République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Magister

En
Mathématiques Appliquées

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Sur la Théorie des Jeux Évolutionnaires et ses Applications en Économie

Présenté par :
M^{elle} Fatiha Barache

Devant le jury composé de :

Président	M^r	Djamil	Aïssani	Professeur	Université de Béjaïa
Rapporteur	M^r	Mohamed Saïd	Radjef	Professeur	Université de Béjaïa
Examinateur	M^r	Mohand Ouamer	Bibi	Professeur	Université de Béjaïa
Examinateur	M^r	Mohamed	Aïdène	Professeur	U.M.M de Tizi Ouzou

Béjaïa 2007.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier plus que vivement mon directeur de thèse Mr. M. S. Radjef qui a su, au long de ce travail, non seulement diriger mon mémoire et me faire part de ses nombreuses idées mais surtout pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant de diriger ce travail.

Je suis heureuse de pouvoir remercier Mr. D. Aissani pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Toute ma gratitude va également à Messieurs : M. O. Bibi et M. Aidène pour avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragée et soutenue.

Que tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à l'aboutissement de ce travail trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements.

A la mémoire de mon défunt frère ...
A mes parents.
Ma soeur et mes deux frères .
A toute ma famille.

Table des matières

.

Introduction générale

La théorie des jeux est apparue au début des années 40. Elle se propose d'étudier toute situation dans laquelle des individus inter-agissent. Cette théorie définit l'étude des comportements rationnels des individus en situation de conflits. Elle a été appliquée pour la première fois dans les sciences économiques. Par la suite, il a été aperçu que les jeux sont présents dans des domaines aussi inattendus que la biologie, la sociologie ou l'informatique...

La théorie des jeux est née "officiellement" en 1944 avec l'ouvrage fondateur "Theory of Games and Economic Behavior" du mathématicien J.Von Neumann et de l'économiste O. Morgenstern. Cette théorie prend comme hypothèse principale la rationalité forte des individus. Chaque individu cherche à maximiser ses gains personnels en prenant en considération le comportement de ses adversaires. La théorie classique cherche à trouver la meilleure solution pour résoudre les conflits. Dans ce cadre, les théoriciens des jeux ont introduit la notion d'équilibre (Nash notamment). Cette notion peut conduire chaque individu à une situation de non regret, mais elle ne peut pas lui garantir un gain optimal.

Depuis son apparition, la théorie des jeux classique a connu un grand intérêt notamment chez les économistes, les sociologues et les philosophes pour pouvoir étudier et analyser le comportement des individus dans la vie réelle.

Pour remédier aux différents problèmes posés par la théorie des jeux classique (c'est-à-dire le problème de rationalité des individus, le problème de recherche des équilibres, la caractérisation de ces équilibres,...), les chercheurs ont introduit une autre approche "la théorie des jeux évolutionnaires". Son but principal consiste à étudier l'évolution dynamique des populations et analyser le comportement des différents individus.

La théorie des jeux évolutionnaires s'est développée à la suite des travaux du biologiste John Maynard Smith [78, 77, 76]. Depuis les années 1980, une abondante littérature s'est développée aussi bien en économie qu'en biologie théorique et la théorie des jeux évolutionnaires s'est imposée comme un outil majeur d'analyse dans ces deux disciplines [86, 43].

Cette théorie est vue comme étant une application de la théorie des jeux classique dans les contextes biologiques, en admettant que la fréquence de la capacité de reproduction introduit un aspect stratégique pour l'évolution. Elle a été développée en premier par R.A. Fisher en 1930 [28], pour expliquer l'égalité approximative dans le rapport des sexes pour les mammifères. Fisher a montré que, dans une telle situation, l'évolution dynamique conduit à un rapport des sexes fixe avec un nombre égal de mâles et de femelles. Depuis ce résultat, plusieurs études ont été entamées dans le domaine de la théorie des jeux évolutionnaires.

Cependant, la terminologie de "théorie des jeux évolutionnaires " a été utilisée pour la première fois en 1961 par R.C. Lewontin [52], qui a introduit la première application de cette théorie en évolution biologique : dans l'étude de l'évolution des mécanismes génétiques, modélisée comme un jeu entre l'espèce et la nature, ce qui débouchait sur un équilibre défini comme maxmin (le mécanisme effectif est celui qui donne les plus grandes chances de survie à l'espèce, quand la nature est la plus défavorable).

L'idée a été reprise par Mac Arthur [54] et Hamilton [38], dans l'étude de la répartition des sexes au sein de la progéniture, mais cette fois il s'agissait déjà d'un jeu entre individus (pour Hamilton), et la notion d'équilibre explicitée par Mac Arthur coïncide avec celle de stratégie évolutionnairement stable qu'énoncera plus tard Maynard Smith. Par la suite, Maynard Smith [76] définit le concept d'une stratégie évolutionnairement stable (Evolutionary Stable Strategy : ESS) et écrit son livre "Evolution and the theory of game" en 1982 [77] suivi par le travail d'Axelrod en 1984 [8].

Plusieurs cas ont été traités, notamment par Hamilton en 1967, qui a analysé le cas où les espèces ont souvent un grand excès de femelles. Le comportement animal a été analysé par G.C. Price (l'évolution du comportement rituel des rencontres chez les animaux). Les exemples d'un tel comportement ont été discutés par Lewontin [52] qui a appliqué la stratégie du Minimax à l'évolution du comportement des animaux, Lorenz [53], Huxley [45], Geist [35], Kummer [49]. En 1973, Maynard Smith ainsi que Parker [64], Gale et Eaves [34] ont appliqué le concept de la stratégie évolutionnairement stable au jeu du Hawk and Dove (le Faucon et la Colombe).

L'application de la théorie des jeux à la génétique évolutive a d'abord été proposée par Lewontin [52], mais elle est l'œuvre de Maynard Smith [77]. Les problèmes sont divers et incluent non seulement le comportement des animaux dans des situations de rencontres, mais également des problèmes de différents domaines : l'économie, la médecine, l'informatique, etc.

En sociologie et en économie, il est supposé que chaque individu (joueur ou agent) établit, par un raisonnement, la meilleure stratégie à adopter, en supposant que ses adversaires sont également guidés par la raison [76]. Ceci mène au concept de la stratégie de "Minimax", dans lequel un joueur se comportant de façon à réduire au minimum ses pertes en supposant que son adversaire se comporte afin de les maximiser. Clairement, ce ne serait pas une approche valide aux conflits entre animaux. Le concept d'une stratégie évolutionnairement stable a été introduit.

La théorie des jeux évolutionnaires a connu par la suite un très grand intérêt notamment dans les sciences biologiques, économiques et sociales. Ce développement dans les sciences dérive principalement de trois aspects.

Premièrement, l'évolution traitée par la théorie des jeux évolutionnaires n'est pas nécessairement une évolution biologique. Evolution peut être interprétée comme étant une évolution culturelle qui réfère aux changements des croyances et des cultures dans le temps.

Deuxièmement, l'hypothèse de rationalité sur laquelle est basée la théorie des jeux évolutionnaires est, dans la plupart des cas, la plus appropriée pour modéliser les systèmes sociaux.

Troisièmement, la théorie des jeux évolutionnaires, en tant que explicitement dynamique, fournit un élément important qui n'apparaît pas dans la théorie classique. La théorie des jeux classique impose un degré de rationalité très élevé sur les individus, or dans la théorie des jeux évolutionnaires, l'hypothèse de rationalité est affaiblie.

De nombreux résultats d'économie expérimentale [36], ont montré que cette hypothèse forte de rationalité ne décrit pas le comportement réel des humains. Un humain est rarement un individu hyper-rationnel comme le décrit la théorie des jeux classique. La théorie des jeux évolutionnaires permet de décrire et de prédire les choix des différents individus lorsqu'ils se trouvent en face d'hypothèses de rationalité plus faibles.

Von Neumann et Morgenstern ont montré dans [60, 25] que leur théorie est complètement statique. Par contre, la théorie des jeux évolutionnaires est une théorie dynamique. Elle permet de modéliser explicitement la dynamique présente dans les interactions entre les individus d'une population.

Weibull [86] montre qu'avec la notion d'équilibre de Nash, la propriété de stabilité évolutionnaire, n'explique pas comment une population arrive à une telle stratégie. A la place, elle cherche si, une fois atteinte, une stratégie est robuste dans un cadre d'évolution, ce qui signifie que la théorie des jeux classique ne peut pas suivre la dynamique d'évolution des populations.

L'incapacité à modéliser un élément dynamique du jeu dans la théorie des jeux classiques et l'incorporation naturelle de la dynamique dans la théorie des jeux évolutionnaires donne un avantage important à la théorie des jeux évolutionnaires.

Les jeux évolutionnaires offrent des possibilités intéressantes latentes considérables pour modeler les issues économiques substantives. Ils promettent des prévisions plus riches que les modèles orthodoxes de jeu, mais exigent souvent des caractéristiques plus étendues.

La théorie des jeux évolutionnaires connaît aujourd'hui un certain intérêt auprès des économistes [93], car elle permet de répondre aux problèmes posés par les jeux classiques utilisés en économie dans la détermination des équilibres.

Les individus ne sont pas dotés de capacités décisionnelles conduisant au choix d'une stratégie particulière qui leur assurera un gain maximum parmi un ensemble de stratégies. Donc, les individus sont caractérisés par une rationalité limitée [77, 55].

Les biologistes ont adapté étroitement les modèles évolutionnaires, par la suite comprenant les jeux évolutionnaires, pour les adapter dans des applications biologiques. C'est seulement très récemment que les théoriciens économiques ont commencé à réadapter les modèles évolutionnaires pour des applications économiques.

