République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

MÉMOIRE DE MAGISTER

En
Mathématiques Appliquées
Option
Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière

Préparé par :Azi Mourad

Devant le jury composé de :

Président	M^r Djamil	Aïssani	Professeur	Université de Béjaia
Rapporteur	M^r Mohand-Ouamer	Bibi	Professeur	Université de Béjaia
Examinateur	M^r Mohammed Saïd	Radjef	Professeur	Université de Béjaia
Examinateur	M^r Hamid	Kherbachi	Professeur	Université de Béjaia

Béjaia, 2010

Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de mémoire, le professeur M. O. Bibi pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais au début de ce travail, puis pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, ainsi que pour l'intérêt particulier qu'il a accordé à ce travail. Son oeil critique m'a été très précieux pour structurer ce travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Je tiens à remercier le professeur D. Aîssani pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également aux professeurs M. S. Radjef et H. Kherbachi pour avoir accepté de juger ce travail.

L'aboutissement de cette thèse a aussi été encouragé par de nombreuses discussions avec des collègues de disciplines variées. Je ne citerai pas de noms ici, pour ne pas en oublier certains. Ainsi, mes remerciements s'adressent à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner ma famille qui m'a toujours encouragé, soutenu et accompagné durant mes études.

Dédicaces

Ce modeste travail est dédié :

* *En premier lieu à mes très chers parents à qui je dois ma réussite ;*

* *A la mémoire de ma grand-mère ;*

* *A mes chers frères surtout l'adorable Annis ;*

* *A mes chers sœurs ;*

* *A tous les adhérents du Club Scientifique et tous mes amis ;*

* *A tous ceux qui se sentiront honorés par ce mémoire.*

M. AZI.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce mémoire a pour premier objectif de faire une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, et de résoudre ensuite certains de ces modèles en appliquant une méthode de contrôle, dite méthode adaptée. Après avoir exposé l'essentiel de la gestion financière de l'entreprise, nous présentons des modèles de contrôle optimal qui décrivent les différents problèmes posés au niveau d'une entreprise.

Pour résoudre certains de ces modèles, nous avons élaboré une méthode pour la résolution d'un problème de contrôle optimal dans la forme de Bolza, avec des contraintes inégalités. Sa particularité réside dans le fait qu'elle évite toute transformation préliminaire du problème, et elle possède un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision désirée.

Pour une survie à long terme, une entreprise doit s'appuyer sur une saine et stable fonction financière. Cette dernière est celle qui, au sein d'une entreprise, prépare et exécute les décisions financières, et ayant pour but de minimiser les coûts, de maximiser les profits, ainsi que de maintenir une croissance stable des actifs. Généralement, tous ces objectifs se résument en un seul objectif unifié, qui est la maximisation de la valeur de l'entreprise.

La finance d'entreprise comprend deux grands types de décision : l'investissement et le financement. Autrement dit, la fonction financière se préoccupe de la recherche et de l'allocation des ressources financières. L'objectif poursuivi est la création de valeur et l'enrichissement des actionnaires. Généralement, la fonction financière est à l'origine de la plupart des processus économiques et de leur aboutissement. Ainsi, elle est la fonction dominante parmi toutes les autres fonctions auxquelles la gestion de l'entreprise fait appel.

Pour qu'une entreprise soit plus performante et plus compétitive, elle doit donc optimiser toute sorte de décision. Pour cela, l'intervention des modèles d'optimisation est donc primordiale. Généralement, ces modèles peuvent être classifiés selon le type des événements futurs ; ils se ramènent alors, soit aux modèles déterministes soit aux modèles aléatoires. En outre, nous pouvons classifier ces modèles selon les modèles statiques et les modèles dynamiques. Dans la classe des modèles dynamiques, nous trouvons les modèles de contrôle optimal, à la fois stochastiques et déterministes, qui sont probablement les plus importants pour la modélisation des systèmes de gestion en finance, vue la dynamique des cycles de l'entreprise, où il faut prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser des critères économiques et financiers.

Depuis le début de l'ère industrielle, les entreprises ont cherché à automatiser les systèmes de production et de gestion afin de s'affranchir des taches pénibles et optimiser un certain critère. Pour cela, plusieurs théoriciens se sont intéressés à la résolution des problèmes de contrôle optimal, surtout après l'apparition du fameux principe du maximum de Pontriaguine. Ce principe a révolutionné la théorie moderne du contrôle optimal et il a ouvert un vaste champ de recherche dans cette discipline.

Plusieurs méthodes numériques performantes de résolution des problèmes de contrôle optimal ont vu le jour dans les années 1980, coïncidant avec le développement des calculateurs numériques et des ordinateurs. Parmi ces méthodes, on distingue la méthode développée par R.Gabassov et F.M.Kirillova, adaptée au contrôle optimal grâce à sa particularité de tenir compte des spécificités des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leur modélisation première.

Outre une introduction, ce mémoire est composé de quatre chapitres, d'une conclusion, d'une annexe, d'un glossaire et d'une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous présentons un panorama de la gestion financière de l'entreprise, où nous décrivons en premier lieu, les différentes interactions entre le financement, l'investissement et les flux de trésorerie. Par la suite, nous abordons la décision de financement et du choix d'investissement. Finalement, nous terminons ce chapitre par la gestion de trésorerie.

Le second chapitre comprend une synthèse des travaux des modèles du contrôle optimal en économie financière. Ainsi, nous abordons ce chapitre par la discussion d'un modèle qui a été développé par Sethi et al. [65], et qui modélise la problématique de la gestion optimale de la trésorerie. Puis nous exposons un modèle de financement optimal d'entreprise proposé par Krouse et Lee [49]. Finalement, nous présentons un modèle de firme étudié par Dmitruk [26], englobant les différentes décisions financières.

Dans le troisième chapitre, nous exposons les aspects théoriques et numériques de la théorie du contrôle optimal. Après avoir présenté la formulation mathématique du problème ainsi que le principe du maximum de Pontriaguine, nous présentons une nouvelle méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire sous forme de Bolza, contraintes inégalités et commande vectorielle. Nous avons développé cette méthode en se basant sur la méthode présentée par R.Gabasov et F.M.Kirillova dans [30], et sur les deux travaux de M.O.Bibi [7,10].

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution de certains modèles présentés dans le deuxième chapitre. Après avoir résolu le modèle de Sethi par le principe de maximum de Pontriaguine, nous exposons les résultats numériques de la méthode adaptée, implémentée sous Matlab, pour un modèle de firme décrit dans le deuxième chapitre.

Finalement, ce mémoire s'achève par une conclusion générale, une annexe, un glossaire et une bibliographie.

CHAPITRE 1

FINANCE D'ENTREPRISE

Introduction

Le champ de la finance d'entreprise comprend deux grands types de décision, qui sont l'investissement et le financement. Autrement dit, la fonction financière se préoccupe de la recherche et de l'allocation des ressources financières. L'objectif poursuivi est la création de valeur ou l'enrichissement des actionnaires.

Ce chapitre propose un panorama de la gestion financière de l'entreprise en avenir certain. Son objectif n'est pas de rentrer dans les détails mais de proposer une vision globale, pour se familiariser avec le vocabulaire utilisé en finance et pour mieux comprendre la suite de ce document et les différents axes de la gestion financière de l'entreprise. Après avoir présenté les différents cycles dans l'entreprise et la fonction financière sous forme d'un circuit financier, nous abordons la décision de financement et de choix d'investissement. Finalement, on termine ce chapitre par la logique de la gestion de trésorerie.

1.1 La dynamique des cycles dans l'entreprise

La notion de cycle renvoie à une suite d'opérations qui se renouvellent dans un ordre stable ou prévisible ; cette notion s'inscrit dans une perspective qui permet d'analyser les activités de l'entreprise d'une manière dynamique et non pas d'une manière statique. On distingue trois cycles d'opérations dans la dynamique de l'entreprise : le cycle d'exploitation, le cycle d'investissement et le cycle de financement.

1.1.1 Le cycle d'exploitation

Le cycle d'exploitation représente l'ensemble des opérations nécessaires à la production et à l'échange des biens et services. C'est un cycle court car ses éléments résultent de décisions ayant de l'effet à court terme. Il correspond aux phases : Approvisionnement - Production - Commercialisation.
Le schéma ci-dessous reproduit le cycle d'exploitation d'une entreprise industrielle :

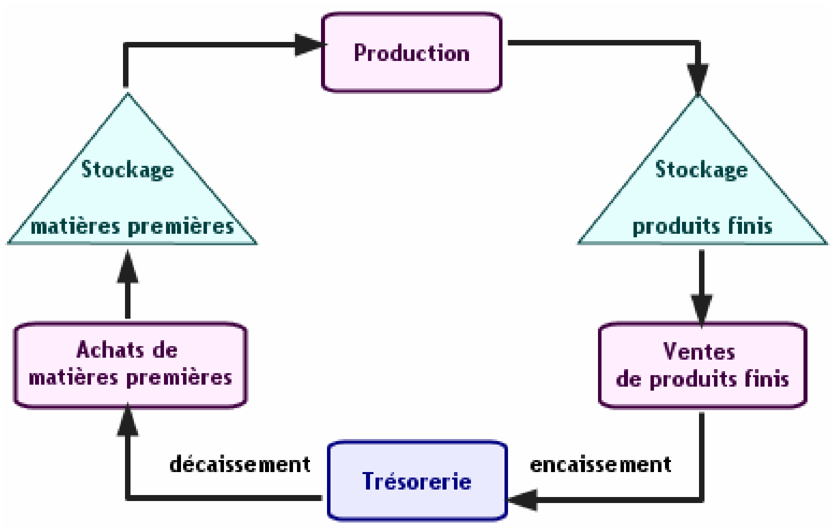

FIGURE 1.1: Le cycle d'exploitation

Ce schéma met en évidence les trois phases du cycle d'exploitation :

- **La phase d'approvisionnement** correspond à l'acquisition auprès des fournisseurs de biens et de services qui sont nécessaires à la production ; ces approvisionnements sont stockés pour une utilisation ultérieure. Cette phase commence par un décaissement ;

- **La phase de production** est articulée sur la mise en œuvre d'un processus technologique qui exige des inputs : un capital économique, un savoir faire et des biens ou des services à transformer ;

– **La phase de commercialisation** commence généralement avec les stocks de produits finis. Le moment important est celui de vente qui se traduit par un encaissement.

Les dépenses et les recettes des différentes phases du cycle d'exploitation se traduisent par un solde excédentaire d'exploitation. En effet, c'est par ces activités d'exploitation que l'entreprise assure ses sources d'autofinancement et sa rentabilité.

1.1.2 Le cycle d'investissement

L'investissement est la création d'un capital économique nécessaire à la mise en œuvre de la production à travers un cycle d'exploitation. Ainsi, le cycle d'investissement est indissociable du cycle d'exploitation. D'un point de vue financier, l'investissement s'analyse comme une affectation de fonds à la création ou à l'acquisition d'actifs physiques ou d'actifs financiers destinés à être utilisés dans le cadre du cycle d'exploitation. Il couvre plusieurs cycles d'exploitation successifs et dépend de l'usure (amortissement) des biens investis. Cette dernière détermine le cycle d'investissement, qui peut être rompu par la vente ou la mise au rebut des biens avant la fin de leur durée de vie physique. En effet, dans l'entreprise les opérations d'investissement se superposent et s'enchaînent selon des rythmes qui ne sont pas réguliers, et ayant pour objectif de maintenir ou d'améliorer l'encaissement dans le futur, de baisser les coûts ou de faire face à l'évolution des marchés. Le schéma (1.2) reproduit le cycle d'investissement d'une entreprise :

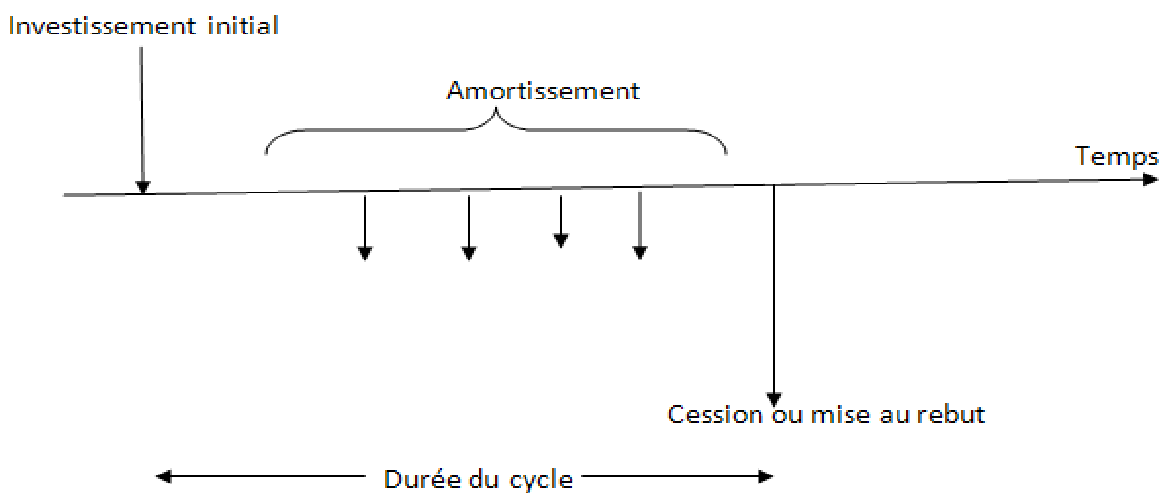

FIGURE 1.2: Le cycle d'investissement

1.1.3 Le cycle de financement

Les cycles d'exploitation et d'investissement se traduisent par des flux de trésorerie entre des ressources et besoins (décaissement et encaissement). En effet, si le solde de trésorerie est négatif, cette dernière est financée par des fonds externes, provenant des actionnaires ou des banquiers.

Ainsi, nous remarquons clairement la dépendance des trois cycles. Le cycle d'investissement induit le développement du cycle d'exploitation. Le cycle de financement résulte de l'évolution de la trésorerie, engendrée par les autres cycles. Ainsi, un déséquilibre d'un cycle peut provoquer une déstabilisation fonctionnelle d'un autre cycle. Les cycles sont donc en interaction et ne peuvent être analysés séparément.

1.2 La fonction financière au niveau de l'entreprise

La fonction financière est celle qui, au sein de l'entreprise, prépare et exécute les décisions financières. Son pouvoir de décision va dépendre de la dimension de l'entreprise et de sa structure [46]. La fonction financière a le rôle d'agir et d'adapter les ressources financières aux besoins, de respecter les contraintes, mais aussi de rechercher l'adéquation entre la fonction objectif de l'entreprise et celle des actionnaires et des prêteurs.

1.2.1 Les contraintes financières

L'étude des mécanismes financiers nous permet de mettre en évidence les contraintes fondamentales qui pèsent sur la vie financière de l'entreprise. Toute activité économique repose sur une procédure d'échanges qui exige la disposition d'un capital monétaire. Mais toute détention de capital comporte un coût. L'entreprise doit en même temps disposer d'un capital et assurer la rémunération des capitaux immobilisés [46]. En effet, toute entreprise qui veut assurer son fonctionnement et un développement durable, ne peut échapper à cette double contrainte.

1.2.1.1 La solvabilité

On entend ici par solvabilité, l'aptitude de l'entreprise à assurer à tout instant le paiement de ses dettes exigibles. Cette notion de solvabilité dite technique, s'oppose à la notion juridique de solvabilité selon laquelle l'entreprise est solvable si ses actifs permettent de rembourser ses dettes. L'insolvabilité est l'état de cessation de paiement [46].

Généralement, la solvabilité résulte de l'équilibre entre les flux de monnaie des diverses recettes et des diverses dépenses.

La solvabilité est une contrainte majeure au niveau d'une entreprise ; l'incapacité de l'entreprise à rembourser ses dettes est suivie généralement par la cessation de paiement vis-à-vis de l'ensemble des relations qu'elle entretient avec ses partenaires économiques. En effet, ces situations mènent à la disparition de l'entreprise ou au départ de ses dirigeants.

1.2.1.2 La rentabilité

La rentabilité est une notion qui s'applique à toute action économique mettant en œuvre des moyens matériels, humains et financiers. Elle s'exprime par le rapport entre le revenu obtenu ou prévu et les ressources employées pour l'obtenir.

Presque tout ce que nous faisons en finance d'entreprise se réfère d'une manière ou d'une autre à l'évaluation de la rentabilité. Quand on analyse s'il faut investir dans un actif ou dans un projet, on évalue la valeur future de l'actif et on la compare à son coût d'acquisition. Ainsi, l'existence d'un niveau minimum de rentabilité est une contrainte très importante avant chaque décision d'investissement.

1.2.2 La fonction objectif de l'entreprise

Aucune discipline ne peut se développer de manière cohérente sans avoir un corps d'objectif unifié. L'objectif principal dans la théorie financière est de maximiser la valeur de l'entreprise. Par conséquent, toute décision d'investissement et de financement qui augmente la valeur de l'entreprise est une bonne décision [24]. Mais rien n'empêche qu'il y ait des firmes qui ont d'autres objectifs que celui de maximiser leurs valeurs.

1.2.2.1 L'objectif de maximiser la valeur de l'entreprise

Si l'objectif de la finance d'entreprise est de maximiser la valeur de la firme, alors qu'est ce qui détermine la valeur de l'entreprise ? Dans un premier temps, on peut dire que la valeur d'une entreprise est ce qu'on est prêt à payer pour l'acquérir. Les comptables utilisent souvent cette approche de la valeur et ils l'appellent valeur comptable. Cette définition pose deux problèmes. Le premier est que si un actif en particulier a été acheté dans le passé, son prix historique ne reflète pas fidèlement sa valeur actuelle. Le second est que cette définition dissimule presque entièrement la valeur créée par un investissement futur. Nous pouvons dire que la valeur de la firme est déterminée par les cash-flows (la différence entre les recettes et les dépenses) que les actifs vont générer et aussi par l'incertitude de ces flux financiers.

1.2.2.2 L'objectif de maximiser les cours des actions

Dans la finance classique, les dirigeants de la firme ont seulement besoin de se concentrer sur l'objectif de maximiser le prix des actions. Mais cette vision simpliste de penser peut engendrer des dommages pour les autres acteurs de la firme (prêteurs, employés, milieu social...).

1.2.2.3 L'objectif de maximiser les profits

Certaines firmes ont des objectifs qui portent plus sur la rentabilité que sur la valeur. Leur raisonnement est basé sur le fait que les profits peuvent être mesurés plus facilement et que les profits plus élevés se traduisent en valeur plus élevée à long terme [24].

1.2.2.4 L'objectif du bien être social

Centaines firmes, spécialement celles du secteur public, ont pour objectif le bien être social. A titre d'exemple, une firme visant à maximiser la couverture des services sanitaires et prenant des décisions dans ce sens, peut se trouver face à des pertes de rentabilité.

1.2.3 Le circuit financier

La meilleure façon pour comprendre le fonctionnement financier de l'entreprise est sans doute celle qui consiste à regrouper les interactions et les problèmes qui touchent les différentes décisions financières de l'entreprise. Nous les résumons sous forme d'un "circuit" dans le schéma ci-après :

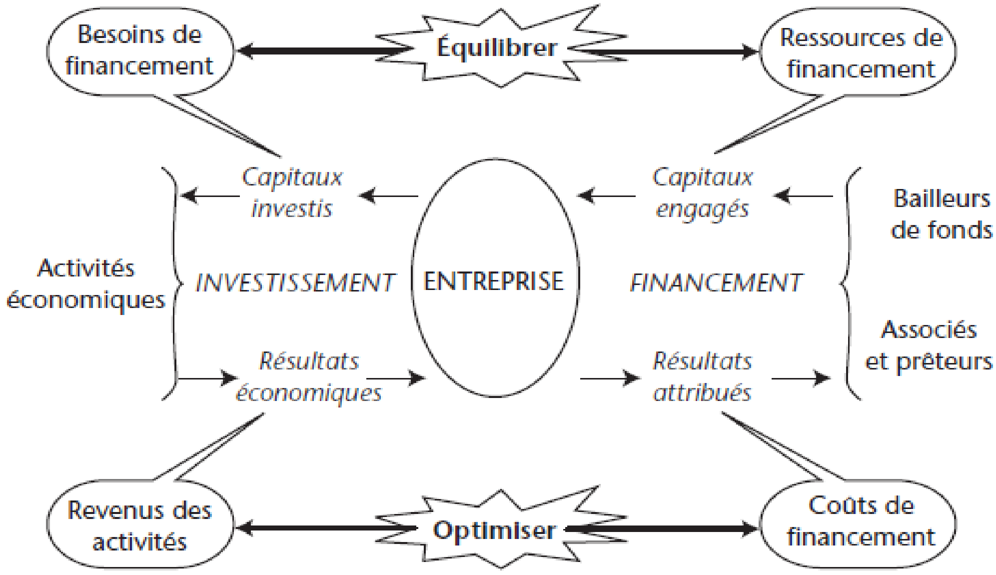

Figure 1.3: Le circuit financier de l'entreprise

La partie supérieure du schéma correspond aux origines et aux utilisations des capitaux manipulés par l'entreprise. La partie inférieure traduit la discipline du coût et du revenu de ces capitaux.

Ce schéma propose de mettre en évidence les différents flux de trésorerie associés aux différentes décisions financières.
Dans une première phase (Capitaux Engagés), des agents économiques disposant de liquidités, apportent à l'entreprise les fonds qui lui sont nécessaires pour réaliser ses opérations d'investissement. Il y a confrontation d'une demande de liquidités de la part de l'entreprise et d'une offre de liquidités de la part des apporteurs de capitaux.
Dans une seconde phase (Capitaux Investis), les dirigeants de l'entreprise décident de l'allocation des fonds collectés, en acquérant des actifs : il s'agit du flux lié à l'opération d'investissement.
L'acquisition des actifs industriels et commerciaux est réalisée en vue d'obtenir ultérieurement des flux de liquidités provenant des opérations d'exploitation et des actifs financiers, ceci étant classé comme une troisième phase (Résultats économiques).
Finalement (Résultats Attribués), les flux de liquidités des résultats économiques sont soit utilisés, pour rembourser les créanciers, soit versés aux actionnaires sous forme de dividendes, ou bien réinvestis dans l'entreprise.

La première problématique financière au niveau d'une entreprise est celle de **l'équilibre**, qui s'instaure entre les besoins et les ressources. L'équilibre a un aspect quantitatif puis-

qu'il est vital que les ressources soient supérieures au besoins.
La seconde problématique financière est celle de **l'optimisation**, qui se mesure par la relation entre les revenus économiques et le coût moyen des capitaux. Cependant, cette relation est liée généralement aux décisions de financement et d'investissement.

1.3 La décision de financement et coûts des capitaux

1.3.1 Principales sources de financement

Les ressources de financement peuvent être classées en deux grandes catégories : les ressources propres (fonds propres) et les ressources étrangères (fonds de tiers). Dans chacune de ces deux catégories, il existe une variété de moyens de financement auxquels une entreprise peut recourir [19].

Dans ce qui suit, nous examinons l'ensemble de ces moyens avec leurs principales particularités. Ainsi, en premier lieu,éééééééééééééééééééé nous allons décrire les différentes composantes du financement par capitaux propres. Puis nous exposons le financement par dettes.

1.3.1.1 Financement par capitaux propres

Les capitaux propres (fonds propres, equity capital en anglais) est d'une telle importance dans le financement des entreprises qu'ils doivent nécessairement être abordés en profondeur toute au long de cette section. Les capitaux propres qui sont constitués généralement par les apports des actionnaires et auxquels on peut ajouter l'autofinancement, favorisent la stabilité, renforcent la position concurrentielle et réduisent le risque de faillite de l'entreprise.

1. **L'action et le capital social**

   L'action est un titre de propriété (valeur mobilière) qui représente la part du capital qu'un actionnaire détient dans l'entreprise lors de sa création ou lors de l'augmentation de son capital social. Les actionnaires peuvent être des personnes physiques ou morales qui possèdent des actions dans l'entreprise et qui y ont investi des titres de participation. Les détenteurs de ces titres sont collectivement propriétaires juridiques de l'entreprise et cela leur donne le droit au :

- Dividende lorsque l'entreprise réalise un résultat net positif et que l'assemblée générale décide d'en distribuer une partie aux actionnaires ;

- Droit préférentiel de souscription des anciens actionnaires lors de l'augmentation du capital ;

- Bonus de liquidation en cas de faillite.

On comprend aisément que ces titres représentent un capital à risque car ils donnent à leurs détenteurs un droit de créance résiduel. Cela veut dire que les actionnaires ont des droits sur le bénéfice (aléatoire), une fois l'entreprise a rempli toutes ses obligation légales (paiement des salaires, des charges financières, des dettes et d'impôts sur le bénéfice).

Comme autres ressources propres d'origine externe, on peut citer les subventions d'investissement qui correspondent à l'appui financier que les pouvoirs publics versent à l'entreprise, sans contrepartie, au vu de l'intérêt économique et social (création d'emplois, décentralisation, création d'entreprise, investissements stratégiques, etc.).

2. **L'autofinancement**
   Outre le capital social, l'entreprise peut recourir pour ses investissements à des ressources internes générées par toutes ses activités. L'autofinancement se définit comme étant la somme de la partie du bénéfice (dividende) non distribuée et des dotations annuelles d'amortissement et de provision. Ce surplus de liquidité engendré par l'activité de l'entreprise ne peut donc être disponible qu'en cours d'exploitation, et peut alors être utilisé pour le financement des investissements de renouvellement, d'expansion ou de modernisation de l'entreprise.

1.3.1.2 Financement par dettes

L'endettement constitue une deuxième source de financement à laquelle les entreprises font souvent appel. On distingue, selon la durée, les dettes à long terme et les dettes à court terme.

⋆ **Dettes à long terme**
Pour les entreprises, les dettes à long terme peuvent prendre plusieurs formes. Ceci peut être un emprunt à long terme auprès d'une banque ou de toute autre institution financière, ou un emprunt obligataire à long terme émis sur un marché financier.

Globalement, on distingue trois grandes catégories. Les dettes bancaires, les emprunts auprès du public (obligation) et le crédit-bail (leasing).

1. **Emprunt bancaire**

   Il s'agit d'un prêt à long terme (plus d'un an) accordé par un établissement de crédit à une entreprise, laquelle s'engage à le rembourser à une échéance bien déterminée. Ce prêt est conditionné par une garantie qui peut être une hypothèque, une caution ou un nantissement et comporte généralement un coût, appelé taux d'intérêt.

