

Sommaire

Introduction générale	8
Chapitre1	
Réponse dynamique des structures	10
1.1. Introduction	10
1.2. Chargement dynamique	11
1.2.1. L'approche déterministe	11
1.2.2. L'approche probabiliste	11
1.3. Comportement dynamique	12
1.4. Modélisation et degré de liberté	13
1.5. Réponse dynamique et spectres de réponse	13
1.5.1. Intégration temporelle	14
1.5.2. Intégration fréquentielle	15
1.5.3. Spectre de réponse	15
1.7. Analyse de la réponse nonlinéaire des structures à un degré de liberté	18
1.8. Spectre de réponse inélastique à ductilité constante	21
1.9. Analyse par le spectre inélastique	22
1.10. Conclusion	24
Chapitre2	
Méthodes probabilistes pour le calcul dynamique des structures	25
2.1. Introduction	25
2.2. Sources d'incertitudes	26
2.3. Modélisation mathématique des incertitudes	27
2.4. Rappel des éléments du calcul de probabilités	27
2.4.1. Expériences et événements aléatoires	27
Probabilité conditionnelle	29
2.4.3. Variable aléatoire	30
2.4.3.1. Lois de probabilité de variables aléatoires	30
2.4.3.2. Moments d'une variable aléatoire réelle	32
2.4.3.3. Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle	33
2.4.3.4. Covariance et corrélation linéaire	33
2.4.3.5. Lois marginales	34
2.4.3.6. Lois conditionnelles	35
2.4.3.7. Changement de vecteur aléatoire. Formule du Jacobien	35
2.4.3.8. Sommes de variables aléatoires indépendantes	36

Variables aléatoires indépendantes	38
2.4.4. Inégalités fondamentales	38
Inégalités de Markov	38
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	39
Inégalité de Schwarz	39
Loi faible des grands nombres	39
2.5. Méthodes probabiliste pour le calcul des structures	40
2.5.1. Principes de l'estimation	40
2.5.1.1. Définition	40
2.5.1.2. Procédure d'estimation	41
2.5.1.3. Méthodes d'estimation	41
A. Méthode des moments (K. Pearson) (estimation ponctuelle)	41
Méthode du maximum de vraisemblance (R.A. Fisher) (estimation ponctuelle)	42
C. Intervalle de confiance	43
Exemples d'intervalles de confiance	44
Moyenne	44
Variance	45
2.5.2. Méthode de Monté-Carlo	45
2.5.2.1. Principe de la méthode de Monté-Carlo	46
2.5.3. L'approche probabiliste de la sécurité des structures de génie civil (Base de la théorie de la fiabilité)	47
Interprétation géométrique de la fiabilité	49
2.5.4. Propagation des incertitudes	51
2.5.4.1. Règles de propagation des incertitudes	52
A. La propagation des incertitudes dans la somme et la différence	52
B. La propagation sur le produit et le quotient	53
C. Incertitude d'une puissance	56
D. Incertitudes indépendantes	56
Incertitude d'une fonction à plusieurs variables	57
2.6. Conclusion	59
Chapitre 3	
Prise en compte des incertitudes dans le calcul des structures	60
3.1. Introduction	60
3.2. Exemples d'applications	61
Application 1	61
Application 2	62
Application 3	65
Application 4	67
Premier cas	67
Deuxième cas	68
Application 5	69
Première étape	72
Deuxième étape	75
Paramètres du spectre réglementaire	75
Troisième étape	80

Calcul analytique	82
3.3. Conclusion	83
Chapitre4	
Vibrations aléatoires des structures	85
4.1. Introduction	85
4.2. Processus stochastique	86
4.2.1. Processus stationnaire	87
4.2.2. Fonction d'autocorrélation	87
4.2.3. Densité de puissance spectrale	88
4.2.4. Bruit blanc	89
4.3. Relation entrée-sortie pour un système linéaire	89
4.4. L'oscillateur à un degré de liberté	91
4.5. Réponse stationnaire à une excitation aléatoire stationnaire	93
4.6. Réponse aléatoire d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté (systèmes discrets)	95
4.6.1. Equation du mouvement	95
4.6.2. Relation entrée-sortie	95
4.6.3. Décomposition modale	96
4.7. Application	98
4.8. Conclusion	100
Conclusion générale	102
Bibliographie	105
Annexe	

Tableau.1 Liste des tableaux

N° tableau	titre	page
Tableau3.1	Caractéristiques statistiques des sollicitations	60
Tableau3.2	Caractéristiques géométriques de la structure	63
Tableau3.3	Masses et rigidités de la structure	63
Tableau3.4	Périodes et pulsations propres de la structure	66
Tableau3.5	Modes propres de la structure	66
Tableau3.6	Masses modales de la structure	66
Tableau3.7	Accélération spectrale	67
Tableau3.8	Efforts tranchants correspondants aux accélérations spectrales	67
Tableau3.9	Incertitude sur les paramètres du spectre	70
Tableau3.10	Résultats de la propagation des incertitudes dans le calcul du spectre par la simulation Monté-Carlo	72
Tableau3.11	Résultats de la propagation des incertitudes dans le calcul de l'effort tranchant à la base par la simulation Monté-Carlo	72
Tableau3.12	Incertitude sur les paramètres de la structure l'estimation de l'effort tranchant	73

Tableau.2 Liste des figures

N° figure	titre	page
Figure 1.1	<i>Chargement périodique ((a)-chargement harmonique (b)- chargement anharmonique)</i>	2
Figure 1.2	<i>Chargement Apériodique ((c) chargement impulsif –explosion-, (d) chargement entretenu- accéléro Dar El Beida- séisme du 21 mai 2003 de Boumerdes)</i>	2
Figure 1.3	<i>(a) Densité de probabilité d'une force p qui suit une loi gaussienne, (b) densité de puissance spectrale (dsp) d'un bruit blanc</i>	3
Figure 1.4	<i>(a)Comportement linéaire élastique, (b) comportement non linéaire</i>	3
Figure 1.5	<i>(a) excitation (accelerogramme d'El Centro), (b) Réponse dynamique linéaire en déplacement d'une structure a l'excitation (a)</i>	5
Figure 1.6	<i>réponse d'une structure à 1ddl en fonction de la fréquence ω</i>	6
Figure 1.7	<i>Spectre de réponse en déplacement</i>	7
Figure 1.8	<i>Spectre de Réponse en pseudo accélération</i>	8
Figure 1.9	<i>Accélération du sol</i>	9
Figure 1.10	<i>Déplacement linéaire (a) et Relation forces- déplacements (d)</i>	10
Figure 1.11	<i>Déplacement linéaire (a) et Relation forces-déplacements (d)</i>	10
Figure 1.12	<i>Réponse de deux structures ayant des coefficients de ductilité égale à 1, 3, 5</i>	11
Figure 1.13	<i>Spectres de réponses inélastiques et spectres réglementaires</i>	14
Figure 2.1	<i>Représentation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète</i>	23
Figure 2.2	<i>la probabilité pour que X soit comprise entre a et b est mesurée par l'aire hachurée</i>	24
Figure 2.3	<i>Domaine de sécurité</i>	40
Figure 2.4	<i>Interprétation géométrique</i>	41
Figure 3.1	<i>Section d'un poteau en béton armé</i>	54
Figure 3.2	<i>Densité de probabilité de R_t (distribution normale)</i>	54
Figure 3.3	<i>Densité de probabilité de M_R (distribution normale)</i>	56

Figure 3.4	<i>poutre soumise à une force concentrée</i>	56
Figure 3.5	<i>poutre soumise à une charge répartie</i>	57
Figure 3.6	<i>poutre soumise à une charge répartie et une concentrée</i>	57
Figure 3.7	<i>console soumise à une charge concentrée</i>	58
Figure 3.8	<i>Densité de probabilité de M_R et P (distribution normale)</i>	59
Figure 3.9	<i>Densités de probabilité des charges D, Q, W</i>	60
Figure 3.10	<i>Densité de probabilité de R (distribution normale)</i>	61
Figure 3.11	<i>Structure à étudier</i>	62
Figure 3.12	<i>Représentation des masses et des rigidités.</i>	63
Figure 3.13	<i>Spectre réglementaire RPA99v2003</i>	64
Figure 3.14	<i>Modélisation de la structure : modèle masse ressort</i>	64
Figure 3.15	<i>Modélisation de la structure : Modèle plan en éléments finis à deux dimensions</i>	64
Figure 3.16	<i>Accélération spectrales représentées sur le Spectre Réglementaire RPA99v2003</i>	67
Figure 3.17	<i>Simulation de la variable A_r</i>	69
Figure 3.18	<i>Simulation de la variable R_r</i>	69
Figure 3.19	<i>Simulation de la variable Q_r</i>	69
Figure 3.20	<i>Simulation de la variable ξ_r</i>	70
Figure 3.21	<i>Influence de A_r sur le spectre</i>	70
Figure 3.22	<i>Influence de R_r sur le spectre</i>	71
Figure 3.23	<i>Influence de Q_r sur le spectre</i>	71
Figure 3.24	<i>Influence de ξ_r sur le spectre</i>	71
Figure 3.25	<i>Représentation de la densité de probabilité du spectre pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo</i>	72
Figure 3.26	<i>Représentation de la densité de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo</i>	73
Figure 3.27	<i>Représentation de la fonction de répartition de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo</i>	73
Figure 3.28	<i>Représentation des densités de probabilités de m et k</i>	73
Figure 3.29	<i>Représentation des périodes aléatoires sur le spectre de calcul</i>	74

Figure 3.30	<i>Représentation de la densité de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo</i>	75
Figure 3.31	<i>Représentation de la fonction de répartition de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo</i>	75
Figure 4.1	<i>un processus stochastique</i>	79
Figure 4.2	<i>Fonction d'autocorrélation</i>	81
Figure 4.3	<i>Densité de puissance spectrale (DSP) d'un bruit blanc</i>	82
Figure 4.4	<i>Système linéaire invariant dans le temps avec une entrée et une sortie</i>	83

Introduction générale

L'application du calcul dynamique des structures aux problèmes sismiques continue d'évoluer rapidement en fonction de l'augmentation des capacités de calcul et du progrès des connaissances sur la nature des mouvements sismiques, les lois de comportement des matériaux et les techniques de résolution numérique. La situation actuelle est caractérisée par la multitude des méthodes de modélisation et de calcul, qui implique de la part des ingénieurs des choix entre différentes approches et rend souvent difficile la détermination d'un compromis optimal entre la recherche de la meilleure approximation possible de la réalité physique et le maintien à un niveau raisonnable des coûts et des délais. Ces ingénieurs ne sont pas toujours conscients du caractère souvent approximatif et conventionnel de la définition des mouvements sismiques qui constituent les données d'entrée de leur calcul.

L'estimation de la résistance d'une structure à un chargement sismique comporte encore plus d'incertitudes par la nature aléatoire du chargement correspondant à la propagation d'une perturbation ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre; En plus du chargement, la structure peut comporter des sources d'incertitudes aussi bien dans les caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs (résistances, composition, montage...) que sur l'assemblage de ses éléments, ou les modèles utilisés pour estimer sa résistance globale. Les incertitudes aléatoires d'un modèle de bâtiment sont relatives en partie aux données ou paramètres du modèle. Chaque paramètre identifié comme une source d'incertitudes peut être modélisé par une variable aléatoire. La modélisation de l'ensemble des paramètres comme variables aléatoires conduit à une modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes.

L'objet de ce mémoire portera donc principalement sur la prise en compte de ces incertitudes dans le calcul des structures. Il se décompose en quatre chapitres :

Le chapitre 1 porte sur le calcul dynamique déterministe des structures de génie civil.

Le chapitre 2 décrit la bibliographie concernant les principales méthodes probabilistes et le calcul des probabilités.

Le chapitre 3 est afférent au calcul probabiliste des structures et au calcul de la propagation des incertitudes.

Enfin, le chapitre 4 se rapporte sur le calcul des vibrations aléatoires des structures.

Chapitre 1

Réponse dynamique des structures

Première partie : Généralités

1.1. Introduction

Un phénomène d'origine dynamique se caractérise par une sollicitation variant à la fois dans le temps et dans l'espace, dans lequel les forces d'inerties (produit de la masse par l'accélération) jouent un rôle significatif dans la réponse. L'analyse dynamique des structures a principalement comme objectif de déterminer les variations dans le temps des contraintes et des déformations engendrées par un chargement dynamique quelconque. Un chargement dynamique est un chargement dont l'intensité, la direction et le point d'application varient avec le temps. Pour l'évaluation de la réponse d'une structure à des charges dynamique, on distingue deux approches fondamentalement différentes, tel que à chaque type d'action correspond un mode de caractérisation et une méthode de résolution la mieux appropriée.

1.2. Chargement dynamique

On distingue deux approches :

1.2.1. L'approche déterministe

Si le chargement appliqué est parfaitement défini par sa variation temporelle et spatiale, le chargement est qualifié de déterministe [1, 2, 13, 14, 33,39].

Un tel chargement peut être Périodique ou Apériodique (figure 1.1 & 1.2).

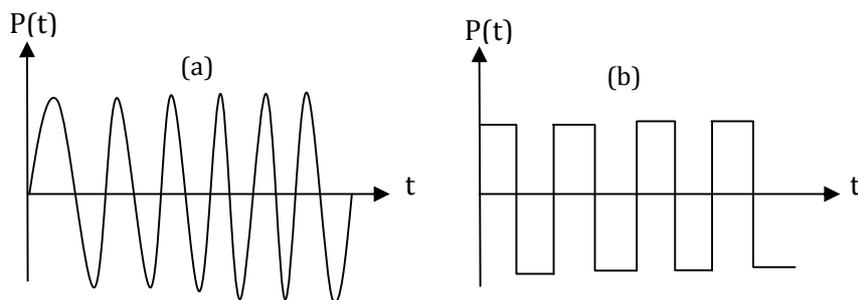


Figure.1.1 Chargement périodique :

((a)-chargement harmonique (b)- chargement anharmonique)

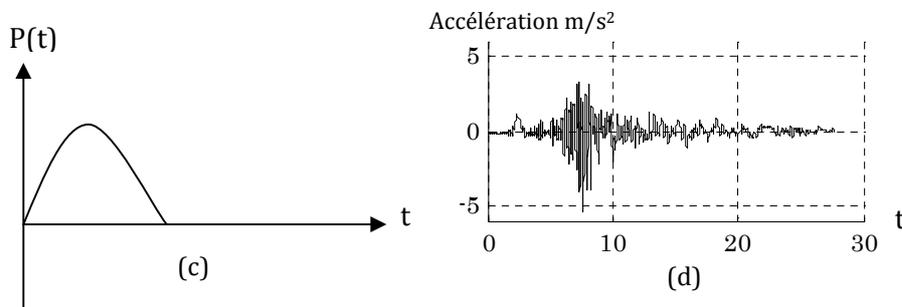


Figure.1.2 Chargement Apériodique :

((c) chargement impulsif -explosion-, (d) chargement entretenu- accéléro Dar El Beida- séisme du 21 mai 2003 de Boumerdes).

1.2.2. L'approche probabiliste

Un chargement aléatoire est un chargement qui n'est pas complètement défini dans le temps, il est toujours décrit de façon statistique « moyenne, écart type, densité de probabilité ... ». Il s'agit typiquement des mouvements vibratoires engendrés par le séisme, le vent, le trafic ferroviaire ou routier [1, 2, 28, 45]. La sollicitation est représentée (dans plusieurs cas dans le génie civil) sous forme d'un bruit blanc généralement stationnaire,

pur ou filtré, caractérisé par sa densité spectrale de puissance [15, 28]. Rappelons que la réponse d'une structure à des chargements aléatoires, fait l'objet de la dynamique stochastique.

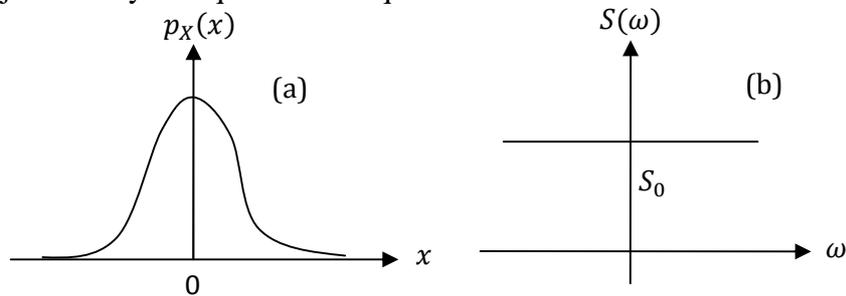


Figure.1.3 (a) Densité de probabilité d'une force p qui suit une loi gaussienne, (b) densité de puissance spectrale (dsp) d'un bruit blanc

1.3. Comportement dynamique

Le comportement dynamique d'une structure soumise à un mouvement dépend aussi bien de l'intensité du mouvement d'excitation que des caractéristiques physiques de la structure. Il est donc nécessaire d'en tenir compte lors de la modélisation du comportement qui constitue une étape importante dans l'analyse de la réponse dynamique des structures. En général, les structures ont un comportement élastique (figure.1.4/a) lorsqu'elles sont soumises à des mouvements de faible intensité, mais il est bien reconnu que les structures destinées à résister à de forts mouvements du sol doivent être capables de supporter des déformations inélastiques induisant un comportement non linéaire (ductile) [1, 2, 21, 26].

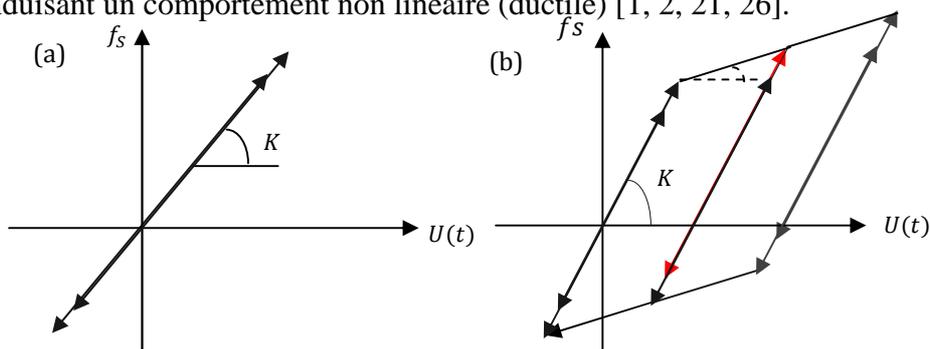


Figure.1.4 (a) Comportement linéaire élastique, (b) comportement non linéaire

Pour avoir la réponse à une excitation sismique de système à un degré de liberté, on considère une relation Force-Déplacement définie par une idéalisation des courbes expérimentales. L'approche utilisée pour la modélisation du comportement post-élastique consiste à localiser la

déformation non linéaire en certains points et idéaliser la courbe Force-Déplacement du matériau par des segments de droites (figure.1.4/b). L'aire délimitée par les boucles et une mesure de l'énergie dissipée par le phénomène de plasticité. [1, 2, 14, 21]

1.4. Modélisation et degré de liberté

L'objectif initial de l'étude dynamique déterministe d'une structure est la détermination de l'histoire dans le temps des déplacements d'une structure soumise à un chargement donné variable dans le temps. Les expressions mathématiques qui définissent les déplacements dynamiques sont appelées équations du mouvement de la structure ; la résolution de ces équations donne les histoires des déplacements recherchés. La formulation des équations du mouvement d'un système dynamique peut fort bien constituer la phase la plus importante de toute l'étude. Le nombre de degrés de liberté dans un système dynamique exprime le plus petit nombre de coordonnées nécessaires pour définir la position de toutes les particules de masse du système. Dans la plupart des cas, plusieurs composantes du mouvement sont négligeables les unes par rapport aux autres, de sorte qu'on puisse modéliser un système en apparence compliqué avec seulement quelque degrés de liberté. La détermination du modèle qui décrit et prend en considération les caractéristiques déterminantes de la structure étudiée représente une étape primordiale dans l'analyse dynamique de celle-ci. En effet le choix du degré de liberté et le modèle mathématique approprié au problème étudié est aussi une tâche très délicate. [2, 7, 19, 21, 47]

1.5. Réponse dynamique et spectres de réponse

Dans le cas des structures à comportements linéaires soumises à des chargements dynamiques arbitraires, l'analyse linéaire de la réponse dans le domaine des fréquences procure généralement la technique de résolution la plus commode. Il faut cependant souligner que le principe de la superposition utilisé pour la définition de la réponse dynamique n'est valable que pour des systèmes dont les caractéristiques restent invariables sur l'ensemble de la réponse. Mais pour de nombreuses structures ce n'est pas le cas, par exemple, des structures soumises à des séismes sévères pour causer

des détériorations graves. Donc il est nécessaire d'utiliser une autre méthode pour effectuer l'analyse de ces structures en tenant compte de la variabilité de leurs caractéristiques, d'une autre façon, une méthode susceptible d'être utilisée dans le cas des systèmes présentant des non linéarités de comportement. La méthode qui est probablement la plus puissante en analyse non linéaire est celle de l'intégration pas à pas "step by step". La méthode de résolution la mieux adaptée, ou la plus efficace, dépend du comportement de la structure à étudier « linéaire ou non linéaire » et du mode de définition de la sollicitation appliquée : temporelle, fréquentielle ou spectrale (spectre de réponse d'un oscillateur à un degré de liberté). [1, 2, 32, 33, 47]

1.5.1. Intégration temporelle

C'est la méthode la plus générale, elle consiste à intégrer pas à pas dans le temps les équations du mouvement. La vitesse et le déplacement à l'instant t étant connus, le problème consiste à calculer le nouvel état d'équilibre à l'instant $t = t + dt$. L'intégration temporelle est applicable à tout type de comportement de la structure, qu'il soit linéaire ou non linéaire. Pour un système non linéaire dont les propriétés varient au cours de la sollicitation, c'est la seule méthode applicable [1, 2, 34]. L'application de cette méthode nécessite que la sollicitation soit décrite complètement au cours du temps (figure.1.6).

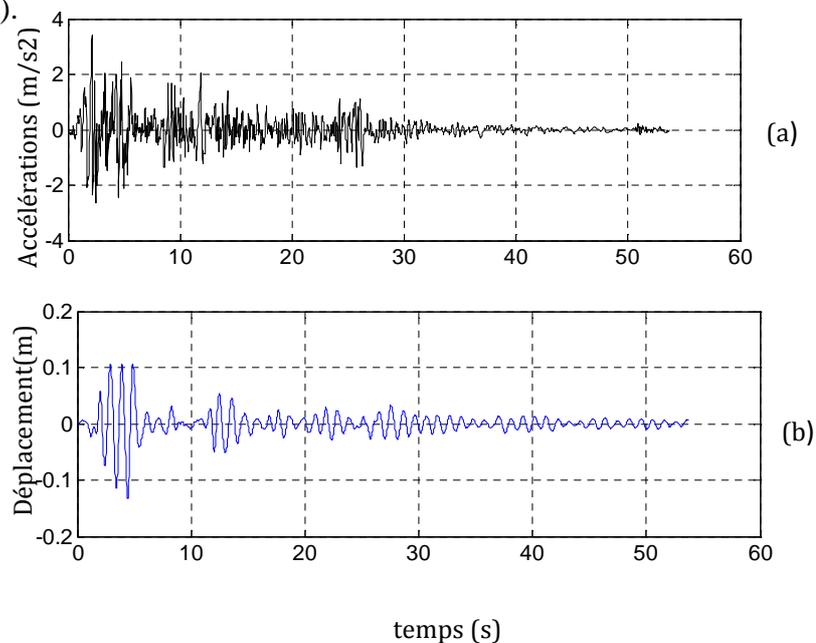


Figure.1.6 (a) excitation (accelerogramme d'El Centro), (b) Réponse dynamique linéaire en déplacement d'une structure a l'excitation (a)

1.5.2. Intégration fréquentielle

La méthode consiste à résoudre les équations du mouvement dans le domaine fréquentiel. La sollicitation est représentée par sa transformée de Fourier et la résolution est effectuée pour chaque harmonique. La solution globale est obtenue par superposition des solutions individuelles qui s'interprète comme une transformée de Fourier inverse (figure.1.7) Cette méthode n'est applicable qu'aux systèmes linéaires. [2]

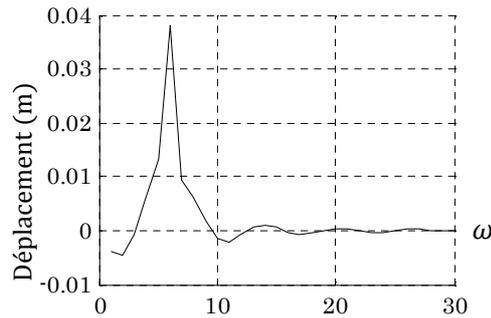


Figure.1.7 réponse d'une structure à 1ddl en fonction de la fréquence ω

1.5.3. Spectre de réponse

Le spectre de réponse est un diagramme donnant la réponse maximale d'un oscillateur simple soumis à une excitation sismique en terme de déplacement, de vitesse ou d'accélération, exprimée en fonction de sa période propre, de sa pulsation propre ou bien de sa fréquence propre. C'est une mesure du contenu fréquentiel de l'excitation. En dynamique des structures, la réponse représentée en spectre est d'intérêt très pratique pour l'ingénieur. La réponse maximale, donc l'effort sismique maximal auquel est soumis l'oscillateur peut être évalué à partir d'une simple lecture sur le diagramme du spectre de réponse. En général, le spectre de réponse dépend de l'excitation sismique, du taux d'amortissement critique, de la loi de comportement et de la ductilité des structures étudiées [2, 32]. Pour le dimensionnement d'une structure, la connaissance de la variation temporelle de l'effort n'est pas obligatoirement nécessaire et seule la valeur maximale de cette grandeur est requise [1]. L'introduction de la notion de spectre de réponse de la sollicitation $\ddot{U}(t)_{sol}$ permet d'accéder directement à cette grandeur. Si on a une réponse $U(t)$ d'un oscillateur de période T et le taux d'amortissement ξ , une valeur maximale du déplacement de la masse intervient à l'instant t_{max} , et vaut U_{max} , il est possible de répéter l'opération précédente pour une collection d'oscillateurs de période T et de

pourcentages d'amortissement critiques variables. Pour chaque réponse on ne retient que la valeur maximale du déplacement que l'on notera S_D .