Donc, les économistes doivent réadapter la théorie évolutionnaire aux sciences économiques avant que les modèles évolutionnaires de jeu puissent devenir courants et répandus. Nous devons jeter certaines des adaptations biologiques et développer de nouvelles adaptations pour des sciences économiques.

L'objectif de ce mémoire est l'étude des comportements des agents notamment dans des situations de conflit, dans le cadre particulier des jeux évolutionnaires et de réaliser une synthèse des travaux sur la théorie des jeux évolutionnaires comprenant les éléments mathématiques fondamentaux de la théorie des jeux évolutionnaires. Pour cela, il fallait introduire les notions d'équilibre, notamment les stratégies évolutionnairement stables, étudier leurs propriétés et leurs caractéristiques.

Dans le premier chapitre, nous allons proposer un rappel des notions essentielles sur les ensembles, les fonctions, les compacts.

Dans le deuxième chapitre, nous donnerons quelques rappels sur la théorie des jeux classique : des définitions, des différents types de jeux, la notion d'équilibre de Nash essentielle, les domaines d'application de la théorie des jeux.

Le troisième chapitre est consacré aux jeux évolutionnaires, nous introduisons le concept de base d'équilibre ou de solution spécifique à la théorie des jeux évolutionnaires sous forme stratégique, celui de stratégie évolutionnairement stable (ESS).

Nous consacrons le quatrième chapitre, au concept de stratégie évolutionnairement stable (ESS)d'une manière explicite en présentant les propriétés et les caractéristiques d'ESS. Nous terminerons par un théorème qui nous montre la relation entre le concept de stratégie évolutionnairement stable et celui de replication dynamique.

Notre objectif dans le cinquième chapitre sera de présenter une application de la théorie des jeux évolutionnaires en économie, notamment, une étude détaillée d'un problème de concurrence d'entreprises.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion, où nous relaterons les principaux résultats et les apports originaux de notre travail qui s'inscrit dans le cadre de la théorie des jeux, ainsi que quelques directions de recherche.

Chapitre 1

Généralités

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les notions d'analyse qui seront utilisées dans ce mémoire, telles que les espaces topologiques et métriques, les fonctions et les correspondances, leurs continuités ou semi-continuités. Nous commençons par la base fondamentale de l'analyse qui sont les espaces topologiques.

1.1 Espaces topologiques

La topologie générale ne constitue un corps de doctrine cohérent que depuis un demi-siècle ; elle est l'aboutissement d'un mouvement d'idées qui remonte à l'antiquité.

Les notions de limite et de continuité s'imposèrent aux mathématiciens grecs dès qu'ils tentèrent de préciser la notion de nombre [17].

Définition 1.1.1. [29] Soit X un ensemble quelconque que nous appellerons *support.* On appelle *topologie* de X toute famille θ de sous-ensembles $G \subset X$ satisfaisant aux axiomes suivants :

1. l'ensemble X lui même et l'ensemble vide $\emptyset$ appartiennent à θ;
2. toute réunion $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ (finie ou infinie) et toute intersection finie $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ d'ensembles de θ appartiennent à θ.

L'ensemble X avec une topologie donnée θ, c-à-d, le couple $(X,\ \theta)$ s'appelle *espace topologique.*

Nous désignerons le couple de la forme $(X,\ \theta)$ par la lettre X.

Les ensembles appartenant à la famille θ sont dits *ouverts.*

Définition 1.1.2. [29] Les complémentaires des ensembles ouverts sont appelés *ensembles fermés* de l'espace topologique X.

Des axiomes 1 et 2, il résulte, en vertu de la relation de dualité entre les ensembles ouverts et les ensembles fermés, que

1. Les ensembles $\emptyset$ et X sont des ensembles fermés.
2. Toute intersection (finie ou infinie) et toute réunion finie d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.

Définition 1.1.3. (Voisinage)[29][17]
On appelle *voisinage* d'un point $x \in X$, tout sous-ensemble V de X contenant un ouvert contenant x.

Ainsi tout ouvert contenant x est un voisinage de x.

On appelle voisinage d'une partie A de X, tout sous-ensemble de X contenant un ouvert contenant A.

On désigne, en général, par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages V de x.

1.1.1 Intérieur, frontière d'un ensemble

Définition 1.1.4. (Point adhérent)[39]
Soit A une partie de X. On dit qu'un point x de X est *adhérent* à A, si tout voisinage de x rencontre A.

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A et on écrit :

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 1.1.5. (Fermeture d'un ensemble)[17]
On appelle *fermeture* d'un ensemble A, le plus petit ensemble fermé de X contenant A.

Cette définition permet de voir facilement que $A \subset \overline{A}$, c'est-à-dire que tout point de A en est adhérent.

Définition 1.1.6. (Point d'accumulation)[39]
On dit que x est un *point d'accumulation* d'une partie non vide A, si tout voisinage de A contient un point de A autre que x, autrement dit, s'il est adhérent à $A \setminus \{x\}$.

On appelle l'ensemble des points d'accumulation *l'ensemble dérivé* de A.
On écrit :

$$x \text{ point d'accumulation de } A \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 1.1.7. (Points intérieurs, Intérieur d'un ensemble)[39]
Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique $(X,\ \theta)$.
On dit que $x \in A$ est un point intérieur à A, si A est un voisinage de x.

L'intérieur de A (qu'on note $int(A)$) est l'ensemble des points intérieurs de A. C'est aussi la réunion éventuellement vide, de tous les ouverts contenus dans A. C'est donc le plus grand ouvert contenu dans A.

Ainsi, on a la relation qui caractérise les ouverts :

$$int(A) = A \Longleftrightarrow A \text{ est ouvert.}$$

Définition 1.1.8. (Frontière d'un ensemble)[39]
Soit A un ensemble d'un espace topologiques X. On appelle *frontière* de A, le sous ensemble noté ∂A de X constitué des points adhérents à A et à son complémentaire. Plus précisément, un point x de X est un point frontière de A, si tous ses voisinages rencontrent A et $C_X A$. On a

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{C_X A}.$$

Définition 1.1.9. (Espace séparé)[39]
On dit qu'un espace $(X,\ \theta)$ est séparé (ou que la topologie est séparée), s'il satisfait à la condition suivante : pour tout $x,\ y$ de X avec $x \neq y$, il existe un voisinage V de x et un autre W de y tels que $V \cap W = \emptyset$.
Un espace vérifiant cette condition est dit aussi *espace de Hausdorff*.

1.1.2 Espaces compacts

La notion de compacité jouit d'une place très importante et particulière parmi les notions de l'analyse mathématique. Elle permet, entre autre, à plusieurs êtres mathématiques d'atteindre la majorité de leurs propriétés topologiques. C'est le cas, par exemple, des suites et des fonctions, en général.

Définition 1.1.10. (Recouvrement)[39]
Soient $(X,\ \theta)$ un espace topologique de Hausdorff et $(A_l)_{l\in L}$ une famille de 2^X.
On dit que $(A_l)_{l\in L}$ est un *recouvrement* de l'espace X, s'il vérifie $X = \bigcup\limits_{l\in L} A_l$.

On dit que $(A_l)_{l\in L}$ est un *recouvrement ouvert* de X, si chacun des éléments A_l de la famille $(A_l)_{l\in L}$ est ouvert.

Définition 1.1.11. (Espace compact)[17]
On dit qu'un espace X est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini de X.

Le théorème qui suit rassemble quelques résultats sur la compacité.

Théorème 1.1.1. *[29][17]*

1. *Dans un espace compact, toute suite de points possède au moins une valeur d'adhérence.*
2. *Si cette suite possède une seule valeur d'adhérence, la suite converge vers cette valeur.*
3. *Toute partie infinie A d'un espace compact X a au moins un point d'accumulation dans X.*
4. *Toute partie A de X qui n'a aucun point d'accumulation dans X est finie.*
5. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est un espace compact.*
6. *Un compact est fermé dans tout espace de Hausdorff qui le contient.*
7. *Pour toute application continue f d'un espace compact X dans un espace séparé Y, le sous-espace $f(X)$ de Y est compact.*
8. *Soit X un espace compact et f une fonction continue sur X. Alors f est bornée sur X et atteint sa borne supérieure et inférieure.*
9. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées bornées de $\mathbb{R}$.*
10 *Dans tout espace séparé, la réunion de deux compacts est un compact ; toute intersection de compacts est un compact.*
11. *Tout produit fini d'espaces compacts est compact.*

Définition 1.1.12. (Ensemble relativement compact)[17]
On dit qu'une partie A d'un espace topologique de Hausdorff est *relativement compacte* si sa fermeture $\overline{A}$ est compacte.

Définition 1.1.13. (Espace localement compact)[17]
On appelle *espace localement compact* tout espace séparé X dont tout point possède au moins un voisinage compact.

1.2 Espace métrique

Soit X un ensemble.

Définition 1.2.1. (Distance)[5]

On appelle *semi-distance* sur X (ou écart sur X) une fonction d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} i)\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}\ d(x,\ y) \geq 0, \\ ii)\ d(x,\ y) = d(y,\ x) \text{ (symétrie)}, \\ iii)\ d(x,\ y) \leqq d(x,\ z) + d(z,\ y) \text{ (inégalité triangulaire)}. \end{cases}$$

On appelle *distance* sur X (ou métrique sur X) une semi-distance vérifiant en outre :

$$d(x,\ y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y.$$

On appelle *Espace métrique* $(X,\ d)$ la donnée d'un ensemble X et d'une distance d définie sur X.