2. **Emprunts obligataires**

   Une autre alternative à l'emprunt bancaire est l'émission d'obligation. C'est un emprunt à long terme représenté par des titres de créance, susceptibles d'être placés en public et d'être négociables. Ces emprunts sont souvent des montants élevés, et pour la non-unicité du prêteur ces montants sont divisés en fractions égales appelées obligation. L'entreprise qui émet un emprunt obligataire s'engage à payer aux obligataires des intérêts périodiques, généralement annuels, appelés **coupons** et de rembourser la valeur nominale, appelée **le principal**, à une échéance donnée.

   Comme on peut le constater, il y a une grande différence entre une obligation et une action. Alors que l'obligation est remboursée à l'échéance, l'action ordinaire ne le sera en principe qu'en cas de liquidation. Le titre que détient un obligataire porte un intérêt fixe (ou variable) quel que soit le résultat dégagé par l'entreprise alors que l'action ordinaire ne donnera droit à un dividende que si l'entreprise réalise du bénéfice.

3. **Crédit bail (leasing)**

   C'est une location assortie d'une option d'achat à un prix fixé d'avance. L'entreprise loue le bien acheté par une société spécialisée qui est propriétaire. La location est assortie d'une possibilité d'achat du bien pris en location. En fait, l'entreprise détermine les caractéristiques du bien qu'elle désire louer et contacte une société du crédit-bail qui se charge d'acquérir le bien et de le mettre à la disposition de l'entreprise pendant une durée déterminée avec le versement de loyers fixés d'avance. A l'échéance, l'entreprise décide si elle veut acquérir le bien ou non.

Ce contrat s'étend sur une ou plusieurs années et s'accompagne d'une série de versements fixes de la part de l'entreprise. Cette opération de leasing permet à l'entreprise de disposer d'un investissement durable de son choix très rapidement, sans mobiliser immédiatement des capitaux nécessaires à son acquisition.

⋆ **Financement par des dettes à court terme**

Il s'agit d'une source de financement dont l'échéance de remboursement ne dépasse pas un exercice comptable. Les entreprises ont généralement recours à ce type de ressources pour veiller de près à leur gestion de trésorerie, notamment pour répondre aux différentes demandes du cycle d'exploitation. Dans un tel cycle,pour les stocks (matière premières, produit finis, marchandises, etc.) et pour certaines charges d'exploitation (charges externes, charges du personnel, etc.), l'entreprise dispose de plusieurs sources de fonds dont les plus importantes sont :

– *Les dettes fournisseurs*, à partir du moment où les fournisseurs acceptent de mettre à la disposition de leurs clients les stocks dont ils ont besoin, et qu'ils acceptent d'être payés après que les clients aient vendu et encaissé les recettes. Cela constitue de ce fait une source de financement du cycle d'exploitation de ces clients ;

– *Emprunts bancaires à court terme*, il s'agit d'ouvertures de crédits dont bénéficient les entreprises pour faire face au problème immédiat de liquidités. Cela arrive lorsque l'entreprise a besoin de fonds pour financer son cycle d'exploitation ;

– *Le découvert bancaire* qui est un crédit à court terme, accordé par la banque à l'entreprise. Ce crédit permet à l'entreprise de dépasser les disponibilités de son compte jusqu'à un montant déterminé et pendant une durée finie.

– *L'affacturage* est une technique de financement par laquelle une entreprise cède la propriété de ses créances à une autre entreprise (le factor) en échange de liquidités immédiates ;

– *La vente à découvert* est la vente de titres que l'entreprise ne possède pas. Plus précisément, cette technique consiste à vendre des titres qu'on ne possède pas encore, mais qu'on doit se faire livrer à un moment donné. Pour effectuer cette opération, l'entreprise doit emprunter des actions de son courtier [1].

Les crédits de trésorerie (à court terme) correspondent des fois à des crédits en blanc. Cela veut dire que l'entreprise peut avoir un crédit sans aucune justification à donner à la banque.

1.3.2 Coûts des capitaux

Quel que soit le mode de financement choisi, ce dernier a un coût pour l'entreprise. Ainsi, le coût du capital représente pour toute entreprise, le coût qu'elle doit supporter en utilisant ce capital pour financer son activité. Ce coût est souvent utilisé en tant que taux d'actualisation ou taux de rentabilité exigé par le marché pour attirer des fonds d'investissement. Il est évident que ce qui est coût pour la firme constitue pour l'apporteur des capitaux, le rendement qu'il exige de son portefeuille.
En effet, La notion de coût du capital d'une entreprise est un concept essentiel dans la théorie financière moderne dans la mesure où ce coût constitue le lien majeur entre les décisions d'investissement et les décisions de financement des dirigeants d'une entreprise.

Mathématiquement, le coût du capital est défini comme la moyenne pondérée des coûts des différentes sources de financement (fonds propres "CP", fonds de tiers "D"). Il est appelé Coût Moyen Pondéré du Capital (CMPC), ou Weighted Average Cost of Capital(WACC), avec

$$CMPC = r_p \frac{CP}{CP+D} + r_d \frac{D}{CP+D}, \tag{1.1}$$

où :
r_p :Coût des capitaux propres,
r_d :Coût de la dette.

Il reste à souligner que le coût du capital dépend du choix de la structure financière entres capitaux propres et capitaux empruntés. Le coût de chaque source de financement est donné par la perte d'opportunité.

1. Un courtier ou une société de courtage est une personne ou entreprise qui sert d'intermédiaire pour une opération, le plus souvent financière, entre deux parties.

1.3.2.1 Coûts des capitaux propres

Les capitaux propres sont composés du capital social, des primes et des réserves. Le coût du capital est une évaluation de la contrainte que fait peser l'actionnaire sur l'entreprise. Cette contrainte s'exprime par une attente en matière de dividendes mais aussi en termes de progression des cours de l'action. En d'autres termes, elle est considérée comme la rémunération espérée par les actionnaires compte tenu du risque que représente l'acquisition des actions d'une entreprise donnée. Pour mieux comprendre sa logique, présentons l'approche principale d'évaluation du coût des capitaux propres, appelée modèle de Gordon-Shapiro.

Le modèle de Gordon et Shapiro :
Comme nous l'avons signalé, le coût des capitaux propres est assimilé au rendement attendu par les actionnaires. Le modèle de Gordon suppose que le taux de rendement d'une action est r, le dividende D croît au taux constant g, et on tient compte du prix d'action P_0. Ce rendement est donné par :

$$r = \frac{D}{P_0} + g. \tag{1.2}$$

Étant donné qu'une nouvelle émission d'action entraîne des frais pour l'entreprise émettrice, le coût augmente par rapport au rendement obtenu par les actionnaires. En effet, le coût net du financement par capitaux social est donné par :

$$r_p = \frac{D}{P_0(1-f)} + g, \tag{1.3}$$

où :
f : frais d'émission après impôt des actions ordinaires, en pourcentage du prix de vente.
g : taux de croissance à long terme de l'entreprise.

Dans la cadre des coûts des dividendes non distribués, une partie des bénéfices réalisés par l'entreprise sont réinvestis. Les actionnaires sont privés du rendement qu'ils auraient pu réaliser sur celle-ci. Ils vont exiger un rendement au moins égal à celui qu'ils obtiennent de leurs actions ordinaires. Le coût des bénéfices non répartis est inférieur au coût d'une nouvelle émission d'actions ordinaires, car l'entreprise ne subit pas de frais d'émission.

1.3.2.2 Coût de la dette

⋆ **Coût de la dette à court terme :**

Nous ne traiterons que des emprunts bancaires, pour lesquels l'entreprise ne subit pas de frais d'émission. Le coût des dettes à court terme serait alors établi en fonction du taux d'intérêt assumé par l'entreprise sur sa marge de crédit. Comme nous savons que les intérêts sont déductibles d'impôt, alors le coût de la dette à court terme est le taux d'intérêt respectif (nominal) corrigé de l'impôt :

$$k_d = [(1 + \frac{i}{c})^c - 1] * (1 - T_c), \tag{1.4}$$

où :
i :taux d'intérêt nominal chargé sur l'emprunt à court terme ;
c :nombre de capitalisations annuelles ;
T_c : taux d'imposition effectif de la société.

⋆ **Coût de la dette à long terme (obligation) :**

Pour recourir au financement obligataire, une entreprise doit tenir compte des taux de rendement (r) du marché, offerts pour des titres ayant le même niveau de risque, de son taux d'imposition (T_c) et des frais d'émission (f), et ce afin d'établir le coût net de cette source de fonds. La détermination du coût de l'obligation (k_o) se fait par la relation suivante :

$$k_o = \frac{r(1 - T_c)}{1 - f(1 - T_c)}. \tag{1.5}$$

Pour le coût d'endettement bancaire à long terme, il se calcule de la même manière que celui à court terme.

1.3.3 Le choix des sources de financement

Parmi les différentes sources de financement de l'entreprise, le choix de financement se fait de plusieurs manières :

- *La règle de l'endettement maximum* implique que le montant des dettes financières à moyen et à long terme n'excède pas le montant des capitaux propres ;

- *La règle de la capacité de remboursement* exige, généralement, que le montant de l'endettement financier ne doit pas dépasser 3 ou 4 fois la capacité d'autofinancement annuelle ;

- *La règle du minimum d'autofinancement* indique que l'entreprise soit capable de financer une partie des investissements pour lesquels elle sollicite des crédits. En effet, l'entreprise ne trouvera pas, généralement, un crédit pour la totalité du montant de l'investissement. Alors elle devra trouver un financement propre complémentaire ;

- *La règle de la maximisation de la rentabilité financière* se résume par la maximisation de la richesse des actionnaires. Ceci revient à maximiser le rapport entre la rentabilité nette et les capitaux propres.

1.4 Décision d'investissement

La décision d'investissement constitue la décision financière la plus importante, car elle joue un rôle déterminant dans la création de valeur par l'entreprise. L'investissement est réalisé en vue d'accroître la richesse des propriétaires de l'entreprise et, par conséquent, la valeur de l'entreprise. L'accroissement de valeur signifie que la rentabilité de l'investissement est positive.

La décision d'investissement est une décision complexe parce qu'elle est prise à partir d'une réflexion anticipant l'évolution économique générale et celle de l'entreprise en particulier, compte tenu des contraintes financières.

1.4.1 Les déterminants de l'investissement

On appelle les déterminants de l'investissement les raisons qui incitent le chef d'entreprise à investir. Généralement, on distingue quatre facteurs agissant sur l'investissement : la demande anticipée, la substitution capital-travail, la rentabilité et la situation financière de l'entreprise.

1.4.1.1 La demande anticipée

Cette demande anticipée joue un rôle fondamental dans le système capitaliste, où les entreprises produisent pour vendre en faisant des profits. Si le chef d'entreprise prévoit que la demande de son produit augmentera, il semble logique qu'il cherche à produire plus pour augmenter son chiffre d'affaires et ses profits.

L'entreprise doit alors augmenter ses capacités de production en achetant de nouvelles machines. Elle fait donc un investissement de capacité (productive). Elle peut aussi chercher à améliorer sa productivité en achetant des machines plus performantes.

1.4.1.2 Le coût relatif du capital et du travail

Si le coût salarial augmente plus vite que le coût du capital, les entreprises préfèrent, substituer le capital au travail, et donc préfèrent automatiser la production plutôt qu'embaucher.

1.4.1.3 La rentabilité

L'entreprise décide d'investir si elle prévoit un certain taux de profit sur le capital investi. Plus précisément, le rendement économique doit être nettement supérieur au coût réel des emprunts.

1.4.1.4 La situation financière

Tant que le rendement économique de l'investissement est supérieur au taux d'intérêt, l'entreprise est incitée à emprunter pour investir. Mais ce comportement a ses limites. L'augmentation des dettes peut finir par menacer la survie de l'entreprise. Pour se protéger contre un risque croissant d'insolvabilité, les prêteurs vont exiger des taux de plus en plus élevés. En effet, l'entreprise en situation financière difficile cherchera en priorité à se désendetter.

1.4.2 L'investissement et la croissance

L'investissement permet l'accumulation du capital productif, c'est-à-dire l'accumulation de bien dont la durée de vie dépasse plusieurs périodes et qui ne sont pas entièrement détruits lors de leur utilisation. Néanmoins, les biens peuvent connaître une certaine usure : on parle alors de dépréciation du capital [5]. Si on note pour la période t, δ_t le taux de dépréciation du capital, I_t l'investissement brut et K_t le capital en début de période, on peut alors traduire le processus d'accumulation du capital par rapport à la dépréciation et l'investissement par l'équation :

$$K_{t+1} = K_t - \delta_t K_t + I_t. \tag{1.6}$$

Cette relation illustre que le capital est un stock et l'investissement est un flux. Cette propriété est encore plus évidente si on considère l'investissement net $I_{Nt} = I_t - \delta_t K_t$.

L'équation (1.6) devient alors :

$$K_{t+1} - K_t = I_{Nt}. \tag{1.7}$$

Cette équation montre que la variation du stock de capital est égale au flux d'investissement net.

L'accumulation du capital par les entreprises est un processus leur permettant d'augmenter leurs capacités productives dans le futur. Ainsi, l'investissement réalisé aujourd'hui donne lieu à des revenus futurs qui dépendent du prix auquel elles vont vendre leurs bien et des coûts de production, ces revenus peuvent se traduire par une fonction de production dont les facteurs de production sont le travail et le capital. La croissance de la production peut provenir en investissant aux niveaux de ces facteurs : en utilisant d'une manière plus large ces facteurs ou en augmentant leur efficacité productive. Cette efficacité se mesure par la productivité apparente (rapport entre la quantité de biens produite et la quantité de facteurs de production utilisée). Ainsi, ce processus de croissance et de création de valeur peut être analysé comme une donnée économique absolue, en abordant la notion de facteurs de production et de fonction de production.

1.4.2.1 Facteurs de production

L'analyse microéconomique suppose, généralement, que l'objectif principal du producteur est de maximiser son profit, donc atteindre un niveau de production optimal avec un moindre coût,.

De nombreux facteurs participent à l'activité de production. A court terme, on distingue les facteurs fixes qui sont ceux dont le producteur ne peut modifier les quantités, et des facteurs variables qui sont ceux dont le producteur peut modifier les quantités (consommation intermédiaire, travail, ...). A long terme, il n'existe plus de facteurs fixes, tous les facteurs peuvent être variables.

Le plus souvent, pour analyser la production (quantité de produit) on se ramène à étudier les facteurs de production : le travail (la quantité de travail est généralement notée L) ; et le capital qui comprend tous les autres inputs comme les machines, l'énergie et la matière première (la quantité de capital est généralement notée K).

Ainsi, l'investissement peut se représenter comme le comportement du producteur visant à fixer le niveau de facteurs de production nécessaires pour assurer un certain niveau de production. On distingue ainsi trois types d'investissements :

- **L'investissement productif (capacité)** : il vise à garantir ou à augmenter un niveau de production de biens et services en augmentant le niveau de facteurs de production (ex : le producteur rajoute une nouvelle machine aux machines existantes dans l'espoir de produire plus) ;

- **L'investissement de remplacement** : il vise à renouveler le capital amorti ou vieillissant pour maintenir un niveau de production équivalent ;

- **L'investissement de substitution** : il vise à augmenter le niveau de production en modifiant la productivité des facteurs de production en substituant l'un par les autres (ex : si on a trois ouvriers, on place une machine et un seul ouvrier pour plus de production).

1.4.2.2 Fonction de production

La fonction de production est une relation technique qui indique, à partir de la quantité de facteurs mis en œuvre par le producteur, la quantité de produit qu'il peut obtenir (Q). Ainsi, si on utilise le capital et le travail comme moyens de production, alors la fonction de production sera donner par $Q = f(K, L)$.
En effet, pour produire, l'entreprise doit payer les facteurs de production qu'elle utilise. Elle va donc subir un coût qui s'exprime mathématiquement comme la somme des rémunérations de chaque facteur.
Si le travail et le capital sont les seuls facteurs variables, et si on note w le salaire versé pour chaque unité de travail utilisée et r le taux de rémunération du capital, alors le coût de production est donné par la formule :

$$C(K, L) = wL + rK + f, \tag{1.8}$$

où f représente la rémunération de l'ensemble des facteurs fixes de l'entreprise.
Le profit étant défini comme la différence entre le chiffre d'affaires réalisé et les coûts, il s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\Pi(K, L) = pf(K, L) - wL - rK - f, \tag{1.9}$$

où p représente le prix du bien ou du service produit.

Cette fonction de profit illustre que si le producteur veut maximiser son profit, il a intérêt d'investir au niveau des facteurs de production : soit en augmentant l'un des facteurs pour avoir une quantité de produit plus importante ; soit en substituant l'un par l'autre pour réduire les coûts de production.

De manière générale, une fonction de production s'exprime sous la forme $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où Q est la quantité produite et $x_1, x_2, ..., x_n$, sont les facteurs de production. Elle diffère d'une entreprise à une autre, et elle est étroitement liée au cycle d'exploitation. Les fonctions de production les plus connues sont :

- La fonction de production additive de la forme :$Q = c + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, où $c,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n$ sont des constantes déterminées à estimer ;
- La fonction de Cobb-Douglas : $Q = c.x_1^{a_1}.x_2^{a_2}.\ldots.x_n^{a_n}$;
- La fonction de Leontieff, elle suppose que les facteurs de production sont complémentaires, et elle prend la forme :$Q = \min(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n)$.
- La fonction de Domar, elle, ne prend en compte qu'un seul facteur de production (le capital K), et elle s'écrit comme suit :$Q = \frac{K}{v}$, où v est le coefficient de capital, qui donne la quantité de capital nécessaire pour produire une unité de biens et services.

1.4.3 Critères classiques du choix d'investissement

Les critères classiques du choix d'investissement sont des outils permettant de mesurer la pertinence d'un investissement. Nous présentons ici les principaux critères du choix en avenir certain : la valeur actuelle nette (VAN), et le taux interne de rentabilité(TIR), et avant de ce faire, nous abordons tout d'abord la notion de capitalisation et d'actualisation.

1.4.3.1 Actualisation et capitalisation

Le taux d'actualisation peut se définir comme étant le taux de rendement à exiger sur un projet d'investissement. Ce taux de rendement à exiger est également appelé coût du capital dans la finance d'entreprise, car il est obtenu en général à partir des différents coûts des sources de financement du projet.
Les concepts d'actualisation et de capitalisation peuvent être utilisés pour comparer des sommes non disponibles au même instant et pour rechercher l'équivalent de chacune d'elles

à une date commune, par exemple la période initiale. Pour ce faire, un taux de dépréciation monétaire est utilisé (en raison de la perte de valeur de la monnaie : inflation, dépréciation du futur).
Les fondements des calculs de l'actualisation sont les mêmes que ceux de la capitalisation. Avec l'actualisation, on se déplace de l'avenir vers le présent et inversement pour la capitalisation. Au taux i constant, la valeur actuelle d'un montant x_t disponible à l'instant " t " années est égale à :

$$x_0 = \frac{x_t}{(1+i)^t}. \tag{1.10}$$

Systématiquement, la valeur future d'un montant x_0 capitalisé au taux i durant t années est égale à :

$$x_t = x_0(1+i)^t. \tag{1.11}$$

Lorsque l'on décide de la capitalisation à des taux proportionnels au taux de la période de référence, la valeur acquise diffère. Cette valeur acquise est en fonction du nombre de capitalisations par période de référence. Si le nombre de capitalisations tend vers l'infini, ou encore si la durée de la période inter-capitalisation tend vers zéro, on parle de capitalisation continue.
Notons n le nombre de capitalisations et T la durée de la période inter-capitalisation. La valeur du capital x_0 placé pendant une période en capitalisation continue est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lim_{n\to\infty} x_0(1+\frac{i}{n})^n \\ &= \lim_{\frac{n}{i}\to\infty} x_0(1+\frac{1}{n/i})^n \\ &= \lim_{\frac{n}{i}\to\infty} x_0((1+\frac{1}{n/i})^{n/i})^i. \end{aligned}$$

Posons $\frac{n}{i} = n'$, la relation devient :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lim_{n'\to\infty} x_0((1+\frac{1}{n'})^{n'})^i \\ &= x_0(\lim_{n'\to\infty}(1+\frac{1}{n'})^{n'})^i. \end{aligned}$$

On obtient comme résultat final :

$$x_1 = x_0.e^i.$$

Pour une durée quelconque t :

$$x_t = x_0.e^{it}. \tag{1.12}$$

1.4.3.2 La Valeur Actuelle Nette (VAN)

Le critère de la valeur actuelle nette (VAN) est le critère de référence en matière de choix d'investissement. Elle se définit, pour un projet d'investissement dont la durée de vie est égale à T années, de la manière suivante :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}, \tag{1.13}$$

où :
I_0 : montant de l'investissement initial ;
CF_t : cash-flow attendu de l'investissement pour la période t ;
r : taux d'actualisation qui est, généralement, estimé par les coûts de capitaux.

Ainsi, si la VAN est positive, l'investissement contribue à accroître la valeur de l'entreprise et doit être effectué. Si elle est négative, l'investissement ne doit pas être réalisé. Une VAN positive montre que l'entreprise va réussir par le biais du projet d'investissement à :

- récupérer le capital investi ;
- rémunérer les fonds immobilisés à un taux égal au taux d'actualisation ;
- dégager des surplus dont la valeur actuelle est égale à la VAN du projet.

1.4.3.3 Critère de Taux Interne de Rentabilité (TIR)

Le taux interne de rentabilité (TIR) et le taux actuariel pour lequel la VAN du projet est nulle, ansi, il se calcule à l'aide de l'equation suivante :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+TIR)^t} = 0, \tag{1.14}$$

où :
I_0 : montant de l'investissement initial ;
CF_t : cash-flow attendu de l'investissement pour la période t.

Lorsque le TIR du projet est supérieur au taux d'actualisation de l'entreprise, l'investissement doit être réalisé, la rentabilité des fonds engagés étant supérieure à leur coût d'opportunité. Ainsi, le classement entre plusieurs projets s'effectue dans l'ordre décroissant des TIR, avec pour limite le taux d'actualisation de l'entreprise.

1.5 Gestion de trésorerie

L'objectif de la gestion de trésorerie consiste tout d'abord à déterminer le niveau optimal de réserve de liquidités, qui assure à l'entreprise une protection contre le risque d'insolvabilité et qui répond au différents besoins de fonds. En second lieu, cette gestion vise à maximiser autant que possible le rendement des excédents de la trésorerie. Pour atteindre cet objectif, il faut répartir le montant de la réserve entre argent liquide et titre quasi-liquide de façon à maximiser la différence entre le rendement des titres et les coûts probables de leur achat et de leur vente.

1.5.1 L'équilibre financier et gestion de trésorerie

L'équilibre financier d'une entreprise est la relation de cohérence qui existe entre ses emplois et ses ressources. Cette cohérence détermine en effet sa solvabilité et sa liquidité. L'analyse de cet équilibre financier se base généralement sur le principe selon lequel les investissements doivent être financés par des ressources présentant un caractère permanent. Un déséquilibre à ce niveau peut avoir des répercussions négatives importantes sur la situation de la trésorerie. L'équilibre financier est apprécié traditionnellement par l'étude de la relation entre le fonds de roulement (FR), les besoins du fonds de roulement (BFR) et de la trésorerie(T).

Le Fonds de roulement est défini comme l'excédent de capitaux stables, par rapport aux emplois stables ; il peut être défini de deux manières :
FR liquidité = ressources à plus d'un an - emplois (besoins) à plus d'un an.
FR Fonctionnel = ressources stable - emplois stables.

Quant au BFR, il n'a véritablement de sens que dans une optique fonctionnelle. Il représente le besoin de financement généré par le cycle d'exploitation de l'entreprise. Il se calcule généralement ainsi :

BFR = Stocks + créances clients (argent dû à l'entreprise par ses clients) - dette d'exploitation.

Ainsi, l'excédent de trésorerie d'exploitation (T) est donné par :

$$T=FR-BFR.$$

1.5.2 Les réserves liquides optimales

Le niveau optimal de réserve de liquidités au sein de la trésorerie est celui où le rendement marginal perdu à cause du gel des fonds en réserve égalise la pénalité marginale qu'on évite grâce à cette même réserve. Si la réserve dépasse le niveau optimal, l'entreprise perd en rendement plus qu'elle gagne en protection. Inversement, si la réserve est inférieure au niveau optimal, l'entreprise s'expose à des pénalités additionnelles supérieures au rendement alternatif qu'elle pourrait obtenir.

Il est dangereux pour la firme d'opter pour un niveau de réserve sans considérer soigneusement le risque qui lui est rattaché. En effet, un certain niveau de réserve peut bien être optimal du point de vue de la minimisation des coûts totaux, et entraîner en même temps un risque plus fort que celui que la firme peut assumer. Pour cette raison, il est important de tenir compte du taux de risque dans le choix de réserve optimale.

1.5.3 Placement des excédents de trésorerie

Dotée de capitaux propres suffisants et d'une bonne rentabilité, l'entreprise, même de petite taille, peut disposer d'excédents de trésorerie. Cependant, elle dispose d'un vaste éventail de produits pour placer leurs fonds excédentaires. Généralement, il faut trouver les placements adaptés à la durée des excédents. Les critères de choix font intervenir la rentabilité et le risque. Pour les placements à court terme, la liquidité représente un facteur déterminant. Le statut fiscal des différents placements joue également un rôle très important.

1.5.3.1 Principaux types de placement

A côté des placements directs sous forme d'action ou d'obligation, l'entreprise peut recourir aux produits bancaires, à certaines formes collectives d'épargne telles que les sociétés d'investissement à capital variable (SICAV) ou les fonds communs de placement (FCP) ou, encore, aux titres de créances négociables.

- Les dépôts (ou comptes) à terme :

  Il s'agit d'un placement sur un compte bancaire dont la durée varie de 1 mois à 2 ans. La rémunération, fixée par la banque, est voisine du taux du marché monétaire et varie suivant le montant et la durée du placement.

- Les formes collectives de placement :

  Les organismes de placement collectif en valeur mobilière (OPCVM), offrent le choix entre deux types de support : (SICAV) et (FCP). Les SICAV sont des sociétés anonymes, créées pour gérer collectivement l'épargne. Leur capital est ouvert à tous et la valeur des parts est calculée chaque jour, ce qui garantit une bonne liquidité pour ce type de placement. Les souscripteurs supportent, selon SICAV, des frais d'entrée et de sortie qui doivent être pris en compte pour apprécier la rentabilité de placement. Les FCP sont des copropriétés de valeur mobilière, la valeur des parts est calculée selon une périodicité propre à chaque fonds mais au moins deux fois par mois, ce qui rend ce support moins liquide que le SICAV.

