ v \ \text{ satisfait à } \ (3.1.5)\}$$

$$H_b^2(\Omega) = \{\vartheta \in H^2(\Omega;\mathbb{R})| \ \ \vartheta \ \text{ satisfait à } \ (3.2.16)\}$$

$$H_c^2(\Omega) = \{\sigma \in H^2(\Omega;\mathbb{R})| \ \ \sigma \ \text{ satisfait à } \ (3.2.17)\}$$

Remarque 3.3.1. *Posant*

$$X \equiv \Big\{(v,\vartheta,\sigma); v \in H^2(\Omega), \ \ \vartheta \in H^1(\Omega), \ \ \sigma \in H^1(\Omega)\Big\}$$

$$V \equiv H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$$

munis des normes

$$\|(v,\vartheta,\sigma)\|_X = (\|v\|_{H^2}^2 + \|\vartheta\|_{H^1}^2 + \|\sigma\|_{H^1}^2)^{\frac{1}{2}}, \ \ \|(v,\vartheta,\sigma)\|_V = (\|v\|_{H^3}^2 + \|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|\sigma\|_{H^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

respectivement. D'aprés le théorème 1.1.6 $V \hookrightarrow\hookrightarrow X$, et donc toute boule

$$B = \{(v,\vartheta,\sigma) \in V, \ \ \|(v,\vartheta,\sigma)\|_V \leq a, \ \ a > 0\}$$

est compacte et convexe dans X.

Lemme 3.3.1. *Soit $(v',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$. L'équation*

$$-\kappa\Delta\vartheta = G(v',\vartheta',\sigma') \tag{3.3.1}$$

admet une seul solution ϑ dans $H_b^2(\Omega)$.

Lemme 3.3.2. *Soit $(v',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$. Soit $\vartheta \in H_b^2(\Omega)$ la solution de l'équation (3.3.2) obtenue dans le lemme 3.3.2. Alors l'équation*

$$-\eta\Delta v - \lambda\nabla(\nabla\cdot v) = -R\nabla(\sigma'\overline{T} + \overline{\rho}\vartheta) - g\sigma'\overrightarrow{e}_3 + F(v',\vartheta',\sigma') \tag{3.3.2}$$

admet une solution v et une seul dans $H_a^3(\Omega)$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème 2.3.1. Il est facile de voir que le second membre de (3.3.2) appartient aux moins à $H^1(\Omega)$.

Lemme 3.3.3. *Soit $(v',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$. Soit $v \in H_a^3(\Omega)$ la solution de l'équation (3.3.2) obtenue dans le lemme 3.3.2. Si k est un nombre suffisamment grand,* *l'équation*

$$k(\sigma - \sigma') + \nabla \cdot (\sigma v) = -\nabla(\overline{\rho} v) \tag{3.3.3}$$

admet une seul solution σ dans $H_c^2(\Omega)$.

Démonstration voir [2].

3.3.1 Définition de l'opérateur

Gràce aux lemmes 3.3.1-3.3.3 on peut à présent définir l'opérateur $\Phi : H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega) \to H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$, en posant pour $(v',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$

$$\Phi(v',\vartheta',\sigma') = (v,\vartheta,\sigma) \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega), \tag{3.3.4}$$

où v, ϑ, σ sont les solutions des équations (3.3.1)-(3.3.3) obtenues dans les lemmes 3.3.1-3.3.3, et il est clair que le point fixe de cet opérateur constitue une solution du problème (3.2.11)-(3.2.13), (3.1.5), (3.2.16)-(3.2.17). Pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder sur l'opérateur Φ il suffit de trouver une boule B de $H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$ tel que

(i) Φ est bien définie sur B.

(ii) Φ est continue sur B par rapport à la topologie induite de $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

(iii) Φ est un contraction i.e., $\Phi(B) \subset B$.

La partie (i) est évidente, pour démontrer (ii) et (iii) il faut établir des estimations adéquates sur v,ϑ,σ des équations linéarisées. L'estimation de ϑ est plutôt facile à obtenir, quand aux estimations de v et σ elles exigent un traitement plutôt complexe.

3.4 Estimations des solutions ϑ, v, et σ des équations linéarisées

Estimation de ϑ

Lemme 3.4.1. *Soit $(v',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$. Alors la solution $\vartheta \in H_b^2(\Omega)$ de l'équation (3.3.1) obtenue dans le lemme 3.3.1 vérifie l'inégalité*

$$\|\vartheta\|_{H^2(\Omega)} \leq c_1(\|v'\|_{H^2(\Omega)} + \|\vartheta'\|_{H^2(\Omega)} + \|\sigma'\|_{H^2(\Omega)})^2 \tag{3.4.1}$$

$$+c_1\|v'\|_{H^2(\Omega)}\|\vartheta'\|_{H^2(\Omega)}\|\sigma'\|_{H^2(\Omega)} + c_1(1+\|v'\|_{H^2(\Omega)})\|\epsilon\|_{H^2(T^2)}$$

où c_1 est une constante positive.

Démonstration

Le lemme résulte immédiatement de la théorie classique des équations du type elliptique.

Estimations de la solution v et σ

Dans ce paragraphe sont établies les estimations des solutions v et σ des équations (3.3.2) et (3.3.1). Ces estimations constituent le point crucial de la démonstration du théorème 3.1.1. Nous en déduirons en effet l'existence d'un sous-ensemble borné B de $H^3_a(\Omega)\times H^2_b(\Omega)\times H^2_c(\Omega)$ tel que $\Phi(B)\subset B$. Dans toute la suite de cette section on faira l'hypothèse auquel nous nours référerons par (A) que $\overline{T}_0$ et M_ρ sont suffisamment grands et $\|\epsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)}$ suffisamment petit . C'est-à-dire, il existe trois constantes positives $\overline{c}_T$, $\overline{c}_\rho$, $\overline{c}_\epsilon$ telles que

$$\overline{T}_0 \geq \overline{c}_T, \quad M_\rho \geq \overline{c}_\rho, \quad \|\epsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)} \leq \overline{c}_\epsilon. \tag{3.4.2}$$

En outre les inégalités suivantes:

$$\overline{T}^a_0 + c \leq c_1^{'}\overline{T}^a_0, \quad \|\epsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)} + c \leq c_2^{'}$$

où $a>0$,$k=0$,1,2,3, valables pour $\overline{T}_0$ suffisamment grand et $\|\epsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)}$ suffisamment petit, seront souvent utilisées dans la suite sans les mentionner, il sera au fait facile de comprendre leurs utilisations sous-entendue. Quand au nombre k figurant dans le lemme 3.3.3, il peut être choisi tout à fait aléatoirement pourvu qu'il soit suffisamment grand, on posera en effet

$$k=\frac{\overline{\kappa}\delta_1}{2}, \quad \delta_1=\frac{R}{\eta+\lambda}C_{M_\rho}\Big(\overline{T}_0-\frac{\gamma-1}{\gamma R}gh\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{3.4.3}$$

où $\overline{\kappa}$ est un nombre suffisamment grand, vérifiant en particulier l'inégalité

$$\overline{\kappa}\geq 16\Big(1-\frac{\gamma-1}{\overline{T}_0\gamma R}gh\Big)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.4.4}$$

Dans l'énoncé des lemmes (3.4.2)-(3.4.11) on désignera par C'_k ou C_Ω les constantes qui dépendent de Ω mais ne dépendent ni de $\overline{T}_0$ ni de M_ρ et par $\tilde{C}_k$ les constante qui dépendent de Ω, de $\overline{T}_0$ et de M_ρ. On désignera aussi par $\tilde{C}(\overline{\rho})$ les constantes qui dépendent de $\overline{T}_0$ et/ou de M_ρ.

Lemme 3.4.2. *Soit* $(v',\vartheta',\sigma') \in H_a^3(\Omega) \times H_b^2(\Omega) \times H_c^2(\Omega)$. *Soient* v *et* σ *la solution de l'équation (3.3.2) et celle de (3.3.3) obtenues dans les lemmes 3.3.2 et 3.3.3 avec k saisfaisant à (3.4.3)-(3.4.4). Alors on a*

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla v\|_{L_2}^2 + \frac{\lambda}{R}\|\nabla\cdot v\|_{L_2}^2 + k\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma\Big\|_{L_2}^2 \tag{3.4.5}$$

$$\leq k\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|_{L_2}^2 - C_1'(\overline{T}_0^2 - 1)\|\sigma'\|_{L_2}^2 + C_1'(\|F\|_{L_2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\sigma\|_{L_2}^2) + \tilde{C}_1\|\vartheta\|_{H^1}^2.$$

