

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Abderrahmane MIRA – Béjaïa**

**Faculté de la Technologie**

Département de Génie Mécanique

Laboratoire de physique théorique

## **MEMOIRE**

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en  
Génie Mécanique

**Option :** Energétique et Rhéologie

Réalisé par :

**BEZZOUH Ali**

*Thème :*

Etude numérique d'un système de chauffage par ailettes montées sur un cylindre placé dans une cavité cylindrique (cylindres coaxiaux). Impact des différents paramètres

**Devant le jury composé de :**

Président : M. AMAOUCHE

Examineur : H. BECHIR

Examineur : K. MANSOURI

Rapporteur : D. SADAOUI

Professeur Université, UAM- Béjaïa

Professeur Université, UAM- Béjaïa

Maître de Conférences, UMB-Boumerdès

Maître de Conférences, UAM- Béjaïa

# Remerciements

Je voudrais remercier Monsieur D.SADAOUI, Maître de Conférences à l'université de Béjaia, pour m'avoir fait confiance tout au long de ces deux années, avoir pris des orientations et effectué des choix décisifs pour la réussite de ce travail et enfin pour son implication lors de la mise en œuvre du mémoire

A Monsieur le professeur M. AMAOUCHE, j'exprime ma gratitude pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je tiens à remercier Monsieur H. BECHIR Professeur à l'université de Béjaia, et Monsieur K. MANSOURI Maître de conférence à l'université de Boumerdès pour avoir accepté d'examiner et de juger ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur A. DJERRADA pour sa disponibilité et surtout pour ces remarques précieuses.

Je remercie Chaleureusement Monsieur R. YOUSFI, responsable du Hall de technologie pour son soutien psychologique.

## NOMENCLATURE

$c_p$	: Chaleur massique à pression constante	$J\ kg^{-1}K^{-1}$
$d$	: Diamètre du cylindre	$m$
$h$	: Coefficient d'échange par convection	$W\ m^{-2}\ K^{-1}$
$g$	: Accélération de pesanteur	$m\ s^{-2}$
$l$	: Epaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindre	$m$
$q$	: Flux de chaleur	$W\ m^{-2}$
$r$	: rayon du cylindre	$m$
$S$	: Surface	$m^2$
$T$	: Température	$K$
$t (\Delta t)$	: Temps (pas de temps)	$s$
$u, v$	: Composantes de la vitesse suivant l'axe x et y	$ms^{-1}$

### Symboles grecs

$\alpha$	: Diffusivité thermique	$m^2s^{-1}$
$\beta$	: Coefficient de dilatation du fluide à pression constante	$K^{-1}$
$\Gamma$	: Coefficient de diffusion	$m^2s^{-1}$
$\omega$	: vitesse de rotation	$rad\ s^{-1}$
$\mu$	: Viscosité dynamique	$m^{-1}\ kg\ s^{-1}$
$\nu$	: Viscosité cinématique	$m^2s^{-1}$
$\rho$	: Masse volumique de l'air	$kg\ m^{-3}$
$\lambda (k)$	: Conductivité thermique	$W\ m^{-1}K^{-1}$

### indices :

$i, e$	: relatif au cylindre intérieur (extérieur)
$l$	: relatif à l'espace annulaire

### Nombres adimensionnels

$Nu$	: Nombre de Nusselt	$Nu = h\ l_{ref} / \lambda$
$Pr$	: Nombre de Prandtl	$Pr = \nu / \alpha$
$Ra_l$	: nombre de Rayleigh	$Ra_l = g\ \beta\ (T_i - T_o)\ l^3 / (\nu\ \alpha)$
$Gr$	: nombre de Grashof	$Gr = Ra_l / Pr$
$Re$	: nombre de Reynolds	$Re = \omega\ R_i\ l / \nu$
$\gamma = Fr$	: nombre de froud	$Fr = Gr / Re^2$

# SOMMAIRE

## NOMENCLATURE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

## Chapitre I

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1) Introduction .....	3
I.2) Etudes antérieures sur la convection autour de cylindres munis d'ailettes.....	3

## Chapitre II

### POSITION DU PROBLEME

II.1) Introduction.....	8
II.2) Equations gouvernant le problème et hypothèses de simulation.....	8
II.2.1) Ecriture adimensionnelle des équations.....	10
II.2.1a) Cas de la convection naturelle.....	10
II.2.1b) Cas de la convection mixte.....	11
II.2.2 groupements adimensionnés.....	13

## Chapitre III

### PRESENTATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS

III.1) Introduction.....	14
III.2) Principe de la méthode des volumes finis.....	14
III.3) Discrétisation.....	15
III.3.1) Schéma de discrétisation spatiale.....	17
III.3.1a) Schéma aux différences centrées (CDS).....	17
III.3.1b) Schéma Upwind (UPS).....	18
III.3.1c) Schéma Hybride (HDS: hybrid differencing scheme).....	19
III.3.1d) Schéma à loi de puissance (PLDS) .....	19
III.3.2) Schéma de discrétisation temporelle.....	20
III.3.2a) Schéma explicite ( $\theta=0$ ).....	21
III.3.2b) Schéma implicite ( $\theta=1$ ).....	21
III.3.2c) Schéma de Cranck-Nicolson ( $\theta=1/2$ ).....	21
III.3.3) Discrétisation des équations de quantité de mouvement.....	21
III.3.3.1) Algorithme SIMPLE .....	24
III.4) Résolution des systèmes d'équations.....	26
III.4.1) Algorithme (TDMA).....	27

**Chapitre IV****RESULTATS ET INTERPRETATION**

Introduction.....	29
IV.1 Résultats de la simulation pour le cas de la convection naturelle.....	29
IV.1.1 Choix du maillage et validation des résultats.....	29
IV.1.2 Etude du cas où le cylindre intérieur est muni d'ailettes.....	33
IV.1.2a) Influence du nombre de Rayleigh (régime d'écoulement) .....	34
IV.1.2b) Influence de L'orientation des ailettes.....	36
IV.1.2c) Influence de la longueur des ailettes et de leurs nombres.....	36
IV.1.3 Evaluation des échanges thermiques (nombre de Nusselt) .....	39
IV.1.3a) Influence de l'orientation des ailettes.....	40
IV.1.3b) Influence de la longueur des ailettes.....	43
IV.1.3c) Influence du nombre d'ailettes .....	44
IV.2 Résultats de la simulation pour le cas de la convection mixte.....	45
IV.2.1 Validation des résultats pour le cas du cylindre intérieur tournant (sans ailettes).....	45
IV.2.2 Etude du cas du cylindre intérieur tournant avec ailettes.....	47
IV.2.2.1 choix du maillage (mobile) .....	47
IV.2.2.2 Etablissement du régime (périodique établi) .....	48
IV.2.2.3 Analyse des lignes de courant et des lignes isothermes.....	49
IV.2.2.4 Analyse du champ de vitesse.....	53
IV.2.2.5 Effet de la rotation du cylindre sur les profils de température.....	55
IV.2.2.6 Evaluation du nombre de Nusselt sur les deux cylindres.....	58
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>63</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	

## INTRODUCTION GENERALE

La simulation numérique dans l'étude des mouvements des fluides, et des phénomènes de transfert thermique, occupe une place très importante dans la recherche et l'industrie. Dans cette pratique, les équations de la mécanique des fluides, couplées avec l'équation de l'énergie sont résolues numériquement, en utilisant une méthode numérique convenable au problème considéré.

Parmi les méthodes les plus utilisées, on citera les différences finies, éléments finis et volumes finis. Cette dernière, après l'élaboration par Patankar [1] de l'algorithme « SIMPLE » pour la résolution du couplage vitesse et pression, est à l'origine de plusieurs codes de calcul (CFD) comme le logiciel FLUENT, qu'on a utilisé pour ce travail.

La convection naturelle, et la convection mixte dans les cavités, ont fait l'objet de bon nombre d'études théorique et expérimentales. Sur le plan théorique, le problème est complexe car la solution dépend de plusieurs paramètres à savoir la géométrie, la nature du fluide et le nombre de Rayleigh (ou le nombre de Grashof). Sur le plan pratique ces modes de transfert sont très répondus, on citera les cas des concentrateurs solaire, systèmes de stockage d'énergie, système de refroidissement dans les réacteurs nucléaires, d'isolation électrique par gaz des lignes de transmission etc...

Le présent travail, concerne deux études numériques, à savoir la convection naturelle, et la convection mixte autour d'un cylindre horizontal chauffé et muni d'ailettes et placé dans une cavité cylindrique. Le manuscrit comporte quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté une étude bibliographique générale sur la convection naturelle et mixte dans les cavités de forme cylindrique

Dans le second chapitre, nous avons présenté les modèles mathématiques gouvernant ce mode de transfert (convection naturelle). Sur le plan dynamique, on utilise les équations de Navier-stokes pour la détermination des champs de vitesse et de pression, d'un point de vue thermique, on utilise l'équation de l'énergie pour la détermination du champ de température.

Au troisième chapitre, on présente la méthode des volumes finis (M.V.F) appliqué aux équations de conservations sous une forme générale. Cette méthode est implémentée dans le code de calcul « Fluent » qu'on a utilisé dans le cadre de ce mémoire.

Les résultats obtenus sont rapportés dans le quatrième chapitre, concernant deux types de simulations. La première, s'intéresse au régime établi correspondant à la convection naturelle autour d'un cylindre intérieur fixe, quand à la deuxième est développée en régime est quasi-stationnaire périodiquement établi. Dans les deux cas on a étudié l'influence de plusieurs paramètres (forme, nombre et position des ailettes, nombres de Rayleigh et Grashof ...), sur la configuration du flux et le champ de température ainsi que les échanges thermique dans l'espace annulaire.

# I

## ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

### I.1 Introduction

L'étude de la convection naturelle suscite l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Les recherches menées ont commencé au 20<sup>ème</sup> siècle suite à la découverte de ce phénomène. Aujourd'hui, les investigations continuent tant sur le plan numérique et expérimental. Les écoulements de convection naturelle en espace confiné (cavité) sont présents dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels. En effet, on peut citer comme exemples, le refroidissement des circuits électroniques et des réacteurs nucléaires, la thermique du bâtiment, les systèmes thermiques solaires.

Afin d'améliorer les transferts de chaleur, on s'intéressera aux méthodes qui consistent à augmenter la surface d'échange par utilisation d'ailettes sur le corps à refroidir. Leurs géométries et positions sont les paramètres qui affectent la qualité et la quantité des transferts thermiques.

### I.2 Etudes antérieures sur la convection autour de cylindres munis d'ailettes

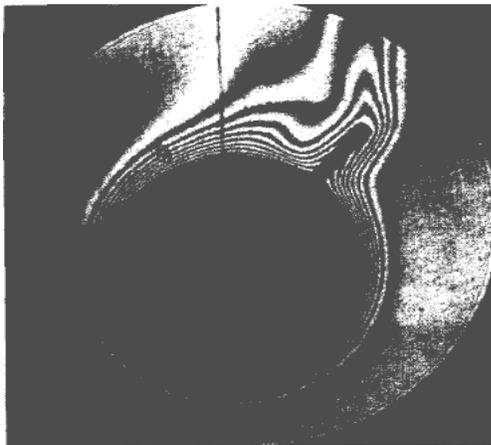
La première étude de l'échange de chaleur dans une cavité circulaire horizontale entre deux cylindres coaxiaux a été réalisée par Beckmann [2]. Sa contribution fondamentale dans l'analyse du problème a été l'introduction de la définition de la conductivité thermique équivalente

Dans leurs étude expérimentale sur la convection naturelle dans un espace annulaire cylindrique ( $Pr=0,7$  et  $l=2,6$ ) Kuehn et Goldstein [3] montrent que la transition vers le régime turbulent s'opère pour un nombre de Rayleigh correspondant à la longueur  $l$  de l'ordre de  $10^6$ .

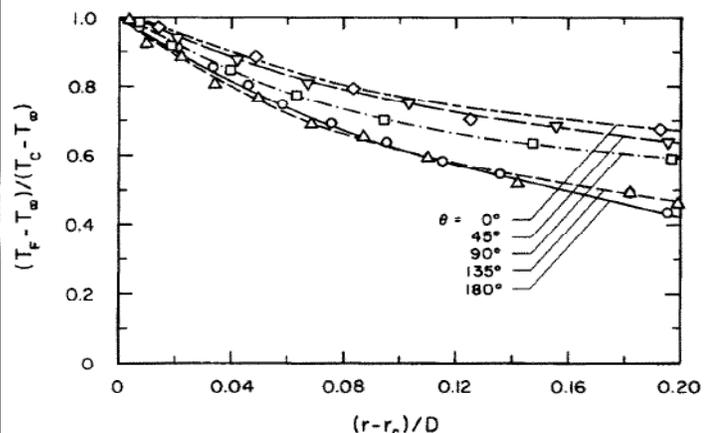
Powe et al [4] ont classifiés les écoulements observés dans l'espace annulaire horizontal selon quatre types dépendant du nombre de Rayleigh et de l'espace annulaire. Pour un nombre de Rayleigh suffisamment petit et quelques soit la valeur de l'espace annulaire relatif, le flux observé est bidimensionnel avec deux zones de circulation symétriques par rapport à l'axe vertical.

Au dessus d'une valeur critique du nombre de Rayleigh, on observe différents flux instables distincts en fonction du nombre A (Flux 2D-oscillatoire pour  $A < 2,8$  « espace annulaire large », flux spirale tridimensionnelle pour  $2,8 < A < 8,5$  et un flux multicellulaires pour  $A > 8,5$  « espace annulaire étroit »).

A. K. Tolpadi et T. H. Kuehn [5], ont conduit une étude expérimentale sur la convection naturelle autour d'un cylindre horizontal muni d'une ailette longitudinale. La longueur, la conductivité de l'ailette, les nombres de Rayleigh et de Prandtl du fluide, étant fixés, l'angle d'orientation de l'ailette varie (de la position verticale haute à la position verticale basse). Ces auteurs ont montrés qu'il y'a décalage de la plume vers le bout de l'ailette lorsque  $0^\circ < \theta < 50^\circ$  (figure I.1) et une zone de transition à  $50^\circ < \theta < 65^\circ$  ou deux plume se forme, l'une au bout de l'ailette l'autre dans la partie haute du cylindre. Pour  $65^\circ < \theta < 180^\circ$  la plume se forme dans la partie haute du cylindre comme dans le cas sans ailette. Le nombre de Nusselt sur l'ailette décroît on variant son orientation de la position verticale (basse) à la position verticale (haute), cela étant dû à l'existence d'un faible gradient de température dans l'ailette (figure I.2). Une comparaison des résultats pour le nombre de Nusselt locale sur la partie du cylindre sans ailette avec le cas d'un cylindre seul, montre que l'échange est affecté au voisinage de l'ailette, et en s'éloignant du voisinage de celle-ci, l'échange devient approximativement le même. L'échange globale cylindre ailette différent peu avec un cylindre sans ailettes.



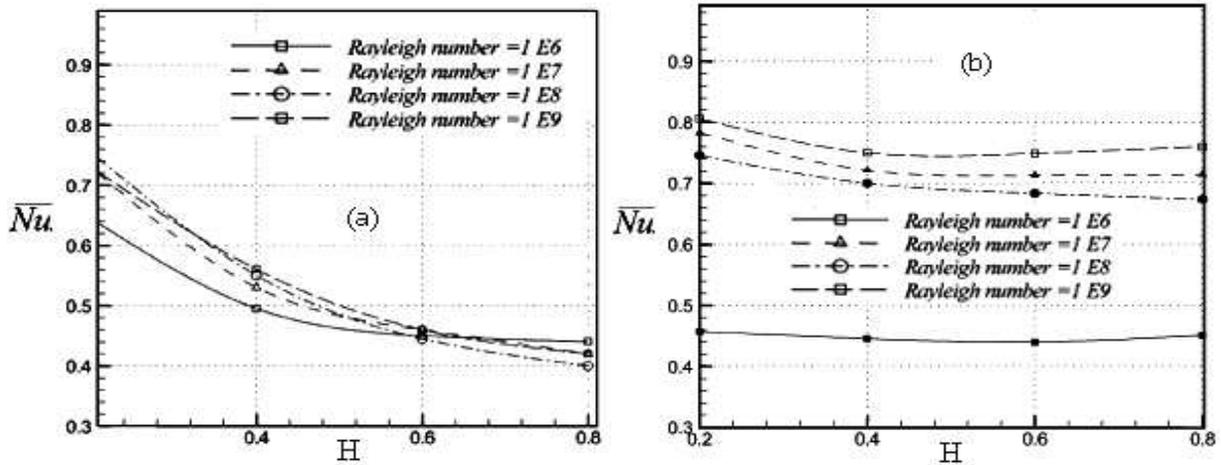
**Figure I.1** : Plume thermique pour une ailette à  $30^\circ$  [12]



**Figure I.2** : Température le long de l'ailette pour différentes orientation de celle-ci [12]

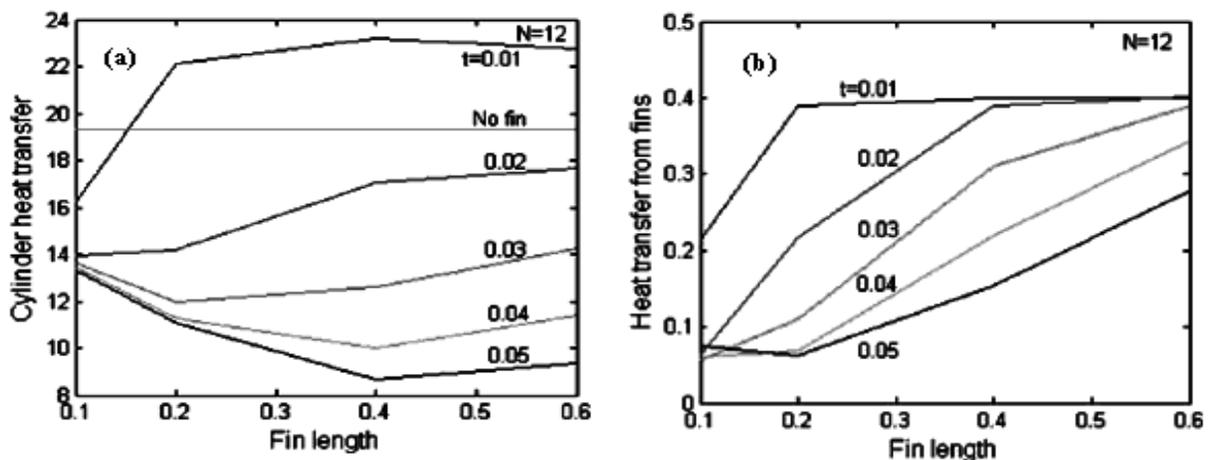
M. Rahnama et M. Farhadi [6], ont étudié la convection naturelle turbulente dans une cavité cylindrique limitée par deux cylindres coaxiaux, dont le cylindre intérieur est muni d'ailettes. Cette étude porte sur l'influence de la position, la forme, le nombre et les dimensions des ailettes sur les lignes de courant et les lignes d'isothermes ainsi que les

variations du nombre de Nusselt. Ils ont montré que le nombre de Nusselt locale diminue, en augmentant le nombre et la longueur des ailettes, à cause de l'effet de blocage sur le flux (le transfert de chaleur), figure I.3. La position des ailettes n'a pas d'effet notable sur le Nusselt moyen, mais influe considérablement sur le flux et le champ de température.



**Figure I.3 :** Nusselt moyen en fonction de la longueur des ailettes (cas de deux ailettes) (a) : horizontales; (b) : verticales pour Rayleigh =  $10^6$  à  $10^7$

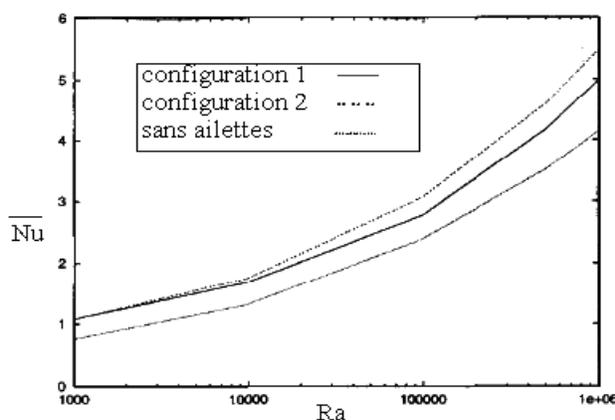
Une étude numérique basée sur la méthode des volumes finis (S.C. Haldar et al [7]) montre l'influence de différents paramètres (nombre, longueur, épaisseur et nature des ailettes,  $Pr=0,7$  et  $Gr=10^5$ ) sur les régimes de la convection naturelle autour du cylindre muni d'ailettes. Ces auteurs ont constaté que la contribution des ailettes sur le transfert thermique est faible, cependant, elles affectent d'une manière considérable le transfert sur la partie cylindrique. Ils dégagent de cette étude que le paramètre le plus important est l'épaisseur pour lequel l'échange est d'autant plus grand que cette épaisseur est petite, figure I.4.



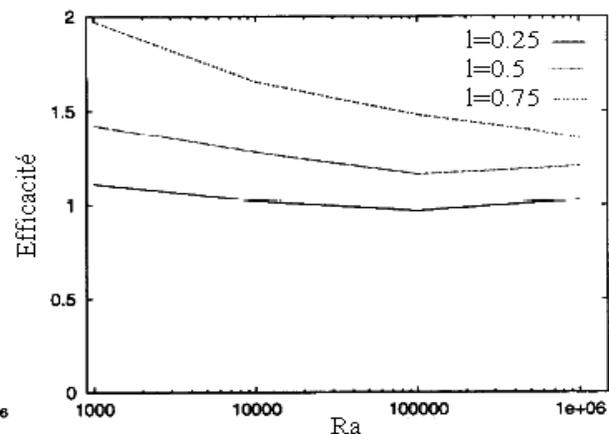
**Figure I.4 :** Echange thermique (a) : sur le cylindre ; (b) : sur les ailettes en fonction de la longueur des ailettes, pour différentes épaisseurs ( $t$ )

B.A. Abu-Hijleh [8], a étudié le cas d'un cylindre muni de barres (ailettes) de faibles conductivités thermique pour réduire le transfert de chaleur par convection naturelles sur ce dernier. Le but était d'optimiser le nombre, la longueur, et la position de ces barres sur le cylindre intérieur en calculant la génération de l'entropie de ces barres sur leurs voisinages. Il a montré qu'un positionnement approprié de un ou deux barres, peut réduire le transfert de 70% de la valeur réduite en utilisant onze barres.

M.I. Farinas, A. Garon et K. Saint-Louis [9], ont conduit une simulation numérique par la méthode des éléments finis sur la convection naturelle dans un espace annulaire délimité par deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur étant muni d'ailettes. Le but recherché est de prendre en considération la géométrie des ailettes (bout pointu, rond et divergent), leurs longueurs ainsi que leurs orientation pour un nombre de Rayleigh variant de  $10^3$ - $10^6$ . Ils ont constaté une amélioration de 10 % des échanges thermiques en utilisant une configuration à deux ailettes (décalées de  $30^\circ$  par rapport à la verticale) par rapport à la configuration de deux ailettes (verticales). En comparant l'efficacité des ailettes, ils constatent aussi que celle-ci diminue en augmentant le nombre de Rayleigh pour les trois géométries et elle est plus grande pour les ailettes avec bout rond. Le Nusselt moyens sur le cylindre extérieur est proportionnelle au nombre de Rayleigh et la longueur des ailettes, néanmoins l'augmentation du Nusselt avec Rayleigh est accentuée pour des ailettes longue (elles génèrent des flux non stagnant dans le bas de la géométrie et un flux convectif beaucoup plus important). Ainsi les ailettes longues utilisent la surface d'échange plus efficacement que les ailettes courtes, figures I.5 et I.6.



**Figure I.5 :** Nusselt moyen sur le cylindre Extérieur pour deux configurations à six d'ailettes



**Figure I.6 :** Efficacité des ailettes en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes longueurs

L'étude numérique de T.S. Lee [10], sur la convection mixte dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques et excentriques, sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur pour déterminer les configurations des isothermes et des lignes de courant. Pour éviter l'interaction entre la convection naturelle et la rotation élevée du cylindre intérieur qui produit des écoulements tridimensionnels complexes avec des vortex de Taylor, il limite les simulations numériques à un nombre de Reynolds  $Re < 1500$ . L'état stationnaire du mouvement du fluide soumis à une approximation de Boussinesq, peut être approché par un ensemble d'équations pseudo transitoire. Il admet que le critère d'état d'équilibre serait satisfait quand une différence inférieure à 0,1% avec un nombre de Nusselt de référence est détectée. Il constate que pour un nombre de Rayleigh  $Ra > 10^6$ , les résultats numériques obtenus dans la plage de  $Re < 1100$  sont instables. L'auteur a prouvé dans cette recherche que le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Rayleigh pour les deux cas concentriques et excentriques. Pour un nombre de Rayleigh fixe, le nombre de Nusselt moyen diminue pour un cylindre en rotation. Il constate aussi que pour  $Re = 140$ , le point d'échange local maximal sur le cylindre extérieur décale de  $30^\circ$  dans la direction de rotation et diminue en le comparant avec le cas du cylindre sans rotation. Pour le cylindre intérieur, le point d'échange minimal, correspondant au point de formation de la plume, se déplace de  $45^\circ$  dans la direction de rotation. En augmentant le nombre de Reynolds de 140 à 1120, l'échange global entre les deux cylindres diminue, et l'échange local tend à être uniforme le long des surfaces des deux cylindres.

J. Y. Choi et M. U. Uimt [11], ont étudié la stabilité de l'écoulement sous l'effet de la force centrifuge (due à la rotation du cylindre intérieur) et la force d'Archimède (due au gradient de température entre les deux cylindres) en analysant la structure du flux tridimensionnelle pour un espace annulaire relativement large. Ils remarquent que pour un régime dominé par la convection naturelle ( $\gamma = Gr/Re^2 > 0,33$ ) le flux est instationnaire et que la force centrifuge tend à le stabiliser. Pour ( $\gamma < 0,16$ ), la force centrifuge domine la force de flottabilité d'Archimède et le flux devient au dessus d'une valeur critique du nombre de Reynolds stationnaire, en augmentant le nombre de Grashof la valeur critique de Reynolds augmente. Pour  $0,16 > \gamma > 0,33$  les deux régimes coexistent et le flux est oscillant.

# II

## POSITION DU PROBLEME

### II.1 Introduction

Pour accélérer ou améliorer les transferts de chaleur entre un fluide et une paroi quelconque (cylindre) dans un espace confiné, plusieurs approches sont envisageables, parmi lesquelles on citera la mise en mouvement du fluide par rapport à la paroi ou l'inverse, l'adjonction d'ailettes sur la paroi ou encore les décaler pour en faire un espace annulaire excentrique (cas de deux cylindres coaxiaux). Avec ces différentes approches le taux de transfert de chaleur et le flux dans l'espace annulaire est affecté.