- Les certificats de dépôt négociables :

  Les certificats de dépôt sont émis par les banques en fonction des investisseurs qui contractent les banques émettrices (autrement dit, le montant et le nombre des certificats sont souvent déterminés à partir des besoins des souscripteurs). En général, les intérêts sont fixes et versés à l'échéance. Les taux proposés sont proches de ceux du marché monétaire.

- Les billets de trésorerie et les bons à moyen terme négociables :

  Les billets de trésorerie et les bons au moyen terme négociables constituent à la fois un moyen de financement et de placement pour les entreprises. Par l'intermédiaire d'une banque, les entreprises qui ont besoin de trésorerie, vont émettre elles-mêmes des billets de trésorerie qui vont être achetés par d'autres entreprises (entreprises classiques ou appartenant au secteur bancaire et financier) ayant des excédents de trésorerie.

- Les bons du trésor négociables :
  Titre représentatif d'une créance sur le trésor public, c'est-à-dire sur l'Etat. Il constitue un placement sûr, par contre la rémunération proposée est faible.

1.5.3.2 Critère de choix

De nombreux critères de choix sont à considérer avant de retenir un placement donné, nous citons :

1. **La liquidité :** Ce critère est essentiel pour le trésorier qui doit veiller à pouvoir

récupérer facilement les montants placés en cas de nécessité. En cas de doute sur la durée, il doit privilégier les placements pour lesquels il existe un marché secondaire présentant une bonne liquidité et dont la sortie ne s'accompagne pas de pénalités.

2. **La sécurité :** En principe, le trésorier ne doit pas prendre de risque au niveau du capital, il doit éviter les placements présentant des risques (exemples : placement en action ; placement en obligation s'il existe un risque de hausse des taux d'intérêt).
3. **Le rendement :** Si après considération des éléments ci-dessus il reste plusieurs possibilités de placement, l'arbitrage portera sur le rendement, ce qui suppose un calcul d'évaluation du gain éventuel, exprimé sous forme de taux pour faciliter les comparaisons.

Conclusion

Le domaine de la finance se rapporte aux questions de choix d'investissement, de financement et de l'équilibre financier. La fonction financière et le circuit financier qu'on a discutés ont permis de mettre le point sur les flux de trésorerie associés aux différentes décisions financières.

L'étude des décisions d'investissement nous a permis de comprendre que l'investissement conditionne la dynamique d'accumulation du capital, et donc la croissance à long terme. Les critères du choix d'investissement (VAN) qui mesure la valeur créée par l'investissement nous a amenés à mettre en évidence que le taux d'actualisation correspondant au coût moyen pondéré du capital CMP est inférieure au taux de rentabilité interne d'un projet d'investissement.

Cependant, toute décision de financement ou d'investissement doit prendre en compte la contrainte de l'équilibre financier qui est liée étroitement à la gestion de liquidité. Une gestion efficace de la trésorerie consiste en : premier lieu, à déterminer le niveau optimal de réserve de liquidités ; en second lieu, à maximiser autant que possible le rendement des surplus de liquidités.

CHAPITRE 2

MODÈLES DE CONTRÔLE OPTIMAL EN FINANCE D'ENTREPRISE

Introduction

Les modèles de contrôle optimal, à la fois stochastiques et déterministes, sont probablement les plus importants parmi les systèmes de gestion en économie et en finance. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques qui évoluent dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser des critères économiques et financiers.

Comme il est difficile de couvrir l'ensemble des applications de contrôle optimal en finance, nous avons opté de focaliser sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise.
Comme toute modélisation exige une simplification de la réalité pour faciliter la résolution et l'interprétation des résultats, nous sommes amenés à présenter dans ce document des modèles qui supposent que l'entreprise ne se trouve confrontée à aucune incertitude en ce qui concerne les événements futurs.

Dans ce chapitre, nous essayerons d'aborder les différentes questions de la finance d'entreprise : En premier lieu nous parlons d'un modèle étudié par Sethi et al. [65], qui modélise la problématique de la gestion optimale de la trésorerie ; puis nous exposons un modèle de financement optimal d'entreprise proposé par Krouse et Lee [49] ; finalement, un modèle de firme qui englobe les décisions financières de l'entreprise sera l'objet de la dernière section de ce chapitre.

2.1 Modèle de gestion de trésorerie

Plusieurs modèles ont été élaborés par des théoriciens en vue d'établir des règles de décision qui permettraient de gérer la trésorerie de façon optimale. Chaque modèle s'adresse à un type de fluctuations d'encaissement particulier et essaie de résoudre le problème en utilisant une des méthodes mathématiques appropriées. Nous pouvons donc classifier tous ces modèles, soit selon le type de fluctuations d'encaissement, soit selon la méthode de résolution adoptée. D'après le premier critère, nous pouvons ramener tous les modèles de gestion de trésorerie à trois catégories principales :

1. **Les modèle déterministes**, où l'on suppose que les entrées et sorties de caisse sont connues d'avance avec certitude ou encore parfaitement contrôlables. Parmi les modèles de ce type, citons celui de Sethi et Thomson [66], Baumol [4] et celui de Sethi et al. [65] ;

2. **Les modèles aléatoires**, où l'on suppose que les flux des entrées et sorties de trésorerie sont complètement aléatoires. Un modèle très connu de cette catégorie est celui de Miller et Orr [50] ou celui de Sethi et al. [65] ;

3. **Les modèles probabilistes**, dans les quels les flux des entrées et sorties de la caisse sont considérés comme incertains mais auxquels on fait correspondre une distribution de probabilité. Nous pouvons citer à titre d'exemple le modèle de Archer [2].

Dans ce qui suit, nous présentons un modèle déterministe de gestion de trésorerie développé par Sethi et al. [65]. Ce modèle ressemble étroitement au modèle de Sethi et Thomson [66], avec une extension déterministe en supposant que les dividendes d'actions sont distribués à chaque instant.

2.1.1 Description du modèle

Prenons une entreprise qui veut gérer le processus de sa trésorerie d'une manière optimale sur un intervalle de temps $[0, t^*]$. Cette gestion consiste à répartir le mieux possible les réserves de liquidités entre argent liquide (placement à court terme, Sethi parle de placement dans des comptes bancaires) et des titres quasi-liquides (action, obligation). Si l'entreprise conserve trop de liquidités, elle perd de l'argent en termes de coût d'opportunité, dans la mesure où elle peut gagner un rendement supérieur en achetant des actions. D'autre part, si le solde de caisse est trop petit, l'entreprise doit vendre des titres pour répondre à la demande de liquidités. Ce transfert d'argent entre le compte bancaire, l'achat et la vente d'actions encourt le payement d'une commission de courtier. D'une façon générale, le modèle qui répond à ce genre de problématique, peut être formulé mathématiquement comme suit :

Soient $x = x(t)$ le montant de la réserve de liquidités investi en compte bancaire à l'instant t, et $r_1 = r_1(t)$ le taux d'intérêt perçu de ce placement. Posons aussi $y = y(t)$ pour le montant de la réserve de liquidités investi en action à l'instant t. Le rendement net découlant de cet investissement à l'instant t prend deux formes : les gains financiers sur le capital investi (croissance du prix des actions) $r_2 = r_2(t)$, et un taux de distribution de dividende $r_3 = r_3(t)$, qui sera ajouté aux montants investis dans le compte bancaire. A chaque instant t, l'entreprise reçoit une demande de liquidités $d = d(t)$. Cette dernière peut être positive ou négative : une demande positive représente les flux d'encaissement (recette ou entrée de liquidités), et celle négative reflète les flux de décaissement (dépense ou sortie de liquidités).

Pour répondre à la demande de liquidités et pour mieux répartir les fonds, l'entreprise peut prendre la décision d'engager un montant $u = u(t)$ en vendant des actions, une valeur négative de $u(t)$ représente un achat. En outre, la variable de contrôle $u(t)$ est bornée, c'est-à-dire :

$$-M_1 \leq u(t) \leq M_2, \qquad \text{où } M_1 > 0,\ M_2 > 0. \tag{2.1}$$

Pour chaque unité d'action qui est achetée ou vendue $u(t)$, l'entreprise verse une valeur positive d'une commission de courtier $\alpha|u(t)|$.

À la lumière de cette discussion, la variation des montants investis en compte bancaire et en achat d'actions, s'écrira comme suit :

$$\frac{dx}{dt} = r_1(t)x(t) - d(t) + u(t) - \alpha|u(t)| + r_3(t)y(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2(t)y(t) - u(t), \qquad y(0) = y_0. \tag{2.3}$$

Dans ce modèle, nous n'imposons aucune autre contrainte sur les variables d'état $x(t)$ et $y(t)$. Cela signifie que les découverts sur les liquidités et la vente à découvert d'actions sont autorisés.

Le problème de la gestion de trésorerie, dans sa forme la plus simple, consiste à formuler des règles de décision qui contrôlent le niveau du solde de trésorerie d'une entreprise et qui répondent à ses besoins de liquidités à un coût total minimum. Une formulation équivalente peut être obtenue en termes de maximisation de la valeur terminale des actifs. En effet, la fonction objectif s'écrit :

$$\max[x(t^*) + y(t^*)] \tag{2.4}$$

Pour plus de commodité, le modèle optimal de gestion de la trésorerie se représente comme suit :

$$V = x(t^*) + y(t^*) \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x - d + u - \alpha|u| + r_3 y, \\ \dot{y} = r_2 y - u, \\ x(0) = x_0, \; y(0) = y_0, \\ -M_1 \leq u(t) \leq M_2, \; M_1 > 0, \; M_2 > 0, t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pour surmonter le problème de la valeur absolue, supposons que l'entreprise répond à la demande de liquidités en vendant des actions à un montant $u_1 \geq 0$. Elle peut prendre au même temps la décision d'acheter des actions à un montant $u_2 \geq 0$.
Ainsi, selon cette nouvelle hypothèse, l'équation d'état peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2) + r_3 y, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = r_2 y - u_1 + u_2, & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

avec : $0 \leq u_1 \leq M_1$ et $0 \leq u_2 \leq M_2$.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de distribution de dividendes $r_3 = 0$, on retrouve le modèle de Sethi et Thompson.
Sethi et Thompson ont étudié aussi le cas où les découverts sur les liquidités et la vente

à découvert d'actions ne sont pas autorisés, ce qui veut dire que les variables d'état $x(t)$ et $y(t)$ sont positives.

Généralement, les banques autorisent des découverts mais à des durées h limitées, et pour ne pas violer cette condition, l'entreprise peut simplifier cette condition en imposant la contrainte suivante :

$$x(t_s) > 0, \ s = \{1, \dots, N\}, \tag{2.7}$$

avec $t_s - t_{s-1} = h$ et $t_N = t^*$.
De la même manière la vente à découvert est permise, mais à des durées définies, ainsi ; l'entreprise peut imposer une autre contrainte comme suit :

$$y(t_{s'}) > 0, \ s' = \{1, \dots, N'\}. \tag{2.8}$$

Ainsi, le modèle peut s'écrire comme suit :

$$V = x(t^*) + y(t^*) \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2) + r_3 y, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = r_2 y - u_1 + u_2, & y(0) = y_0. \\ x(t_s) > 0, \ s = \{1, \dots, N\}, \\ y(t_{s'}) > 0, \ s = \{1, \dots, N'\}, \\ 0 \leq u_1(t) \leq M_1, \ 0 \leq u_2(t) \leq M_2, \ t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{2.9}$$

2.2 Modèle de financement optimal

Une entreprise décide de la manière dont elle devrait produire ses financements afin de maximiser la valeur de l'entreprise, la valeur d'action, ou pour atteindre d'autres objectifs. Le premier problème qui se pose est : la structure financière influence-t-elle l'objectif de l'entreprise ?
Deux documents connus de Modigliani et Miller [51], [52] ont joué un rôle très important dans le développement de la littérature sur l'optimisation de la structure financière de l'entreprise. Par la suite, toutes les approches affirment l'existence d'une structure optimale de financement. L'optimum permet à l'entreprise de maximiser la valeur de capitaux investis (ou de son actif) et de minimiser le coût de son financement.
Sur le plan de l'optimisation dynamique sous forme de contrôle optimal, il y a une limite en ce qui concerne la littérature existante, inaugurée initialement par Davis et Elzinga [23], et Krouse et Lee [49].

Dans la présente section, nous discutons d'un modèle d'entreprise qui doit financer ses investissements par une combinaison optimale des dividendes (bénéfices) non répartis et fonds propres externes. Ce modèle a été discuté par Krouse et Lee (1973), avec des modifications et des extensions par Sethi (1978). Pour des raisons de simplicité et de facilité, ce modèle ne prend pas en considération la dette en tant que source de financement, mais il permet comme moyen de financement des proportions des bénéfices non répartis et des fonds propres externes.

2.2.1 Le modèle

Le modèle de contrôle optimal non linéaire simplifié, de ce problème est décrit comme suit : soient $y(t)$ le capital investi jusqu'à l'instant t et $x(t)$ le rendement sur le capital investi. A chaque instant t, l'entreprise peut prendre deux décisions de financement, soit par des dividendes non distribués à un taux $u_d(t)$ du rendement, soit par des fonds propres externes (augmentation de capital) à un taux $u_e(t)$ du rendement, engendrant des frais de transaction $(1-c)$ pour chaque unité de capital.

Compte tenu de ces notations, le rendement courant est $x = ry$ (où r est taux de rendement des capitaux investis). Il s'ensuit que le taux de variation des revenus est donné par :

$$\dot{x} = r\dot{y} = r(cu_e + u_d)x, \qquad x(0) = x_0. \tag{2.10}$$

En outre, la borne supérieure sur le taux de croissance du capital investi implique la contrainte suivante sur les variables de contrôle :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{(cu_e + u_d)x}{(x/r)} = r(cu_s + u_d) \leq g, \tag{2.11}$$

où g est la borne supérieure du taux de croissance des actifs de l'entreprise.

Enfin, l'objectif de l'entreprise est de maximiser sa valeur, qui est considérée dans ce modèle comme la valeur des futurs flux de dividendes des actions en circulation à l'instant $t = 0$. Pour obtenir cette expression, notons que :

$$\int_0^{t^*} (1 - u_d)xe^{-\rho t}dt$$

est la valeur des dividendes distribués par l'entreprise jusqu'a l'instant t^*, où ρ représente le taux d'actualisation. Une partie de ces dividendes revient aux apporteurs des capitaux propres externes. Les dividendes des capitaux propres externes sont alors évalués par :

$$\int_0^{t^*} u_e x e^{-\rho t} dt.$$

Dans ce modèle, nous cherchons à maximiser la valeur des dividendes distribués aux actionnaires. Ainsi, cette valeur est la différence entre le montant de dividendes distribués et les bénéfices versés aux apporteurs des nouveaux fonds propres. Ce qui se traduit par la maximisation de la fonctionnelle suivante :

$$J = \int_0^{t^*} (1 - u_d - u_e) x e^{-\rho t} dt. \tag{2.12}$$

Ainsi, le problème étudié par KROUSE et LEE se présente comme suit :

$$J = \int_0^{t^*} (1 - u_d - u_e) x e^{-\rho t} dt \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r(cu_e + u_d)x, \qquad x(0) = x_0, \\ r(cu_e + u_d) \leq g, \\ u_e > 0,\ 0 < u_d < 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

2.3 Modèle dynamique d'entreprise

Les modèles dynamiques de l'entreprise sont des thèmes de recherche en microéconomie. Plusieurs de ces modèles décrivent les différents facteurs qui influent sur l'activité et la valeur d'entreprise. L'un des premiers modèles dynamiques de ce genre est le modèle classique de Jorgensen (1967). Ce modèle propose que le problème de l'entreprise est de choisir le niveau de sa production, son utilisation de main-œuvre et le montant de ses investissements de manière à maximiser sa valeur.
Après le modèle de Jorgensen, plusieurs autres modèles ont été étudiés, tout en tenant compte d'autres facteurs. Le modèle que nous exposons ici, est celui étudié dans [26]. En plus de la recherche à déterminer les politiques optimales en matière d'investissement, d'utilisation de facteurs de production et de dépréciation, ce modèle prend en considération la politique de distribution des dividendes.

2.3.1 Le modèle

Examinons le comportement d'une entreprise sur un intervalle de temps fini $T = [0, t^*]$, où t^* est un horizon de planification. A chaque instant, l'entreprise produit une quantité de biens $Q = Q(t) = qk(t)$, où $k = k(t)$ est le capital de l'entreprise accumulé à instant t

et q est la productivité du capital. La production est vendue sur le marché et entraîne un chiffre d'affaires notée $S = S(Q(t))$. Le capital de l'entreprise se décompose en capitaux propres $x = x(t)$ et en montants de l'emprunt (dette) $y = y(t)$:

$$k(t) = x(t) + y(t),\ t \in\ T. \tag{2.14}$$

En outre, nous supposons que les capitaux empruntés sont non négatifs et ne dépassent pas la valeur des capitaux propres, ce qui est traduit par la contrainte suivante :

$$0 \leq y(t) \leq \alpha x(t),\ 0 < \alpha < 1. \tag{2.15}$$

La variation du capital en fonction de taux de dépréciation δ est décrite par l'équation :

$$\dot{k} = -\delta k + I, \tag{2.16}$$

où I est l'investissement brut.
Cette équation exprime la dynamique du taux de variation du capital qui est, à tout instant t, égal aux nouveaux investissements entrepris à l'instant t, moins la portion du capital qui se trouve dépréciée au même moment.

On forme la différence entre le revenu $S(Q)$ (vente de produit) et les dépenses de l'entreprise telles que l'amortissement $\delta k(t)$, l'intérêt des emprunts $ry(t)$ (r est le taux d'intérêt), les paiements des salaires $wL(t)$ ($w > 0$ est le taux de salaire de la main-d'œuvre, $L = L(t) = lk(t)$ est la quantité de travail employée) et les dividendes $D(T)$. Cette différence est retenue par l'entreprise et elle est ajoutée aux capitaux propres, ce qui se traduit explicitement par :

$$\dot{x} = S - \delta k - ry - wL - D. \tag{2.17}$$

Pour $S = S(qk)$, et en utilisant l'équation (2.14) et la relation $L = lk$, nous éliminons les variables y et L, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= S(qk) - \delta k - r(k - x) - w(lk) - D \\ &= rx + S(qk) - (\delta + r + wl)k - D. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Et d'après (2.14) et (2.15), nous obtenons les contraintes sur les variables d'état :

$$x(t) \leq k(t) \leq (1 + \alpha)x(t),\ 0 < \alpha < 1,\ t \in T. \tag{2.19}$$

Les équations différentielles (2.15) et (2.16) d'écrivent le modèle financier dynamique de l'entreprise. Les variables x et k sont considérées comme des variables d'état. Les variables de contrôle sont les dividendes D et l'investissement I.

Les dividendes $D(t)$ et les investissements $I(t)$ obéissent aux contraintes directes suivantes :

$$0 \leq D(t) \leq D_{\max},\ I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max},\ t \in T, \tag{2.20}$$

où $D_{max} > 0$, $I_{min} < 0$ et $I_{max} > 0$ sont des constantes.

Les commandes $D(t)$ et $I(t)$, $t \in T$, qui vérifient les relations (2.20), et qui génèrent des trajectoires $x(t)$, $k(t)$, $t \in T$, satisfaisant (2.19) sont dites commandes (contrôles) admissible (une politique admissible pour l'entreprise).

Nous supposons que la politique de l'entreprise est déterminée par la maximisation de la valeur détenue par les actionnaires (la valeur de l'entreprise) à l'instant t^*, qui est considérée ici comme la somme des dividendes distribués plus la valeur actualisée des capitaux propres à l'instant t^*. En introduisant un taux d'actualisation constant $\rho > 0$, la valeur finale de l'entreprise est alors donnée par :

$$V(D, I) = e^{-\rho t^*} x(t^*) + \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t) dt. \tag{2.21}$$

Les commandes admissibles $D^*(t)$, $I^*(t)$, $t \in T$, sont dites optimales si la valeur de l'entreprise est maximale :

$$V(D^*, I^*) = \max V(D, I). \tag{2.22}$$

Ainsi, le problème de construction de la politique optimale pour l'entreprise est réduit au problème de contrôle optimal suivant :

$$V(D, I) = e^{-\rho t^*} x(t^*) + \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t) dt \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{x} = rx + S - (\delta + r + wl)k - D, \\ \dot{k} = -\delta k + I, \\ x(0) = x_0,\ k(0) = k_0, \\ 0 \leq D(t) \leq D_{\max},\ I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max}, \\ x(t) \leq k(t) \leq (1 + \alpha) x(t),\ 0 < \alpha < 1,\ t \in T. \end{cases} \tag{2.23}$$

Si on suppose que l'entreprise ne fait pas de recours aux dettes ($y(t) = 0,\ t \in T$) et que son objectif est de maximiser les distributions de dividendes tout en atteignant un certain niveau de production (capital) k_f, le modèle s'écrit comme suit :

$$V(D, t^*) = \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t) dt \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{k} = S - (\delta + wl)k - D, \\ k(0) = k_0, \\ k(t^*) = k_f, \\ 0 \leq D(t) \leq D_{\max}, t \in T. \end{cases} \tag{2.24}$$

Ce modèle ressemble étroitement au modèle Kendrick and Taylor(1971).

On peut aussi supposer que l'entreprise veut maximiser la somme des dividendes distribués, sous la contrainte que le niveau de production finale soit supérieur à un certain niveau, c'est-à-dire $k(t^*) \geq k_f$. Cela peut être justifié si l'entreprise a des contrats ou des engagements qui l'oblige à assurer une niveau de production à une datte donnée t^*. Ainsi, ce modèle se présente comme suit :

$$V(D, t^*) = \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t) dt \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{k} = S - (\delta + wl)k - D, \\ k(0) = k_0, \\ k(t^*) \geq k_f, \\ 0 \leq D(t) \leq D_{\max}, t \in T. \end{cases} \tag{2.25}$$

Conclusion

Ce chapitre vise essentiellement à donner une vision globale sous forme de contrôle optimal déterministe de la modélisation dynamique des différentes questions financières au niveau d'une entreprise. Ainsi, nous avons abordé ce chapitre par la discussion d'un modèle proposé par Sethi et al [62, 65, 66, 67], qui modélise la décision d'investir les excédents de trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat des actions, afin de maximiser la valeur des actifs. Le point visé par le deuxième modèle est de répondre au problème de financement des investissements par les capitaux externes et les dividendes non distribués. Finalement, nous avons présenté un modèle dynamique de firme qui cherche à maximiser la valeur des apporteurs de capitaux propres, tout en prenant en compte les facteurs économiques et les décisions financières.

Les modèles que l'on a présentés supposent que l'entreprise ne se trouve confrontée à aucune incertitude en ce qui concerne les événements futurs. Il convient cependant de noter qu'il est possible d'introduire le risque dans ces modèles sous la forme de distribution de probabilités pour les divers événements futurs. Mais à ce moment, la résolution mathématique devient plus difficile.

CHAPITRE 3

CONTRÔLE OPTIMAL D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE LINÉAIRE

Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les aspects théoriques et numériques de la théorie du contrôle optimal, qui analyse les propriétés des systèmes commandés. D'un point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé contrôle (commande), avec lequel on peut amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en optimisant éventuellement certains critères.
La théorie moderne de la commande optimale a émergé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontriaguine, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

Les problèmes de contrôle optimal linéaire ont été étudiés dans la littérature d'une manière très détaillée. Néanmoins, il est difficile de trouver des méthodes numériques très efficaces qui prennent en compte toutes les spécificités de ces problèmes.
Après quelques rappels, nous développons tout au long de ce chapitre une nouvelle méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal sous forme de bolza avec contraintes inégalités. Et Cela en se basant sur la méthode développée par R. Gabassov et F.M.Kirillova dans [30], et sur les articles de M.O.Bibi [7,10].
Dans un premier temps, nous construisons le support et l'accroissement de la fonction-

nelle. Par la suite, nous donnons les critères d'optimalité et de suboptimalité. Enfin, nous présentons les étapes qui amènent à la solution optimale.

3.1 Formulation mathématique d'un problème de contrôle

Considérons le système dynamique explicite

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(0) = x_0,\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, \tag{3.1}$$

dont l'état est décrit par un vecteur $x(.)$ dite fonction(ou variable) d'état. Cette fonction dépend de la variable réelle t et vérifie des relations (souvent différentielles) appelées lois d'état. En théorie de contrôle, on veut agir sur le système en agissant sur l'état, via des fonctions $u(.)$ qu'on appelle contrôles (commandes), qui sont des fonctions localement intégrables, définies sur $[0, t^*]$.
Nous supposons que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy de sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité de la solution $x(t, x_0, u)$.

3.1.1 Stratégies de contrôle d'un système dynamique

Pour contrôler un système dynamique on distingue deux types de stratégies :

- **Stratégie en boucle ouverte**
  La stratégie en boucle ouverte consiste à chercher un contrôle admissible et qui ne dépend pas de l'état du système. Cette stratégie est schématisée par la figure suivante :

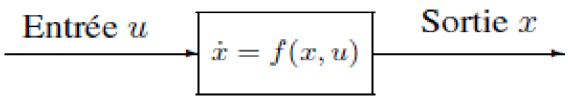

FIGURE 3.1: Commande en boucle ouverte

- **La stratégie en boucle fermée**
  Considérons un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôles. On applique un contrôle au système. L'équation d'état retourne une fonction d'état contrôlée. On introduit alors une loi de contrôle qui permet d'exprimer la fonction de contrôle précisément en fonction de cet état. L'état du système est pris en compte

à chaque instant pour déterminer le contrôle. Le contrôle est alors appelé feedback. Cette stratégie peut se résumer par le schéma suivant :

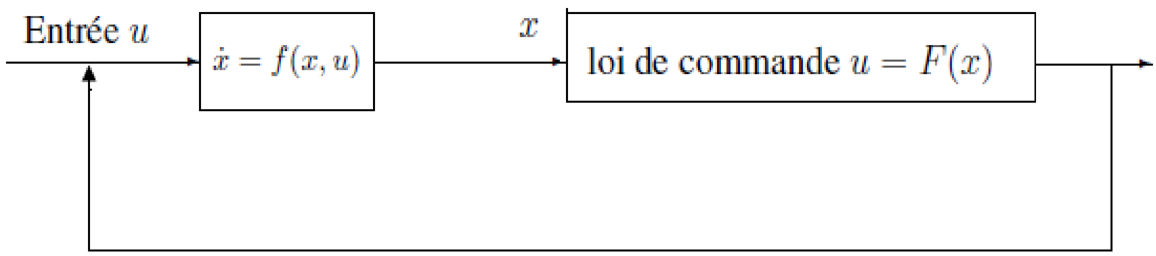

FIGURE 3.2: Commande en boucle fermée

3.1.2 Approximation linéaire d'un système de contrôle

En pratique, pour de nombreux processus on n'a pas de connaissance à priori utile qui permet la formulation avec des systèmes dynamiques linéaires. Dans ce cas, il est nécessaire de commencer la modélisation en construisant un modèle non linéaire, puis on passe à l'étape de linéarisation si c'est possible. L'intérêt de cette linéarisation réside dans le fait que l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez développée comme dans le cas linéaire, qui a été étudié dans la littérature de manière très détaillée.