Démonstration

Si on multiplie (3.3.2) par $R^{-1}v$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}-\frac{\eta}{R}\int_\Omega v\Delta v dx - \frac{\lambda}{R}\int_\Omega \nabla(\nabla\cdot v) &= -\int_\Omega \nabla(\sigma'\overline{T})v dx - \int_\Omega \nabla(\overline{\rho}\vartheta)v dx\\ &= -\frac{g}{R}\int_\Omega \sigma' v_3 dx + \frac{1}{R}\int_\Omega F\cdot v dx,\end{aligned}$$

en intégrant par partie les deux premières intégrales, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{R}\|\nabla v\|_{L_2}^2 + \frac{\lambda}{R}\|\nabla\cdot v\|_{L_2}^2 &= -\int_\Omega \nabla(\sigma'\overline{T})v dx - \int_\Omega \nabla(\overline{\rho}\vartheta)v dx\\ &= -\frac{g}{R}\int_\Omega \sigma' v_3 dx + \frac{1}{R}\int_\Omega F\cdot v dx,\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

on multiplie à présent (3.3.3) par $\overline{T}\overline{\rho}^{-1}\sigma$ et on intègre sur Ω

$$k\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma(\sigma-\sigma')dx + \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx,$$

en utilisant la relation algébrique suivante

$$a(a-b) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + a^2 - b^2]$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma-\sigma')\Big\|_{L_2}^2 + \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma\Big\|_{L_2}^2 =& \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|_{L_2}^2 - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx\\ &- \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\cdot(\overline{\rho}v)dx,\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

pour simplifier le calcul on note par A le terme gauche de (3.4.6) et par B le terme gauche de (3.4.7),en utilisant l'égalité

$$\nabla\cdot(\overline{\rho}v) = \nabla\overline{\rho}\cdot v + \overline{\rho}(\nabla\cdot v),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
A+B =& \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|_{L_2}^2 - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx - \int_\Omega \nabla(\sigma'\overline{T})v \\
&- \int_\Omega \nabla(\overline{\rho}\vartheta)vdx - \frac{g}{R}\int_\Omega \sigma' v_3 dx + \frac{1}{R}\int_\Omega F\cdot vdx, \\
=& \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|_{L_2}^2 - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\sigma-\sigma')\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma'\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx \\
&- \int_\Omega \nabla(\sigma'\overline{T})v - \int_\Omega \nabla(\overline{\rho}\vartheta)vdx - \frac{g}{R}\int_\Omega \sigma' v_3 dx + \frac{1}{R}\int_\Omega F\cdot vdx, \\
=& \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|_{L_2}^2 - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\sigma-\sigma')\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma'(\nabla\overline{\rho}\cdot v)dx \\
&- \int_\Omega \overline{T}\sigma'(\nabla\cdot v)dx - \int_\Omega \nabla(\sigma'\overline{T})v - \int_\Omega \nabla(\overline{\rho}\vartheta)vdx - \frac{g}{R}\int_\Omega \sigma' v_3 dx + \frac{1}{R}\int_\Omega F\cdot vdx,
\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma'(\nabla\overline{\rho}\cdot v)dx = \int_\Omega \overline{T}(\nabla\log\overline{\rho}\cdot v)\sigma' dx$$

et

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \overline{T}\sigma'(\nabla\cdot v)dx - \int_\Omega \nabla(\sigma'\overline{T})vdx - \int_\Omega \nabla(\overline{\rho}\vartheta)vdx =& -\int_\Omega \overline{T}\sigma'(\nabla\cdot v)dx + \int_\Omega \sigma'\overline{T}(\nabla\cdot v)dx \\
&+ \int_\Omega \overline{\rho}\vartheta(\nabla\cdot v)dx \\
=& \int_\Omega \overline{\rho}\vartheta\nabla\cdot vdx,
\end{aligned}$$

où on a fait une intégration par partie dans les deux dernières intégrale du terme gauche. En injectant ces deux égalités dans l'expression de $A+B$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta}{R}\|\nabla v\|_{L_2}^2 + \frac{\lambda}{R}\|\nabla\cdot v\|_{L_2}^2 + \frac{k}{2}\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma-\sigma')\|_{L_2}^2 + \frac{k}{2}\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma\|_{L_2}^2 \\
&= \frac{k}{2}\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\|_{L_2}^2 + \sum_{q=1}^{4} I_q,
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

où

$$I_1 = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\sigma-\sigma')\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx, \quad I_2 = -\int_\Omega \overline{T}(\nabla\log\overline{\rho}\cdot v)\sigma' dx - \frac{g}{R}\int_\Omega \sigma' v_3 dx$$

$$I_3 = \frac{1}{R}\int_\Omega F\cdot vdx + \int_\Omega \overline{\rho}\vartheta\nabla\cdot vdx, \quad I_4 = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx.$$

En rappelant que $\overline{T}_0$ et M_ρ sont suffisamment grands et $\|\epsilon\|_{H^3(\Omega'_\tau)}$ suffisamment petit, on voit que $\|\nabla \log \overline{\rho}\|_{L^\infty}$ est assez petite de sorte que

$$\|v \cdot \nabla \log \overline{\rho}\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

Nous allons maintenant estimer les intégrales I_q, $q = 1,...4$. L'estimation de I_1 est la seul qu'on établira, les autres s'effectue en utilisant les même techniques, i.e., le théorème des injections de Sobolev et la propriété (A) et les expressions de $\overline{\rho}$ et $\overline{T}$. En utilisant l'inégalité de Hölder et en suite l'inégalité de Young pour les nombre réels on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \Big(\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\sigma - \sigma')^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\nabla \cdot (\overline{\rho} v))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{2}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\sigma - \sigma')^2 dx + \frac{1}{2\epsilon^2}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\nabla \cdot (\overline{\rho} v))^2 dx, \end{aligned}$$

avec $\epsilon > 0$, en posant $\epsilon^2 = k$ on obtient

$$\begin{aligned} I_1 \leq &\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma - \sigma')\Big\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2k}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\nabla\overline{\rho} \cdot v)^2 dx + \frac{1}{2k}\int_\Omega \overline{T}\,\overline{\rho}(\nabla \cdot v)^2 dx \\ &+ \frac{1}{k}\int_\Omega \overline{T}(\nabla\overline{\rho} \cdot v)(\nabla \cdot v) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{k}\int_\Omega \overline{T}(\nabla\overline{\rho} \cdot v)(\nabla \cdot v) dx \leq \frac{1}{2k}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\nabla\overline{\rho} \cdot v)^2 dx + \frac{1}{2k}\int_\Omega \overline{T}\,\overline{\rho}(\nabla \cdot v)^2 dx,$$

par conséquent,

$$I_1 \leq \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma - \sigma')\Big\|_{L^2}^2 + \frac{1}{k}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\nabla\overline{\rho} \cdot v)^2 dx + \frac{1}{k}\int_\Omega \overline{T}\,\overline{\rho}(\nabla \cdot v)^2 dx$$

et donc compte tenu de (3.4.3), on a

$$I_1 \leq \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma - \sigma')\Big\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\overline{\kappa}\delta_1}\|\overline{T}\,\overline{\rho}\|_{L^\infty}\|\nabla \cdot v\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\overline{\kappa}\delta_1}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(v \cdot \nabla\overline{\rho})\Big\|_{L^2}^2.$$

0n a $|\overline{T}\,\overline{\rho}| \leq C_{M_\rho}(\overline{T}_0)^{\gamma/\gamma-1}$, i.e., $\|\overline{T}\,\overline{\rho}\|_{L^\infty} \leq C_{M_\rho}(\overline{T}_0)^{\gamma/\gamma-1}$. En utilisant alors (3.4.3) et (3.4.4) on obtient

$$\frac{2}{\overline{\kappa}\delta_1}\|\overline{T}\,\overline{\rho}\|_{L^\infty} \leq \frac{\eta + \lambda}{8R}$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(v\cdot\nabla\overline{\rho})^2dx &= \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(v\cdot\nabla\overline{\rho})(v\cdot\nabla\overline{\rho})dx\\
&= \int_\Omega \overline{T}(\nabla\log\overline{\rho}\cdot v)(v\cdot\nabla\overline{\rho})dx\\
&= \int_\Omega \overline{T}\overline{\rho}(\nabla\log\overline{\rho}\cdot v)^2dx\\
&\leq \|\overline{T}\overline{\rho}\|_{L^\infty}\int_\Omega(\nabla\log\overline{\rho}\cdot v)^2dx\\
&\leq \|\overline{T}\overline{\rho}\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

On obtient alors finalement

$$
I_1 \leq \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\sigma-\sigma')\Big\| + \frac{\lambda}{8R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{8R}\|\nabla v\|_{L^2}^2,
$$

$$
I_2 \leq \frac{\eta}{16R}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + C_\Omega\|\sigma'\|_{L^2}^2,
$$

$$
I_3 \leq C_\Omega(\|F\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2) + \frac{\eta}{16R}\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{8R}\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2.
$$

il reste à estimer le terme I_4, on a

$$
-\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\nabla\cdot(\sigma v)dx = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma(\nabla\sigma\cdot v)dx - \int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}|\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx.
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma(\nabla\sigma\cdot v)dx =& \sum_{i=1}^3\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\sigma\partial_{x_i}\sigma v_i dx\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}(\sigma)^2 v_i dx\\
\text{(en intégrant par partie)} =& -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\int_\Omega \partial_{x_i}\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}v_i\Big)|\sigma|^2dx\\
=& -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}|\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)\cdot v|\sigma|^2dx.
\end{aligned}
$$