Dans cette optique, on se propose d'analyser les transferts de chaleur dans un espace annulaire coaxial dont le cylindre intérieur est muni d'ailettes, Figure II.1 (avec ou sans rotation). Il s'agit alors d'étudier la convection naturelle ou mixte afin de prédire l'influence de certains paramètres physiques et géométriques, tels que la longueur, le nombre des ailettes, leurs orientations, le nombre de Rayleigh et le nombre de Reynolds, sur le comportement dynamique et thermique du fluide. La modélisation mathématique du problème est basée sur les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Afin de formuler un model de comportement proche du système étudié on doit introduire des hypothèses.

### II.2. Equations gouvernant le problème et hypothèses de simulation

Le fluide, est supposé newtonien, incompressible en régime de convection laminaire, la structure est suffisamment longue dans la direction longitudinale ( $z$ ) pour considérer que l'écoulement est bidimensionnel. On se placera dans les conditions de l'approximation de Boussinesq, ce qui nécessitera une résolution simultanée des équations de la dynamique et de l'énergie au sein du fluide. L'approximation de Boussinesq repose sur deux hypothèses. D'une part, elle postule que la masse volumique est constante dans tous les termes des équations de quantité de mouvement sauf dans le terme de force de volume ( $\rho g$ ), d'autre part, elle suppose un écart de température (cylindre intérieur/extérieur) modéré ( $<100$  °C), pour se

limiter, au premier terme du développement de  $\rho$  en terme de température, à savoir :

$$\rho = \rho_o (1 - \beta(T - T_o)) \quad (\text{II.1})$$

Avec  $\rho_o$ ,  $\beta$  respectivement la masse volumique à la température de référence  $T_o$  et le coefficient de dilatation volumique à pression constante :

$$\beta = -\left(\frac{1}{\rho_o}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (\text{II.2})$$

Enfin, on admet que les vitesses mises en jeu sont relativement faibles de sorte que la fonction de dissipation visqueuse  $\Phi$  dans l'équation d'énergie peut être légitimement négligée.

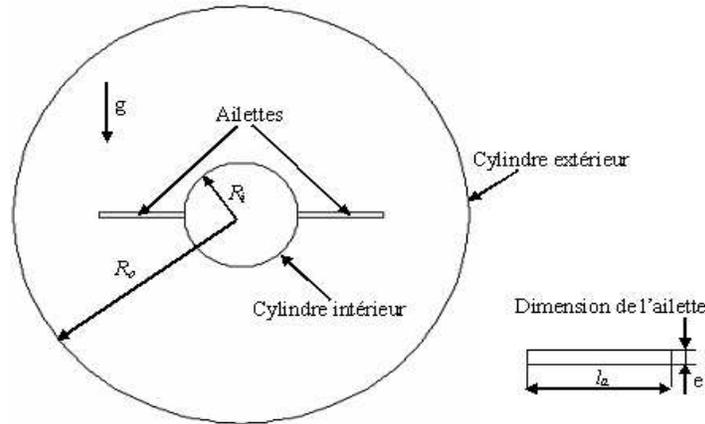


Figure II.1 Domaine physique étudié

En tenant compte des ces différentes hypothèses, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (Navier-Stokes) ainsi que l'équation de l'énergie s'écrivent sous la forme :

### 1) équation de conservation de la masse (Équation de continuité)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.3})$$

### 2) équations de conservation de quantité de mouvement

$$\text{/ox} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.4})$$

$$\text{/oy} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \beta (T - T_o) \quad (\text{II.5})$$

### 3) Equation de l'énergie

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.6})$$



Le système composé par les équations précédentes n'est pas fermé, pour cela on lui associera les conditions aux limites correspondant au cas physique à traiter à savoir :

#### 4) Condition aux limites

Cylindre intérieur :  $u=v=0$  et  $T = T_i$  ;

Cylindre extérieur :  $u=v=0$  et  $T = T_o < T_i$  ;

Base des ailettes :  $u=v=0$  et  $T = T_i$  ;

Surface des ailettes adjacentes au fluide :  $u=v=0$  et  $-\lambda_a \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{aillette}} = -\lambda_f \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{fluide}}$  ;

### II.2.1 Ecriture adimensionnelle des équations

L'emploi de variables réduites dans les équations permet d'approcher de plus près la réalité et de généraliser les phénomènes physiques, car leur existence et leur évolution sont indépendantes du système d'unités de mesure utilisé pour les étudier. Autrement dit, elles permettent d'obtenir des informations plus générales, et jouent un rôle prépondérant dans les similitudes. En effet, pour ramener les équations phénoménologiques sous une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir, moyennant des grandeurs caractéristiques, des changements de variables.

#### II.2.1a Cas de la convection naturelle :

Pour rendre adimensionnelles les équations précédentes dans le cas de la convection naturelle dans un espace annulaire, en régime permanent, on se basera sur les grandeurs caractéristiques du problème, qui sont les suivantes :

$l = r_o - r_i$  : Dimension linéaire caractéristique de l'écoulement ;

$u_o = \nu / l$  : Vitesse de référence ;

$p = \rho u_o^2$  : Pression de référence ;

$\Delta T$  : Température de référence ;

Les variables réduites dans ce cas s'écrivent :

$$x^* = x/l \quad y^* = y/l ;$$

$$u^* = u / u_o \quad v^* = v / u_o ;$$

$$p^* = p l^2 / \nu^2 \quad T^* = (T - T_o) / (T_i - T_o) ;$$

En tenant compte de ces changements de variables, les équations précédentes associées aux conditions aux limites deviennent :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 ;$$

Equations de quantité de mouvement :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) ;$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{Ra}{Pr} T^* ;$$

Equation de l'énergie :

$$\left( u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) ;$$

Conditions aux limites :

Cylindre intérieur	:	$u^*=v^*=0$	et	$T^* = 1$
Cylindre extérieur	:	$u^*=v^*=0$	et	$T^* = 0$
Base des ailettes	:	$u^*=v^*=0$	et	$T^* = 1$
Surface des ailettes adjacentes au fluide :		$u^*=v^*=0$	et	
		$-\frac{\partial T^*}{\partial n} \Big _{\text{aillette}}$	=	$-\frac{\lambda_f}{\lambda_a} \frac{\partial T^*}{\partial n} \Big _{\text{fluide}}$

### II.2.1b Cas de la convection mixte :

Les variables réduites dans ce cas, s'exprimeront en fonction des grandeurs caractéristiques suivantes :

$l = r_o - r_i$	:	Dimension linéaire caractéristique de l'écoulement
$u_o = \omega r_i$	:	Vitesse de référence
$t = l / u_o$	:	temps de référence
$p = \rho u_o^2$	:	Pression de référence.
$\Delta T$	:	Température de référence.

On aura donc comme variables réduites :

$$x^* = x / l \quad y^* = y / l ;$$

$$u^* = u / u_o \quad v^* = v / u_o ;$$

$$p^* = pl^2 / \nu^2 \quad T^* = (T - T_o) / (T_i - T_o) \quad \text{et} \quad t^* = t / (l / u_o) ;$$

En tenant compte de ces changements de variables, les équations gouvernant le problème (II.1 à II.4) deviennent :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Equations de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \end{aligned}$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Conditions initiales :

$$T^* = 1 \quad t^* = 0$$

Conditions aux limites :

Cylindre intérieur :

$$v_\theta^* = 1 \Rightarrow \begin{cases} u^* = - (1/r_i) \sin ((1/r_i) t^*) \\ v^* = (1/r_i) \cos ((1/r_i) t^*) \end{cases}$$

$$T^* = 1$$

Cylindre extérieur :

$$u^* = v^* = 0 \quad \text{et} \quad T^* = 0$$

Bord des ailettes :

$$v_\theta^* = \frac{w r}{w r_i} \Rightarrow \begin{cases} u^* = - (1/r_i) \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} \sin ((1/r_i) t^*) \\ v^* = (1/r_i) \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} \cos ((1/r_i) t^*) \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial n} \right|_{\text{ailette}} = - \frac{\lambda_f}{\lambda_a} \left. \frac{\partial T^*}{\partial n} \right|_{\text{fluide}}$$

Bout d'ailettes :

$$v_\theta^* = \frac{w(r_i + l_a)}{w r_i} \Rightarrow \begin{cases} u^* = - ((r_i + l_a)/r_i) \sin ((1/r_i) t^*) \\ v^* = ((r_i + l_a)/r_i) \cos ((1/r_i) t^*) \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial n} \right|_{\text{ailette}} = - \frac{\lambda_f}{\lambda_a} \left. \frac{\partial T^*}{\partial n} \right|_{\text{fluide}}$$



### II.2.2 groupements adimensionnés

L'écriture adimensionnelle des équations, fait apparaître plusieurs groupements adimensionnels. Chacun de ces groupements à une signification physique :

- a) **Nombre de Reynolds** :  $Re = \omega R_i l / \nu$  ;  
C'est le rapport entre les forces d'inerties sur les forces d'origine visqueuses
- b) **Nombre de Prandtl** :  $Pr = \nu / \alpha$  ;  
C'est un nombre qui est purement caractéristique du fluide, et c'est le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique

- c) **Nombre de Rayleigh** :  $Ra_l = Gr . Pr$  ;

Utilisé en mécanique des fluides et caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis au-dessus de cette valeur c'est la convection libre ou naturelle qui devient importante.

On peut le définir comme le produit du nombre de Grashof, reliant la force d'Archimède à la viscosité du fluide, et du nombre de Prandtl.

- d) **Nombre de Grashof** :  $Gr = g \beta (T_i - T_o) l^3 / (\nu^2)$

C'est le rapport entre la force de gravité causant le mouvement du fluide et la force de viscosité

- e) **Nombre de Nusselt**

Les échanges thermiques sont caractérisés par un nombre adimensionnel dit nombre de Nusselt qui est le rapport entre le flux échangé par convection à celui par conduction à la paroi :

$$Nu = h l_{ref} / \lambda \quad \text{tel que} \quad h = \frac{q}{T_p - T_{ref}}$$

Avec  $T_p$ ,  $q$  et  $l_{ref}$  respectivement la température de la paroi considérée, la densité du flux de chaleur et une longueur de référence.

## III

**PRESENTATION DE LA METHODE  
DES VOLUMES FINIS****III.1 Introduction**

Les équations de conservation régissant le phénomène de la convection naturel ou mixte sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires elliptiques et couplées. En raison de leurs complexités, ces équations sont résolues à l'aide des techniques numériques. Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature : méthode des différences finies, méthodes des volumes finis et méthodes des éléments finis etc.... On présentera dans ce qui va suivre, la méthode des volumes finis, car nous avons utilisé le code de calcul Fluent pour la résolution de ces équations.

**III.2 Principe de la méthode des volumes finis**

Dans son ensemble, la méthode des volumes finis consiste à définir à l'intérieur du domaine de calcul une grille de points appelés noeuds. Chaque noeud se trouve entouré par un volume élémentaire sur lequel on va intégrer les équations aux dérivées partielles (voire Figure III.1). Pour deux points voisins, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un côté commun. Il s'ensuit que la réunion de tous les volumes de contrôle couvre l'ensemble du domaine de calcul. Cette propriété fondamentale, va permettre la mise en évidence des propriétés de conservation des flux locaux et globaux.

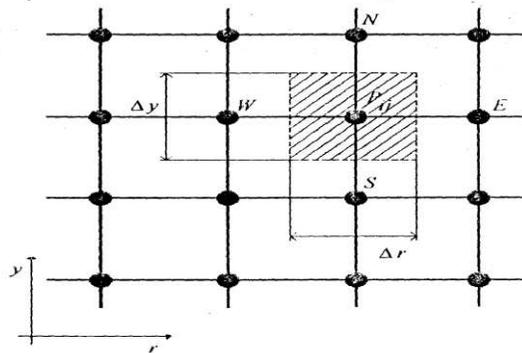


Figure III.1: Discrétisation d'un domaine en volumes élémentaires

Il existe deux méthodes pratiques pour placer le réseau de points ou maillage et leurs volumes de contrôle associés:

- la première consiste à définir d'abord la grille de points, puis placer les faces des volumes à mi-distance de deux noeuds consécutifs (figure III.2a).
- dans la deuxième, on commence par la définition des volumes de contrôle, puis on place les noeuds associés aux centres des volumes (figure III.2b).

**Remarque :** ces deux pratiques sont identiques dans le cas d'un maillage uniforme.

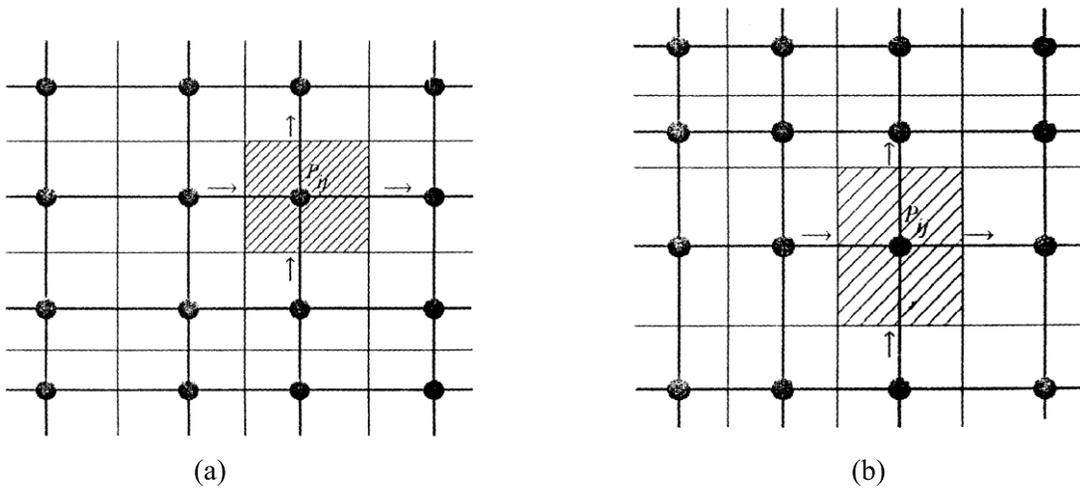


Figure III.2: maillage et volumes de contrôles

### III.3 Discrétisation

Pour illustrer la méthode des volumes finis, nous allons l'appliquer pour le cas d'une équation de conservation sous sa forme la plus générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S_\phi \quad (\text{III.1})$$

Dans le cas des équations de la convection naturelle, le tableau suivant résume les valeurs que prend la variable  $\phi$  dans les différentes équations

Grandeur	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
Conservation de masse	1	0	0
Quantité de mouvement selon l'axe (xi)	$u_i$	$\nu$	$-\partial p/\partial x_i + g_i\beta(T-T_0)$
Energie	T	$\lambda/\rho c_p$	0

La première étape de la méthode des volumes finis, est l'intégration de l'équation (III.1), sur le volume de contrôle (définie sur la Figure III.3) pour obtenir les équations discrètes aux nœuds :

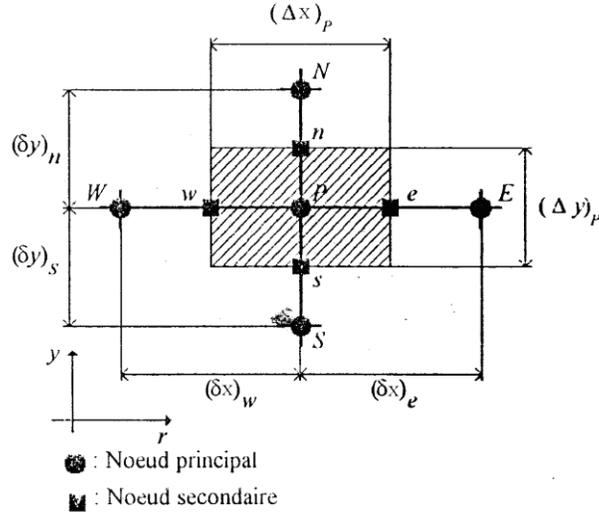


Figure III.3: Volume de contrôle à travers lequel se fait l'intégration

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV + \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) \right] dV = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dV + \int_V S_\phi dV \quad (III.2)$$

Tel que le volume :  $\Delta V = \Delta x_p \Delta y_p$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt dx dy &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy dx \right] dt \\ &- \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) dx dy \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} (\rho v\phi) dy dx \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_w^e \int_s^n S_\phi dy dx \right] dt \\ (\rho_p^1 \phi_p^1 - \rho_p^0 \phi_p^0) \Delta V &= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] dt \\ &- \int_t^{t+\Delta t} [(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w] dt + \int_t^{t+\Delta t} [(\rho v A \phi)_n - (\rho v A \phi)_s] dt + \int_t^{t+\Delta t} [\bar{S}_\phi \Delta V] dt \end{aligned} \quad (III.3)$$

Les exposants 0 et 1 indiquent les temps  $t$  et  $t+dt$  dans le premier membre de l'équation III.3. Les termes du second membre de l'équation précédente sont donnés aux faces du volume de contrôle. Pour former le système d'équations linéaires liant entre elle les valeurs de  $\phi$  aux nœuds P, E, W, S, N, il faut faire le choix d'un schéma d'approximation de la quantité  $\phi$  entre ces nœuds.

### III.3.1 Schéma de discrétisation spatiale

Pour illustrer les différents schémas de discrétisation utilisés pour l'approximation des valeurs des flux aux centres des faces du volume de contrôle, on considère le cas à une dimension.

#### III.3.1a Schéma aux différences centrées (CDS)

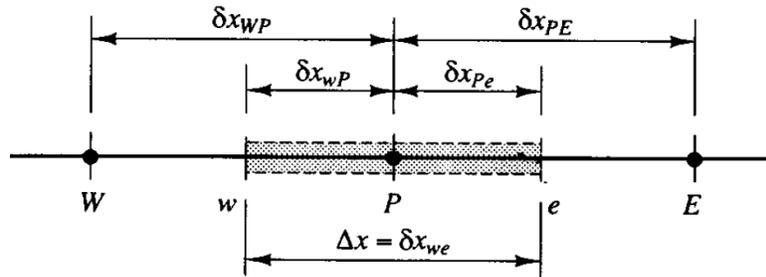


Figure III.4 : Volume de contrôle dans le cas à une dimension

Pour évaluer le flux à l'interface, la variation de la variable  $\phi$  entre deux nœuds adjacents doit être exprimée par un profil linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \varphi_e = \frac{(\varphi_P + \varphi_E)}{2} \\ \varphi_w = \frac{(\varphi_P + \varphi_W)}{2} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

$$\begin{cases} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \\ \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

**III.3.1b Schéma Upwind (UPS)**

L'une des défaillances majeures du schéma à différences centrées, est sont incapacité d'identifier la direction du flux. Lorsque le flux est fortement convectif, le schéma aux différences centrées est déconseillé, car la face WEST du volume de contrôle doit être plus influencée par le nœud W que par le nœud P si le flux est de WE. Dans le schéma Upwind, la valeur de  $\phi$  transporter sur la face du volume de contrôle est égale à la valeur du nœud en amont. Dans le cas ou le flux est dans la direction positive  $u_w > 0$  et  $u_e > 0$

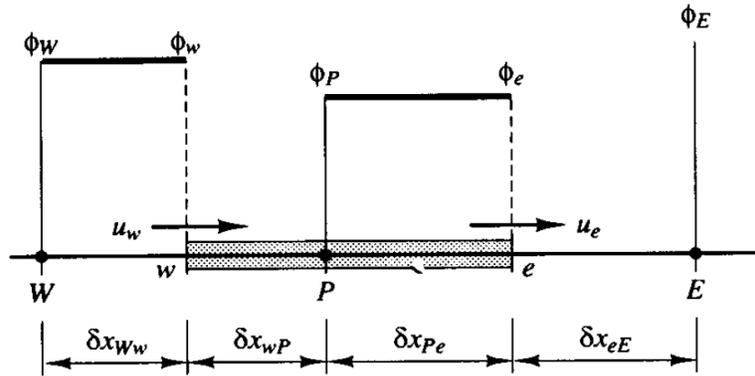


Figure III.5 :  $u_w > 0$  et  $u_e > 0$

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_P \tag{III.6}$$

Dans le cas ou le flux est dans la direction négative  $u_w < 0$  et  $u_e < 0$

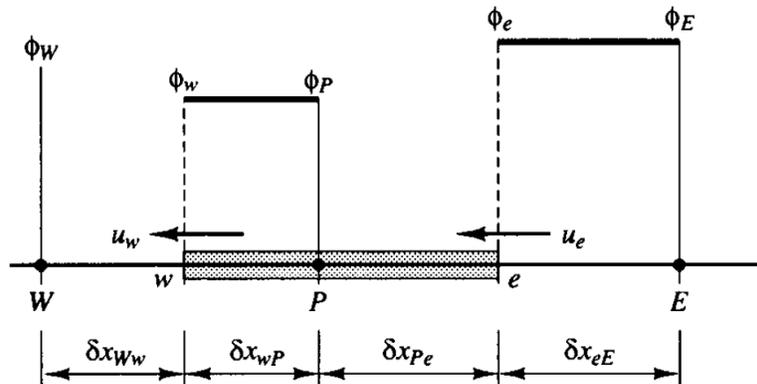


Figure III.6 :  $u_w < 0$  et  $u_e < 0$

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_E \tag{III.7}$$

**III.3.1c Schéma Hybride (HDS: hybrid differencing scheme):**

Ce schéma mis au point par Spalding (1972) est la combinaison des deux schémas aux différences centrées et Upwind. Il utilise une formule basée sur le nombre de Peclet (Pe) qui est le rapport entre le flux convectif et le flux diffusif :  $Pe = u \delta x / \Gamma$  (III.8)

$$\begin{cases} \phi_e = \alpha_e \phi_p + (1 - \alpha_e) \phi_E \\ \phi_w = \alpha_w \phi_W + (1 - \alpha_w) \phi_P \end{cases} \quad (III.9)$$

Avec  $\alpha_i =$    
 0 si  $Pe < -2$  schéma Upwind   
 1/2 si  $|Pe| \leq 2$  schéma centré   
 1 si  $Pe > 2$  schéma Upwind

**III.3.1d Schéma à loi de puissance (PLDS)**

Le schéma à loi de puissance interpole les valeurs de  $\phi$  aux faces du volume de contrôle en utilisant la solution de l'équation de convection et de diffusion suivante :

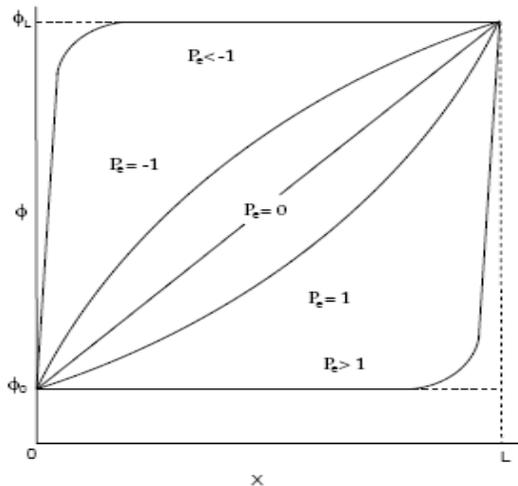
$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (III.10)$$

L'intégration de l'équation précédente donne la solution exact de  $\phi$  en fonction de  $x$

$$\frac{\phi(x) - \phi_0}{\phi_1 - \phi_0} = \frac{\exp(Pe \frac{x}{l})}{\exp(Pe) - 1} \quad (III.11)$$

Tel que : 
$$\begin{cases} \phi_0 = \phi(x = 0) \\ \phi_1 = \phi(x = l) \end{cases} \quad (III.12)$$

$Pe = u l / \Gamma$  est le nombre de Peclet



**Figure III.7 :** variation de  $\phi$  entre  $x=0$  et  $x=l$  (équation III.10)

Cette figure montre que pour  $Pe < -1$  ou  $Pe > 1$  (grande ou forte convection), la valeur de  $\phi$  à  $x=1/2$ , est égale la valeur en amont. Pour  $Pe=0$  (diffusion pure), la valeur à  $x=1/2$ , peut être calculée avec une approximation linéaire de  $\phi$  entre  $x=0$  et  $x=1$ . Pour  $0 < Pe < 1$  ou  $-1 < Pe < 0$ , on utilise l'équation (III.11).

**Discrétisation de l'équation III.3 :** Pour la discrétisation des termes sous l'intégrale dans le second membre de cette équation, on applique le schéma aux différences centrées.

Soit les deux termes de convection et diffusion de l'équation (III.3), suivant :

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} [(\rho v A \phi)_n - (\rho v A \phi)_s] dt$$

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[ (\rho v)_n A_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - (\rho v)_s A_s \frac{\phi_S + \phi_P}{2} \right] dt$$

On pose  $F = \rho u$        $D = \Gamma / \delta x$

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \left[ A_e D_e (\phi_E - \phi_P) - A_w D_w (\phi_P - \phi_W) \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{F_n A_n}{2} (\phi_N + \phi_P) - \frac{F_s A_s}{2} (\phi_S + \phi_P) \right] dt$$

$$I = \int_t^{t+dt} \left[ - (A_e D_e + A_w D_w + \frac{F_n A_n}{2} + \frac{F_s A_s}{2}) \phi_P + A_e D_e \phi_E - A_w D_w \phi_W - \frac{F_n A_n}{2} \phi_N - \frac{F_s A_s}{2} \phi_S \right] dt$$

(III.13)

### III.3.2 Schéma de discrétisation temporelle

Pour évaluer l'équation (III.13), on doit formuler des hypothèses sur la variation des quantités  $\phi_P$ ,  $\phi_E$ ,  $\phi_W$ ,  $\phi_N$ ,  $\phi_S$  dans le temps. Nous devant utiliser, la valeur de  $\phi$  aux nœuds, à l'instant  $t$  ou à l'instant  $t+dt$ , ou alternativement, une combinaison de sa valeur aux deux instants.

Soit à calculer l'intégrale par rapport au temps suivante :  $\int_t^{t+dt} \phi dt$

$$I_t = \int_t^{t+dt} \phi_P dt = \left[ \theta \phi_P^1 + (1-\theta) \phi_P^0 \right] \Delta t$$

(III.14)

En fonction de la valeur de  $\theta$ , on divers schémas :  $\theta=0$ ,  $\theta=1$  et  $\theta=1/2$ .