Le système linéaire s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (3.1) autour d'un point d'équilibre (x_e, u_e), pour lequel $f(x_e, u_e) = 0$. En effet si on pose :

$$\widetilde{x} = x - x_e, \qquad \widetilde{u} = u - u_e, \qquad A = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}, \tag{3.2}$$

on obtient alors le système :

$$\dot{\widetilde{x}} = A\widetilde{x} + B\widetilde{u} + o(\widetilde{x}, \widetilde{u}). \tag{3.3}$$

Le système $\dot{\widetilde{x}} = A\widetilde{x} + B\widetilde{u}$ s'appelle approximation linéaire du système non linéaire (3.1).

3.1.3 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

3.1.3.1 Contrôlabilité

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle. Avant d'aborder cette notion, nous rappelons la définition de la trajectoire.

Définition 3.1(trajectoire)

On appelle trajectoire du système (3.1) toute fonction régulière $t \longrightarrow (x(t), u(t))$ qui satisfait sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ les équations (3.1) [12].

Définition 3.2(Contrôlabilité au sens de Kalman)

Le système (3.1) est complètement contrôlable si pour deux points quelconques x^0 et x^1 de R^n, on peut trouver un instant t_1 est une commande $u(t)$ tels que la trajectoire $x(t)$ de système satisfait la condition $x(t_0) = x^0$ et $x(t_1) = x^1$ [8].

3.1.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 3.1(critère explicite de contrôlabilité)

Le système $\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)+r(t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r$ est contrôlable si et seulement si :

$$rang\ Q = rang(B,\ AB,\ A^2B, \ldots, A^{n-1}B) = n, \tag{3.4}$$

où Q est une matrice d'ordre $n \times rn$ appelée matrice de Kalman, et la condition $rang\ Q = n$ est appelée condition de Kalman.
Pour plus de détails, voir [8].

3.1.4 Problème de contrôle optimal

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)),\ x(0) = x_0, t \in [0, t^*], \\ u \in \vartheta. \end{cases}$$

Le problème de contrôle à pour but d'amener le système d'un état initial $x(0) = x_0$ donné à un certain état final $x(t^*) = x^*$, en optimisant éventuellement certains critères tels par exemple la fonctionnelle suivante :

$$J(u) = S(t^*, x(t^*)) + \int_0^{t^*} L(t, x(t), u(t))dt, \tag{3.5}$$

où $J(u)$ est à maximiser. Ainsi, le problème de contrôle optimal consiste à chercher, parmi les contrôles admissibles $u(.)$, celui qui réalise

$$\max_{u\in\vartheta} J(u),\ x(0)=x_0,\ x(t^*)=x^*. \tag{3.6}$$

Le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} J(u)=S(t^*,x(t^*))+\int_0^{t^*}L(t,x(t),u(t))dt & \longrightarrow \max, \\ \dot{x}=f(t,x(t),u(t)),\ x(0)=x_0, t\in[0,t^*] & , \\ u\in\vartheta, \end{cases} \tag{3.7}$$

est dit sous la forme de Bolza en raison de la forme de sa fonction objectif défini par Bolza. Il est dit sous la forme de Lagrange si $S\equiv 0$. Nous disons que ce problème est sous la forme de Mayer lorsque $L\equiv 0$.

3.2 Principe du maximum de Pontriaguine

Dans cette section, un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution d'un problème de contrôle optimal est donné. Ces conditions nécessaires sont connues sous le nom du "Principe du maximum de Pontriaguine". Ce principe a révolutionné la théorie moderne de contrôle optimal, dês la publication (en russe en 1958, en anglais 1962) du livre "The Mathematical Theory of Optimal Processes" par les mathématiciens soviétique Pontriaguine, Boltyanskii, Gamkrelidze, et Mischenko. L'importance de ce livre ne réside pas seulement dans l'étude rigoureuse des problèmes de contrôle optimal et de calcul des variations, mais également dans la formulation et la preuve du principe du maximum pour les problèmes de contrôle optimal, qui ouvrant un vaste portail de recherche dans cette discipline. Dans ce livre, Pontriaguine a démontré le principe du maximum pour les problèmes de contrôle dans la forme de Lagrange.
Dans la suite de cette section, nous donnons des conditions nécessaires d'optimalité, pour des systèmes sans contrainte sur l'état, puis avec contrainte sur l'état.

3.2.1 Principe du maximum sans contrainte sur l'état

La démonstration historique du principe du maximum est basée sur la maximisation du Hamiltonien, défini comme suit (pour le problème (3.7)) :

$$H(t,x(t),u(t),\lambda)=L(t,x(t),u(t))+\lambda'(t)f(t,x(t),u(t)), \tag{3.8}$$

où le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\lambda(t):[0,t^*]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état adjoint.

L'énoncé du principe du maximum de Pontriaguine pour le problème (3.7) est donné comme suit (Pour la démonstration, voir [59], ou voir aussi [67]).

Théorème 3.2 (Principe du maximum de Pontriaguine sans contrainte sur l'état)

Soient $u^*(t) \in \vartheta$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur $\lambda^*(t)$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)),\ x^*(0) = x_0, & \\ \dot{\lambda}^*(t) = -H_x(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)), & \lambda(t^*) = S_x(t^*, x^*(t^*)), \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*) \geq H(t, x^*(t), u(t), \lambda^*), & \forall u(t) \in \vartheta,\ t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{3.9}$$

avec :

$$H_x(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)^*) = \frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x}|_{x(t)=x^*(t),u(t)=u^*(t),\lambda(t)=\lambda^*(t)},$$

$$S_x(t^*, x^*(t^*)) = \frac{\partial S(t^*, x(t^*))}{\partial x}|_{x(t^*)=x^*(t^*)}.$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global du Hamiltonien $H(t, x^*(t), u(t), \lambda^*(t))$ pour $u(t) \in \vartheta$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (3.9) sont appelées "Principe du maximum".

3.2.2 Principe du maximum avec contraintes sur l'état

Ici nous imposons au problème des contraintes sur l'état et les variables de contrôle. Plus précisément, pour chaque instant $t \in T$, x (t) et u (t) doivent satisfaire la contrainte

$$g(x, u, t) \geq 0,\ \ , g \in R^p t \in T. \tag{3.10}$$

Ainsi, nous introduisons la fonction Lagrangien, qui s'écrit

$$\overline{H}(x, u, \lambda, \mu, t) = H(x, u, \lambda, t) + \mu g(x, u, t), \tag{3.11}$$

le vecteur μ est appelé multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur de Lagrange doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\mu \geq 0,\ \ \mu g(x, u, t) = 0, \tag{3.12}$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle

$$\dot{\lambda}(t) = -\overline{H}_x(t, x(t), u(t), \lambda(t)),\ \ \lambda(t^*) = S_x(t, x(t^*)). \tag{3.13}$$

Théorème 3.3 (Principe du maximum de Pontriaguine avec contrainte sur l'état)
Soient $u^*(t) \in \vartheta$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur adjoint $\lambda^*(t)$ et un multiplicateur de Lagrange μ^* tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)),\ x^*(0) = x_0, & \\ \dot{\lambda}^*(t) = -\overline{H}_x(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)), & \lambda(t^*) = S_x(t^*, x^*(t^*)), \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*) \geq H(t, x^*(t), u(t), \lambda^*) & \forall u(t) \in \vartheta,\ t \in [0, t^*], \\ g(x^*(t), u^*, t) \geq 0,\ t \in T, & \\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial u}|_{u(t)=u^*(t)} = \frac{\partial (H+\mu g)}{\partial u}|_{u(t)=u^*(t)} = 0, & \\ \mu(t)^* \geq 0,\ \mu^*(t) g(x^*, u^*, t) = 0, & \end{cases} \tag{3.14}$$

3.3 Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire

3.3.1 Position du problème

Le problème de contrôle optimal particulier étudié dans cette section est le suivant : Sur l'intervalle $T = [0, t^*]$, considérons le problème de maximisation de la fonctionnelle :

$$J(u) = c_1' x(t^*) + \int_0^{t^*} c_2'(t) u(t) dt \qquad \longrightarrow \max, \tag{3.15}$$

avec c_1 et $c_2(t)$ deux vecteurs des coûts, de dimension n et r respectivement.
Le système de contrôle dynamique linéaire auquel on s'intéresse est celui à commande vectorielle, défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,\ t \in T, \tag{3.16}$$

où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur qui représente l'état du système à l'instant t ; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ la commande agissant sur le système à l'instant t (signal d'entrée), telle que $d^- \leq u(t) \leq d^+$, $d^- = (d_1^-, d_2^-, \cdots, d_r^-)$, $d^+ = (d_1^+, d_2^+, \cdots, d_r^+)$; A est une matrice (réelle) carrée d'ordre n, qui caractérise le système (pour plus de simplicité on la suppose constante, c'est-à-dire ne dépendant pas de la variable t), de la même manière B est une matrice réelle $n \times r$ constante et x_0 la position initiale du système.

Associons à la trajectoire $x(t)$, solution du système, une contrainte (signal de sortie) à l'instant $t = t^*$:

$$g_* \leq Hx(t^*) \leq g^*, \tag{3.17}$$

où H est une matrice d'ordre $m \times n$ et rang$H = m < n$. Ainsi le problème qu'on étudiera se présente sous la forme suivante :

$$J(x,u) = c_1' x(t^*) + \int_0^{t^*} c_2'(t)u(t)dt \qquad \longrightarrow \max, \tag{3.18a}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + r, \quad x(0) = x_0, \tag{3.18b}$$

$$g_* \le Hx(t^*) \le g^*, \tag{3.18c}$$

$$d^- \le u(t) \le d^+, \ t \in T = [0, t^*], \tag{3.18d}$$

avec : $A = A(K,K)$, $B = B(K,J)$, $H = H(I,K)$, $g_* = g_*(I)$, $g^* = g^*(I)$, $d^- = d^-(J)$, $d^+ = d^+(J)$, $K = \{1...n\}$, $I = \{1...m\}$, $J = \{1...r\}$.

La solution du système dynamique (3.16) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)\left[x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)(Bu(\tau) + r(\tau))d\tau\right], \ t \in T, \tag{3.19}$$

où $F(t) = \exp(At)$, est une matrice carrée d'ordre n, solution du système homogène :

$$\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_n. \tag{3.20}$$

I_n est une matrice identité d'ordre n.
En remplaçant cette solution dans le problème (3.18), celui-ci devient un problème de la seule variable $u(t)$ suivant :

$$\begin{cases} J(u) = c_1'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*}(c_1'F(t^*)F^{-1}(t)B + c_2'(t))u(t)dt + \\ \qquad\qquad \int_0^{t^*} c_1'F(t^*)F^{-1}(t)r(t)dt \longrightarrow \max, \\ g_* \le HF(t^*)[x_0 + \int_0^{t^*} F^{-1}(t)(Bu(t) + r(t))dt] \le g^*, \\ d^- \le u(t) \le d^+, \ t \in T = [0, t^*]. \end{cases}$$

Posons $c'(t) = c_1'F(t^*)F^{-1}(t)B + c_2'(t)$, $c_3'(t) = c_1'F(t^*)F^{-1}(t)$, $\varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)B$, $\overline{g}_* = g_* - HF(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} HF(t^*)F^{-1}(t)r(t)dt$, $\overline{g}^* = g^* - HF(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} HF(t^*)F^{-1}(t)r(t)dt$, alors, le problème (3.18) devient :

$$\begin{cases} J(u) = c_1'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} c_3'(t)r(t)dt \longrightarrow \max \\ \overline{g}_* \le \int_0^{t^*} \varphi(t)u(t)dt \le \overline{g}^*, \\ d^- \le u(t) \le d^+, \ t \in T = [0, t^*]. \end{cases} \tag{3.21}$$

Choisissons dans l'ensemble I, un sous ensemble $I_a \subset I$, avec $|I_a| = p \le m$.
Sur l'intervalle T choisissons un ensemble de moments isolés $T_a = \{t_k, k \in K_a\}$,

$K_a = \{1, \ldots, k_a\},\ k_a \leq p$. A chaque moment $t_k \in T_a$ faisons correspondre un ensemble d'indices $J_k \subset J$, $\sum_{k \in K_a} |J_k| = p$.
Posons $J_a = \{J_k, k \in K_a\}$ et $Q_a = \{I_a, J_a, T_a\}$.

Construisons la matrice :

$$\varphi_a = \varphi(Q_a) = (\varphi_{ij}(t_k),\ i \in I_a,\ j \in J_k,\ k \in K_a), \tag{3.22}$$

où $\varphi_j(t)$ est la $j^{ème}$ colonne de la la matrice $\varphi(t) = Hq(t)$, $t \in T$ et $q(t)$, $t \in T$, est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{q} = Aq,\ q(0) = B.$$

Définition 3.3
La commande constante par morceaux $u = u(.) = (u(t), t \in T)$ est dite admissible si elle satisfait aux contraintes (3.18c), (3.18d).

Définition 3.4
La commande admissible $u^0 = u^0(.) = (u^0(t), t \in T)$ est dite optimale si seulement si

$$J(u^0) = \max J(u). \tag{3.23}$$

La trajectoire correspondante $x^0(t)$ est dite trajectoire optimale.
En outre, on appelle commande suboptimale (ou ϵ-optimale) toute commande admissible $u^\varepsilon = u^\varepsilon(.) = (u^\varepsilon(t), t \in T)$ satisfaisant à l'inégalité :

$$J(u^0) - J(u^\varepsilon) \leq \varepsilon, \tag{3.24}$$

où $\varepsilon \geq 0$ et u^0 est la commande optimale.

Définition 3.5
L'ensemble $Q_a = \{I_a, J_a, T_a\}$ est appelé support du problème (3.18) si la matrice φ_a est inversible.

Définition 3.6
La paire $\{u, Q_a\}$ formée de la commande admissible u et du support Q_a est appelée commande de support.

Définition 3.7
La commande de support $\{u, Q_a\}$ est dite non dégénérée si :

1. pour toute moment t_k de T_a et pour toute indice $i \in I_k$, $k \in K_a$, l'une des deux conditions est vérifiée :

   – dans le voisinage de t_k , la composante $u_i(t)$, $t \in T$, est non critique :

   $$d_i^- < u_i(t) < d_i^+, \ t \in [t_k - \delta, \ t_k + \delta], \ \delta > 0,$$

   – t_k est un point de discontinuité de la fonction $u_i(t)$, $t \in T$;

2. en outre, la contrainte suivante est vérifie :

$$g_*(I_H) < H(I_H, K)x(t^*) < g^*(I_H), \ I_H = I \backslash I_a. \tag{3.25}$$

3.3.2 Formule de l'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support du problème (3.18). Considérons une autre commande admissible $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ et sa trajectoire correspondante $\overline{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$.
L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) &= J(\overline{u}) - J(u) \\
&= c_1' F(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} (c'(t)\overline{u}(t) + c_3'(t) r(t)) dt - c_1' F(t^*) x_0 - \int_0^{t^*} (c'(t) u(t) + c_3'(t) r(t)) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\overline{u}(t) dt + \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t) dt - \int_0^{t^*} c'(t) u(t) dt - \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\overline{u}(t) dt - \int_0^{t^*} c'(t) u(t) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)(\overline{u}(t) - u(t)) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t) \Delta u(t) dt.
\end{aligned}$$

Définissons le vecteur :

$$c_a = (c_j(t_k), j \in J_k, k \in K_a),$$

où $c_j(t)$ est le $j^{ème}$ élément du vecteur

$$c'(t) = (c_1(t), \ldots, c_r(t)), \ t \in T.$$

Construisons le vecteur des potentiels :

$$y'(I_a) = c'_a \varphi_a^{-1}, \qquad y(I_H) = 0, \tag{3.26}$$

et la co-commande $E'(t) = (E_1(t), \ldots, E_r(t))\,,\ t \in T$:

$$\begin{aligned} E'(t) &= y'\varphi(t) - c'(t) \\ &= y'HF(t^*)F^{-1}(t)B - (c'_1F(t^*)F^{-1}(t)B + c'_2(t)) \\ &= (y'H - c'_1)F(t^*)F^{-1}(t)B - c'_2(t). \end{aligned} \tag{3.27}$$

En introduisant la fonction $\psi(t)$ défini comme suit :

$$\psi'(t) = -(H'y - c_1)'F(t^*)F^{-1}(t),\ t \in T,$$

qui est la solution du système conjugué :

$$\dot{\psi} = -A'\psi,\ \psi(t^*) = c_1 - H'y, \tag{3.28}$$

alors, la co-commande peut s'écrire sous la forme :

$$E'(t) = -\psi'(t)B - c'_2(t),\ t \in T. \tag{3.29}$$

En vertu des définitions (3.26) et (3.27), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\overline{u}) - J(u) \\ &= \int_0^{t^*} c'(t)\Delta u(t)dt \\ &= \int_0^{t^*} [y'\varphi(t) - E'(t)]\Delta u(t)dt \\ &= y'\int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt \\ &= y'H\Delta x(t^*) - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt. \end{aligned} \tag{3.30}$$

En posant $\upsilon = H\Delta x(t^*)$, l'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\Delta J(u) = \sum_{i \in I_a} y_i \upsilon_i - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt. \tag{3.31}$$

Par conséquent, il est clair que le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle $\Delta J(u)$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} g_{i*} - H(i,k)x(t^*) \le \upsilon_i \le g_i^* - H(i,k)x(t^*),\ i \in I_a, \\ d^- - u(t) \le \Delta u(t) \le d^+ - u(t),\ t \in T, \end{cases} \tag{3.32}$$

est égal à :

$$\beta(u, Q_a) = \sum_{j=1}^{r} \left[\int_{T^+(j)} E_j(t)(u_j(t) - d_j^-)dt + \int_{T^-(j)} E_j(t)(u_j(t) - d_j^+)dt \right] + \sum_{y_i<0, i\in I_a} y_i v_i^- + \sum_{y_i>0, i\in I_a} y_i v_i^+, \quad (3.33)$$

avec

$$T^+(j) = \{t \in T, E_j(t) > 0\},\ T^-(j) = \{t \in T, E_j(t) < 0\},\ j = 1 \dots r$$

et

$$v^-(I) = (v_i^-, i \in I) = g_* - Hx(t^*),\ v^+(I) = (v_i^+, i \in I) = g^* - Hx(t^*).$$

Le nombre $\beta(u, Q_a)$ est appelé estimation de suboptimalité.
Ainsi, nous obtenons une majoration de l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta J(u) = J(\overline{u}) - J(u) \leq \beta(u, Q_a). \quad (3.34)$$

3.3.3 Critère d'optimalité

Nous avons le théorème suivant :
Théorème 3.4

Soit (u, Q_a) une commande de support du problème (3.18). Les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j(t) \geq 0, & si\ u_j(t) = d_j^-, \\ E_j(t) \leq 0, & si\ u_j(t) = d_j^+, \\ E_j(t) = 0, & si\ d_j^- < u_j(t) < d_j^+, \qquad t \in T,\ j =\in J; \\ y_i \geq 0, & si\ H(i,K)x(t^*) = g_i^*, \\ y_i \leq 0, & si\ H(i,K)x(t^*) = g_{*i}, \\ y_i = 0, & si\ g_{*i} < H(i,K)x(t^*) < g_i^*, \quad i \in I_a, \end{cases} \quad (3.35)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont aussi nécessaires pour l'optimalité de la commande de support $\{u, Q_a\}$.
Démonstration :

Condition suffisante :
Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support vérifiant les relations (3.35), alors la relation (3.73) donne $\beta(u, Q_a) = 0$. En utilisant la relation (3.34) nous aurons $J(\overline{u}) - J(u) \leq 0$ pour toute autre commande admissible $\overline{u}$. Par conséquent, la commande de support $\{u, Q_a\}$ est une

solution optimale du problème (3.18).

Condition nécessaire :
Soit $\{u, Q_a\}$ une commande d'appui optimale non dégénérée pour laquelle les relations (3.35) ne sont pas vérifiées. Alors, deux cas peuvent se présenter :

1. $\exists\ t_0 \in T$, $\exists\ j_0 \in J$: $(E_{j_0}(t_0) > 0$ et $u_{j_0}(t_0) > d^-_{j_0})$ ou $(E_{j_0}(t_0) < 0$ et $u_{j_0}(t_0) < d^+_j)$;
2. $\exists\ i_0 \in I_a$ tel que : $(y_{i_0} > 0$ et $g^*_{i_0} - H(i_0, K)x(t^*) = v^+_{i_0} > 0)$ ou $(y_{i_0} < 0$ et $g^*_{i_0} - H(i_0, K)x(t^*) = v^-_{i_0} < 0)$.

Considérons séparément les cas 1 et 2.

1. Toute d'abord, supposons qu'on a le cas $(E_{j_0}(t_0) > 0$ et $u_{j_0}(t_0) > d^-_{j_0})$.
   Comme $\Delta(t)$, $t \in T$ est continue et la commande $u(t)$, $t \in T$ est constante par morceau alors $\exists\ \varepsilon$, tel que $E_{j_0}(t_0) > 0$ et $u_{j_0}(t) > d^-_{j_0}$, $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$.
   Soit pour la commande de support non dégénérée $\{u, Q_a\}$ les m_1 moments de support de commutation de la commande, avec $m_1 \leq |I_a|$. Soit $J^c_a \subset J_a$ et $T^c_a \subset T_a$ les ensembles qui représentent ces m_1 moments de commutation de la commande de support.

   Construisons alors la nouvelle commande $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, tel que $\Delta u(t)$ est défini comme suit :

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d^-_j - u_j(t), & j = j_0,\ t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[, \\ u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0), & j \in J^c_k,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K^c_a, \quad si\ \theta_{jk} > 0, \\ u_j(t_k + 0) - u_j(t_k - 0), & j \in J^c_k,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ j \in K^c_a, \quad si\ \theta_{jk} < 0, \\ \gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J^c_k,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K_a \backslash K^c_a, \quad si\ \theta_{jk} > 0, \\ -\gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J^c_k,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ k \in K_a \backslash K^c_a, \quad si\ \theta_{jk} < 0, \\ 0, & ailleurs. \end{cases} \tag{3.36}$$

   En vertu de la non dégénérescence de $\{u, Q_a\}$, pour des nombres suffisamment petits $\varepsilon \geq 0$, $\theta_{jk} \geq 0$, $\gamma_{jk} > 0$, nous aurons $d^-_j \leq \overline{u}_j(t) \leq d^+_j$.
   Les nombres $\theta = (\theta_{jk}, j \in J_k, k \in K_a)$ et ε doivent être déterminés de telle sorte que $\overline{u}(t)$, $t \in T$, soit admissible, prenons le cas :

$$\int_0^{t^*} \varphi \Delta u(t) dt = 0. \tag{3.37}$$

Considérons alors la fonction :

$$F(\varepsilon,\theta) = \int_0^{t^*} \varphi\Delta u(t)dt \tag{3.38}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \varphi(t)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t)dt + \sum_{j\in J_k, k\in K_a} a_{jk}\int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}} \varphi(t)dt, \tag{3.39}$$

où : $a_{jk} = u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0) \neq 0$, pour $j \in J_k^c$ et $k \in K_a^c$;
$a_{jk} = \gamma_{jk}$ pour $j \in J_k \backslash J_k^c$ et $k \in K_a \backslash K_a^c$.
La fonction $F(\varepsilon,\theta)$ est continûment différentielle au voisinage $\varepsilon = 0$, $\theta = 0$. Alors on détermine un voisinage V du point $\varepsilon = 0$ de telle manière qu'il existe une projection unique $\theta(\varepsilon)$ vérifiant

$$F(\varepsilon,\theta(\epsilon)) = 0. \tag{3.40}$$

Ainsi, pour $\theta = \theta(\varepsilon)$ la nouvelle commande $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ est admissible. L'accroissement de la fonctionnelle par rapport aux commandes $u(t)$ et $\overline{u}(t)$, $t \in T$ est donné alors par :

$$\Delta J(u) = J(\overline{u}) - J(u)$$

$$= -\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} E_{j_0}(t)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t))dt - \sum_{j\in J_k, k\in K_a} a_{jk}\int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}(\varepsilon)} E_j(t)dt \tag{3.41}$$

Comme $E_{j_0}(t_0) \neq 0$, $E_j(t_k) = 0$, $\forall\ j \in J_k$, $k \in K_a$, et $E(t)$ est continue, alors nous obtenons :

$$\Delta J(u) = -\varepsilon E_{j_0}(t_0)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t_0)) + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} + \sum_{j\in J_k, k\in K_a} a_{jk}\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{3.42}$$

De cette expression, résulte que $\Delta J(u) > 0$ pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, ce qui contredit l'optimalité de la commande de support non dégénérée $\{u, Q_a\}$.
Pour le cas ($E_{j_0}(t_0) < 0$ et $u_{j_0}(t_0) < d_j^+$), la preuve est analogue au cas précédent.