$$S_D(t, \xi) = \max U(T, \xi, t) \quad (1.1)$$

En reportant les valeurs S_D en fonction de la période T , on obtient des courbes de la figure.1.8, appelées spectres de réponse en déplacement. Ces courbes, établies une fois pour tout pour une sollicitation donnée, permettent d'obtenir directement, sans autre calcul, la réponse maximale de tout oscillateur simple de caractéristique (T, ξ) ;

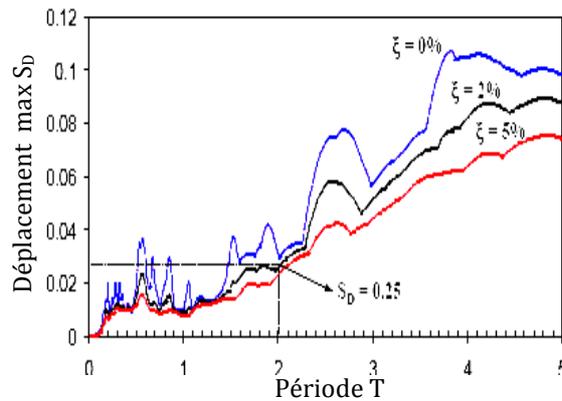


Figure.1.8 Spectre de réponse en déplacement

Les efforts élastiques dans le système pouvaient être obtenus à partir du produit de la masse par la pseudo accélération. Il est donc intéressant d'introduire un spectre de réponse en pseudo accélération $PSA(T, \xi)$ défini par :

$$PSA(T, \xi) = \max [\omega^2 U(T, \xi, t)] = \omega^2 S_D(T, \xi) \quad (1.2)$$

De même, on peut définir un spectre de pseudo vitesse relative $S_V(T, \xi)$. Ces grandeur sont reliées par :

$$PSA(T, \xi) = \omega PS_V(T, \xi) = \omega^2 S_D(T, \xi) \quad (1.3)$$

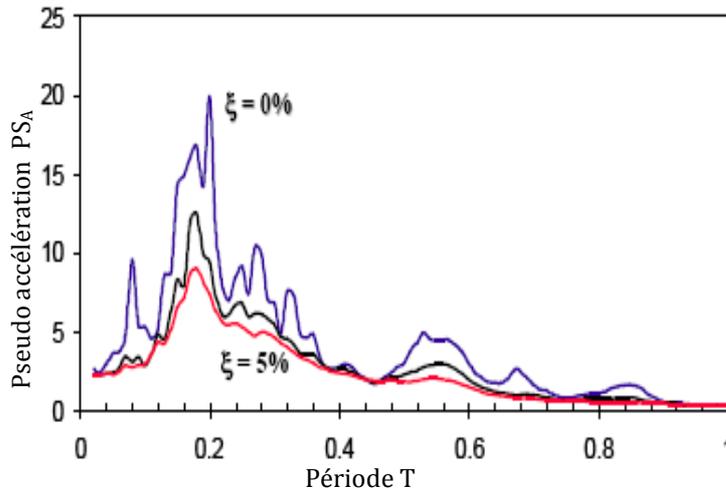


Figure.1.9 Spectre de Réponse en pseudo accélération

Deuxième partie : Applications

1.6. Calcul nonlinéaire des structures

L'équation gouvernant l'équilibre dynamique d'une structure soumise à une excitation sismique, à l'instant t , est exprimée par :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi \omega \dot{u}(t) + R[u(t)] = -\ddot{u}_s(t) \quad (1.4)$$

Où R désigne la force de rappel par unité de masse, ξ et ω sont le taux d'amortissement critique et la pulsation propre, respectivement. La déformation $u(t)$ dépend de l'excitation u_s et des paramètres de la structure (ω et ξ), en plus de la forme de la relation Force-Déplacement. La technique de résolution employée consiste à calculer la réponse par incréments de temps Δt , sous l'hypothèse d'accélération linéaire et de caractéristiques mécaniques constantes durant chaque intervalle de temps. La réponse non linéaire est calculée pour chaque intervalle où le déplacement et la vitesse relatifs obtenus à la fin de chaque intervalle seront considérés comme conditions initiales pour l'intervalle suivant. La nonlinéarité est prise en compte en calculant de nouvelles caractéristiques au début de chaque pas de temps. Pour la commodité des calculs, Δt est pris constant sur toute la durée de l'excitation. Le choix de l'intervalle est très important pour l'efficacité de

la méthode, en général, un rapport incrément / période ($\Delta t/T$) inférieur ou égal à 1/10 permet d'obtenir des résultats satisfaisants [1, 2]. La forme incrémentale de l'équation d'équilibre est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta\ddot{u}(t) + 2\xi \omega \Delta\dot{u}(t) + \omega^2 R(t)\Delta u(t) = -\Delta\ddot{u}_s(t) \quad (1.5)$$

Où :

$\Delta\ddot{u}$ représente l'incrément d'accélération.

$\Delta\dot{u}$ représente l'incrément de vitesse.

Δu représente l'incrément d'accélération et de déplacement.

$\Delta\ddot{u}_s$ est l'incrément de l'accélération du sol.

R représente la force de rappel dont l'expression est la suivante :

$$R(t) = \bar{k}(t)/k \quad (1.6)$$

Où \bar{k} est la rigidité équivalente du système à l'instant t et k la rigidité élastique (initiale) du système. L'expression de la variation du déplacement relatif est :

$$\Delta u(t) = \Delta p(t)/\bar{k}(t) \quad (1.7)$$

1.7. Analyse de la réponse nonlinéaire des structures à un degré de liberté

Dans cette section on montre un exemple d'analyse de la réponse inélastique d'une structure qui a fait l'objet d'un calcul numérique. On a, pour cela, considéré une structure dont les caractéristiques sont les suivantes : période propre de vibration $T = 1,04s$; masse $m = 1kg$; taux d'amortissement $\xi = 5\%$, soumise au séisme du 21 mai de Boumerdes enregistré à la station de Dar-El-Baida, le séisme est représenté par son accélérogramme sur la figure (1.10/a).

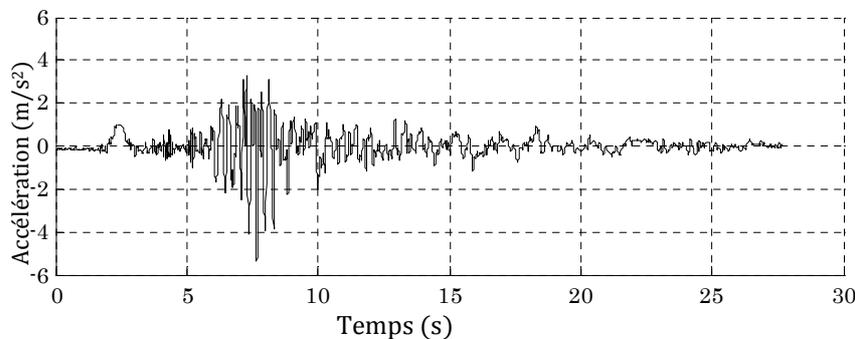


Figure.1.10 Accélération du sol

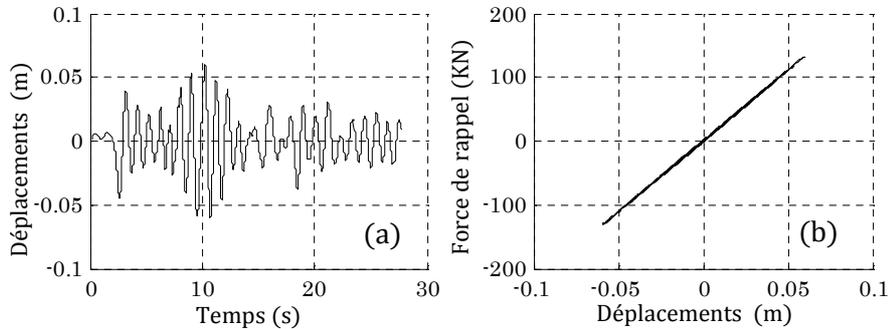


Figure.1.11 Déplacement linéaire (a) et Relation forces-déplacements (b)

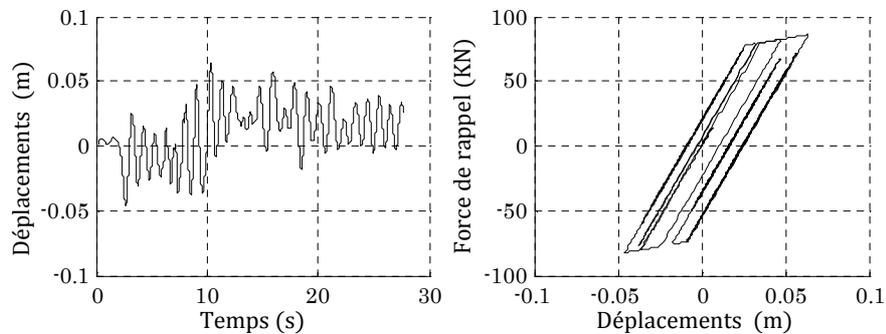


Figure.1.12 Déplacement linéaire (a) et Relation forces-déplacements (b)

Sur les figures (1.11) et (1.12) on a représenté la réponse de chaque modèle en considérant l'histoire temporelle du déplacement relatif et le diagramme Force-Déplacement correspondant. Elles montrent, une nette différence entre le comportement linéaire et le comportement nonlinéaire. On constate que dans le modèle élastique la position d'équilibre demeure fixe, le système vibre autour de zéro pendant toute la durée de l'excitation. Par contre, les systèmes inélastiques vibrent autour d'une nouvelle position d'équilibre après avoir subi des déformations permanentes, autrement dit, des déformations inélastiques. Cette nouvelle position d'équilibre est très apparente sur le digramme Force-Déplacement décrivant une concentration des boucles d'hystérésis. De plus, Les déplacements présentent des amplitudes différentes pour chaque modèle, atteintes à des instants différents.

Pour étendre ces résultats un exemple d'analyse de la réponse sismique de deux structures caractérisées par leurs périodes fondamentales comme suit : $T1 = 0.9s$, $T2 = 1.1s$ et leurs masses sont prises égales à l'unité

$m_1 = m_2 = 1kg$ et le taux d'amortissement critique est fixé à $\xi = 5\%$ et ce pour trois niveaux de ductilité : 1,3 et 5.

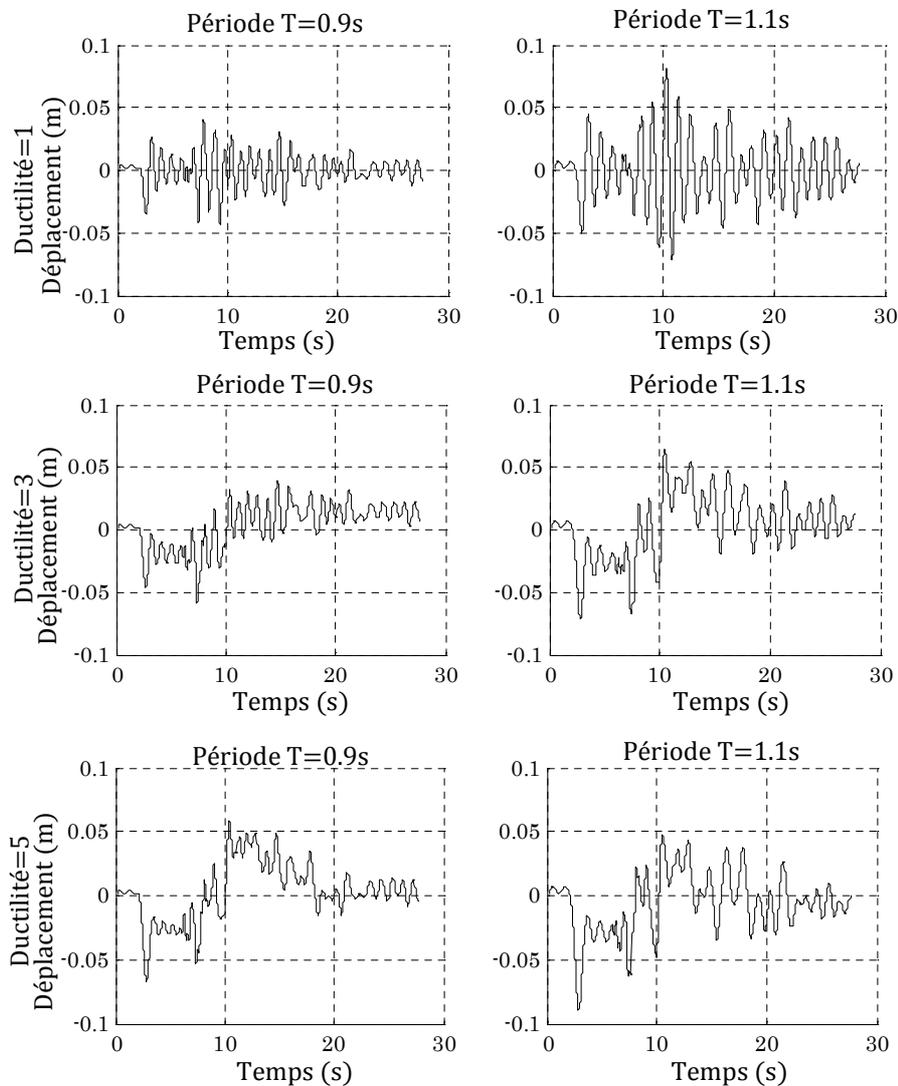


Figure.1.13 Réponse de deux structures ayant des coefficients de ductilité égale à 1, 3, 5

Les résultats de l'analyse de ces deux structures sont représentés sur la figure ci-dessus (1.13), on voit clairement que d'un côté le déplacement maximal augmente pour des valeurs de périodes croissantes, aussi bien pour le modèle élastique que pour le modèle inélastique, d'un autre côté, ce déplacement est d'autant plus important que le niveau de ductilité est grand. On peut ainsi conclure que quelque soit son modèle de comportement la flexibilité d'une structure entraîne des niveaux de déplacements importants.

Et que plus une structure est ductile, plus grandes sont ses déformations irréversibles.

1.8. Spectre de réponse inélastique à ductilité constante

La ductilité d'une structure est définie comme étant sa capacité à absorber sans perte de résistance, de l'énergie de déformation dans la phase inélastique précédant la rupture. La ductilité est représentée dans les calculs par le coefficient de ductilité. Il est très important de faire la différence entre la ductilité disponible (capacité) dans le système et la demande de ductilité, imposée par l'action sismique. Le coefficient de ductilité peut être exprimé en termes de divers paramètres liés à la déformation, à savoir, déplacement, rotation et courbure. Par ailleurs, construire un spectre de réponse à une excitation sismique, nécessite, outre l'amortissement, le choix d'un facteur permettant de classer les oscillateurs simples selon leurs ductilités. Ceci peut être réalisé par l'introduction du coefficient de ductilité. Le déplacement élastique limite doit être conforme à la ductilité imposée, d'où la nécessité d'un calcul itératif sur la valeur de ce déplacement donc sur la résistance élastique limite. [1, 2]

La procédure permettant d'avoir le spectre de réponse de ductilité constante, pour un modèle Elasto Plastique Bilinéaire (EPB), comprend les étapes suivantes :

- D'abord un calcul linéaire est effectué pour déterminer la valeur du déplacement maximal u_{max1} , le déplacement limite élastique est calculé par :

$$u_{y1} = \frac{u_{max1}}{\mu} \quad (1.8)$$

- Après cette étape, un calcul de la réponse nonlinéaire est effectué, et cela pour la valeur du déplacement élastique limite calculé précédemment. Ce calcul conduit à une valeur maximale du déplacement relatif, à partir de laquelle est calculé le coefficient de ductilité :

$$\mu_1 = \frac{u_{max1}}{u_{y1}} \quad (1.9)$$

Un teste de convergence vers le coefficient de ductilité demandée est vérifié avec une précision tol :

$$\frac{|\mu - \mu_1|}{\mu} \leq tol \quad (1.10)$$

- Si la précision n'est pas atteinte, une nouvelle valeur du déplacement limite élastique est calculée à partir de :

$$u_{y2} = \frac{u_{max1}}{\mu} \quad (1.11)$$

- Pour la valeur de u_{y2} , une nouvelle valeur du déplacement maximal relatif est calculée, d'où une nouvelle valeur du coefficient de ductilité :

$$\mu_2 = \frac{u_{max2}}{u_{y2}} \quad (1.12)$$

Evidemment, on refait le test de convergence pour la nouvelle valeur du coefficient de ductilité. Pour améliorer la convergence et réduire le temps des calculs on procède par dichotomie. Les étapes précédentes doivent être refaites autant de fois pour que la condition (1.10) soit satisfaite. [1, 2]

1.9. Analyse par le spectre inélastique

Nous allons représenter les spectres de réponse en accélération Sa/g pour des ductilités constantes, en fonction de la période, couvrant la plage de : $0.05 < T < 3(s)$ englobant ainsi les structures rigides et les structures flexibles. Des valeurs du coefficient de ductilité considérées sont: 1 ,3 et 5. Le coefficient d'amortissement est pris égal à 5%. L'excitation est représentée par accélérogramme de la figure (1.10). Les structures étudiées ont un comportement nonlinéaire idéalisé par le modèle élastoplastique bilinéaire, avec une rigidité plastique $k_p = 10\%$ de k .

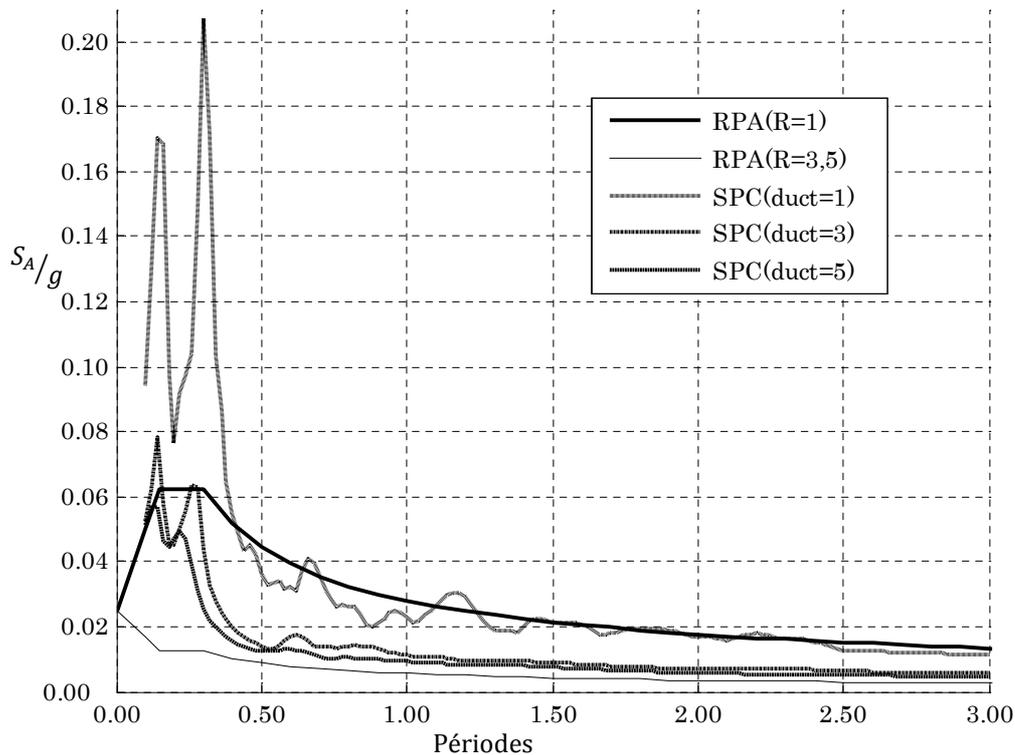


Figure.1.14 Spectres de réponses inélastiques et spectres réglementaires

On remarque, d'après la figure (1.14) que la diminution des accélérations spectrales pour des niveaux de ductilité croissants est plus importante dans les systèmes peu ductiles.

On a ajouté aux spectres de ductilités constantes les spectres réglementaires (RPA) élastiques et inélastiques (R=1 et R=3.5) correspondant aux structures auto stable et aux structures en voile et ce dans le but d'examiner les niveaux d'accélérations du séisme du 21 mai 2003 de Boumerdes. Cette figure confirme bien la violence du séisme. Les niveaux élastiques prévus par le règlement sont amplement dépassés, de même, le spectre inélastique RPA (R=3.5) se situe au dessous des spectres inélastiques de l'accélérogramme notamment pour les périodes inférieures à 1s qui touchent pratiquement toute la gamme des structures courantes concernées par le règlement.

Contrairement aux systèmes élastiques, les systèmes inélastiques vibrent autour de positions d'équilibres différentes qui changent dans le temps en fonction des déformations irréversibles. Les déplacements maxima imposés par le séisme à la structure diminuent en fonction de la ductilité. De plus celle-ci a une influence remarquable sur les réponses spectrales en termes

d'accélération. La diminution des accélérations spectrales est d'autant plus importante que la ductilité du système est grande. Par ailleurs, l'examen de l'enregistrement à la station de Dar-El-Baida du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003, confirme la violence du séisme qui explique l'une des causes des dégâts observés.

1.10. Conclusion

L'application du calcul dynamique des structures aux problèmes sismiques continue d'évoluer rapidement en fonction de l'augmentation des capacités de calcul et du progrès des connaissances sur la nature des mouvements sismiques, les lois de comportement des matériaux et les techniques de résolution numérique. La situation actuelle est caractérisée par la multitude des méthodes de modélisation et de calcul, qui implique de la part des ingénieurs des choix entre différentes approches et rend souvent difficile la détermination d'un compromis optimal entre la recherche de la meilleure approximation possible de la réalité physique et le maintien à un niveau raisonnable des coûts et des délais. Ces ingénieurs ne sont pas toujours conscients du caractère souvent approximatif et conventionnel de la définition des mouvements sismiques qui constituent les données d'entrée de leur calcul. Comme il a été montré dans ce chapitre le calcul dynamique des structures et leurs comportements lors d'un séisme dépend de plusieurs paramètres : Paramètres de l'excitation (amplitude, direction, points d'applications, durée, etc.). Paramètres de la structure (rigidité, masse, période, lois de comportements, etc.).

Ces paramètres comportent souvent des incertitudes, l'expérience montre qu'aucune étude, ou une mesure, aussi soignée soit elle, n'est totalement exempte d'incertitudes. Ces incertitudes induisent des erreurs sur l'estimation que l'on fait de la réponse de la structure et de sa résistance. Elles sont reconnues jouer un rôle prépondérant dans les sinistres survenant aux ouvrages, ces incertitudes ne doivent pas être négligées et la capacité à les évaluer afin de les maintenir aussi faibles que possible apparaît d'une importance cruciale. Il est de ce fait, primordial d'en tenir compte dans le dimensionnement des structures.

Chapitre 2

Méthodes probabilistes pour le calcul dynamique des structures

2.1. Introduction

L'estimation de la résistance d'une structure à un chargement sismique comporte encore plus d'incertitudes par la nature aléatoire du chargement correspondant à la propagation d'une perturbation ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre; En plus du chargement, la structure peut comporter des sources d'incertitudes aussi bien dans les caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs (résistances, composition, montage...) que sur l'assemblage de ses éléments, ou les modèles utilisés pour estimer sa résistance globale. Les incertitudes aléatoires d'un modèle de bâtiment sont relatives en partie aux données ou paramètres du modèle. Chaque paramètre identifié comme une source d'incertitudes peut être modélisé par une variable aléatoire. La modélisation de l'ensemble des paramètres comme variables aléatoires conduit à une modélisation

probabiliste paramétrique des incertitudes. Les méthodes présentées dans le chapitre précédent bien que déterministe dans leur principe, comportent des éléments de nature probabiliste (prise en compte de plusieurs accélérogrammes dans les méthodes temporelles, idéalisation des courbes hystérésis par des segments de droites, lois de comportements etc.) il est donc naturel que les méthodes purement probabilistes aient été proposées. Des notions sur les incertitudes, un élément de calcul des probabilités, ainsi que l'essentiel des méthodes probabilistes utilisées dans le calcul dynamique des structures feront l'objet de ce chapitre.

2.2. Sources d'incertitudes

Nous reprenons ici une décomposition courante des sources d'incertitudes quantifiables sur la valeur des paramètres. Les incertitudes sur la valeur des paramètres du calcul tiennent à plusieurs causes :

- A la variabilité intrinsèque de ces paramètres, que ce soit dans le temps (actions variables, par exemple) ou dans l'espace (propriétés des matériaux et des sols, par exemple) ;
- Au caractère limité des données disponibles pour estimer la valeur des paramètres (tests, sondages, relevés). Cette limitation provient de causes économiques (cout des essais), techniques (essais destructifs : on ne peut pas tout tester...), ou encore chronologiques (faiblesses de notre aptitude à prévoir les phénomènes à venir) ;
- Au mode d'acquisition des données : répétitivité de laboratoire, localisation biaisée des échantillons prélevés, influences plus ou moins aléatoires des conditions expérimentales, etc.