**III.3.2a Schéma explicite ( $\theta=0$ )**

Pour ce schéma, dit explicite du fait que les valeurs de  $\phi_P, \phi_E, \phi_W, \phi_N, \phi_S$  dans le second membre de l'équation intégrale (III.3) sont prises à l'instant  $t$ , qui permet le calcul direct de la valeur de  $\phi_P^1$  à l'instant  $t+dt$  dans le premier membre de l'équation (III.3). Ce qui donne l'équation

$$(III.14) \text{ lorsque : } \quad \theta=0 \quad I_t = \int_t^{t+dt} \phi_P dt = \phi_P^0 \Delta t$$

**III.3.2b Schéma implicite ( $\theta=1$ )**

Pour ce schéma, le coefficient  $\theta$  prend une valeur égale à l'unité. La valeur de  $\phi_P^1$  ne peut plus être calculée directement dans l'équation (III.3), du fait que le schéma est dit alors, implicite. Ce schéma

$$\text{est toujours stable : } \quad \theta=1 \quad I_t = \int_t^{t+dt} \phi_P dt = \phi_P^1 \Delta t$$

**III.3.2c Schéma de Crank-Nicolson ( $\theta=1/2$ )**

Dans ce schéma, les valeurs de  $\phi_P, \phi_E, \phi_W, \phi_N, \phi_S$  dans le second membre de l'équation intégrale (III.3) sont prises à l'instant  $t$  et  $t+dt$ , et on calcule comme suite :

$$(\theta=1/2) \quad I_t = \frac{1}{2} (\phi_P^1 + \phi_P^0) \Delta t$$

Après discrétisation de l'équation (III.3), nous obtenons l'équation suivante :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (III.15)$$

$$\text{Ou encore : } \quad a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (III.16)$$

**III.3.3 Discrétisation des équations de quantité de mouvement**

Le traitement des équations de quantité de mouvement est similaire à celui de l'équation (III.1), la seule différence réside dans le choix de la grille. On montre que si on calcule les variables  $u$  et  $v$  sur la même grille utilisée pour le calcul des variables  $T, P$  etc... On aboutira à une solution non réaliste. Pour remédier à ce problème, on adopte un maillage "décalé" afin d'évaluer le champ de vitesse dont les nœuds sont localisés sur les faces des volumes de contrôle de la grille principale (figure III.8). Chaque composante de la vitesse est décalée suivant sa propre direction (figures III.9 et III.10).

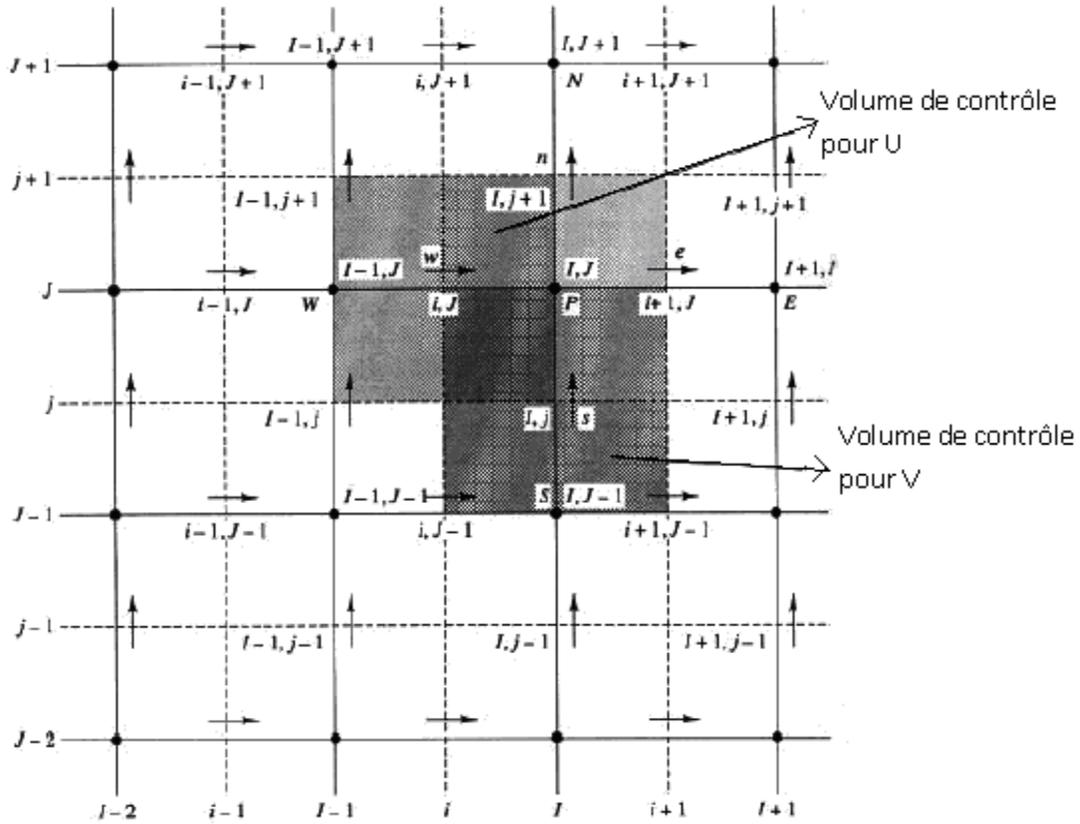


Figure III.8: Illustration d'une grille décalée pour u et v

L'intégration des deux équations de quantité de mouvement dans le nouveau système d'axes pour u et v entraîne le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \\ a_{I,j} v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} \end{cases} \quad (III.17)$$

Si le champ de pression est connu, les équations de quantité de mouvement discrétisées, sont écrites pour chaque volume de contrôle de u et v et sont résolues pour obtenir le champ de vitesse. Si le champ de pression est correct, le champ de vitesse doit vérifier l'équation de continuité. Dans le cas où ce champ est inconnu, l'établissement d'une équation de pression est nécessaire.

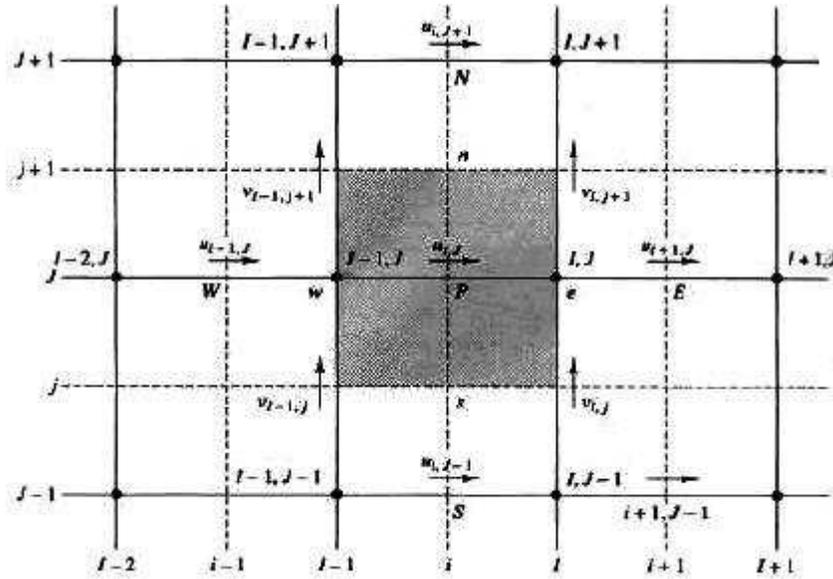


Figure III.9: Volume de contrôle correspondant à  $u$

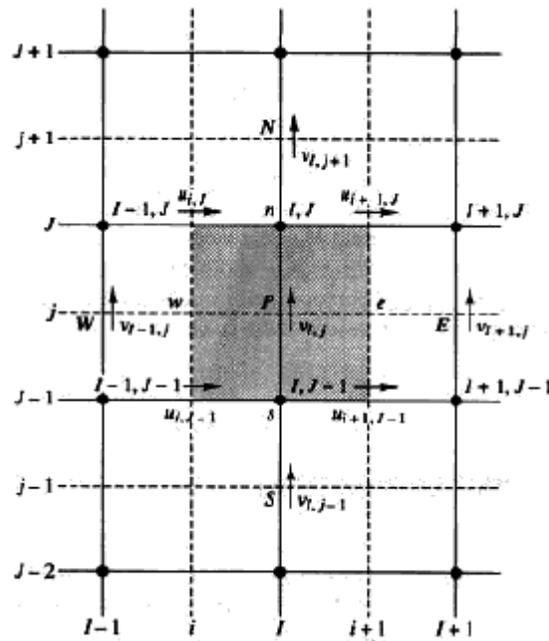


Figure III.10: Volume de contrôle correspondant à  $v$

### III.3.3.1 Algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)

Les équations de quantité de mouvement sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression. Cette difficulté de couplage vitesse-pression vient de l'absence d'équations explicites qui gouvernent le champ de pression. Pour cette raison, on utilise des méthodes indirectes dont la plus répandue est l'algorithme "SIMPLE". Les étapes de cet algorithme sont présentées dans ce qui suit :

1/ Se donner un champ de pression estimé de départ  $p^*$ , et les équations des moments discrétiser sont résolues avec ce champ de pression :

$$\begin{cases} a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \\ a_{i,j} v_{i,j}^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

2/ Définir une correction pour la pression  $p'$

$$p = p^* + p' \quad (\text{III.19})$$

3/ Définir des corrections des vitesses. Les vitesses correctes s'écriront :

$$\begin{cases} u = u^* + u' \\ v = v^* + v' \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

4/ Soustraire le système d'équations estimées (III.18) des équations exactes (III.17) :

$$\begin{cases} a_{i,j} (u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb} (u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_{i-1,j} - p_{i-1,j}^*) - (p_{i,j} - p_{i,j}^*)] A_{i,j} \\ a_{i,j} (v_{i,j} - v_{i,j}^*) = \sum a_{nb} (v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_{i,j-1} - p_{i,j-1}^*) - (p_{i,j} - p_{i,j}^*)] A_{i,j} \\ a_{i,j} (u'_{i,j}) = \sum a_{nb} (u'_{nb}) + [(p'_{i-1,j}) - (p'_{i,j})] A_{i,j} \\ a_{i,j} (v'_{i,j}) = \sum a_{nb} (v'_{nb}) + [(p'_{i,j-1}) - (p'_{i,j})] A_{i,j} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

L'algorithme SIMPLE suppose que les termes  $\sum a_{nb} (u'_{nb})$  et  $\sum a_{nb} (v'_{nb})$  peuvent être négligés :

$$\begin{cases} u'_{i,j} = (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) d_{i,j} \\ v'_{i,j} = (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) d_{i,j} \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Avec :  $d_{i,j} = A_{i,j}/a_{i,j}$  et  $d_{i,j} = A_{i,j}/a_{i,j}$

- Le champ de vitesses exact s'écrira :

$$\begin{cases} u_{i,j} = u^*_{i,j} + (p'_{i-1,j} - p'_{i,j})d_{i,j} \\ v_{i,j} = v^*_{i,j} + (p'_{i,j-1} - p'_{i,j})d_{i,j} \end{cases} \quad (III.23)$$

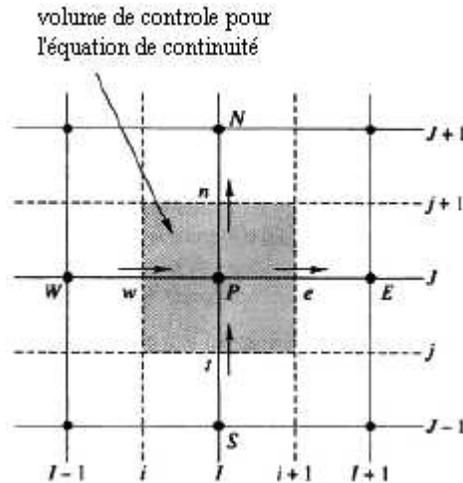
- d'une façon similaire

$$\begin{cases} u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + (p'_{i,j} - p'_{i+1,j})d_{i+1,j} \\ v_{i,j+1} = v^*_{i,j+1} + (p'_{i,j} - p'_{i,j+1})d_{i,j+1} \end{cases}$$

Avec :  $d_{i+1,j} = A_{i+1,j}/a_{i+1,j}$  et  $d_{i,j+1} = A_{i,j+1}/a_{i,j+1}$  (III.24)

- L'équation de continuité discrétisée sur le volume de contrôle de la figure III.10, donne :

$$\left[ (\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j} \right] + \left[ (\rho v A)_{i,j+1} - (\rho v A)_{i,j} \right] = 0 \quad (III.25)$$



**Figure III.10** : Volume de contrôle pour l'équation de continuité

On remplace les vitesses dans l'équation de continuité discrétisé (III.25) avec les vitesses des équations (III.24 et III.23).

$$\begin{aligned} & \left[ (\rho d A)_{i+1,j} + (\rho d A)_{i,j} + (\rho d A)_{i,j+1} + (\rho d A)_{i,j} \right] p'_{i,j} \\ & = (\rho d A)_{i+1,j} p'_{i+1,j} + (\rho d A)_{i,j} p'_{i-1,j} + (\rho d A)_{i,j+1} p'_{i,j+1} + (\rho d A)_{i,j} p'_{i,j-1} \\ & + \left[ (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{i,j} - (\rho v^* A)_{i,j+1} \right] \end{aligned} \quad (III.26)$$

Soit :  $a_{i,j} p'_{i,j} = a_{i+1,j} p'_{i+1,j} + a_{i-1,j} p'_{i-1,j} + a_{i,j+1} p'_{i,j+1} + a_{i,j-1} p'_{i,j-1} + b'_{i,j}$  (III.27)

L'équation (III.27) représente l'équation de la correction de la pression qui donne l'erreur d'estimation de la pression, qui à son tour est réinjecter dans l'équation (III.19) pour l'obtention de la nouvelle pression qui doit donner des vitesses correctes qui vérifierons l'équation de continuité. Le cycle recommence jusqu'à satisfaction du critère de la convergence.

#### III.4 Résolution des systèmes d'équations

Dans les chapitres précédents, nous avons discuté des méthodes de discrétisation des équations régissant le flux de fluide et le transfert thermique. Ce processus engendre un système d'équations algébriques linéaires qui a besoin d'être résolu. La complexité et la taille de l'ensemble des équations dépendent de la dimensionnalité du problème, du nombre de noeuds de grille et de la pratique en matière de discrétisation. Bien que n'importe quel procédé valide puisse être employé pour résoudre ces équations algébriques, les ressources d'informatique disponibles placent une contrainte puissante.

Il y a deux familles de techniques de solution pour des équations algébriques linéaires, les méthodes directes et les méthodes indirectes ou itératives. Parmi les méthodes directes on citera l'inversion, diagonalisation et triangularisation de matrice.

Les méthodes itératives sont basées sur l'application répétée d'un algorithme relativement simple menant à la convergence certaine après un grand nombre de répétitions (itérations). Les exemples bien connus sont les méthodes d'itératives de Jacobi et de Gauss Seidel.

La méthode des volumes finis rapporte habituellement des systèmes d'équations tridiagonales (un système avec seulement trois coefficients différents de zéro par équation). Pour la résolution de tels systèmes, on utilise un algorithme dit de Thomas ou l'algorithme (TDMA). Le TDMA est réellement une méthode directe pour des situations unidimensionnelles, mais il peut être appliqué itérativement, pour résoudre des problèmes multidimensionnels, ce qui est largement répandu dans les programmes de CFD.

**III.4.1 Algorithme (TDMA):**

Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcccccc}
 \varphi_1 & & & & & & = & C_1 \\
 -\beta_2\varphi_1 & +D_2\varphi_2 & -\alpha_2\varphi_3 & & & & = & C_2 \\
 & -\beta_3\varphi_2 & +D_3\varphi_3 & -\alpha_3\varphi_4 & & & = & C_3 \\
 & & -\beta_4\varphi_3 & +D_4\varphi_4 & -\alpha_4\varphi_5 & & = & C_4 \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & = & \cdot \\
 & & & & -\beta_n\varphi_{n-1} & +D_n\varphi_n & -\alpha_n\varphi_{n+1} & = & C_n \\
 & & & & & & \varphi_{n+1} & = & C_{n+1}
 \end{array} \tag{III.28}$$

Où  $\varphi_1$  et  $\varphi_{n+1}$  sont les valeurs connues aux limites du domaine.

Chaque équation peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$-\beta_j\varphi_{j-1} + D_j\varphi_j - \alpha_j\varphi_{j+1} = C_j \tag{III.29}$$

Le système d'équation (III.28) peut être réécrit:

$$\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}\varphi_3 + \frac{\beta_2}{D_2}\varphi_1 + \frac{C_2}{D_2} \tag{III.30.a}$$

$$\varphi_3 = \frac{\alpha_3}{D_3}\varphi_4 + \frac{\beta_3}{D_3}\varphi_2 + \frac{C_3}{D_3} \tag{III.30.b}$$

$$\varphi_4 = \frac{\alpha_4}{D_4}\varphi_5 + \frac{\beta_4}{D_4}\varphi_3 + \frac{C_4}{D_4} \tag{III.30.c}$$

⋮

$$\varphi_n = \frac{\alpha_n}{D_n}\varphi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n}\varphi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

Ces équations peuvent être résolues en commençant par l'élimination de  $\varphi_2$  dans l'équation (III.30b), en la remplaçant par l'équation (III.30a) pour obtenir :

$$\varphi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \varphi_4 + \left( \frac{\beta_3 \left( \frac{\beta_2}{D_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 - \beta_3 \frac{\alpha_2}{D_2}} \right) \tag{III.31.a}$$

Si on pose  $A_2 = \frac{\alpha_2}{D_2}$  et  $C'_2 = \frac{\beta_2}{D_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{D_2}$

L'équation (III.31.a) peut être réécrite sous la forme :

$$\phi_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \phi_4 + \left( \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \quad (\text{III.31.b})$$

Où  $\phi_3 = A_3 \phi_4 + C'_3$  (III.32)

Avec  $A_3 = \left( \frac{\alpha_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right)$  ET  $C'_3 = \left( \frac{\beta_3 C'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right)$

La formule (III.32) peut être utilisée pour éliminer  $\phi_3$  de l'équation (III.30.c). La procédure peut être répétée jusqu'à la fin des équations. La dernière équation aura alors uniquement une seule inconnue  $\phi_{n-1}$ . Les autres inconnues  $\phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2, \phi_1$ , sont donc calculées par substitution successive en faisant le chemin inverse (substitution arrière).

# IV

## RESULTATS ET INTERPRETATION

### Introduction

Les équations de la convection sont discrétisées avec la méthode des volumes finis, et leurs résolutions à l'aide d'un code de calcul en volume fini « Fluent ». La simulation numérique porte sur deux problèmes. Le premier est celui de la convection naturelle dans un espace annulaire cylindrique dont le cylindre intérieur est fixe et muni d'ailettes. Le second problème porte sur la convection mixte induite par la rotation du cylindre intérieur dans la même cavité. Pour cela on présentera la partie résultats en deux sous chapitres.

### IV.1 Résultats de la simulation pour le cas de la convection naturelle

Dans cette partie on s'est intéressé au phénomène des transferts autour d'un cylindre chauffé, munie d'ailettes et placé dans une cavité cylindrique. En vue de comparer les résultats de la simulation avec ceux de la littérature, et dans le but de montrer l'intérêt de l'amélioration des échanges thermiques par augmentation de la surface d'échange (ailettes), on validera les résultats dans le cas d'un espace annulaire cylindrique dont le cylindre intérieur est sans ailettes (conditions de simulation voir tableau IV.1). Puis on traitera le cas d'un cylindre muni d'ailettes et on étudiera l'influence de plusieurs paramètres sur les échanges thermiques aux différentes parois de la cavité.

#### IV.1.1 Choix du maillage et validation des résultats

L'objectif de ce chapitre est de faire une étude d'indépendance du maillage et valider les modèles physique et numérique dans le cas de deux cylindres coaxiaux, pour lequel plusieurs travaux théoriques et expérimentaux ont été faits. Ainsi la création de la géométrie de même que le maillage se font sous le progiciel "Gambit". Deux types d'éléments pour le maillage sont disponibles, éléments quadrilatéraux et éléments triangulaires. Dans notre cas nous avons opté pour des éléments quadrilatéraux à cause de la simplicité de la géométrie et la rapidité de convergence avec ce type d'éléments. Le maillage n'est pas distribués uniformément sur le domaine du calcule, il a une grande densité au niveau des parois des deux cylindres intérieur et extérieur dans la direction radiale (et dans la direction tangentiel au niveau des parois des

ailettes, figure IV.1). Le système physique est celui montré sur la figure IV.1, la recherche de la solution numériquement nécessite la discrétisation du domaine précédent en utilisant un maillage, figure IV.2 (domaine numérique). On fait varier le nombre des éléments du maillage dans les deux directions radiale et angulaire. Pour chaque maillage on représente le Nusselt locale (figure IV.3) et on calcul le flux total dissipé sur le cylindre intérieur (tableau IV.2).

La discision d’appliquer une forte densité pour le maillage aux niveaux des parois est justifiée par l’analyse des ordres de grandeur des épaisseurs des couches limite thermique et dynamique pour une paroi plane (**Bejan, [12]**):  $\delta_t = H/ Ra_H^{1/4}$ . Avec  $\delta_t$ , H et  $Ra_H$  respectivement l’épaisseur de la couche limite thermique, une longueur de référence et le nombre de Rayleigh. De la relation on déduit qu’on augmentant  $Ra_H$ ,  $\delta_t$  diminue par conséquence le maillage doit être fin pour résoudre les équations dans la couche limite thermique. Pour la couche limite dynamique on a la relation suivante :  $\delta/\delta_t \approx Pr^{1/2}$ . Ce qui montre que si le maillage convient à résoudre les équations de la couche limite thermique, il conviendra aussi pour la couche limite dynamique vu que le fluide utilisé est de l’air avec ( $\delta_t > \delta$  et  $Pr=0,7$ ). Les résultats sont fonction d’un nombre de Rayleigh basé sur l’espace annulaire :

$$Ra = g\beta(T_i - T_o)(r_o - r_i)^3 / (\alpha\nu).$$

<b>d<sub>o</sub> (m)</b>	<b>d<sub>i</sub> (m)</b>	<b>T<sub>o</sub> (K)</b>	<b>T<sub>i</sub> (K)</b>	<b>g (m<sup>2</sup>/s)</b>
0.0926	0.0356	373	327	9.81
<b>α (m<sup>2</sup>/s)</b>	<b>β (1/K)</b>	<b>ν (m<sup>2</sup>/s)</b>	<b>λ<sub>r</sub> (W/m K)</b>	<b>Pr</b>
2.99 10 <sup>-5</sup>	0.0028	2.092 10 <sup>-5</sup>	0.03	0,7

Tableau IV.1 : Conditions de simulation Kuhn-Goldstein [3]

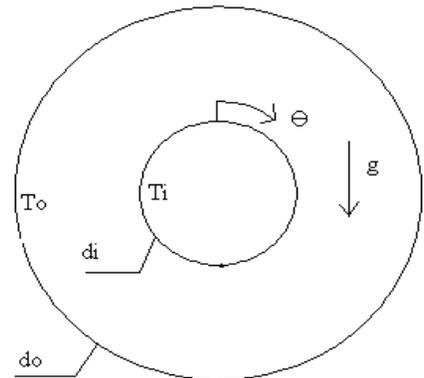


Figure IV.1 : Système physique

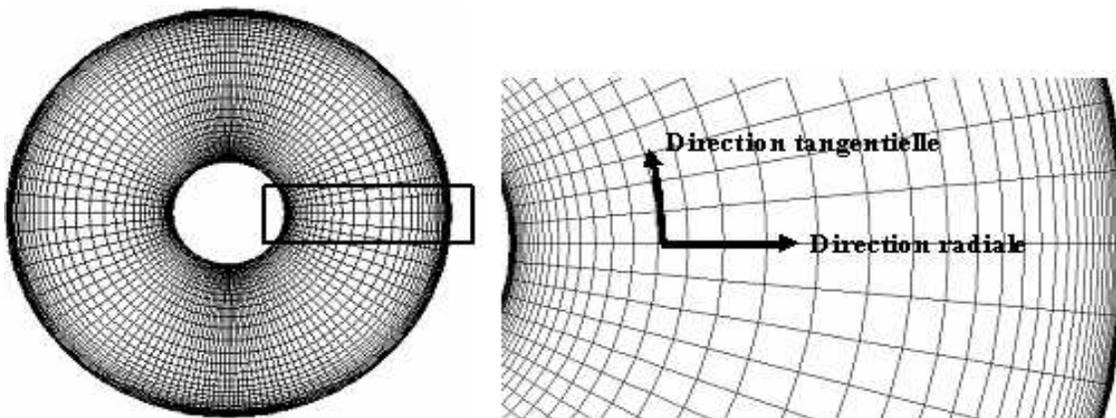


Figure IV.2 : Maillage du domaine numérique

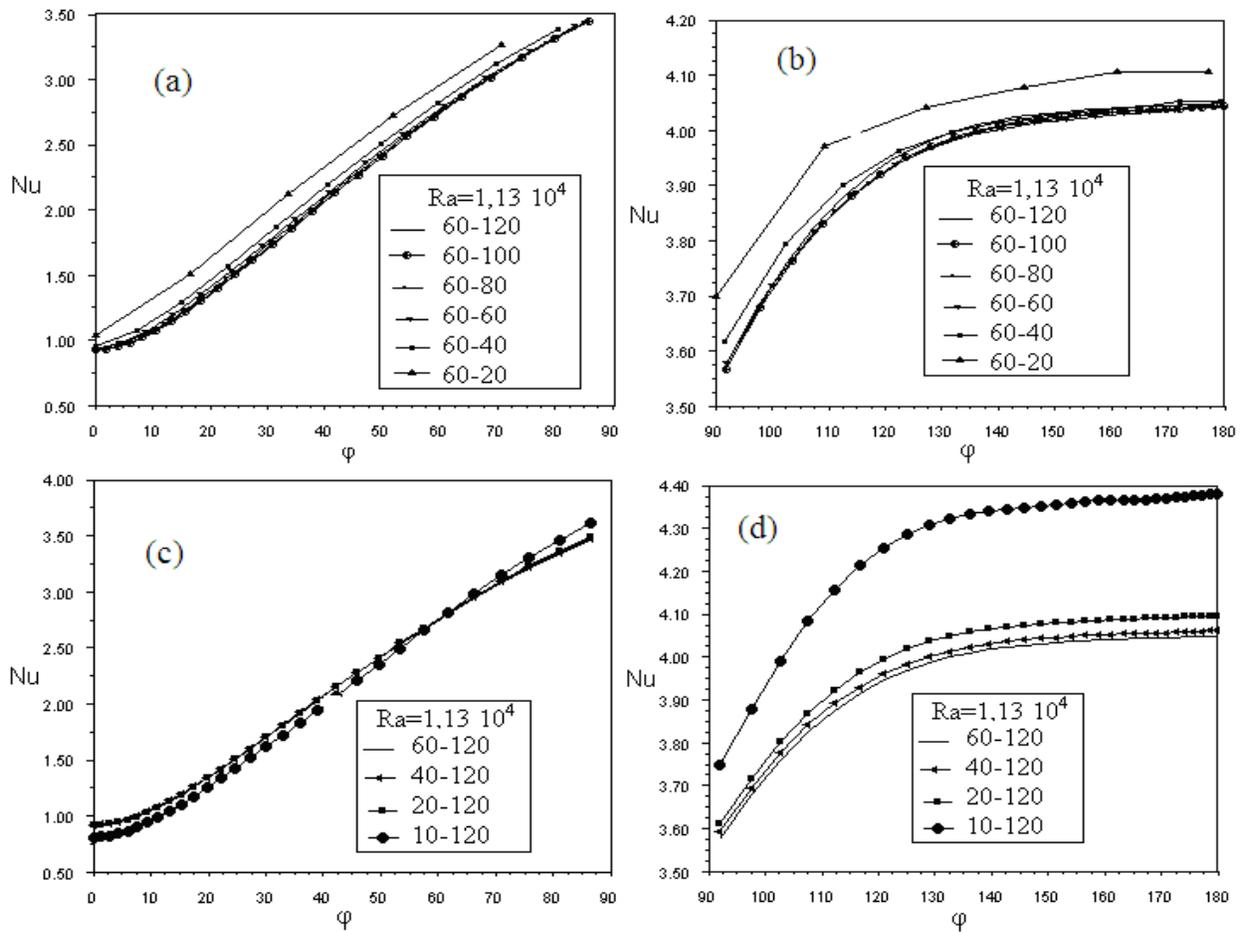


Figure IV.3 : Nusselt locale le long du cylindre intérieur pour différent maillage