2. Supposons qu'on a le cas : $y_{i_0} > 0$ et $g_{i_0}^* - H(i_0, K)x(t^*) = v_{i_0}^+ > 0$, $i_0 \in I_a$, de la même manière que le cas précédent, construisons la nouvelle commande $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, où $\Delta u(t)$ est donnée comme suit :

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0), & j \in J_k^c,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K_a^c, & si\ \theta_{jk} > 0, \\ u_j(t_k + 0) - u_j(t_k - 0), & j \in J_k^c,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ j \in K_a^c, & si\ \theta_{jk} < 0, \\ \gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J_k^c,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K_a \backslash K_a^c, & si\ \theta_{jk} > 0, \\ -\gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J_k^c,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ k \in K_a \backslash K_a^c, & si\ \theta_{jk} < 0, \\ 0, & ailleurs. \end{cases} \tag{3.43}$$

Les nombres θ_{jk} serons déterminés de telle sorte que la commande $\overline{u}(t),\ t \in T$ soit admissible, ce qui veut dire :

$$\upsilon(I)^- \leq \int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt \leq \upsilon(I)^+. \tag{3.44}$$

Prenons le cas :

$$\int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt = \upsilon(I), \tag{3.45}$$

avec

$$\upsilon_i = \begin{cases} \upsilon_i^-, & y_i < 0, \\ \upsilon_i^+, & y_i > 0, \\ 0, & y_i = 0. \end{cases} \tag{3.46}$$

Construisons alors la fonction :

$$F(\theta) = \int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt \tag{3.47}$$

$$= \sum_{j\in j_k, k\in K_a} a_{jk} \int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}} \varphi(t)dt, \tag{3.48}$$

où : $a_{jk} = u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0) \neq 0$, pour $j \in J_k^c$ et $k \in K_a^c$;
$a_{jk} = \gamma_{jk}$ pour $j \in J_k \backslash J_k^c$ et $k \in K_a \backslash K_a^c$.
Notons $\theta(\varepsilon)$ la solution de l'équation $F(\theta) = \upsilon^0 = (\upsilon_i^0, i \in I)$, avec :

$$\upsilon_i^0 = \begin{cases} \upsilon_i^+, & i = i_0, \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{3.49}$$

L'accroissement de la fonctionnelle par rapport aux commande $u(t)$ et $\overline{u}(t)$, $t \in T$ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\overline{u}) - J(u) \\ &= y_{i_0}\upsilon_{i_0} - \sum_{j\in J_k, k\in K_a} a_{jk} \int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}(\varepsilon)} E_j(t)dt \\ &= y_{i_0}\upsilon_{i_0} + \sum_{j\in J_k, k\in K_a} a_{jk}\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} > 0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Cette dernière inégalité contredit l'optimalité de la commande de support $u(t)$, $t \in T$.
Pour le cas $y_{i_0} < 0$ et $g_{i_0}^* - H(i_0, K)x(t^*) = \upsilon_{i_0}^+ < 0$, $i_0 \in I_a$, la preuve est analogue au cas précédent.

3.3.4 Principe du ε-maximum

Le critère d'optimalité décrit ci-dessus peut être écrit sous forme du principe du maximum. Pour cela, construisons la fonction Hamiltonien :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \psi'(Ax(t) + Bu(t) + r(t)) + c_2'(t)u(t), \tag{3.51}$$

où $\psi(t)$ est la solution du système conjugué (3.28).

Théorème 3.5(principe de maximum)

Pour que la commande de support non dégénérée $\{u, Q_a\}$ soit optimale, il est nécessaire et suffisant que le long de la commande $u(t)$, $t \in T$ et des trajectoire $x(t)$,$\psi(t)$, $t \in T$, la condition suivante du maximum soit vérifiés :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v), \ t \in T. \tag{3.52}$$

Théorème 3.5 (Principe du ε-maximum)

Soit $\varepsilon > 0$, pour l'ε-optimalité de la commande admissible $u(t)$, $t \in T$, il est nécessaire et suffisante de trouver un support Q_a de telle sorte que le long des trajectoires $x(t)$,$\psi(t)$, $t \in T$, on ait les conditions de ε-maximum :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v) - \varepsilon(t), \ t \in T, \tag{3.53a}$$

$$y'Hx(t^*) = \max_{g_* \leq Z \leq g^*} y'Z - \varepsilon_1, \tag{3.53b}$$

avec $\int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt + \varepsilon_1 + \leq \varepsilon$.

Démonstration

Suffisance :

Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support vérifiant les relations (3.53). D'après la formule (3.73) et en vertu de (3.29) la valeur de suboptimalité sera donnée par :

$$
\begin{aligned}
\beta(u,Q_a) &= \sum_{j=1}^{r}\left[\int_{T^+(j)} E_j(t)(u_j(t)-d_j^-)dt + \int_{T^-(j)} E_j(t)(u_j(t)-d_j^+)dt\right] + \\
&\sum_{y_i<0, i\in I_a} y_i v_i^- + \sum_{y_i>0, i\in I_a} y_i v_i^+ \\
&= \sum_{j=1}^{r}\left[\int_{T^+(j)} (-\psi'(t)B(K,j)-c_{2j}(t))(u_j(t)-d_j^-)dt\right] + \\
&\sum_{j=1}^{r}\left[\int_{T^-(j)} (-\psi'(t)B(K,j)-c_{2j}(t))(u_j(t)-d_j^+)dt\right] + \\
&\sum_{y_i<0, i\in I_a} y_i(g_{*i}-H(i,K)x(t^*)) + \sum_{y_i>0, i\in I_a} y_i(g_i^*-H(j,K)x(t^*)) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\int_{T^+(j)} [(-\psi'(t)B(K,j)-c_{2j}(t))(u_j(t)-d_j^-)+\psi'(t)[Ax(t)+r(t)]- \\
&\psi'(t)[Ax(t)+r(t)]]dt + \sum_{j=1}^{r}\int_{T^-(j)} (-\psi'(t)B(K,j)-c_{2j})(u_j(t)-d_j^+)+\psi'(t)[Ax(t)+r(t)]- \\
&\psi'(t)[Ax(t)+r(t)]dt + \sum_{y_i<0, i\in I_a} y_i(g_{*i}-H(i,K)x(t^*)) + \sum_{y_i>0, i\in I_a} y_i(g_i^*-H(i,K)x(t^*)) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\int_{T^+(j)} \left[\psi'(t)[Ax(t)+B(K,j)d_j^-+r(t)]+c_{2j}(t)d_j^-\right]dt + \\
&\sum_{j=1}^{r}\int_{T^-(j)} \left[\psi'(t)[Ax(t)+B(K,j)d_j^++r(t)]+c_{2j}(t)d_j^+\right]dt - \\
&\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{t^*} \left[\psi'(t)[Ax(t)+B(K,j)u_j(t)+r(t)]+c_{2j}(t)u_j(t)\right]dt + \\
&\sum_{y_i<0, i\in I_a} y_i g_{*i} + \sum_{y_i>0, i\in I_a} y_i g_i^* - \sum_{i\in I} y_i H(i,K)x(t^*)) \\
&= \int_0^{t^*} [\max_{d^-\le v\le d^+} H(t,x(t),\psi(t),v) - H(t,x(t),\psi(t),v)]dt + \max_{g_*\le Z\le g^*} y'Z - y'Hx(t^*) \\
&= \int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt + \varepsilon_1 + \le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ce qui veut dire que la commande $u(t)$, $t\in T$ est ε-optimale.

Nécessité :

Soit $u(t)$, $t\in T$ une commande ε- optimale. Décomposons la valeur de suboptimalité

$\beta(u, Q_a)$ en introduisant le problème dual du problème(3.21) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = c_1' F(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t) dt - \nu_*' \overline{g}_* + \nu^{*'} \overline{g}^* - \int_0^{t^*} f^{-'}(t) d^- + \int_0^{t^*} f^{+'}(t) d^+ \longrightarrow \min \\ \nu' \varphi(t) - f^-(t) + f^+(t) = c(t), \\ \nu' + \nu_*' - \nu^{*'} = 0, \\ \nu^*(I) \geq 0, \nu_*(I) \geq 0, f^-(t)(J) \geq 0, f^+(t)(J) \geq 0, \ t \in T. \end{cases} \tag{3.54}$$

Soit $\lambda = (\nu, \nu^*, \nu_*, f^-(t), f^+(t))$ une solution réalisable du problème dual (3.54) construite comme suit :

$$\begin{cases} \nu = y; & & \\ \nu_{*i} = 0, & \nu_i^* = y_i & si \ y_i > 0, \\ \nu_{*i} = -y_i, & \nu_i^* = 0 & si \ y_i \leq 0, \ i \in I; \\ f_j^-(t) = E_j(t), & f_j^+(t) = 0 & si \ E_j(t) \geq 0, \\ f_j^-(t) = 0, & f_j^+(t) = -E_j(t) & si \ E_j(t) < 0, \ j \in J. \end{cases} \tag{3.55}$$

Notons $\lambda^0 = (\nu^0, \nu^{*0}, \nu_*^0, f^{-0}(t), f^{+0}(t))$ la solution optimale du problème dual.
De la formule de suboptimalité et des relations (3.55) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \beta(u, Q_a) = & \int_0^{t^*} E(t) u(t) dt - \sum_{j=1}^{r} \left[\int_{T^+(i)} E_j(t) d_j^- dt + \int_{T^-(j)} E_j(t) d_j^+ dt \right] + \\ & \sum_{y_i < 0, i \in I_a} y_i g_{*i} + \sum_{y_i > 0, i \in I_a} y_i g_i^* - y' H x(t^*) \\ = & \int_0^{t^*} E(t) u(t) dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t) d^- dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t) d^+ dt + \nu^{*'} g^* - \nu_*' g_* - y' H x(t^*). \end{aligned}$$

Notons u^0 la solution optimale du primal. De (3.27) et de la relation $J(u^0) = L(\lambda^0)$, la valeur de suboptimalité peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned}
\beta(u,Q_a) &= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^-dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+dt + \\
&\nu^{*'}g^* - \nu_*'g_* - y'Hx(t^*) + J(u^0) - L(\lambda^0) \\
&= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^-dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+dt + \\
&\nu^{*'}g^* - \nu_*'g_* - y'Hx(t^*) + c_1'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c_3'(t)r(t)dt + \int_0^{t^*} c'(t)u^0(t)dt - \\
&c_1'F(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} c_3'(t)r(t)dt + \nu_*^{0'}\overline{g}_* - \nu^{*0'}\overline{g}^* + \int_0^{t^*} f^{-0'}(t)d^-dt - \int_0^{t^*} f^{+0'}(t)d^+dt \\
&= -\int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} c'(t)u^0(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^-dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+dt + \nu^{*'}g^* - \\
&\nu_*'g_* + \nu_*^{0'}\overline{g}_* - \nu^{*0'}\overline{g}^* + \int_0^{t^*} f^{-0'}(t)d^-dt - \int_0^{t^*} f^{+0'}(t)d^+dt \\
&= [J(u^0) - J(u)] + [L(\lambda) - L(\lambda^0)] \\
&= \beta(u) + \beta(Q_a)
\end{aligned}$$

où : $\beta(u) = J(u^0) - J(u)$ est la mesure de non optimalité de la commande $u(t), t \in T$;
$\beta(Q_a) = L(\lambda) - L(\lambda^0)$ mesure la non optimalité du support.

Ainsi, si on trouve un support Q_a^0 associé à la commande $u(t)$ tel que le vecteur $\lambda = (\nu^*, \nu_*, f^-(t), f^+(t))$ défini par les relations (3.55) sera optimale pour le problème (3.54), on aura $\beta(Q_a) = 0$. En effet, on peut écrire :

$$\beta(u,Q_a) = \beta(u) = J(u^0) - J(u) \leq \varepsilon, \tag{3.56}$$

à cause de l'optimalité de u.
Définissons la fonction $\varepsilon(t) > 0$ tel que :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r E_j(t)(u_j(t) - d_j^-), & si\ t \in T^-(j), \\ \sum_{j=1}^r E_j(t)(u_j(t) - d_j^+), & si\ t \in T^+(j), \\ 0, & si\ E(t) = 0, t \in T. \end{cases} \tag{3.57}$$

Comme $E'(t) = -\psi'(t)B - c_2'(t),\ t \in T$, alors, $\varepsilon(t)$ peut être écrit comme suit :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r [-\psi'(t)B(K,j) - c_{2j}(t)](u_j(t) - d_j^-), & t \in T^-(j), \\ \sum_{i=1}^r [-\psi'(t)B(K,j) - c_{2j}(t)](u_j(t) - d_j^+), & t \in T^+(j), \\ 0, & si\ E(t) = 0, t \in T. \end{cases} \tag{3.58}$$

En ajoutant les quantités $(\psi'(t)[Ax(t) + r(t)] - \psi(t)[Ax(t) + r(t)])$ à chaque relation on aura :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{r} \left(\psi'(t)[Ax(t) + B(K,j)d_j^- + r(t)] + c_{2j}(t)d_j^-\right. \\ \left.-[\psi'(t)[Ax(t) + B(k,j)u_j(t) + r(t)] + c_{2j}(t)u_j(t)]\right), \quad t \in T^-(j), \\ \sum_{i=1}^{r} \left(\psi'(t)[Ax(t) + B(K,j)d_j^+ + r(t)] + c_{2j}(t)d_j^+\right. \\ \left.-[\psi'(t)[Ax(t) + B(K,j)u_j(t) + r(t)] + c_{2j}(t)u_j(t)]\right), \quad t \in T^+(j), \\ 0, \ si \ -\psi'(t)B - c_2'(t) = 0, t \in T. \end{cases} \tag{3.59}$$

En explicitant la fonction Hamiltonien définie par la relation (3.51) nous obtenons :

$$\varepsilon(t) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t)). \tag{3.60}$$

Posons :

$$\varepsilon_1 = \sum_{y_i < 0, i \in I_a} y_i g_{*i} + \sum_{y_i > 0, i \in I_a} y_i g_i^* - \sum_{i \in I} y_i H(i, K)x(t^*)). \tag{3.61}$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\varepsilon_1 = \max_{g_* \leq Z \leq g^*} y'Z - y'Hx(t^*) \tag{3.62}$$

Ainsi, d'après les relation (3.56) et (3.73), nous obtenons :

$$\beta(u, Q_a) = \int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt + \varepsilon_1 + \leq \varepsilon. \tag{3.63}$$

Cette dernière inégalité implique que les conditions (3.53) de ε-maximum sont vérifiées.

3.3.5 Algorithme de la méthode

Soient $\varepsilon > 0$ et $\{u, Q_a\}$ une commande de support initiale. Le but de l'algorithme est de construire une commande u^ε ε-optimale ou carrément optimale u^0, en faisant des itérations qui consiste à faire le passage de $\{u, Q_a\}$ à $\{\overline{u}, \overline{Q}_a\}$ tel que $J(\overline{u}) \geq (u)$.
Pour cela, l'algorithme se décompose en trois procédures :

- changement de commande $u \longrightarrow \overline{u}$;
- changement de support $Q_a \longrightarrow \overline{Q}_a$;
- procédure finale.

3.3.5.1 Changement de commande

Soient $\epsilon \geq 0$ donné et une commande de support $\{u, Q_a\}$ vérifiant $\beta(u, Q_a) > \epsilon$. Construisons une autre commande admissible $\overline{u}(t) = u(t) + \theta\Delta u(t)$, $t \in T$, de telle façon à avoir $J(\overline{u}) \geq J(u)$, où $\Delta u(t)$ est la direction du changement de la commande, et $\theta \geq 0$ est le pas maximal admissible le long de cette direction. Pour cela, choisissons les nombres $\alpha > 0$, $h > 0$ (paramètres de l'algorithme) et construisons les ensembles :

$$T_\alpha = \{t \in T : \ \eta(t) \leq \alpha\}, \qquad T_* = T \backslash T_\alpha, \qquad avec, \ \eta(t) = \min_{j \in J} |E_j(t)|, \ t \in T.$$

Subdivisons l'ensemble T_α en intervalles $[\tau_k, \tau^k]$, $k = \overline{1, N}$, $\tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$, $T_\alpha = \bigcup_{k=1}^{N} [\tau_k, \tau^k]$, de telle façon que nous ayons $\tau^k - \tau^k \leq h$; $T_a \subset \{\tau_k, k = \overline{1, N}\}$; $u_j(t) = u_{jk} = const$, $t \in [\tau_k, \tau^k]$, $k = \overline{1, N}$, $j \in J$.

Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_{jk} = -\int_{\tau_k}^{\tau^k} E_j(t) dt, \quad q_{jk} = \int_{\tau_k}^{\tau^k} \varphi_j(t) dt, \ k = \overline{1, N}, \ j \in J; \tag{3.64}$$

$$\beta_{N+1} = -\sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} E_j(t) \Delta u_j(t) dt + \sum_{i \in I_a} y_i \overline{v}_i; \tag{3.65}$$

$$q_{i(N+1)} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t) \Delta u_j(t) dt - \overline{v}_i, i \in I_a, \tag{3.66}$$

$$q_{i(N+1)} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t) \Delta u_j(t) dt, \ i \in I_H; \tag{3.67}$$

avec :

$$\overline{v}_i = \begin{cases} g_i^* - H(i, K) x(t^*), & si \ y < 0, \\ g_{*i} - H(i, K) x(t^*), & si \ y > 0, \end{cases} \tag{3.68}$$

et

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d_j^+ - u_j(t), & si \ E_j(t) < -\alpha, \\ d_j^- - u_j(t), & si \ E_j(t) > \alpha, \qquad j = \overline{1, r}, \ t \in T_*. \end{cases} \tag{3.69}$$

Posons :

$$\begin{cases} l_{jk} = \theta \Delta u_j(t), & t \in [\tau_k, \tau^k], j = \overline{1, r}, k = \overline{1, N} \\ l_{N+1} = \theta, & avec \ 0 \leq \theta \leq 1; \end{cases} \tag{3.70}$$

$$f_*(I_H) = g_*(I_H) - H(I_H, K) x(t^*), f^*(I_H) = g^*(I_H) - H(I_H, K) x(t^*), f_*(I_a) = 0, f^*(I_a) = 0; \tag{3.71}$$

$$l = (l_{11}, \dots, l_{1N}, \dots, l_{r1}, \dots, l_{rN}, l_{N+1})'; \tag{3.72}$$

$$\beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1N}, \dots, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rN}, \beta_{N+1})'. \tag{3.73}$$

Les vecteurs l, β, et q_{jk} ont pour dimensions respectives $(Nr+1)$, $(Nr+1)$ et m. En utilisant ces quantités, le problème (3.31)-(3.32) sera équivalent au problème de support suivant :

$$\beta' l \qquad \longrightarrow \max, \tag{3.74a}$$

$$f_* \leq \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{N} q_{jk} l_{jk} + q_{N+1} l_{N+1} \leq f^*, \tag{3.74b}$$

$$d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk},\ j = \overline{1,r},\ k = \overline{1,N}, \quad 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \tag{3.74c}$$

Résolvons le problème (3.74) par la méthode adaptée, présentée en Annexe, de la manière suivante :
introduisons $S_B \subset S = \{1, \ldots, N+1\}$, $|S_B| \leq p$, et à chaque indice $k \in S_B$ faisons correspondre un ensemble $J_k \subset J = \{1, \ldots, r\}$, $\sum_{k \in S_B} |J_k| = p$.
Posons $J_B = \{J_k, k \in S_B\}$, $T_B = \{k, k \in S_B\}$ et $Q_B = \{I_a, J_B, T_B\}$ et introduisons la matrice $P_B = P(Q_B) = (q_{ij_k},\ i \in I_a,\ j \in J_k\ k \in S_B)$, où q_{jk} est un m-vecteur et $\det P_B \neq 0$.

On prend comme plan initial $l_{jk}^0 = 0$, à qui nous associons le support (Q_B). Après certain nombre d'itérations, on obtient la solution ε-optimale $\{l^\varepsilon, \widetilde{Q}_B\}$.

Si l'indice supplémentaire $(N+1) \in \widetilde{T}_B$, alors par la méthode duale, on l'exclut du support et on construit un nouveau support $\overline{Q}_B$.

Si l'indice $(N+1)$ n'est pas dans T_B, alors on pose $\overline{Q}_B = \widetilde{Q}_B$.
Ainsi, construisons la nouvelle commande de support $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_a\}$, avec :

$$\overline{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^\epsilon, & t \in [\tau_k, \tau^k],\ k = \overline{1,N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^\epsilon \Delta u_j(t), & j = \overline{1,r},\ t \in T_*, \end{cases} \tag{3.75}$$

et le support $\widetilde{Q}_a = \{\widetilde{I}_a, \widetilde{J}_a, \widetilde{T}_a\}$ du problème (3.18) est construit de la manière suivante :

$$\widetilde{I}_a = \overline{I}_a, \quad \widetilde{J}_a = \{\overline{J}_k,\ k \in \overline{S}_B\},\ \widetilde{T}_a = \{\tau_k,\ k \in \overline{S}_B\}. \tag{3.76}$$

En utilisant ces ensembles, on construit la matrice :

$$\widetilde{\varphi}_a = (\varphi_{ij}(t_k),\ i \in I_a,\ j \in \widetilde{J}_k,\ k \in \widetilde{K}_a).$$

La nouvelle commande ainsi construite vérifie l'inégalité $J(\overline{u}) \geq J(u)$. Calculons alors la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_a)$. A partir de cette valeur on distingue trois cas :

- si $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_a) = 0$, alors $\overline{u}$ est une commande optimale pour le problème (3.18) ;
- si $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_a) \leq \varepsilon$, alors $\overline{u}$ est une commande ϵ-optimale ;
- sinon, nous passons soit à une nouvelle itération en démarrant avec une commande d'appui $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_a)$ et les paramètres $\overline{\alpha} < \alpha$, $\overline{h} < h$, soit à la procédure de changement de support.

3.3.5.2 Changement de support

Soit $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_a\}$ la commande de support obtenue après résolution du problème (3.74). Calculons par les formules (3.26)-(3.27) la co-commande $\widetilde{E}'(t) = -\widetilde{\psi}'(t)B - c_2'(t),\ t \in T$, correspondant à $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_a\}$. Par la suite, construisons la quasi-commande $w = w(.) = (w(t),\ t \in T)$:

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^-, & si\ \widetilde{E}_j(t) > 0, \\ d_j^+, & si\ \widetilde{E}_j(t) < 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+], & si\ \widetilde{E}_j(t) = 0, \quad j = \overline{1, r},\ t \in T, \end{cases} \tag{3.77}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (.) = (\chi(t),\ t \in T)$ vérifiant l'équation :

$$\dot{\chi} = A\chi + Bw + r(t),\ \chi(0) = x_0. \tag{3.78}$$

Construisons le vecteur

$$\gamma(\widetilde{J}_a, \widetilde{T}_a) = \widetilde{\varphi}_a^{-1}\left(g_*^*(\widetilde{I}_a) - H(\widetilde{I}_a, K)\chi(t^*)\right), \tag{3.79}$$

avec

$$g_{*i}^* = \begin{cases} g_{*i}, & si\ \widetilde{y}_i < 0, \\ g_i^*, & si\ \widetilde{y}_i > 0; \end{cases} \tag{3.80}$$

et les quantités :

$$\gamma^*(\widetilde{I}_H) = (\gamma_i^*, i \in \widetilde{I}_H = I \backslash \widetilde{I}_a),$$
$$\gamma_*(\widetilde{I}_H) = (\gamma_{*i},\ i \in \widetilde{I}_H),$$

avec γ_i^* et γ_{*i} sont définies comme suit :

$$\gamma_i^* = \sum_{j \in \widetilde{J}_k, k \in \widetilde{K}_a} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + H(i, K)\chi(t^*) - g_i^*,$$

$$\gamma_{*i} = \sum_{j \in \widetilde{J}_k, k \in \widetilde{K}_a} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + H(i, K)\chi(t^*) - g_{*i}.$$

En introduisant un paramètre μ suffisamment petit deux cas peuvent se présenter :

1. Si les relations suivantes :

$$||\gamma(\widetilde{J}a, \widetilde{T}_a)|| \leq \mu, \ \gamma^*(\widetilde{I}_H) \geq 0, \ \gamma_*(\widetilde{I}_H) \leq 0, \tag{3.81}$$

sont vérifiées, alors on passe à la procédure finale avec le support $\overline{Q}_a = \widetilde{Q}_a$.

2. Sinon on va changer le support ($\widetilde{Q}_a \longrightarrow \overline{Q}_a$), en effectuant une itération de la méthode duale, et on refait une nouvelle itération avec $\{\overline{u}, \overline{Q}_a\}$, $\overline{\alpha} < \alpha$ et $\overline{h} < h$.