En somme, on a

$$
I_4 = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}|\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)\cdot v|\sigma|^2dx
$$

donc

$$
I_4 \leq \frac{1}{2}\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty}\Big\|\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big\|_{L^\infty}\|\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{L^\infty}\Big\|\nabla\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)\Big\|_{L^\infty}\|\sigma\|_{L^2}^2,
$$

en utilisant l'injection continue $H^3(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ et l'hypothèse (A) on obtient

$$I_4 \leq C_\Omega \|v\|_{H^3} \|\sigma\|^2_{L^2}.$$

Si on adjoint ces estimations obtenues des I_q $(q = 1,2,3,4)$ à (3.4.8) on obtient

$$\frac{3\eta}{4R}\|\nabla v\|^2_{L^2} + \frac{3\lambda}{4R}\|\nabla \cdot v\|^2_{L^2} + \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma\Big\|^2_{L^2} \tag{3.4.9}$$

$$\leq \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|^2_{L^2} + C_\Omega(\|\sigma'\|^2_{L^2} + \|F\|_{L^2} + \|v\|_{H^3}\|\sigma\|^2_{L^2}) + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|^2_{H^1}.$$

Considérons à présent l'équation suivante

$$\begin{cases} \nabla \cdot \varphi = \sigma' \\ \varphi|_{x_3=0} = \varphi|_{x_3=h} = 0 \end{cases}$$

avec σ' vérifiant $\int_\Omega \sigma'(x)dx = 0$. D'aprés le théorème 2.1.2 le problème admet une solution φ et on a l'estimation suivante

$$\|\varphi\|_{H^1} \leq C_\Omega \|\sigma'\|_{L^2}. \tag{3.4.10}$$

Mulitiplions à présent (3.3.2) par φ et intégrons sur Ω, en utilisant l'hypothèse (A) et (3.4.10) on obtient

$$\overline{T}_0^2\|\sigma'\|^2_{L^2} \leq C^*_\Omega(\eta\|\nabla v\|^2_{L^2} + \lambda\|\nabla \cdot v\|^2_{L^2} + \|F\|^2_{L^2}) + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|^2_{H^1}, \tag{3.4.11}$$

où C^*_Ω est une constante.

Si en multiplie (3.4.11) par $(4RC^*_\Omega)^{-1}$ et on l'adjoint à (3.4.9) on obtient (3.4.5).

Lemme 3.4.3. *Soient v',ϑ',σ',v et σ comme dans le lemme précédent. Alors on a pour $i = 1,2$*

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i} v\|^2_{L^2} + \frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\nabla \cdot v\|^2_{L^2} + k\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma\Big\|^2_{L^2} \tag{3.4.12}$$

$$\leq k\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|^2_{L^2} + C'_2(\|\sigma'\|^2_{L^2} + \|F\|^2_{L^2} + \|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{L^2}) + \tilde{C}_2\|\vartheta\|^2_{H^1}.$$

Démonstration

Montrons d'abord la relation suivante

$$\int_\Omega \Big[(\partial_{x_i}\nabla \cdot v)\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma') - \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\nabla \cdot (\overline{\rho}v))\partial_{x_i}\sigma\Big]dx = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\nabla \cdot (\overline{\rho}v))(\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_i}\sigma')dx$$

$$+\int_\Omega (\partial_{x_i}\overline{T})\sigma'\partial_{x_i}\nabla\cdot v dx+\int_\Omega \overline{T}\Big[(\partial_{x_i}\log\overline{\rho})\nabla\cdot v+\frac{1}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}(v\cdot\nabla\overline{\rho})\Big]\partial_{x_i}\sigma' dx,$$

On a

$$\int_\Omega\Big[(\partial_{x_i}\nabla\cdot v)\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')-\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\nabla\cdot(\overline{\rho}v))\partial_{x_i}\sigma\Big]dx=-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\nabla\cdot(\overline{\rho}v))(\partial_{x_i}\sigma-\partial_{x_i}\sigma')dx$$

$$+\int_\Omega(\partial_{x_i}\nabla\cdot v)\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')dx-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\nabla\cdot(\overline{\rho}v))\partial_{x_i}\sigma' dx,$$

On applique l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i}(i=1{,}2)$ aux équations (3.3.2) et (3.3.3),on les multiplie par $R^{-1}\partial_{x_i}$ et $\overline{T}\overline{\rho}^{-1}\partial_{x_i}\sigma$ respectivement et on les intègre sur Ω. Puisque $\partial_{x_i}v$ satisfait aux conditions aux limites (3.1.5), en faisant le même calcul que dans la démonstration du lemme 3.4.2 et en utilisant la relation précédente on obtient

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{R}\|\nabla\cdot(\partial_{x_i}v)\|_{L^2}^2+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}(\partial_{x_i}\sigma-\partial_{x_i}\sigma')\Big\|_{L^2}^2 \tag{3.4.13}$$

$$+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma\Big\|_{L^2}^2=\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|_{L^2}^2+\sum_{q=1}^4 I_q,$$

où

$$I_1=-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\sigma-\partial_{x_i}\sigma')\partial_{x_i}\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx,$$

$$I_2=\int_\Omega\sigma'\Big[\partial_{x_i}\big(\overline{T}\big[(\partial_{x_i}\log\overline{\rho})\nabla\cdot v+\frac{1}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}(v\cdot\nabla\overline{\rho})\big]\big)+(\partial_{x_i}\overline{T})\partial_{x_i}\nabla\cdot v+\frac{g}{R}\partial_{x_i}\partial_{x_i}v_3\Big]dx,$$

$$I_3=\int_\Omega\Big[(\partial_{x_i}\nabla\cdot v)\partial_{x_i}(\overline{\rho}\vartheta)-\frac{1}{R}F\cdot\partial_{x_i}\partial_{x_i}v\Big]dx,\qquad I_4=-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\sigma)\partial_{x_i}\nabla\cdot(\sigma v)dx.$$

Compte tenu des expressions de $\overline{\rho}$,$\overline{T}$ et k et de (3.4.4), on démontre de manière tout à fait analogue à la démonstration du lemme 3.4.1 les inégalité suivantes

$$I_1\le\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}(\partial_{x_i}\sigma-\partial_{x_i}\sigma')\Big\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{2R}\|\nabla\cdot(\partial_{x_i}v)\|_{L^2}^2+\frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2,$$

$$I_2\le\frac{\eta}{16R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2+C_\Omega\|\sigma'\|_{L^2}^2,$$

$$I_3\le\frac{\eta}{16R}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2+C_\Omega\|F\|_{L^2}^2+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2.$$

Il nous reste à estimer le terme I_4, on a

$$I_4=-\frac12\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}|\partial_{x_i}\sigma|^2(\nabla\cdot v)dx+\frac12\int_\Omega\Big(\nabla\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)\cdot v|\partial_{x_i}\sigma|^2dx-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\sigma)\nabla\cdot(\sigma\partial_{x_i}v)dx$$

$$\le C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.$$

En utilisant les inégalité obtenues pour I_q $(q = 1{,}2{,}3{,}4)$ dans (3.4.13) on obtient (3.4.12).

Lemme 3.4.4. *Soient v',ϑ',σ' et σ comme dans le lemme (3.4.2). Alors on a*

$$(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2} - C'_3\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_3}v\|^2_{L^2} - C'_3\overline{T}_0^{-2}\|v\|^2_{H^1} \tag{3.4.14}$$

$$\leq (\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2} + C'_3\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2} + \tilde{C}_3(\|F\|^2_{L^2} + \|\vartheta\|^2_{H^1}) + C'_3\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{L^2}$$

avec

$$C'_{(\overline{T}_0)} = \frac{R}{\eta+\lambda}\Big(\frac{\overline{T}_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma R}gh}{\overline{T}_0}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{3.4.15}$$

Démonstration

A l'aide de l'identité suivante

$$\Delta v_3 = \partial_{x_3}\nabla\cdot v + \partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2),$$

On tire de l'équation (3.3.2)

$$\partial_{x_3}\nabla\cdot v = -\frac{\eta}{\eta+\lambda}(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2)) \tag{3.4.16}$$

$$+\frac{R}{\eta+\lambda}\partial_{x_3}(\overline{\rho}\vartheta) + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{T}\partial_{x_3}\sigma' + \frac{R}{\eta+\lambda}\sigma'\partial_{x_3}\overline{T} + \frac{g}{\eta+\lambda}\sigma' - \frac{1}{\eta+\lambda}F_3.$$