1.2.1 Boules et diamètres

Définition 1.2.2. (Les boules)[5]

Considérons un espace métrique $(X,\ d)$. Nous appellerons *boule ouverte* de centre x et de rayon ε l'ensemble

$$B_o(x,\ \varepsilon) = \{y \in X \text{ tels que } d(x,\ y) < \varepsilon\}$$

et *boule fermée* de centre x et de rayon ε l'ensemble

$$B(x,\ \varepsilon) = \{y \in X \text{ tels que } d(x,\ y) \leqq \varepsilon\}.$$

Proposition 1.2.1. *[5]*

1. *Toute boule fermée $B(x,\ \varepsilon)$ est un fermé.*
2. *Tout ensemble réduit à un point est fermé.*
3. *Toute boule ouverte $B_o(x,\ \varepsilon)$ est un ouvert.*

Définition 1.2.3. (Suites convergentes)[5]

Soit $(X,\ d)$ un espace métrique. Une suite $\{x_n\}_n$ d'éléments x_n de X converge vers x si la suite des nombres réels $d(x_n,\ x)$ converge vers 0, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqq N_0(\varepsilon),\ \text{on ait } d(x_n,\ x) \leqq \varepsilon.$$

Définition 1.2.4. (Suite de Cauchy)[5]

Soit $(X,\ d)$ un espace métrique. Une suite $\{x_n\}_n$ est appelée une *suite de Cauchy* si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n,\ m \geqq N_0,\ \text{on ait } d(x_n,\ x_m) \leqq \varepsilon.$$

Ou encore : $\{x_n\}_n$ est une suite de Cauchy si $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$ (où $\delta(A_n)$ désigne le diamètre de $A_n = \{x_m\}_{m \geqq n}$).

Proposition 1.2.2. *[5] Toute suite convergente est de Cauchy.*
Toute sous-suite d'une suite $\{x_n\}_n$ convergeant vers x converge vers x.

Proposition 1.2.3. *[5] Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{cases} i)\ x \text{ est limite d'une sous-suite } \{x_{n_k}\} \text{ extraite de la suite } \{x_n\}, \\ ii)\ \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n \geqq 0,\ \exists m \geqq n \text{ tel que } d(x_m,\ x) \leqq \varepsilon, \\ iii)\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \text{ est adhérent à l'ensemble } A_n = \{x_m\}_{m \geqq n}. \end{cases}$$

Définition 1.2.5. (Valeur d'adhérence)[5] Nous dirons que x est une *valeur d'adhérence* de la suite $\{x_n\}_n$ si l'une des trois conditions équivalentes de la proposition 1.2.3 est satisfaite.

Définition 1.2.6. (Espace métrique complet)[5]

Nous dirons qu'un espace métrique $(X,\ d)$ est *complet* si toute suite de Cauchy $\{x_n\}_n$ d'éléments $x_n \in X$ a une limite $x \in X$.

Cette définition peut être étendue à n'importe quel sous-ensemble de X.

Proposition 1.2.4. *[5] Soit X un espace métrique.*

a) Si X est un espace métrique complet, tout sous-ensemble fermé de $A \subset X$ est complet.

b) Si X est un espace métrique et si $A \subset X$ est complet, alors A est fermé.

Proposition 1.2.5. *[17] La topologie de tout espace métrique est séparée.*

Définition 1.2.7. (Fonctions continues)[17]

Une application f de $(X,\ d_X)$ dans $(Y,\ d_Y)$ est *continue* au point a si pour toute suite d'éléments x_n de X convergeant vers a, la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(a)$ dans Y, formellement on a :

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } (d_X(a,\ x) \leqq \eta) \Longrightarrow (d_Y(f(a),\ f(x)) \leqq \varepsilon).$$

f continue sur X si elle est continue en tout point x de X.

Fonctions semi-continues

Considérons une fonction numérique f définie sur un espace métrique X. La continuité de f en x, signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(x,\ \varepsilon)$ tel que $f(x) - \varepsilon \leqq f(y)$ et $f(y) \leqq f(x) + \varepsilon$ pour tout $y \in B(x,\ \eta)$. Cela suggère de considérer les fonctions ne vérifiant qu'une des deux inégalités ci-dessus, même dans le cas où les fonctions prennent des valeurs infinies. Dans ce cas, comme on ne peut pas écrire $f(x) - \varepsilon < f(x)$ lorsque $f(x) = +\infty$, on remplace $f(x) - \varepsilon < f(x)$ par $\lambda < f(x)$, qui a un sens à la fois quand $f(x)$ est fini et infini.

Définition 1.2.8. (Semi-continuité supérieure et inférieure)[5]
Soit f une fonction définie sur un espace métrique X à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* en x si la condition

$$\forall \lambda < f(x),\ \exists \eta = \eta(\lambda,\ x) \text{ tel que } \forall y \in B(x,\ \eta),\ \lambda \leqq f(y)$$

est satisfaite. On dit que f est *semi-continue supérieurement* en x si $-f$ est semi-continue inférieurement en x.

Une fonction f est dite semi-continue inférieurement sur X (resp. supérieurement) si f est semi-continue inférieurement en tout point $x \in X$(resp. supérieurement).

1.2.2 Ensembles compacts dans un espace métrique

Définition 1.2.9. (Sous-ensemble compact)[5]
Nous dirons qu'un sous-ensemble A de X est compact si toute suite infinie $\{x_n\}$ d'éléments x_n de A a au moins une valeur d'adhérence appartenant à A, c'est-à-dire si l'on peut extraire de toute suite une sous-suite convergente vers un élément de A.

Proposition 1.2.6. *[5] Soit A un sous-ensemble compact de X.*

$$\begin{cases} a)\ A \text{ est fermé,} \\ b)\ A \text{ est complet,} \\ c)\ A \text{ est borné,} \\ d)\ \text{Si } x \text{ est l'unique valeur d'adhérence d'une suite } \{x_n\} \\ \quad \text{d'éléments } x_n \in A, \text{ alors } x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \end{cases}$$

Proposition 1.2.7. ***(Borel-Lebesgue)****[5] Pour qu'un sous-ensemble A de l'espace $\mathcal{R}^p$ soit compact, il faut et il suffit qu'il soit fermé et borné.*

1.3 Correspondance

Définition 1.3.1. (**Correspondance**)

Soient E et F deux espaces topologiques. Une correspondance C de E dans F est une application qui associe à tout x de E un sous-ensemble $C(x)$ de F

$$\begin{aligned} C : \quad E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow C(x) \end{aligned}$$

Définition 1.3.2. On dit qu'une correspondance

$$\begin{aligned} C : \quad E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow C(x) \end{aligned}$$

est semi-continue supérieurement au point x_0, si
$\forall \varepsilon > 0, \exists$ un voisinage $V(x_0) / \forall x \in V(x_0), C(x) \subset C(x_0) + \varepsilon\beta$.
ou β est la boule unité de F.

On dit que la correspondance C est semi-continue supérieurement sur X, si elle l'est en tout point $x \in X$.

Chapitre 2

La théorie des jeux classique

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion de jeu, de présenter quelques types de jeux, notamment la définition formelle du jeu dit sous forme normale. Nous allons présenter l'un des concepts de solution le plus étudié dans le cadre d'un comportement non-coopératif des joueurs qui est celui de l'équilibre de Nash.

2.1 Qu'est ce qu'un jeu ?

La théorie des jeux se propose de mettre sous forme mathématique des situations, appelées jeux, dans lesquelles des individus (les joueurs) sont en interaction, à la recherche du gain maximum (hypothèse de rationalité). Tout jeu, selon cette théorie, est donc constitué des trois éléments suivants :

1. Un ensemble de N joueurs, chacun étant caractérisé par un indice i, $i = 1, \ldots, N$.
2. Des ensembles $X_1, X_2, \ldots, X_N$, où X_i est l'ensemble des stratégies du joueur i ($i = 1, \ldots, N$), dont il choisit un élément (en ayant pour but d'obtenir le gain le plus élevé possible) ; un élément d'un ensemble X_i est noté x_i.
3. Un ensemble de fonctions de gain $\{u_1(.), u_2(.), \ldots, u_N(.)\}$; la fonction $u_i(.)$ donnant le gain $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ au joueur i, lorsque les choix des joueurs sont donnés par le vecteur de stratégies $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, avec $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_N \in X_N$.

Dans ce qui suit, on parle de payement pour désigner la *perte* ou le *gain* d'un joueur. Un problème de jeu est défini par le quadruplet suivant :

$$\langle \mathcal{N},\ \Sigma,\ \{X_i\}_{i \in \mathcal{N}},\ \{u_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle, \tag{2.1}$$

où

- $\mathcal{N}$: est l'ensemble des joueurs participant au jeu,
$$\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\};$$
- Σ : est un ensemble de relations mathématiques décrivant l'évolution du jeu ;
- X_i : désigne l'ensemble des stratégies admissibles du joueur i. On définit
$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N = \prod_{i=1}^{n} X_i,$$
le produit cartésien des X_i, $i \in \mathcal{N}$;
- u_i : est la fonction de payement du joueur i, $i \in \mathcal{N}$,
$$u_i \ : \ X \ \longrightarrow \ \mathbb{R}.$$
Le vecteur des fonctions $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N) \ \in \ \mathbb{R}^N$, indique le payement des N joueurs.

La fonction de payement u_i, du joueur i, peut être une fonction de gain qu'il doit maximiser ou une fonction de perte qu'il doit minimiser.

Il y a **situation** de "jeu" parce que le gain de chaque joueur dépend évidement de la stratégie qu'il choisit, mais aussi de celles qui sont choisies par les autres joueurs. Un résultat de ces choix constitue une **issue** du jeu à laquelle est associé un gain pour chacun des joueurs. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur et ne dépendent pas non plus uniquement du hasard, bien que celui-ci puisse intervenir.