Les incertitudes dites de modèle quant à elles sont doubles :

- Incertitudes sur l'adéquation entre les prévisions d'un modèle inventé par l'homme et la réalité du comportement de la nature ;
- Incertitudes sur la validité de l'assimilation couramment pratiquée entre le résultat d'une mesure, acquise par exemple en suivant un protocole expérimentale, et un paramètre théorique apparaissant dans telle équation d'un modèle de calcul sauf à ce que les paramètres d'entrée soient définis comme les résultats mêmes de mesures acquises selon un protocole donné, ce qui permet d'évacuer

ce type d'incertitude de modèle (par exemple, les modèles pressiométriques et pénétrométriques pour le calcul des fondations). Les incertitudes mal quantifiables, sont principalement celles dont le facteur humain est à l'origine :

- Conception, reconnaissance, modélisation générale des ouvrages et de leur environnement ;
- Exécution des travaux, respect des règles de l'art (toutefois parmi les incertitudes quantifiables d'exécution des travaux, on peut citer les variations géométriques : épaisseurs d'éléments en béton armé, déviations angulaires d'éléments élancés, cotes de dragage...) ;
- Certaines actions accidentelles ;
- Exploitation des équipements, respects des règlements de charges... ; [9, 15, 21, 36, 42, 45]

2.3. Modélisation mathématique des incertitudes

Chacune des grandes sources d'incertitudes fait objet de considérations mathématiques appropriées, du moins quand cela est possible. Pour essayer de prendre en compte de façon rationnelle l'incertitude sur les valeurs des paramètres, on est tenté de s'appuyer sur le formalisme de probabilité : les paramètres incertains ou inconnus sont alors modélisés par des champs aléatoires (variabilité dans l'espace) ou par processus stochastiques (variabilité dans le temps). La dispersion des valeurs expérimentales obtenues dans des conditions apparemment identiques sera de son côté prise en compte à l'aide de la théorie des statistiques. La dispersion provenant de l'acquisition des données sera traitée elle aussi par les méthodes statistiques. [9, 15, 21,42]

2.4. Rappel des éléments du calcul de probabilités

2.4.1. Expériences et événements aléatoires

On appelle expérience aléatoire une expérience E conduisant suivant le hasard à plusieurs résultats possibles. Un résultat possible de l'expérience est appelé issue ou éventualité, est noté classiquement par la lettre ω . L'espace de toutes les issues possibles, appelé encore univers, sera noté Ω .

Évènements aléatoires et tribus

On appelle évènement aléatoire (associé à l'expérience E), un sous-ensemble de Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non. Les évènements aléatoires étant des ensembles, on peut effectuer les opérations logiques habituelles :

- L'évènement Ω est l'évènement certain, \emptyset est l'évènement impossible.
- L'évènement A^c est l'évènement contraire à A .
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement $A \wedge B$ sont réalisés.
- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement $A \vee B$ sont réalisés.
- Si $A \subset B$, la réalisation de l'évènement A entraîne la réalisation de B .
- Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que $A \wedge B$ sont incompatibles. Un résultat de l'expérience ne peut être à la fois dans A et dans B .

Une famille \mathcal{F} de parties d'un ensemble Ω est une tribu ou une σ -algèbre si \mathcal{F} a les trois propriétés suivantes :

- \mathcal{F} contient l'ensemble Ω .
- \mathcal{F} est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{F}$ alors le complémentaire $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
- \mathcal{F} est stable par réunion dénombrable, c'est-à-dire que si A_1, A_2, \dots est une famille dénombrable quelconque d'éléments de \mathcal{F} , alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Le couple (Ω, \mathcal{F}) est alors appelé espace probabilisable. Généralement si Ω est fini ou dénombrable, on prend le plus souvent $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$; $\wp(\Omega)$ est l'ensemble des partitions de (Ω) . [15, 19, 21, 28]

2.4.2. Le concept de probabilité

Définition

Une probabilité sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) est une application de \mathcal{F} dans $[0, 1]$, noté P , telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_n$ est une suite d'évènements incompatibles deux à deux, alors : $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$

Notons les propriétés immédiates suivantes, qui se déduisent de la définition :

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $\forall A \in \mathcal{F}, P(A^c) = 1 - P(A)$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

Dans le langage de la théorie de la mesure, P est donc une mesure positive de masse 1. On appelle le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité ou un espace probabilisé.

Probabilité conditionnelle

Soient deux évènements A et B non incompatibles. Dans une suite de n épreuves aléatoires, A est réalisé n_A fois, B est réalisé n_B fois, et leur conjonction $A \cap B$ est réalisé $n_{A \cap B}$ fois. On peut ainsi définir la fréquence conditionnelle de A liée à la réalisation de B :

$$f_A^B = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} \quad (2.1)$$

On tirera parallèlement la définition de la probabilité conditionnelle de A liée à B :

$$P^B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.2)$$

La probabilité conditionnelle de A liée à B se note aussi $P(A/B)$. L'équation (2.2) ci-dessus n'a pas de sens que si $P(B) \neq 0$. Elle est alors équivalente à :

$$P(A \cap B) = P^B(A)P(B) \quad (2.3)$$

Indépendance en probabilité

On dit que A et B sont indépendants en probabilité si $P^A(B) = P(B)$. On a alors aussi, en vertu de l'équation (2.3) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. On dira que n évènements A_1, A_2, \dots, A_n sont indépendants en probabilité si :

$$P\left(\bigcap_{i \in I_\alpha} A_i\right) = \prod_{i \in I_\alpha} P(A_i) \quad (2.4)$$

Formule de Bayes

Soient A_1, A_2, \dots, A_n des évènements non vides mutuellement incompatibles, tels que $\bigcup_n A_n = \Omega$, et un évènement B quelconque. On suppose connues les probabilités $P(A_i) = p_i$ et les probabilités conditionnelles $P(B/A_i) = q_i$. De la relation $\bigcup_n (A_n \cap B) = B \cap (\bigcup_n A_n) = B$, on tire :

$$P(B) = \sum_n P(A_n \cap B) \quad (2.5)$$

$$= \sum_n P(B/A_n) P(A_n) \quad (2.6)$$

$$= \sum_n p_n q_n \quad (2.7)$$

Et pour tout A_i ,

$$P^B(A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{\sum_n p_n q_n} = \frac{p_i q_i}{\sum_n p_n q_n} \quad (2.8)$$

Cette formule, dite formule de Bayes, ou « de la probabilité des causes ».

2.4.3. Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire X toute application mesurable de (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans un espace mesuré (E, \mathcal{L}) , par définition même d'une fonction mesurable, une variable aléatoire X est caractérisée par la propriété suivante :

$$\forall B \in \mathcal{L}, \{\omega, X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad (2.9)$$

Une variable aléatoire est une grandeur qui dépend du résultat de l'expérience. [15, 19, 21]

2.4.3.1. Lois de probabilité de variables aléatoires

Dire qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire, c'est dire qu'on se donne les probabilités de tous les évènements qui peuvent être définis au moyen de cette variable aléatoire. La loi de probabilité est susceptible de plusieurs représentations ; deux d'entre elles, la fonction de répartition et la densité de probabilité, sont couramment employées en statistiques. [21]

2.4.3.1.1. Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X . La probabilité, fonction de x , pour que X réalise l'évènement $[X \leq x]$ est appelée fonction de répartition de X , et noté P_X

$$P_X(x) = P[X \leq x] \quad (2.10)$$

Quelques propriétés de cette fonction de répartition :

$$0 \leq P_X(x) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P_X(x) = 1$$

$$\text{Si } x_2 > x_1 \text{ alors } P_X(x_2) > P_X(x_1)$$

$$P_X \text{ est continue à droite}$$

Selon que la fonction de répartition est discontinue ou continue, on classe les variables aléatoires en deux catégories principales, pour lesquelles les moyens de calcul sont assez différents : les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires continues. [9]

a. Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne peut prendre qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs x_1, x_2, \dots, x_n . La fonction de répartition prend alors la forme d'une fonction en escalier, constante entre deux valeurs consécutives de la suite $\{x_n\}$. Si l'on pose $P_n = P[X = x_n]$, alors $\sum_n P_n = 1$. Exemple d'une représentation graphique d'une fonction de répartition, figure (2.1). [15]

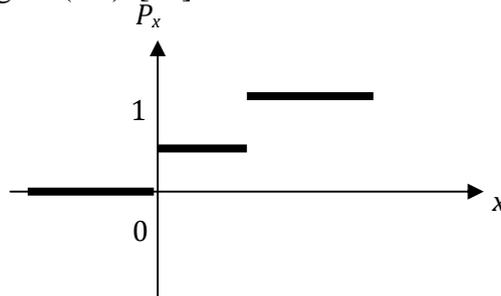


Figure.2.1 Représentation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

b. Variables aléatoires continues. Densité de probabilité

Une variable aléatoire absolument continue est une variable aléatoire dont la fonction de répartition P_X est continue. En pratique, P_X est alors fonction dérivable, et sa dérivée $p_X(x)$ est appelée densité de probabilité.

$$p_X(x) = \frac{dP_X(x)}{dx} \quad (2.11)$$

Une fonction pourra être considérée comme une densité de probabilité si elle présente les propriétés suivantes :

$$p_X(x) \geq 0 \quad (2.12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (2.13)$$

C'est une représentation très utile de la loi de probabilité d'une variable aléatoire, elle permet en particulier de calculer la probabilité pour que la valeur d'une variable aléatoire X se trouve dans l'intervalle (a, b) : [9, 15]

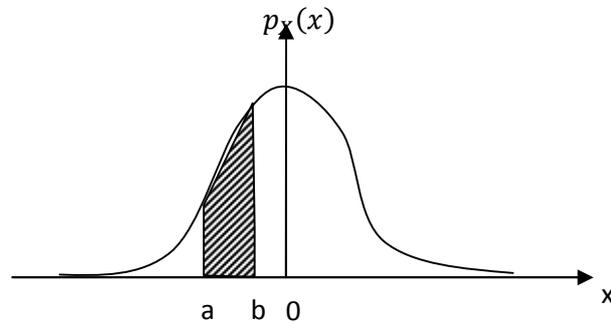


Figure.2.2 la probabilité pour que X soit comprise entre a et b est mesurée par l'aire hachurée

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b p_X(x) dx \quad (2.14)$$

2.4.3.2. Moments d'une variable aléatoire réelle

On dit que la variable aléatoire réelle absolument continue X admet un moment d'ordre q si la variable $|X|^q$ est intégrable, c'est-à-dire si :

$$E(|X|^q) = \int_{\mathbb{R}} |x|^q P_X(dx) < +\infty \quad (2.15)$$

Et le moment d'ordre q de X sera alors la quantité :

$$E(X^q) = \int_{\mathbb{R}} x^q P_X(dx) \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

Le moment d'ordre 1 de X est l'espérance mathématique de cette variable, elle représente le comportement moyen de la variable aléatoire

réelle X définie de (Ω, \mathcal{F}, P) à valeur dans \mathbb{R} . L'existence du moment d'ordre 2 va nous permettre de définir la notion de variance. [15, 21, 31]

2.4.3.3. Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle

On s'intéresse maintenant à quantifier les écarts entre X et sa moyenne. Une distance commode pour mesurer cet écart va être la distance quadratique $(X - E(X))^2$ qui est aussi une variable aléatoire. L'espérance de cette variable est appelée variance de X . On supposera que X est carré intégrable. On appelle variance de X , et on note $Var(X)$ le nombre positif :

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) \quad (2.17)$$

On appelle écart type la racine de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \quad (2.18)$$

On a aussi la formule de Koenig :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (2.19)$$

De même on peut montrer que :

$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abE((X - E(X))(Y - E(Y)))$ La quantité $E((X - E(X))(Y - E(Y)))$, définie dès que X et Y sont de carré intégrables, s'appelle la covariance de X et Y , notée $Cov(X, Y)$. Elle peut s'écrire sous la forme de Koenig :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (2.20)$$

Si les deux variables X et Y sont indépendantes et intégrables et si XY est intégrable alors

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (2.21)$$

Il s'en suit que $Cov(X, Y) = 0$. Mais ceci n'est pas une condition suffisante pour assurer l'indépendance des variables.

2.4.3.4. Covariance et corrélation linéaire

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrables. Le but ici est de chercher la meilleure approximation de Y par des variables aléatoires réelles de la forme $aX + b$, pour a et b réels, pour la distance quadratique $((Y - aX - b)^2)$.

En développant cette formule astucieusement, on montre qu'il existe un unique couple (a, b) minimisant cette distance, donné par :

$$a = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} \quad (2.22)$$

$$b = E(Y) - \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} E(X) \quad (2.23)$$

Dans ce cas la distance vaut :

$$\frac{Var(X)Var(Y) - Cov(X, Y)^2}{Var(X)} \quad (2.24)$$

Cette distance est d'autant plus petite que $\left| \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right|$ est proche de 1. Ainsi le réel compris entre -1 et 1 , appelé coefficient de corrélation linéaire, est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad (2.25)$$

Donne l'idée d'un éventuel ajustement linéaire de Y comme fonction affine de X . Cet ajustement est donc la droite :

$$y = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} x + E(Y) - \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} E(X) \quad (2.26)$$

Appelée droite de régression linéaire ou droite des moindres carrés de Y en X . Ce type d'ajustement a tout son sens en statistiques.

2.4.3.5. Loïs marginales

Soit une variable aléatoire de \mathbb{R}^2 , et sa fonction de répartition $F_X(x_1, x_2)$. Les fonctions de répartition des coordonnées sont données par les relations :

$$\begin{cases} F_{X_1}(x_1) = F_X(x_1, +\infty) \\ F_{X_2}(x_2) = F_X(+\infty, x_2) \end{cases} \quad (2.27)$$

Puis, de là, les densités de probabilité f_{X_1} et f_{X_2} à partir de f_X . En effet :

$$F_{X_1}(x_1) = \int_0^{x_1} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2) dx_2 \quad (2.28)$$

d'où :

$$F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2) dx_2 \quad (2.29)$$

de même :

$$F_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2) dx_1 \quad (2.30)$$

2.4.3.6. Loïs conditionnelles

La probabilité pour que $X \in dx_1 dx_2$ peut être écrite comme suit, au moyen de la formule des probabilités conditionnelles :

$$P[X \in dx_1 dx_2] = P[X_1 \in dx_1 \text{ et } X_2 \in dx_2] \quad (2.31)$$

$$P[X_1 \in dx_1]P[X_2 \in dx_2 / X_1 \in dx_1] \quad (2.32)$$

On en tire la densité de probabilité conditionnelle de X_2 liée par X_1 : $f_2^1(x_2|x_1)$. Car :

$$f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = f_X(x_1) dx_1 \times f_2^1(x_2|x_1) dx_2 \quad (2.33)$$

Ou encore, en utilisant l'expression de $f_{X_1}(x_1)$ établie au §2.4.3.5.

$$f_2^1(x_2|x_1) = \frac{f_X(x_1, x_2)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2) dx_2} \quad (2.34)$$

2.4.3.7. Changement de vecteur aléatoire. Formule du Jacobien

Soit X un vecteur aléatoire continu et $Y = g(X)$ une application biunivoque et continue définie de façon développée par les relations

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases} \quad (2.35)$$

Le Jacobien de la transformation $X \rightarrow Y$ est par définition le déterminant (*différent de 0*) :

$$J(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial X_1} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial X_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial X_n} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_n} & \dots & \frac{\partial Y_n}{\partial X_n} \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

Comme X_1, X_2, \dots, X_n peuvent s'exprimer en fonction de Y_1, Y_2, \dots, Y_n , on posera :

$$J[X_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_n), \dots, X_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)] = J'(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (2.37)$$

Si la densité de probabilité de $X = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors celle de Y est :

$$\begin{aligned} & f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= \frac{1}{|J'(y_1, y_2, \dots, y_n)|} \cdot f_X[x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, y_2, \dots, y_n)] \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.4.3.8. Sommes de variables aléatoires indépendantes

L'importance des sommes des variables aléatoires indépendantes tient d'une part à des problèmes pratiques très courants, d'autre part à leur rôle, sous la forme de moyennes arithmétiques, dans la manifestation générale du hasard. Nous aborderons ici deux problèmes :

- Calcul de la loi de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes.
- Calcul de la moyenne et de la variance.

A. Loi de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes

Variables aléatoires discrètes

Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires discrètes, à valeurs entières. On pose :

$$P[X_1 = n] = p_1^n \quad (2.39)$$

$$P[X_2 = n] = p_2^n \quad (2.40)$$

On trouve que :

$$P[X_1 + X_2 = n] = P_1^k P_2^{n-k} \quad (2.41)$$

Cette expression est déjà compliquée, et il est évident que, si l'on doit additionner plusieurs variables aléatoires, la loi de probabilité de leurs sommes peut devenir rapidement une expression très compliquée. [11, 15]

Variabes aléatoires continues. Convolution

Soit deux variables aléatoires continues X_1, X_2 , de densités de probabilité $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement. La densité de probabilité du vecteur aléatoire (X_1, X_2) est :

$$f_X(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \quad (2.42)$$

La formule du Jacobien, appliquée à la transformation :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_1 + X_2 \end{cases} \quad (2.43)$$

Donne la densité de probabilité du couple (Y_1, Y_2) :

$$f_Y(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2 - y_1) \quad (2.44)$$

La densité de probabilité marginale de Y_2 est alors :

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y_1) f_2(y_2 - y_1) dy_1 \quad (2.45)$$

Reprenons cette formule avec des notations plus usuelles, et posons

$$S = Y_2 = X_1 + X_2 \quad (2.46)$$

$$f_s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(x - u) du \quad (2.47)$$

L'expression du second membre est appelée convolution des densités de probabilité f_1 et f_2 .

Moyennes et variances

Souvent, le calcul des moyennes et variances est beaucoup plus aisé que celui des lois de probabilité. Ces moyennes et variances sont généralement suffisantes pour les usages pratiques. [9, 15, 21, 28]

- Variables aléatoires quelconques

Soit $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $E[X_k] = m_k$. En raison de la linéarité de l'espérance mathématique $E[S] = \sum_{k=1}^n m_k$, la moyenne de la somme est

égale à la somme de moyennes. Si tous les m_k sont égaux à m , et si $\bar{X} = \frac{S}{n}$ est la moyenne arithmétique des X_k , $E[\bar{X}] = m$.

Si nous posons $Var X_k = \sigma_k^2$ nous auront :

$$Var s = E \left[\left\{ \sum_{k=1}^n (X_k - m_k) \right\}^2 \right] \quad (2.48)$$

$$= E \left[\sum_{k=1}^n (X_k - m_k)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (X_i - m_i)(X_j - m_j) \right] \quad (2.49)$$

$$Var s = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n Cov(X_i, X_j) \quad (2.50)$$

La variance de la somme est égale à la somme des variances plus deux fois la somme des covariances.

Variabes aléatoires indépendantes

Si les X_k sont indépendantes et leurs covariances sont nulles ; alors la variance de la somme est égale à la somme des variances.

Si tous les σ_k^2 sont égaux à σ^2 alors :

$$Var \bar{X} = E \left[\left(\frac{S - E[S]}{n} \right)^2 \right] \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{n^2} Var S = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.52)$$

2.4.4. Inégalités fondamentales

On citera dans ce paragraphe quelques inégalités les plus utilisées en théorie des probabilités.

Inégalités de Markov

Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire intégrable.

Alors :

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a} E(|X|) \quad (2.53)$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

L'application la plus célèbre de l'inégalité de Markov consiste à considérer une variable aléatoire réelle X de carré intégrable et d'appliquer $P(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a^p} E(|X|^p)$ à la variable aléatoire $X - E(X)$ pour $p=2$. On obtient alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} \quad (2.54)$$

Inégalité de Schwarz

On considère ici deux variables aléatoires de carré intégrable X et Y . On montre que :

$$E(XY) \leq |E(XY)| \leq (E(X^2))^{1/2} (E(Y^2))^{1/2} \quad (2.55)$$

En appliquant cette inégalité à $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$, on obtient :

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sigma(X)\sigma(Y) \quad (2.56)$$

Loi faible des grands nombres

Si nous appliquons à \bar{X} l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous obtenons :

$$P\left[|\bar{X} - m| \geq \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right] \leq \frac{1}{t^2} \quad (2.57)$$

Prenons $\frac{1}{t^2} \leq \varepsilon$ petit (par exemple $\varepsilon = 0,01$, d'où $t \geq 10$) ; puis n assez grand pour que $t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \eta$ petit (ou $n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon \eta^2}$, si $\frac{1}{t^2} = \varepsilon$) nous trouvons :

$$P[|\bar{X} - m| \geq \eta] \leq \varepsilon \quad (2.58)$$

\bar{X} est donc, avec une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$, une mesure approchée de m dont l'erreur est au plus égale à η . La loi « faible » des grands nombres est le fondement de l'estimation statistique.

2.5. Méthodes probabiliste pour le calcul des structures

On exposera dans ce qui suit les méthodes probabilistes les plus utilisées qui font intervenir les incertitudes dans le calcul des structures de génie civil.

2.5.1.Principes de l'estimation

Supposons que nous disposons d'un échantillon prélevé dans un lot, dont le caractère est distribué suivant une loi de forme mathématique connue, qui implique un certain nombre de paramètres inconnus. Il y aura toujours un nombre infini de fonctions des valeurs de l'échantillon, pouvant être proposées comme estimateurs des paramètres. D'où la question : comment utiliser au mieux les résultats pour mesurer les paramètres ? Et l'autre question : qu'entend-on par meilleure estimation ?

2.5.1.1.Définition

La théorie de l'estimation repose sur la loi faible des grands nombres : elle montre qu'une variable aléatoire peut être considérée comme une mesure de son espérance mathématique, d'autant meilleure que sa variance est plus faible. Le paragraphe précédent mentionne l'existence d'un modèle probabiliste. Dans la pratique, les paramètres que l'on désire (mesurer) ne sont pas nécessairement ceux de lois de probabilités. [28]

A titre d'exemple, une centrale de fabrication d'enrobés produit un matériau dont la teneur moyenne en bitume, sur un lot homogène, est défini de façon parfaitement déterministe comme le rapport entre la masse du liant et celle du squelette minéral. Comme d'une part il importe de ne pas faire d'essais sur des quantités trop grandes, surtout si l'essai est destructif, et même s'il ne l'est pas car cela coute trop cher ; comme d'autre part on souhaite néanmoins estimer cette teneur, on réintroduit le hasard là où il n'existe pas fondamentalement, en procédant à un échantillonnage aléatoire ; cela permet de parler de l'espérance mathématique de la teneur en liant d'une prise prélevée au hasard. Ce terme, facile à énoncer, demande en fait (tout particulièrement dans le cas de matériaux en vrac) un très grand soin et beaucoup de rigueur pour être traduit en pratique. [9, 15, 28]

2.5.1.2. Procédure d'estimation

Un estimateur est donc défini comme une certaine fonction d'échantillon, qui est en fait une variable aléatoire, dont on peut étudier la loi de distribution introduite grâce au processus d'échantillonnage aléatoire. Cette variable aléatoire, à l'occasion d'un échantillonnage effectif, prend une valeur qui, naturellement, présente un écart par rapport à la valeur vraie du paramètre qu'elle estime. Il est normal de souhaiter que cette erreur soit aussi petite que possible. Or, elle comporte deux parties additives :

- Une erreur elle-même aléatoire, qui n'est autre que l'écart entre la variable aléatoire et son espérance (écart de moyenne nulle). L'inégalité très générale de Bienaymé-Tchebychev montre que l'erreur aléatoire décroît en même temps que la variance : on a donc un moyen de la diminuer en augmentant l'effectif d'échantillon.
- Une erreur systématique, appelée biais, qui est l'écart entre l'espérance mathématique de l'estimateur et la valeur vraie du paramètre à estimer. [9, 15, 19]

Les valeurs caractérisant, pour les différents estimateurs possibles, ces deux composantes de l'erreur totale, permettent de définir plusieurs types d'estimateurs :

- Estimateur convergent (ou asymptotiquement sans biais) : son espérance mathématique tend vers la valeur vraie quand l'effectif n d'échantillon croît indéfiniment ;
- Estimateur sans biais : son espérance mathématique est égale à la valeur vraie quel que soit n ;
- Estimateur efficace : pour n donné, on peut montrer que dans certains cas importants les variances de tous les estimateurs (avec ou sans biais) d'un paramètre sont bornées inférieurement : l'estimateur efficace est celui qui présente la variance minimale. [10]

2.5.1.3. Méthodes d'estimation

A. Méthode des moments (K. Pearson) (estimation ponctuelle)

Elle consiste simplement à évaluer un nombre approprié de moments de l'échantillon aux moments correspondants de la distribution, qui

s'expriment en fonction des paramètres inconnus. En prenant autant de moments qu'il y a de paramètres à estimer, la résolution des équations conduit aux estimateurs désirés. Pour la distribution normale, cette méthode donne comme estimateur de la moyenne m la moyenne d'échantillon \bar{x} , et de la variance σ^2 la variance d'échantillon σ^2 . La première est sans biais ; en revanche, la seconde en présente un. Pour la corriger de ce biais, il faut adopter l'estimateur : [9]

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2 \quad (2.59)$$

Méthode du maximum de vraisemblance (R.A.Fisher) (estimation ponctuelle)

Supposons connu(s) le (ou les) paramètre(s) θ de la distribution de X . Considérons un échantillon aléatoire (X_1, X_2, \dots, X_n) . La distribution de ce vecteur a une densité :

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n / \theta) = \prod f(x_i / \theta) \quad (2.60)$$

Ayant observé les valeurs x_i des X_i , θ n'étant pas connu, on peut considérer le produit \prod comme une fonction de θ , vraisemblance (relative) de l'échantillon ; on l'écrit :

$$L(\theta / x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.61)$$

Le critère du maximum de vraisemblance consiste à choisir comme estimateur de θ celui qui maximise L . On peut appliquer ce critère aussi bien à un paramètre θ qu'à un paramètre vectoriel $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$. Le calcul pratique comporte l'annulation de la dérivée de L (en θ), ou, si c'est plus commode, de son logarithme. On donne comme exemple celui d'une loi normale où on ignore à la fois m et σ . On a : [9, 36]

$$L(m, \sigma / x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \left[\exp^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} \right] \quad (2.62)$$

La forme suggère de recourir au logarithme :

$$\begin{aligned} \ln[L(m, \sigma / x_1, x_2, \dots, x_n)] \\ = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial m} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m})^2 = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

σ étant positif et fini, la première équation donne :

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{X} \quad (2.65)$$

En substituant cette valeur dans la seconde équation, et en résolvant en $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.66)$$

Ce dernier résultat montre qu'on peut obtenir, avec la méthode du maximum de vraisemblance, un estimateur biaisé. Mais il est intéressant de souligner que la propriété générale de ces estimateurs à vraisemblance maximale est d'être asymptotiquement sans biais. On peut montrer également qu'au moins asymptotiquement, ils ont d'autres qualités :

- Variance minimale parmi tous les estimateurs non biaisés (efficaces) ;
- $g(\theta)$ étant une fonction du paramètre θ , $\hat{g}(\theta) = g(\theta)$ (invariants) ;
- Utilisation maximale de l'information contenue dans l'échantillon (suffisants). [9]

C. Intervalle de confiance

L'estimation ponctuelle, exposée ci-dessus, n'utilise nullement, dans la méthode des moments, la forme de la distribution de X . L'étude de la distribution de l'estimateur nécessite en revanche qu'on l'introduise ; elle permet d'accéder à la notion d'intervalle de confiance. Connaissant cette distribution θ , en effet, on peut calculer les limites d'une région où se trouve avec une probabilité élevée $1-\alpha$ (α *petit*). Les limites étant exprimées en fonction de θ , on peut déduire de cet intervalle un intervalle fonction de θ - donc aléatoire lui-même qui encadrera la vraie valeur de θ avec une probabilité identique $1-\alpha$. Il serait inexact-bien que cette erreur soit souvent commise de dire que θ a la probabilité $1-\alpha$ d'être dans cet

intervalle, puisque θ a une valeur certaine. Ce qui est exact, en revanche, est que sur une longue série de n -échantillons tirés de la même population, un pourcentage $100(1 - \alpha)$, en moyenne encadreront θ , et 100α la laisseront en dehors. Ceci illustre la notion de confiance ($1 - \alpha$ est dit de niveau de confiance, et α seuil de confiance). [9, 19, 42, 45]

Exemples d'intervalles de confiance

Moyenne

Supposons que le caractère X suit une loi normale de moyenne m inconnue et d'écart-type σ connu (grâce, par exemple, à des résultats antérieurs en grand nombre). La moyenne \bar{X} des valeurs mesurées sur un n -échantillon est elle-même en loi normale de même moyenne, et d'écart-type :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.67)$$

Donc :

$$\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.68)$$

Est une variable normale réduite, dont les tables permettent, par exemple, d'écrire que :

$$P \left[-1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - m \leq 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 0,95 \quad (2.69)$$

Par ailleurs, si on ne connaît pas σ , l'idée naturelle est de le remplacer par son estimation. Dans le cas seulement où X est en loi normale, la « statistique » (au sens anglo-saxon = fonction d'échantillon) :

$$T = \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{1/n}} \quad (2.70)$$

Est appelée variable de Student, à $\nu = n - 1$ degrés de liberté. Sa distribution ne dépend que de ν . Elle a été tabulée, en fonction de ν , ce qui permet d'établir des intervalles de confiance de m . A même niveau de confiance, les intervalles sont plus larges que lorsqu'on connaît σ : la différence se réduit quand n augmente.