Appliquant à présent l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x_3}$a aux deux membres de (3.3.3) en y substituant l'expression de $\partial_{x_3}\nabla\cdot v$ donnée ce-dessus, en multiplie aprés par $\partial_{x_3}\sigma$ et on intègre sur Ω, on trouve alors

$$\int_\Omega\Big[k(\partial_{x_3}\sigma - \partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma) + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\overline{T}(\partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)\Big]dx = \sum_{q=1}^{5} I_q, \tag{3.4.17}$$

où

$$I_1 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(R\sigma'\partial_{x_3}\overline{T} + g\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(F_3 - R\partial_{x_3}(\overline{\rho}\vartheta))(\partial_{x_3}\sigma)dx,$$

$$I_3 = \frac{\eta}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2))dx,$$

$$I_4 = -\int_\Omega \overline{\rho}(\partial_{x_3}(v\cdot\nabla\overline{\rho}) + (\partial_{x_3}\overline{\rho})\nabla\cdot v)(\partial_{x_3}\sigma)dx,$$

$$I_5 = -\int_\Omega (\partial_{x_3}\sigma)\nabla\cdot(\partial_{x_3}(\sigma v))dx.$$

En utilisant l'identité

$$(a-b)a+\alpha ab=\frac{1+\alpha}{2}a^2+\frac{1-\alpha}{2}(a-b)^2-\frac{1-\alpha}{2}b^2$$

on obtient en posant $\alpha=\frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\overline{T}$

$$\int_\Omega\Big[k(\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)+\frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\overline{T}(\partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)\Big]dx$$

$$=\int_\Omega\frac{k+\alpha}{2}(\partial_{x_3}\sigma)^2dx+\int_\Omega\frac{k-\alpha}{2}(\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma')^2dx-\int_\Omega\frac{k-\alpha}{2}(\partial_{x_3}\sigma')^2dx$$

$$\geq inf_\Omega\Big(\frac{k+\alpha}{2}\Big)\|\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2}+inf_\Omega\Big(\frac{k-\alpha}{2}\Big)\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}-sup_\Omega\Big(\frac{k-\alpha}{2}\Big)\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}$$

d'autre part on a de (3.2.4) et (3.4.5)

$$C_{M_\rho}\Big(\overline{T}_0-\frac{\gamma-1}{\gamma R}gh\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\leq|\overline{\rho}\overline{T}|\leq C_{M_\rho}(\overline{T}_0)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

on obtient donc

$$\int_\Omega\Big[k(\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)+\frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\overline{T}(\partial_{x_3}\sigma')(\partial_{x_3}\sigma)\Big]dx$$

$$\geq\frac{k+\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2}-\frac{k-\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}+\frac{k-\delta_1'}{2}\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2},$$

où le nombre δ_1 a été défini dans (3.4.3) et

$$\delta_1'=\frac{R}{\eta+\lambda}C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

D'autre part, en utilisons à présent les relations de $\overline{T}$ et $\overline{\rho}$ données dans (3.2.4) et (3.2.5) on obtient

$$I_1\leq\frac{k-\delta_1'}{6}\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}+\frac{\delta_1}{12}\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}+C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2}$$

$$I_2\leq\tilde{C}(\overline{\rho})\|F\|^2_{L^2}+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|^2_{H^1}+\frac{\sigma_1}{4}\|\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2},$$

$$I_3\leq\frac{k-\delta_1'}{6}\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}+\frac{\delta_1}{12}\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}+C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\sum_{i=1}^2\|\nabla\partial_{x_3}v\|^2_{L^2},$$

$$I_4\leq\frac{k-\delta_1'}{6}\|\partial_{x_3}\sigma-\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}+\frac{\delta_1}{12}\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}+C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|^2_{H^1}$$

Il reste à estimer I_5, on a

$$I_5=-\frac{1}{2}\int_\Omega(\nabla\cdot v)|\partial_{x_3}\sigma|^2dx-\sum_{j=1}^3\int_\Omega(\partial_{x_3}\sigma)(\partial_{x_j}(\partial_{x_3}v_j)\sigma)dx\leq C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{L^2}.$$

Si on adjoint ces inégalité à (3.4.17) on obtient

$$\begin{aligned}(k+\frac{\delta_1}{2})\|\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2 \leq &(k-\frac{\delta_1}{2})\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_3}v\|_{L^2}^2 \\ &+ C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|_{H^1}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})\|F\|_{L^2}^2 \\ &+ \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2 + C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par

$$\Big(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\Big)^{-1} = \overline{T}_0^2\Big(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\Big)^{-1}$$

et en tenant compte de (3.4.3), on obtient (3.4.14).

Lemme 3.4.5. *Soient v',ϑ',σ',v et σ comme dans le lemme 3.4.2. Alors on a*

$$\|v\|_{H^2}^2 - C_4'\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 \tag{3.4.18}$$

$$\leq -C_4'(\overline{T}_0^2-1)\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + C_4'\overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_4'\|F\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_4\|\vartheta\|_{H^1}^2.$$

Démonstration

On réécrit l'équation (3.3.2) sous la forme d'un problème de Stokes

$$-\eta\Delta v + R\nabla(\overline{T}\sigma') = \lambda\nabla(\nabla\cdot v) - R\nabla(\overline{\rho}\vartheta) - g\sigma'\overrightarrow{e}_3 + F(v',\vartheta',\sigma') \tag{3.4.19}$$

$$\nabla\cdot v = \nabla\cdot v. \tag{3.4.20}$$

Ici les conditions aux limites sont différentes de celle données dans le théorème 2.2.7, la démonstration reste valable même avec ces conditions avec bien évidemment quelques changements sont à faire dans les fromules de représentation des solution voir par exemple [20]. On obtient donc

$$\|v\|_{H^2}^2 + \|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2 + C_\Omega(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|\nabla\cdot v\|_{H^1}^2 + \|F\|_{L^2}^2). \tag{3.4.21}$$

Par ailleur on obtient de (3.4.16)

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 \leq &C_\Omega\Big(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2 + \|F\|_{L^2}^2\Big) \\ &+ C_\Omega T_0^2\|\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^1}^2\end{aligned}$$

et comme on a

$$\|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{L^2}^2 \geq C_\Omega(\overline{T}_0^2 - 1)\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2,$$

on déduit de (3.4.21) l'estimation (3.4.18).

Lemme 3.4.6. *Soient v',ϑ',σ',v et σ comme dans le lemme 3.4.2. Alors pour i,j = 1,2 on a*

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2 + k\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\Big\|_{L^2}^2 - C_5'\|\vartheta\|_{H^2}^2 \tag{3.4.22}$$

$$\leq \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\Big\|_{L^2}^2 + C_5'(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2 + \|F\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2) + \tilde{C}_5\|\vartheta\|_{H^2}^2.$$

Démonstration

On applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}\partial_{x_j}$ $(i,j = 1,2)$ aux deux membres de (3.3.2)et on multiplie par $R^{-1}\partial_{x_i}\partial_{x_j}v$. Si on intégre sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\frac{\eta}{R}\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}(\Delta v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}v dx - \frac{\lambda}{R}\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}(\nabla(\nabla\cdot v))\partial_{x_i}\partial_{x_j}v dx \\
&= -\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}(\nabla(\sigma'\overline{T}))\partial_{x_i}\partial_{x_j}v dx - \int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}v(\nabla(\overline{\rho}\vartheta))\partial_{x_i}\partial_{x_j}v dx \\
&\quad -\frac{g}{R}\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}(\sigma')\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_3 dx + \frac{1}{R}\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}F\partial_{x_i}\partial_{x_j}v dx.
\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales se calcule facilement, on a en effet

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta}{R}\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}(\Delta v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}v dx &= -\frac{\eta}{R}\sum_{k=1}^3\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}\Delta v_k\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_k dx \\
&= -\frac{\eta}{R}\sum_{k=1}^3\int_\Omega\sum_{l=1}^3\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_k\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_k dx \\
&= \frac{\eta}{R}\sum_{k=1}^3\int_\Omega\sum_{l=1}^3\partial_{x_l}\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_k\partial_{x_l}\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_k dx \\
&= \frac{\eta}{R}\int_\Omega(\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v)^2 dx \\
&= \frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|_{L^2}^2 \\
&=
\end{aligned}$$

on a utilisé dans ce calcul aprés avoir interverti l'ordre de dérivation une intégration par partie aprés avoir interverti l'ordre de dérivation et la condition aux limites (3.1.5) D'autre part, par un calcut tout à fait analogue au précédent on obtient

$$\frac{\lambda}{R}\int_\Omega \partial_{x_i}\partial_{x_j}(\nabla(\nabla\cdot v))\partial_{x_i}\partial_{x_j}v dx = \frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|_{L^2}^2,$$

en somme on obtient

(3.4.23)

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|^2_{L^2}+\frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|^2_{L^2}=-\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla(\sigma'\overline{T})\partial_{x_i}\partial_{x_j}vdx-\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla(\overline{\rho}\vartheta)\partial_{x_i}\partial_{x_j}vdx$$
$$-\frac{g}{R}\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_3dx+\frac{1}{R}\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}F\partial_{x_i}\partial_{x_j}vdx.$$

Appliquons à présent l'équation (3.3.3) l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}\partial_{x_j}$ et multiplions par $\overline{T}\overline{\rho}^{-1}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma$. Si on l'intégre sur Ω on obtient

$$k\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\sigma-\sigma')\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma dx+\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot(\sigma v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma dx$$
$$=-\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot(\overline{\rho}v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma dx$$

on calculons comme dans la démonstration du lemme 3.4.2 on obtient

$$\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\Big\|^2_{L^2}+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\Big\|^2_{L^2} \tag{3.4.24}$$
$$=\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\Big\|^2_{L^2}-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla(\overline{\rho}v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma dx.$$