2.2 Types de jeux

Définition 2.2.1. (**Jeu statique**)
On dit qu'un jeu est statique lorsque les joueurs choisissent leurs actions simultanément et reçoivent ensuite leurs gains respectifs. Chaque joueur choisit son plan d'action complet au début du jeu et au moment de faire son choix il n'est pas informé des choix des autres joueurs.

Définition 2.2.2. (**Jeu dynamique**)
On dit qu'un jeu est dynamique lorsque les joueurs choisissent leurs actions alternativement, c'est-à-dire que chaque joueur considère son plan d'action non seulement au début

du jeu, mais plutôt à chaque fois qu'il doit prendre une décision pendant le déroulement du jeu.

Définition 2.2.3. (**Jeu à information complète**)
Un jeu est dit à information complète, si chacun des joueurs connaît la structure du jeu, c'est-à-dire : l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d'information qu'à chaque moment du jeu chaque joueur possède sur les actions entreprises par les autres joueurs au cours des phases précédentes. Si, au moins, un des joueurs ne connaît pas entièrement la structure du jeu, le jeu est dit à **information incomplète**.

Lorsqu'il y a une information complète, chaque joueur connaît toutes les données du problème, pour lui et pour les autres. Toutefois, pour qu'un jeu soit totalement défini, il faut que ses règles précisent l'ordre des coups. Trois types de situations peuvent alors être envisagés :

- soit les joueurs font leurs choix de façon séquentielle, dans un ordre précis fixé à l'avance ;
- soit ils prennent leur décisions simultanément ;
- soit ils font face à des situations mixtes, avec des coups successifs et des coups simultanés.

Définition 2.2.4. (**Jeu à information parfaite**)
Un jeu est dit à information parfaite, si chacun des joueurs, au moment de choisir sa stratégie, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. Un jeu est à **information imparfaite**, si au moins un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ce qu'a joué un des autres joueurs.

2.3 Jeux sous forme extensive

Un jeu est appelé ainsi, lorsque les règles du jeu stipulent que les joueurs interviennent les uns après les autres, dans un ordre précis et que le nombre d'actions parmi lesquelles leurs choix s'exercent est fini. La représentation qui semble la plus appropriée consiste à tracer un "arbre" (appelé arbre de Kuhn). Une telle représentation est dite forme extensive. Elle symbolise, en effet, très bien l'idée de succession et d'enchaînement des coups. Un jeu sous sa forme extensive est donné par un arbre de jeu contenant un nœud initial, des nœuds de décisions, des nœuds terminaux et des branches reliant chaque nœud à ceux qui lui succèdent.

Définition 2.3.1. [92] Un jeu sous forme extensive est défini par :

- l'ensemble $\mathcal{N}$ de $N \geq 2$ joueurs, indexés par $i = 1, \ldots, N$. Dans le cas des jeux à deux joueurs, $\mathcal{N} = 2$.
- pour chaque nœud de décision, le nom du joueur qui a le droit de choisir une stratégie à ce nœud.
- pour chaque joueur i, la spécification de l'ensemble des actions permises à chaque nœud où il est susceptible de prendre une décision.
- la spécification des gains de chaque joueur à chaque nœud terminal.

Exemple 2.3.1. Le pilote et le terroriste

Un terroriste monte sur un avion. Après 10 Km de vol, le terroriste s'approche du pilote et le menace de faire exploser l'avion s'il n'atterrit pas à la ville $V1$. Le pilote a le choix entre la décision (P) qui consiste à continuer le vol vers la ville $V2$ et la décision (D) de suivre la direction de la ville $V1$. Ainsi, l'ensemble X_p des décisions du pilote est

$$X_p = \{P, D\}.$$

Après avoir observé les choix possibles du pilote, le terroriste a le choix entre faire exploser la bombe (B) ou abandonner (N). D'où l'ensemble X_t des décisions du terroriste est

$$X_t = \{B, N\}.$$

Les fonctions de gain du pilote et du terroriste sont respectivement :

$$u_p : X_p \times X_t \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$u_t : X_p \times X_t \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On note par $s_{(i)}$ la stratégie du joueur (i), avec $i \in \{p, t\}$, on a :

$$u(s_p, s_t) = (u_p(s_p, s_t), u_t(s_p, s_t)) = \begin{cases} (2,0), & \text{si} \quad s_p = P, s_t = N\,; \\ (-1,1), & \text{si} \quad s_t = B, \forall s_p\,; \\ (1,1), & \text{si} \quad s_p = D, s_t = N. \end{cases}$$

La forme extensive du jeu est représentée dans la figure suivante :

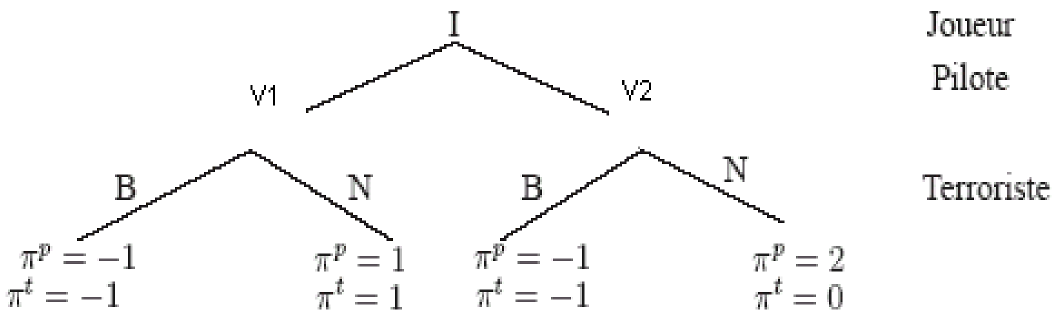

FIG. 2.1 – Forme extensive du jeu : " Le pilote et le terroriste".

La matrice des gains associée à ce jeu est :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (2,0) \\ (-1,-1) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

FIG. 2.2 – Jeu du pilote et du terroriste.

Exemple 2.3.2. Jeu de Pierre, Ciseaux et Papier

Supposons qu'il y a deux enfants, qu'on note J_1, J_2, jouant ensemble au jeu de Pierre, Ciseaux et Papier. A chaque affrontement, chacun des deux enfants a le choix entre de jouer Pierre (Pi) ou ciseaux (C) ou papier (Pa). Comme chacun des deux joueurs a un ensemble fini de stratégies, alors on se retrouve face à un jeu fini à deux joueurs. Nous avons les situations suivantes :

- Si J_1 joue (Pa) et J_2 joue (Pi) alors le papier enveloppe la pierre, donc J_1 gagne et reçoit un gain égal à 1, J_2 perd et aura une perte égale à -1.
- Si J_1 joue (Pa) et J_2 joue (Pa), alors aucun des deux enfants ne va ni gagner, ni perdre. Donc, J_1 et J_2 auront des gains nuls.
- Si J_1 joue (Pi) et J_2 joue (C) alors la pierre casse les ciseaux, donc J_1 perd et aura une perte égale à -1, J_2 gagne et reçoit un gain égal à 1.
- Si J_1 joue (Pi) et J_2 joue (Pi), alors aucun des deux enfants ne va ni gagner, ni perdre. Donc, J_1 et J_2 auront des gains nuls.
- Si J_1 joue (C) et J_2 joue (C), alors aucun des deux enfants ne va ni gagner, ni perdre.

Donc, J_1 et J_2 auront des gains nuls.

- Si J_1 joue (C) et J_2 joue (Pa) alors les ciseaux coupent le papier, donc J_1 gagne et reçoit un gain égal à 1, J_2 perd et aura une perte égale à -1.
- Si J_1 joue (Pi) et J_2 joue (Pa) alors le papier enveloppe la pierre, donc J_1 perd et aura une perte égale à -1 , J_2 gagne et reçoit un gain égal à 1.
- Si J_1 joue (Pa) et J_2 joue (C) alors les ciseaux coupent le papier, donc J_1 perd et aura une perte égale à -1 , J_2 gagne et reçoit un gain égal à 1.
- Si J_1 joue (C) et J_2 joue (Pi) alors la pierre casse les ciseaux, donc J_1 gagne et reçoit un gain égal à 1 , J_2 perd et aura une perte égale à -1.

La fonction des gains du premier joueur prend les valeurs suivantes :

$$u_1(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_1 = x_2\,; \\ 1, & \text{si } \begin{cases} x_1 = \text{Pa}, x_2 = \text{Pi}. \\ x_1 = \text{C}, x_2 = \text{Pa}. \\ x_1 = \text{Pi}, x_2 = \text{C}. \end{cases} ; \\ -1, & \text{si } \begin{cases} x_1 = \text{Pa}, x_2 = \text{C}. \\ x_1 = \text{C}, x_2 = \text{Pi}. \\ x_1 = \text{Pi}, x_2 = \text{Pa}. \end{cases} . \end{cases}$$

Ce jeu est un jeu à 2 joueurs à somme nulle, donc :

$$u_1(x_1,x_2) = -u_2(x_2,x_1)$$

Donc, la matrice des gains associée est :

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Pi} \\ \text{C} \\ \text{Pa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Pi} & \text{C} & \text{Pa} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (0,0) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Fig. 2.3 – Jeu de Pierre, Ciseaux et Papier.