Variance

On peut établir que, lorsque X est en loi normale, l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ de sa variance est distribué comme :

$$\frac{\chi_{v=n-1}^2}{n} \sigma^2 \quad (2.71)$$

Les tables de χ^2 , utilisées avec le nombre voulu de degrés de liberté, permettent ainsi de calculer un intervalle de confiance de la variance σ^2 , au niveau $1-\alpha$ désiré. A noter à ce sujet qu'on utilisera généralement dans ce cas un intervalle unilatéral, correspondant à :

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} n \leq \chi_{n-1, \alpha}^2\right) = 1-\alpha \quad (2.72)$$

Puisqu'on s'intéresse essentiellement à la valeur maximale de la dispersion.

2.5.2. Méthode de Monté-Carlo

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis, et publié pour la première fois en 1949 dans un article coécrit avec Stanislas Ulam. Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.). La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés, et à leur affecter une distribution de probabilités. Pour chacun de ces facteurs, on effectue un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de déterminer la probabilité d'occurrence de chacun des résultats. Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué, sous l'impulsion de John Von Neumann et Stanislas Ulam notamment, lors de la Seconde Guerre mondiale et des recherches sur la fabrication de la bombe atomique. Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la Monte-Carlo N-Particle transport. [15, 19, 21, 36]

2.5.2.1. Principe de la méthode de Monté-Carlo

Nous disposons de l'expression de l'espérance mathématique d'une fonction g de variable aléatoire X , résultant du théorème de transfert, selon lequel :

$$G = E(g(X)) = \int_a^b g(x) f_X(x) dx \quad (2.73)$$

où f_X est une fonction de densité sur le support $[a; b]$. Il est fréquent de prendre une distribution uniforme sur $[a; b]$:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (2.74)$$

Ceci peut être étendu aux probabilités discrètes en sommant grâce à une mesure ν discrète, de type Dirac. L'idée est de produire un échantillon (x_1, x_2, \dots, x_N) de la loi X (donc d'après la densité f_X) sur le support $[a; b]$, et de calculer un nouvel estimateur dit de Monte-Carlo, à partir de cet échantillon. La loi des grands nombres suggère de construire cet estimateur à partir de la moyenne empirique :

$$\tilde{g}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad (2.75)$$

qui se trouve être, par ailleurs, un estimateur sans biais de l'espérance. Ceci est l'estimateur de Monte-Carlo. Nous voyons bien qu'en remplaçant l'échantillon par un ensemble de valeurs prises dans le support d'une intégrale, et de la fonction à intégrer, nous pouvons donc construire une approximation de sa valeur, construite statistiquement. Cette estimation est sans-biais, dans le sens où

$$E(\tilde{g}_N) = G = E(g(X)) \quad (2.76)$$

Il faut aussi quantifier la précision de cette estimation, via la variance de \tilde{g}_N . Si l'échantillon est supposé iid, cette variance est estimée à l'aide de la variance empirique :

$$S_{g(X)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (g(x_i) - \tilde{g}_N)^2 \simeq \sigma_g^2 \quad (2.77)$$

Avec

$$\sigma_g^2 = E(g^2(X)) - E(g(X))^2 = \int_{\Omega} g^2(x) f_X(x) dx - G^2 \quad (2.78)$$

Par le théorème de la limite centrale, on sait que la variable :

$$Z := \frac{\tilde{g}_N - G}{\sigma_g / \sqrt{N}} \equiv \sqrt{N} \left(\frac{\tilde{g}_N - G}{\sigma_g} \right) \quad (2.79)$$

qui est centrée et réduite, suit approximativement la loi normale centrée réduite, ou loi de Gauss. Il est alors possible de construire des intervalles de confiance, ce qui permet d'encadrer l'erreur commise en remplaçant G par \tilde{g}_N . Si cette erreur est dénotée e_n , alors pour un niveau de risque α donné, on a :

$$|e_n| \leq Z_\alpha / 2 \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}} \quad (2.80)$$

Avec probabilité $1 - \alpha$. Le réel $Z_\alpha / 2$ est le quantile de la loi normale centrée réduite. Par exemple, au niveau de risque = 5% , on trouve dans les tables $z_\alpha / 2 = 1,96$ et l'erreur est majorée par $1,96 \sigma_g / \sqrt{N}$. Cette méthode permet donc de quantifier l'erreur commise, à condition d'estimer σ_g par sa contre-partie empirique :

$$\hat{\sigma}_g = \sqrt{S_{g(x)}^2} \quad (2.81)$$

On voit ainsi que l'erreur est de l'ordre de $N^{-1/2}$: par exemple, multiplier la taille de l'échantillon par 100 permet de diviser par 10 l'erreur d'estimation. [15]

2.5.3. L'approche probabiliste de la sécurité des structures de génie civil (Base de la théorie de la fiabilité)

La démarche, connue sous le nom l'approche probabiliste de la sécurité en matière de constructions, est issue du courant de pensée probabiliste : elle se traduit pratiquement par des règles, qui introduisent la sécurité :

- Pour une part au moyen de valeurs représentatives des diverses grandeurs aléatoires (actions et résistances), tenant compte de la dispersion reconnue par les statistiques existantes, ou basées sur les règles d'acceptation et de contrôle des produits à utiliser.
- Pour une seconde part, au moyen de coefficients de sécurité partiels qu'on s'efforce de choisir et de répartir au mieux en tenant compte de la pratique antérieure et de ce qu'on peut supposer de la réalité,

sur la base de quelques calculs probabilistes plus poussés, menés dans des cas particuliers ;

- Et, pour une troisième part, par des marges plus ou moins apparentes introduites dans les divers modèles (et équations correspondantes) utilisés pour faire les calculs.

Pour exposer les bases de la théorie de la fiabilité, on raisonne, dans ce qui suit, en s'appuyant sur l'exemple simple d'une vérification de la sécurité ne faisant intervenir que deux grandeurs scalaires, un effet des actions E et une résistance R , assimilables à deux variables aléatoires indépendantes et gaussiennes de paramètres (μ_E, σ_E) et (μ_R, σ_R) . La différence :

$$Z = R - E \quad (2.82)$$

doit rester positive ou nulle pour que la sécurité soit assurée. Dire que la sécurité de la construction considérée est assurée revient à dire que le couple (E, R) appartient à la "région de sécurité" D délimitée, dans le plan rapporté au système d'axes (e, r) figure (2.3).

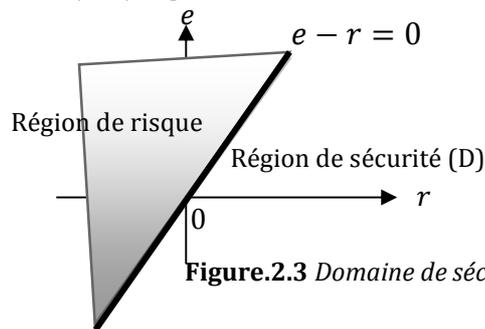


Figure.2.3 Domaine de sécurité

La variable aléatoire $Z = R - E$ suit une loi normale de paramètres :

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_E \quad (2.83)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}$$

La probabilité de ruine de la structure est calculable par l'intégrale :

$$\begin{aligned} P_f = P(Z \leq 0) &= \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) \end{aligned} \quad (2.84)$$

On pose :

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \quad (2.85)$$

On appelle cette grandeur indice de fiabilité et l'on voit que la probabilité de ruine de la construction (probability of failure) vaut :

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (2.86)$$

Φ étant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de moyenne nulle et d'écart-type unité.

Interprétation géométrique de la fiabilité

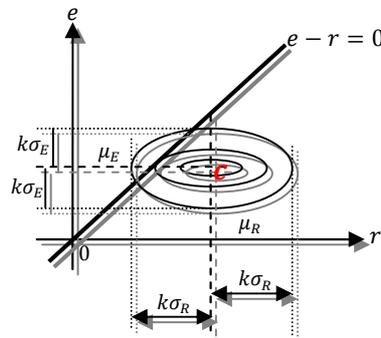


Figure.2.4. Interprétation géométrique

La densité de probabilité du système (E, R) a pour expression :

$$f_E(e) = \frac{1}{\sigma_E \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(e-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2}} \quad (2.87)$$

Et

$$f_R(r) = \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}} \quad (2.88)$$

$$f(e, r) = f_E(e) \times f_R(r) = \frac{1}{2\pi \sigma_E \sigma_R} e^{-\left\{ \frac{(e-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2} + \frac{(r-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2} \right\}} \quad (2.89)$$

Alors

$$P_r = P(Z \leq 0) = \Phi(-\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) \left\{ \int_r^{+\infty} f_E(e) de \right\} dr \quad (2.90)$$

Les courbes d'égalité de densité de probabilité sont des ellipses d'équation:

$$\frac{(e - \mu_E)^2}{2\sigma_E^2} + \frac{(r - \mu_R)^2}{2\sigma_R^2} = K^2 \quad (2.91)$$

Leur centre C (représentant l'état probable de la construction) a pour coordonnées (μ_R, μ_E) ; leurs axes sont parallèles aux axes de coordonnées et leurs demi-axes sont proportionnels aux écarts-types.

En effectuant le changement de variables :

$$x = \frac{r}{\sigma_R} \quad (2.92)$$

$$y = \frac{e}{\sigma_E} \quad (2.93)$$

Les ellipses deviennent des cercles d'équation :

$$\left(x - \frac{\mu_R}{\sigma_R}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu_E}{\sigma_E}\right)^2 = K^2 \quad (2.94)$$

Dont le centre C a pour coordonnées :

$$x_C = \frac{\mu_R}{\sigma_R} \quad (2.95)$$

$$y_C = \frac{\mu_E}{\sigma_E} \quad (2.96)$$

et la droite séparant les régions de risque et de sécurité a pour équation, dans le plan (x, y) :

$$y\sigma_E - x\sigma_R = 0 \quad (2.97)$$

Avec les notations de la figure (5.4), et dans la mesure où, normalement, $\mu_R > \mu_E$, la distance du point C à cette droite vaut :

$$d = Cp = \frac{|y_C\sigma_E - x_C\sigma_R|}{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2}} = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2}} = \beta \quad (2.98)$$

p étant la projection orthogonale de C sur la droite en question. L'indice de sécurité β s'interprète donc, dans le système de coordonnées réduites, comme la distance du point représentatif de « l'état probable » de la structure à la droite délimitant les régions de sécurité et de risque. Le point p est appelé point de fonctionnement de la structure : c'est, en fait, le point de défaillance le plus probable puisqu'il est le point de la droite de ruine situé sur la courbe d'iso-probabilité de plus haut niveau. On pose :

$$\vec{C} \vec{P} = -\beta \vec{\alpha} \quad (2.99)$$

Avec :

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_R \\ \alpha_E \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Par identification, on voit que :

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2}} (> 0) \quad (2.101)$$

$$\alpha_E = -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2}} (< 0) \quad (2.102)$$

Ainsi :

$$x_P - x_C = -\alpha_R \beta \quad (2.103)$$

$$y_P - y_C = -\alpha_E \beta. \quad (2.104)$$

En revenant dans l'espace initial, les coordonnées, notées (R_P, E_P) , du point de fonctionnement sont telles que :

$$E_P = \sigma_E y_P = \mu_E - \beta \alpha_E \sigma_E = \mu_E (1 - \beta \alpha_E V_E) \quad (2.105)$$

$$R_P = \sigma_R x_P = \mu_R - \beta \alpha_R \sigma_R = \mu_R (1 - \beta \alpha_R V_R) \quad (2.106)$$

On note que :

$$E_P = R_P \rightarrow \mu_R - \mu_E = \beta (\sigma_R \alpha_R - \sigma_E \alpha_E) = \beta \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2} \quad (2.107)$$

Les coefficients α_E et α_R apparaissent comme des sortes de coefficients pondérateurs (ou coefficients de sensibilité) quantifiant les influences relatives de l'action ou de la résistance sur la rupture ou l'endommagement de la structure. [15, 21, 36, 45]

On notera que pour une structure donnée :

$$\alpha_E^2 + \alpha_R^2 = 1 \quad (2.108)$$

2.5.4. Propagation des incertitudes

Les efforts internes dans les structures (moments, efforts tranchants, contraintes, déformations, déplacements ...) ou la plupart des grandeurs physiques ne sont habituellement pas accessibles par un calcul ou une mesure directe, mais s'obtiennent plutôt en deux ou plusieurs étapes distinctes. On mesure d'abord une ou plusieurs quantités auxquelles on accède directement (par instrumentations, essais aux laboratoires, essais in

situ) pour calculer ensuite la grandeur physique convoitée. Par exemple, l'évaluation de la contrainte d'une structure requiert la mesure du module d'élasticité E et même la déformation ε par des appareils avant de calculer la contrainte :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.109)$$

De même, le moment maximum d'une poutre revient à calculer la rigidité et l'effort maximum dans une section dangereuse, or que la rigidité elle-même dépend de plusieurs mesures des paramètres telle que la section ($a \times b$), la longueur l , en plus du module d'élasticité E . En définitive, presque toutes les mesures mettent en œuvre une mesure directe et un calcul final. Lorsqu'un calcul ou une expérience nécessite plusieurs étapes (mesure et calcul final), il en va de même pour l'estimation des incertitudes. On évalue au préalable les incertitudes associées aux grandeurs directement mesurées avant d'en déterminer leurs propagations au cours des calculs aboutissant au résultat final. Cette propagation des incertitudes sera exposée dans ce qui suit. Les mesures directes se caractérisent bien souvent par la lecture sur un dispositif ou un instrument numérique ou non (ultra-son, scléromètre, préssiomètre, pénétrromètre dynamique...). Les principales sources d'incertitudes proviennent souvent de la nécessité d'interpoler la mesure entre les graduations. Par exemple, on suppose qu'on a déjà mesuré une ou plusieurs grandeurs x, y, \dots avec leurs incertitudes respectivement $\delta x, \delta y$ et qu'on les utilise au calcul d'une grandeur q . Ce calcul étant généralement trivial, le problème revient à savoir comment les incertitudes $\delta x, \delta y$ se propagent pour donner l'incertitude δq du résultat final sur q . [9, 45]

2.5.4.1. Règles de propagation des incertitudes

A. La propagation des incertitudes dans la somme et la différence

l'estimation de l'incertitude sur la somme ou la différence se déduit simplement des plus grandes et plus petites valeurs probables des variables x et y , soient $x_m \pm \delta x$ et $y_m \pm \delta y$. Ainsi la plus grande valeur probable accessible à $x + y$ vaut :

$$x_m + y_m + (\delta x + \delta y) \quad (2.110)$$

et la plus petite valeur probable :

$$x_m + y_m - (\delta x + \delta y) \quad (2.111)$$

Donc, la meilleure estimation pour $q = x + y$ est :

$$q_m = x_m + y_m \quad (2.112)$$

Avec une incertitude :

$$\delta q = \delta x + \delta y \quad (2.113)$$

L'incertitude sur la différence $x - y$ est donnée par la même équation (2.112). Donc, l'incertitude sur la somme $x + y$ ou la différence $x - y$ est toujours la somme $\delta x + \delta y$ des incertitudes sur x et y .

B. La propagation sur le produit et le quotient

L'intérêt des incertitudes fractionnaires apparaît lorsqu'on multiplie des résultats numériques. Le calcul de la contrainte d'une structure se déduit, par exemple, de la mesure du module d'élasticité E et de la déformation ε , soit $\sigma = E \varepsilon$. Les grandeurs E et ε sont toutes deux sujettes à des incertitudes également estimées, il reste à obtenir l'incertitude résultante pour σ . Pour simplifier réécrivons la forme standard :

$$(\text{valeur mesurée de } E) = E_m \pm \delta E \quad (2.114)$$

A l'aide d'une incertitude fractionnaire :

$$(\text{valeur mesurée de } E) = E_m \left(1 \pm \frac{\delta E}{|E_m|}\right) \quad (2.115)$$

Si l'incertitude fractionnaire vaut 3% (ref) nous déduisons de (2.114) :

$$(\text{valeur mesurée de } E) = E_m \left(1 \pm \frac{3}{100}\right) \quad (2.116)$$

3% d'incertitude signifie que x se trouve probablement entre $0.97 \times E_m \leq E \leq 1.03 \times E_m$. On a alors :

$$\begin{cases} (E \text{ mesuré}) = E_m \left(1 \pm \frac{\delta E}{E_m}\right) \\ (\varepsilon \text{ mesuré}) = \varepsilon_m \left(1 \pm \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_m}\right) \end{cases} \quad (2.117)$$

Et puisque E_m et ε_m sont les meilleures estimations de E et ε , la meilleure estimation pour $\sigma = E \varepsilon$ est :

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m \quad (2.118)$$

Et la plus grande valeur probable de σ est :

$$\sigma = E_m \varepsilon_m \left(1 + \frac{\delta E}{|E_m|}\right) \left(1 + \frac{\delta \varepsilon}{|\varepsilon_m|}\right) \quad (2.119)$$

$$\sigma = E_m \varepsilon_m \left(1 + \frac{\delta E}{|E_m|} + \frac{\delta \varepsilon}{|\varepsilon_m|}\right) \quad (2.120)$$

Car :

$\frac{\delta E - \delta \varepsilon}{|E_m| |\varepsilon_m|}$ est extrêmement faible. la plus petite valeur probable est donnée par

la même expression avec deux signes moins. On aboutit alors à :

$$\sigma = E_m \varepsilon_m \left(1 - \frac{\delta E}{|E_m|} - \frac{\delta \varepsilon}{|\varepsilon_m|}\right) \quad (2.121)$$

Or que :

$$\sigma = \sigma_m \left(1 \pm \frac{\delta \sigma}{|\sigma_m|}\right) \quad (2.122)$$

Relève que la meilleure estimation de σ est $\sigma_m = E_m \varepsilon_m$ et que l'incertitude fractionnaire sur σ est la somme des incertitudes fractionnaires sur E et ε .

$$\frac{\delta \sigma}{|\sigma_m|} = \frac{\delta E}{|E_m|} + \frac{\delta \varepsilon}{|\varepsilon_m|} \quad (2.123)$$

Si par exemple E et ε ont pour mesure :

$$E = 2.1 \times 10^{11} \pm 1 \text{ Pa}$$

$$\varepsilon = 2 \times 10^{-3} \pm 10^{-4}$$

Alors la meilleure estimation de σ est : $\sigma_m = 2.1 \times 10^{11} \times 2 \times 10^{-3} = 4.1 \times 10^8 \text{ Pa}$. Puis l'incertitude sur σ requiert tout d'abord le calcul des incertitudes fractionnaires de E et ε soit :

$$\frac{\delta E}{E_m} = \frac{1}{2.1 \times 10^{11}} = 0.48 \times 10^{-11} \%$$

$$\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_m} = \frac{0.0001}{0.002} = 5 \%$$

Dont la somme fournie :

$$\frac{\delta \sigma}{\sigma_m} = \left(\frac{1}{2.1} \times 10^{-11} + 5\right) \% \approx 5\%$$

L'incertitude absolue sur σ en découle après multiplication par σ_m :

$$\delta \sigma = \frac{\delta \sigma}{\delta_m} \times \sigma_m \quad (2.124)$$

$$\delta\sigma = 0.05 \times 4.2 \times 10^8 = 2.1 \times 10^7$$

Alors le résultat final :

$$\sigma = (4.2 \pm 0.21) \times 10^8 \text{ Pa}$$

On définit l'incertitude fractionnaire par :

$$(\text{incertitude fractionnaire}) = \frac{\delta x}{|x|} \quad (2.125)$$

Le résultat de la mesure d'une grandeur x peut s'exprimer en fonction de cette incertitude :

$$(\text{valeur de } x) = x_m(1 \pm \delta x/|x|) \quad (2.126)$$

Par conséquent, la valeur de $q = x/y$ s'écrit :

$$(\text{valeur de } q) = \frac{x_m}{y_m} \frac{1 \pm \delta x/|x|}{1 \pm \delta y/|y|} \quad (2.127)$$

Le problème consiste maintenant à trouver les valeurs probables extrêmes associées au second terme de droite de l'expression (2.127). Ce terme est maximal si le numérateur prend sa plus grande valeur, $1 + \delta x/|x|$, et le dénominateur sa plus petite, $1 - \delta y/|y|$. La plus grande valeur probable pour $q = x/y$ est donc :

$$(\text{la plus grande valeur de } q) = \frac{x_m}{y_m} \frac{1 + \delta x/|x|}{1 - \delta y/|y|} \quad (2.128)$$

Le dernier terme de cette équation est de la forme $(1 + a) / (1 - b)$ où a et b sont deux nombres petits devant 1. Il se simplifie d'abord grâce au théorème de binôme qui implique :

$$\frac{1}{(1 - b)} \simeq 1 + b \quad (2.129)$$

Puis avec :

$$\frac{1 + a}{1 - b} \simeq (1 + a)(1 + b) \simeq 1 + a + b + ab \simeq 1 + a + b \quad (2.130)$$

Où le produit ab du second ordre est négligé. Ainsi, la plus grande valeur probable de q est :

$$(\text{plus grande valeur de } q) = \frac{x_m}{y_m} \left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (2.131)$$

Un calcul similaire montre que la plus petite valeur probablement donnée par une expression analogue avec deux signes moins :

$$(plus\ petite\ valeur\ de\ q) = \frac{x_m}{y_m} \left(1 - \frac{\delta x}{|x|} - \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (2.132)$$

lorsqu'on divise ou on multiplie deux mesures x et y , l'incertitude fractionnaire résultante est la somme des incertitudes fractionnaires sur x et y . Si on multiplie ou on divise dans une série de nombres, l'application répétée de ce résultat donne la règle suivante : si plusieurs mesures x_1, \dots, x_n d'incertitudes respectives $\delta x, \dots, \delta w$ servent au calcul de la grandeur :

$$q = \frac{x_1 \times \dots \times x_n}{u_1 \times \dots \times u_n} \quad (2.133)$$

Alors, l'incertitude fractionnaire sur q est la somme des incertitudes fractionnaires initiales :

$$\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \dots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \dots + \frac{\delta w}{|w|} \quad (2.134)$$

En bref, lorsque diverses grandeurs sont multipliées ou divisées, leurs incertitudes fractionnaires s'ajoutent.