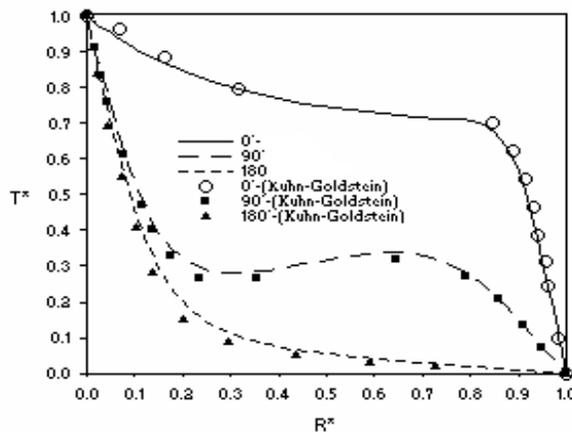
Type de maillage	Flux cylindre intérieur (W/m <sup>2</sup> )
60x120	13.28063
60x100	13.24314
60x80	13.23499
60x60	13.21866
60x40	13.2601
60x20	13.29286
40x60	13.32016
30x60	13.35127
20x120	13.38987
20x60	13.41262

Tableau IV.2 : Type de maillage et flux sur le cylindre intérieur

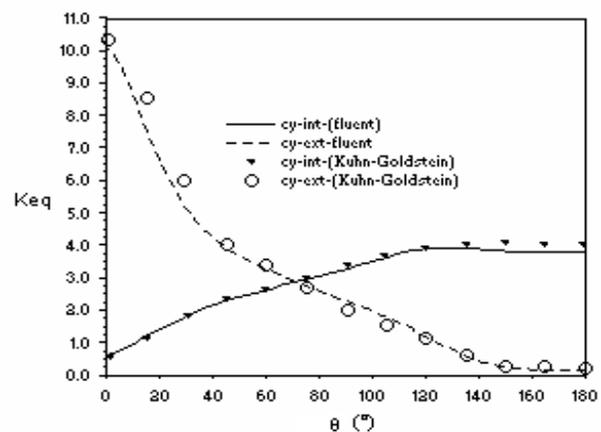
Les figures précédentes montrent les variations du nombre de Nusselt locale sur le cylindre intérieur pour différents maillage (en variant le nombre de nœud radial et tangentiel). Les Figures IV.3 (a et b) montrent l'effet de la variation du nombre d'intervalle du maillage (de 20 à 120 dans la direction tangentielle, en gardant constant leur nombre sur la direction radiale « 60 »), sur le nombre de Nusselt locale sur les deux parties du cylindre intérieur « Figure IV.3 a : partie haute :  $\varphi=0^\circ$  à  $90^\circ$  et Figure IV.3. b : partie basse  $\varphi=90^\circ$  à  $180^\circ$ ). On remarque qu'on diminuant le nombre d'intervalles à 60-20, le Nusselt locale augmente, en particulier pour la partie basse du cylindre.

Sur les Figures IV.3 (c et d), le nombre de nœuds dans la direction tangentielle est gardé constants, et on le fait varier de 10 à 60 dans la direction radiale. On voit que cette variation n'a pas un grand effet sur l'échange de chaleur sur la partie haute du cylindre, mais il augmente dans la partie basse on diminuant le nombre de nœuds.

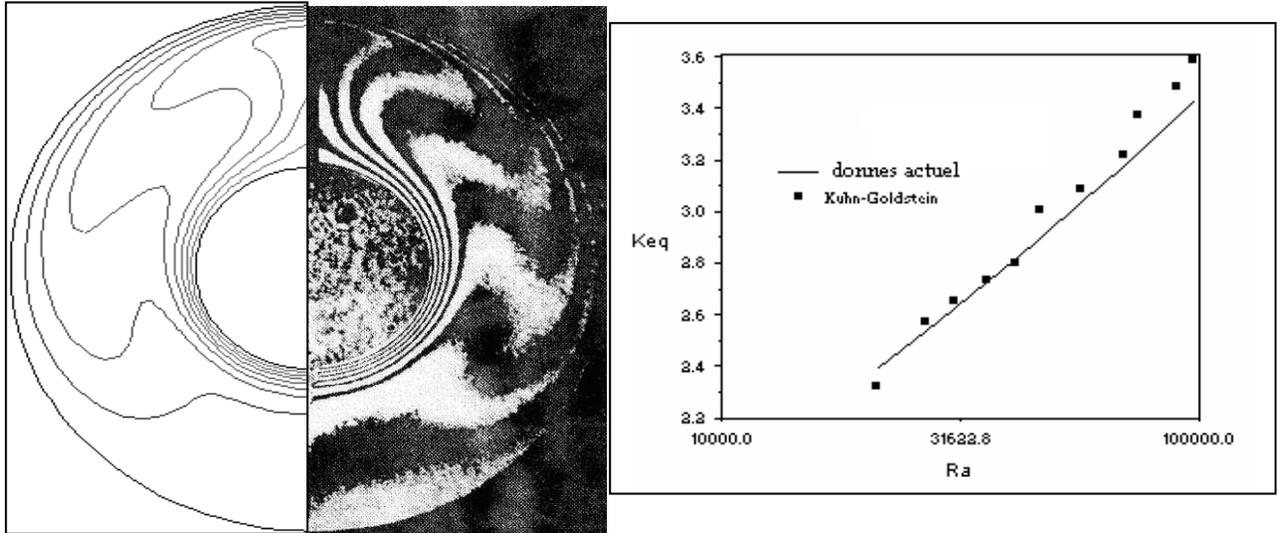
L'évaluation de la densité de flux de chaleur sur le cylindre intérieur pour différents intervalles du maillage est montrée dans le tableau IV.2. De ces différentes figures on a constaté que pour ce régime d'écoulement laminaire, le maillage a une influence limitée sur les résultats. Pour cela on choisit le maillage qui donne une courbe de Nusselt intermédiaire sur les Figures IV.3 à savoir 60-120. Par la suite, avec le maillage adopté (60-120) on a comparé nos résultats avec ceux expérimentaux de Kuhn-Goldstein [3] et on a constaté une bonne concordance que sa soit en terme de température, d'isotherme, du nombre de Nusselt ou encore de conductivité thermique équivalente. Les conditions de la simulation indiquées ci-dessus (tableau IV.1) et les caractéristiques du fluide sont prises à la température moyenne  $T_m=(T_i+T_o)/2$ .



a) Température le long de la direction radiale  
( $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ )



b) Conductivité thermique équivalente  
Le long des deux cylindres



c) Lignes d'isothermes

d) Conductivité thermique équivalente

Figures IV.4 : Comparaison des résultats actuels avec ceux de Kuhn-Goldstein [3]

$Pr=0.7, Ra=4.7 \cdot 10^4$  et  $d_o/d_i=2.6$

### IV.1.2 Etude du cas où le cylindre intérieur est muni d'ailettes

Dans le but d'améliorer les échanges thermiques entre les deux parois de l'espace annulaire, on va augmenter la surface d'échange du cylindre intérieur en le munissant d'ailettes figure IV.5. On analysera l'influence de plusieurs paramètres sur l'intensité de ces échanges sur les deux cylindres intérieur et extérieur (le nombre de Rayleigh ( $Ra$ ), le nombre des ailettes ( $n$ ), leurs longueurs ( $l_a$ ) et leurs orientations ( $\theta$ ))

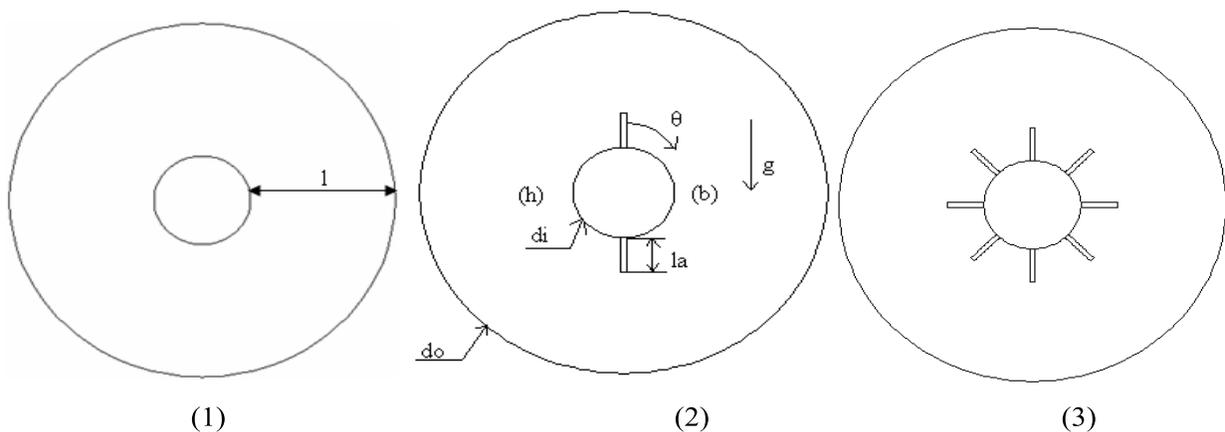


Figure IV.5 : L'espace annulaire : (1) sans ailettes, (2) avec deux ailettes, (3) avec 8 ailettes

(h) partie haute (gauche) et (b) partie basse (droite) du cylindre intérieur

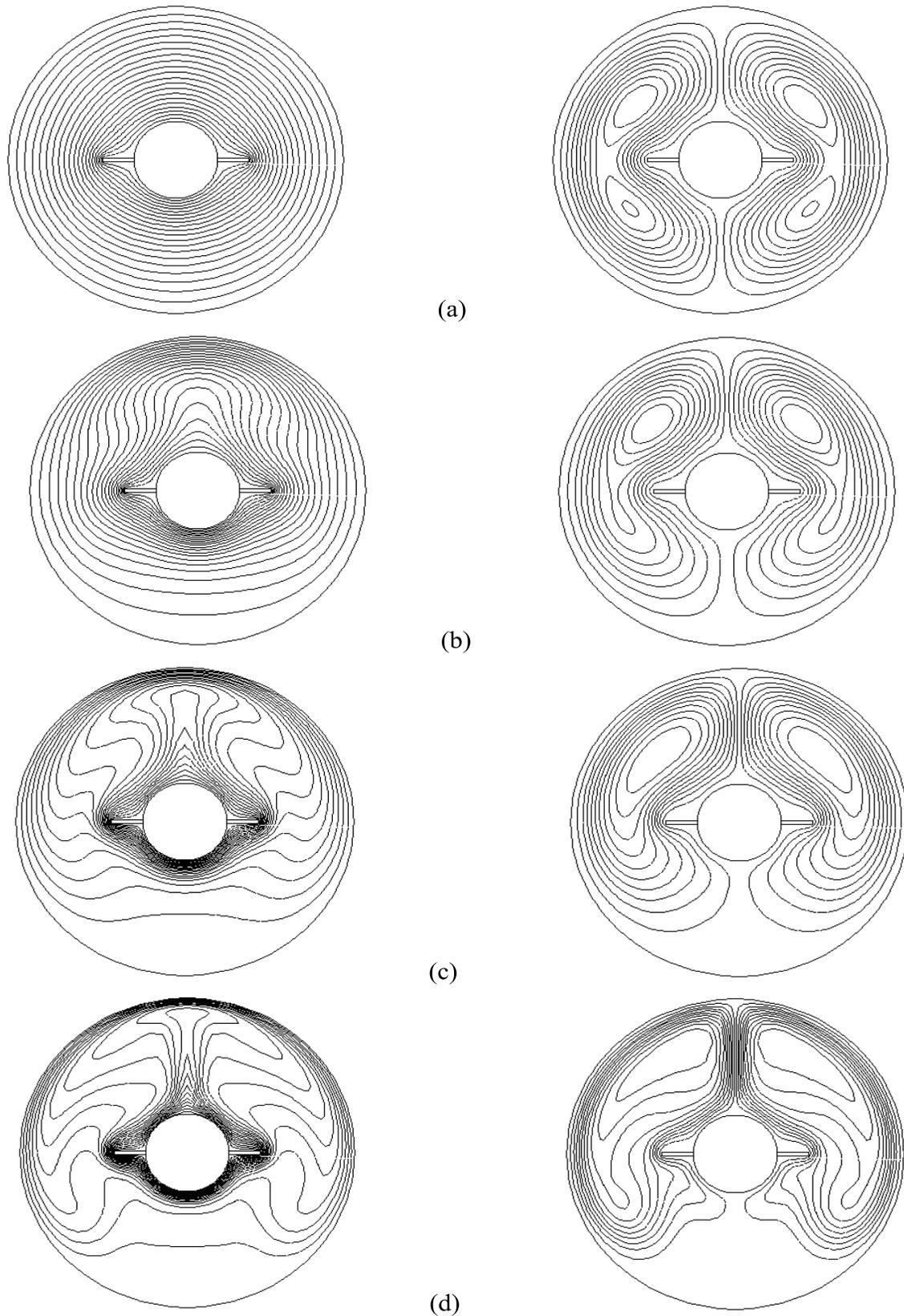
Les conditions de simulations sont indiqués sur le tableau IV.3 Le fluide est de l'air pris aux conditions de température moyenne  $T_m$  et une pression atmosphérique  $P=1$  bar.

$d_o$ (m)	$d_i$ (m)	$T_o$ (K)	$T_i$ (K)	$l=(d_o-d_i)/2$	$p$ (Pa)	$Pr$
0.08	0.02	327	373	0,03	101325	0,7

#### IV.1.2.a Influence du nombre de Rayleigh (régime d'écoulement)

La figure IV.6 représentent les lignes d'isothermes et les lignes de courant pour le cas de deux ailettes horizontales ( $\theta=90^\circ$ ) avec une longueur  $l_a=0.25$  l, et ce pour différents régimes d'écoulements. On constate que les isothermes et les lignes de courants dépendent du régime d'écoulement, ainsi pour  $Ra=10^2$  les isothermes apparaissent comme des cercles concentriques et équidistants entre elles; caractéristique d'un régime dominé par la conduction dans le fluide. En augmentant le nombre de Rayleigh de  $10^2$  à  $10^4$ , la concentricité des cercles (isothermes) commence à disparaître et une plume plus au moins épaisse se forme sur le cylindre intérieur à la partie supérieure de l'espace annulaire. On remarque que les distances entre les isothermes se serrent au voisinage de la partie basse du cylindre intérieur signifiant qu'une couche limite thermique commence à se former. La zone de recirculation au dessous des ailettes pour  $Ra=10^3$  commence à disparaître et on ne la retrouve pas pour  $Ra=10^4$ . C'est les caractéristiques d'un régime transitoire qui est caractérisé par l'influence simultanées de la convection et de la conduction dans le fluide. Pour  $Ra=10^5$  et plus, l'écoulement dans le fluide est dominée par la convection ce qui se voit dans les contours des lignes isothermes qui ne sont plus régulier dans l'espace annulaire. La couche limites thermique s'établie autour du cylindre intérieur et les ailettes, avec la différence qu'elle est épaisse sur les faces supérieur des ailettes et du cylindre intérieur et mince dans les partie inferieure. Sur le cylindre extérieur la couche limites thermique est mince dans sa partie supérieure et devient épaisse on descendant sur sa périphérie de part et d'autre.

Pour les fonctions de courants on remarque deux zones de recirculation du fluide de part et d'autre de l'axe de symétrie vertical, de plus il y a une symétrie par rapport à l'axe horizontale pour  $Ra=10^2$ . La symétrie horizontale disparaît avec l'accroissement de  $Ra$ . Ceci étant dû au fait que la vitesse du fluide dans son ascension est beaucoup plus importante dans la partie inferieur de l'espace annulaire. Lorsque le fluide monte dans la partie supérieur il se refroidie au contact du fluide froid au voisinage du cylindre extérieur.



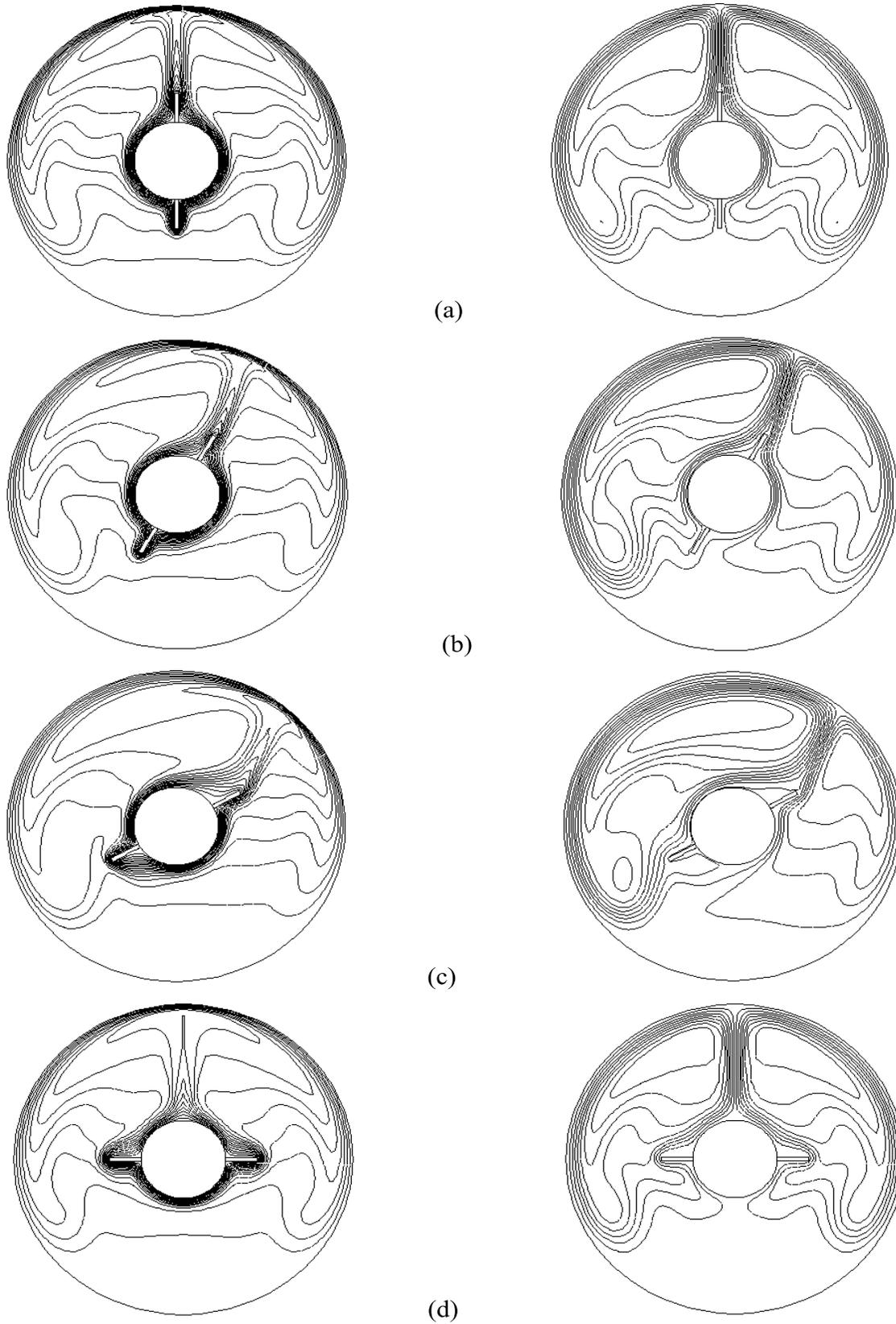
**Figure IV.6 :** Lignes d'isothermes (gauche) et fonction de courant (droite)  
(a)  $Ra=10^2$ , (b)  $Ra=10^3$ , (c)  $Ra=10^4$ , (d)  $Ra=10^5$

#### IV.1.2.b Influence de L'orientation des ailettes

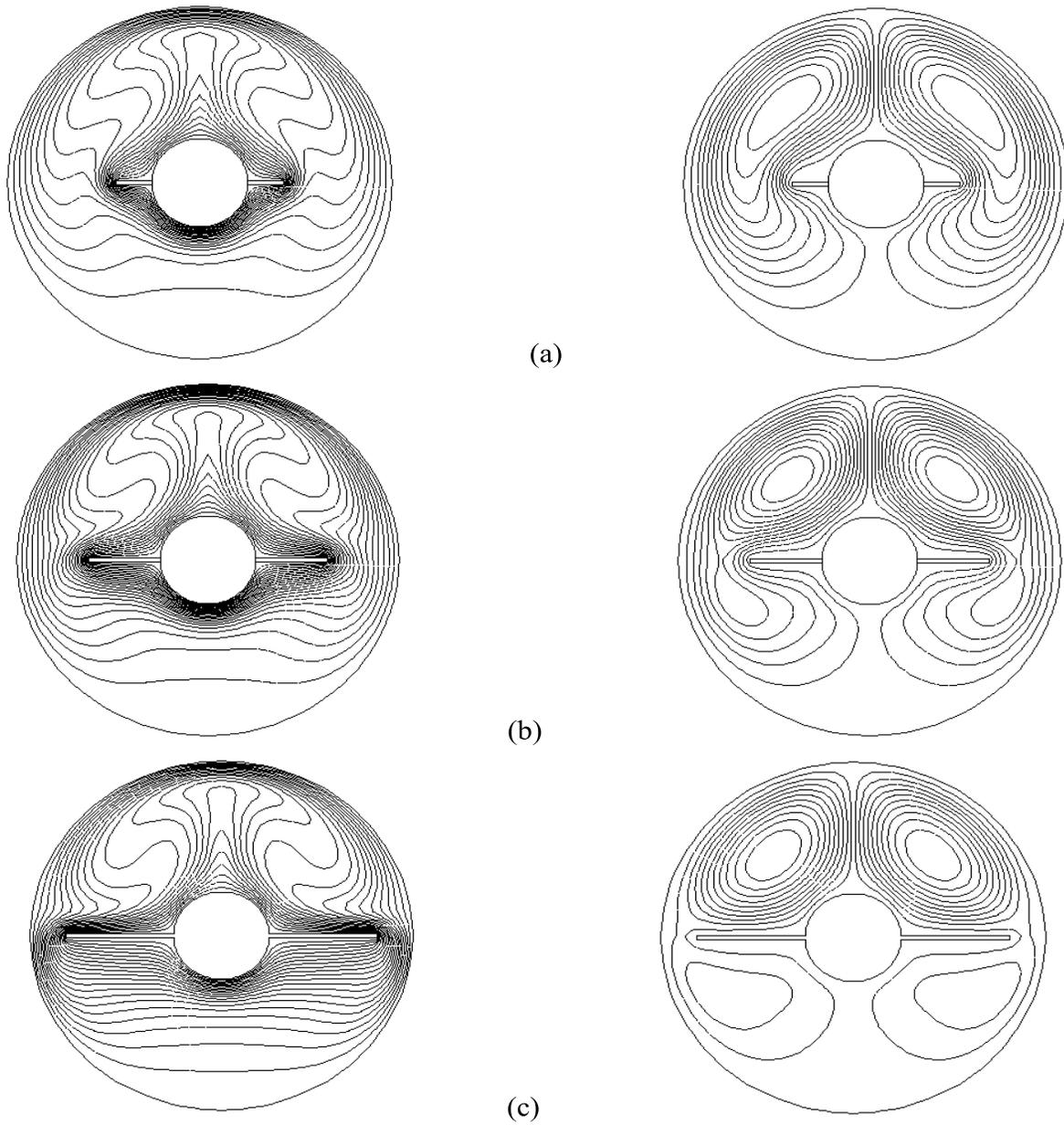
Pour étudier l'influence de l'orientation des ailettes sur les isothermes et les fonctions du courant, on fixe la longueur de l'ailette, ainsi que le régime d'écoulement (Rayleigh) et on varie l'orientation des ailettes par rapport à la verticale ( $\theta=0, 30, 60$  et  $90^\circ$ ) comme on peut le voir sur les figures IV.7. Lorsque les ailettes sont verticales (figure IV.7a) ou horizontales (figure IV.7d), la plume thermique se formant dans la partie supérieure de l'espace annulaire au-dessus du cylindre intérieur est verticale. Les fonctions de courant apparaissent avec deux zones de recirculation du fluide, symétriques de part et d'autre de l'espace annulaire. Les configurations des lignes d'isothermes et des lignes de courants pour les positions  $\theta=30^\circ$  et  $\theta=60^\circ$  (Figure IV.7b et c) sont différentes de celles des ailettes horizontales et verticales. La plume thermique suit l'orientation de l'ailette supérieure. Pour les fonctions de courants, la zone de circulation (symétrique pour les cas précédents) dans la partie droite de l'espace annulaire monte en haut à la même position pour les deux orientations. Ainsi le fluide dans cette partie a un parcours plus long pour  $\theta=30^\circ$  ce qui explique la petite zone de circulation qui se crée dans la partie basse de l'espace annulaire au voisinage de l'ailette inférieure. Pour la partie gauche, la zone de circulation du fluide rétrécit en suivant l'ailette.