La forme extensive de ce jeu est représentée dans la figure (2.4)

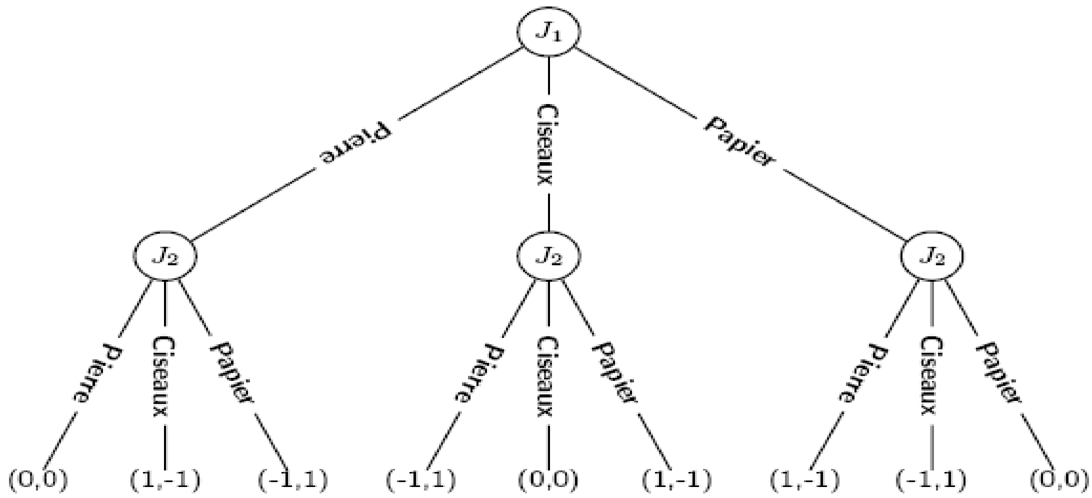

FIG. 2.4 – Forme extensive du jeu :" Pierre, Ciseaux et Papier".

Exemple 2.3.3. Jeu d'entrée sur un marché

Nous considérons une entreprise, notée NV (pour Nouveau Venu), qui envisage de produire un bien dont l'offre est le fait d'une autre entreprise M (pour Monopole).

Pour l'entreprise M, elle a deux choix : soit elle cède en limitant sa production afin d'éviter un affrontement des prix dans le cas où l'entreprise NV entre, soit elle ne cède pas en maintenant la même offre. Nous avons les situations possibles suivantes :

- NV n'entre pas et M ne cède pas : dans ce cas, l'entreprise NV n'en tire aucun profit ($u_{NV} = 0$), par contre l'entreprise M en tire le profit maximal $u_M = 10$;
- NV entre et M cède : dans ce cas, il y a un partage des ventes et des bénéfices qu'on peut supposer : $u_{NV} = u_M = 4$;
- NV entre et M ne cède pas : dans ce cas, les deux entreprises produisent à perte et on peut supposer : $u_{NV} = -3$ et $u_M = -2$;
- NV n'entre pas et M cède : alors $u_{NV} = 0$ et $u_M = 10$.

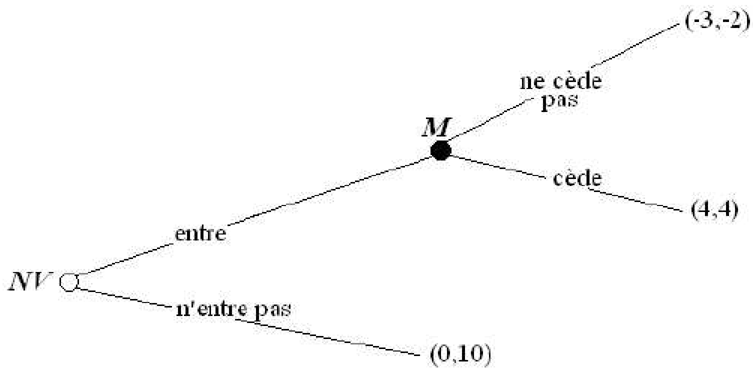

FIG. 2.5 – Forme extensive du jeu d'entrée sur un marché

Donc la matrice des gains associée est :

$$A = \quad \text{NV} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \text{Entrer} \\ \text{Ne pas entrer} \end{array} \begin{array}{c} \text{M} \\ \begin{array}{cc} \text{Céder} & \text{Ne pas céder} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (4,4) & (-3,-2) \\ (0,10) & (0,10) \end{pmatrix} \end{array}$$

FIG. 2.6 – Jeu d'entrée sur un marché.

La construction et l'étude des jeux sous forme extensive offrent un moyen commode de représenter des interactions stratégiques séquentielles dans des jeux à information parfaite.

2.4 Jeux sous forme normale

Lorsque le jeu est à coups simultanés, la représentation par la forme extensive devient particulièrement lourde et plus compliquée. La forme stratégique (ou normale) est une façon pratique de présenter les gains (ou utilités) et les stratégies de chaque joueur. Dans les jeux finis à deux joueurs, la représentation sous forme normale peut se faire par un tableau (à 2 dimensions). Lorsqu'il y a n joueurs, on est obligé de construire plusieurs tableaux pour reproduire la dimension n.

Définition 2.4.1. (**Jeu sous forme normale à N joueurs**)
Un jeu sous forme normale est décrit par le jeu

$$\langle \mathcal{N}, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} \rangle. \tag{2.2}$$

où

- $\mathcal{N}$: est l'ensemble des joueurs.
- X_i : est l'ensemble des stratégies du joueur i, $i \in \{1, \ldots, N\}$ et ;
- u_i : est la fonction de gain du joueur i, $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Définition 2.4.2. (**Jeu linéaire**)

Le jeu (2.2) est dit linéaire, si les fonctions gains u_i, $\forall i \in \mathcal{N}$ sont des fonctions linéaires.

Définition 2.4.3. (**Jeu sous forme normale à deux joueurs**)

Un jeu sous forme normale à deux joueurs, avec $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, est décrit par le jeu

$$\langle\{X_1, X_2\}, \{u_1, u_2\}\rangle. \tag{2.3}$$

Exemple 2.4.1. Deux adolescents en vélo foncent l'un vers l'autre dans un chemin étroit. Personne ne veut sortir du chemin.

Chacun des deux adolescents, qu'on note J_1 et J_2, ont deux choix possibles : soit il passe (F), soit il ne passe pas (C). Nous avons les possibilités suivantes :

- Si J_1 décide de choisir (F) et J_2 décide aussi de choisir (F). Les deux enfants vont se bousculer et sortir de la route, tous les deux n'ont aucune satisfaction. Supposons que leurs gains sont alors de -1 pour J_1 et de -1 pour J_2.
- Si J_1 décide de choisir (F) et J_2 décide de choisir (C). Le joueur J_1 aura une satisfaction totale et aura un gain égal à 10 et J_2 n'aura aucune satisfaction d'où son gain sera nul (0).
- Si J_1 décide de choisir (C) et J_2 décide de choisir (F). Le joueur J_2 aura une satisfaction totale et aura un gain égal à 10 et J_1 n'aura aucune satisfaction d'où son gain sera nul (0).
- Si J_1 décide de choisir (C) et J_2 décide aussi de choisir (C). Les deux enfants ne vont pas se bousculer et aucun d'entre eux ne sortira de la route, tous les deux seront satisfaits. Supposons que leurs gains sont alors de 5 pour J_1 et de 5 pour J_2.

Donc, la matrice des gains associée est :

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{F} \\ \text{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{F} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-1,-1) & (10,0) \\ (0,10) & (5,5) \end{pmatrix} \end{array}$$

2.4.1 Jeux finis à N joueurs

Définition 2.4.4. Jeu fini à N joueurs

Le jeu (2.1) est dit fini, si chacun des joueurs a un ensemble fini de stratégies, c'est-à-dire, le cardinal de $X_i =| X_i |< +\infty, \quad \forall i \in \mathcal{N}$. Le jeu fini à N joueurs est décrit par

$$\langle \mathcal{N},\ \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}},\ \{u_i\}_{i\in\mathcal{N}}\rangle. \tag{2.4}$$

2.4.2 Jeux finis à deux joueurs

Les jeux à 2 joueurs, ou duels, regroupent la plus grande partie des jeux courants, comme les échecs ou les dames, ou encore les jeux d'équipes (coalition). Les jeux à deux joueurs ont fait l'objet d'analyses poussées par les théoriciens.

Définition 2.4.5. Jeu fini à deux joueurs

Un jeu fini à deux joueurs est un cas particulier du jeu défini par la relation (2.4), lorsque l'ensemble des joueurs est réduit à deux ($\mathcal{N} = \{1, 2\}$) et chacun des deux joueurs a un nombre fini de stratégies. On peut le représenter par :

$$<\ X_1, X_2,\ u_1, u_2 > . \tag{2.5}$$

Jeux finis à deux joueurs à somme nulle

On dit qu'un jeu à deux joueurs est à somme nulle, si la somme totale des gains est nulle. En d'autres termes, si la somme totale gagnée par un joueur est égal au montant perdu par l'autre.

Définition 2.4.6. Un jeu fini à deux joueurs à somme nulle est représenté sous la forme suivante :

$$\langle \mathcal{N},\ \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}},\ \{u_i\}_{i\in\mathcal{N}}\rangle. \tag{2.6}$$

Où

- $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, l'ensemble des joueurs ;
- $| X_i |< \infty,\ i \in \{1, 2\}$;
- $u_1(x_1, x_2) = -u_2(x_2, x_1) \ \ \forall\ x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$

Définition 2.4.7 (Jeux finis à deux joueurs à somme constante). Le jeu fini à deux joueurs défini dans (2.5) est dit à somme constante, si en toute situation du jeu la somme des valeurs des fonctions des gains des deux joueurs est égale à une constante non nulle, i.e,

$$u_1(x,y) + u_2(x,y) = c^{ste}, \quad \forall (x,y) \in X_1 \times X_2.$$

Remarque 2.4.1. Un jeu fini à deux joueurs à somme constante peut être ramené et traité comme un jeu à deux joueurs à somme nulle sans altérer les particularités du jeu [9].