C. Incertitude d'une puissance

Si la mesure x d'incertitude δx sert au calcul du produit $q = x^n$, alors l'incertitude fractionnaire sur q est :

$$\frac{\delta q}{|q|} = n \times \frac{\delta x}{|x|} \quad (2.135)$$

D. Incertitudes indépendantes

Si les incertitudes associées aux mesures initiales sont indépendantes et aléatoires, une estimation plus réaliste de l'incertitude finale se déduit de régler dans lesquelles les incertitudes (absolues ou fractionnaires) s'ajoutent en quadrature. Considérons le calcul de la somme $q = x + y$ où les deux mesures x et y s'expriment sous forme standard :

$$\begin{cases} (\text{valeur mesurée de } x) = x_m \pm \delta x \\ (\text{valeur mesurée de } y) = y_m \pm \delta y \end{cases} \quad (2.136)$$

Les arguments utilisés fournissent évidemment une meilleure estimation de q , $q_m = x_m + y_m$ et puisque les plus grandes valeurs probables pour x et y sont $x_m + \delta x$ et $y_m + \delta y$, la plus grande valeur probable pour q est :

$$\begin{aligned} & \text{(la plus grande valeur pour } q) \\ & = (x_m + y_m) - (\delta x + \delta y) \end{aligned} \quad (2.137)$$

La valeur de q se situant probablement entre ces deux extrêmes, son incertitude vaut donc :

$$\delta q = \delta x + \delta y \quad (2.138)$$

Afin de comprendre pourquoi cette expression surestime δq , voyons comment q atteint sa valeur extrême (2.137). Cela ne se produit que si x est sous-estimé de δx et y de δy . Si les mesures x et y s'avèrent indépendantes et d'incertitudes aléatoires, il existe 50% de chances de sous-estimer x tout en surestimant y , ou vice versa. Aussi la probabilité de sous-estimer simultanément x et y respectivement de δx et δy apparaît forte minime. En conséquence, $\delta q = \delta x + \delta y$ surévalue en général l'incertitude effectuée. Comment obtenir alors une meilleure estimation de δq ?

La réponse dépend justement de ce que l'on entend par incertitudes et du sens donné à « q se situe probablement entre $q_m + \delta q$ et $q_m - \delta q$ ». Il faut également tenir compte des lois statistiques décrivant les répartitions des incertitudes de mesures. Si les mesures x et y sont indépendantes et suivent une loi normale, alors l'incertitude sur q vaut :

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (2.139)$$

Où les incertitudes initiales δx et δy s'ajoutent en quadrature.

Incertainitude d'une fonction à plusieurs variables

Si plusieurs mesures x_1, \dots, x_n d'incertitudes respectivement $\delta x_1, \dots, \delta x_n$, indépendantes et aléatoires, servent au calcul de la fonction $q(x_1, \dots, x_n)$, alors, l'incertitude sur q est :

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \delta x_n\right)^2} \quad (2.140)$$

Et δq est toujours majorée par la somme ordinaire.

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x_1 + \dots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right| \delta x_n \quad (2.141)$$

Bien que ces deux expressions semblent compliquées, elles se comprennent aisément en les abordant progressivement. Admettons pour commencer que parmi toutes les grandeurs x_1, x_2, \dots, x_n , seule x présente une incertitude

non-nulle, alors $\delta x_2 = \dots = \delta x_n = 0$. L'équation (2.140) se réduit à un seul terme :

$$\delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x_1 \quad (2.142)$$

Autrement dit, $|\partial q / \partial x_1| \delta x_1$ constitue l'incertitude partielle causée uniquement par x . De même, $|\partial q / \partial x_2| \delta x_2$ est celle issue de y , et ainsi de suite. Par exemple, Afin de déterminer la fonction : $q = x^2 y - x y^2$, un ingénieur effectue les mesures suivantes :

$$\begin{cases} x = 3,0 \pm 0,1 \\ y = 2,0 \pm 0,1 \end{cases}$$

La meilleure estimation pour q est immédiatement $q_m = 6,0$. La détermination de δq suit les étapes suivantes :

- L'incertitude sur q due à x seul notée δq_x se déduit de (2.142)

$$\delta q_x = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x$$

$$\delta q_x = |2xy - y^2| \delta x = |12 - 4| 0,1 = 0,8$$

De la même manière, l'incertitude sur q due à y est :

$$\delta q_y = \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y$$

$$\delta q_y = |x^2 - 2xy| \delta y = |9 - 12| 0,1 = 0,3$$

Finalement, en rassemble ces deux résultats on obtient grâce à (2.140)

l'incertitude totale sur q :

$$\delta q = \sqrt{(\delta q_x)^2 + (\delta q_y)^2} \quad (2.143)$$

$$\delta q = \sqrt{(0,8)^2 + (0,3)^2} = 0,9$$

La réponse finale s'écrit alors $q = 6,0 \pm 0,9$.

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a essayé de présenter les principales méthodes utilisées dans le domaine du génie civil, ces méthodes probabilistes d'analyse des structures sont très séduisantes, mais, elles ont des difficultés d'application multiples. Il faut d'abord effectuer une analyse complète des facteurs aléatoires d'insécurité qui se combinent entre eux et dont les origines sont diverses, incertitudes sur les dimensions des ouvrages, d'où incertitudes sur les poids et les sections résistantes ; Incertitudes sur la valeur des diverses actions appliquées (charges d'exploitation, actions naturelles, etc.), incertitudes sur les efforts internes et les contraintes en raison des approximations admises pour leur calcul. Certaines choses, de part leur nature, sont, théoriquement, probabilisables. Il s'agit notamment des incertitudes partant sur la résistance des matériaux, les dimensions de constructions (liées aux incertitudes géométriques d'exécution), les charges d'exploitation et même, dans certains cas, les approximations dans les calculs. Mais on est de pouvoir attribuer à tous ces facteurs d'incertitude une loi de distribution. De plus, la convenance des schémas de calcul et l'erreur (de conception, de calcul, d'exécution ou d'utilisation) ne sont pas probabilisables. Ajoutons enfin que, même si on connaissait la plupart des distributions, leur combinaison mathématique conduirait à des calculs d'une complexité telle que leur utilisation courante ne paraît guère envisageable. Il faut, ensuite, en fonction de ce qui précède, définir la probabilité de ruine que l'on veut admettre, et son évolution dans le temps. Pour mieux illustrer l'application de ces méthodes dans le calcul des structures, on a consacré le chapitre suivant à cela. Le chapitre 03 va comporter plusieurs applications de calcul probabiliste ou non déterministe, en incluant les incertitudes dans le calcul dynamique des structures.

Chapitre 3

Prise en compte des incertitudes dans le calcul des structures

3.1. Introduction

Les grandeurs intervenant dans l'estimation de la résistance d'une structure comportent une part, plus au moins importante d'incertitudes. Ces incertitudes induisent une erreur sur l'estimation que l'on fait de la réponse de la structure et de sa résistance. Il est de ce fait, primordial d'en tenir compte dans le dimensionnement des structures. L'estimation de la résistance d'une structure à un chargement sismique comporte encore plus d'incertitudes par la nature aléatoire du chargement lui-même. En plus du chargement, la structure peut comporter des sources d'incertitudes aussi bien dans les caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs (résistances, composition, montage...) que sur l'assemblage de ses éléments, ou les modèles utilisés pour estimer sa résistance globale. Les incertitudes aléatoires d'un modèle de bâtiment sont relatives en partie aux données ou paramètres du modèle. Chaque paramètre identifié comme une source d'incertitudes peut être modélisé par une variable aléatoire. La modélisation de l'ensemble des paramètres comme variables aléatoires conduit à une modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes. Ainsi, le but de ce chapitre est le calcul probabiliste des structures en appliquant les bases de la théorie de fiabilité et l'estimation.

3.2. Exemples d'applications

Afin de montrer l'importance de l'application des probabilités dans le calcul des structures, on va présenter quelques exemples illustrant ces bases de calcul.

Application 1

Afin de déterminer la probabilité de défaillance d'une structure, on considère la section d'un poteau en béton armé, dont le schéma de ferrailage est donné dans la figure (3.1), ce poteau est sollicité par une force concentrée d'intensité $F = 3748kN$.

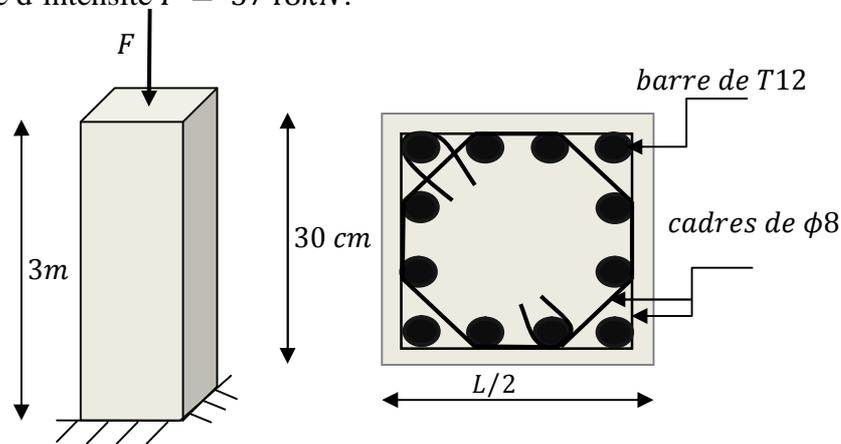


Figure3.1. Section d'un poteau en béton armé

En se basant sur plusieurs résultats donnés par des expériences réalisées au labo (selon des références), on peut donner une estimation de la capacité de chaque barre de ferraille R_i , cette capacité suit une distribution normale d'une espérance $E[R_i] = 180.86kN$ et d'un écart-type $\sigma_{R_i} = 20 kN$ figure (3.2). La capacité du béton est considérée déterministe $r_c = 1691.4816 kN$.

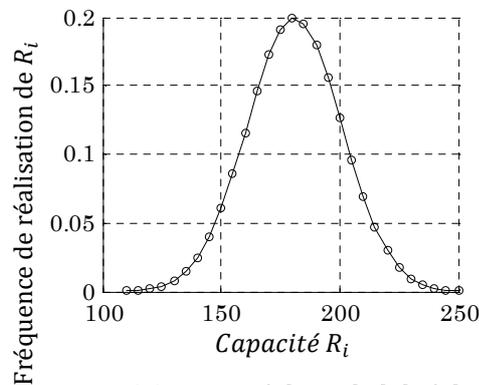


Figure3.2. Densité de probabilité de R_i (distribution normale)

On calcule d'abord les caractéristiques de la capacité totale R de la structure qui est somme de variables aléatoires normales, elle est aussi variable aléatoire normale (application du théorème central limite) :

$$E[R] = E(r) + \sum_{i=1}^{12} E[R_i] \quad (3.01)$$

$$E[R] = 1691.4816 + 12(180.86) = 3861 \text{ kN}$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{12} \sigma_{R_i}^2 \quad (3.02)$$

$$\sigma_R^2 = 12(20)^2 = 4800 \text{ kN}$$

$$\sigma_R = \sqrt{4800} = 69.2820 \text{ kN}$$

Le calcul de la probabilité de défaillance P_f de cette structure, consiste à calculer la probabilité que R soit inférieure à F comme suit :

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad (3.04)$$

Avec :

$$\mu_Z = E[R] - r = 3861 - 3748 = 113 \text{ kN}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + 0} = \sigma_R = 69.2820 \text{ kN} \quad (3.05)$$

Alors, la probabilité de défaillance est :

$$P_f = \Phi\left(-\frac{113}{69.2820}\right) = \Phi(-1.64) = 0.0505 \quad (3.06)$$

Ou on peut dire que ce poteau est fiable à 95%.

Application 2

Dans cette application, on considère une poutre soumise à la flexion simple par trois cas de chargements montrés sur la figure (3.3, 3.4, 3.5). La probabilité de défaillance de cette structure est celle du dépassement du moment résistant par le moment sollicitant provoqué par les cas de chargements. Pour chaque cas de chargement, on calcule cette probabilité. Le moment résistant est supposé varier selon une loi normale d'une espérance $E(M_R) = 800 \text{ kN.m}$ et d'un écart-type $\sigma_{M_R} = 120 \text{ kN.m}$.

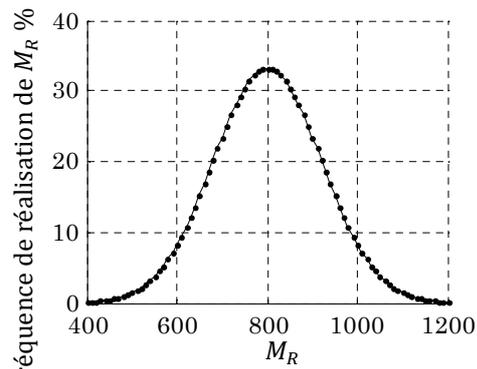


Figure 3.3. Densité de probabilité de M_R
(distribution normale)

Dans le premier cas, on applique une charge concentrée F , et on calcule en suite le moment sollicitant max M_{sd} provoqué par cette force :

$$M_{sd} = FL/4 = 200kN.m \quad F = 200kN \quad (3.07)$$

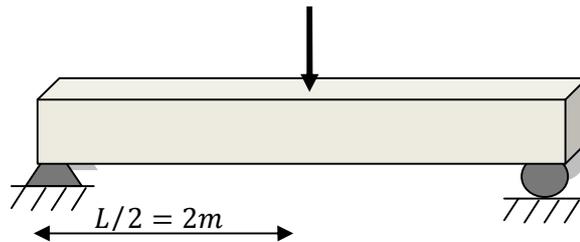


Figure 3.4. poutre soumise à une force concentrée

On calcule la probabilité de défaillance :

$$P_f = F(M_R < M_{sd}) = \Phi\left(-\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \quad (3.08)$$

Avec :

$$\mu_z = E[M_R] - M_{sd} = 800 - 200 = 600kN.m \quad (3.09)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{M_R}^2 + 0} = \sigma_{M_R} = 120 kN.m$$

$$P_f = \Phi\left(-\frac{600}{120}\right) = \Phi(-5) = 0.2856 \cdot 10^{-6} \quad (3.10)$$

Dans le deuxième cas, on applique une charge répartie Q , et on calcule le moment sollicitant max M_{sd} provoqué par cette force :

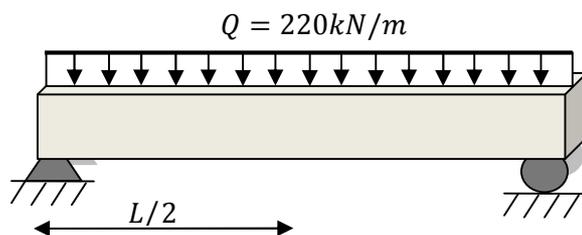


Figure3.5. poutre soumise à une charge répartie

$$M_{sd} = QL^2/8 = 440 \text{ kN.m} \quad (3.11)$$

On calcule la probabilité de défaillance avec l'équation (3.04) :

$$\mu_Z = E[M_R] - M_{sd} = 800 - 440 = 360 \text{ kN.m} \quad (3.12)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{M_R}^2 + 0} = \sigma_{M_R} = 120 \text{ kN.m}$$

$$P_f = \Phi\left(-\frac{360}{120}\right) = \Phi(-3) = 0.0135 \quad (3.13)$$

Dans le dernier cas, on applique à la fois la charge répartie Q et la force concentré F , et on calcule le moment sollicitant max M_{sd} provoqué par ces forces :

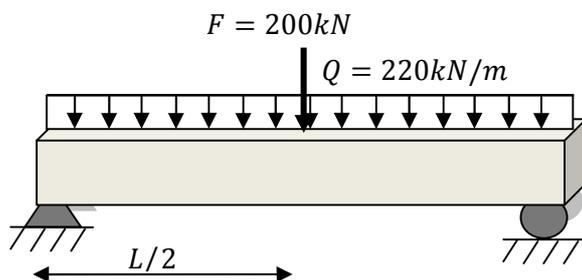


Figure3.6. poutre soumise à une charge répartie et une concentrée

$$M_{sd} = FL/4 + QL^2/8 = 640 \text{ kN.m} \quad (3.14)$$

De la même façon, on calcule la probabilité de défaillance :

$$\mu_Z = E[M_R] - M_{sd} = 800 - 640 = 160 \text{ kN.m} \quad (3.15)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{M_R}^2 + 0} = \sigma_{M_R} = 120 \text{ kN.m}$$

$$P_f = \Phi\left(-\frac{160}{120}\right) = \Phi(-1.33) = 0.0917 \quad (3.16)$$

On déduit alors que cette poutre est fiable à 90.83%, et que cette probabilité n'est pas la somme des deux autres probabilités.

On peut aussi déduire la charge maximale pour une fiabilité ou une probabilité de défaillance donnée, par exemple, quelle est la charge maximale qu'on ne doit pas excéder pour que la poutre soit fiable à 95% ?

On considère le deuxième cas de chargement :

$$M_{max} = Q_{max}L^2/8 = 2Q_{max} \quad (3.17)$$

$$P_f = P(M_R > M_{max}) = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad (3.18)$$

De la même façon, on calcule :

$$\mu_Z = E[M_R] - M_{sd} = 800 - 2Q_{max} \quad (3.19)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{M_R}^2 + 0} = \sigma_{M_R} = 120 \text{ kN.m}$$

$$1 - P_f = 1 - \Phi\left(\frac{2Q_{max} - 800}{120}\right) = 0.95 \quad (3.20)$$

$$\Phi\left(\frac{2Q_{max} - 800}{120}\right) = 1 - 0.95 \quad (3.21)$$

$$\Phi^{-1}(1 - 0.95) = \left(\frac{2Q_{max} - 800}{120}\right) \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{2Q_{max} - 800}{120}\right) = 1.64 \quad (3.23)$$

On aura :

$$Q_{max} = 498.4 \text{ kN/m}$$

Application 3

Dans cette partie, on va supposer que la sollicitation est non déterministe en plus de la résistance. Pour cela, on considère une console représentée dans la figure (3.7).

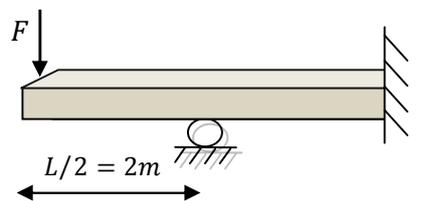


Figure 3.7. console soumise à une charge concentrée

Le moment résistant est modélisé par une variable aléatoire normale d'espérance $E(M_R) = 100 \text{ kN.m}$ et d'un écart-type $\sigma_{M_R} = 10 \text{ kN.m}$. La force F est aussi modélisée par une variable aléatoire normale d'espérance $E(P) = 40 \text{ kN.m}$ et d'un écart-type $\sigma_P = 2 \text{ kN.m}$ figure (3.8).

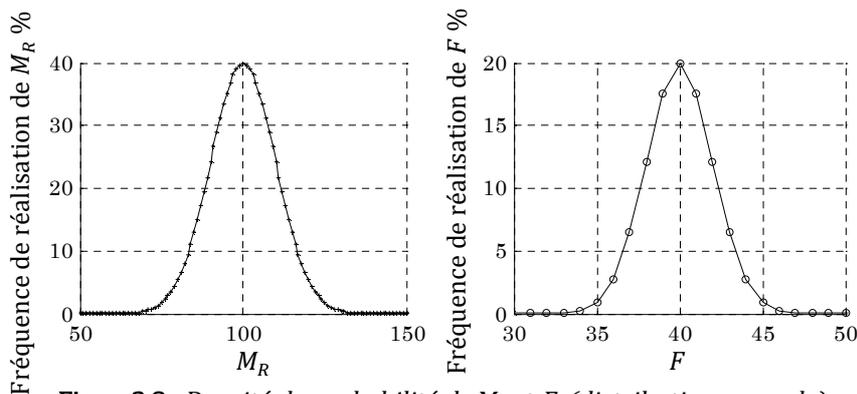


Figure 3.8. Densité de probabilité de M_R et F (distribution normale)

Pour calculer la probabilité de défaillance de cette console, on suit les étapes suivantes :

On calcule le moment max M_{sd} :

$$M_{sd} = FL/2 \tag{3.24}$$

On sait que :

$$P_f = F(M_R < M_{sd}) = P(M_R < PL/2) \tag{3.25}$$

$$P_f = P[M_R - PL/2 < 0] = P[M_R - 2P < 0] \tag{3.26}$$

On pose $Z = M_R - 2P$ et on calcule

$$\mu_Z = E[Z] = E[M_R - 2P] = E[M_R] - E[2P] \tag{3.27}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{M_R}^2 + 2^2 \sigma_P^2} \tag{3.27}$$

On aura :

$$\mu_Z = 100 - 80 = 20 \text{ kN.m} \tag{3.28}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116} = 10.7763 \text{ kN.m}$$

Finalement, on peut calculer l'indice de fiabilité β :

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{20}{10.7763} = 1.8559 \tag{3.29}$$

Et déduire la probabilité de défaillance :

$$P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-1.8559) = 0.032 \quad (3.30)$$

Application 4

Maintenant, on va essayer de comparer pour une structure, deux calculs de probabilité de défaillance, dans le premier calcul on considère la résistance de la structure déterministe et supposer que les sollicitations sont aléatoires, et dans le deuxième supposer la résistance et les sollicitations aléatoires.

Premier cas

Soit une structure de résistance $R = 60kN$ sollicitée par une combinaison de charges S , telle que $S = D + Q + W$, D représente les charges permanentes, Q représente les charges d'exploitations, w représente la charge due au vent. Ces charges sont modélisées par des variables aléatoires normales comme suit :

Variables	Espérances E	Ecart-type σ
D	$30kN$	$3kN$
L	$11kN$	$1kN$
W	$7kN$	$0.7kN$

Tableau3.1. Caractéristiques statistiques des sollicitations

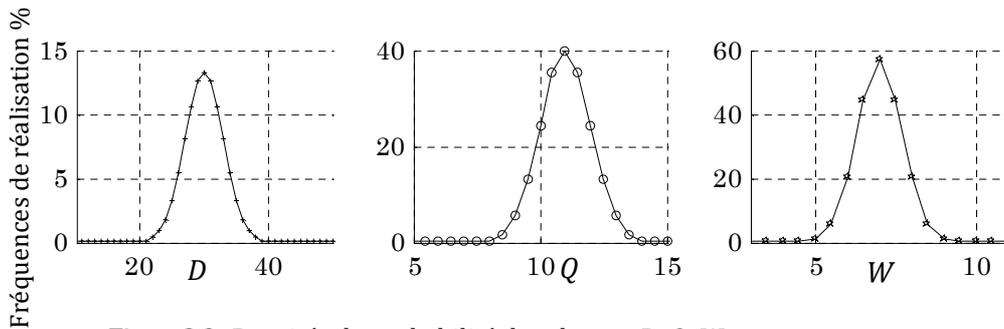


Figure3.9. Densités de probabilité des charges D, Q, W

On calcule l'espérance et l'écart-type de S :

$$\mu_S = E[S] = E[D] + E[Q] + E[W] = 48 \text{ kN} \quad (3.31)$$

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_D^2 + \sigma_Q^2 + \sigma_W^2} = 3.2388 \text{ kN} \quad (3.32)$$

Puisque la résistance est considérée déterministe, alors on a :

$$\mu_R = E[R] = R = 60 \text{ kN} \quad (3.33)$$

$$\sigma_R = 0 \quad (3.34)$$

La probabilité de défaillance est alors :

$$P_f = P(S > R) = 1 - P(S < R) = 1 - \Phi\left(\frac{60 - 48}{3.2388}\right) \quad (2.35)$$

$$P_f = 1 - \Phi(3.7050) = 0.000107 \quad (2.36)$$

$$\beta = 3.7050$$

Deuxième cas

On considère qu'en plus des sollicitations, la résistance est modélisée par une variable aléatoire normale d'espérance $E[R] = 60 \text{ kN}$ et d'écart-type $\sigma_R = 6 \text{ kN}$.

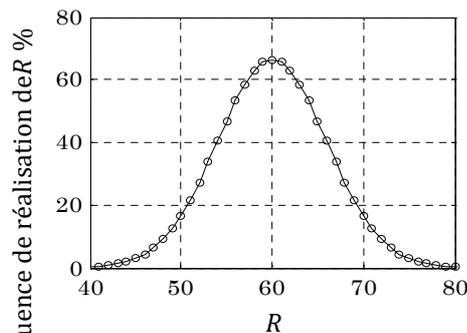


Figure 3.10 Densité de probabilité de R (distribution normale)

La probabilité de défaillance est alors calculée comme suit :

$$P_f = P(R - S < 0) = \Phi\left(\frac{\mu_S - \mu_R}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_R^2}}\right) \quad (3.37)$$

$$P_f = \Phi\left(\frac{48 - 60}{\sqrt{3.2388^2 + 6^2}}\right) = \Phi\left(-\frac{12}{6.264}\right) = \Phi(-1.9157) \quad (3.38)$$

$$P_f = 0.028$$

$$\beta = 1.9157$$

On voit clairement par cet exemple que la prise en compte des incertitudes dans le calcul de la résistance a augmenté la probabilité de défaillance de la structure, dont l'intérêt du calcul probabiliste des structures.

Application 5

Pour mieux apprécier et valoriser le fait de tenir compte des incertitudes dans le calcul des structures, on va présenter une étude dynamique probabiliste d'un bâtiment soumis au séisme-RPA99v2003. La réponse de cette structure sera calculée d'abord d'une manière déterministe, ensuite on inclue les incertitudes dans l'excitation et dans la structure. Cette étude sera étalée sur trois étapes distinctes :

- Effectuer un calcul déterministe, le bâtiment et l'excitation seront considérés déterministes.
- Effectuer un calcul non déterministe, le bâtiment sera considéré déterministe, mais l'excitation sera sujet d'incertitudes.
- Effectuer un calcul non déterministe aussi, mais dans cette étape le bâtiment sera considéré non déterministe, en plus de l'excitation.

Ce bâtiment composé de cinq étages et contreventé par portiques autostables est à usage d'habitation, il est implanté sur un site meuble à Bejaïa, l'allure du bâtiment est montrée sur la figure (3.11).