Notons par A le terme gauche de (3.4.22) et par B le terme gauche de (3.4.23), on a

$$A+B=\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\Big\|^2_{L^2}-\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla(\sigma'\overline{T})\partial_{x_i}\partial_{x_j}vdx-\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla(\overline{\rho}\vartheta)\partial_{x_i}\partial_{x_j}vdx$$
$$-\frac{g}{R}\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_3dx+\frac{1}{R}\int_\Omega\partial_{x_i}\partial_{x_j}F\partial_{x_i}\partial_{x_j}vdx$$
$$-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla(\overline{\rho}v)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma dx,$$

On obtient finalement

$$\frac{\eta}{R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|^2_{L^2}+\frac{\lambda}{R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|^2_{L^2}+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\Big\|^2_{L^2} \tag{3.4.25}$$
$$+\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\Big\|^2_{L^2}=\frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma'\Big\|^2_{L^2}+\sum_{q=1}^{7}I_q,$$

où

$$I_1=-\int_\Omega\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot(\overline{\rho}v)dx,$$
$$I_2=\int_\Omega((\partial_{x_i}\overline{T})\partial_{x_j}\sigma'+(\partial_{x_j}\overline{T})\partial_{x_i}\sigma'+\sigma'\partial_{x_i}\partial_{x_j}\overline{T})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot vdx,$$

$$I_3 = \int_\Omega \partial_{x_i}\Big[\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}[\partial_{x_i}\partial_{x_j}(v\cdot\nabla\overline{\rho}) + (\partial_{x_i}\partial_{x_j}\overline{\rho})\nabla\cdot v + (\partial_{x_i}\overline{\rho})\partial_{x_j}\nabla\cdot v + (\partial_{x_j}\overline{\rho})\partial_{x_i}\nabla\cdot v\Big]\partial_{x_j}\sigma' dx,$$

$$I_4 = \frac{g}{R}\int_\Omega (\partial_{x_j}\sigma')\partial^2_{x_i}\partial_{x_j}v_3 dx,$$

$$I_5 = \int_\Omega (\partial_{x_i}\partial_{x_j}(\overline{\rho}\vartheta))\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v dx, \qquad I_6 = -\frac{1}{R}\int_\Omega (\partial^2_{x_i}\partial_{x_j}v)\cdot\partial_{x_j}F dx,$$

$$I_7 = -\int_\Omega \frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot(\sigma v)dx.$$

En rappelons les expressions de $\overline{T}$ et $\overline{\rho}$ et en utilisant l'inégalité $\frac{1}{2k}C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq \frac{\eta+\lambda}{16R}$ qu'on peut obtenir directement de (3.4.3)-(3.4.4), on obtient

$$I_1 \leq \frac{k}{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma - \partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma')\Big\|^2_{L^2} + \frac{\eta+\lambda}{16R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|^2_{L^2} + C_\Omega\|v\|^2_{H^2}.$$

D'autre part, on a

$$I_2 + I_3 + I_4 \leq \frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|^2_{L^2} + C_\Omega\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2},$$

$$I_5 \leq \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|^2_{H^2} + \frac{\lambda}{4R}\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\nabla\cdot v\|^2_{L^2},$$
$$I_6 \leq C_\Omega\|F\|^2_{H^1} + \frac{\eta}{6R}\|\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}v\|^2_{L^2}.$$

Quand au terme I_7, en utilisant la relations suivante

$$-\int_\Omega v\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma\cdot\nabla\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma dx = \frac{1}{2}\int_\Omega\Big(\nabla\cdot\big(v\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\big)\Big)|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma|^2dx,$$

on obtient

$$I_7 \leq C_\Omega\|v\|_{H^3(\Omega)}\|\nabla\sigma\|^2_{H^1}.$$

Si on adjoint les estimations des intégrales I_q $(q = 1,...,7)$ calculées à (3.4.22) on obtient (3.4.21).

Lemme 3.4.7. *Soient v',ϑ',σ',v et σ comme dans le lemme 3.4.2. Alors pour $i = 1{,}2$ on a*

$$(\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\partial_{x_j}\sigma\|^2_{L^2} - C'_6\sum_{j=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|^2_{L^2} - C'_6\overline{T}_0^{-2}\|v\|^2_{H^2} \tag{3.4.26}$$

$$\leq (\overline{\kappa}-1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2} + C'_6(\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2} + \|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{H^1}) + \tilde{C}_6(\|\vartheta\|^2_{H^2} + \|F\|^2_{H^1}),$$

où $C'_{\overline{T}_0}$ est la constante donnée dans (3.4.15).

Démonstration

On applique l'opérateur différentiel $\partial_{x_i}\partial_{x_3}$ $(i = 1,2)$ aux deux membres de (3.3.3) et y on subsitue l'expression de $\partial_{x_3}\nabla\cdot v$ donnée dans (3.4.16). En les multiplions par $\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma$ et en les intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \Big[k(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma) + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\overline{T}(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)\Big]dx = \sum_{q=1}^{5} I_q, \tag{3.4.27}$$

où

$$I_1 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega (R\partial_{x_i}(\overline{\rho}\sigma'\partial_{x_3}\overline{T}) + R(\partial_{x_i}(\overline{\rho}\overline{T}))\partial_{x_3}\sigma' + g(\partial_{x_i}(\overline{\rho}\sigma'))(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega (\partial_{x_i}(\overline{\rho}F_3 - R\overline{\rho}\partial_{x_3}(\overline{\rho}\vartheta)))(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)dx,$$

$$I_3 = \frac{\eta}{\eta+\lambda}\int_\Omega (\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_i}(\overline{\rho}(\partial_{x_1}(\partial_{x_1}v_3 - \partial_{x_3}v_1) + \partial_{x_2}(\partial_{x_2}v_3 - \partial_{x_3}v_2)))dx,$$

$$I_4 = -\int_\Omega (\partial_{x_i}\partial_{x_3}(v\cdot\nabla\overline{\rho}) + \partial_{x_i}((\partial_{x_3}\overline{\rho})\nabla\cdot v))(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)dx,$$

$$I_5 = -\int_\Omega (\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)\nabla\cdot(\partial_{x_i}\partial_{x_3}(\sigma v))dx.$$

De manière tout à fait analogue à la démonstration du lemme 3.4.4, et en utilisant l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega \Big[k(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma) + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{\rho}\overline{T}(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma')(\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma)\Big]dx$$
$$\geq \frac{k+\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|_{L^2}^2 - \frac{k-\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \frac{k-\delta_1'}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2$$

et en estimant les termes I_q $(q = 1,...,5)$, on déduit de (3.4.26) l'inégalité suivante

$$\frac{k+\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|_{L^2}^2 \leq \frac{k-\delta_1}{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2$$
$$+C_\Omega C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|_{H^2}^2 + \tilde{C}(\overline{\rho})(\|\vartheta\|_{H^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2) + C_\Omega(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|_{H^1}^2).$$

En multiplions les deux membres de cette inégalité par

$$\big(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\big)^{-1} = \overline{T}_0^2\big(C_{M_\rho}\overline{T}_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\big)^{-1}$$

en tenant compte de (3.4.3), on obtient (3.4.25).

Lemme 3.4.8. *Soient v',ϑ',σ',v et σ comme dans le lemme 3.4.2. Alors on a pour $i = 1,2$*

$$\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2 - C_7'(\|v\|_{H^2}^2 + \sum_{j=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|_{L^2}^2) \tag{3.4.28}$$
$$\leq -\overline{T}_0^2\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + C_7'(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2 + \overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2 + \|F\|_{H^1}^2) + \tilde{C}_7\|\vartheta\|_{H^2}^2.$$

Démonstration

On applique à (3.3.2) l'opérateur différentiel ∂_{x_i}, $(i = 1{,}2)$ et on écrit le système obtenu sous la forme

$$-\eta\Delta(\partial_{x_i}v) + \nabla(R\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')) = \lambda\partial_{x_i}\nabla(\nabla\cdot v) - R\nabla\partial_{x_i}(\overline{\rho}\vartheta) - g\partial_{x_i}\sigma'\overrightarrow{e}_3 + \partial_{x_i}F,$$

$$\nabla\cdot(\partial_{x_i}v) = \partial_{x_i}\nabla\cdot v,$$

$$\partial_{x_i}v|_{x_3=0} = 0,\ \ \partial_{x_i}v_3|_{x_3=h} = \partial_{x_3}\partial_{x_i}v_j|_{x_3=h} = 0,\ \ j = 1{,}2.$$

En considérons ce système comme problème de Stokes, de manière analogue à la démonstration du lemme 3.4.5 on obtient

$$\|\partial_{x_i}v\|^2_{H^2} + R^2\|\nabla\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')\|^2_{L^2} \tag{3.4.29}$$

$$\leq C_\Omega(\|F\|^2_{H^1} + \|\nabla\|^2_{L^2} + \|\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|^2_{H^1}) + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|^2_{H^2}.$$

Par ailleur, on montre facilement l'inégalité suivante

$$\|\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|^2_{H^1}) \leq C_\Omega\Big(\|v\|^2_{H^2} + \|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|^2_{L^2} + \sum_{j=1}^{2}\|\partial_{x_j}\partial_{x_i}\nabla\cdot v\|^2_{L^2}\Big) \tag{3.4.30}$$

appliquons à présent l'opérateur ∂_{x_i} $(i = 1{,}2)$ aux deux membres de (3.4.16), on obtient

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_i}\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|^2_{L^2} \leq & C_\Omega\Big(\sum_{j=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i}v\|^2_{L^2} + \|\nabla\sigma'\|^2_{L^2} \\ & + \overline{T}_0^2\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2} + \|F\|^2_{H^1}\Big) + \tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|^2_{H^2}.\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

Si on substitue (3.4.29) et (3.4.30) dans (3.4.28), et en utilisant l'inégalité suivante

$$\|\nabla\partial_{x_i}(\overline{T}\sigma')\|^2_{L^2} \geq C_\Omega(\overline{T}_0^2\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2} - \|\nabla\sigma'\|^2_{L^2}),$$

on obtient (3.4.27).