2.4.3 Jeux symétriques à deux joueurs

Définition 2.4.8. Jeu symétrique à deux joueurs
Un jeu à deux joueurs est dit symétrique, si $\mathcal{N} = \{1,2\}$ (il y a deux joueurs), $X_1 = X_2 = X$ (les deux joueurs ont accès aux mêmes stratégies) et

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad u_1(x_1,x_2) = u_2(x_2,x_1). \tag{2.7}$$

(i.e. si le joueur 1 joue la stratégie x_1 face à la stratégie x_2 du joueur 2, il obtient le même gain que le joueur 2 obtiendrait si les rôles étaient inversés).

Remarque 2.4.2. Dans un jeu symétrique à deux joueurs ayant des fonctions de gain identiques, c-à-d $u_1 = u_2 = u$, on a

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad u(x_1,x_2) = u(x_2,x_1). \tag{2.8}$$

Les deux joueurs ont une même matrice des gains.

Définition 2.4.9. Le jeu (2.8) est dit **doublement symétrique** si

$$\forall (x,y) \in X^2, \quad u(x,y) = u(y,x). \tag{2.9}$$

Tous les joueurs ont la même matrice des gains A, où, A est symétrique.

On note un jeu symétrique à deux joueurs où les joueurs ont le même ensemble de stratégies et les mêmes fonctions de gain par

$$\langle \ X \ , \ u \ \rangle. \tag{2.10}$$

Exemple 2.4.2. Amanda et Bernard veulent se rencontrer à NY (New York), mais n'ont pas décidé d'un lieu de rendez-vous. Ils peuvent chacun se rendre soit à l'Empire State Building (E), soit à Central Park (C). Le but de chacun est de rencontrer l'autre, peu importe où. Les préférences de chacun sur quel lieu où aller dépendent, donc, de ce que fait l'autre.

On peut donc décrire la situation par les éléments suivants :

- 2 Joueurs : $\mathcal{N} = \{\text{Amanda}, \text{Bernard}\}$.
- 2 décisions possibles pour chacun d'entre eux $\{E, C\}$, donc, $X_1 = X_2 = \{E, C\}$.
- L'utilité de chaque joueur dépend de son choix et de celui de l'autre joueur.

$$u_i = (x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 = x_2\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On représente le jeu par la matrice suivante : Amanda choisit la ligne, et Bernard choisit la colonne. La paire de paiements pour Amanda et Bernard est inscrite dans la case.

	E	C
E	(1,1)	(0,0)
C	(0,0)	(1,1)

2.5 Notions de stratégies

Notation :

Considérons le jeu (2.4).

$$\langle \mathcal{N}, ,\ \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}},\ \{u_i\}_{i\in\mathcal{N}} \rangle.$$

Une **situation** de jeu est notée par

$$x = (x_i, x_{-i}),$$

tel que x_i est la stratégie du joueur i,

$$x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N), \quad x_{-i} \in \prod_{j\neq i} X_j,$$

est la situation de jeu qui contient les stratégies de tous les joueurs sauf celle du joueur i.

2.5.1 Stratégies pures

Définition 2.5.1. Considérons le jeu (2.4). Une **stratégie pure** du joueur i est l'action qu'il choisit à chaque fois qu'il est susceptible de jouer, c'est-à-dire, toutes les options possibles qu'a le joueur.

On note par X_i, l'ensemble de toutes les stratégies pures du joueur i avec $i \in \overline{1, N}$ et x_i un élément de X_i tel que $\mid X_i \mid = n_i$. On note $x = (x_i, x_{-i}) \in X = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} X_i$ une situation de jeu.

2.5.2 Stratégies mixtes

Définition 2.5.2. Une stratégie mixte pour le joueur "i" dans le jeu (2.4) est un élément du simplexe défini par :

$$\Delta_i = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \quad \forall\ j = \overline{1, n_i}\ \}. \tag{2.11}$$

où, $n_i = |X_i|$.

Dans ce cas, la composante α_i représente la probabilité avec laquelle le joueur "i" choisira sa stratégie pure x_i.

On note Δ_i, l'ensemble des stratégies mixtes pour le joueur i et on note par

$$\Delta = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \Delta_i.$$

Définition 2.5.3. Une **stratégie mixte** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i}) \in \Delta_i$ du joueur "i" est dite **intérieure**, si

$$\alpha_j \ \in]0, 1[, \ \forall\ j = 1, \ldots, n_i.$$

2.6 Concepts de solution

L'analyse d'un jeu permet de prédire l'équilibre qui émergera, si les joueurs sont rationnels. Un équilibre est un état ou une situation dans laquelle aucun joueur ne souhaite modifier son comportement une fois connu le comportement des autres joueurs.

Parmi les résultats possibles, nous devons déterminer ceux auxquels le jeu peut aboutir : les résultats d'équilibre. La solution idéale correspond à un équilibre unique. Dans ce cas, nous pouvons précisément prédire la solution de cette situation conflictuelle. Néanmoins, on a souvent des équilibres multiples. Parfois, il n'existe même pas d'équilibre.

2.6.1 Équilibre de Nash en stratégies pures

L'équilibre de Nash doit son nom au mathématicien et économiste américain John F. Nash, qui a introduit ce concept en 1950. Cette notion d'équilibre désigne une situation où chacun des joueurs maximise ses gains.

Plus précisément, un équilibre de Nash est une combinaison de stratégies, une par joueur, telle que personne n'aurait pu augmenter strictement son gain en retenant une stratégie différente de celle que lui attribue cette combinaison. Autrement dit, un équilibre de Nash est une situation où aucun joueur n'a intérêt à changer sa stratégie. Selon Bernard Guerrien [37] , il y a un équilibre de Nash si chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

Jeux finis à N joueurs

Définition 2.6.1. Une situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_N^*) \in X$ est un **équilibre de Nash** dans le jeu (2.4), si pour chaque joueur $i \in N$, on a

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall\ x_i \in X_i.$$

Un équilibre de Nash correspond donc à une situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la situation d'équilibre.
On note par X^{NE}, l'ensemble des équilibres de Nash.

Définition 2.6.2. Équilibre de Nash strict
Une situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots x_N^*)$ est un **équilibre de Nash strict** dans le jeu (2.4), si pour chaque joueur $i \in N$ on a

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) > u_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X_i, \quad x_i \neq x_i^*.$$

Définition 2.6.3. Une stratégie x_i est une **meilleure réponse** aux stratégies des autres joueurs x_{-i} dans le jeu (2.4), si :

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}), \quad \forall\ y_i \in X_i.$$

On note $B(x_{-i})$, l'ensemble de toutes les stratégies qui sont une meilleure réponse à x_{-i}, autrement dit,

$$B(x_{-i}) = \{x_i \mid u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}), \quad \forall\ y_i \in X_i\}. \tag{2.12}$$

De plus, la stratégie x_i n'est jamais une meilleure réponse s'il n'existe pas de x_{-i} pour laquelle x_i est une meilleure réponse. Ce qui signifie qu'aucune autre stratégie ne lui rapporte strictement plus face au profil x_{-i} adopté par les autres joueurs.

Définition 2.6.4. Équilibre de Nash robuste
Une stratégie d'équilibre de Nash x^* est dite robuste dans le jeu (2.4), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x^*, tel qu'elle est meilleure réponse à toutes les stratégies appartenant à ce voisinage.

Jeux finis à deux joueurs

Définition 2.6.5. Une situation $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in X^1 \times X^2$ est un **équilibre de Nash** dans le jeu (2.5), si :

$$u_1(x_1^*, x_2^*) \geq u_1(x_1, x_2^*), \quad \forall\ x_1 \in X_1.$$

$$u_2(x_1^*, x_2^*) \geq u_2(x_1^*, x_2), \quad \forall\ x_2 \in X_2.$$

Définition 2.6.6. Une situation $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in X^1 \times X^2$ est un **équilibre de Nash strict** dans le jeu (2.5), si on a :

$$u_1(x_1^*, x_2^*) > u_1(x_1, x_2^*), \quad \forall\ x_1 \in X_1.$$

$$u_2(x_1^*, x_2^*) > u_2(x_1^*, x_2), \quad \forall\ x_2 \in X_2.$$

Définition 2.6.7. Une stratégie x_1 du joueur 1 est une **meilleure réponse** aux stratégies x_2 du joueur 2 dans le jeu (2.5), si :

$$u_1(x_1, x_2) \geq u_1(y_1, x_2), \quad \forall\ y_1 \in X_1.$$

L'ensemble de toutes les stratégies qui sont une meilleure réponse à x_2, est

$$B(x_2) = \{x_1 \mid u_1(x_1, x_2) \geq u_1(y_1, x_2), \quad \forall\ y_1 \in X_1\}. \tag{2.13}$$

Jeux symétriques à deux joueurs

Dans un jeu fini symétrique à deux joueurs, les joueurs ont un ensemble commun de stratégies et les fonctions de gains des deux joueurs sont identiques. Les définitions d'équilibres deviennent :

Définition 2.6.8. Une situation (x^*, y^*) est un **équilibre de Nash** dans le jeu (2.10), si on a

$$\begin{cases} u(x^*, y^*) \geq u(x, y^*), & \forall\ x \in X, \\ u(x^*, y^*) \geq u(x^*, y), & \forall\ y \in X. \end{cases}$$

Définition 2.6.9. Une situation (x^*, y^*) est un **équilibre de Nash strict** dans le jeu (2.10), si on a

$$\begin{cases} u(x^*, y^*) > u(x, y^*), & \forall\ x \in X, \\ u(x^*, y^*) > u(x^*, y), & \forall\ y \in X. \end{cases}$$