#### IV.1.2.c Influence de la longueur des ailettes et de leurs nombres

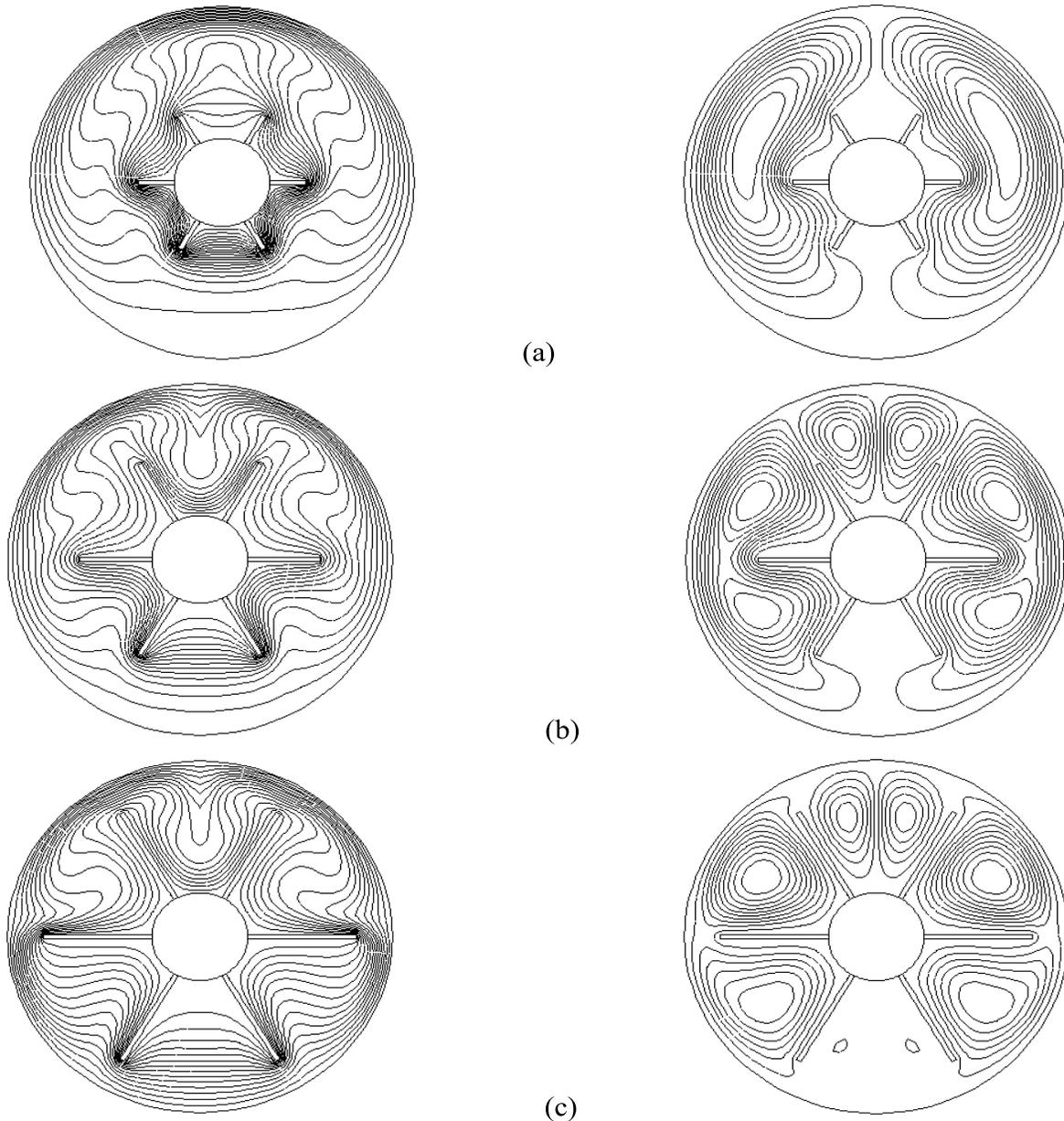
Les figures IV.8 et IV.9, montrent les lignes d'isothermes (à gauche) et les fonctions de courants (à droite) respectivement pour deux ailettes et six ailettes, et ce pour trois différentes longueurs de celles-ci ( $l_a=0.25, 0.5$  et  $0.75$  l) et  $Ra=10^4$ . On remarque que l'augmentant de la longueur, dans le cas de deux ailettes horizontales, intensifie l'échange dans la partie supérieure de l'espace annulaire, et diminue dans la partie inférieure. Dans le cas de six ailettes la plume thermique en forme d'un champignon (à la partie supérieure de l'espace annulaire) se renverse et prend origine sur le cylindre extérieur en direction du cylindre intérieur. Pour les fonctions de courants, une augmentation de la longueur des ailettes (cas 2 ailettes) isole la partie inférieure de l'espace annulaire en limitant le mouvement du fluide. Dans la partie supérieure de l'espace annulaire, on observe deux zones de recirculation symétriques par rapport à l'axe vertical, donnant lieu à deux tourbillons concentriques, ce qui intensifie le mouvement de rotation du fluide dans cette région. Pour le cas à six ailettes, en plus de la symétrie par rapport à l'axe verticale, il y a apparition de tourbillons entre les ailettes à mesure que la longueur de celle-ci augmente (un double tourbillon entre les ailettes du sommet pour  $l_a>0.25$  l).



**Figure IV.7 :** Lignes d'isotherme (à gauche) et fonctions de courants (à droite)  
 (a)  $\theta=0^\circ$ , (b)  $\theta=30^\circ$ , (c)  $\theta=60^\circ$  et (d)  $\theta=90^\circ$



**Figure IV.8 :** Isotherme (gauche) et ligne de courants (droite) pour  $Ra=10^4$  et  $\theta=90^\circ$  pour deux ailettes et différentes longueurs : (a)  $l_a=0.25 l$ , (b)  $l_a=0.5 l$ , (c)  $l_a=0.75 l$



**Figure IV.9 :** Isotherme (gauche) et ligne de courants (droite) pour  $Ra=10^4$   
 Pour six ailettes et différentes longueurs : (a)  $l_a=0.25 l$ , (b)  $l_a=0.5 l$  et (c)  $l_a=0.75 l$

### IV.1.3 Evaluation des échanges thermiques (nombre de Nusselt)

Dans cette partie, on s'intéressera à l'échange thermique entre les deux cylindres (intérieur et extérieur) représenté généralement par un nombre de Nusselt locale (moyen) ainsi que dans certains cas par l'efficacité des ailettes. On se basera pour la suite des calculs sur une longueur de référence prise comme étant le périmètre de la partie considéré :

$$Nu_x = h_x S / \lambda \quad \text{et} \quad \overline{Nu} = \frac{1}{S} \int_s Nu_x ds$$

où  $S$  est le périmètre de la partie local considérée et  $s$  une coordonnées curviligne.

### IV.I.3.a Influence de l'orientation des ailettes

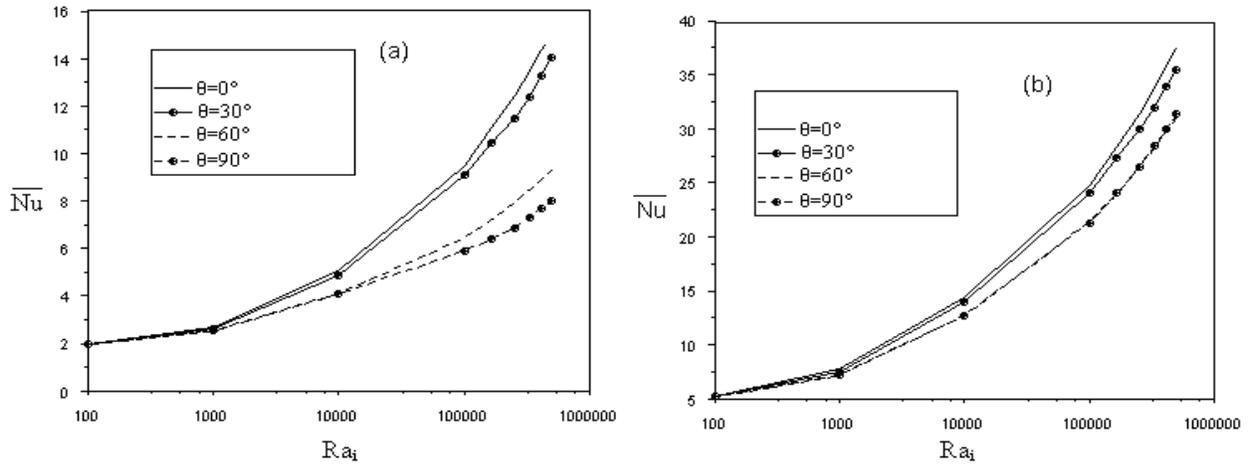
L'étude de l'influence de l'orientation des ailettes, sur l'échange thermique, se fera pour le cas de deux ailettes avec une longueur  $l_a=0.25l$  et  $d_o/d_i=4$  (de  $\theta=0^\circ$  pour ailettes verticales à  $\theta=90^\circ$  pour ailettes horizontales). Pour le calcul du nombre de Nusselt local on prendra comme longueur de référence le périmètre de la partie considérée.

Les figures IV.10 (a) et (b) représentent, le nombre de Nusselt moyen sur le cylindre intérieur en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes positions des ailettes. On constate que pour des faibles nombres de Rayleigh, le mode de transfert par conduction est dominant dans le fluide, ce qui explique la faible influence de l'orientation des deux ailettes sur l'échange thermique paroi/fluide. Mais pour des nombres de Rayleigh supérieurs à  $10^3$ , la convection prend effets de plus en plus (à mesure que Ra augmente). On remarque aussi, pour des grands nombres de Rayleigh ( $>10^3$ ), une diminution du Nusselt moyen lorsque  $\theta$  varie  $0^\circ$  à  $90^\circ$ , cela étant due au fait que lorsque  $\theta$  augmente la résistance des ailettes au mouvement de l'air augmente (avec un maximum pour  $\theta=90^\circ$  et un minimum pour  $\theta=0^\circ$ ).

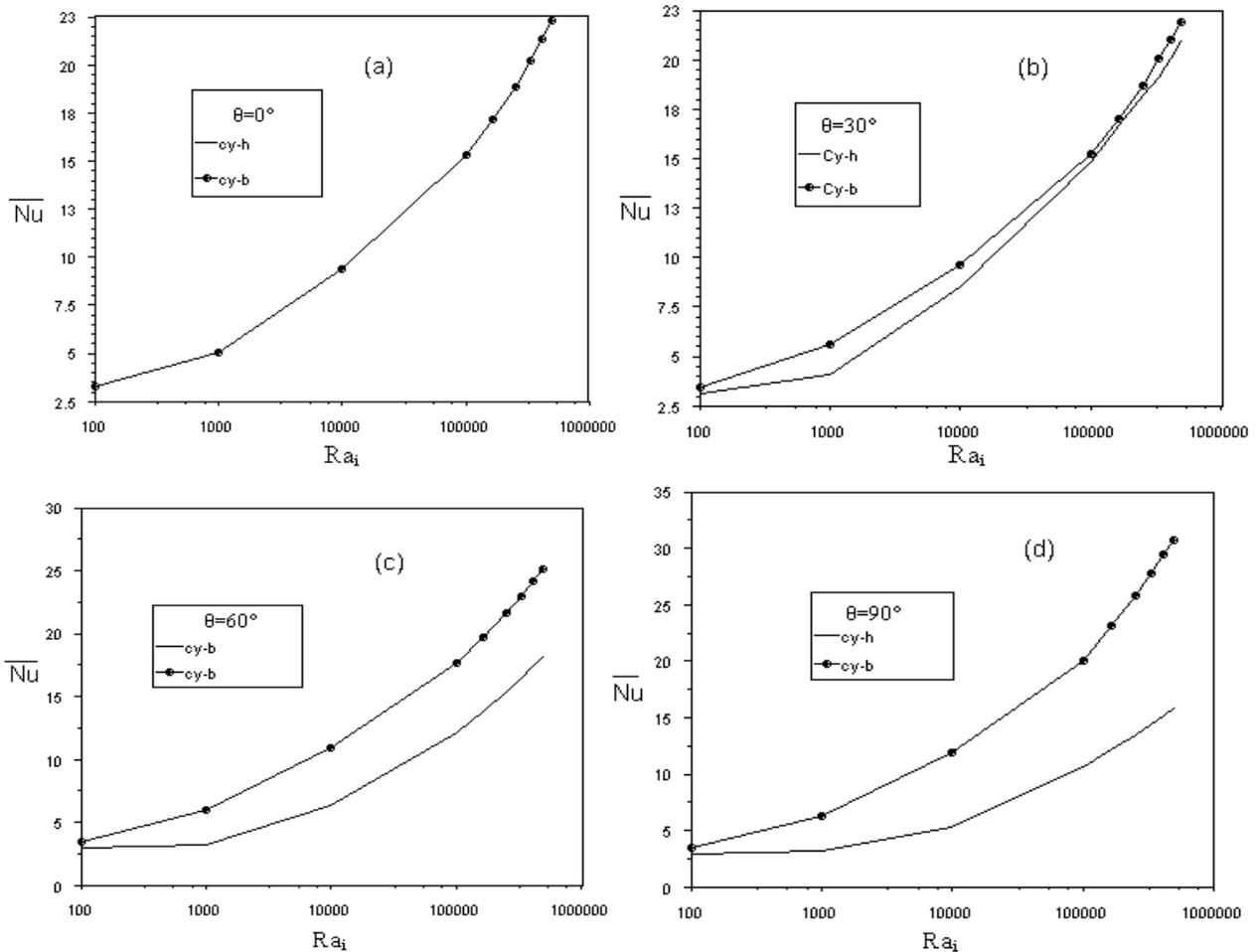
Sur les figures IV.11 (a-d), on représente l'importance des échanges sur les deux parties du cylindre intérieur, séparées par les ailettes (h : partie haute ou gauche et b : partie basse ou droite). Elles montrent que l'échange augmente sur les deux parties avec l'augmentation du nombre de Rayleigh d'une part, d'autre part il diminue dans la partie haute et augmente dans la partie basse à mesure que la position des ailettes passent de  $\theta=0$  à  $90^\circ$ .

Pour le cas particulier de deux ailettes horizontales, les figures IV.12 (a et b) représentent la température T (adimensionnelle) en fonction de la dimension radiale R (adimensionnelle), dans les directions  $\varphi=0^\circ$  et  $\varphi=180^\circ$  et pour  $Ra=100$  et  $Ra=504280$ . Pour  $Ra=10^2$ , les températures suivant les deux directions ( $\varphi=0^\circ$ ) et ( $\varphi=180^\circ$ ) sont dans le même ordre de grandeur alors que pour  $Ra=504280$ , il y a une très forte pente (un fort gradient pour  $\varphi=180^\circ$ ), ce qui explique le meilleur échange sur la partie basse du cylindre intérieur.

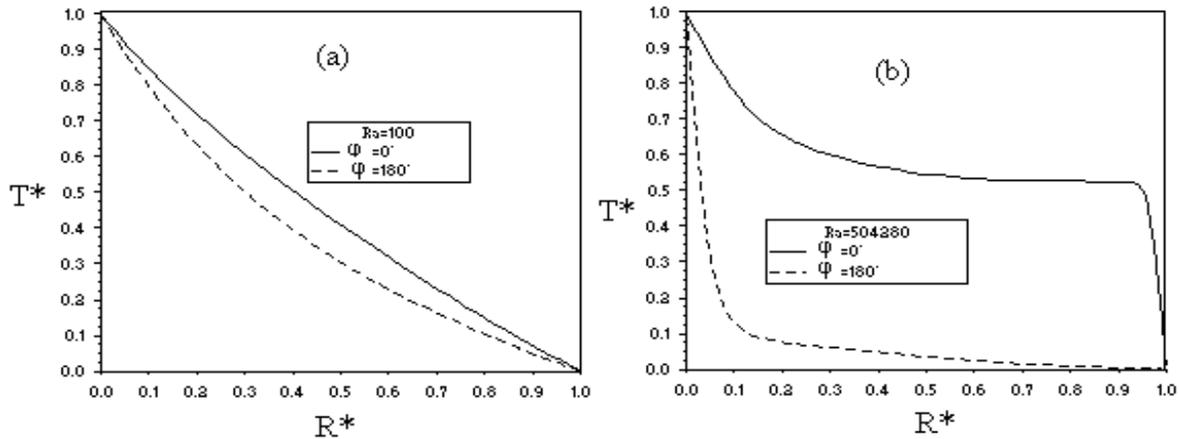
Sur la figure IV.13, on a représenté l'effet de l'orientation des ailettes sur le Nusselt moyen du côté cylindre extérieur. On constate une légère augmentation du nombre de Nusselt pour  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=30^\circ$  par rapport a  $\theta=60^\circ$  et  $\theta=90^\circ$ .



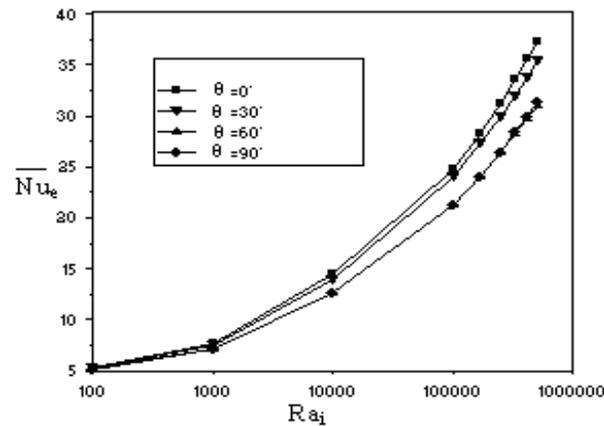
**Figure IV.10** : Nusselt moyen sur le cylindre intérieur, pour différentes orientations des ailettes. (a) : ailettes seule, (b) : ailette + cylindre



**Figure IV.11** : Nusselt moyen sur les deux parties du cylindre intérieur (h : partie haute, b : partie basse) et (a) :  $\theta = 0^\circ$ , (b) :  $\theta = 30^\circ$ , (c) :  $\theta = 60^\circ$ , (d) :  $\theta = 90^\circ$



**Figure IV.12** : Température radiale le long des directions  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=180^\circ$   
(a) :  $Ra=100$ , (b) :  $Ra=504280$



**Figure IV.13** : Nusselt moyen sur le cylindre extérieur pour différentes positions des ailettes

Pour caractériser l'échange local sur la partie cylindrique du cylindre intérieur, et sur les ailettes, on a représenté le nombre de Nusselt locale pour les deux configurations d'ailettes, horizontales et verticales, pour une longueur  $l_a=0.25 l$  et un nombre de Rayleigh de  $10^2$  et  $504280$ .

Pour un nombre de Rayleigh ( $Ra=10^2$ ) (figure IV.14 (a)), l'échange local est indépendant de l'orientation des ailettes et s'annule sur les points de liaisons base des ailettes/cylindre. Il est de meilleure qualité sur les ailettes que sur la partie cylindrique. En augmentant le nombre de Rayleigh ( $Ra=504280$ ) (figure IV.14 (b)), on obtient un échange minimal sur le point supérieur du cylindre intérieur pour  $\theta=90^\circ$ , alors que pour  $\theta=0^\circ$ , on a un meilleur échange sur l'ailette situé en bas de l'espace annulaire.

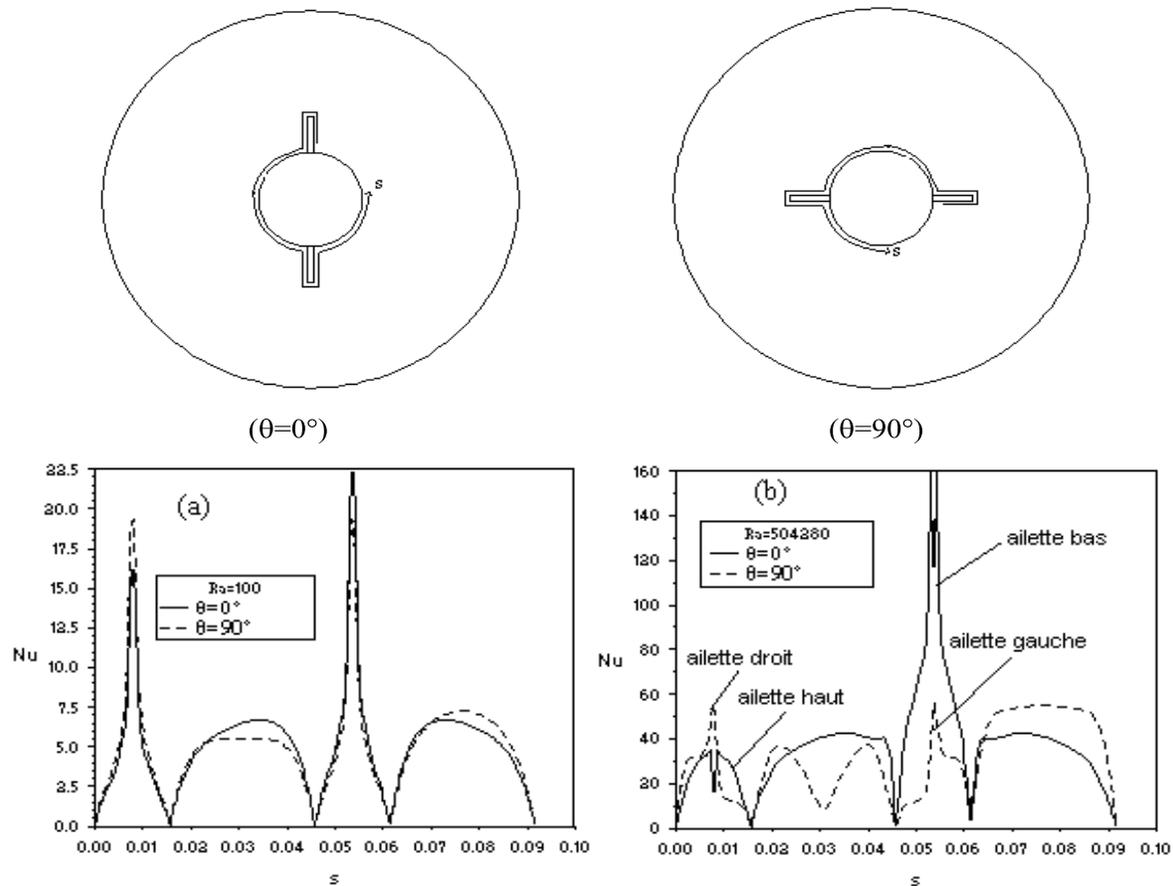


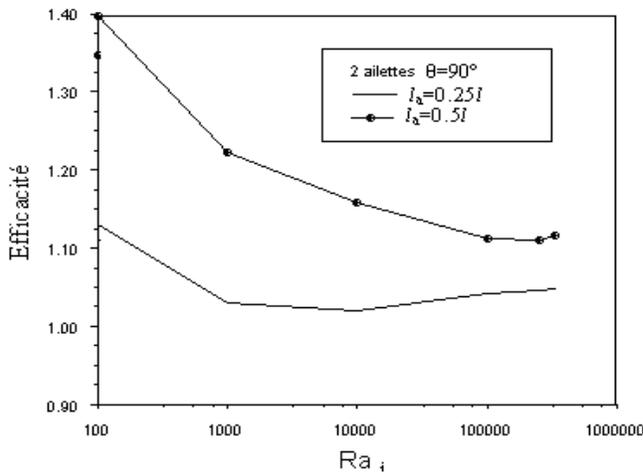
Figure IV.14 : Nusselt locale le long du cylindre intérieur, (a) :  $Ra=10^2$ , (b) :  $Ra=504280$

**IV.I.3.b Influence de la longueur des ailettes**

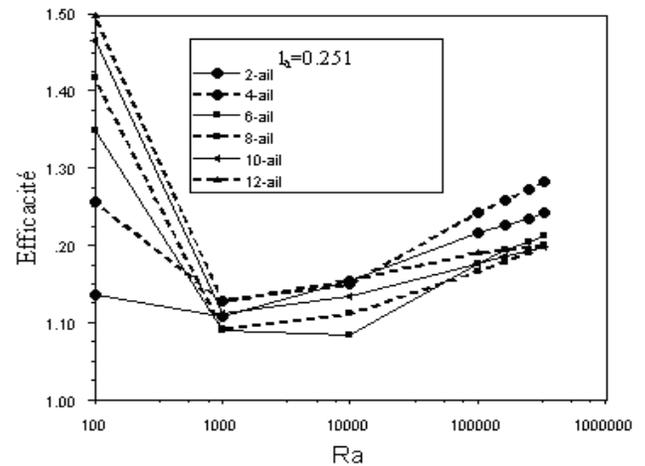
Pour étudier l'influence de la longueur des ailettes sur les échanges thermiques, on calcule leurs efficacités E (définie comme étant, le rapport entre la quantité de chaleur échangée au niveau du cylindre extérieur, le cylindre intérieur étant munit d'ailettes, et la quantité de chaleur échangée sur le cylindre extérieur en l'absence d'ailettes sur le cylindre intérieur), ce qui peut être représenté par la formulation suivante :  $E = Nu_e / Nu_0 \cdot \overline{Nu_e}$  et  $\overline{Nu_0}$  étant respectivement le Nusselt moyen sur le cylindre extérieur en présence des ailettes sur le cylindre intérieur et Nusselt moyen sur le cylindre extérieur, avec un cylindre intérieur sans ailettes. Dans cette partie le Nusselt est basé sur le diamètre du cylindre extérieur ( $d_o$ ). En régime laminaire ( $Ra_1 < 10^6$ ), le transfert thermique sur le cylindre intérieur muni d'ailettes augmente avec l'augmentation de la longueur des ailettes figure IV.15. Sur la partie cylindrique du cylindre intérieur l'échange diminue, du fait qu'en augmentant la longueur des ailettes, la résistance au flux augmente, mais cela est compensé par l'augmentation de la surfacer d'échange. Ce qui explique l'augmentation de l'efficacité avec la longueur.