Lemme 3.4.9. *Soient v',$\mathcal{V}'$,σ',v et σ comme dans le lemme 3.4.2. Alors on a*

$$(\overline{\kappa}+1)C'_{\overline{T}_O}\overline{T}_0^2\|\Delta\sigma\|^2_{L^2} - C'_8\overline{T}_0^{-2}\|v\|^2_{H^2} \leq (\overline{\kappa}-1)C'_{\overline{T}_O}\overline{T}_0^2\|\Delta\sigma'\|^2_{L^2}$$
$$C'_8(\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2} + \|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{H^1}) + \tilde{C}_8(\|\vartheta\|^2_{H^2} + \|F\|^2_{H^1}), \tag{3.4.32}$$

où $C'_{(\overline{T}_0)}$ est la constante donnée dans (3.4.15)

Démonstration

On applique l'opérateur laplacien à l'équation (3.3.3) et on y substitue l'expression de $\nabla\cdot\Delta v$ obtenue de l'équation (3.2.2), on multiplie ensuite l'équation trouvé par $\Delta\sigma$, en intégrant sur Ω on obtient

$$\int_\Omega (k(\Delta\sigma - \Delta\sigma')\Delta\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{T}\overline{\rho}\Delta\sigma'\Delta\sigma)dx = \sum_{q=1}^4,$$

où

$$I_1 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega (2R\overline{\rho}\nabla\overline{T}\cdot\nabla\sigma' + R\overline{\rho}\sigma'\Delta\overline{T} + g\overline{\rho}\partial_{x_3}\sigma')\Delta\sigma dx,$$
$$I_2 = -\frac{1}{\eta+\lambda}\int_\Omega \overline{\rho}(R\Delta(\overline{\rho}\vartheta) - \nabla\cdot F)\Delta\sigma dx,$$
$$I_3 = -\int_\Omega (\Delta(v\cdot\nabla\overline{\rho}) + (\nabla\cdot v)\Delta\overline{\rho} + 2(\nabla\overline{\rho})\cdot\nabla(\nabla\cdot v))\Delta\sigma dx,$$
$$I_4 = -\int_\Omega (\Delta\nabla\cdot(\sigma v))\Delta\sigma dx.$$

De manière analogue à a démonstration des lemmes 3.4.4 et 3.4.7, on a

$$\int_\Omega (k(\Delta\sigma - \Delta\sigma')\Delta\sigma + \frac{R}{\eta+\lambda}\overline{T}\overline{\rho}\Delta\sigma'\Delta\sigma)dx$$
$$\geq \frac{k+\delta_1}{2}\|\Delta\sigma\|^2_{L^2} - \frac{k-\delta_1}{2}\|\Delta\sigma'\|^2_{L^2} + \frac{k-\delta'_1}{2}\|\Delta\sigma - \Delta\sigma'\|^2_{L^2}.$$

D'autre part, il n'est pas difficile d'établir l'inégalité suivante

$$\sum_{q=1}^4 \leq \frac{\delta_1}{4}\|\Delta\sigma\|^2_{L^2} + C_\Omega C_{M_\rho}\Big(\overline{T}_0^{\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}}\|v\|^2_{H^2} + \overline{T}_0^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}\|\nabla\sigma'\|^2_{L^2}\Big)$$
$$+ C_\Omega\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{H^1} + \tilde{C}(\overline{\rho})(\|\vartheta\|^2_{H^2} + \|F\|^2_{H^1}).$$

Donc, de manière analogue à la démonstration des lemme 3.4.4 et 3.4.7, on déduit (3.4.31).

Lemme 3.4.10. *Soient v',$\mathcal{V}'$,σ',v et σ comme dans le lemme 3.4.2. Alors on a*

$$\|v\|^2_{H^3} - C'_9\Big(\sum_{i=1}^2\|\partial_{x_i}v\|^2_{H^2} + \|v\|^2_{H^1}\Big) \leq \overline{T}_0^2\|\nabla\sigma'\|^2_{H^1} \tag{3.4.33}$$

$$+C_9'\overline{T}_0^2\Big(\|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2\Big)+C_9'(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2+\|F\|_{H^1}^2)+\tilde{C}_9\|\vartheta\|_{H^2}^2.$$

Démonstration

On applique le théorème 2.2.7 sur le problème de Stokes (3.4.19)-(3.4.20) pour déduire l'inégalité

$$\|v\|_{H^3}^2+\|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2\leq C_\Omega(\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2+\|\nabla\cdot v\|_{H^2}^2+\|F\|_{H^1}^2)+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^2}^2. \tag{3.4.34}$$

Par ailleur il est facile d'établir ces estimations

$$\|\nabla(\overline{T}\sigma')\|_{H^1}^2\geq C_\Omega(\overline{T}_0^2\|\nabla\sigma'\|_{H^1}^2-\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2),$$

$$\|\nabla\cdot v\|_{H^2}^2\leq\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2+\sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2+\|v\|_{H^1}^2,$$

$$\|\partial_{x_3}\nabla\cdot v\|_{H^1}^2\leq C_\Omega\Big(\overline{T}_0^2\|\nabla\partial_{x_3}\sigma'\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_i}v\|_{H^2}^2+\|\nabla\sigma'\|_{L^2}^2+\|F\|_{H^1}^2\Big)+\tilde{C}(\overline{\rho})\|\vartheta\|_{H^2}^2,$$

$$\|\partial_{x_3}\nabla\sigma'\|_{L^2}^2\leq\|\Delta\sigma'\|_{L^2}^2+\sum_{i=1}^{2}\|\Delta\partial_{x_i}\sigma'\|_{L^2}^2,$$

où la troisième inégalité est une conséquence immédiate de (3.4.16). En adjoignant ces inégalité à (3.4.34), on obtient (3.4.33).

3.5 Application du théorème du point fixe de Schauder

Ces estimations établies, nous allons pouvoir à présent démontrer l'existence d'un sous ensemble B compact et convexe vérifiant les conditions (ii) et (iii) du paragraphe 3.3.1, le théorème 3.1.1 s'en suivra immédiatement, l'existence du sous ensemble B est donnée par le lemme suivant

Lemme 3.5.1. *Si $\overline{T}_0$ est assez grand et si $\|\epsilon\|_{H^3}$ est assez petit, alors il existe une constante positive a et une norme $\|\cdot\|_{\Sigma^2}$ équivalente à le norme $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ telles que, si on pose*

$$B=\{(v,\vartheta,\sigma)\in H_a^3(\Omega)\times H_b^2(\Omega)\times H_c^2(\Omega);\|v\|_{H^3}^2+\|\vartheta\|_{H^2}^2+\|\sigma\|_{\Sigma^2}^2\leq a^2\}, \tag{3.5.1}$$

alors

$$\Phi(B) \subset B, \tag{3.5.2}$$

i.e., Φ est une contraction.