Pour cela introduisons le problème dual du problème primal (3.18) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = c_1' F(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t) dt - \nu_*' \overline{g}_* + \nu^{*'} \overline{g}^* - \int_0^{t^*} f^{-'}(t) d^- dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t) d^+ dt \longrightarrow \min \\ \nu^{*'} \varphi(t) - \nu_*' \varphi(t) - f^-(t) + f^+(t) = c(t), \\ \nu_* \geq 0, \nu^* \geq 0, f^-(t) \geq 0, f^+(t) \geq 0, \ t \in T. \end{cases} \tag{3.82}$$

Soit $\lambda = (\nu_*, \nu^*, f^-(t), f^+(t))$ une solution réalisable du problème dual (3.54) définie de la façons suivante :

$$\begin{cases} \nu_{*i} = 0, & \nu_i^* = \widetilde{y}_i & si \ \widetilde{y}_i < 0, \\ \nu_{*i} = -\widetilde{y}_i, & \nu_i^* = 0 & si \ \widetilde{y}_i \leq 0, \\ f_j^-(t) = \widetilde{E}_j(t), & f_j^+(t) = 0 & si \ \widetilde{E}_j(t) \geq 0, \\ f_i^-(t) = 0, & f_i^+(t) = -\widetilde{E}_j(t) & si \ \widetilde{E}_j(t) < 0. \end{cases} \tag{3.83}$$

Construisons une nouvelle solution réalisable $\overline{\lambda}$ avec sa co-commande correspondante $\overline{E}(t) = \overline{y}' \varphi(t) - c(t)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \overline{\lambda} = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \sigma^0 \xi, \\ \overline{y} = \widetilde{y} + \sigma^0 \Delta y, \\ \overline{E}(t) = \widetilde{E}(t) + \sigma^0 \delta(t), \ t \in T, \end{cases} \tag{3.84}$$

où : $\delta(t)$ est la direction du changement de la co-commande et Δy est celle du vecteur des potentiels ; σ^0 est le pas le long de cette direction.
Supposons que $\exists \ I_H^0 \subset \widetilde{I}_H$, avec $i \in I_H^0$ et ($\gamma_i^* > 0$, ou $\gamma_{*i} < 0$).
Calculons la quantité suivante :

$$\alpha(0) = \sum_{y_i > 0, i \in \widetilde{I}_a} \Delta y_i \overline{g}_i^* + \sum_{y_i < 0, i \in \widetilde{I}_a} \Delta y_i \overline{g}_{i*} - \sum_j^r \left(\int_{T_{(j)}^+} \delta_j(t) d_j^- dt + \int_{T_{(j)}^-} \delta_j(t) d_j^+ dt \right). \tag{3.85}$$

$$\alpha(\sigma) = \alpha(0) + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \int_{t_j^l}^{t_j^l(\sigma)} \delta_j(t)(d_j^- - d_j^+) sign \dot{\widetilde{E}}_j(t_j^l) dt. \tag{3.86}$$

avec : t_j^l, $t_j^l(\sigma)$ sont les zeros de $\widetilde{E}_j(t)$ et de $\overline{E}_j(t)$ respectivement ; et $\dot{\overline{E}}_j(t_j^l(\sigma)) \neq 0$, $j = \overline{1..r}$, $j \in l_j$. Posons :

$$\gamma_{i_0} = \max_{i \in I_H^0} \{|\gamma_{*i}|, \ |\gamma_i^*|\};$$

$$\Delta y_{i_0} = \begin{cases} -1, & si \quad \gamma_{i_0} = |\gamma_i^*|, \\ 1, & si \quad \gamma_{i_0} = |\gamma_{*i}|; \end{cases}$$

$$\Delta y(\widetilde{I}_H \backslash_{i_0}) = 0.$$

De l'égalité

$$\delta'_a = \Delta y'(\widetilde{I}_a)\widetilde{\varphi}_a + \Delta y_{i_0}(\varphi_{i_0 j}, j \in J_k, k \in K_a),$$

on trouve

$$\Delta y'(\widetilde{I}_a) = \Delta y_{i_0}(\varphi_{i_0 j}, j \in J_k, k \in K_a)\widetilde{\varphi}_a^{-1}.$$

La direction $\delta(t), t \in T$, est donnée par :

$$\delta(t) = -\Delta\psi'(t)B(t), t \in T,$$

avec $\Delta\psi(t), t \in T$, est la solution du système suivant :

$$\Delta\dot{\psi} = -A'\Delta\psi, \ \Delta\psi(t^*) = -\Delta y' H.$$

Ainsi, le changement de support se fait de la façon suivante :

- si il existe $i_* \in \widetilde{I}_a$, avec $\overline{y}_{i_*} = 0$, alors, le nouveau support $\overline{Q}_a = (\overline{I}_a, \overline{J}_a, \overline{T}_a)$, avec :

$$\overline{I}_a = (\widetilde{I}_a \backslash i_*) \cup i_0, \ \overline{J}_a = \widetilde{J}_a, \ \overline{T}_a = \widetilde{T}_a.$$

- sinon, choisissons $(j_1, t_s), j_1 \in J \backslash \widetilde{J}_a, \ t_s \in T \backslash \widetilde{T}_a$, avec :

$$\overline{E}_{J_1}(t_s) = \widetilde{E}_{j_1}(t_s) + \sigma^0 \delta_{j_1}(t_s) = 0 \ et \ \delta_{j_1}(t_s) \neq 0.$$

  Le pas σ^0, est calculé de telle sorte que $\alpha(\sigma^0) > 0$. Ainsi, le nouveau support est $\overline{Q}_a = (\overline{I}_a, \overline{J}_a, \overline{T}_a)$, avec :

$$\overline{I}_a = (\widetilde{I}_a \cup i_0), \ \overline{J}_a = (\widetilde{J}_a \cup j_1), \ \overline{T}_a = (\widetilde{T}_a \cup t_s).$$

Supposons maintenant que l'on a $\gamma^*(\widetilde{I}_H) \geq 0, \ \gamma_*(\widetilde{I}_H) \leq 0$, et $||\gamma(\widetilde{I}_a, \widetilde{T}_a)|| > \mu$. Posons :

$$|\gamma(j_0, t_{s_0})| = \max |\gamma(\widetilde{I}_a, \widetilde{T}_a)|, \ j_0 \in \widetilde{J}_{s_0}, s_0 \in \widetilde{K}_a.$$

Dans ce cas, le changement de support se fait de la manière suivante :

– s'il existe $i_* \in \widetilde{I}_a$, avec $\overline{y}_{i_*} = 0$, où : $\overline{y} = y + \sigma^0 \Delta y$;
et $\Delta y(\widetilde{I}_H) = 0, \Delta y(\widetilde{I}_a) = -sign\gamma(j_0, t_{s0})\varphi^{-1}(\widetilde{I}_a, j_0, t_{s0})$,
alors, le nouveau support $\overline{Q}_a = (\overline{I}_a, \overline{J}_a, \overline{T}_a)$ est donné comme suit :

$$\overline{I}_a = \widetilde{I}_a \backslash i_*,\ \overline{J}_a = \widetilde{J}_a \backslash j_0,\ \overline{T}_a = \widetilde{T}_a \backslash t_{s0}.$$

– sinon, le nouveau support est $\overline{Q}_a = (\overline{I}_a, \overline{J}_a, \overline{T}_a)$, avec :

$$\overline{I}_a = \widetilde{I}_a,\ \overline{J}_a = (\widetilde{J}_a \backslash j_0) \cup j_1,\ \overline{T}_a = (\widetilde{T}_a \backslash t_{s0}) \cup t_s.$$

Calculons la valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_a)$.
– si $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_a) = 0$, alors la commande de support $\{\overline{u}, \overline{Q}_a\}$ est optimale ;
– si $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_a) \leq \varepsilon$, alors $\{\overline{u}, \overline{Q}_a\}$ est une commande ϵ-optimale ;
– sinon, aller à la procédure finale.

3.3.5.3 Procédure finale

Admettons, que les relations (3.81) sont vérifiées pour la quasi-commande $w = w(.) = (w(t),\ t \in T)$ et la quasi-trajectoire $\chi = \chi(.) = (\chi(t),\ t \in T)$ construite par le support $\overline{Q}_a$.
La procédure finale consiste à déterminer le support optimal $Q_a^* = \{I_a^*, J_a^*, T_a^*\}$ de telle manière à avoir : $g_* \leq H\chi(t^*) \leq g^*$.

Ainsi, le support Q_a^* est déterminé en résolvant le système d'équations suivant :

$$\sum_{j \in \overline{J}_k} \sum_{k \in \overline{K}_a} (d_j^+ - d_j^-) sign\dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T_a^*)} \varphi_{ij}(t)dt - g_{*i}^* + H(i, K)\chi(t^*) = 0,\ i \in I_a^*, \quad (3.87)$$

avec $V_k(T_a^*), k \in K_a^*$, est déterminé par les relations :

$$E_j(V_k(T_a^*), T_a^*) = 0,\ V_k(\overline{T}_a) = t_k,\ j \in \overline{J}_k,\ k \in \overline{K}_a;$$

$$E(t, T_a^*) = c_a^{*'} \varphi_a^{*-1} \varphi(t) - c(t).$$

Supposons Q_a^l la $l^{ème}$ approximation, Q_a^0 l' approximation initiale , avec $I_a^0 = \overline{I}_a$, $J_a^0 = \overline{J}_a$, $T_a^0 = \overline{T}_a$. Supposons que la $l^{ème}$ approximation est connue, alors la $(l{+}1)^{ème}$ approximation sera construite de la manière suivante :

$$T_a^{l+1} = T_a^l + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-} sign\dot{E}_j(t_k)\gamma(j, t_k^l),\ j \in J_k^l,\ k \in K_a^l \right\}. \quad (3.88)$$

En outre, la $(l+1)^{ème}$ approximation sera construite d'une manière à satisfaire les relations (3.81). Ainsi, si à chaque approximation, les conditions (3.81) ne sont pas vérifies, nous changeons le support comme suit :

- Si $\exists\, i_* \in I_a^l$, avec $y_{i_*}^{l+1} = 0$, $\gamma_{*_i}^{l+1} \geq 0$, $\gamma_i^{*l+1} \leq 0$, $i \in I_H^k$, posons $Q_a^{l+1} = \{I_a^{l+1},\ J_a^{l+1},\ T_a^{l+1}\}$, avec $I_a^{l+1} = I_a^l \backslash i_*,\ J_a^{l+1} = J_a^l \backslash j_0,\ T_a^{l+1} = T_a^l \backslash t_{s_0}$.
  Calculons $\gamma^*(I_H^{l+1})$, $\gamma_*(I_H^{l+1})$, $\gamma^*(J_a^{l+1},\ T_a^{l+1})$.
  Si les conditions (3.81) sont vérifies, nous posons $Q_a^0 = Q_a^{l+1}$. Sinon, changeons le support jusqu'à ce que les conditions (3.81) soient satisfaites.

- Si $\exists\ i_* \in I_a^l$, $y_{i_*}^{l+1} = 0\,;\ \exists\ i_0 \in I_H^k$, $\gamma_{*_{i_0}}^{l+1} > 0$, $\gamma_{i_0}^{*l+1} < 0$, nous changeons le support de la manière suivante :
$$I_a^{l+1} = (I_a^l \backslash i_*) \cup i_0,\ \ J_a^{l+1} = J_a^l,\ \ T_a^{l+1} = T_a^l.$$

- Si $\forall\ i \in I_a^l$, $y_i^{l+1} \neq 0$, et $\exists\ i_0 \in I_H$: $\exists\ i_0 \in I_H^k$, $\gamma_{*_{i_0}}^{l+1} > 0$, $\gamma_{i_0}^{*l+1} < 0$, posons
$$I_a^{l+1} = I_a^l \cup i_0,\ \ J_a^{l+1} = J_a^l \cup j_1,\ \ T_a^{l+1} = T_a^l \cup t_s.$$

Posons $I_a^l = I_a^{l+1},\ J_a^l = J_a^{l+1},\ T_a^l = T_a^{l+1}$, et faisons une nouvelle itération jusqu'à ce que les approximations successives ne diffèrent pas.

Soit $Q_a^* = \{I_a^*, J_a^*, T_a^*\}$ la solution du système (3.3.6), alors la quasi-commande $w^*(t),\ t \in T$ calculée par (3.77) et le support Q_a^* est une commande optimale pour le problème (3.18), et Q_a^* est le support optimal.

3.3.6 Schéma de l'algorithme

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithm 1 Méthode adaptée pour le problème posé.

Début

(1) Teste de commandabilité du système :

SI $rang(B,\ AB,\ A^2B,\ldots,A^{n-1}B) = n$, Alors le système est commandable, aller en (2).

SINON, le problème n'admet pas de solution.

(2) `Soit` $\{u, Q_a\}$ `une commande de support de départ admissible du problème` (3.18).

* Déterminer la trajectoire admissible $x(t), t \in T$.
* Calculer $\varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)B$.
* Calculer $c'(t) = c_1'F(t^*)F^{-1}(t)B + c_2'(t)$.
* Calculer $y'(I_a) = c_a'\varphi_a^{-1}, \qquad y(I_H) = 0$.
* Déterminer la co-commande $E(t) = y'\varphi(t) - c'(t)$.
* Calculer la valeur de la fonctionnelle $J(u) = c_1'x(t^*) + \int_0^{t^*} c_2'(t)u(t)dt$.

(3) `Test d'optimalité de la commande de support de départ`

* Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, Q_a)$ donnée par la formule (3.73).

SI $\beta(u, Q_a) = 0$, alors la commande de support $\{u, Q_a\}$ est optimale ;

SI $\beta(u, Q_a) \le \varepsilon$, alors la commande de support $\{u, Q_a\}$ est ε-optimale ;

SINON, aller en (4).

(4) `Changement de la commande` u `en` $\overline{u}$

* Construire les ensembles :

$$T_\alpha = \{t \in T :\ \eta(t) \le \alpha\}, \qquad T_* = T \backslash T_\alpha, \qquad avec,\ \eta(t) = \min_{j\in J} |E_j(t)|,\ t \in T.$$

* Subdiviser l'ensemble T_α en intervalles $[\tau_k, \tau^k]$.
* Calculer les quantités suivantes :$\beta_{jk},\ q_{jk},\ \beta_{N+1},\ q_{N+1}$, avec les relations (3.64), (3.65), (3.66) et (3.67).
* Résoudre le problème suivant par la méthode adaptée :

$$\begin{cases} \beta' l \qquad \longrightarrow \max, \\ f_* \le \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{N} q_{jk} l_{jk} + q_{N+1} l_{N+1} \le f^*, \\ d_j^- - u_{jk} \le l_{jk} \le d_j^+ - u_{jk},\ j = \overline{1,r},\ k = \overline{1,N}, \quad 0 \le l_{N+1} \le 1, \end{cases} \tag{3.89}$$

où f_*, f^*, l et β sont données par les relations (3.71), (3.72) et (3.73).

* Construire la nouvelle commande de support $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_a\}$, avec :

$$\overline{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^{\epsilon}, & t \in [\tau_k, \tau^k],\ k = \overline{1,N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^{\epsilon} \Delta u_j(t), & j = \overline{1,r},\ t \in T_*, \end{cases} \tag{3.90}$$

et le support $\widetilde{Q}_a$ est construit par les relations (3.76).

(5) `Test d'optimalité de la nouvelle commande de support` $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_a\}$

$*$ Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_a)$

SI $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_a) = 0$, alors $\overline{u}$ est une commande optimale ;

SI $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_a) \leq \varepsilon$, alors $\overline{u}$ est une commande ε-optimale ;

SINON, aller en (6).

(6) `Changement de le support` $\widetilde{Q}_a$ `en` $\overline{Q}_a$

$*$ Construire la quasi-commande $w = w(.) = (w(t),\ t \in T)$ telle que

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^-, & si\ \widetilde{E}_j(t) > 0, \\ d_j^+, & si\ \widetilde{E}_j(t) < 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+], & si\ \widetilde{E}_j(t) = 0, \quad j = \overline{1, r},\ t \in T, \end{cases}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (.) = (\chi(t),\ t \in T)$ vérifiant :

$$\dot{\chi} = A\chi + Bw + r(t),\ \chi(0) = x_0.$$

Construire les vecteurs :

$$\gamma(\widetilde{J}_a, \widetilde{T}_a) = \widetilde{\varphi}_a^{-1}\left(g_*^*(\widetilde{I}_a) - H(\widetilde{I}_a, K)\chi(t^*)\right);$$

$$\gamma_i^* = \sum_{j \in \widetilde{J}_k, k \in \widetilde{K}_a} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + H(i, K)\chi(t^*) - g_i^*,\ i \in \widetilde{I}_H$$

$$\gamma_{*i} = \sum_{j \in \widetilde{J}_k, k \in \widetilde{K}_a} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + H(i, K)\chi(t^*) - g_{*i},\ i \in \widetilde{I}_H.$$

SI

$$||\gamma(\widetilde{J}a, \widetilde{T}_a)|| \leq \mu,\ \gamma^*(I_H) \geq 0,\ \gamma_*(I_H) \leq 0,$$

alors on pose $\overline{Q}_a = \widetilde{Q}_a$ et aller en (7).

SINON, changer le support ($\widetilde{Q}_a \longrightarrow \overline{Q}_a$), en effectuant une itération de

la méthode duale, et aller en (2) avec le nouveau support.

(7) `Test d'optimalité de la nouvelle commande de support` $\{\overline{u}, \overline{Q}_a\}$.

$*$ Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_a)$

SI $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_a) = 0$, alors la commande de support $\{\overline{u}, \overline{Q}_a\}$ est optimale ;

SI $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_a) \leq \varepsilon$, alors $\{\overline{u}, \overline{Q}_a\}$ est une commande ϵ-optimale ;

SINON, aller en (8).

(8) `Procédure finale`

$*$ Résoudre le système suivant par la méthode de Newton :

$$\sum_{j\in \overline{J}_k}\sum_{k\in \overline{K}_a}(d_j^+ - d_j^-)sign\dot{E}_j(t_k)\int_{t_k}^{V_k(T_a^*)}\varphi_{ij}(t)dt - g_{*i}^* + H(i,K)\chi(t^*) = 0,\ i\in I_a^*,$$

on prend comme approximation initiale Q_a^0, avec $I_a^0 = \overline{I}_a$, $J_a^0 = \overline{J}_a$, $T_a^0 = \overline{T}_a$,

$a)$ Calculer la $(l+1)^{ème}$ approximation, construite comme suit :

$$T_a^{l+1} = T_a^l + \left\{\frac{1}{d_j^+ - d_j^-}sign\dot{E}_j(t_k)\gamma(j,t_k^l),\ j\in J_k^l,\ k\in K_a^l\right\}.$$

SI $\exists\ i_* \in I_a^l$, avec $y_{i_*}^{l+1} = 0$, $\gamma_{*i}^{l+1} \geq 0$, $\gamma_i^{*l+1} \leq 0$, $i \in I_H^k$,

posons $I_a^{l+1} = I_a^l \backslash i_*,\ J_a^{l+1} = J_a^l\backslash j_0,\ T_a^{l+1} = T_a^l\backslash t_{s_0}$.

SI $\exists\ i_* \in I_a^l$, $y_{i_*}^{l+1} = 0\,;\ \exists\ i_0 \in I_H^k$, $\gamma_{*i_0}^{l+1} > 0$, $\gamma_{i_0}^{*l+1} < 0$, on pose

$$I_a^{l+1} = (I_a^l\backslash i_*)\cup i_0,\ J_a^{l+1} = J_a^l,\ T_a^{l+1} = T_a^l.$$

SI $\forall\ i\in I_a^l$, $y_i^{l+1}\neq 0$, et $\exists\ i_0\in I_H : \exists\ i_0 \in I_H^k$, $\gamma_{*i_0}^{l+1} > 0$, $\gamma_{i_0}^{*l+1} < 0$,
posons $I_a^{l+1} = I_a^l\cup i_0,\ J_a^{l+1} = J_a^l\cup j_1,\ T_a^{l+1} = T_a^l\cup t_s$.

$b)$ Calculer $\gamma^*(I_H^{l+1})$, $\gamma_*(I_H^{l+1})$, $\gamma^*(J_a^{l+1}, T_a^{l+1})$.

SI les conditions (3.81) sont vérifies, posons $Q_a^0 = Q_a^{l+1}$.
SINON, changeons le support jusqu'à ce que les conditions (3.81) soient satisfaites.

$c)$ On pose $I_a^{l+1} = I_a^l,\ J_a^{l+1} = J_a^l,\ T_a^{l+1} = T_a^l$,
SI $Q_a^{l+1} = Q_a^l$, alors $Q_a^{l+1} = Q_a^*$ est optimal, et la quasi-commande $w^*(t),\ t\in T$ calculée par (3.77) et le support Q_a^* est une commande optimale.
SINON, aller en (a).

FIN

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire.
Après avoir présenté quelques aspects théoriques du contrôle optimal, nous avons développé une méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal sous forme de Bolza, avec commande vectorielle et des contraintes inégalités. Les cas déjà traités dans la literature [28-43] sont des cas particuliers avec $c_2(t) = 0$.

Cette méthode se base sur trois procédures essentielles : i) changer la commande u par $\overline{u}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité de la commande ; ii) changer le support Q_a par $\overline{Q_a}$ de telle sorte que la mesure de non optimalité de support sera diminuée ; iii) procédure finale, qui consiste à rendre la quasi-commande w à la fois et optimale réalisable.

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION DES MODÈLES

Introduction

Dans ce chapitre nous résolvons certains modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise présentés précédemment.

Tout d'abord, nous résolvons le modèle de Sethi et Thomson tel qu'il est présenté pour la première fois. Puis nous donnons un exemple numérique proposé par C.Nostrom. Finalement, nous présentons les résultats du modèle de firme avec la méthode adaptée.

4.1 Modèle de gestion de trésorerie

Dans cette section nous présentons la résolution de certains modèles de gestion de trésorerie présentés dans le chapitre précédent.

4.1.1 Modèle de gestion de trésorerie sans contraintes sur l'état

Tout d'abord, résolvons le modèle de gestion de trésorerie présenté par S. P. Sethi et G. L. Thomson dans [66] par le principe du maximum de Pontriaguine. Ce modèle se présente comme suit :

$$\begin{cases} V = x(t^*) + y(t^*) \to \max \\ \dot{x} = r_1 x - d + u - \alpha|u|, \\ \dot{y} = r_2 y - u, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \\ -M_1 \leq u(t) \leq M_2,\ M_1 > 0,\ M_2 > 0, t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Introduisons le vecteur d'état adjoint $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, ainsi que la fonction Hamiltonien H définie comme suit :

$$H = \lambda_1(r_1 x - d + u - \alpha|u|) + \lambda_2(r_2 y - u). \tag{4.2}$$

Le vecteur d'état adjoint satisfait aux équations suivantes :

$$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1 r_1,\ \lambda_1(t^*) = 1, \tag{4.3}$$

$$\dot{\lambda_2} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda_2 r_2,\ \lambda_2(t^*) = 1. \tag{4.4}$$

Les solutions de ces deux équations sont triviales : elles sont données, respectivement, comme suit (si on suppose que les rendements sont variables) :

$$\lambda_1(t) = e^{\int_t^{t^*} r_1(\tau)d\tau}, \tag{4.5}$$

$$\lambda_1(t) = e^{\int_t^{t^*} r_2(\tau)d\tau}, \tag{4.6}$$

Les interprétations de ces solutions sont tout aussi claires. La variable $\lambda_1(t)$ est la valeur future (à l'instant t^*) d'une unité de capital détenus dans le compte de trésorerie (banque) entre t et t^* ; de la même manière, la variable $\lambda_2(t)$ est la valeur future (à l'instant t^*) d'une unité de capital investi dans des actions à partir de t.

Calculons maintenant la politique optimale en choisissant la variable de contrôle u afin de maximiser la fonction Hamiltonien donnée par l'équation (4.2). Afin de faire face à la valeur absolue, écrivons la variable de contrôle u comme la différence de deux variables positives, c'est-à-dire :

$$u = u_1 - u_2,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0. \tag{4.7}$$

Cependant, les propriétés de la solution optimale seront automatiquement influencées par cette contrainte. La raison est que la commission du courtier doit être payée sur chaque transaction (achat ou vente d'action), ce qui ne rend pas optimales les transactions. Donc à chaque transaction, on va supposer que l'entreprise, soit elle va acheter ou elle va vendre, ce qui impose la contrainte quadratique suivante :

$$u_1 u_2 = 0, \tag{4.8}$$

Compte tenu de (4.7) et (4.8) nous pouvons écrire :

$$|u| = u_1 + u_2. \tag{4.9}$$

Nous pouvons maintenant utiliser les relations (4.9) et (4.7) dans le Hamiltonien pour substituer u par u_1 et u_2. Ainsi, on prend la partie qui dépend de u_1 et u_2 notée W, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$W = u_1[(1-\alpha)\lambda_1 - \lambda_2] - u_2[(1+\alpha)\lambda_1 - \lambda_2]. \tag{4.10}$$

Maximiser le Hamiltonien (4.2) par rapport à u, revient à maximiser W par rapport à u_1 et u_2. La fonction W est linéaire par rapport à u_1 et u_2, ainsi la stratégie optimale en prenant en compte la relation (4.8) est bang-bang décrite comme suit :

$$u^* = u_1^* - u_2^*, \tag{4.11}$$

avec

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & si (1-\alpha)\lambda_1 - \lambda_2 < 0, \\ \text{indéterminée} & si (1-\alpha)\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ M_1 & si (1-\alpha)\lambda_1 - \lambda_2 > 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$u_2^* = \begin{cases} 0 & si + (1+\alpha)\lambda_1 - \lambda_2 > 0, \\ \text{indéterminée} & si - (1+\alpha)\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ M_2 & si - (1+\alpha)\lambda_1 + \lambda_2 < 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

La commande $u_1(t)$ représente la quantité d'action à vendre, elle est optimale : lorsqu'on vend en valeur maximale autorisée si la valeur à l'instant t^* de $(1-\alpha)$ d'une unité de capital détenus dans le compte bancaire à partir de t est supérieur à la valeur future (à l'instant t^*) d'une unité de capital investi dans des actions ; dans le cas contraire, l'optimum est de ne pas vendre.
De la même manière pour la commande $u_2(t)$, qui représente l'achat d'actions. La politique optimale est d'acheter, de ne pas acheter, ou il est indifférent, si la valeur à l'instant t^* d'une unité de capital dans la banque plus la commission est inférieure, supérieure, ou égale à la valeur à l'instant t^* d'une unité de capital investi dans des actions, respectivement.

Ainsi, si

$$(1-\alpha)\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t), \tag{4.14}$$

et

$$(1+\alpha)\lambda_1(t) > \lambda_2(t), \tag{4.15}$$

alors on prend $u_1(t) > 0$, et $u_2(t) = 0$.

D'autre part, si

$$(1+\alpha)\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t), \tag{4.16}$$

et

$$(1-\alpha)\lambda_1(t) < \lambda_2(t), \tag{4.17}$$

alors on prend $u_2(t) > 0$, et $u_1(t) = 0$. On voit bien qu'avec ces stratégies, la condition (4.8) est vérifiée.

4.1.2 Modèle de gestion de trésorerie avec contraintes sur l'état

Sethi a formulé aussi un problème de gestion de trésorerie dans lequel les découverts et les ventes à découvert ne sont pas autorisés. Pour ce faire, mathématiquement il a imposé les contraintes supplémentaires suivantes :

$$x \geq 0 \ et \ y \geq 0. \tag{4.18}$$

En général, en présence de (4.18), nous utilisons le principe du maximum en formulant le Lagrangien comme suit :

$$L = H + \eta_1 x + \eta_2 y. \tag{4.19}$$

Ainsi, le vecteur d'état adjoint satisfait aux équations d'état adjoint suivantes :

$$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -(\lambda_1)r_1 + \eta_1, \ \lambda_1(t^*) = 1, \tag{4.20}$$

$$\dot{\lambda_2} = -\frac{\partial L}{\partial y} = -\lambda_2 r_2 + \eta_2, \ \lambda_2(t^*) = 1, \tag{4.21}$$

Les multiplicateurs de Lagrange satisfont aux relations :

$$\eta_1 \geq 0, \eta_1(r_1 x - d + u - \alpha|u|) = 0, \tag{4.22}$$

$$\eta_1 \geq 0, \eta_2(r_2 y - u) = 0, \tag{4.23}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0. \tag{4.24}$$

La solution de ce problème est difficile ; dans ce qui suit nous présentons la résolution d'un exemple simple proposé par C.Nostrom.
Ainsi, considérons le modèle dans lequel $\alpha = 0$, $T = 10$, et r_1 et r_2 sont des constantes par morceaux définies comme suit :

$$r_1(t) = \begin{cases} 0 & pour\ 0 \leq t < 5, \\ 0.3 & pour\ 5 \leq t \leq 10, \end{cases} \tag{4.25}$$

$$r_2(t) = 0.1\ pour\ 0 \leq t \leq 10. \tag{4.26}$$

Les soldes initiaux dans la banque et la bourse sont respectivement : $x_0 = 0$, $y_0 = 3$. En outre nous supposons $d(t) = 0$, pour $0 \leq t \leq 10$. La solution optimale est facile à deviner lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur la commande, elle est donnée par :

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & pour\ 0 \leq t < 5, \\ y(t) & pour\ t = 5, \\ 0 & pour\ 5 < t \leq 10, \end{cases} \tag{4.27}$$

et à l'instant $t = 5$, l'action optimale est clairement de vendre tous les titres instantanément pour profiter de la hausse du taux d'intérêt au niveau de la banque. Nous pouvons le faire parce qu'il n'y a pas de limite supérieure sur le taux de ventes (commande).