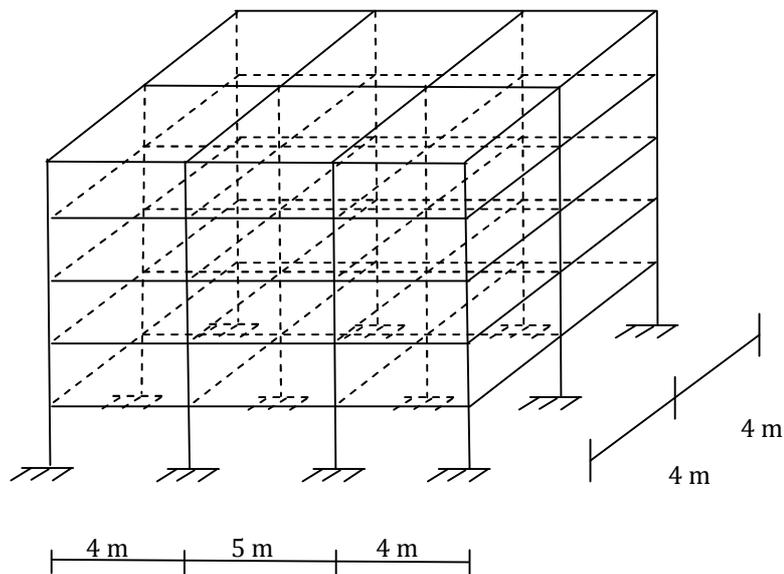


Figure.3.11 Structure à étudier

Les caractéristiques géométriques des éléments principaux de ce bâtiment sont présentées comme suit :

Elément	Section $a \times b$ ($m \times m$)	hauteur (m)
Poteau	0.3×0.3	3.06
Poutre	0.3×0.3	/
Plancher	8×13	3.06

Tableau. 3.2 Caractéristiques géométriques de la structure

Le module d'élasticité du béton à long terme utilisé est $E = 32000 \text{ MPa}$, les rigidités sont calculées par la formule suivante :

$$k_i = \frac{12 EI_i}{L_i^3} \quad (3.39)$$

Où I_i représente l'inertie de chaque section de poteau (i), et L_i la hauteur du poteau (i). Les planchers seront supposés infiniment rigides et leurs masses m_i seront concentrées aux nœuds maîtres n_i , figure (3.12).

Niveau $n =$	Masse (tonne)	Rigidité (kN/m)
1	50	$9.0463 \cdot 10^3$
2	50	$9.0463 \cdot 10^3$
3	50	$9.0463 \cdot 10^3$
4	50	$9.0463 \cdot 10^3$
5	50	$9.0463 \cdot 10^3$

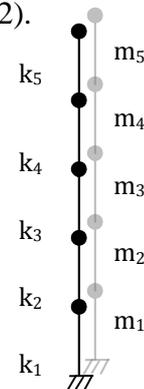


Tableau.3.3 Masses et rigidités de la structure

Figure.3.12 Représentation des masses et des rigidités.

L'excitation est représentée par le spectre réglementaire RPA99v2003 dont les paramètres sont :

- Le coefficient de l'accélération de la zone $A = 0.2$ à Bejaia ;
- Le coefficient de comportement de la structure $R = 5$ (portique autostable) ;
- La période du site T_2 (S2) $T_2 = 0.4s$;
- Le coefficient d'amortissement $\xi = 5\%$;
- Le coefficient de qualité de la structure $Q = 1.2$;
- Le facteur de correction d'amortissement $\eta = 1$;

Le spectre du RPA99v2003 est donné par la formule (3.40) et représenté sur la figure (3.13):

$$S_A/g = \begin{cases} 1.25 A \left(1 + \frac{T}{T_1} \left(2.5 \eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & \text{si } T \leq T_1 \\ 1.25 A \left(2.5 \eta \frac{Q}{R} \right) & \text{si } T_1 < T \leq T_2 \\ 1.25 A \left(2.5 \eta \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} \frac{Q}{R} \right) & \text{si } T_2 < T \leq 3s \\ 1.25 A \left(2.5 \eta \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \right) & \text{si } T > 3s \end{cases} \quad (3.40)$$

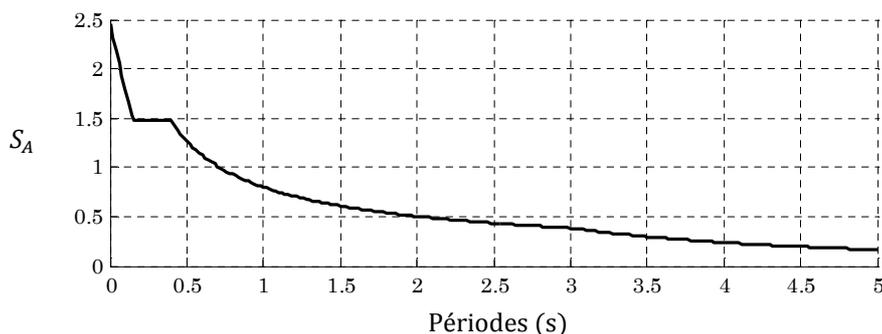


Figure 3.13 Spectre réglementaire RPA99v2003

Pour modéliser cette structure, on choisit d’abord, un système masse-ressort pour représenter le bâtiment figure (3.14).

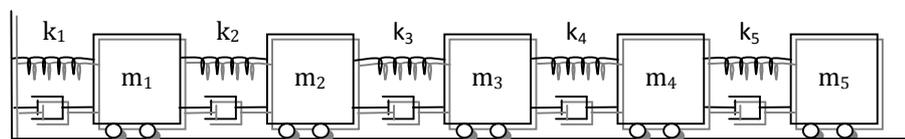


Figure 3.14 Modélisation de la structure : modèle masse ressort.

Ensuite, un modèle plan d’éléments finis en deux dimensions est utilisé figure (3.15).

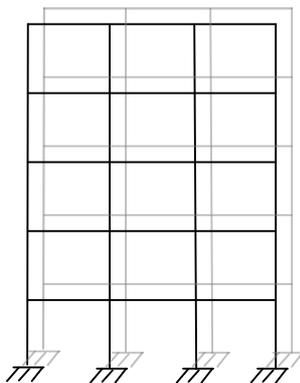


Figure 3.15 Modélisation de la structure : Modèle plan en éléments finis à deux dimensions.

Première étape

En premier lieu, on détermine les périodes et les modes propres des vibrations de notre structure, on commence par le calcul des matrices masse et rigidité avec la méthode de Lagrange. On obtient le système suivant :

$$[M]\{\ddot{u}_i\} + [K]\{u_i\} = \{0\} \quad (3.41)$$

Où M et K sont les matrices de masse et de rigidité respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \\ [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_3 + k_4 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Avec $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m$.

Et \ddot{u}_i et u_i sont les vecteurs de l'accélération et de déplacement respectivement :

$$\{\ddot{u}_i\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \end{Bmatrix} \text{ et } \{u_i\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Après, on calcule les pulsations propres ω_i de la structure en résolvant l'équation:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3.44)$$

Par la suite, on déduit les périodes propres par l'équation :

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (3.45)$$

Les modes propres $\{\Phi_j\}$ de la structure seront déterminés par la résolution du système :

$$\{\Phi_j\}(K - \omega^2 M) = \{0\} \quad (3.46)$$

On obtient les résultats suivants :

Pulsation ω_i (rad/s)	Période T_i (s)
13.2624	0.4738
38.7127	0.1623
61.0267	0.1030
78.3967	0.0801
89.4155	0.0703

Tableau.3.4 Périodes et pulsations propres de la structure

Et pour les modes propres :

Φ_i^j ddl	Φ_1 (m)	Φ_2 (m)	Φ_3 (m)	Φ_4 (m)	Φ_5 (m)
1	0.0240	-0.0645	0.0844	0.0776	-0.0461
2	0.0461	-0.0844	0.0240	-0.0645	0.0776
3	0.0645	-0.0461	-0.0776	-0.0240	-0.0844
4	0.0776	0.0240	-0.0461	0.0844	0.0645
5	0.0844	0.0776	0.0645	-0.0461	-0.0240

Tableau.3.5 Modes propres de la structure

Maintenant, une fois les modes propres sont connus, on calcule les masses généralisées, on détermine les coefficients de participation modale α_j , ainsi que les masses modales m_i^* :

$$m_i = \Phi^T M \Phi \quad (3.47)$$

$$\alpha_j = \frac{\Phi^T M I}{m_i} \quad (3.48)$$

$$m_i^* = \alpha_i^2 m_i \quad (3.49)$$

On obtient les résultats suivants :

Ddl n	Les masses m_i^* (tonne)
1	219.8825
2	21.7944
3	6.0539
4	1.8773
5	0.3919

Tableau.3.6 Masses modales de la structure

On détermine les valeurs de chaque accélération spectrale S_A correspondante à une période propre du bâtiment étudié, ce calcul nous donne :

Période T_i (s)	S_{A_i} (m/s^2)
0.4738	1.3145
0.1623	1.4715
0.1030	1.7792
0.0801	1.9283
0.0703	1.9929

Tableau.3.7 Accélération spectrale

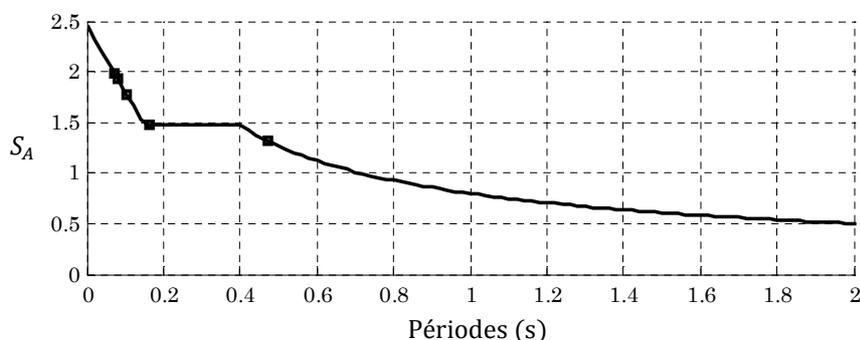


Figure3.16 Accélérations spectrales représentées sur le Spectre Réglementaire RPA99v2003

Enfin, on évalue les efforts tranchants causés par les accélérations spectrales comme suit :

$$V_i = m_i^* S_{A_i} \quad (3.50)$$

On obtient :

m_i^* (tonne)	S_{A_i} (m/s^2)	V_i (kN)
219.8825	1.3145	289.0359
21.7944	1.4715	32.0704
6.0539	1.7792	10.7708
1.8773	1.9283	3.6201
0.3919	1.9929	0.7810

Tableau.3.8 Efforts tranchants correspondants aux accélérations spectrales.

On obtient l'effort tranchant à la base de la structure, en prenant la somme quadratique des efforts maxima dus à chaque mode (combinaison SRSS) :

$$V_b = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2} \quad (3.51)$$

$$V_b = \sqrt{8.4700 \cdot 10^4} = 291.0326 \text{ kN}$$

V_b est l'effort tranchant à la base du bâtiment, calculé bien évidemment, d'une manière déterministe.

Deuxième étape

Dans cette étape, la structure sera considérée déterministe, la matrice de rigidité et la matrice masse sont connues d'une manière exacte, l'incertitude est négligée à ce niveau. Par contre, les incertitudes sur les valeurs des paramètres du spectre de calcul réglementaire seront prises en compte, leurs valeurs aléatoires seront générées à l'aide de la simulation de Monté-Carlo en utilisant le générateur du Matlab, on génère ces valeurs selon des lois de probabilités, adaptées à la nature des paramètres, et suivant quelques références bibliographiques. Des calculs statistiques seront ensuite appliqués aux résultats afin d'estimer la propagation de l'incertitude et sa variation.

Paramètres du spectre règlementaire

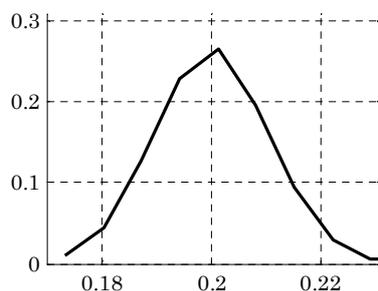
Le spectre est une fonction de 7 paramètres notée comme suit :

$$\frac{S_A}{g} = F(T, A, R, Q, T_1, T_2, \xi) \quad (3.52)$$

Chaque paramètre, peut être sujet d'incertitudes, on se limitera à quatre paramètres qui sont (A, R, Q, ξ) .

Coefficient d'accélération de la zone A :

On le modélise par une variable aléatoire normale A_r , d'espérance égale à sa valeur déterministe, et un écart-type de 5% de cette espérance. On obtient la figure (3.17) :

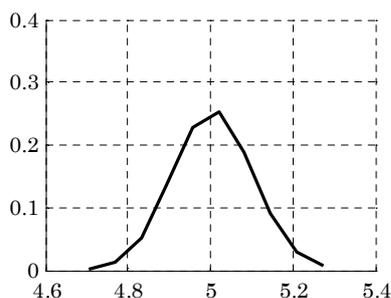


Densité de probabilité de A_r

Figure.3.17 Simulation de la variable A_r

Coefficient de comportement R :

La même chose pour R , On le modélise par une variable aléatoire normale R_r , d'espérance égale à sa valeur déterministe, et un écart-type de 4% de cette espérance. On obtient la figure (3.18) :

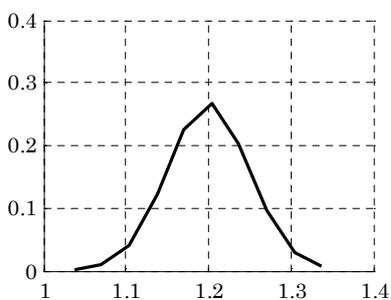


Densité de probabilité de R_r

Figure.3.18 Simulation de la variable R_r

Coefficient de qualité Q :

il est modélisé lui aussi par une variable aléatoire normale Q_r , d'espérance égale à sa valeur déterministe, et un écart-type de 5% de cette espérance. On obtient la figure (3.19) :

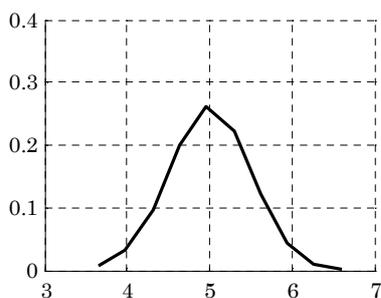


Densité de probabilité de Q_r

Figure.3.19 Simulation de la variable Q_r

Coefficient d'amortissement ξ :

il est modélisé par une variable aléatoire normale ξ_r , d'espérance égale à sa valeur déterministe, et un écart-type de 5% de cette espérance. On obtient la figure (3.20) :



Densité de probabilité de ξ_r

Figure.3.20 Simulation de la variable ξ_r

Paramètre	esperance	ecart – type
X	$E[X]$	σ_x
A_r	0.2	0.01
R_r	5.0	0.2
Q_r	1.2	0.06
ξ_r	5%	0.025

Tableau.3.9 Incertitude sur les paramètres du spectre

Après la simulation de ces paramètres, on obtient un spectre de calcul règlementaire de distribution normale figure (3.21), on calcule son espérance et son écart-type et on déduit la propagation des incertitudes sur ses paramètres. On montre les histogrammes de l'influence de chaque paramètre étudié sur le spectre de calcul :

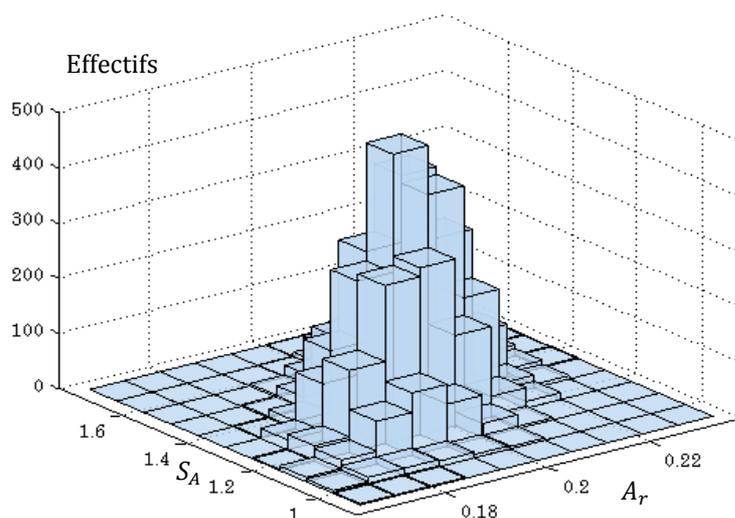


Figure.3.21 Influence de A_r sur le spectre

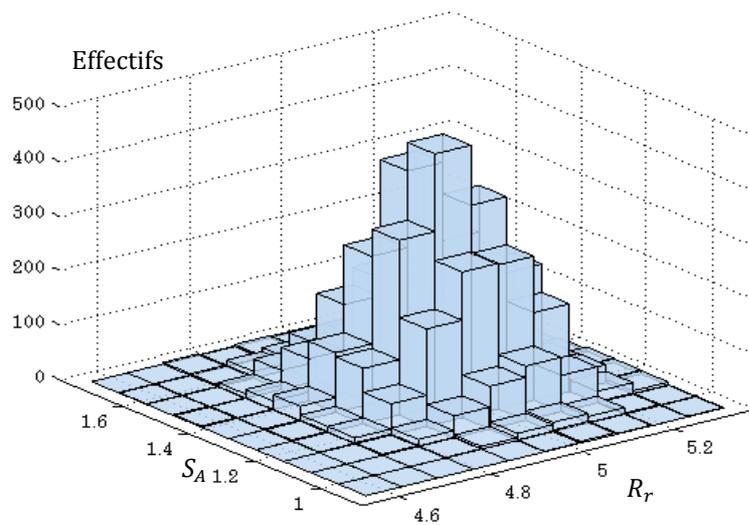


Figure.3.22 Influence de R_r sur le spectre

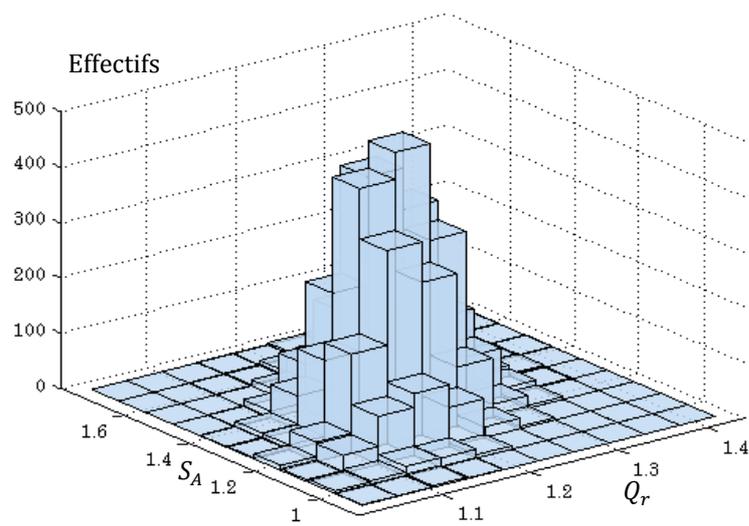


Figure.3.23 Influence de Q_r sur le spectre

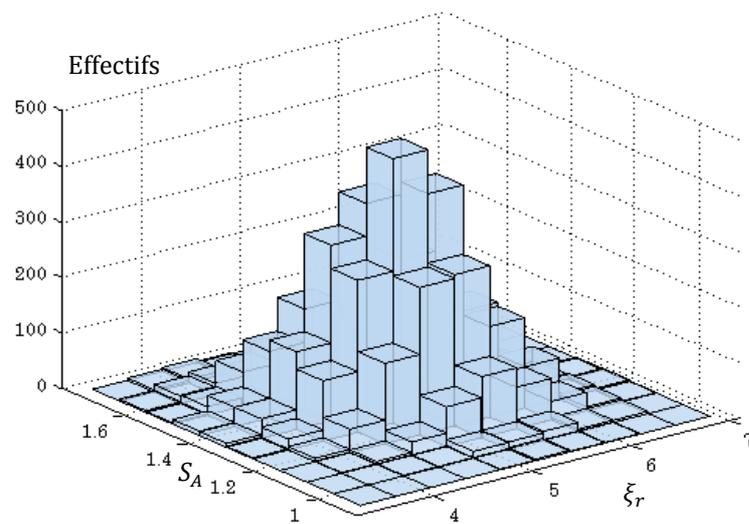
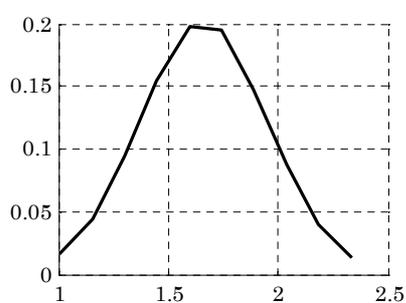


Figure.3.24 Influence de ξ_r sur le spectre

On obtient les résultats suivants :

<i>Paramètre</i>	<i>esperance</i>	<i>écart – type</i>
S_A pour T_i	$E[S_A]$	σ_{S_A}
T_1	1.3124	0.1076
T_2	1.4711	0.1095
T_3	1.7774	0.1032
T_4	1.9260	0.1033
T_5	1.9903	0.1040

Tableau.3.10 Résultats de la propagation des incertitudes dans le calcul du spectre par la simulation Monté-Carlo



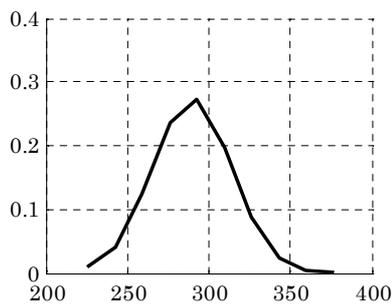
Densité de probabilité de S_A

Figure.3.25 Représentation de la densité de probabilité du spectre pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo

On obtient après la simulation les efforts tranchants pour chaque mode :

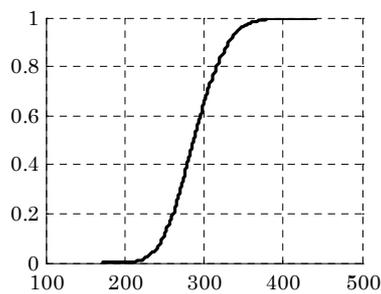
<i>Paramètre</i>	<i>esperance</i>	<i>écart – type</i>
V_i pour T_i	$E[V_i](kN)$	$\sigma_{V_i}(kN)$
T_1	294.1771	36.5980
T_2	28.7882	4.3485
T_3	8.7146	2.4032
T_4	2.6631	1.3861
T_5	0.5376	0.4784

Tableau.3.11 Résultats de la propagation des incertitudes dans le calcul de l'effort tranchant à la base par la simulation Monté-Carlo



PDF de V_i

Figure.3.26 Représentation de la densité de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo



CDF de V_i

Figure.3.27 Représentation de la fonction de répartition de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo

L'effort tranchant à la base de la structure est donné par son espérance :

$$E[Vr_b] = \sqrt{E[V_1^2] + E[V_2^2] + [V_3^2] + E[V_4^2] + E[V_5^2]} \quad (3.53)$$

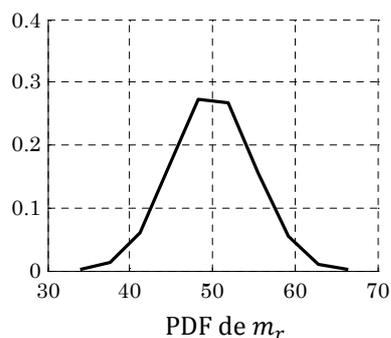
$$E[Vr_b] = 295.7233 \text{ kN}$$

Troisième étape

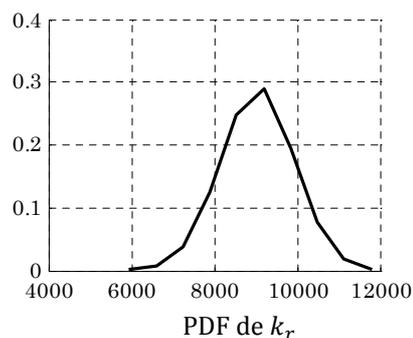
Pour tenir compte des incertitudes sur les valeurs de la rigidité et de la masse, on génère par la méthode de Monté-Carlo les masses aléatoires et les rigidités aléatoires selon la loi normal de probabilité, les masses et les rigidités moyennes sont les masses et les rigidités déterministes et leurs variances un certain pourcentage de ces moyennes.