**IV.I.3.c Influence du nombre des ailettes**

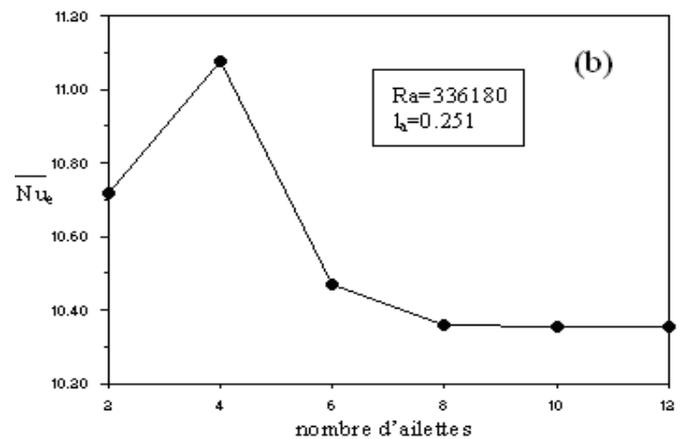
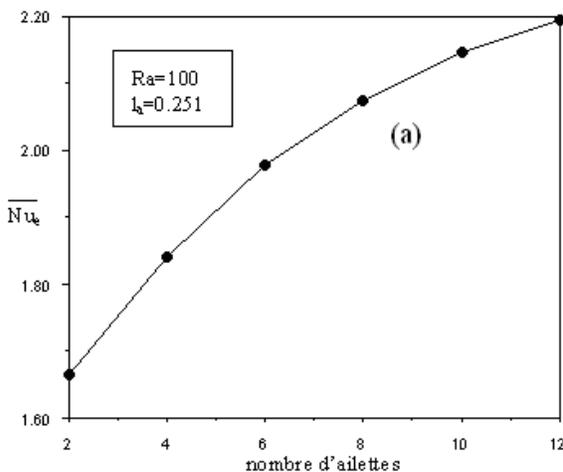
Ici on fait varier le nombre d'ailettes, ainsi que leurs longueurs pour voir leurs effets sur la forme du flux et le champ de température ainsi que l'échange sur les différentes parties de la cavité. Les figures IV.16 et 17, montrent que pour des nombre de faibles nombres de Rayleigh (régime dominé par la conduction), l'efficacité des ailettes augmente on augmentant leurs nombres. Au delà de  $Ra=10^3$  (la convection devient de plus en plus importante devant la diffusion par conduction dans le fluide), on remarque que l'efficacité des ailettes diminue on augmentant leurs nombres. Pour ce régime d'écoulement dominé par la convection ( $Ra=336180$ ), l'échange de chaleur sur le cylindre extérieur au-delà de 4 ailettes décroît en augmentant leurs nombres ce qui n'est pas le cas pour le régime dominé par la conduction.



**Figure 3.15 :** Influence de la longueur d'ailettes sur l'efficacité (cas 02 ailettes horizontales)



**Figure 3.16 :** Influence du nombre d'ailettes sur l'efficacité



**Figure IV.17 :** Influence du nombre d'ailettes sur le Nusselt moyen (coté cylindre extérieur)  
(a) :  $Ra=100$  (b) :  $Ra=336180$

## IV.2 Résultats de la simulation pour le cas de la convection mixte

Le transfert thermique en régime de convection mixte, dans un espace annulaire délimité par deux cylindres concentriques horizontaux tournants, avec un gradient thermique radiale, a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années. Le fluide est mis en mouvement par les effets conjugués de la force d'inertie, la force centrifuge et la force d'Archimède. Les résultats de cette association de forces, représentés par les deux nombres de Rayleigh et Reynolds, déterminent la configuration du flux et le mécanisme de transfert de la chaleur. Pour ce problème particulier, le nombre de Richardson, qui est le rapport du nombre de Grashof sur le nombre de Reynolds, représente l'importance de l'effet de la force de flottabilité d'Archimède par rapport à la force centrifuge de rotation, sur le flux du fluide et le transfert de chaleur.

Dans cette deuxième partie, on analysera l'influence de la rotation du cylindre intérieur, muni d'ailettes, sur les échanges thermique aux niveaux des deux cylindres (intérieur et extérieur), ainsi que la répartition des lignes isothermes et des fonctions de courant. Le transfert thermique, dans ce type de problème, est guidé par deux phénomènes : la convection forcée induite par la rotation des ailettes et la convection naturelle causé par la variation de la densité du fluide suite à la différence de température entre les deux cylindres.

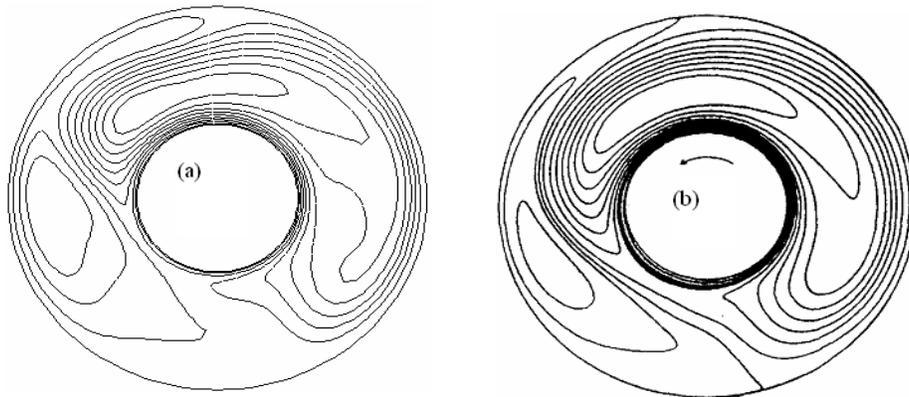
### IV.2.1 Validation des résultats pour le cas du cylindre intérieur tournant (sans ailettes)

On a commencé par une validation des résultats pour le cas de convection mixte dans un espace annulaire dont le cylindre intérieur est animé d'une vitesse de rotation angulaire ( $\omega$ ). Les résultats de simulation sont comparés avec ceux de T. S. Lee [10]. La comparaison porte sur la forme des lignes isothermes et de courants (Figures IV.18) pour un nombre de Rayleigh ( $Ra=10^5$ ) et un nombre de Reynolds ( $Re=560$ ), ainsi que sur les données de Nusselt locale, sur le cylindre extérieur avec  $Ra=10^5$  (Figures IV.19),  $Re=140$  (Figure IV.19a) et  $Re=560$  (Figure IV.19 b).

La géométrie et les conditions de simulation sont celles citées dans le tableau IV, à la différence que le cylindre intérieur est animé d'une vitesse de rotation ( $\omega$ ). On remarque que les formes des lignes de courants et des lignes isothermes obtenues par la simulation actuelle, sont en concordance avec celles données par T.S Lee [8]. Pour le Nusselt locale sur le cylindre extérieur, on observe une reproduction quantitative des résultats avec une différence légère entre  $-150 < \theta < 180$  pour  $Re=560$  (Figure IV.19b), et  $0 < \theta < 180$  pour  $Re=140$  (Figure IV.19a).

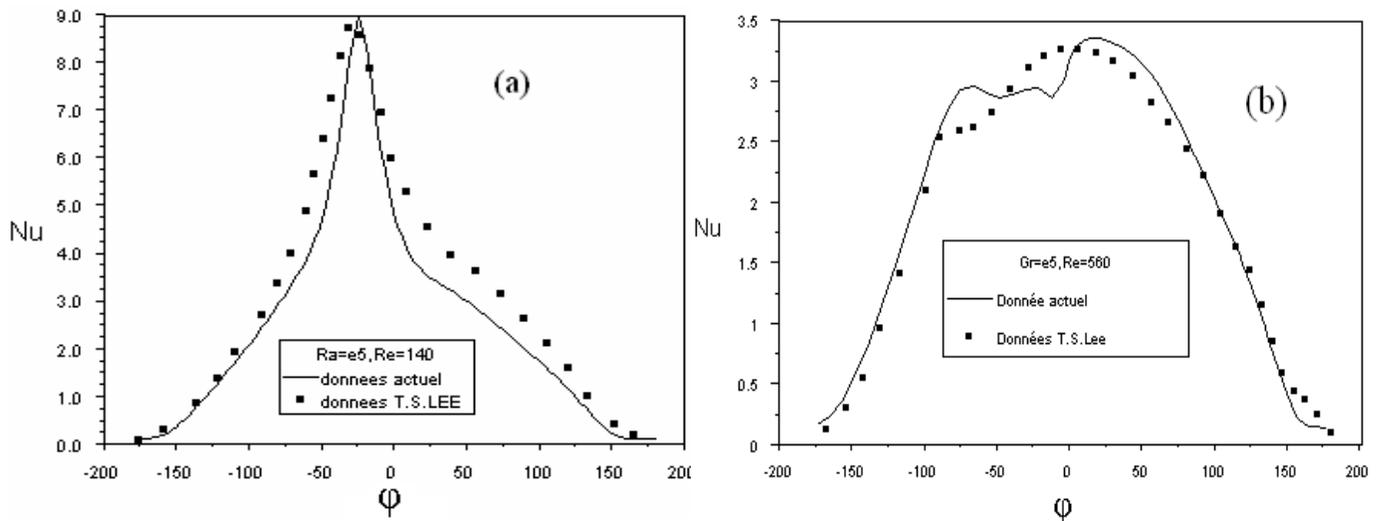


Isothermes (a) : données actuelles, (b) : T.S. Lee [6]



Fonction de courant (a) : données actuelles, (b) : T.S. Lee [10]

**Figure IV.18** : Lignes d'isothermes et fonctions de courants pour  $Ra=10^5$  et  $Re=560$   
 (a) : données de simulation, (b) : T.S. Lee [10]



**Figure IV.19** : Nombre de Nusselt locale sur le cylindre extérieur  
 (a) :  $Re=140$ , (b) :  $Re=560$

### IV.2.2 Etude du cas du cylindre intérieur tournant avec ailettes

Dans cette partie de l'étude, le système tournant est composé du cylindre intérieur plus les ailettes au nombre de deux ( $l=0,25(r_o-r_i)$ ). Nous avons montré au chapitre précédent que la position des ailettes, influe considérablement sur l'échange thermique. La rotation du cylindre intérieur entraîne la variation de la position des ailettes dans le temps, ce qui nous amène à considérer un régime dépendant du temps. En plus, le phénomène est périodique, on se limitera dans notre cas au régime dit périodique établi.

#### IV.2.2.1 choix du maillage (mobile)

On a deux régions d'écoulement de fluide, l'une au voisinage du cylindre intérieur (entraînée en rotation par ce dernier) et l'autre très loin au voisinage du cylindre extérieur (n'est que faiblement concernée), on adoptera alors la méthode du maillage mobile. Cette méthode était développée initialement pour la simulation des aubes dans les tanks de mélange et consiste à faire tourner physiquement le maillage entourant les parties mobiles de la structure. Dans notre cas, la partie mobile du maillage entourant les ailettes glisse en rotation sur la partie fixe (figure IV.20) suivant une interface située à  $0,3 (r_o-r_i)$  du cylindre intérieur.

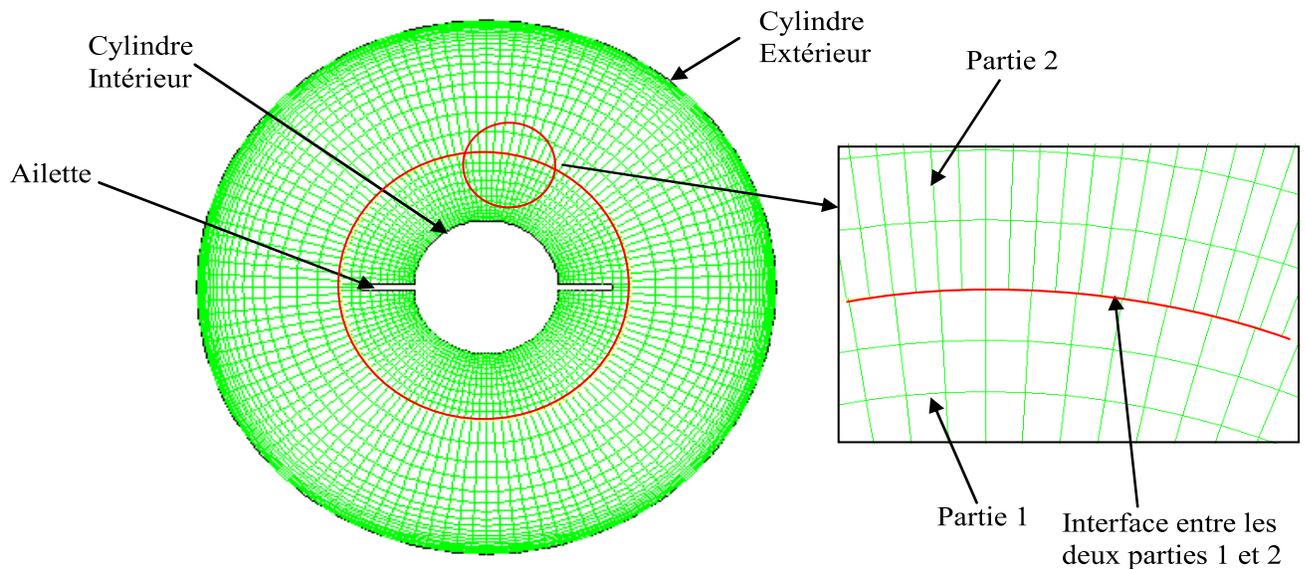
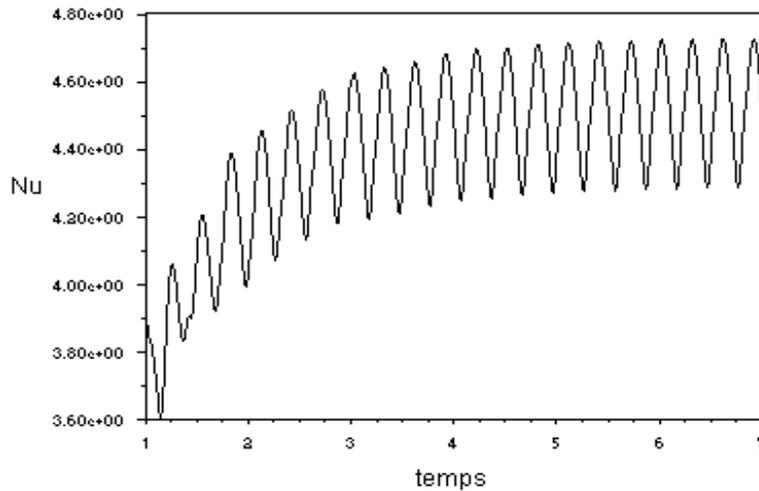


Figure IV.20 : Définition du maillage mobile

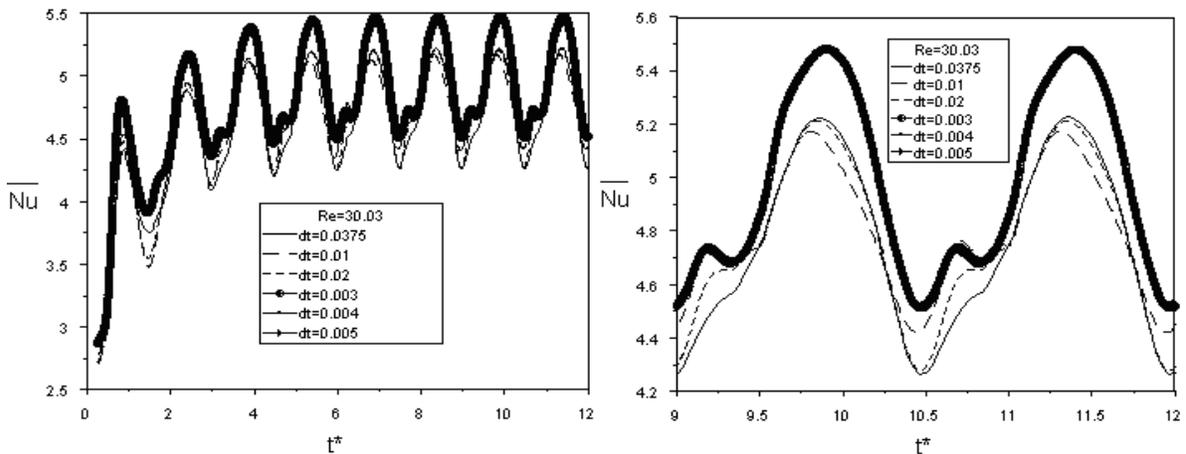
Les maillages des deux parties sont créés séparément, avec une condition d'interface dans la région commune, puis ils sont assemblés pour former un maillage final. L'interface, après assemblage, est constituée par deux limites, chacune d'elles appartient à la région du maillage mobile et statique pour lesquelles la condition de continuité du flux est appliquée.

**IV.2.2.2 Etablissement du régime (périodique établi)**

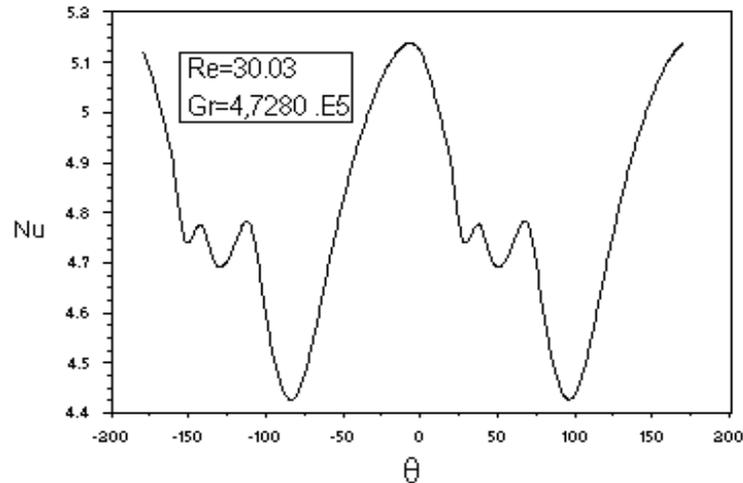
Pour un pas de temps ( $dt$ ), et une vitesse de rotation ( $\omega$ ), le maillage tourne avec un angle ( $\Theta = \omega dt$ ), la solution est itérée jusqu'à convergence. Le processus est répété pour les pas de temps suivant jusqu'à atteindre la limite maximale voulue pour le temps. Pour chaque itération du temps, donc pour chaque positions des ailettes, le Nusselt sur l'ensemble ailettes et cylindre est calculé. Au cours du processus, on observe un phénomène périodique établi à partir d'un certain temps ( $t^* = 5$ ), comme montré sur la figure IV.21 représentant la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps.



**Figure IV.21 :** Evolution du nombre de Nusselt moyen sur le cylindre intérieur en fonction du temps



**Figure IV.22 :** Evolution du nombre de Nusselt moyen sur le cylindre intérieur en fonction du temps pour différents pas de temps



**Figure IV.22bis** : Evolution du nombre de Nusselt moyen sur le cylindre intérieur pour une période ( $-180^\circ < \theta < +180^\circ$ )

Le pas de temps et le nombre d'intervalle sont choisis de telles façons à avoir un nombre entier de périodes pour chaque simulation, et revenir toujours à la position initiale tel que les ailettes sont verticales ( $\theta=0^\circ$ ). Pour voir l'influence du pas de temps sur la simulation, on a testé plusieurs valeurs ( $\Delta t = 0,0375 ; 0,01 ; 0,02 ; 0,005 ; 0,003 ; 0,002 ; 0,001$ ) pour un nombre de Reynolds ( $Re=30.0343$ ), un nombre de Grashof ( $Gr= 4.7280 \cdot 10^5$ ) et un nombre de Richardson ( $\gamma= Gr/Re^2=524.1274$ ), figure IV.22. On observe une divergence (différence) dans le Nusselt moyen pour les premiers temps de chaque période (correspondant à des positions successives  $\theta$  des ailettes). On resserrant le pas de temps (dt de plus en plus petit) on converge vers une allure stable ne dépendant pas du pas choisi. C'est ce pas de temps à partir duquel l'allure du nombre de Nusselt ne change pas qu'on prend pour les simulations suivantes. Pour des faibles pas de temps, l'évolution du Nusselt moyen passe d'un maximum ( $\theta= -6^\circ$ ) vers une forme d'un palier, puis à nouveau par des extrémums (un minimum pour  $\theta=96^\circ$ , un maximum pour un  $\theta=174^\circ$  pour revenir à la même position ( $\theta=0^\circ$ ), figure IV.22bis.

#### IV.2.2.3 Analyse des lignes de courant et des lignes isothermes

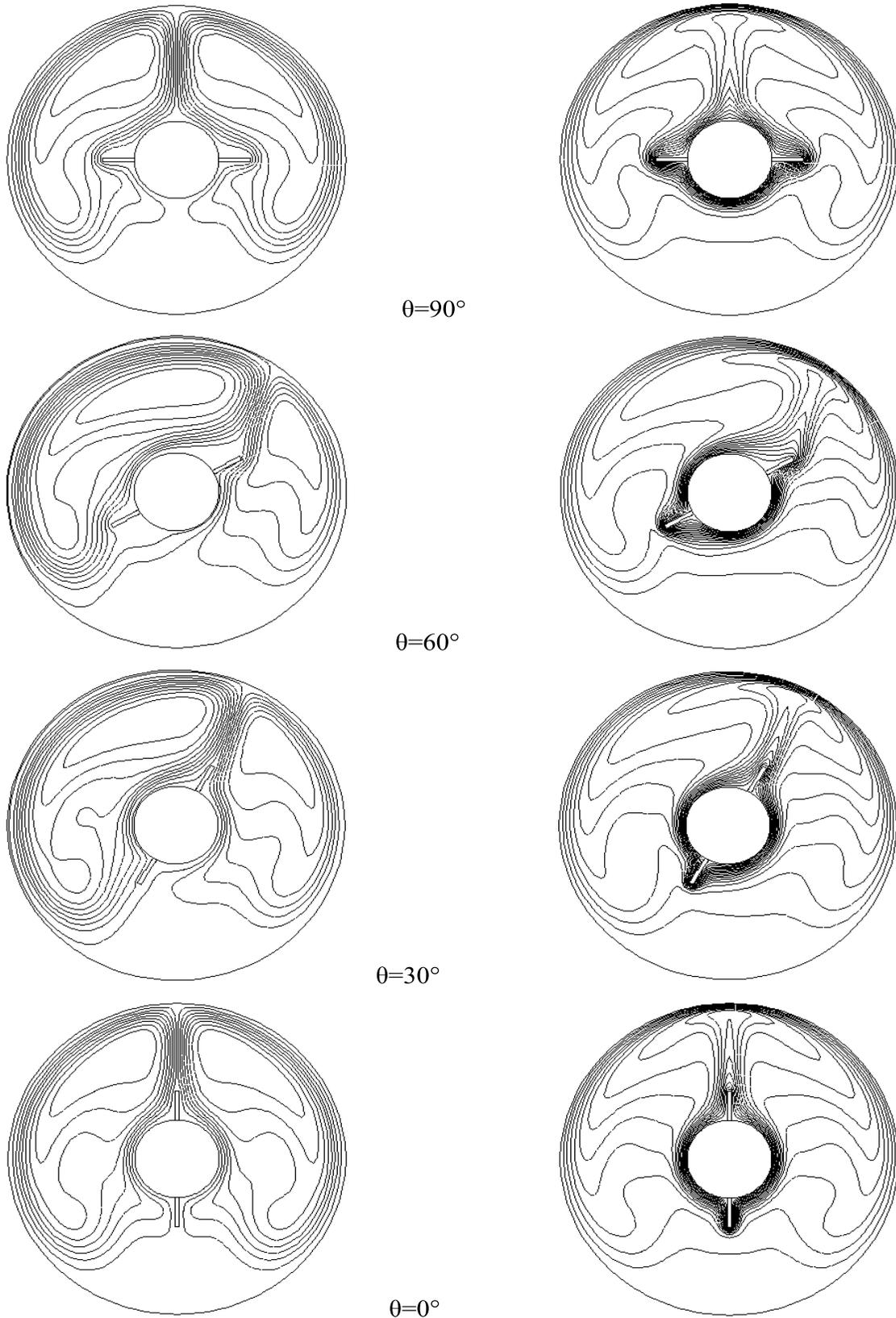
Comme première investigation les figures IV.23 et IV.24 représentent les lignes isotherme et les lignes de courant pour le cas de deux ailette avec  $l=0,25(r_o-r_i)$  à différents instants, correspondant à des positions successives des ailettes par rapport à la verticale de  $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$ . La figure IV.23 illustre le cas ou  $Re=0$  c'est-à-dire sans rotation du cylindre intérieur ou la convection naturelle gouverne seule l'écoulement et les transferts dans le fluide. Les résultats sont identiques aux cas de la première partie, Pour les cas ou  $Re \neq 0$ , les transferts sont gouvernés par la convection mixte ou le mouvement est du à la fois à la

différence de température entre les deux cylindres et la rotation du cylindre intérieur (figure IV.24). Ainsi pour un nombre de Reynolds ( $Re=30.03$ ), la plume thermique oscille dans la partie supérieure du cylindre intérieur lorsque celui-ci tourne. Lorsque les ailettes sont horizontales, la plume thermique est juste au-dessus du cylindre intérieur avec une symétrie par rapport à l'axe vertical ( $Re=0$ ), par contre pour  $Re>0$ , celle-ci se déplace de presque  $30^\circ$  par rapport à la verticale dans la direction du mouvement.

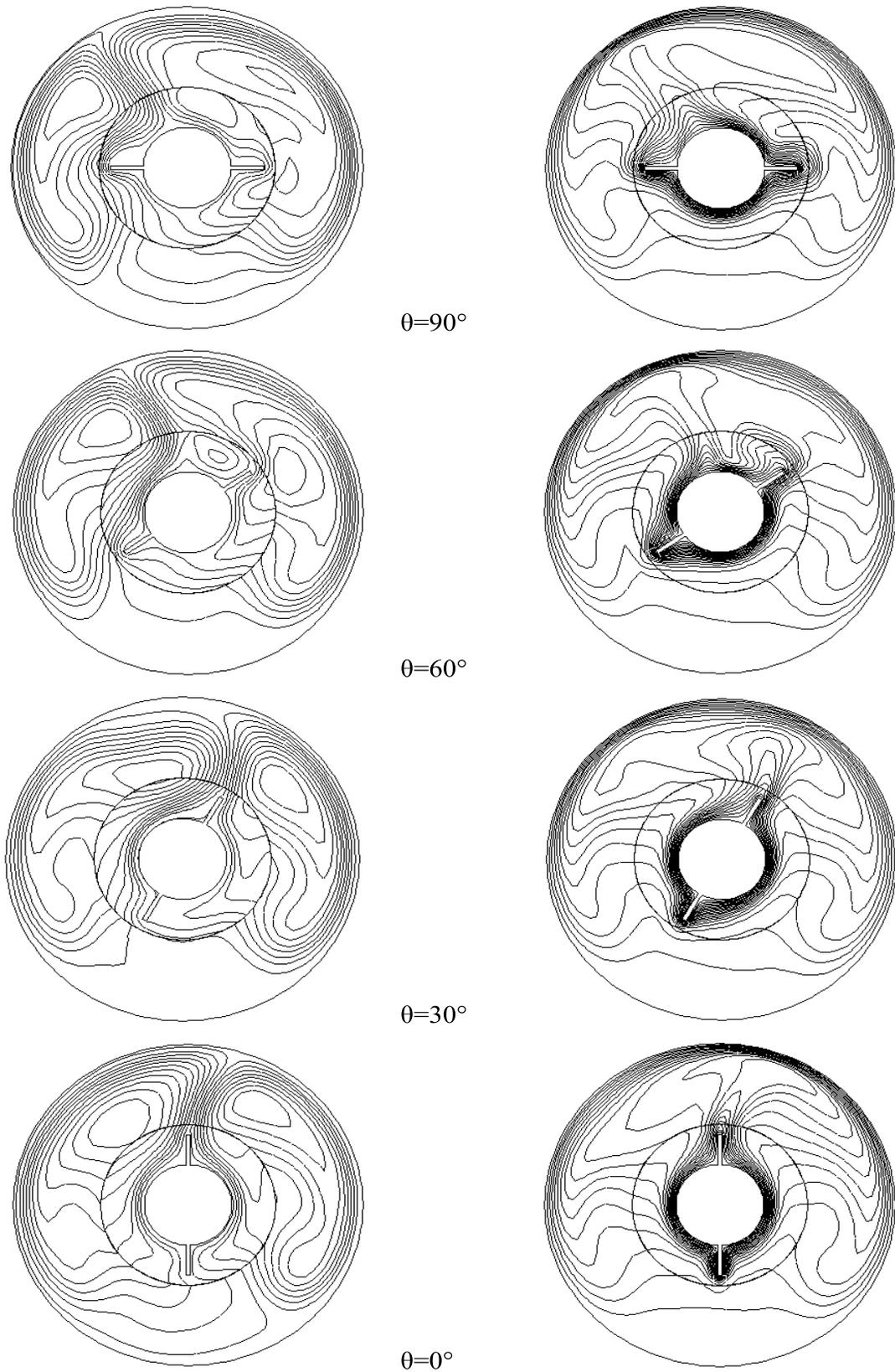
Pour les fonctions de courant, deux zones de re-circulation apparaissent dans la partie supérieure de l'espace annulaire dans le cas de deux ailettes sans mouvement. Ces zones sont symétriques par rapport à la verticale s'il y a une symétrie géométrique et suivent l'orientation des ailettes dans les autres cas.