Définition 2.6.10. Une stratégie x est une **meilleure réponse** à la stratégie y dans le jeu (2.10), si :

$$u(x, y) \geq u(z, y), \quad \forall\ z \in X.$$

L'ensemble de toutes les stratégies qui sont une meilleure réponse à y, est

$$B(y) = \{x \mid u(x, y) \geq u(z, y), \quad \forall\ z \in X\}. \tag{2.14}$$

2.6.2 Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Jeux finis à N joueurs

Définition 2.6.11. Une situation $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*) \in \Delta = \prod_{i=1}^{N} \Delta_i$, est un équilibre de Nash, si pour chaque $i \in N$, on a :

$$u_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq u_i(\beta_i, \alpha_{-i}^*), \quad \forall\ \beta_i \in \Delta_i.$$

Proposition 2.6.1. *Tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Théorème 2.6.2. *[59]*

Tout jeu fini (2.4), admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Définition 2.6.12. Une situation $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*) \in \Delta = \prod_{i=1}^{N} \Delta_i$, est un équilibre de Nash strict, si pour chaque $i \in N$, on a :

$$u_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) > u_i(\beta_i, \alpha_{-i}^*), \quad \forall\ \beta_i \in \Delta_i.$$

Définition 2.6.13. Une stratégie α_i est une **meilleure réponse** aux stratégies des autres joueurs α_{-i}, si :

$$u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \geq u_i(\beta_i, \alpha_{-i}), \quad \forall\ \beta_i \in \Delta_i.$$

On note $B(\alpha_{-i})$, l'ensemble de toutes les stratégies qui sont une meilleure réponse à α_{-i}, autrement dit,

$$B(\alpha_{-i}) = \{\alpha_i \mid u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \geq u_i(\beta_i, \alpha_{-i}), \quad \forall\, \beta_i \in \Delta_i\}. \tag{2.15}$$

Définition 2.6.14. Équilibre de Nash robust
Une stratégie d'équilibre de Nash α^* est dite robuste, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de α^*, tel qu'elle est une meilleure réponse à toutes les stratégies appartenant à ce voisinage.

Jeux finis à deux joueurs

Définition 2.6.15. Une situation $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) \in \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, est un **équilibre de Nash** dans le jeu (2.5), si :

$$u_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \geq u_1(\beta_1, \alpha_2^*), \quad \forall\, \beta_1 \in \Delta_1.$$

$$u_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \geq u_2(\alpha_1^*, \beta_2), \quad \forall\, \beta_2 \in \Delta_2.$$

Définition 2.6.16. Une situation $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) \in \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, est un **équilibre de Nash strict** dans le jeu (2.5), si :

$$u_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) > u_1(\beta_1, \alpha_2^*), \quad \forall\, \beta_1 \in \Delta_1.$$

$$u_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) > u_2(\alpha_1^*, \beta_2), \quad \forall\, \beta_2 \in \Delta_2.$$

Définition 2.6.17. Une stratégie α_1 du joueur 1 est une **meilleure réponse** aux stratégies α_2 du joueur 2 dans le jeu (2.5), si :

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2) \geq u_1(\beta_1, \alpha_2), \quad \forall\, \beta_1 \in \Delta_1.$$

L'ensemble de toutes les stratégies qui sont une meilleure réponse à α_2, est

$$B(\alpha_2) = \{\alpha_1 \mid u_1(\alpha_1, \alpha_2) \geq u_1(\beta_1, \alpha_2), \quad \forall\, \beta_1 \in \Delta_1\}. \tag{2.16}$$

Jeux symétriques à deux joueurs

Définition 2.6.18. Une situation $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta$, est un **équilibre de Nash** dans le jeu (2.10), si :

$$u(\alpha^*, \beta^*) \geq u(\alpha, \beta^*), \quad \forall\, \alpha \in \Delta.$$

$$u(\alpha^*, \beta^*) \geq u(\alpha^*, \beta), \quad \forall\, \beta \in \Delta.$$

Définition 2.6.19. Une situation $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta$, est un **équilibre de Nash strict** dans le jeu (2.10), si :

$$u(\alpha^*, \beta^*) > u(\alpha, \beta^*), \quad \forall\ \alpha \in \Delta.$$

$$u(\alpha^*, \beta^*) > u(\alpha^*, \beta), \quad \forall\ \beta \in \Delta.$$

Définition 2.6.20. Une stratégie α est une **meilleure réponse** à la stratégie β dans le jeu (2.10), si :

$$u(\alpha, \beta) \geq u(\gamma, \beta), \quad \forall\ \gamma \in \Delta.$$

L'ensemble de toutes les stratégies qui sont une meilleure réponse à β, est

$$B(\beta) = \{\alpha \mid u(\alpha, \beta) \geq u(\gamma, \beta), \quad \forall\ \gamma \in \Delta.\}. \tag{2.17}$$

2.6.3 Équilibre en stratégies dominantes

Jeux finis à N joueurs

Définition 2.6.21. [58] On dit que la stratégie $x_i \in X_i$ **est dominée** dans le jeu (2.4), s'il existe une autre stratégie $y_i \in X_i$, telle que

$$u_i(y_i, x_{-i}) > u_i(x_i, x_{-i}), \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}; \tag{2.18}$$

où

$$X_{-i} = \prod_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} X_j = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_N;$$

$$(y_i, x_{-i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N).$$

Dans ce cas, on dit aussi que la stratégie y_i domine la stratégie x_i. Si le joueur "i" est rationnel, il ne jouerait en aucun cas la stratégie x_i.

Définition 2.6.22. [58] On dit que la stratégie $x_i \in X_{-i}$ est une **stratégie dominante** dans le jeu (2.4), si $\forall y_i \in X_i,\ \forall x_{-i} \in X_i$

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}).$$

La stratégie $x_i \in X_i$ est dominante pour le joueur i, si x_i domine y_i, $\forall y_i \in X_i$.

Définition 2.6.23. Une stratégie $x_i \in X_i$ est une **stratégie strictement dominante** pour le joueur i dans le jeu (2.2), si $\forall \;\; y_i \in X_i$, $y_i \neq x_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}$ on a :

$$u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}).$$

Définition 2.6.24. Deux stratégies x_i et y_i sont équivalentes dans le jeu (2.4), si et seulement si, pour tout profil de stratégies donné des autres joueurs, tous les joueurs obtiennent la même utilité quand i joue x_i ou y_i.

$$\forall \; j \in \mathcal{N}, \;\; \forall \; x_{-i} \in X_{-i}, \quad u_j(x_i, x_{-i}) = u_j(y_i, x_{-i}).$$

Toutes les stratégies équivalentes à une stratégie x_i forment une classe d'équivalence [92].

Proposition 2.6.3. *Si une stratégie x_i est strictement dominante, alors elle est la seule à avoir cette propriété (la propriété d'être une stratégie strictement dominante).*

Si un joueur a une stratégie dominante, on peut alors penser que cette stratégie constitue un bon choix. Pour chaque choix des autres, elle donne le meilleur paiement possible.

Définition 2.6.25. Une stratégie $x_i \in X_i$ est **faiblement dominée** dans le jeu (2.4), s'il existe une stratégie $y_i \in X_i, \;\; y_i \neq x_i$ telle que :

$\forall \; x_{-i} \in X_{-i}, \;\; u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(x_i, x_{-i}).$

On dit dans ce cas que y_i domine faiblement x_i.

Définition 2.6.26. Une stratégie x_i est **faiblement dominante** dans le jeu (2.4), si :

$\exists y_i \in X_i, \forall \; x_{-i} \in X_{-i}, \;\; u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}).$

Définition 2.6.27. Équilibre en stratégies dominantes

Une situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*) \in X$ est appelée un équilibre en stratégies dominantes dans le jeu (2.4), si la composante $x_i^* \in X_i$ est une stratégie dominante pour le joueur i, $\forall \; i \in \mathcal{N}$.

Remarque 2.6.1. Tout équilibre en stratégies dominantes dans le jeu (2.4) est un équilibre de Nash, mais l'inverse n'est pas vrai.

Proposition 2.6.4. *Si x^* est une stratégie faiblement dominante, alors x^* est un équilibre de Nash. Si x^* est une stratégie strictement dominante, alors x^* est l'unique équilibre de Nash.*

Jeux symétriques à deux joueurs

Définition 2.6.28. On dit que la stratégie $x \in X$ est une **stratégie dominante** dans le jeu (2.10), si $\forall\ y \in X,\ \forall z \in X$

$$u(x, z) \geq u(y, z).$$

La stratégie $x \in X$ est dominante, si x domine y.

Définition 2.6.29. Une stratégie $x \in X$ est une **stratégie strictement dominante** dans le jeu (2.10), si $\forall\ \ y \in X,\ y \neq x, \forall z \in X$ on a :

$$u(x, z) > u(y, z).$$

2.6.4 Pas d'équilibre, trop d'équilibres

Il est important de noter que tous les jeux n'ont pas toujours un équilibre qui peut être déterminé par une simple exploration de la matrice des gains. D'autre part, certains jeux sont caractérisés par des équilibres multiples.

Exemple 2.6.1. Soit le jeu :

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{H} \\ \text{B} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{G} & \text{M} & \text{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,2) & (1,1) & (4,0) \\ (1,2) & (4,1) & (3,5) \end{pmatrix} \end{array}$$

L'unique équilibre de Nash est (H,G).

Exemple 2.6.2. Considérons le jeu de Rendez-Vous à New York.

$$\begin{array}{c} \\ \text{E} \\ \text{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{E} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans ce jeu, on a deux équilibres : (C,C), (E,E).