Dans le cas où $d(t) \neq 0$, pour $0 \leq t \leq 10$, il est facile de modifier la solution donnée ci-dessus. Ainsi, la solution optimale dans ce cas est : de vendre les titres juste pour satisfaire la demande $d(t)$ entre $0 \leq t < 5$; de vendre tous les titres à l' instant $t = 5$ pour profiter de la hausse du taux d'intérêt ; de maintenir toutes les liquidités au niveau de la banque entre $5 < t \leq 10$.

4.2 Modèle de firme

Dans cette section, nous étudions le modèle de firme présenté dans le deuxième chapitre. Ici nous supposons, une entreprise qui utilise le capital propre comme source de financement, et son objectif est de maximiser les dividendes distribués aux actionnaires, sous la contrainte que son niveau de production peut satisfaire les engagements envers ses clients à une date donné t^*. Nous supposons aussi que la fonction de production de cette entreprise est celle de Leontieff à un seul facteur de production k. Le chiffre d'affaires de l'entreprise peut s'écrit alors $S = \nu k(t)$, avec ν est la productivité nominale du capital. En effet, ce modèle s'écrit comme suit :

$$V(D,t^*) = \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t)dt \to \max$$
$$\begin{cases} \dot{k} = \nu k - (\delta + wl)k - D, \\ k(0) = k_0, \\ k(t^*) \geq k_f, \\ 0 \leq D(t) \leq D_{\max}, t \in T. \end{cases} \tag{4.28}$$

4.2.1 Exemples numériques

Afin d'interpréter l'évolution de ce modèle, on a implémenté l'algorithme développé dans le chapitre précédent sur machine en se servant des avantages du langage de programmation mathématique du Matlab7.

Pour tester le programme, les valeurs numériques suivantes ont été utilisées : $t^* = 10$; $k_0 = 20$; $k_f = 70$; $D_{\max} = 5$; $\rho = 0.05$; $\delta = 0.01$; $wl = 0.1$; $\nu = 0.3$.
A une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$, la commande ε-optimal est la suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & pour\ t \in [0,\ 3.5229], \\ 3.3145 & pour\ t \in [3.5229,\ 3.5329], \\ 5 & pour\ t \in [3.5329,\ 10], \end{cases} \tag{4.29}$$

Le graphique suivant illustre la commande ε-optimale :

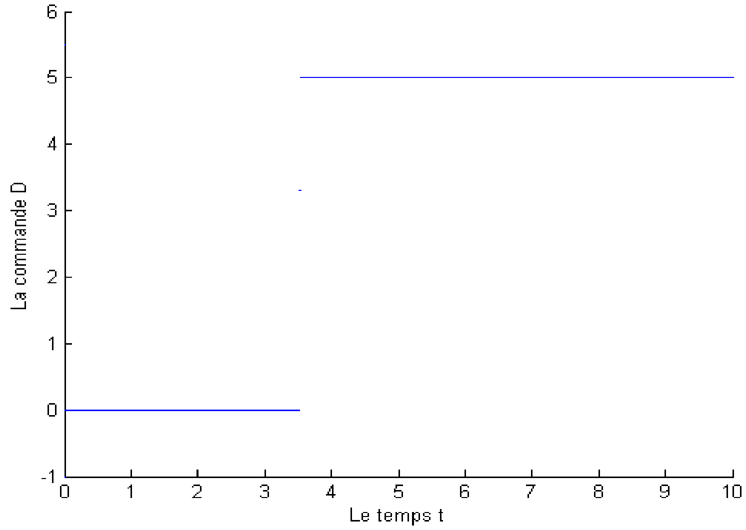

FIGURE 4.1: La commande optimale.

La trajectoire optimale $k(t)$ est la suivante :

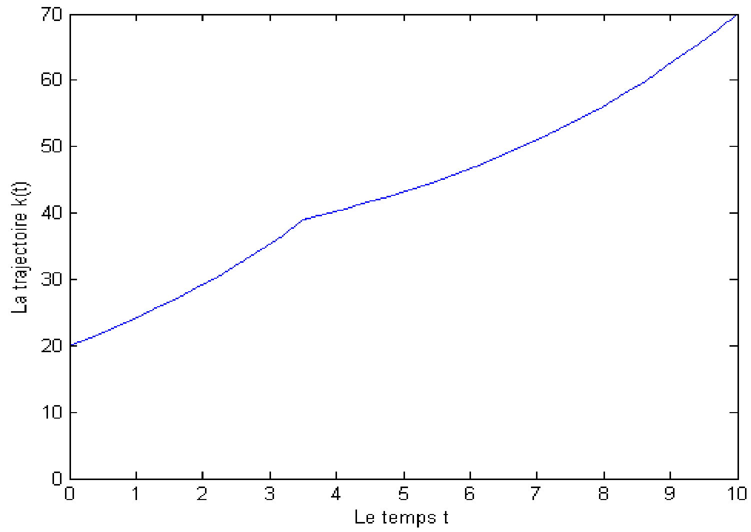

FIGURE 4.2: La trajectoire optimale.

L'évolution de la fonctionnelle associé à la commande ε-optimale dans le temps est représentée sur le graphe suivant :

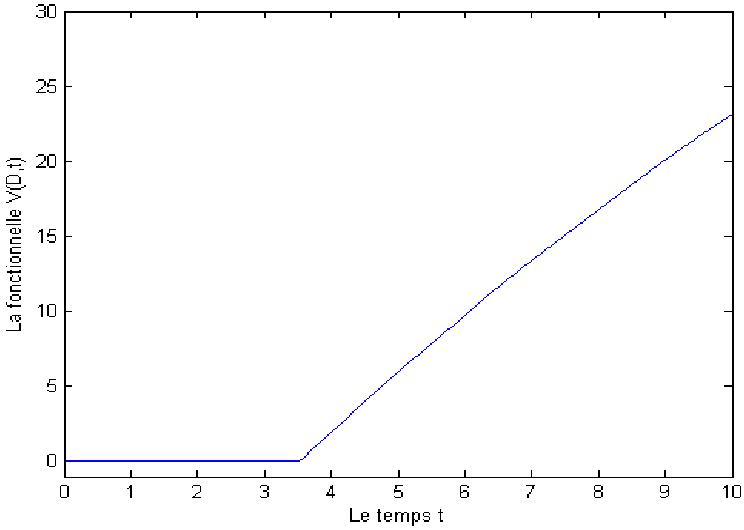

FIGURE 4.3: L'évolution de la fonctionnelle.

La valeur de la fonctionnelle est $V(D, t^*) = 23.1826$.

A partir des résultats obtenus, la décision optimale pour les actionnaires est de réinvestir leurs dividendes jusqu'à une date donnée pour profiter du taux de rendement que l'entreprise offre et pour que l'entreprise atteint ces objectif le plus vite possible, puis de recevoir les dividendes à leur valeur maximales autorisées afin de maximiser les dividendes distribués.

Pour l'analyse de sensibilité du changement des bornes de la commande sur la valeur de la fonctionnelle et sur la commande optimale, un ensemble de valeur de $D_{\max}$ est pris en considération : exp2) $D_{\max} = 2$; exp3) $D_{\max} = 3$; exp4) $D_{\max} = 7$; exp5)$D_{\max} = 10$. Les résultats pour les différentes valeurs de $D_{\max}$ sont donnés dans le tableau suivant :

D_{max}	La commande ε-optimale	$k(t*)$	V(D,t*)
2	$u(t) = 2$ sur $[0,\ 10]$.	73.8664	15.7388
3	$u(t) = 0$ sur $[0,\ 1.492]$; $u(t) = 3$ sur $[1.492,\ 10]$.	70	19.2948
7	$u(t) = 0$ sur $[0,\ 4.711]$; $u(t) = 4.0516$ sur $[4.711,\ 4.712]$; $u(t) = 7$ sur $[4.712,\ 10]$.	70	25.6838
10	$u(t) = 0$ sur $[0,\ 5.8178]$; $u(t) = 2.9357$ sur $[5.8178,\ 5.8278]$; $u(t) = 10$ sur $[5.8278,\ 10]$.	70	28.1607

TABLE 4.1: Résultats des scénarios d'exécution

La représentation graphique de la commande ε-optimale pour chaque valeur de D_{max} est :

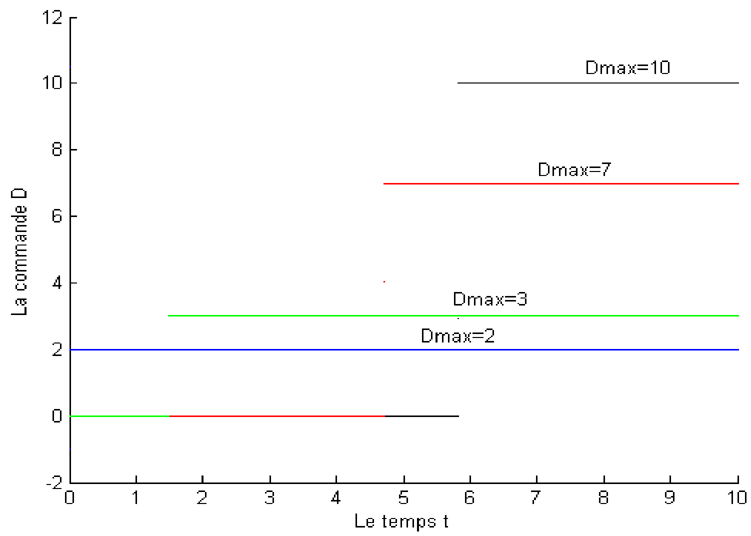

FIGURE 4.4: les commandes ε-optimales.

L'évolution de la fonctionnelle dans le temps pour chaque valeur de D_{max} est représentée sur le figure suivante :

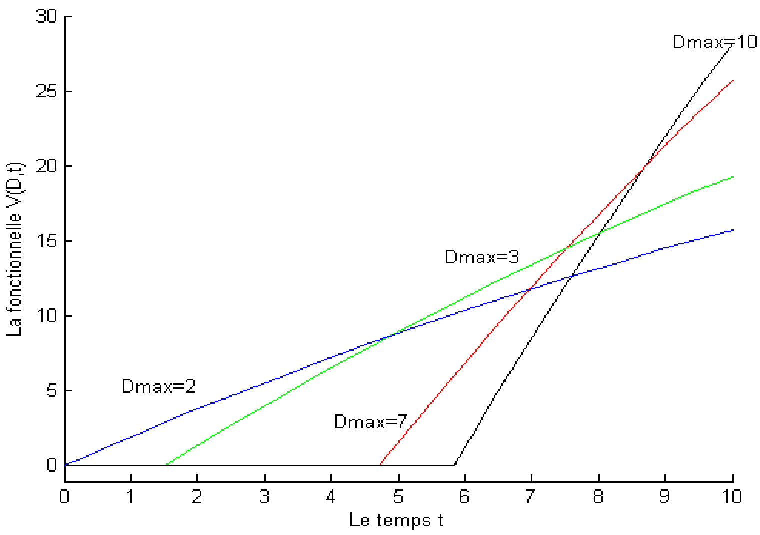

FIGURE 4.5: L'évolution des fonctionnelles.

Ces résultats montrent que plus la valeur de D_{max} est grande, plus l'instant de commutation de la commande est plus important ; en effet, les actionnaires vont profiter du taux de rendement que l'entreprise offre.
A partir des résultats obtenus, nous remarquons qu'un accroissement positif de D_{max} conduit à une valeur plus importante des dividendes distribués jusqu'à l'instant t^*. Ainsi, la fonctionnelle $V(D, t^*)$ est une fonction croissante du D_{max}.

4.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté en premier lieu la résolution du modèle de la trésorerie avec le principe du maximum de Pontriaguine. Les résultats montrent que la solution optimale dépend d'une manière directe du vecteur adjoint et de la valeur de commission de courtier.

En second lieu, nous avons présenté les résultats du modèle de firme avec la méthode adaptée. Ces résultats montrent que la décision optimale pour l'entreprise est de réinvestir les dividendes jusqu'à une date donnée, puis de les distribuer à leurs valeurs maximales autorisées jusqu'à l'instant t^*. De plus, nous avons remarqué que la fonctionnelle $V(D, t^*)$

est une fonction croissante de D_{max} (valeur maximale des dividendes autorisés à chaque instant).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le problème essentiel pour un service de finance au niveau d'une entreprise est l'élaboration des plans de financement, d'investissement ainsi que les flux de sa trésorerie, afin d'optimiser la valeur de l'entreprise. C'est pour cela que l'utilisation des modèles de contrôle optimal s'avère primordiale.

L'objectif principal de ce mémoire est de faire tout d'abord une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en économie financière, et ensuite d'appliquer une méthode de contrôle optimal, dite adaptée, à des problèmes de finance d'entreprise. Pour cela, dans le premier chapitre nous avons présenté l'essentiel de la gestion financière de l'entreprise, qui s'articule sur la préparation et l'élaboration des décisions de financement et d'investissement pour optimiser la valeur future de l'entreprise.

Dans le second chapitre, nous avons fait une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise. Nous avons présenté des modèles qui traitent des différentes problématiques financières d'une entreprise. Ainsi, en premier lieu nous avons discuté un modèle proposé par Sethi et al. [65], qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat des actions afin de maximiser la valeur finale de ces excédents. Puis, nous avons exposé un modèle de financement optimal d'entreprise proposé par Krouse et Lee [49], qui répond à la problématique de choix entre le financement des investissements par les capitaux externes ou par les dividendes non distribués. Finalement, nous avons présenté un modèle dynamique de firme qui cherche à maximiser la valeur des capitaux propres et les dividendes distribués, tout en prenant en compte les facteurs économiques et les décisions financières.

En s'inspirant de la méthode adaptée, développée par R. Gabassov et F. M. Kirillova et les travaux de M. O. Bibi [7,10], nous avons mis au point une nouvelle méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal, avec une commande vectorielle, une fonctionnelle de Bolza, et des contraintes inégalités. Cela a pour objectif de résoudre certains modèles financiers présentés dans le deuxième chapitre.

Les résultats numériques de certains problèmes sont présentés dans le dernier chapitre. Après avoir présenté la résolution du modèle de la trésorerie avec le principe du maximum de Pontriaguine, nous illustrons l'analyse de sensibilité d'un modèle de firme, où nous avons implémenté sous Matlab l'algorithme de la méthode adaptée. Les exemples considéré montrent que la décision optimale pour l'entreprise est de réinvestir les dividendes jusqu'à une date donnée, puis de les distribuer à leurs valeurs maximales autorisées jusqu'à l'instant t^*. De plus, nous avons remarqué que la fonctionnelle $V(D, t^*)$ est une fonction croissante de la borne maximale des dividendes distribués.

En guise de perspectives, nous proposons les directions de recherche suivantes :
- Comparer cet algorithme avec d'autres méthodes telles que la méthode de tir
- Développer des approches pour un meilleur choix du support initial et des paramètres de l'algorithme.
- Étendre cette méthode, afin de résoudre les autres modèles présentés dans le deuxième chapitre.
- Étendre cette étude pour d'autres modèles financiers en microéconomie et en macroéconomie.

ANNEXE A

MÉTHODE ADAPTÉE DE PROGRAMMATION LINÉAIRE AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode adaptée développée par R. Gabassov et F.M.Kirillova pour un problème de programmation linéaire avec contraintes inégalités. Cette méthode est une généralisation de la méthode du simplexe. Elle utilise une métrique différente de celle du simplexe, dite adaptée, qui consiste à considérer tous les indices non optimaux en fonction desquels on construit une direction d'amélioration de la fonction objectif, et le pas le long de cette direction.

A.1 Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} Z(x) = c'x \longrightarrow \text{ Max}, \\ b^- \leq Ax \leq b^+, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases} \tag{A.1}$$

où c, x, d^-, d^+ sont des vecteurs de dimension n ;
b^-, b^+ sont des vecteurs de dimension m ;
A est une matrice d'ordre $(m \times n)$, avec $rangA = m < n$.

Définissons les ensemble d'indices suivants :
$I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$;
$J = J_B \cup J_N$, $J_B \cap J_N = \emptyset$, $I = I_B \cup I_N$, $I_B \cap I_N = \emptyset$, $|I_B| = |J_B| \leq m$.
Nous pouvons alors écrire et fractionner les vecteurs de la manière suivante :
$d^- = d^-(J) = (d_j^-, j \in J)$, $d^+ = d^+(J) = (d_j^+, j \in J)$;
$b^- = b^-(J) = (b_j^-, j \in J)$, $b^+ = b^+(J) = (b_j^+, j \in J)$;
$x = x(J) = (x_j, j \in J), x = (\frac{x_B}{x_N}), x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B), x_N = x(J_N) = (x_j, j \in J_N)$;
$c = c(J) = (c_j, j \in J), c = (\frac{c_B}{c_N}), c_B = c(J_B) = (c_j, j \in J_B), c_N = c(J_N) = (c_j, j \in J_N)$;

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a_i', i \in I), \text{ où } a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}.$$

Appelons l'ensemble I_B pour lequel les vecteurs a_i', $i \in I_B$, sont linéairement indépendants, ensemble de travail, et notons $A(I_B, J)$ la matrice correspondante.
Une contrainte d'indice $i \in I$, est dite active au point x si l'une des égalités suivantes est vérifiée :

$$a_i'x = b_i^- \text{ ou } a_i'x = b_i^+. \tag{A.2}$$

Construisons alors l'ensemble d'indices des contraintes actives au point x noté $I_a = I_a^- \cup I_a^+$, avec :

$$I_a^- = \{i, a_i'x = b_i^-\}, \tag{A.3}$$

$$I_a^+ = \{i, a_i'x = b_i^+\}. \tag{A.4}$$

Un vecteur x vérifiant les contraintes $b^- \leq Ax \leq b^+$ et $d^- \leq x \leq d^+$ est appelé plan ou solution réalisable du problème (A.1).
Un plan x^0 est dit optimal si $Z(x^0) = c'x^0 = \max c'x$, où x est pris parmi tous les plans du problème (A.1).
D'autre part, un plan x^ϵ est appelé ϵ-optimal ou suboptimal si :

$$Z(x^0) - Z(x^\epsilon) = c'x^0 - c'x^\epsilon \leq \epsilon,$$

où x^0 est une solution optimale et ϵ un nombre positif ou nul choisi à l'avance.

Choisissons dans l'ensemble I le sous-ensemble I_B, et soit un sous-ensemble d'indices $J_B \in J$ tel que $|J_B| = |I_B| \leq m$. L'ensemble $Q_B = (I_B, J_B)$ est appelé support du

problème (A.1) si la sous-matrice $A_B = A(I_B, J_B)$ est inversible.
La paire $\{x, Q_B\}$ formé du plan x et du support Q_B est appelée plan de support ou bien solution réalisable de support.

Le plan de support $\{x, Q_B\}$ est dit non dégénéré si :

$$\begin{cases} d_j^- < x_j < d_j^+, \; j \in J_B, \\ b_i^- < a_i' x < b_i^+, \; i \in I_N = I \backslash I_B. \end{cases} \tag{A.5}$$

A.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, Q_B\}$ un plan de support et considérons un autre plan quelconque $\overline{x} = x + \triangle x$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\Delta Z = Z(\overline{x}) - Z(x) = c'\overline{x} - c'x = c'\Delta x. \tag{A.6}$$

Définissons le vecteur des potentiels u donné par :

$$u' = u'(I_B) = c_B' A_B^{-1}, \tag{A.7}$$

ainsi que le vecteur des estimations E donné par :

$$E' = E'(J) = u'A(I_B, \; J) - c', \tag{A.8}$$

où

$$E' = (E_B', E_N'), \text{ avec } \; E_B' = u'A_B - c_B' = 0.$$

En vertu des définitions (A.7) et (A.8), la formule d'accroissement (A.6) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta Z = c'\Delta x = & \; (u'A(I_B, \; J) - E')\,\Delta x \\ = & \; (u'A(I_B, \; J_N) - E'(J_N))\,\Delta x(J_N) + u'A_B \Delta x(J_B). \end{aligned} \tag{A.9}$$

Par ailleurs, on a

$$b^- \leq A\overline{x} \leq b^+ \Longrightarrow b^- - Ax \leq A\Delta x \leq b^+ - Ax. \tag{A.10}$$

Notons :

$$\delta^- = b^- - Ax,$$

$$\delta^+ = b^+ - Ax;$$

et

$$z(I_B) = A(I_B,\ J_B)\triangle x(J_B) + A(I_B,\ J_N)\triangle x(J_N), \tag{A.11}$$

avec

$$\delta^-(I_B) \leq z(I_B) \leq \delta^+(I_B). \tag{A.12}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\triangle x(J_B) = A_B^{-1} z(I_B) - A_B^{-1} A(I_B, J_N)\triangle x(J_N). \tag{A.13}$$

Grâce à ces notations, l'accroissement (A.9) devient :

$$\Delta Z = -E'(J_N)\Delta x(J_N) + u' z(I_B). \tag{A.14}$$

A.3 Estimation de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$ d'un plan de support quelconque $\{x, Q_B\}$, remplaçons dans la formule d'accroissement (A.13) le vecteur $\overline{x}$ par x^0, et majorons la valeur de l'expression (A.13).

$$\begin{aligned} Z(x^0) - Z(x) = &\ - E'(J_N)(x^0(J_N) - x(J_N)) + u' z^0(I_B) \\ = &\sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0) + \sum_{u_i > 0, i \in I_B} u_i z_i^0 + \sum_{u_i < 0, i \in I_B} u_i z_i^0 \end{aligned}$$

avec $z^0(I_B) = A(I_B,\ J_B)(x^0(J_B) - x(J_B)) + A(I_B,\ J_N)(x^0(J_N) - x(J_N))$.
Puisque le plan optimal x^0 vérifie $d_j^- \leq x_j^0 \leq d_j^+,\ \forall j \in J$, il en résulte que :

$$x_j - x_j^0 \leq x_j - d_j^-,$$
$$x_j - x_j^0 \geq x_j - d_j^+,$$

d'où

$$E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - d_j^-), \quad \text{si } E_j > 0,$$
$$E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - d_j^+), \quad \text{si } E_j < 0.$$

En outre, d'après la relation (A.12) on a :

$$\delta_i^- \leq z_i^0 \leq \delta_i^+,\ i \in I_B,$$

d'où

$$\begin{cases} u_i z_i^0 \leq u_i \delta_i^+, & \text{si} \;\; u_i > 0, \\ u_i z_i^0 \leq u_i \delta_i^-, & \text{si} \;\; u_i < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient une majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$, qui est donnée par :

$$Z(x^0) - Z(x) \leq \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) + \sum_{u_i > 0, i \in I_B} u_i \delta_i^+ + \sum_{u_i < 0, i \in I_B} u_i \delta_i^-. \tag{A.15}$$

Le nombre $\beta(u, Q_B)$ défini par (A.16), est appelé estimation de suboptimalité du plan de support $\{x, Q_B\}$:

$$\beta(x, Q_a) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) + \sum_{u_i < 0, i \in I_B} u_i \delta_i^- + \sum_{u_i > 0, i \in I_B} u_i \delta_i^+. \tag{A.16}$$

A.4 Critère d'optimalité et de suboptimalité

Donnons les deux théorèmes suivants :

Théorème A.1[1]

Soit $\{x, Q_B\}$ un plan de support du problème (A.1). Alors les relations

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si} \;\; x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & \text{si} \;\; x_j = d_j^+, \\ E_j = 0, & \text{si} \;\; d_j^- < x_j < d_j^+, \quad j \in J_N; \\ u_i \geq 0, & si \;\; a_i' x = b_i^+, \\ u_i \leq 0, & si \;\; a_i' x = b_i^-, \\ u_i = 0, & si \;\; b_i^- < a_i' x < b_i^+, \quad i \in I_B. \end{cases} \tag{A.17}$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan x, et ces mêmes relations sont aussi nécessaires dans le cas où le plan de support $\{x, Q_B\}$ est non dégénéré.

1. R.Gabassov, F.M.Kirillova. Méthodes de la programmation linéaire, Partie 3, université de minsk, 1980.

Théorème A.2 **(Condition suffisante de suboptimalité)**

Soit $\{x, Q_B\}$ un plan de support du problème (A.1), et $\varepsilon \geq 0$ un nombre positif arbitraire. Si $\beta(x, Q_B) \leq \varepsilon$, alors le plan x est suboptimal(ε-optimal).

A.5 Algorithme de la méthode

Étant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ε et un plan de support initial $\{x, Q_B\}$, le but de l'algorithme est alors de construire un plan ε-optimal x^ϵ ou carrément un plan optimal x^0.
Une itération de la méthode adaptée se base sur le principe de diminution de l'estimation de suboptimalité. En d'autres termes, elle consiste à faire le passage de $\{x, Q_B\}$ à $\{\overline{x}, \overline{Q}_B\}$ tel que $\beta(\overline{x}, \overline{Q}_B) < \beta(x, Q_B)$.
Ainsi, ce principe se réalise en deux procédures :i)changer la solution réalisable x par $\overline{x}$ de manière à diminuer la mesure de non optimalité du plan, $\beta(\overline{x}) \leq \beta(x)$; ii) changer le support Q_B par $\overline{Q}_B$ de telle sorte que la mesure de non optimalité du support sera diminué $\beta(\overline{Q}_B) \leq \beta(Q_B)$, où $\beta(x, Q_B) = \beta(\overline{Q}_B) + \beta(Q_B)$.

A.5.1 Changement du plan

Construisons le nouveau plan $\overline{x}$ de la manière suivante :

$$\overline{x} = x + \theta l,$$

où l est la direction d'amélioration, et $\theta \geq 0$ le pas le long de cette direction.

A.5.1.1 Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Considérons la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \ \ j \in J_N. \tag{A.18}$$

Cette métrique dépend du plan courant x, et de ce fait, elle est dite adaptée.
Les composantes (A.18) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non basiques.