Paramètre	esperance	écart – type
X	$E[X]$	σ_x
m_r	50 tonne	10%
k_r	$9.0463 \cdot 10^3 \text{ kN/m}$	10%

Tableau.3.12 Incertitude sur les paramètres de la structure



PDF de m_r



PDF de k_r

Figure.3.28 représentation des densités de probabilités de m et k

On obtient les périodes aléatoires, et on aura le spectre suivant :

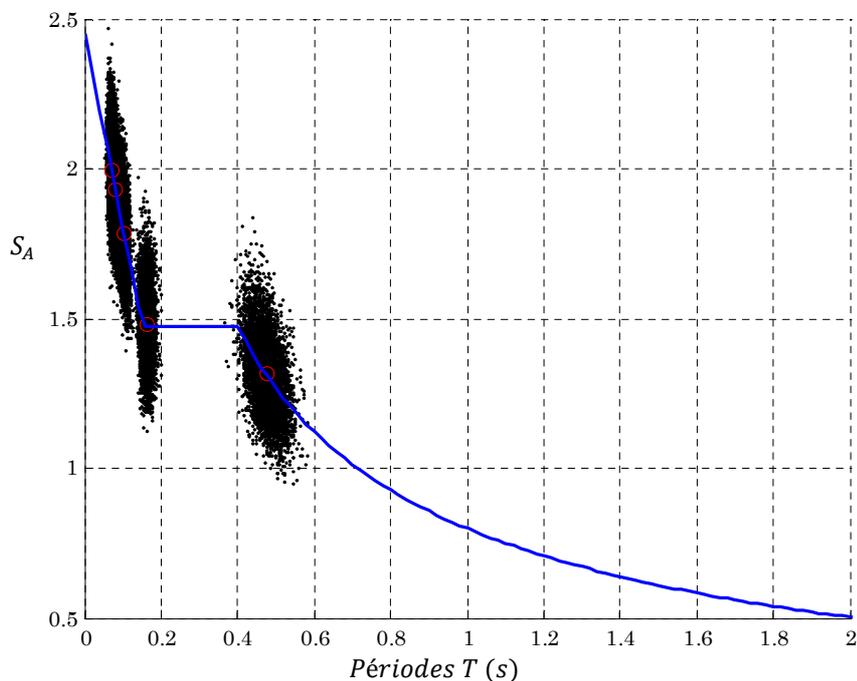


Figure 3.29 Représentation des périodes aléatoires sur le spectre de calcul

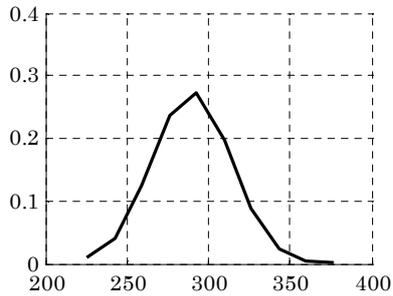
Les résultats de l'effort tranchant à la base sont comme suit :

Paramètre	esperance	écart – type
V_i pour T_i	$E[V_i](kN)$	$\sigma_{V_i}(kN)$
T_1	299.5553	30.4791
T_2	28.7882	4.2706
T_3	8.8191	2.2238
T_4	2.6892	1.3289
T_5	0.5425	0.4613

Tableau.3.13 l'estimation de l'effort tranchant

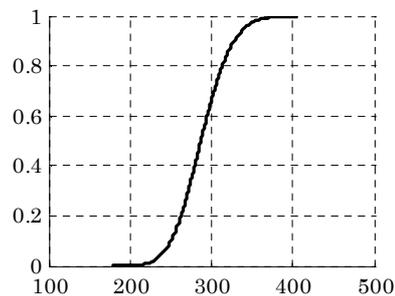
$$E[Vr_b] = \sqrt{E[V_1^2] + E[V_2^2] + [V_3^2] + E[V_4^2] + E[V_5^2]} \quad (3.54)$$

$$E[Vr_b] = 301.0771 \text{ kN}$$



PDF de V_i

Figure.3.30 Représentation de la densité de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo



CDF de V_i

Figure.3.31 Représentation de la fonction de répartition de probabilité de l'effort tranchant à la base pour la période fondamentale calculée par la méthode de Monté-Carlo

Calcul analytique

Le but de cette partie est de déterminer la propagation des incertitudes des paramètres sur le spectre de calcul. On considère que les paramètres du spectre sont des variables aléatoires, de moyennes et écart-types connus.

On effectue ces calculs pour la période fondamentale de la structure. En effet, $T = 0.4738 \text{ s}$ donc $0.4 < T \leq 3\text{s}$ alors la valeur du spectre sera calculée par la formule :

$$\frac{S_A}{g} = 1.25 A \left(2.5 \eta \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} \frac{Q}{R} \right) \quad (3.55)$$

$$\eta = \sqrt{7/(2 + \xi)} \quad (3.56)$$

On présente ces variables comme suit :

Paramètre
X
$A = 0.2 \pm 0.01$
$R = 5.0 \pm 0.2$
$\xi = 5 \pm 0.25\%$
$Q = 1.2 \pm 0.06$

D'abord on simplifie la forme de $\frac{S_A}{g}$ pour quelle soit plus usuelle dans les calculs :

$$\frac{S_A}{g} = \alpha \left(A \eta \frac{Q}{R} \right) \quad (3.57)$$

Avec : $\alpha = 2.79$.

Pour déterminer l'incertitude sur $\frac{S_A}{g}$, on doit calculer celle de η : Etant η est une fonction de ξ alors l'incertitude sur η est donnée par l'équation (2.140) on obtient :

$$\delta\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \delta\xi\right)^2} \quad (3.58)$$

$$\delta\eta = \sqrt{\frac{7(\delta\xi)^2}{4^3\sqrt{2+\xi}}} = 0.0037 \quad (3.59)$$

Alors : $\eta = 1 \pm 0.0037$. Pour $\frac{S_A}{g}$ on applique la même formule est on obtient :

$$\delta\frac{S_A}{g} = \sqrt{\left(\frac{\partial\frac{S_A}{g}}{\partial A} \delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial\frac{S_A}{g}}{\partial R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial\frac{S_A}{g}}{\partial Q} \delta Q\right)^2 + \left(\frac{\partial\frac{S_A}{g}}{\partial\eta} \delta\eta\right)^2} \quad (3.60)$$

$$\delta\frac{S_A}{g} = 0.00923 \Rightarrow \delta S_A = 0.09050 \text{ m/s}^2$$

La meilleure estimation de S_A et son écart-type σ est :

$$S_A = 1.3137 \pm 0.11895 \text{ m/s}^2 \quad (3.61)$$

En comparant ce résultat à celui de la simulation de Monté-Carlo :

$$S_A mc = 1.3124 \pm 0.1076 \quad (3.62)$$

On aura l'erreur relative sur $S_A = 0.098\%$ et sur son écart-type $\sigma = 9.54\%$.

3.3. Conclusion

Dans ce chapitre, on a essayé de présenter plusieurs applications de calcul des structures de génie civil, en utilisant des méthodes de calculs probabilistes, cela est illustré par l'évaluation de la fiabilité de ces structures vis-à-vis du chargement extérieur. On a effectué le calcul de la réponse non déterministe des structures en tenant compte des incertitudes sur les paramètres du spectre règlementaire Algérien (RPA99) et sur les paramètres du modèle lui-même (masse et rigidité).

Ces applications, nous ont permis de mieux apprécier les méthodes probabilistes et valoriser le fait de tenir en compte les incertitudes soit sur les paramètres du chargement, soit sur ceux de la structure.

Le fait de modéliser les paramètres d'une structure, telle que la résistance, par des variables aléatoires, ne nous permet pas à de vérifier l'équilibre statique ou dynamique de celle-ci. Alors, on a recours à utiliser les notions de fiabilité ou probabilité de défaillance, qui traduisent la fréquence de franchissement de la limite d'équilibre d'une structure sur toutes les expériences réalisées.

Une probabilité de défaillance égale à 5% d'une structure sous un chargement nous informe que la fiabilité de la structure à résister à ce chargement vaut 95%.

De plus, le fait de modéliser aussi le chargement par une variable aléatoire diminue la fiabilité.

En outre, la fiabilité d'une structure est très influencée par le choix des densités de probabilités des variables aléatoires par lesquelles on modélise les paramètres de la structure.

On peut constater aussi, que la simulation de Monté-Carlo donne des résultats satisfaisants dans beaucoup de cas, mais lorsque les calculs sont très précis et pour valider la simulation par cette méthode, ça nécessite un très grand effort numérique.

Chapitre 4

Vibrations aléatoires des structures

4.1. Introduction

Les vibrations aléatoires constituent une discipline qui combine la théorie des processus aléatoires à la dynamique des structures. Le couplage de ces deux disciplines a été rendu nécessaire par l'existence de certaines classes de problèmes pour lesquelles le problème de dynamique ne peut pas être formulé sous sa forme déterministe traditionnelle, par suite d'une connaissance imparfaite du système ou des forces qui lui sont appliquées : l'un de ses éléments, ou les deux ne sont connus qu'imparfaitement au travers de certaines propriétés statistiques. L'incertitude se répercute évidemment sur la réponse de la structure qui n'est plus connue qu'au travers de ses propriétés statistiques. Dans la formulation générale du problème de la fiabilité, une incertitude additionnelle existe sur la capacité de résistance de la structure (la limite élastique d'un matériau, par exemple), de sorte que le résultat final d'une analyse de fiabilité est la probabilité de ruine pour la situation considérée.

4.2. Processus stochastique

Si un phénomène physique est aléatoire (tremblement de terre, rafale de vent...), alors chaque échantillon $X(t)$ de ce phénomène (enregistrement temporelle mesuré) est le résultat de circonstances uniques qui ne se répèteront pas à l'occasion d'autres mesures indépendantes de ce même phénomène. [6, 8, 11, 15, 16, 20]

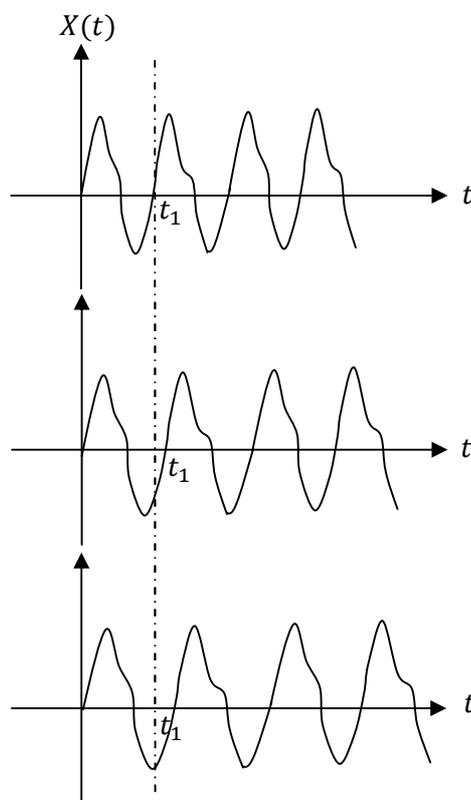


Figure.4.1 un processus stochastique

Un processus aléatoire est une famille paramétrée de variables aléatoires, dans le cas de plusieurs paramètres, on parle de champ aléatoire. Pour une valeur particulière d'un paramètre, sa valeur constitue une variable aléatoire et dépend du résultat du phénomène aléatoire considéré ; pour un résultat spécifique (échantillon ou réalisation), c'est une fonction du paramètre. Si $X(t, x)$ désigne un processus aléatoire du paramètre t et si x désigne le résultat de l'expérience aléatoire considérée, $X(t, x)$ peut représenter :

- Une famille de fonctions du temps (t et x variables) ;
- Une fonction de temps (t variable, x fixée) ;

- Une variable aléatoire (t fixé, x variable) ;
- un nombre (t fixé, x fixé).

En outre, si le paramètre est discontinu, on parle de séquence aléatoire. Un processus aléatoire est dit discret ou continu suivant que les valeurs possibles de variables aléatoires soient discrètes ou continues ; le quantitatif continu ne réfère donc pas ici à la continuité de la fonction aléatoire par rapport à son paramètre. On parle alors de :

- Processus continu (t continu, x continu) ;
- Processus discret (t continu, x discret) ;
- Séquence continue (t discret, x continu) ;
- Séquence discrète (t discret, x discret). [11, 15, 16, 20]

Une caractéristique d'un processus aléatoire est que sa valeur instantanée ne peut être donnée de façon déterministe. La description et l'analyse d'un processus stochastique se font alors de façon probabiliste en décrivant les variables aléatoires $X(t_1), \dots, X(t_n)$. Toutes les définitions, règles, propriétés des variables aléatoires restent valables :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \mu_x \quad (4.1)$$

$$E[(X(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = s \quad (4.2)$$

$$Var[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \sigma^2 \quad (4.3)$$

4.2.1. Processus stationnaire

Un processus est dit stationnaire si toutes les distributions sont indépendantes d'une translation dans le temps [25, 29, 30]. Autrement dit, si sa structure de probabilités est invariante vis-à-vis d'un changement de l'origine des temps, cela implique :

$$p(x, t) = p(x, t + a) \quad (4.4)$$

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1 + a; x_2, t_2 + a) \quad (4.5)$$

$$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 + a; \dots; x_n, t_n + a) \quad (4.6)$$

4.2.2. Fonction d'autocorrélation

On définit la fonction d'autocorrélation par :

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (4.7)$$

Et la fonction d'autocovariance :

$$\Gamma_X(\tau) = E[(X(t) - \mu_x)(X(t + \tau) - \mu_x)] \quad (4.8)$$

Et on donne quelques propriétés de ces fonctions :

$$R_X(0) = s = E[X^2] \quad (4.9)$$

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau), R_X \text{ est une fonction paire} \quad (4.10)$$

$$\Gamma_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_x^2 \quad (4.11)$$

$$\Gamma_X(0) = \sigma^2 \quad (4.12)$$

$$\Gamma_X(-\tau) = \Gamma_X(\tau), \Gamma_X \text{ est une fonction paire} \quad (4.13)$$

La fonction d'autocorrélation peut être interprétée comme une mesure de la capacité de prédiction de valeurs futures sur la base d'observations passées. [37, 38, 41] En effet, si la valeur de $R_X(\tau)$ à un τ donné est importante alors ceci suggère que la connaissance exacte de $X(t) : 0 \leq t \leq T$ peut aider à améliorer la prédiction de $X(t)$ pour $t = T + \tau$.

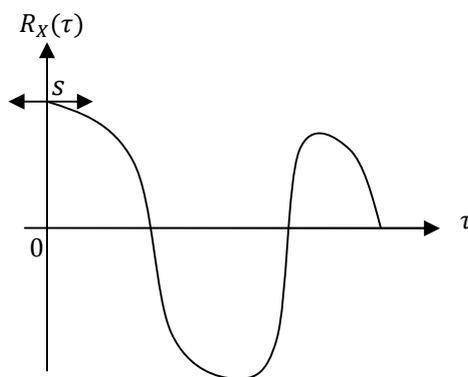


Figure.4.2 Fonction d'autocorrélation

En général, lorsque $\tau \rightarrow \infty$ on peut dire qu'il y a une perte de corrélation qui se traduit par le coefficient de corrélation, qui tend vers 0 et $R_X \rightarrow \mu_x^2$. [42, 43]

4.2.3. Densité de puissance spectrale

On définit la densité spectrale de puissance (DSP abrégé, *Power Spectral Density*) comme étant le carré du module de la transformée de Fourier. Si x est un signal et X sa transformée de Fourier, la densité spectrale de puissance vaut : [37, 38, 41, 42, 43]

$$S_x = |X|^2 \quad (4.14)$$

La densité spectrale de puissance est aussi la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (Wiener-Khintchine)

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-2\pi i \omega \tau} d\tau \quad (4.15)$$

4.2.4. Bruit blanc

Le bruit blanc (white noise en anglais) est un exemple type de signal aléatoire utilisé en dynamique des structures. La valeur du bruit, à un instant donné, n'est absolument pas corrélée avec la valeur du bruit aux autres instants. Cela se traduit par une fonction d'autocorrélation du bruit égale à une impulsion de Dirac (c'est-à-dire égale à l'infini en 0, et 0 ailleurs). La transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac est la constante unité (le module vaut 1 quelle que soit la fréquence). On définit alors, par « bruit blanc », un bruit dont la densité spectrale est constante suivant la fréquence figure (4.3). [42, 43, 44, 48]

$$S_X(\omega) = S_0 \quad (4.16)$$

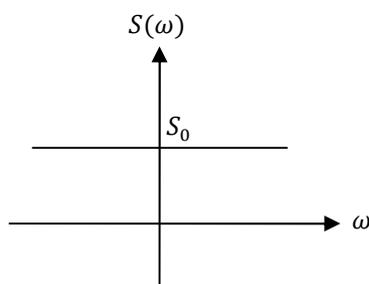


Figure.4.3. Densité de puissance spectrale (DSP) d'un bruit blanc

4.3. Relation entrée-sortie pour un système linéaire

Un système linéaire invariant dans le temps avec une entrée et une sortie est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. Celle-ci représente, comme son nom l'indique, la réponse temporelle du système initialement au repos à une impulsion dite de Dirac $\delta(t)$. De manière équivalente, le système est entièrement caractérisé par sa fonction de transfert $H(s)$, qui est la transformée de Laplace de $h(t)$: [25, 29, 30, 35]

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (4.17)$$

La forme $H(s)$ peut être déterminée directement au départ de l'équation différentielle du système.

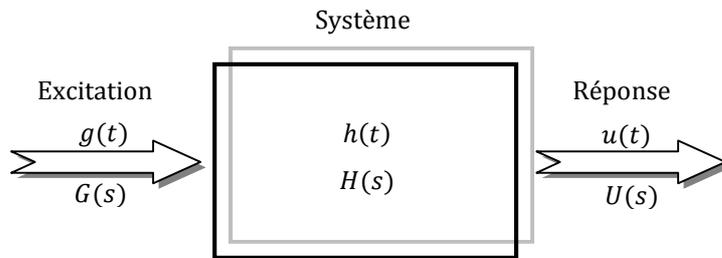


Figure.4.4 Système linéaire invariant dans le temps avec une entrée et une sortie.

Dans le domaine du temps, la relation entrée-sortie pour le système de la figure (4.4), supposée initialement au repos, prend la forme d'une convolution :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (4.18)$$

Tout système physiquement réalisable satisfait la condition $h(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$ (la réponse ne peut précéder l'excitation). Un tel système est dit *causal*. Compte tenu de cette condition, les bornes des intégrales (4.18) peuvent être modifiées pour donner :

$$u(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (4.19)$$

En outre, si l'excitation est à support positif [$g(t) = 0, t < 0$] alors :

$$u(t) = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (4.20)$$

Notons que si le système n'est pas initialement au repos, l'effet des conditions initiales peut être traité séparément et ajouté, en vertu du principe de superposition. Par transformation de Laplace de (4.20), on obtient : [25, 29]

$$U(s) = H(s)G(s) \quad (4.21)$$

Où $U(s)$ et $G(s)$ sont respectivement les transformées de Laplace de la réponse et de l'excitation, $H(s)$ est la fonction de transfert du système. [11]

Pour une excitation :

$$g(t) = e^{pt} \text{ avec } p = \sigma + j\omega \quad (4.22)$$

$$u(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau = e^{pt} H(p) = g(t)H(p) \quad (4.23)$$

Pour que $H(p)$ ait un sens, il faut vérifier que $\sigma < \sigma_c$ (abscisse de convergence de l'intégrale de Laplace). Dans notre cas $e(t) = e^{j\omega t}$, $t \in [-\infty, \infty]$ [8, 11, 15, 16]

$$u(t) = e^{j\omega t} H(j\omega) \quad (4.24)$$

Si $\sigma_c < 0$, ce qui signifie que la réponse impulsionnelle possède une transformée de Fourier (pour un système causal, la borne inférieure de l'intégrale (4.17) peut être reculée à $-\infty$ sans changer $H(s)$). Le terme fonction de transfert est également utilisé pour désigner $H(j\omega)$ ou $H(\omega)$. Nous venons d'établir que la réponse d'un système linéaire à une excitation harmonique est également harmonique et que la fonction de transfert détermine le rapport entre la réponse et l'excitation. Il s'agit d'une grandeur complexe et contient une information d'amplitude et de phase. [44]

4.4. L'oscillateur à un degré de liberté

Nous rappellerons l'équation différentielle du mouvement et la fonction de transfert, dans le cas d'une sollicitation par est une force extérieure, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (4.25)$$

Où m , k et c désignent respectivement la masse, la rigidité et le coefficient d'amortissement visqueux de l'oscillateur.

Introduisant la fréquence naturelle ω_n et la fraction d'amortissement critique ξ :

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{k}{m} \\ 2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \end{cases} \quad (4.26)$$

L'équation (4.25) prend la forme :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = \frac{f(t)}{m} \quad (4.27)$$

La fonction de transfert entre le déplacement u du système et l'excitation $f(t)$ s'écrit donc :

$$H(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.28)$$

$$H(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2j\xi\omega\omega_n} \quad (4.29)$$

La réponse impulsionnelle s'écrit :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Où :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.31)$$

ω_d est la fréquence naturelle amortie du système.

Dans le cas où l'accélération du support constitue l'excitation (excitation sismique), l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{x}_g \quad (4.32)$$

Cette relation montre que la réponse relative, pour ce type d'excitation, ne dépend que de ω_n et ξ . La fonction de transfert entre l'accélération du support et le déplacement relatif du système s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{\ddot{X}_0(j\omega)} = \frac{-1}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2j\xi\omega\omega_n} \quad (4.33)$$

La réponse impulsionnelle correspondante s'écrit :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d} \sin \omega_d t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

La fonction de transfert entre l'accélération du support \ddot{x}_g et l'accélération absolue du système \ddot{u}_a :

$$\ddot{u}_a = \ddot{x}_g + \ddot{u} \quad (4.35)$$

est donnée comme suit :

$$H(j\omega) = \frac{\ddot{U}_a(j\omega)}{\ddot{X}_g(j\omega)} = \frac{\omega_n^2 + 2j\xi\omega_n \omega}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2j\xi\omega_n \omega} \quad (4.36)$$

4.5. Réponse stationnaire à une excitation aléatoire stationnaire

Soit un système linéaire invariant dans le temps à une entrée et une sortie, soumis à une excitation aléatoire stationnaire $X(t)$ définie sur $]-\infty, +\infty[$. La réponse aléatoire s'écrit :

$$U(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau \quad (4.37)$$

Cette intégrale existe au sens du carré moyen si la fonction d'autocorrélation existe. Dans ces conditions, considérant deux instants t et $t + \tau$, on a :

$$E[U(t)] = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E[h(\tau) X(t - \tau)] d\tau \right] \quad (4.38)$$

$$E[U(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \mu_X d\tau \quad (4.39)$$

$$\mu_U = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \quad (4.40)$$

$$\mu_U = \mu_X H(0) \quad (4.41)$$

On calcule la fonction d'autocorrélation de la réponse comme suit:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) X(t - \theta_1) d\theta_1 \quad (4.42)$$

$$U(t)U(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) X(t - \theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_2) X(t - \theta_2 + \tau) d\theta_2 \quad (4.43)$$

Un produit d'intégrales peut être écrit sous forme d'intégrale double si les intégrales convergent :

$$U(t)U(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) X(t - \theta_1) X(t - \theta_2 + \tau) d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.44)$$

L'espérance de ce produit est égale à la fonction d'autocorrélation de $U(t)$:

$$R_U(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) E(X(t - \theta_1)X(t + \tau - \theta_2)) d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.45)$$

Et on voit clairement que :

$$R_U(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) R_X(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.46)$$

La densité spectrale de puissance est déduite par la transformée de Fourier comme suit :

$$S_U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_U(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.47)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) h(\theta_2) R_X(\tau + \theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right] \quad (4.48)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) e^{i\omega\theta_1} d\theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_2) e^{-i\omega\theta_2} d\theta_2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + \theta_1 - \theta_2) e^{-i\omega(\tau + \theta_1 - \theta_2)} d\tau d(\tau + \theta_1 - \theta_2) \quad (4.49)$$

On a :

$$\begin{cases} H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_2) e^{-i\omega\theta_2} d\theta_2 \\ H(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta_1) e^{i\omega\theta_1} d\theta_1 \end{cases} \quad (4.50)$$

$$H(-\omega) = \text{conj } H(\omega) = H^*(\omega) \quad (4.51)$$

Dans $(\tau + \theta_1 - \theta_2)$ seul τ varie, alors :

$$d\tau = d(\tau + \theta_1 - \theta_2) \quad (4.52)$$

On obtient :

$$S_U(\omega) = H^*(\omega) H(\omega) S_X(\omega) \quad (4.53)$$

La densité spectrale de puissance du déplacement est donnée par :

$$S_U(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) \quad (4.54)$$

4.6. Réponse aléatoire d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté (systèmes discrets)

4.6.1. Equation du mouvement

Un système vibrant discret, c'est-à-dire avec un nombre fini n de degrés de liberté (DDL), est gouverné par une équation de la forme :

$$M\ddot{\underline{u}} + C\dot{\underline{u}} + K\underline{u} = \underline{f} \quad (4.55)$$

Où \underline{u} est un vecteur de coordonnées généralisées représentant les déplacements structuraux. L'équation (4.55) exprime l'équilibre entre les forces extérieures, d'inertie, de rappel élastique et d'amortissement qui est supposé visqueux, c'est-à-dire proportionnel au champ de vitesse. Les matrices M , C et K sont symétriques. M et K résultent de la discrétisation de la structure, le plus souvent par Eléments Finis. Il est fréquent qu'une matrice des masses M diagonale procure une représentation suffisante de l'inertie de la structure. La matrice d'amortissement C est celle de l'amortissement de Rayleigh :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4.56)$$

Les coefficients α et β sont choisis pour que la forme (4.56) représente le mieux possible la dissipation de la structure considérée. [11, 15]

4.6.2. Relation entrée-sortie

La matrice de transfert entre les déplacements généralisés et les forces extérieures s'obtient immédiatement au départ de l'équation différentielle (4.55) par transformation de Fourier

$$\underline{U}(\omega) = H(\omega)\underline{F}(\omega) \quad (4.57)$$

avec :

$$H(\omega) = [-\omega^2 M + j\omega C + K]^{-1} \quad (4.58)$$

Elle est reliée à la matrice des réponses impulsionnelles $h(t)$ par la transformée de Fourier :

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.59)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (4.60)$$

L'interprétation physique de $H(\omega)$ et $h(t)$ est la suivante : la composante (k, j) de $H(\omega)$ définit l'amplitude complexe de la réponse harmonique du DDL_k à une excitation harmonique unitaire au DDL_j . La composante (k, j) de $h(t)$ fournit la réponse du DDL_k résultant d'une impulsion de Dirac appliquée au DDL_j pour un système causal, on a $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Si M, k, C sont symétriques, il en est de même pour H et h . Comme dans le cas de l'oscillateur à $1DDL$, la relation entrée-sortie s'exprime par une convolution dans le domaine du temps :

$$\underline{u}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) \underline{f}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \underline{f}(t - \tau) d\tau \quad (4.61)$$

4.6.3. Décomposition modale

Soient $\Phi_i (i = 1, \dots, n)$ les modes propres du système conservatif (sans amortissement); ils sont solutions de : [11]

$$(K - \omega_i^2 M) \Phi_i = 0 \quad (4.62)$$

Et vérifient les conditions d'orthogonalité :

$$\begin{cases} \Phi_i^T M \Phi_j = m_i \delta_{ij} \\ \Phi_i^T K \Phi_j = m_i \omega_i^2 \delta_{ij} \end{cases} \quad (4.63)$$