Pour des nombres de Reynolds  $Re>0$ , la forme des fonctions de courants reste presque la même ( $Re=30.03$ ) à la différence que pour ce cas, les lignes dans la zone de re-circulation sont beaucoup plus concentriques. Lorsque les ailettes exercent une résistance sur le flux (quand celles-ci sont horizontales ou ont un angle ouvert par rapport à la verticale), les fonctions de courant sont entraînées par le mouvement du cylindre et des zones de recirculation (tourbillons) apparaissent dans la partie supérieure au voisinage du cylindre intérieur.

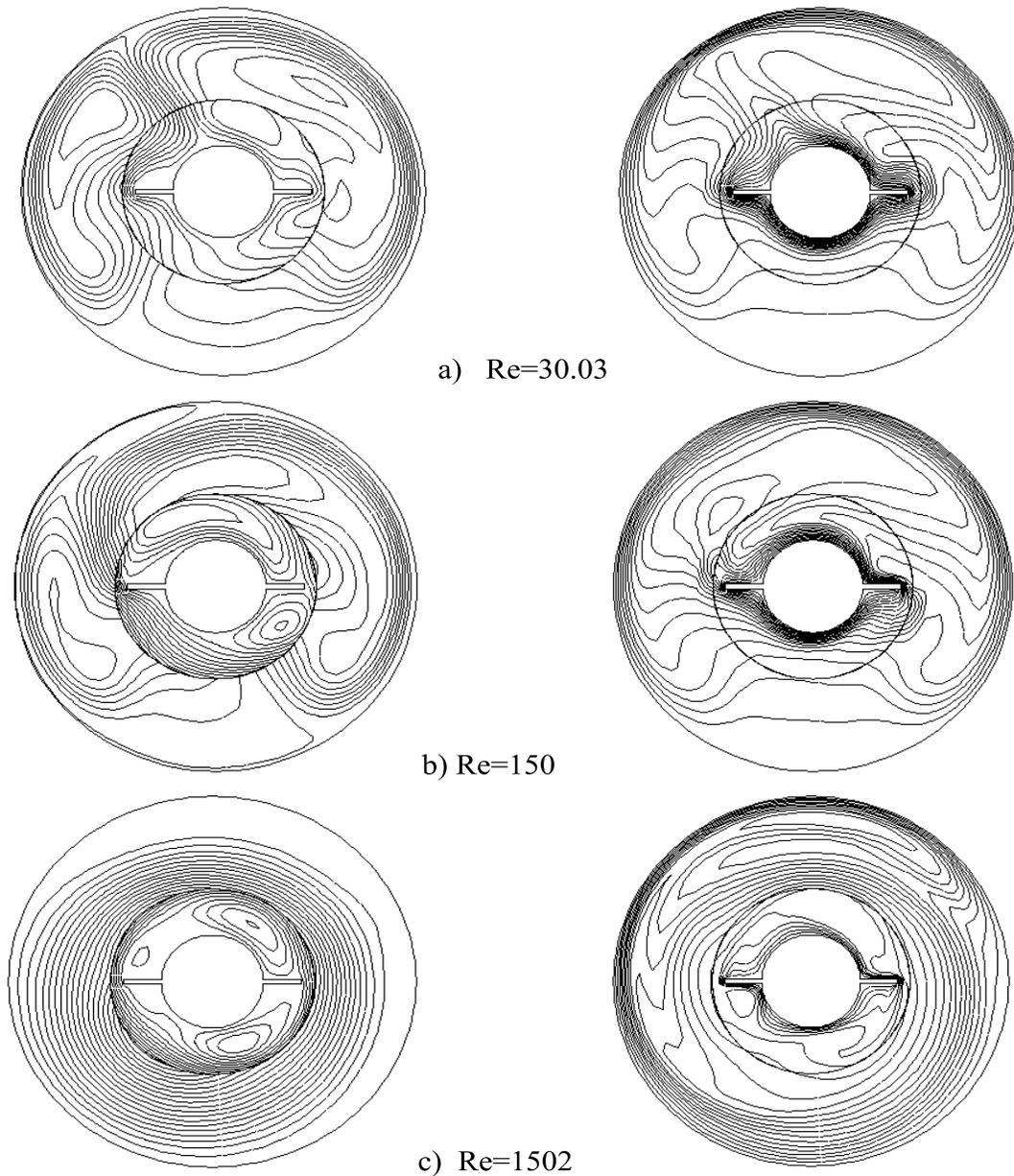
En augmentant la vitesse de rotation, on augmente l'effet de la force centrifuge sur les particules fluides, l'écoulement ressemble alors à celui de Couette et les lignes de courants tendent de plus en plus à être des cercles concentriques et les zones de tourbillon apparaissent au voisinage du cylindre intérieur, figure IV.25 (a, b & c). La plume thermique se formant dans la partie supérieure de l'espace annulaire disparaît avec l'augmentation de la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Les lignes isothermes sont concentriques au voisinage des deux cylindres intérieur et extérieur signifiant la dominance du régime de transfert par conduction et la diminution du transfert thermique sur les parois suite à l'épaississement de la couche limite thermique.



**Figures IV.23 :** Ligne de courant (à droite) et d'isotherme (à gauche) pour différentes positions des ailettes Pour  $Gr = 4,7280 \cdot 10^5$  et  $Re=0$



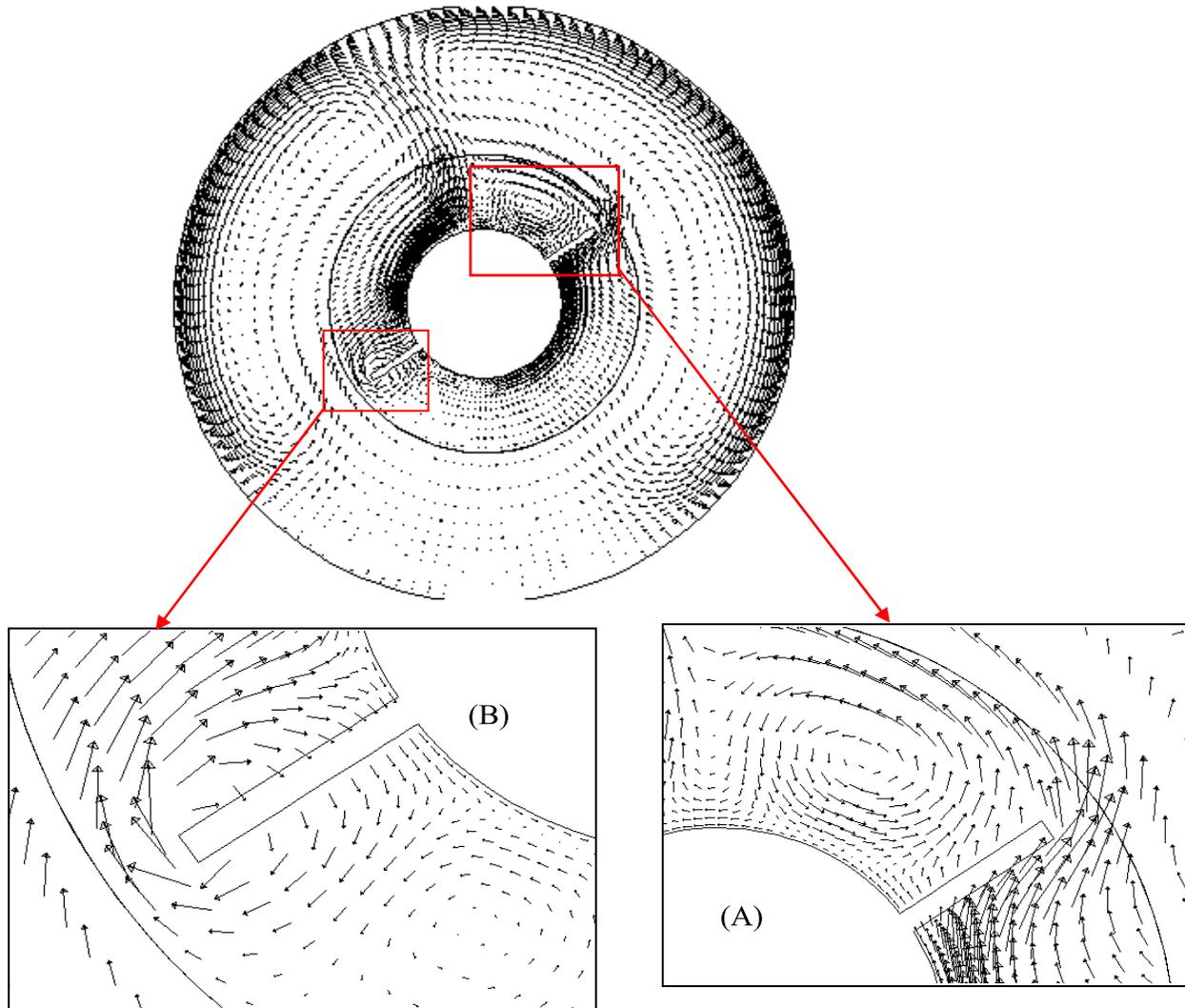
**Figures IV.24 :** Ligne de courant (à droite) et d'isotherme (à gauche) pour différentes positions des ailettes Pour  $Gr = 4,7280 \cdot 10^5$  et  $Re=30,0343$



**Figure IV.25** : Influence du nombre de Reynolds sur les lignes isothermes (à droite) et lignes de courant (à gauche) pour  $\theta=90^\circ$ ,  $Gr = 4,7280 \cdot 10^5$

#### IV.2.2.4 Analyse du champ de vitesse

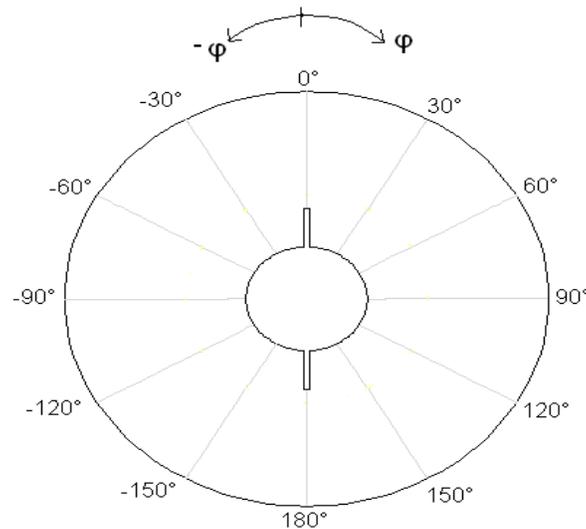
La figure IV.26 montre le champ de vitesse dans l'espace annulaire entre les cylindres et au voisinage des ailettes (A et B). Le fluide est animé d'un mouvement ascendant au voisinage du cylindre intérieur en s'échauffant, se sépare en deux dans la partie supérieure de l'espace annulaire pour redescendre en se refroidissant au contact du cylindre extérieur.



**Figure IV.26 :** Vecteur vitesse pour  $\theta=60^\circ$ ,  $Gr=4,7280 \cdot 10^5$ ,

Les parties en zoom A et B, montrent le champ des vitesses au voisinage des ailettes supérieures et inférieures respectivement. Au voisinage de l'ailette inférieure (B), il apparaît une zone tourbillonnaire due au fait que le mouvement descendant de l'ailette rencontre le fluide qui remonte sous l'effet de la diminution de sa densité et crée une dépression. La vitesse de l'ailette dans la partie supérieure (A) tourne dans le même sens que le fluide qui monte par différence de densité. On constate que la vitesse du fluide est plus importante sur la partie inférieure de l'ailette, ce qui montre l'importance du flux créé par la convection naturelle sur celui créé par la rotation. Le tourbillon qui se crée dans la partie supérieure au voisinage de l'ailette est dû au fait que la masse fluide entraînée par l'ailette dans son mouvement rencontre une résistance de la part de la masse fluide qui remonte vers le haut dans la partie supérieure de l'espace annulaire et agit comme un obstacle.

#### IV.2.2.5 Effet de la rotation du cylindre sur les profils de température

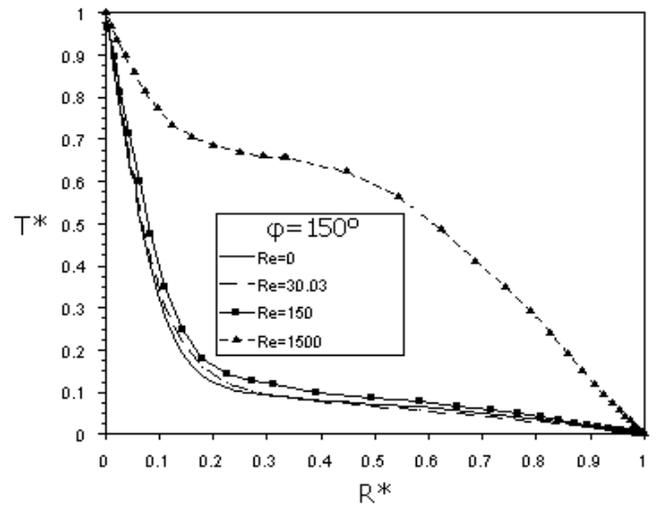
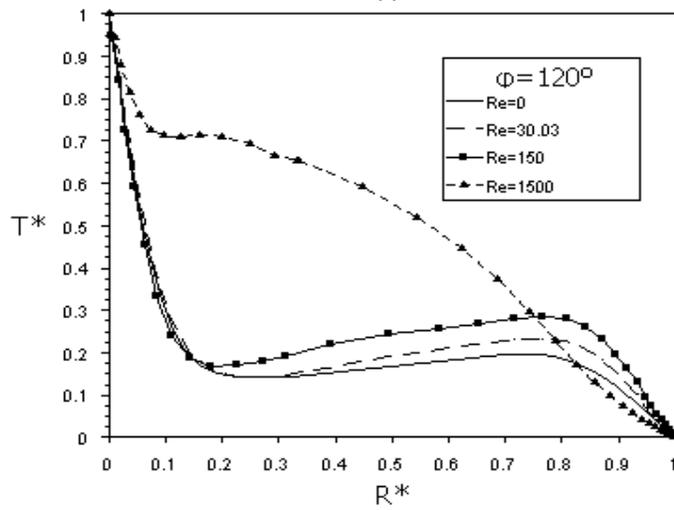
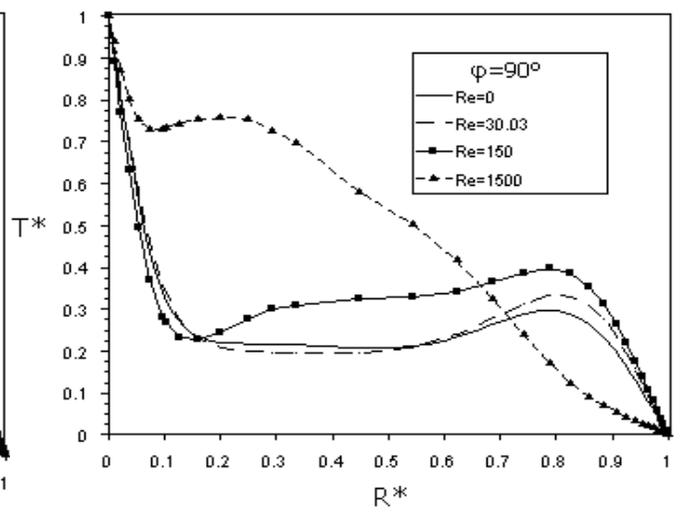
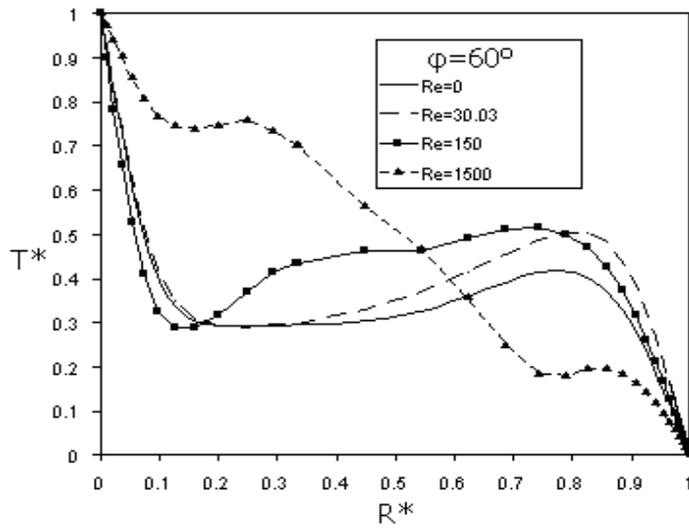
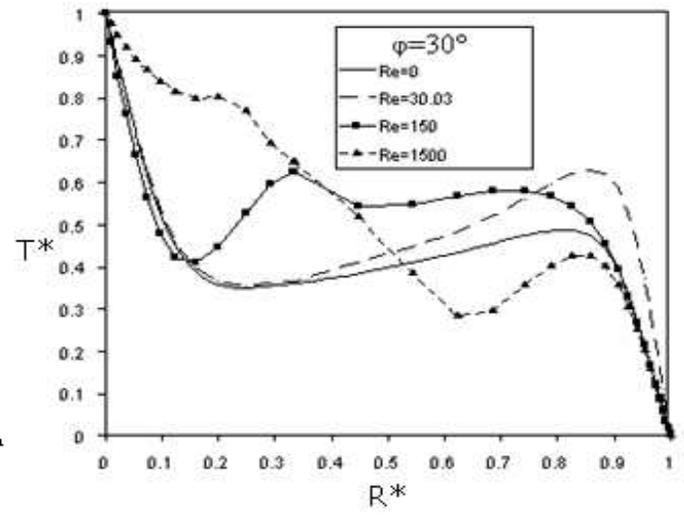
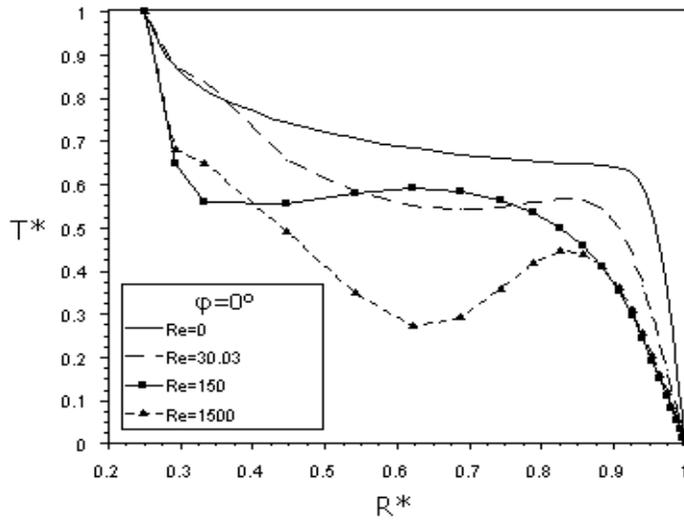


**Figure IV.27 :** Différentes directions pour les profils de vitesses et température

La figure IV.27 illustre les différentes directions radiales (angle  $\varphi$ ) pour un instant correspondant à une position d'ailettes verticales ( $\theta=90^\circ$ ). Les figure IV.28 montrent la répartition de la température adimensionnelle ( $T^*$ ) le long des directions radiales à l'instant où les ailettes sont verticales tel que  $Gr=4,7280 \times 10^5$  et différents nombres de Reynolds ( $Re=0, 30.03, 150$  et  $1502$ ). On remarque qu'en augmentant le nombre de Reynolds, la température augmente dans l'espace annulaire (quelque soit la direction).

Le gradient de température au voisinage des deux cylindres (la pente des courbes au voisinage de ceux-ci) ainsi que l'allure de son profil varie peu en augmentant le nombre de  $Re$  de 0 à 30, alors que pour  $Re=150$ , le gradient de température sur le cylindre intérieur diminue pour les directions  $\varphi=-60^\circ, -120^\circ, -150^\circ$  et augmente sensiblement sur le cylindre extérieur suite à l'augmentation de la température dans l'espace annulaire entre les deux cylindres.

Pour  $Re=1502$ , l'allure de la température ne change presque pas et tend à être linéaire (droite) ce qui est caractéristique d'un régime purement conductif. On remarque aussi clairement la diminution du gradient de température sur le cylindre intérieur par rapport aux autres régimes ( $Re=0, 30$  et  $150$ ).



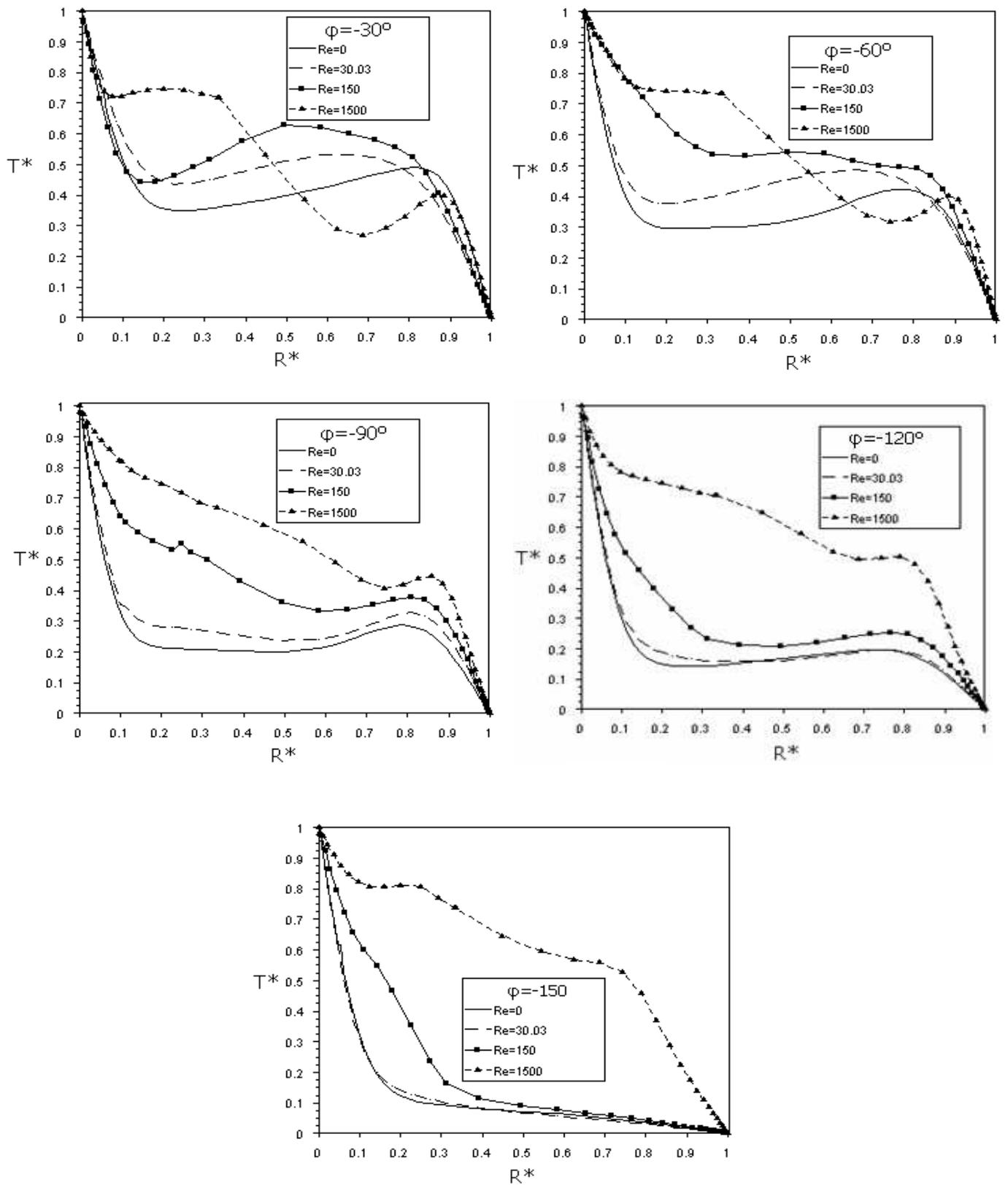
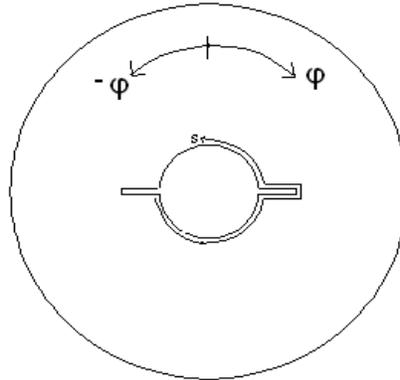


Figure IV.28 : Température adimensionnelle le long des directions radiales ( $\phi$ )  
Pour différents  $Re$  et  $Gr$

#### IV.2.2.6 Evaluation du nombre de Nusselt sur les deux cylindres



**Figure IV.29 :** angle ( $\varphi$ ) et l'abscisse ( $s$ ) sur le cylindre extérieur et intérieur

Les nombres de Nusselt locale sur les deux cylindres sont calculés comme suite :

$$\text{Nu}_i = \frac{hs}{\lambda} \quad \text{Nu}_e = \frac{hd_e}{\lambda}$$

La figure IV.29 illustre l'angle ( $\varphi$ ) et l'abscisse ( $s$ ) le long desquels les Nusselt local sur le cylindre extérieur et intérieur respectivement sont représentés

Les figures IV.30 (a, b, c, d, e, f) montrent l'évolution du nombre de Nusselt locale le long du cylindre extérieur pour différents instants correspondant à diverses positions des ailettes ( $\theta$ ) et différents régimes d'écoulement ( $\text{Re}=0, 30, 150, 450.51, 750.87$  et  $1502$ ). Pour  $\text{Re}=0$  et  $30.03$ , le nombre de Nusselt local est presque nul sur le coté bas de l'espace annulaire et atteint un maximum sur le coté haut pour un angle fonction de l'orientation de l'ailette (figure IV.30 a et b). Sur les figures IV.30 (c, d, e & f) et ( $\text{Re}=150, 450.51, 750.87$  et  $1502$ ), on remarque que Nusselt local est indépendant des positions successives prises par les ailettes.