Démonstration

On considère 9 nombres positives Λ_k, $k = 1,...,9$ à déterminer. En multipliant les deux membres des inégalités (3.4.5), (3.4.12), (3.4.14), (3.4.18), (3.4.21), (3.4.25), (3.4.27), (3.4.31), (3.4.32), obtenues dans les lemmes 3.4.2-3.4.10, par $\Lambda_1,...,\Lambda_9$ respectivement, en posant $\Lambda_9 = 1$ et en les adjoignant, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|v\|^2_{H^3} + \sum_{i=1}^{2} \|\partial_{x_i} v\|^2_{H^2}(-C'_9 + \Lambda_7) + \sum_{i,j=1}^{2} \|\nabla\partial_{x_j}\partial_{x_i} v\|^2_{L^2}\Big(- C'_7\Lambda_7 - C'_6\Lambda_6 + \Lambda_5\frac{\eta}{R}\Big) \\
&\quad + \|v\|^2_{H^2}(-C'_9 - C'_8\overline{T}_0^{-2}\Lambda_8 - 2C'_7\Lambda_7 - 2C'_6\overline{T}_0^{-2}\Lambda_6 - 4C'_5\Lambda_5 + \Lambda_4) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \|\nabla\partial_{x_i} v\|^2_{L^2}\Big(- C'_4\Lambda_4 - C'_3\Lambda_3 + \Lambda_2\frac{\eta}{R}\Big) + \|v\|^2_{H^1}\Big(- C'_3\overline{T}_0^{-2}\Lambda_3 + \Lambda_1\frac{\eta}{R}\Big) \\
&\quad + \|\Delta\sigma\|^2_{L^2}(\overline{\kappa} + 1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_8 + \sum_{i=1}^{2} \|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|^2_{L^2}(\overline{\kappa} + 1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_6 \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{2} \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma\Big\|^2_{L^2} k\Lambda_5 + \|\partial_{x_3}\sigma\|^2_{L^2}(\overline{\kappa} + 1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_3 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma\Big\|^2_{L^2} k\Lambda_2 + \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\sigma\Big\|^2_{L^2} k\Lambda_1 \\
&\le \|\nabla\sigma'\|^2_{H^1}(-\overline{T}_0^2) + \|\Delta\sigma'\|^2_{L^2}(C'_9 + \Lambda_8(\overline{\kappa} - 1)C'_{(\overline{T}_0)})\overline{T}_0^2 + \sum_{i=1}^{2} \|\nabla\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2}(C'_9 - \Lambda_7)\overline{T}_0^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2}(C'_7\Lambda_7 + (\overline{\kappa} - 1)C'_{(\overline{T}_0)}\Lambda_6)\overline{T}_0^2 + \sum_{i,j=1}^{2} \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|^2_{L^2} k\Lambda_5 \\
&\quad + \|\nabla\sigma'\|^2_{L^2}(C'_9 + C'_8\Lambda_8 + 2C'_7\Lambda_7 + 2C'_6\Lambda_6 + 4C'_5\Lambda_5 + C'_3\Lambda_3 - \Lambda_4(\overline{T}_0^2 - 1)) \\
&\quad + \|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2}(C'_4\Lambda_4 + \Lambda_3(\overline{\kappa} - 1)C'_{(\overline{T}_0)})\overline{T}_0^2 + \sum_{i=1}^{2} \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|^2_{L^2} k\Lambda_2 \\
&\quad + \|\sigma'\|^2_{L^2}(2C'_2\Lambda_2 - C'_1(\overline{T}_0^2 - 1)\Lambda_1) + \Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac12}\sigma'\Big\|^2_{L^2} k\Lambda_1 + \Sigma,
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

avec

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{9} d_k[(C'_k + \tilde{C}_k)\|F\|^2_{H^1} + \tilde{C}_k\|\vartheta\|^2_{H^2} + C'_k\|v\|_{H^3}\|\nabla\sigma\|^2_{H^1}], \tag{3.5.4}$$

$$d_5 = 4, \quad d_2 = d_6 = d_7 = 2, \quad d_1 = d_3 = d_4 = d_8 = d_9 = 1.$$

En comparant les coefficients par lesquels les normes figurant dans le premier et dans le second membre de l'inégalité (3.5.3) sont multipliées, on voit que, si $\overline{T}_0$ est assez grand, il est possible de choisir Λ_1,...,Λ_8 de telle sorte que les deux conditions suivantes (A) et (B) soient vérifiées:

(A)

$$-C'_9 + \Lambda_7 > 0, \qquad -C'_7\Lambda_7 - C'_6\Lambda_6 + \Lambda_5\frac{\eta}{R} > 0,$$

$$-C'_9 - C'_8\overline{T}_0^{-2}\Lambda_8 - 2C'_7\Lambda_7 - 2C'_6\overline{T}_0^{-2}\Lambda_6 - 4C'_5\Lambda_5 + \Lambda_4 > 0$$

$$-C'_4\Lambda_4 - C'_3\Lambda_3 + \Lambda_2\frac{\eta}{R} > 0, \quad C'_3\overline{T}_0^{-2}\Lambda_3 + \Lambda_1\frac{\eta}{R} > 0,$$

(B) le second membre de (3.5.3) est majoré par

$$(1-\delta)\Big[\nu_1\|\Delta\sigma'\|^2_{L^2} + \nu_2\sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma'\|^2_{L^2} + \nu_3\sum_{i,j=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|^2_{L^2}$$

$$+\nu_4\|\partial_{x_3}\sigma'\|^2_{L^2} + \nu_5\sum_{i=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma'\Big\|^2_{L^2} + \nu_6\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma'\Big\|^2_{L^2}\Big],$$

où δ est une constante positive et

$$\nu_1 = (\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_8, \quad \nu_2 = (\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_6, \quad \nu_3 = k\Lambda_5,$$

$$\nu_4 = (\overline{\kappa}+1)C'_{(\overline{T}_0)}\overline{T}_0^2\Lambda_3, \quad \nu_5 = k\Lambda_2, \quad \nu_6 = k\Lambda_1.$$

On voit immédiatement qu'un tel choix des $\Lambda_j (j = 1,...,8)$ est possible, en effet, pour les contraintes citées dans (A) et (B), si Λ_k avec $k = j+1,...,8$ sont donnés, comme on le constate facilement, on peut choisir un Λ_j assez grand de telle sorte que les inégalités contenant seulement Λ_j et Λ_k avec $k = j+1,...,8$ soient vérifiées,i.e., on peut donc procéder le choix de Λ_j en partant de Λ_8 et puis en choisissant successivement Λ_j pour $j = 7,6,...,1$.
Donc, en posant

$$\|\sigma\|^2_{\Sigma^2} = \nu_1\|\Delta\sigma\|^2_{L^2} + \nu_2\sum_{i=1}^{2}\|\partial_{x_3}\partial_{x_i}\sigma\|^2_{L^2} + \nu_3\sum_{i,j=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma\Big\|^2_{L^2} \tag{3.5.5}$$

$$+\nu_4\|\partial_{x_3}\sigma\|_{L^2}^2+\nu_5\sum_{i=1}^{2}\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\partial_{x_i}\sigma\Big\|_{L^2}^2+\nu_6\Big\|\Big(\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}}\Big)^{\frac{1}{2}}\sigma\Big\|_{L^2}^2,$$

on obtient

$$\|v\|_{H^3}^2+\|\sigma\|_{\Sigma^2}^2\leq(1-\delta)\|\sigma'\|_{\Sigma^2}^2+\Sigma. \tag{3.5.6}$$

La norme introduite dans (3.5.5) est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$. Or, compte tenu du comportemement bien connu des termes non-linéaires de $F(v,\vartheta,\sigma)$ et de Σ pour

$$\|v\|_{H^3}^2+\|\vartheta\|_{H^2}^2+\|\sigma\|_{H^2}^2\to 0,$$

alors, de l'expression de Σ et de F et du lemme (3.4.1), on déduit de (3.5.6) que, si $\|\epsilon\|_{H^3}$ est assez petit, il existe une constante positive a telle que, si on définit B comme dans (3.5.1), alors (3.5.2) est vérifié, Ce qui termine la démonstration.
Il reste maintenant pour conclure, à démontrer la continuité de l'opérateur Φ dans l'ensemble B muni de la topologie induite de $H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$.

Lemme 3.5.2. *Il existe un constante C_B telle que, quels que si $(v'_{[1]},\vartheta'_{[1]},\sigma'_{[1]})$ et $(v'_{[2]},\vartheta'_{[2]},\sigma'_{[2]})$ sont deux élement de B, alors*

$$\|v_{[1]}-v_{[2]}\|_{H^2}+\|\vartheta_{[1]}-\vartheta_{[2]}\|_{H^1}+\|\sigma_{[1]}-\sigma_{[2]}\|_{H^1} \tag{3.5.7}$$

$$\leq C_B(\|v'_{[1]}-v'_{[2]}\|_{H^2}+\|\vartheta'_{[1]}-\vartheta'_{[2]}\|_{H^1}+\|\sigma'_{[1]}-\sigma'_{[2]}\|_{H^1})$$

où

$$(v_{[i]},\vartheta_{[i]},\sigma_{[i]})=\Phi(v'_{[i]},\vartheta'_{[i]},\sigma'_{[i]}),\ \ i=1,2.$$

Il est bien clair d'aprés ce lemme que l'opérateur Φ est continu.