Où ω_i est la fréquence naturelle et m_i la masse généralisée du mode i . Il est coutume de normaliser Φ_i de telle sorte que $m_i = 1$. Si on effectue le changement de variables : [15, 29]

$$\underline{u} = \Phi \underline{y} \quad (4.64)$$

Où $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ désigne la matrice dont les colonnes sont les formes modales et les nouvelles variables \underline{y} sont les coordonnées modales, (4.55)

prend la forme :

$$M \Phi \ddot{\underline{y}} + C \Phi \dot{\underline{y}} + K \Phi \underline{y} = \underline{f} \quad (4.65)$$

Prémultipliant par Φ^T et tenant compte des relations d'orthogonalité (4.63)

On trouve :

$$diag(m_i) \ddot{\underline{y}} + \Phi^T C \Phi \dot{\underline{y}} + diag(m_i \omega_i^2) \underline{y} = \Phi^T \underline{f} = \underline{p} \quad (4.66)$$

Où \underline{p} désigne le vecteur des forces généralisées modales, représentant le travail des forces extérieures sur les différents modes. Si la matrice d'amortissement modal, on dit que l'amortissement est classique ou

proportionnel ou normal $\Phi^T C \Phi$ est diagonal, on définit alors la fraction d'amortissement critique du mode i, ξ_i , par :

$$\Phi_i^T C \Phi_j = 2\xi_i \omega_i m_i \delta_{ij} \quad (4.67)$$

On vérifiera que l'amortissement de Rayleigh vérifie cette condition, avec :

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (4.68)$$

Sous la condition (4.67), les équations modales sont découplées et (4.66) peut être réécrite :

$$\ddot{\underline{y}} + 2\xi\Omega\dot{\underline{y}} + \Omega^2 \underline{y} = m^{-1}\underline{p} \quad (4.69)$$

Avec les notions :

$$\xi = \text{diag}(\xi), \quad \Omega = \text{diag}(\omega_i), \quad m = \text{diag}(m_i)$$

Toutefois, la contribution principale de la réponse provient en général des premiers modes auxquels il est possible de limiter la résolution de (4.44) [11,16]. Ceci est un aspect essentiel, car la réduction peut atteindre des proportions très importantes. Pour une excitation sismique, de basse fréquence (inférieure à 30Hz), il n'est pas rare de limiter l'étude de la réponse d'une structure aux dix premiers modes, alors que la structure peut contenir des centaines, voir des milliers de *DDL*. Dans le cas d'un immeuble soumis au chargement du vent, la réduction résultant de l'approche modale est encore plus importante en raison de très basse fréquence d'excitation [11]. Le premier mode est ici porteur de l'essentiel de la réponse dynamique de la structure. Chacune des équations découplées du système (4.69) s'identifie à (4.27) ; ceci nous permet d'étudier la réponse de chaque mode comme celle d'un oscillateur linéaire à 1*DDL* excité par la force généralisée $p_i(t) = \Phi_i^T \underline{f}(t)$. La matrice de transfert entre les forces généralisées modales \underline{p} et les coordonnées modales \underline{y} s'écrit :

$$\underline{y}(\omega) = H(\omega) \underline{p}(\omega) \quad (4.70)$$

Où

$$H(\omega) = \{\mu[(\Omega^2 - \omega^2 I) + 2j\omega\xi\Omega]\}^{-1} \quad (4.71)$$

$$= \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mu_i [(\omega_i^2 - \omega^2) + 2j\omega\xi_i\omega_i]} \right\} = \text{diag}\{H_i(\omega)\} \quad (4.72)$$

Combinant avec (4.58), on obtient le développement spectral de la matrice de transfert des déplacements généralisés (matrice de flexibilité dynamique) :

$$[-\omega^2 M + j\omega C + K]^{-1} = \Phi \{ \mu [(\Omega^2 - \omega^2 I) + 2j\omega \xi \Omega] \}^{-1} \Phi^T \tag{4.73}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i [(\omega_i^2 - \omega^2) + 2j\omega \xi_i \omega_i]} \Phi_i \Phi_i^T \tag{4.74}$$

4.7. Application

Soit le cas d’une machine industrielle, posée sur une poutre en béton armé de section 60x40, cette poutre est liée au sol par des appuis élastiques figure (4.5), les données sont présentées dans le tableau (4.1). Cette machine, par son fonctionnement génère des vibrations qui sollicitent la poutre. Ces vibrations dépendent de la fréquence de la machine. Il est noté que cette machine peut fonctionner selon une gamme de fréquences. Ces fréquences sont regroupées dans cet intervalle : [0 , 100]Hz.

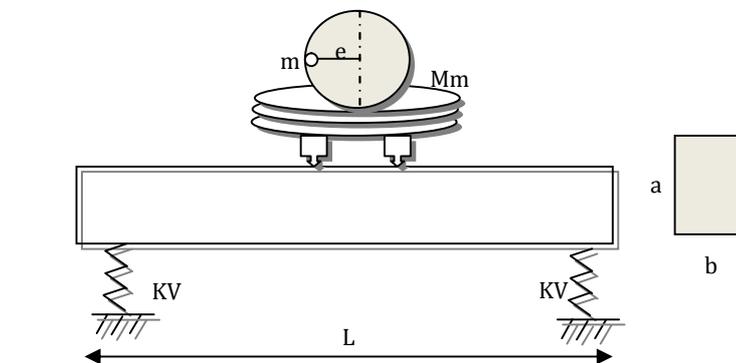


Figure.4.5 Vibrations d’une machine posée sur une poutre

Tableau.4.1 Données nécessaires

Données
L'excentricité de la petite masse $e = 0.1$ m
La petite masse $m = 20$ kg
La masse de la machine $Mm = 1000$ kg
La raideur de chaque ressort $kv = 120000000$ Kn/m
La section de la poutre $axb = 0.6 \times 0.4$
Module d'élasticité du béton $E = 3.21E10$

On se propose d'effectuer une analyse dynamique de cette poutre. Pour effectuer ces calculs on a développé un programme Matlab et pour valider ce programme on a comparé les résultats à ceux obtenus par le logiciel SAP2000. On a obtenu les figures suivantes des déplacements calculés au milieu de la poutre en fonction des fréquences de vibrations de la machine :

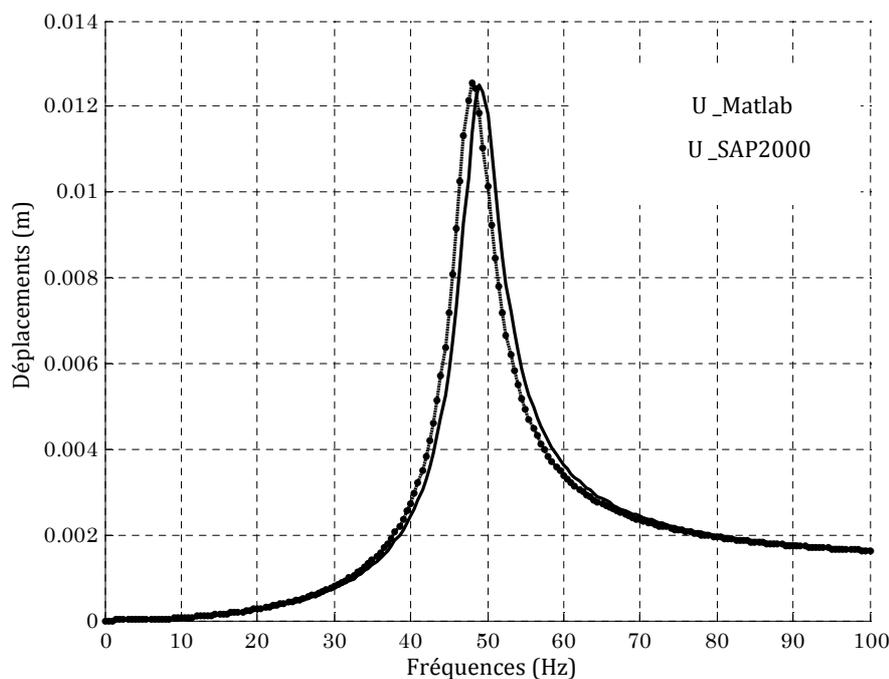


Figure.4.6 Déplacement de la poutre en fonction des fréquences de la machine

Dans la majorité des cas, la machine fonctionne à 95% de temps entre 50 et 75 Hz et 5% pour les autres fréquences. On présente la fonction de densité spectrale de puissance de la force transmise par la machine à la poutre comme suit :

$$PSD(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^4 \begin{cases} 0.05/75 & \text{si } 0 \leq \bar{\omega} < 50 \\ 0.95/25 & \text{si } 50 \leq \bar{\omega} < 75 \\ 0.05/75 & \text{si } 75 \leq \bar{\omega} \leq 100 \end{cases}$$

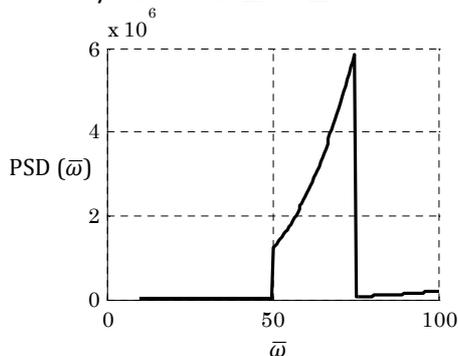


Figure.4.7 Densité spectrale de puissance

On représente les déplacements au milieu de la poutre dans la figure suivante :

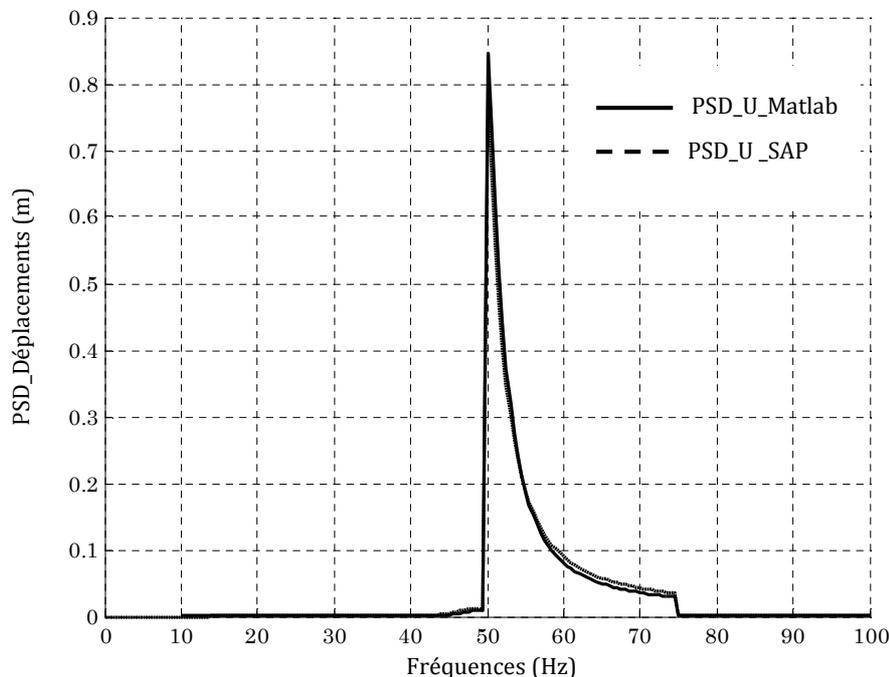


Figure.4.8 PSD des déplacements de la poutre en fonction des fréquences de la machine

La réponse de la poutre est donnée par les caractéristiques statistiques de celle-ci, représenté par la moyenne et l'écart type, ce dernier est déduit par la PSD du déplacement.

4.8. Conclusion

Ce chapitre nous a montré l'essentiel du calcul des vibrations aléatoires, il a comporté des notions des processus stochastiques et leurs propriétés ainsi que des notions de vibrations des systèmes linéaires. On tire les conclusions suivantes :

- Les propriétés statistiques d'ordre un d'un processus sont déterminées en étudiant le processus pour un paramètre fixé (t fixé dans notre cas). On a vu que le processus devient alors une variable aléatoire et toutes les méthodes d'analyses pour une variable aléatoire s'applique donc pour lui.
- Les statistiques d'ordre deux d'un processus sont déterminées en analysant le processus à deux temps différents.

- Dans le cas de la description des processus la fonction d'autocorrélation est extrêmement importante car elle peut pratiquement toujours être définie. Cette fonction permet de mesurer le degré de dépendance qu'il existe entre deux échantillons $X(t_1)$ et $X(t_2)$. Pour un phénomène aléatoire, on constate que plus les instants t_1 et t_2 sont proches, et plus les valeurs qu'ils prennent sont dépendantes. Inversement plus les temps t_1 et t_2 sont éloignés et plus les valeurs sont indépendantes en particulier à l'infini.
- L'incertitude sur l'excitation traduite par la densité spectrale de puissance DSP, se répercute évidemment sur la réponse de la structure qui n'est plus connue qu'au travers de ses propriétés statistiques et sur le calcul de la DSP de la réponse qui traduit aussi la propagation des incertitudes sur le calcul de la réponse.

Conclusion générale

Les grandeurs intervenant dans l'estimation de la résistance d'une structure comportent une part, plus au moins importante d'incertitudes. Ces incertitudes induisent une erreur sur l'estimation que l'on fait de la réponse de la structure et de sa résistance. Il est de ce fait, primordial d'en tenir compte dans le dimensionnement des structures. Les incertitudes aléatoires d'un modèle de bâtiment sont relatives en partie aux données ou paramètres du modèle. Chaque paramètre identifié comme une source d'incertitudes peut être modélisé par une variable aléatoire. La modélisation de l'ensemble des paramètres comme variables aléatoires conduit à une modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes.

Dans ce mémoire, on a exposé l'essentiel du calcul déterministe et du calcul probabiliste des structures, on a effectué un calcul nonlinéaire, ainsi qu'un calcul probabiliste en appliquant les bases de la théorie de fiabilité et l'estimation, on a réalisé le calcul de la réponse non déterministe des structures en tenant compte des incertitudes sur les paramètres du spectre réglementaire Algérien (RPA99) et sur le modèle lui-même, on a évalué la propagation de ces incertitudes dans les calculs.

En outre, on a consacré une partie au calcul des vibrations aléatoires des structures en combinant la théorie des processus aléatoires à la dynamique des structures. Le couplage de ces deux disciplines a été rendu nécessaire par l'existence de certaines classes de problèmes pour lesquelles le problème de dynamique ne peut pas être formulé sous sa forme déterministe traditionnelle, d'où l'intérêt de cette partie. On tire les conclusions suivantes de chaque partie de ce mémoire :

- le déplacement maximal augmente pour des valeurs de périodes croissantes, aussi bien pour le modèle élastique que pour le modèle inélastique, d'un autre côté, ce déplacement est d'autant plus important que le niveau de ductilité est grand. On peut ainsi conclure que quelque soit son modèle de comportement la flexibilité d'une structure entraîne des niveaux de déplacements importants. Et que plus une structure est ductile, plus grandes sont ses déformations

irréversibles. Contrairement aux systèmes élastiques, les systèmes inélastiques vibrent autour de positions d'équilibres différentes qui changent dans le temps en fonction des déformations irréversibles. Les déplacements maximaux imposés par le séisme à la structure diminuent en fonction de la ductilité. De plus celle-ci a une influence remarquable sur les réponses spectrales en termes d'accélération. La diminution des accélérations spectrales est d'autant plus importante que la ductilité du système est grande.

- Le fait de modéliser les paramètres d'une structure, telle que la résistance, par des variables aléatoires, ne nous permet pas de vérifier l'équilibre statique ou dynamique de celle-ci. Alors, on a recours à utiliser les notions de fiabilité ou probabilité de défaillance, qui traduisent la fréquence de franchissement de la limite d'équilibre d'une structure sur toutes les expériences réalisées. Une probabilité de défaillance égale à 5% d'une structure sous un chargement nous informe que la fiabilité de la structure à résister à ce chargement vaut 95%. De plus, le fait de modéliser aussi le chargement par une variable aléatoire diminue la fiabilité. En outre, la fiabilité d'une structure est très influencée par le choix des densités de probabilités des variables aléatoires par lesquelles on modélise les paramètres de la structure. On peut constater aussi, que la simulation de Monte-Carlo donne des résultats satisfaisants dans beaucoup de cas, mais lorsque les calculs sont très précis et pour valider la simulation par cette méthode, ça nécessite un très grand effort numérique.
- Les propriétés statistiques d'ordre un d'un processus sont déterminées en étudiant le processus pour un paramètre fixé (t fixé dans notre cas). On a vu que le processus devient alors une variable aléatoire et toutes les méthodes d'analyses pour une variable aléatoire s'applique donc pour lui. Les statistiques d'ordre deux d'un processus sont déterminées en analysant le processus à deux temps différents. Dans le cas de la description des processus la fonction d'autocorrélation est extrêmement importante car elle peut pratiquement toujours être définie. Cette fonction permet de mesurer le degré de dépendance qu'il existe entre deux échantillons $X(t_1)$ et $X(t_2)$. Pour un phénomène aléatoire, on constate que plus les instants t_1 et t_2 sont proches, et plus les valeurs qu'ils prennent sont

dépendantes. Inversement plus les temps t_1 et t_2 sont éloignés et plus les valeurs sont indépendantes en particulier à l'infini. L'incertitude sur l'excitation traduite par la densité spectrale de puissance DSP, se répercute évidemment sur la réponse de la structure qui n'est plus connue qu'au travers de ses propriétés statistiques et sur le calcul de la DSP de la réponse qui traduit aussi la propagation des incertitudes sur le calcul de la réponse.

En perspective

On va essayer de tenir en compte des incertitudes sur le modèle lui-même de la structure et cela en utilisant une modélisation probabiliste.

En outre, des programmes de calcul des éléments finis stochastiques seront développés pour effectuer les calculs nécessaires pour des applications où on utilise les champs stochastiques.

Bibliographie

- [1] Attal.R, Kada.O, Seghir.A, *Réponse inélastique des structures*, Association Française de génie parasismique (AFPS), Paris, 2007.
- [2] Attal.R, *Réponse sismique des structures à comportement non linéaire*, Projet de fin d'études, Département de génie civil, Université A.Mira, Bejaia, 2005.
- [3] Aleksandar.P , *Deterministic and probabilistic floor response spectra*, Department of earthquake and engineering sismologie, University St.Cyril and methodius, Salvador Aljenda 73, Skopje 1000,Macedonia, 2003.
- [4] Adhikari.S & Manohar.C.S, *Dynamic analysis of framed structures with statistical uncertainties*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 44, 1157-1178 (1999).
- [5] Aribert.J.M, *Notions spécifiques pour un code de dimensionnement parasismique des constructions mixtes acier-béton*, Laboratoire des mécaniques des structures et matériaux (Génie Civil) IN SA, 20 avenue des Buttes de Coesmes-35043 Rennes-France.
- [6] Bellizi.S & Bouc.R, *Analysis of multi-degree of freedom strongly non-linear mechanical systems whith random input : Part I : non-linear modes and stochastic averaging*, Probabilistic Engineering Mechanics 14(3) (1999) 229-244.
- [7] Belmouden.Y, *Analyse spectrale non itérative des oscillateurs simples sous l'action des tremblements de terre*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Laboratoire d'informatique et de mécanique appliquées à la construction (IMAC), GC GI 494, ENAC-IS-IMAC, CH-1015 Lausanne, Suisse, 2004.
- [8] Bendat.J & Piersol.A, *Random Data :Analysis and Measurement Procedures, third ed*, Willey, New York, 2000.
- [9] Bonitzer.J, *L'emploi des statistiques*, ISBN-2-85978-049-1, Paris, 1983.
- [10] Calgero.J.A, *Introduction aux eurocodes sécurité et base de la théorie de fiabilité*, ISBN-2-85978-264-8, Paris, 1995.
- [11] CarsoN J.R, *The Statistical energy-frequency spectrum of random disturbances*, Bell System Technical Journal (1931) 374-381.

- [12] Carvalho.E.C & Coelho.E, *Numerical investigations on the seismic response of r.c. infilled frames designed in accordance with eurocode 8*, September 1997, Report N° 6.
- [13] Chopra.A.K, *Dynamic of structures*, Earth.eng.research.institut, New Jersey 07632, 1995.
- [14] Clough.R & Penzen.J, *Dynamique des structures (tome 1 : Principes fondamentaux)* copyright en 1980 et traduit de the Dynamic of structure by HILL, 1975.
- [15] Clough.R.W & PenzieN.J, *Dynamics of structures*, Library of congress cataloging in publication data, 1975.
- [16] Dimentgerg.M.F, Hou.Z & Nouri.M.N, *Spectral density of a non-linear single-degree-of-freedom system's response to a white-noise random excitation : a unique case of an exact solution*, International Journal of Non-Linear Mechanics 30(5) 673-676.
- [17] *Eurocode 8 : Design of structure for earthquake resistance-part 3 : Strengthening and repair of buildings*, 2003.
- [18] FardiS.M.N, *Experimental and numerical investigations on the seismic response of r.c.infilled frames and recommandations for code provisions*, November 1996, Report N°6.
- [19] FiliatranlT.A, *Eléments de génie parasismiques et de calcul dynamique des structures*, Edition de l'école polytechnique le Montréal, Canada, 1996.
- [20] Fujimura. R & Der Kiureghian .A, *Tail-equivalent linearization method for nonlinear random vibration*, Department of Civil and Environnemental Engineering, University of California, Berkeley United States, Available online 18 Septemer 2006.
- [21] Ghanti.A, *Calcul dynamique des structures*, Office des publications universitaires, 2000.
- [22] Haldar.A, Huh.J & Mehrabian.A, *Time-domain seismic reliability of nonlinear structures*, University of Arizona, Tucson, AZ 85721, U.S.A, August 2006.
- [23] Kamian. D.J, *Engineering and design introduction to probability and reliability methode for use in geotechnical engineering*, Department of the army U.S Army Corps of Engineering Washington, DC 20314-1000, 30 September 1995.

- [24] Hamza.S, *Analyse probabiliste de la vulnérabilité sismique des bâtiments existants : application aux structures à portique en béton armé*, Université de Marne-la-Vallée, 2007.
- [25] Harichandran .R, *Spatial variation of earthquake ground motion*, Department of Civil and Environmental Engineering MichiganState University East Lansing, MI 48824-1226, November 1999.
- [26] Kada.O, *Réponse sismique des structures à comportement non linéaire sur sol rocheux. Thèse de magistère*, Ecole nationale polytechnique, Alger, 2002.
- [27] Lang.K, *Seismic vulnerability of existing buildings*, Institute of structural engineering swiss federal institute of technology, Zurich February 2002.
- [28] Maurice.L, *Fiabilité des structures couplage mécanico-fiabiliste statique*, ISBN- 2-7462-10576, Lavoisier, 2005.
- [29] Meleard.S, *Phénomènes aléatoires*, L'école normale supérieure de Fontenay-and-Roses agrégée de mathématiques.
- [30] Moon.B, Kim.J & Yang.B, *Non-linear vibration analysis of mechanical structure system using substructure synthesis method*, KSME International Journal 13(9) (1999) 620-629.
- [31] Moon.B, *Statistical random response analysis and reliability design of structure system with non-linearity*, Department of mechanical and intelligent systems engineering, Bausan national university, 30 Changjeon-dong, Keumjeong-Ku, Bausan 609-735, Korea, 2004.
- [32] Most.T & Bucher.C, *Stochastic dynamic stability analysis of nonlinear structures*, Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-Universität Weimar, Marienstrass 15, D-99423 Weimar, Germany, 2002.
- [33] Mostaghel.N & Hernried.A.G, *Seismic inelastic design spectrum*, Department of civil engineering, University of utah, Salt lake city, utah 84112. U.S.A, Earth.eng.struct.Dyn vol 114, pp 379-389, 1986.
- [34] Pecker.A, *Dynamique des ouvrages et des structures*.
[http\www.enpc.fr/fr/Formations](http://www.enpc.fr/fr/Formations)
 /école.vite\cours\pecker.
- [35] Preumont.A, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*, Press polytechnique et universitaire romand 1990.

- [36] RISKUE : *An advanced approach to earthquake risk scenarios with applications to different european towns-wp4 : Vulnerability of current buildings*, Technical report, Risk-UE, September 2003.
- [37] Rona.T, *Instrumentation for random vibration*, in : *S-Cramdall (Ed), Random Vibration*, 1958(chapter 7).
- [38] Schuler.G & Shinozuka.M (Eds), *Stochastic Method IN Structural Dynamics*, Martinus Wijnhoff, Boston, 1987.
- [39] Seghir.O, *Cours de dynamique des structures*, Enseigné au cours du cycle universitaire 2003-2004, Département de génie civil, Université de Bejaia.
- [40] Shunsuke.O, *Hystérésis modèle of reinforced concrète for earthquake response analysis journal of faculty of engineering*, University of Tokyo vol36 pp 407-441, 1981.
- [41] Soize.C, *Sur le calcul des densités spectrales des réponses stationnaires pour des systèmes dynamiques stochastiques non-linéaires*, Office Nationale D'études et de Recherches Aérospatiales, Publication du LMA-CNRS-ISSN 0750-7356 , 127, 297- 344 (1991).
- [42] Soize.C, *Probabilités et modélisation des incertitudes éléments de base et concepts fondamentales*, Université de Marc la vallée-Mai 2004.
- [43] Soon.G.T & Grigoriu.M, *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [44] Srinivasan.V & Soni.A.H, *Seismic analysis of a rotor bearing system*, Journal of Earthquake Engineering and Structure Dynamic 12(1983) 287-311.
- [45] Taylor. J, *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Boulcler, Colorado, Septembre 1996.
- [46] Uang.C.N & Bentero.V, *Evaluation of seismic energy in structure*, Department of civil engineering, Northeastern university, Boston U.S.A, Earth.eng.struct.Dyn vol 19, pp 77-90, 1990.
- [47] Wilson.E.L & Bathe.K.J, *Numéral methods in finite élément analysis*.
- [48] Wei.G, *Random seismic response analysis of truss structures with uncertain parameters*, School of mechanical and manufacturing engineering, The university of New South Wales, Sydney, NSW2052, Australia, August 2006.