Pour des grands nombres de Reynolds ( $\text{Re}=1502$ ), l'échange de chaleur sur la partie inférieure du cylindre extérieur ( $\theta=0, \theta=180$ ) n'est pas nul, ce qui est du principalement à la vitesse du fluide dans cette partie (non nulle) et à la transmission de la quantité de mouvement par effet visqueux. Ces courbes se superposent signifiant que l'échange de chaleur ne varie pas pendant la rotation du cylindre intérieur, ce qui du au fait que la force centrifuge est beaucoup plus importante que la force d'Archimède.

Les figures IV.31, montrent l'évolution du nombre de Nusselt local sur le cylindre intérieur pour différentes positions occupées par les ailettes au cours du temps.

Pour une meilleure compréhension du phénomène on a représenté le nombre de Nusselt moyen sur les deux cylindres. Ainsi, le nombre de Nusselt moyen sur les deux cylindres intérieur et extérieur pour chaque position des ailettes (allant de  $\theta = -180^\circ$  à  $180^\circ$ ) et pour différents nombre de Reynolds est représenté sur les Figures IV.32 et IV.33. Sur les figures IV.32 (a et b), on remarque que le Nusselt moyen sur les deux cylindres est inversement proportionnel au nombre de Reynolds. Sur le cylindre extérieur, celui-ci devient constant et ne dépend plus de la position des ailettes pour les grandes vitesses de rotations ( $Re > 150$ ). On fera le même constat pour le cylindre intérieur, à la différence que le Nusselt moyen varie périodiquement. Une demi période correspond au passage de la position  $\theta = 0^\circ$  à  $180^\circ$  et la période complète de  $\theta = -180^\circ$  à  $180^\circ$ . Ce qui est nettement montré sur les différentes figures IV.33 (a, b et c). Ces mêmes figures, montrent que pour le cylindre extérieur, le Nusselt moyen tend vers une constante à mesure que le nombre de Reynolds augmente, alors que pour le cylindre intérieur il prend une forme périodique caractéristique d'un régime périodique établi.

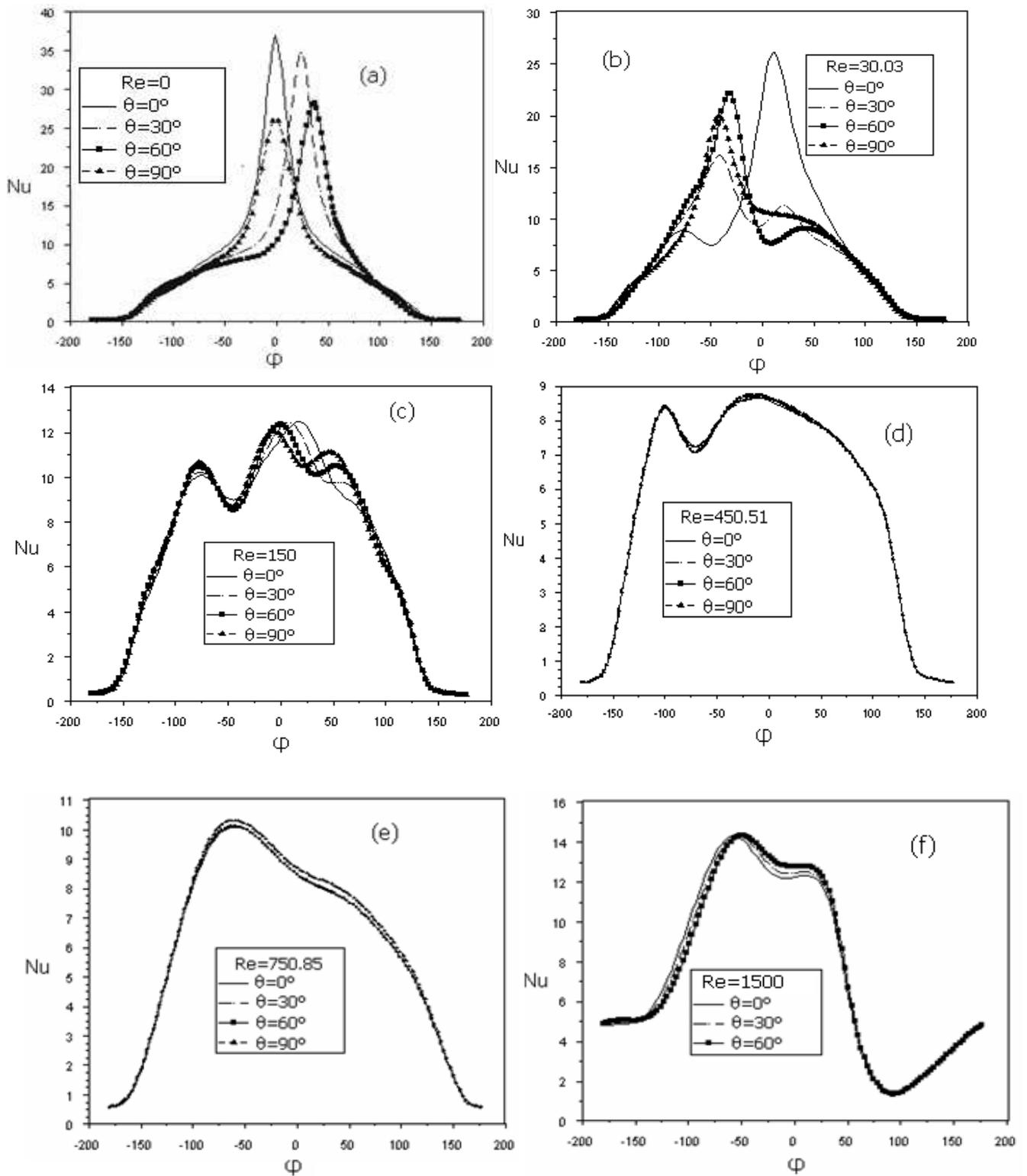


Figure IV.30 : Nusselt local le long du cylindre extérieur pour différents nombres de Reynolds

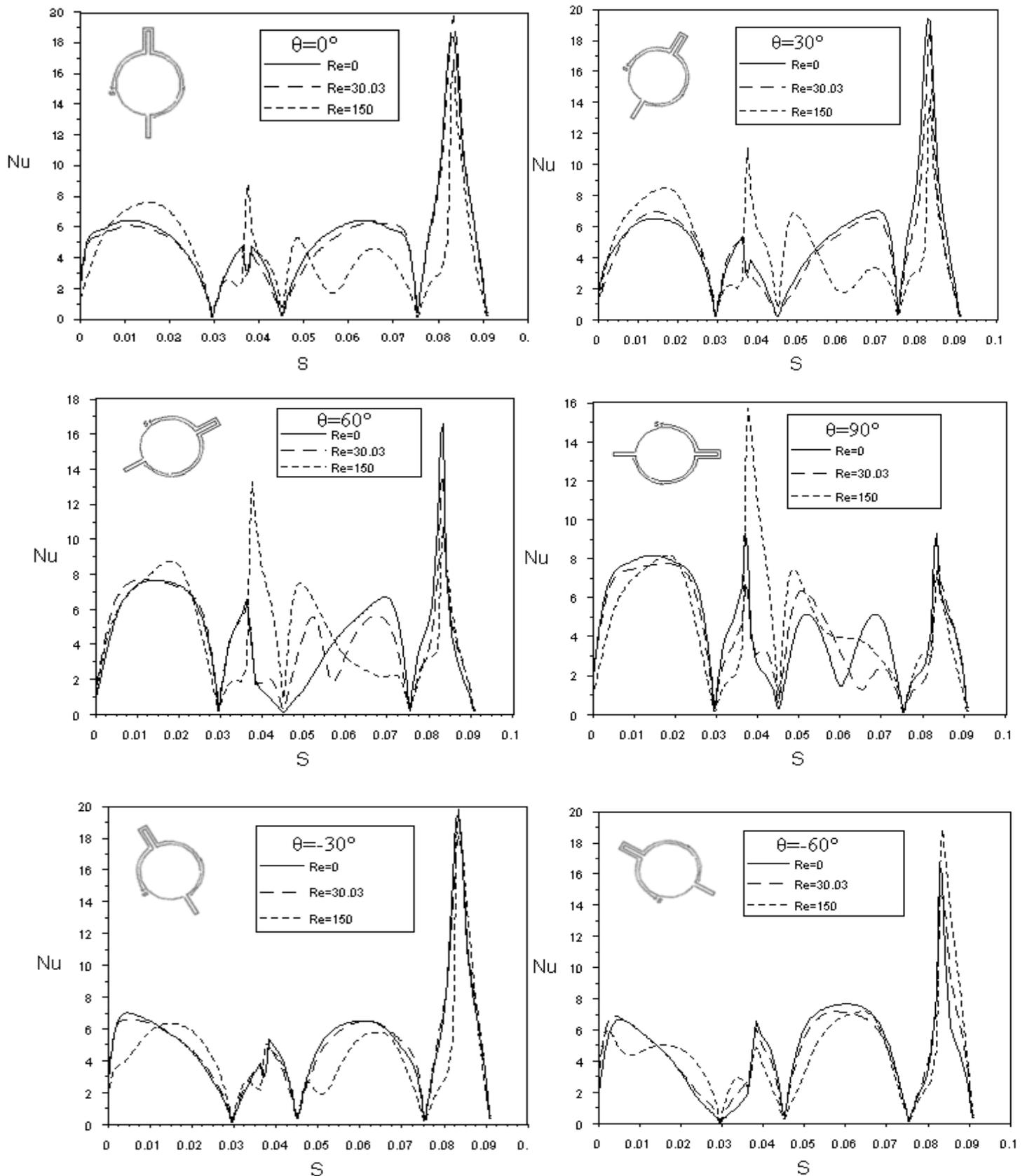
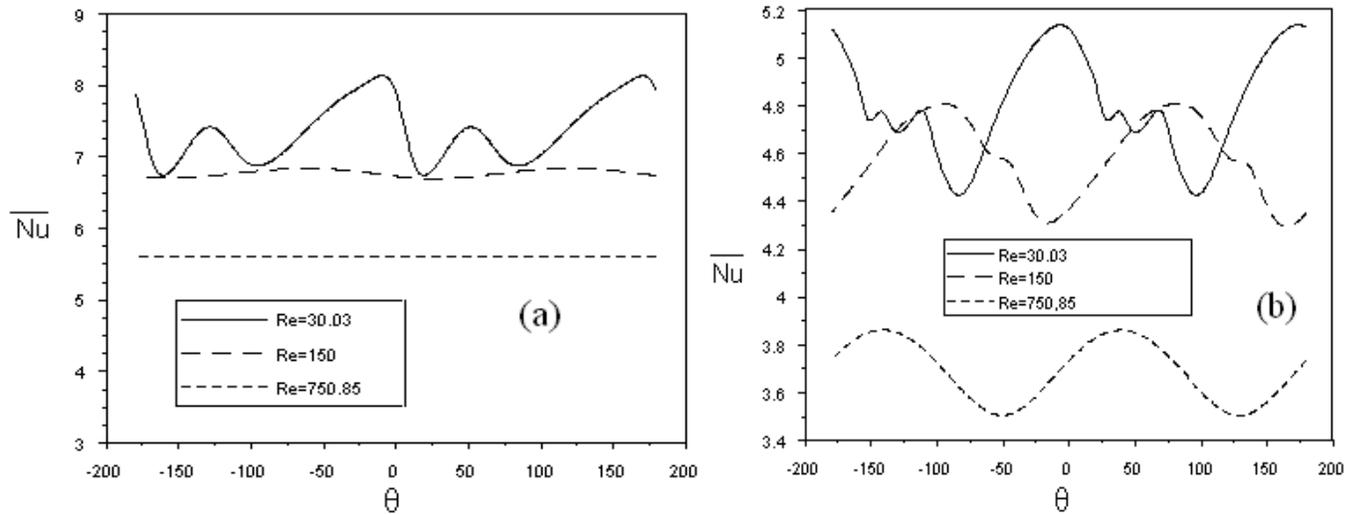
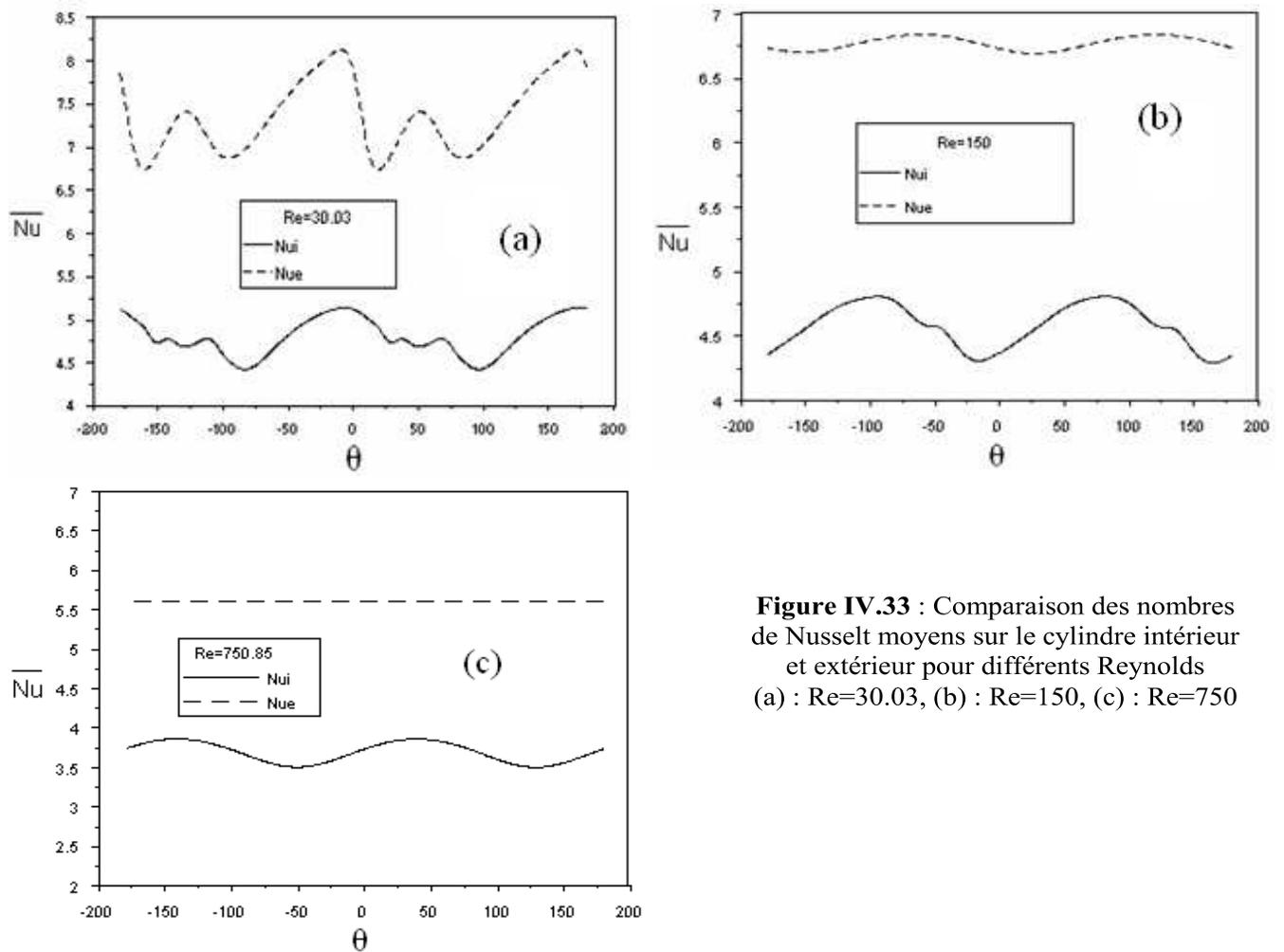


Figure IV.31 : Nusselt local le long du cylindre intérieur pour différents nombres de Reynolds



**Figure IV.32 :** Nusselt moyen sur le cylindre (a) : extérieur ; (b) : intérieur ; en fonction de la position des ailettes pour  $Re=30.03$ ,  $Re=150$  &  $Re=750.85$



**Figure IV.33 :** Comparaison des nombres de Nusselt moyens sur le cylindre intérieur et extérieur pour différents Reynolds (a) :  $Re=30.03$ , (b) :  $Re=150$ , (c) :  $Re=750$

## CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, on a analysé les transferts de chaleurs par convection (naturelle et mixte) dans un espace annulaire délimité par deux cylindres coaxiaux. Le cylindre intérieur, chauffé est muni d'ailettes pour accroître les échanges avec le cylindre extérieur moyennant un fluide intermédiaire. Deux cas ont été traités, le premier relatif à la convection naturelle (cylindre intérieur fixe), le second concerne la convection mixte (cylindre intérieur tournant). La discrétisation des équations est faite par la méthode des volumes finis, pour la résolution on a utilisé le code de calcul « Fluent ».

Dans un premier temps on a validé les résultats dans le cas d'un espace annulaire sans ailettes sur le cylindre intérieur, avec le travail expérimental menée par Kuehn et Goldstein [3], puis dans un second cas du cylindre intérieur en rotation, avec les résultats numérique de T. S. LEE. [10].

Comme premier objectif, on a étudié l'influence des paramètres liés aux ailettes sur le mécanisme du transfert de la chaleur, dans un cas coaxiale muni d'ailettes sans rotation. Au terme de cette étude plusieurs constats on été faits, notamment pour le cas de deux ailettes ou l'orientation optimale, qui donne un transfert de chaleur maximale correspondant à celle de deux ailettes verticales. Le nombre optimal d'ailettes est de quatre. En régime d'écoulement laminaire, le transfert de chaleur est proportionnel à la longueur des ailettes.

Dans la seconde étude, ou le cylindre intérieur, chauffé et muni de deux ailettes tourne avec une vitesse angulaire ( $\omega$ ), ce qui induit une convection mixte. Dans ce problème, on a utilisé la méthode du maillage mobile, dans laquelle le maillage entourant le cylindre intérieur et les ailettes tourne avec une vitesse de rotation entraînant ces derniers dans son mouvement. La solution est obtenue en considérant des états d'équilibres intermédiaires avec un intervalle de temps ( $dt$ ) qui correspond à une rotation d'un angle  $\theta$ . Le problème est traité comme une succession d'états stationnaire dénommé système quasi-stationnaire et pour chaque pas de temps, le régime est périodique établi.

Le commentaire des résultats est basé sur les formes des isothermes, des lignes de courants et le nombre de Nusselt pour différentes positions et différents régimes. Ainsi, on a remarqué que le flux dans l'espace annulaire est complètement différent de celui d'une convection naturelle pure. La plume thermique se déplace dans la direction du mouvement, et

des zones de tourbillon naissent au voisinage des ailettes pour des faibles Reynolds. Pour des Reynolds importants, le flux est celui observé dans le cas d'un écoulement de poiseuille avec des lignes de courant et des isothermes sous formes de cercles concentriques. L'échange thermique sur le cylindre extérieur et intérieur caractérisé par le nombre de Nusselt diminue on augmentant le nombre de Reynolds.

Pour la suite il serait intéressant d'investir le cas de grandes rotations du cylindre intérieur et d'essayer de localiser la transition laminaire – turbulent ainsi que de considérer une géométrie tridimensionnelle et de voir les limites du model à deux dimensions. Comme il serait intéressant aussi de voir l'influence des formes des ailettes ainsi que leurs nombre et longueurs sur ce type de problème.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Patankar S. V.**, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, hemisphere publishing Corp., New York, (1980).
- [2] **Beckmann** “Die Wärmeübertragung in Zylindrischen Gasschichten bei Natürlicher Konvektion “, (1931).
- [3] **Kuehn T. H. et Goldstein R. J.**, ”An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders”. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 74, (part 4), 695-719, (1979).
- [4] **Powe R. E., Carley C. T. et Bishop E. H.**, “Free convective flow patterns in cylindrical annuli”. Journal of Heat Transfer. Vol. 91, 310–314, (1969).
- [5] **Tolpadi A. K. et Kuehn T. H.**, “Experimental investigation of conjugate natural convection heat transfer from a horizontal isothermal cylinder with a non isothermal longitudinal plate fin at various angles”. Journal of Heat Mass Transfer. Vol. 28, No. I, 155-163. (1985).
- [6] **Rahnama M. et Farhadi M.** , “Effect of radial fins on two-dimensional turbulent natural convection in a horizontal annulus”. International Journal of Thermal Sciences, Vol. 43, 255–264, (2004).
- [7] **Haldar S. C., Kochhar G. S., Manohar K. et Sahoo R. K.**, “Numerical study of laminar free convection about a horizontal cylinder with longitudinal fins of finite thickness”. International Journal of Thermal Sciences, Vol. 46, 692–698, (2007).
- [8] **Abu-Hijleh B. A.**, “Optimized use of baffles for reduced natural convection heat transfer from a horizontal cylinder”. International Journal of Thermal Sciences, Vol. 42, 1061–1071, (2003).
- [9] **Farinas M. I., Garon A. et Saint-Louis K.**, “Study of heat transfer in a horizontal cylinder with fins”. Revue Générale de Thermique, Vol. 36, 398-410, (1997).

[10] **Lee T. S.**, “Numerical experiments with laminar fluid convection between concentric and eccentric heated rotating cylinders”. *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, 77, (1984).

[11] **Choi J. Y. et Kim M. U.**, “Three-dimensional linear stability of mixed convective flow between rotating horizontal concentric cylinders”. *International Journal of Heat Mass Transfer*. Vol. 38, No. 2, 27-285, (1995).

[12] **Bejan A.**, “convection heat transfer”. John Wiley and Sons, New York, (1995).

## Résumé

Ce travail consiste en la modélisation des phénomènes de convection dans un espace annulaire cylindrique horizontal. Les phénomènes de convection dans la cavité sont induits dans un premier temps par la différence de température entre les deux cylindres (convection naturelle). Pour ces types de problèmes l'une des modélisations repose sur l'hypothèse dite de Boussinesq, valable pour un gradient de température entre parois ne dépassant pas  $100^{\circ}\text{C}$ . Une validation du modèle est faite par comparaison des résultats avec ceux de la littérature pour un cas de cylindre intérieur sans ailettes. Par la suite, nous nous sommes intéressés au cas d'un cylindre muni d'ailettes sans rotation, pour lequel nous avons étudié l'influence des paramètres sur le mécanisme du transfert de la chaleur. Au terme de cette étude plusieurs constats ont été faits, notamment pour ce régime d'écoulement qui est laminaire, le transfert de chaleur est proportionnel à la longueur des ailettes.

La seconde phase de l'étude correspond à la modélisation du même phénomène de transfert, mais en plus du cylindre intérieur, chauffé et muni de deux ailettes, ce dernier tourne avec une vitesse angulaire ( $\omega$ ), ce qui induit une convection forcée en plus de celle naturelle (convection mixte). Dans ce problème, nous avons utilisé la méthode du maillage mobile, dans laquelle le maillage entourant le cylindre intérieur et les ailettes tourne avec une vitesse de rotation entraînant ces derniers dans son mouvement. La solution est obtenue en considérant des états d'équilibre intermédiaires et le problème est traité comme une succession d'états stationnaires, dénommé système quasi-stationnaire.

## Abstract

This work consists in the modeling of the convection phenomena occurring in a horizontal cylindrical annular space. The convection phenomena in the cavity are induced initially by the temperature difference between the two cylinders (natural convection). For these problems, modeling rests on the Boussinesq assumption, valid for low temperature variation between walls ( $<100^{\circ}\text{C}$ ). A validation of the model is made by comparison between the results and those of the literature for interior cylinder without wings. Thereafter, we were interested by the case of a fixed cylinder provided with wings, for which we studied the influence of several parameters on the mechanism of the heat transfer. At the end of this study several reports are made, in particular for laminar flow, the heat transfer is proportional to the length of the wings.

The second phase of the study corresponds to the modeling of the same phenomenon, with rotating interior cylinder (angular velocity  $\omega$ ), which induces a forced convection in addition to that natural (mixed convection). In this problem, we used the method of the mobile grid, in which the grid surrounding the interior cylinder and the wings turns with a disk speed. The solution is obtained by considering intermediate balance states and the problem is dealt with like succession of stationary states (quasi-stationary system).

## خلاصة

يتكون هذا العمل في نمذجة الظواهر الحرارية في أسطوانة أفقية. الظاهرة الحرارية في التجويف تحركها في البداية فرق درجات الحرارة بين جدران الاسطوانة (الحرارية الطبيعية). لهذه الأنواع من المشاكل استخدم واحد من النماذج القائمة على أساس ما يسمى Boussinesq. حيث ان هذا الافتراض صحيحا لدرجة الحرارة بين جدران الاسطوانة لا تتجاوز  $100$  درجة مئوية. التحقق من صحة النموذج الذي أدلى به مقارنة النتائج مع تلك التي في الأدب لحالة الاسطوانة الداخلية دون الزعانف. بعد ذلك، في حال وجود اسطوانة مزودة بزعانف دون التناوب، حيث درسنا تأثير البارامترات على آلية انتقال الحرارة. بعد هذه الدراسة عددا من الملاحظات التي قدمت، وخاصة لهذا التدفق، نقل الحرارة يتناسب مع طول الزعانف.

المرحلة الثانية من الدراسة، في النموذج نفسه، تعني ظاهرة النقل، ولكن بالإضافة إلى الاسطوانة الداخلية، ساخنة ومزودة بزعانف اثنين، هذه الأخيرة، تدور بسرعة زاوية  $\omega$  مما يؤدي إلى القسر الحراري بالتناوب مع الطبيعي. في هذه المسألة، استخدمنا طريقة الشبكة المتحركة. حيث ان الشبكة الداخلية التي تحيط بالاسطوانة والشفرات تدور بسرعة دوران الأخيرة مما أدى إلى حركتها. الحل هو الحصول عليها من خلال النظر في التوازن الوسيطة