Ainsi, en tenant compte de la métrique (A.18), l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les valeurs des composantes non basiques suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0, \qquad \text{pour } j \in J_N. \end{cases} \tag{A.19}$$

En outre, l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les composantes basiques calculées par la formule :

$$A(I_B, J)l = \delta, \tag{A.20}$$

où δ est donné par :

$$\delta_i = \begin{cases} \delta_i^- & \text{si } u_i < 0, \\ \delta_i^+ & \text{si } u_i > 0, \\ 0 & \text{si } u_i = 0, \qquad \text{pour } i \in I_B. \end{cases} \tag{A.21}$$

Ainsi, nous aurons :

$$l(J_B) = A_B^{-1}\delta(I_B) - A_B^{-1}A(I_B, J_N)l(J_N). \tag{A.22}$$

A.5.1.2 Calcul du pas maximal θ^0

Construisons un nouveau plan $\overline{x}$ sous la forme :

$$\overline{x} = x + \theta^0 l,$$

où l est la direction d'amélioration définie par (A.19) et (A.22) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction ; ce dernier se calcule de façon à ce que les contraintes directes et principales soient satisfaites pour $\overline{x}$, i.e, pour les contraintes directes on doit avoir :

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \ \ j \in J_B, \tag{A.23}$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N, \tag{A.24}$$

Des inégalités (A.19) et (A.24), nous déduisons que

$$\theta^0 \leq 1. \tag{A.25}$$

En outre, pour satisfaire les contrainte (A.23), on doit choisir θ^0 tel que :

$$\theta^0 \leq \theta_{j_1}, \qquad \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j. \tag{A.26}$$

où :

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_j} & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_j} & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \tag{A.27}$$

D'autre part, θ^0 doit vérifier les inégalités suivantes pour satisfaire les contraintes principales pour $\overline{x}$:

$$\delta_i^- \leq a_i'\theta l \leq \delta_i^+, \ i \in I_B, \tag{A.28}$$

$$\delta_i^- \leq a_i'\theta l \leq \delta_i^+, \ i \in I_N. \tag{A.29}$$

De (A.20), on voit bien que l'inégalité (A.28) est vérifiée pour $\theta^0 \leq 1$.
Ainsi, il reste à satisfaire les contraintes (A.29). Pour cela, nous choisissons θ_0 de la manière suivante :

$$\theta^0 \leq \theta_{i_1}, \qquad \theta_{i_1} = \min_{i \in I_H} \theta_i, \tag{A.30}$$

où :

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{\delta^+}{a_i'l} & \text{si } a_i'l > 0, \\ \frac{\delta^-}{a_i'l} & \text{si } a_i'l < 0, \\ \infty & \text{si } a_i'l = 0. \end{cases} \tag{A.31}$$

De (A.25), (A.26) et (A.30), la valeur θ^0 sera choisie par la relation $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{i_1}\}$. Ce choix va nous assurer que lors du déplacement le long de la direction l, les contraintes (A.28), (A.29), (A.23) et (A.24) ne seront pas violées, i.e, il va nous garantir l'admissibilité du nouveau plan $\overline{x}$. Dans ce cas, l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(\overline{x})$ sera majoré comme suit :

$$Z(x^0) - Z(\overline{x}) = c'x^0 - c'\overline{x} = c'x^0 - c'x - \theta^0 c'l \leq \beta(x, Q_B) - \theta^0 c'l, \tag{A.32}$$

de plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_B) - \theta^0 c'l &= \beta(x, Q_B) - \theta^0(u'A(I_B, J)) - E')l(J) \\ &= \beta(x, Q_B) + \theta^0(E'l - u'\delta(I_B)) \\ &= \beta(x, Q_B) - \theta^0\beta(x, Q_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, Q_B). \end{aligned}$$

Finalement, nous aurons :

$$Z(x^0) - Z(\overline{x}) \leq (1 - \theta^0)\beta(x, Q_B). \tag{A.33}$$

De là, trois cas peuvent se présenter :

- $\theta^0 = 1$:le plan $\overline{x} = x + l$ vérifie le critère d'optimalité, il est donc optimal et le processus de résolution du problème (A.1) est donc terminé;
- $(1 - \theta^0)\beta(x, Q_B) \leq \varepsilon$: le plan $\overline{x}$ est donc ε-optimal (suboptimal) et le processus de résolution du (A.1) peut être arrêté
- $(1 - \theta^0)\beta(x, Q_B) > \varepsilon$: on abordera la procédure du changement de support.

A.5.2 Changement de support

Afin d'améliorer la mesure de non optimalité du support $\beta(Q_B)$, construisons une itération de la méthode duale de support.
Introduisons le problème dual du problème (A.1) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = b^{+'}s - b^{-'}t - d^{-'}v + d^{+'}w \longrightarrow \min, \\ A'y - v + w = c, \\ s - t - y = 0, \\ s \geq 0, t \geq, v \geq, w \geq . \end{cases} \tag{A.34}$$

A cet effet, faisons correspondre au plan de support $\{x, Q_B\}$, un coplan $\delta = E$ et un plan dual $\lambda(y, s, t, v, w)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} y(I_B) = u, \ y(I_N) = 0, & \\ s_i = y_i, t_i = 0, & si \ y_i \geq 0, \\ s_i = 0, t_i = -y_i, & si \ y_i < 0, \ i \in I; \\ v_j = E_j, w_j = 0, & si \ E_j \geq 0, \\ v_j = 0, w_j = -E_j, & si \ E_j < 0, j \in J. \end{cases} \tag{A.35}$$

On fera remarquer que le plan dual λ et son coplan correspondant $\delta = E$ dépend uniquement du support Q_B.
Montrons alors que l'estimation de suboptimalité se décompose ainsi :

$$\beta(x, Q_B) = \beta(x) + \beta(Q_B), \tag{A.36}$$

avec

$$\beta(x) = c'x^0 - c'x, \tag{A.37}$$

$$\beta(Q_B) = L(\lambda) - L(\lambda^0) = b^{+'}s - b^{-'}t - d^{-'}v + d^{+'}w - b^{+'}s^0 + b^{-'}t^0 + d^{-'}v^0 - d^{+'}w^0, \tag{A.38}$$

où x^0 et $\lambda^0 = (y^0, s^0, t^0, v^0, w^0)$ sont des solutions optimales du problème (A.1) et (A.34) respectivement.
Grâce aux relations (A.35), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_a) = & \sum_{j \in J} E_j x_j - \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j d_j^- - \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j d_j^+ - \sum_{i \in I_B} u_i a_i' x + \sum_{u_i > 0, i \in I_B} u_i b_i^+ \sum_{u_i < 0, i \in I_B} u_i b_i^- + \\ = & [u'A(I_B, J) - c']x - d^{-'}v + d^{+'}w - u'A(I_B, J)x + b^{+'}s - b^{-'}t \\ = & - c'x - d^{-'}v + d^{+'}w + b^{+'}s - b^{-'}t. \end{aligned}$$

De la relation $Z(u^0) = L(\lambda^0)$, la valeur de suboptimalité peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned}\beta(x, Q_a) &= -c'x - d^{-'}v + d^{+'}w + b^{+'}s - b^{-'}t + Z(u^0) - L(\lambda^0)\\ &= (c'x^0 - c'x) + (b^{+'}s - b^{-'}t - d^{-'}v + d^{+'}w - b^{+'}s^0 + b^{-'}t^0 + d^{-'}v^0 - d^{+'}w^0)\\ &= \beta(x) + \beta(Q_B).\end{aligned}$$

Ainsi, pour diminuer la valeur de $\beta(Q_B)$, effectuons une itération de la méthode duale de support, en construisant une nouvelle solution réalisable $\overline{\lambda}$ avec son coplan $\overline{\delta}$ correspondant d'une manière à avoir $\beta(\overline{Q}_B) \leq \beta(Q_B)$.
En effet, les changements de support se produisent de la manière suivante :

– Pour $\theta^0 = \theta_{i_1} < 1$, on posera :

$$\alpha = a'_{i_1} l, \tag{A.39}$$

et

$$\sigma^0 = \min\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}, \tag{A.40}$$

avec :

$$\sigma_{i_0} = min\{\sigma_i, i \in I_B\}; \tag{A.41}$$

et

$$\sigma_{j_0} = min\{\sigma_j, j \in J_N\}. \tag{A.42}$$

Les quantités $\sigma_j,\ \sigma_i$ sont données par :

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j}{z_j} & \text{si } E_j z_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0, z_j > 0, x_j \neq d_j^-, \text{ ou bien} \\ & \quad E_j = 0, z_j < 0, x_j \neq d_j^+,\ j \in J_N; \\ \infty & \text{sinon;} \end{cases} \tag{A.43}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{-u_i}{z_i}, & \text{si } u_i z_i < 0, \\ 0, & \text{si } u_i = 0, z_i > 0, i \in I_a^+, \text{ ou bien} \\ & u_i = 0, z_i < 0, i \in I_a^-,\ i \in I_B, \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{A.44}$$

où :

$$z'(J_N \cup I_B) = ke'_{i_1}\{A(I_N, J_N) - A(I_N, J_B)A_B^{-1}A(I_B, J_N),\ -A(I_N, J_B)A_B^{-1}\}, \tag{A.45}$$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{si } a'_{i_1}\overline{x} = b_{i_1}^+, \\ -1, & \text{si } a'_{i_1}\overline{x} = b_{i_1}^-, \end{cases} \tag{A.46}$$

et e_{i_1} est un vecteur unitaire dont la composante i_1 vaut 1.

– Pour $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, on posera :

$$\alpha = l_{j_1}. \tag{A.47}$$

Construisons les quantités σ^0, σ_i et σ_j de la même manière que le cas précédent, avec

$$z'(J_N \cup I_B) = ke'_{j_1}\{A_B^{-1}A(I_B, J_N),\ A_B^{-1}\}, \tag{A.48}$$

avec :

$$k = \begin{cases} 1, & \text{si } \overline{x_j} = d^-_{j_1}, \\ -1, & \text{si } \overline{x_j} = d^+_{j_1}\ ; \end{cases} \tag{A.49}$$

et e_{j_1} est un vecteur unitaire dont la composante j_1 vaut 1.

Pour la construction du nouveau support, considérons les quatre cas suivants :

1. Pour $\theta^0 = \theta_{i_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{i_0}$, nous construisons un nouveau support $\overline{Q}_B$ avec :

$$\overline{I}_B = (I_B \setminus i_0) \cup i_1,\ \overline{J_B} = J_B; \tag{A.50}$$

2. Pour $\theta^0 = \theta_{i_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, le nouveau support sera $\overline{Q}_B$:

$$\overline{I}_B = I_B \cup i_1,\ \overline{J_B} = J_B \cup j_0; \tag{A.51}$$

3. Pour $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{i_0}$, le nouveau support devient :

$$\overline{I}_B = I_B \setminus i_0,\ \overline{J_B} = J_B \setminus j_1; \tag{A.52}$$

4. Pour $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, le nouveau support devient :

$$\overline{I}_B = I_B,\ \overline{J_B} = (J_B \setminus j_1) \cup j_0. \tag{A.53}$$

Ce changement de support va nous donner une autre majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(\overline{x})$:

$$Z(x^0) - Z(\overline{x}) \leq \overline{\beta} = (1 - \theta^0)(\beta(x, Q_B) - \sigma^0|\alpha|), \tag{A.54}$$

où

$$\alpha = \begin{cases} a'_{i_1}l, & si\ \theta^0 = \theta_{i_1}, \\ l_{j_1}, & si\ \theta^0 = \theta_{j_1}. \end{cases} \tag{A.55}$$

Ainsi, si $\overline{\beta} \leq \varepsilon$, le plan $\overline{x}$ est ε-optimal, donc on arrête l'algorithme. Par ailleurs, si $\overline{\beta} > \varepsilon$, nous recommençons une nouvelle itération avec le couple $\{\overline{x}, \overline{Q}_B\}$.

Conclusion

La méthode que nous avons présentée a la particularité de tenir compte des spécificités des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leur modélisation première.
Cette méthode se base sur deux procédures essentielles :i)changer la solution réalisable x par $\overline{x}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité du plan, $\beta(\overline{x}) \leq \beta(x)$; ii) changer le support Q_B par $\overline{Q_B}$ de telle sorte que la mesure de non optimalité du support sera diminuée. En outre, elle utilise une métrique dite adaptée pour la direction d'amélioration, sa particularité étant le fait de changer tous les indices non optimaux à la fois.

GLOSSAIRE

Actif :
Votre actif correspond à tout ce qui vous appartient. C'est l'ensemble de vos avoirs. Il peut s'agir de l'argent que vous détenez dans un compte d'épargne, de biens personnels, de placements, d'immeubles, etc.

Action :
Les actions sont émises par les sociétés et elles représentent une part de propriété.

Actualisation :
Méthode de calcul qui permet de trouver la valeur présente de flux financiers futurs.

Amortissement :
Diminution comptable de la valeur de certains biens, due à l'usure. L'amortissement réduit le bénéfice d'une société, mais ne constitue pas une sortie de fonds et ne diminue donc pas les liquidités d'une société.

Cash-flow :
Flux de trésorerie, c'est un mouvement d'entrée ou de sortie de liquidités.

Capitaux propres :
Les capitaux propres sont les capitaux accumulés par l'entreprise elle-même et restant à sa disposition à moyen et long terme.

Coupon :
Désigne le montant d'intérêts versés périodiquement par l'émetteur d'une obligation.

Courtier :
Une société de courtage ou courtier est une entreprise ou une personne jouant un rôle d'intermediation sur les marchés.

Créance :
Droit que détient une personne dite le créancier à l'encontre d'une autre personne dite le débiteur qui lui doit la fourniture d'une prestation.

Créancier :
Le créancier d'une entreprise est une personne détenant un titre de dette sur l'entreprise.

Découvert bancaire :
Destiné à couvrir les décalages de trésorerie à court terme ; il est l'outil d'ajustement essentiel des trésoriers d'entreprise.

Dividende :
Part des bénéfices que les entreprises redistribuent à leurs actionnaires. La détention d'actions donne donc le droit de recevoir une rémunération si l'entreprise est bénéficiaire.

Emplois :
Les emplois d'exploitation sont constitués par l'ensemble des charges d'exploitation contractées non encore consommées ou vendues (stocks), et par l'ensemble des ventes non encore payées (encours clients).

Facteurs de production :
Un facteur de production est un élément qui participe au processus de production et permet la création de biens ou de services.

Fonction de production :
Fonction mathématique reliant la quantité produite aux quantités des différents facteurs utilisés et combinés pour l'obtenir.

Investissement :
Un investissement est une dépense ayant pour but de modifier durablement le cycle d'exploitation de l'entreprise. Investir revient en effet pour celui qui s'y décide à renoncer à une consommation immédiate pour accroître ses recettes futures.

Obligation :
Titre représentatif d'une part d'une créance émise par une entreprise ou un organisme public, et négociable sur le marché.

Ressources :
On appelle ressources l'ensemble des éléments qui vont permettre d'engager les emplois dans le cycle d'exploitation.

Solvabilité :
La solvabilité traduit l'aptitude de l'entreprise à faire face à ses engagements en cas de liquidation.

Vente à découvert :
La vente à découvert consiste à emprunter un titre contre le versement d'un intérêt, le vendre puis attendre la baisse effective pour le racheter et le rendre à son prêteur en ayant donc réalisé un profit. Cela consiste donc à parier que le prix d'une action va baisser.

Volatilité :
Mesure de l'amplitude des variations des cours d'un actif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aidene M. and Louadj K. *Optimization of a Problem of Optimal Control with Free Initial State.* -Applied Mathematical Sciences, 2010, 4(5) :201 - 216.

[2] Archer S. H. *A Model for the Determination of Firm Cash Balances.* -Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1966, 1(1) :1 - 11.

[3] Bancel F. and Richard A. *Le Choix d'Investissement.* -Economica, paris, 2004.

[4] Baumol W. J. *The Transactions Demand for Cash : an Inventory Theoretic Approach.* -The Quarterly Journal of Economics, 1952, 66(4) :545-556.

[5] Beffy P. O. *Initiation à l'Economie.* -De Boeck, Paris, 2008.

[6] Bergounioux M. *Optimisation et Contrôle des Systèmes Linéaires.* -Dunod, Paris, 2001.

[7] Bibi M. O. *Support Method for Solving a Linear-Quadratic Problem with Polyhedral Constraints on Control.* -Optimization, 1996, 37 :139 - 149.

[8] Bibi M. O. *Cours de Post-Graduation sur le Contrôle Optimal.* -Université de Béjaia, 2008.

[9] Bibi M. O. *Cours de Post-Graduation sur la Méthode Adaptée de Programmation Linéaire.* -Université de Béjaia, 2008.

[10] Bibi M. O. *Méthode de Résolution d'un Problème Linéaire-Quadratique de Commande Optimale Multivariable.* -Acte du Premier Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingenieur, 1996, 37 :97-102.

[11] Bhattacharyya S. P., Datta A. and Keel L. H. *Linear Control Theory : Structure, Robustness, and Optimization.* -CRC Press, New York, 2009.

[12] Bonnans F. and Rouchon P. *Commande et Optimisation de Systèmes Dynamiques.* -Ecole Polytechnique, Paris, 2005.

[13] Bruslerie H. *Analyse Financière et Risque de Crédit*. -Presses Universitairs de Grenoble, 2008.

[14] Capinski M. and Zastawniak T. *Mathematics for Finance : An Introduction to Financial Engineering*. -Springer-Verlag, London, 2003.

[15] Carluer F. *Leçons de Microéconomie*. -Dunod, Paris, 1999.

[16] Charreaux G. *Finance d'Entreprise*. -Ems, Paris, 2000.

[17] Chen P. and Islam M. N. *Optimal Control Models in Finance : A New Computational Approach*. -Springer, Boston, 2005.

[18] Conso F. and Hemici F. *Gestion Financière de l'Entreprise*. Dunod, Paris, 1999.

[19] Corhay A. and Mbangala M. *Fondements de la Gestion Financière : Manuel et Applications*. -Université de Liège, 2008.

[20] Cornuejols G. and Tütüncü R. *Optimization Methods in Finance*. -Carnegie Mellon University, Pittsburg, 2006.

[21] Craven B. D. *Control and Optimization*. -Chapman and Hall, London, 1995.

[22] Davis B. E. *Investment and Rate of Return for the Regulated Firm*. -The Bell Journal of Economics and Management Science, 1970, 1 :245 - 270.

[23] Davis B. E. and Elzinga D. J. *The Solution of an Optimal Control Problem in Financial Modeling*. -Operations Research, 1970, 19 :1419 - 1433.

[24] Delahaye J. and Delahaye F. *Finance d'Entreprise : Manuel et Applications*. -Dunod, Paris, 2007.

[25] Delienne A. N. and Khath S. *Gestion de Trésorerie*. -Economica, Paris,2005.

[26] Dmitruk M. N. *Optimization of Dynamics of the Firm*. -Modeling and Control of Economic Systems, 2001, 3 :234-248.

[27] Dmitruk M. N. and Gabasov R. *The Optimal Policy of Dividends, Investments, and Capital Distribution for the Dynamic Model of a Company*. -Automation and Remote Control, 2001, 62(8) :1349-1365.

[28] Gabassov R. and Kirillova F. M. *Méthodes de Programmation Linéaire*. P.II : -BGU, Minsk, 1978.

[29] Gabassov R. and Kirillova F. M. *Méthodes de Programmation Linéaire*. P.III : -BGU, Minsk, 1980.

[30] Gabassov R. and Kirillova F. M. *Constructive Theory of Extrémal problems*. -University Press, Minsk, 1984.

[31] Gabassov R. and Kirillova F. M. *Constructive Methods of Optimization* . P.II : Control Problems. -University Press, Minsk, 1984.

[32] Gabassov R. and Kirillova F. M. *Real-Time Optimal Control and Observation.* -Journal of Computer and Systems Sciences International, 2006, 45(3) :421–441.

[33] Gabassov R., Kirillova F. M. and Balashevich N. V. *Numerical Methods for Open-Loop and Closed-Loop Optimization of Linear Control Systems.* -Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2000, 40(6) : 799–819.

[34] Gabassov R., Kirillova F. M. and Balashevich N. V. *Open-Loop and Closed-Loop Optimization of Linear Control Systems.* -Asian Journal of Control, 2000, 2(3) :155-168.

[35] Gabassov R., Kirillova F.M. and Balashevich N. V. *Optimal Controller for a Time-Dependent System.* -Doklady Mathematics, Minsk, 2001, 64(3) :439–444.

[36] Gabassov R., Kirillova F. M. and Balashevich N. V. *Optimal Control of Linear Systems with Delay.* -Doklady Mathematics, Minsk, 2006, 74(2) :780–785.

[37] Gabassov R., Kirillova F. M. And Kostyukova O. I. *A Method of Solving General Linear Programming.* -Doklady Mathematics, Minsk, 1979, 23(03) :197 - 200.

[38] Gabassov R., Kirillova F. M. and Pavlenok N. S. *Optimal Control by Dynamic Controllers.* -Automation and Remote Control, 2004, 65(5) :693–711.

[39] Gabassov R., Kirillova F. M. and Pavlenok N. S. *Optimal Observation and Control in Linear Systems.* -Journal of Mathematical Sciences, 2006, 139(5).

[40] Gabassov R., Kirillova F. M. and Pavlenok N. S. *Constructing Open-Loop and Closed-Loop Solutions of Linear–Quadratic Optimal Control Problems.* -Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2008, 48(10) : 1715–1745.

[41] Gabassov R., Kirillova F. M. and Prischepova S. V. *Optimal Feedback Control.* -Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[42] Gabassov R., Kirillova F. M. and Paulianok N. S. *Optimal Control of Linear Systems on Quadratic Performance Index.* -Appl. Comput. Math. 2008, 7(1) :4-20.

[43] Gabassov R., Kirillova F. M. and Ruzhitskaya E. A. *Design of Feedback for Systems Executing a Given Motion.* -Automation and Remote Control, 2003, 64(8) :1225-1236.

[44] Gaugain M. and Crambert R. S. *Gestion de la Trésorerie.* -Economica, Paris, 2004.

[45] Guerard J. B. and Schwartz E. *Quantitative Corporate Finance.* -Springer, London, 2007.

[46] Hendricks E., Jannerup O. and Sorensen P. H. *Linear Systems Control.* -Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[47] Khoury N. T. *Gestion des disponibilités.* -Presses Université Laval, 1975.

[48] Kohli U. *Analyse Macroéconomique.* -De Boeck, Paris, 1999.

[49] Krouse C. G. and Lee W. Y. *Optimal equity financing of the corporation.* -The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1973, 8(3) :539 - 563.

[50] Miller M. and Orr. D. *A Model of The Demand for Money by Firms.* -The Quarterly Journal Of Economics, 1966, 80(3) :413-435.

[51] Modligliani F. and Miller M. H. *The Cost of Capital, Corporation Finance, and The Theory of Investment.* -American Economic Review,1958, 48 :261 - 297.

[52] Modligliani F. and Miller M. H. *Corporation Income Taxes and The Cost of Capital.* -American Economic Review, 1961, 53 :433 - 443.

[53] Montoussé M. and Waquet I. *Microéconomie, introduction à l'économie.* -Bréal, Paris, 2008.

[54] Muet P. A. *Les Modèles Néoclassiques et l'Impact du Taux d'Intérêt sur l'Investissement : un Essai de Synthèse.* -Revue Économique, 1979, 30(2) :244 - 280.

[55] Najim K. *Control of Continuous Linear Systems.* -ISTE Ltd, London, 2006.

[56] Perez R. *Décisions Financières et Valeur de l'Entreprise. Deux Approches Néoclassiques Alternatives.* -Revue Économique, 1971, 22(5) :792 - 811.

[57] Pettit R. *Strategic Corporate Finance :Applications in Valuation and Capital Structure.* -John Wiley and Sons, New Jersey, 2007.

[58] Pham H. *Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.* -Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[59] Pontryaguine L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V. and Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* -John Wiley and Sons, New Jersey, 1962.

[60] Pytlak R. *Numerical Methods for Optimal Control Problems with State Constraints.* -Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[61] Sethi S. P. *A Note on a Planning Horizon Model of Cash Management.* -Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1971, 6(01) :659-664.

[62] Sethi S. P. *A Note on Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems.* -Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1973 , 8(04) :685-687.

[63] Sethi S. P. *A Note on Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problem : Errata.* -Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1978, 13(03) :585-586.

[64] Sethi S. P. *Optimal Equity and Financing Model of Krouse and Lee : Corrections and Extensions.* -The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1978, 13(3) :487 - 505.

[65] Sethi S. P., Bensoussan A. and Chutani A. *Optimal Cash Management Under Uncertainty.* -Operations Research Letters, 2009, 37 :425-429.

[66] Sethi S. P. and Thompson G. L. *Applications of Mathematical Control Theory to Finance : Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems*. -Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1970, 5(04) :381-394.

[67] Sethi S. P. and Thompson G. L. *Optimal Control Theory : Applications to Management Sciences and Economics*. -Springer, New York, 2006.

[68] Shiryaev A., Sarychev A. Guerra M. and Grossinho M. R. *Mathematical Control Theory and Finance*. -Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[69] Skogestad S. and Postlethwaite I. *Multivariable Feedback Control Analysis and design*. -John Wiley and Sons, New Jersey, 2005.

[70] Sun Z. and Shuzhi S. G. *Switched Linear Systems Control and Design*. -Springer-Verlag, London, 2005.

[71] Tapiero C. S. and Cocq A. L. *Investissements, Utilisation de Capacité Productive et Amortissements : Politiques Optimales*. -Revue économique, 1973, 442-459.

[72] Tirole J. *The Theory of Corporate Finance*. -Princeton University Press, 2006.

[73] Travers F. J. *Investment Manager Analysis :A Comprehensive Guide to Portfolio Selection, Monitoring, and Optimization*. -John Wiley and Sons, New Jersey, 2004.

[74] Trélat E. *Contrôle Optimal*. -Notes de Cours, Master de Mathématiques, Université d'Orléans, 2008.

[75] Vance D. E. *Financial Analysis and Decision Making : Tools and Techniques to Solve Financial Problems and Make Effective Business Decisions*. -McGraw-Hill, New York, 2003.

TABLE DES FIGURES

Résumé

Ce mémoire a pour premier objectif de faire une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, et de résoudre ensuite certains de ces modèles en appliquant une méthode de contrôle, dite méthode adaptée. Après avoir exposé l'essentiel de la gestion financière de l'entreprise, nous présentons des modèles de contrôle optimal qui décrivent les différents problèmes posés au niveau d'une entreprise.

Pour résoudre certains de ces modèles, nous avons élaboré une méthode pour la résolution d'un problème de contrôle optimal dans la forme de Bolza, avec des contraintes inégalités. Sa particularité réside dans le fait qu'elle évite toute transformation préliminaire du problème, et elle possède un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision désirée.

Mots clés : Finance d'entreprise, Décision financière, Contrôle optimal, Méthode de adaptée.

Abstract

The first objective of this report is to do a synthesis on optimal control models in corporate finance, and also to solve some of these models by applying a control method, called adaptive method. After recalling some fundamental concepts of corporate finance, we present the optimal control models that describe the various problems in a company.

To solve some of these models, we have developed a method for solving a problem of optimal control in Bolza form, with inequality constraints. The particularity of this method is the fact that it avoids the preliminary transformation of the problem, and he has a suboptimal criterion which stops the algorithm with the desired accuracy.

Keywords : Corporate finance, Financial decision, Optimal control, Adaptive method.