Démonstration

Soient $(v'_{[1]},\vartheta'_{[1]},\sigma'_{[1]})$ et $(v'_{[2]},\vartheta'_{[2]},\sigma'_{[2]})$ deux élements de B, alors on a d'aprés (3.5.1)

$$\|v'_{[i]}\|_{H^3},\|\vartheta'_{[i]}\|_{H^2},\|\sigma'_{[i]}\|_{H^2},\|v_{[i]}\|_{H^3},\|\vartheta_{[i]}\|_{H^2},\|\sigma_{[i]}\|_{H^2}\leq a \quad (i=1,2). \tag{3.5.8}$$

Posons

$$V'=v'_{[1]}-v'_{[2]},\quad \Theta'=\vartheta'_{[1]}-\vartheta'_{[2]},\quad S'=\sigma'_{[1]}-\sigma'_{[2]},$$

$$V=v_{[1]}-v_{[2]},\quad \Theta=\vartheta_{[1]}-\vartheta_{[2]},\quad S=\sigma_{[1]}-\sigma_{[2]},$$

Comme $\vartheta_{[i]}$, $v_{[i]}$ et $\sigma_{[i]}$ $(i = 1{,}2)$ sont définies par les équations (3.3.1)-(3.3.3), alors pour Θ, V, S, S' on a

$$-\kappa\Delta\Theta = G(v'_{[1]},\vartheta'_{[1]},\sigma'_{[1]}) - G(v'_{[2]},\vartheta'_{[2]},\sigma'_{[2]}), \tag{3.5.9}$$

$$\begin{aligned} -\eta\Delta V - \lambda\nabla(\nabla\cdot V) = -R\nabla(S'\overline{T} + \overline{\rho}\Theta) - gS'\overrightarrow{e}_3 \\ +F(v'_{[1]},\vartheta'_{[1]},\sigma'_{[1]}) - F(v'_{[2]},\vartheta'_{[2]},\sigma'_{[2]}), \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

$$kS + \nabla\cdot(Sv_{[1]}) = kS' - \nabla\cdot(\sigma_{[2]}V) - \nabla\cdot(\overline{\rho}V), \tag{3.5.11}$$

où $G(.,.,.)$ et $F(.,.,.)$ sont les fonctions données dans (3.2.14) et (3.2.15) respectivement. En estimant la norme dans $H^{-1}(\Omega)$ du second membre de (3.5.9), de l'expression de $G(.,.,.)$ et de la théorie classique des équations elliptiques on déduit

$$\|\Theta\|_{H^1} \le C(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1})$$
$$\times\Big(1 + \sum_{i=1}^{2}(\|v'_{[i]}\|_{H^2} + \|\vartheta'_{[i]}\|_{H^1} + \|\sigma'_{[i]}\|_{H^1}) + \sum_{i=1}^{2}(\|v'_{[i]}\|_{H^2} + \|\vartheta'_{[i]}\|_{H^1} + \|\sigma'_{[i]}\|_{H^1})^2\Big)$$

où C est une constante positive. Donc, en vertu de (3.5.8), on a

$$\|\Theta\|_{H^1} \le C_{a,1}(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1}), \tag{3.5.12}$$

où $C_{a,1}$ est une constante.

De manière analogue, en estimant la norme dans $L^2(\Omega)$ du second membre de (3.5.10) et en utilisant le théorème 2.3.1 et (3.5.12), on obtient

$$\|V\|_{H^2} \le C_{a,2}(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1}) \tag{3.5.13}$$

où $C_{a,2}$ est une constante.

Quand à l'équation (3.5.11), en multiplie scalairement par S et puis en lui applique l'opérateur ∇ et la multiplie en suite par ∇S. En utilisant les relations suivantes:

$$\int_\Omega (v\cdot\nabla S)S dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot v)S^2 dx, \quad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 S}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}\frac{\partial S}{\partial_{x_i}}dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot v)\|\nabla S\|^2 dx,$$

on en déduit facilement, grâce à (3.5.8) et (3.5.13)

$$\|S\|_{H^1} \le C_{a,3}(\|V'\|_{H^2} + \|\Theta'\|_{H^1} + \|S'\|_{H^1}), \tag{3.5.14}$$

avec $C_{a,3}$ est une constane positive.

En adjoignant les inégalités (3.5.12)-(3.5.14) on obtient (3.5.7).

On peut à présent conclure la démonstration du théorème 3.1.1.

Démonstration du théorème 3.1.1

Il est évident en vertu de la remarque 3.3.1 que l'ensemble B défini dans (3.5.1) est convexe et compacte dans l'espace $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, l'opérateur Φ est continue d'aprés le lemme 3.5.2 sur B et y est une contraction (3.5.2) on déduit donc du théorème de Schauder qu'il existe un élément $(v^*,\mathcal{V}^*,\sigma^*)$ appartenant à B tel que

$$\Phi(v^*,\vartheta^*,\sigma^*) = (v^*,\vartheta^*,\sigma^*).$$

Donc d'aprés le remarque 3.2.1 le problème (3.1.1)-(3.1.3), (3.1.5)-(3.1.7) admet une solution, ce qui termine la démonstration.

Résumé

Le thème central du mémoire est l'étude d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection avec la condition aux limites sur la température proche de la distribution hydrostatique. On démontre l'existence d'une solution stationnaire pour ce système dans un voisinage proche de l'état hydrostatique. La démonstration se fait par l'application du théorème du point fixe de Schauder, dans des espaces de Sobolev adéquats, sur un opérateur construit à base des équations linéarisées. Pour cela, il est crucial d'obtenir des estimations pour le vecteur vitesse et la densité de l'équation de la quantité de mouvement linéarisée et l'équation linéarisée de conservation de masse.

mots-clés

Solution stationaire, théorème du point fixe de Schauder, équations de Navier-Stokes...

Abstract

The main topic of the thesis is the study of a system of governing equations for a viscous, compressible and heat-conducting fluid modeling the convection with the boundary condition on the temperature close to the hydrostatic distribution. This study is performed in the chapter 3, where we prove the existence of a stationary solution of this equation system in the neighborhood of the hydrostatic state, by using Schauder's fixed point theorem in a suitable Sobolev spaces. For this result it is crucial to obtain estimates of the velocity and a density from a combination of the linearized equation for the quantity of motion and the linearized equation for the conservation mass.

key-words

Navier-Stokes equations, Schauder fixed point theorem, stationary solution...

Bibliographie

[1] Adams.R.A. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] Beiro ao Da Veiga.H. Boundary value problems for a class of first order partial differential equations in sobolev spaces and applications to the euler flow. *Rend.Sem.Mat.Univ.Padova*, 97, 1988.

[3] Bogovskij.M.E. Solutions de quelques problèmes d'analyse vectorielle connexes aux opérateurs div et grad (en russe). *Trudy Sem. Sovoleva (Akad. Nauk, Inst. Mat., Novosibirsk)*, 1, 1980.

[4] Brezis.H. *Analyse fonctionnelle, théorie et application.* Masson, 1987.

[5] Cattabriga.L. Su un problemo al contorno relativo al sistema di equazioni di stokes. *Rend.Sem.Mat.Univ.Padova*, 31, 1961.

[6] Agmon.S Douglis.A and Nirenberg.L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions i. *Comm. Pure Appl. Math,*, 12, 1959.

[7] Agmon.S Douglis.A and Nirenberg.L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions ii. *Comm. Pure Appl. Math,*, 17, 1964.

[8] Farwig. Stationary solutions of the compressible navier-stokes equations with slip boundary condition. *Commu.Part.Diff.Eq.*, 14, 1989.

[9] Galdi.J.P. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, Volume I.* Springer, Berlin, 1994.

[10] Amrouche.C Girault.V. On the existence and regularity of the solution of stokes problem in arbitrary dimension. *Proc. Japan Acad.*, 67(A), 1991.

[11] Amrouche.C Girault.V. Decomposition of vector spaces and application to the stokes problem in arbitrary dimension. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 44(1), 1994.

[12] Ladyzhenskaya.O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Gordan and Breach science Publishers, 1969.

[13] Necas.J. *Méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, 1967.

[14] Novotnỳ.A Padula.M. Existence et unicité de la solution stationnaire des équations d'un fluide compressible visqueux et calorifère en présence d'une grande force extérieur potentielles et d'une petite non-potentielle. *Sibir.Mat.Zhurnal*, 34, 1993.

[15] Girault.V Raviart.P.A. *Finite element methods for Navier-Stokes equations.* Springer-Verlag, 1986.

[16] Galdi.G.P Simader.C.G. Existence, uniqueness and l^q-estimates for the stokes problem in an exterior domain. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 112, 1990.

[17] Kozono.H Sohr.H. New a priori estimates for the stokes equations in exterior domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 40, 1991.

[18] E.M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[19] Novotnỳ.A Straskraba.I. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow.* Oxford Univ.Presse, 2004.

[20] Maz'ya.V.G. Plamenevskij.B.A. Stupyalis.L.I. The three-dimensional problem of steady-state motion of a fluid with a free surface. *Amer.Math.Soc.Transl*, 123, 1984.

[21] Tartar.L. *Topics in Non Linear Analysis.* Publications Mathématiques d'Orsay, 1978.

[22] Tartar.L. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces.* Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer, 2007.

[23] Temam.R. *Navier-Stokes equations.* North-Holland Pub. Company-Amsterdam-New York, Oxford, 1977.

[24] Gilbarg.D Trudinger.N.S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, 1998.

[25] Benabidallah.R. Taleb.L. Yashima.H.F. Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection. *Bollettino U.M.I.*, (8) 10-B, 2007.