Exemple 2.6.3. Considérons le jeu à somme nulle suivant :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{P} & \text{F} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{P} \\ \text{F} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans ce jeu, il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

2.6.5 Correspondance

Jeux finis à N joueurs

Considérons le jeu (2.4). Pour le joueur "i", $x = (x_i, x_{-i}) \in X = X_i \times X_{-i}$. La règle de décision pour le joueur "i" est :

$$\begin{aligned} C_i \quad : \quad & X_{-i} \longrightarrow X_i, \qquad\qquad\qquad \forall\ i = \overline{1, N}. \\ & x_{-i} \longrightarrow C_i(x_{-i}) \subset X_i. \end{aligned}$$

Définition 2.6.30. [69]
Considérons le jeu (2.4) à N joueurs avec leurs règles de décision. Nous dirons qu'une situation $x \in X$ est **cohérente**, si

$$\forall\ i = 1, \dots, N, \quad x_i \in C_i(x_{-i}).$$

ie :

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in C_1(x_{-1}) \times C_2(x_{-2}) \times \dots \times C_N(x_{-N}) \\ \Longrightarrow \quad x \in C(x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $C(x) = \prod_{i=1}^{N} C_i(x_{-i})$.
ie :
x est un point fixe de la correspondance $C(x)$ définie par (2.19).

Jeux finis à deux joueurs

Définition 2.6.31. [69]
Considérons le jeu (2.5).

* Une règle de décision du premier joueur est une correspondance

$$\begin{aligned} C_1 \quad : \quad & X_2 \longrightarrow X_1, \\ & x_2 \longrightarrow C_1(x_2). \end{aligned}$$

qui associe à toute stratégie $x_2 \in X_2$ du deuxième joueur les stratégies $x_1 \in C_1(x_2)$ qui peuvent être choisies par le 1^{er} joueur lorsqu'il sait que le second joueur joue x_2.

* Une règle de décision du deuxième joueur est une correspondance

$$\begin{aligned} C_2 \ : \ X_1 &\longrightarrow X_2, \\ x_1 &\longrightarrow C_2(x_1). \end{aligned}$$

Un couple de stratégie (x_1^*, x_2^*) est cohérent par rapport à $C_1 \times C_2$ si

$$\begin{cases} x_1^* \in C_1(x_2^*) \\ x_2^* \in C_2(x_1^*) \end{cases} \Longrightarrow x^* \in C(x^*). \tag{2.20}$$

Définition 2.6.32. Le couple $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$ vérifiant (2.20) est appelé point fixe de la correspondance $C(x_1, x_2)$.

Jeux symétriques à deux joueurs

Définition 2.6.33. Considérons le jeu (2.10). Une règle de décision d'un joueur est une correspondance

$$\begin{aligned} C \ : \ X &\longrightarrow X, \\ x &\longrightarrow C(x). \end{aligned}$$

Tous les joueurs ont la même règle de décision.

2.7 Application de la théorie des jeux

Le champ d'application naturel de la théorie des jeux est la théorie économique ; ce système économique étant alors appréhendé comme un grand jeu entre agents identifiés comme producteurs et consommateurs.

Elle s'applique aussi à des domaines autres comme les sciences sociales, la science politique, les stratégies militaires, voire même la sociologie et envahit aussi la biologie animale.

Dans la théorie des jeux classique, en particulier dans le domaine économique, la résolution d'un conflit consiste à chercher les différentes situations d'équilibre qui peuvent exister. Ainsi, nous considérons que chaque joueur est complètement rationnel dans le sens où il choisit une action qui maximise son utilité compte tenu de ses opinions subjectives.

La théorie des jeux nous permet d'appréhender plusieurs domaines, tels que la théorie de l'évolution, la sociologie, la conduite de l'État, et permet de mieux comprendre le déroulement des guerres.

L'implantation de modèles de jeux biologiques en science économique est au cœur d'un débat ancien. L'économie peut se servir de cette science sous certaines conditions.

La sociologie est, en revanche, la bienvenue si elle peut expliquer le fonctionnement des systèmes économiques. Il ne s'agit donc pas d'utiliser cette science dans l'analyse de la concurrence, mais plutôt dans la compréhension du comportement des agents et de la nature humaine.

2.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des notions de base de la théorie des jeux classique. L'intérêt principal de cette théorie consiste à étudier les différentes situations de conflit entre les individus en prenant comme hypothèse de base le comportement rationnel des individus dans le sens où chaque individu cherche à maximiser son gain personnel. Nous avons constaté tout au long de ce chapitre que l'analyse des jeux est basée sur la notion d'équilibre et en particulier d'équilibre de Nash qui permet de définir une situation de non regret pour les différents joueurs.

Chapitre 3

La théorie des jeux évolutionnaires

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter la notion de jeux évolutionnaires. Nous allons introduire le concept fondamental de la théorie des jeux évolutionnaires qui est celui de stratégie évolutionnairement stable. Nous allons illustrer cette notion à l'aide du célèbre jeu du faucon et de la colombe.

3.1 Pourquoi la théorie des jeux évolutionnaires ?

La théorie des jeux évolutionnaires est apparue suite aux expériences effectuées par des biologistes. Ces derniers ont constaté que le comportement des individus est peu rationnel au sens décrit par la théorie classique des jeux. En théorie des jeux évolutionnaires, chaque individu cherche à améliorer, non pas son gain personnel, mais le gain total de la population dont il fait partie.

Dans les jeux évolutionnaires, l'équilibre est également l'objet d'intérêt, mais il ne peut être compris comme le résultat d'une dynamique susceptible d'en expliquer la genèse. Dans la théorie classique des jeux, les agents sont hyper-rationnels. Ils élaborent des plans d'action optimaux sur le long terme. L'évolutionnaire renoue quant à lui avec la vieille tradition en économie qui conçoit l'agent en tant qu'optimisant naïf sur la base d'une information limitée (imparfaite). L'agent s'adapte donc à son contexte immédiat. On parvient toutefois souvent au même équilibre que pour un agent hyper-rationnel.

3.1.1 Objectif

L'objectif général de l'approche évolutionnaire est de montrer comment les comportements (stratégies) économiques et sociaux émergent de la décision interactive de plusieurs joueurs. Le but de cette approche est justement d'esquisser quelques outils théoriques qui permettront de prédire la tendance d'évolution d'une population, en supposant que l'on puisse modéliser les interactions entre les individus sous forme d'un jeu. Pour cela, nous utilisons des résultats issus de la théorie des jeux évolutionnaires.

La forme du jeu dépend de la situation d'interaction : jeu de coordination, jeu de négociation, etc .... Ce cadre diffère cependant de la traditionnelle théorie des jeux par plusieurs aspects cruciaux :

1. Les joueurs ne sont pas fixés mais issus d'une large population de joueurs potentiels.
2. La probabilité que des individus interagissent dépend de facteurs exogènes tels que leur lieu de vie et plus généralement de leur proximité au sein d'un espace social défini.
3. Les agents ne sont pas parfaitement rationnels et totalement informés sur le monde dans lequel ils vivent. Cependant, ils ne sont pas complètement irrationnels : ils ajustent leur comportement en se basant sur ce qu'ils pensent de ce que vont faire les autres agents. Sur la base de ces croyances, l'agent prend une décision qui à son tour devient un précédent qui influence le comportement des futurs agents.
4. Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que le processus est soumis à des perturbations aléatoires issues de divers facteurs tels que des chocs exogènes ou de l'imprédiction du comportement humain. Ils impliquent, par ailleurs, le fait que la dynamique évolutionnaire est toujours en flux ; elle ne converge jamais totalement.

La rationalité limitée des joueurs est compensée par une dynamique, à savoir une répétition infinie du jeu où les joueurs adaptent progressivement leurs stratégies. On s'intéresse là encore, plutôt qu'aux états transitoires du processus, aux états d'équilibre asymptotique vers lesquels il est susceptible de converger. Dans ce cas, le processus converge de lui-même vers un équilibre spécifique, en fonction des conditions initiales et de l'histoire du jeu.

L'idée de Maynard Smith [76, 77], à la base de la théorie des jeux évolutionnaires, est de sortir de l'hypothèse de rationalité des agents pour laisser place à une conception évolutionnaire du jeu, les joueurs ne jouant plus que des stratégies prédéfinies, et de poser alors une notion plus satisfaisante d'équilibre, celle de stratégie évolutionnairement stable (Evolutionary Stable Strategy, ESS). Les deux points forts de cette nouvelle théorie sont : elle permet de prendre en compte à la fois l'expérience passée des individus, de part son aspect dynamique, et leur environnement social, en considérant fondamentalement la répartition des différentes stratégies jouées au sein de la population.

3.1.2 Problème de sélection d'un équilibre

Nous avons introduit dans le chapitre précédent le concept d'équilibre de Nash qui a été la solution la plus utilisée dans la théorie classique des jeux. La sélection des stratégies par un groupe d'individus est mentionnée comme étant un équilibre de Nash, si pour chaque individu la stratégie choisie est sa *meilleure réponse* aux autres stratégies choisies par les autres joueurs.

Par "meilleure réponse", nous voulons dire qu'aucun individu ne peut améliorer son paiement en changeant sa stratégie à moins qu'au moins un autre individu change également sa stratégie. Ceci ne signifie pas nécessairement qu'à l'équilibre de Nash, les paiements pour chaque individu sont optimaux. Par exemple, dans le jeu du dilemme du prisonnier, le seul équilibre de Nash qui existe, dans lequel les deux individus avouent, est sous-optimal. Dans ce cas, il n'est pas évident de considérer l'équilibre de Nash comme étant un concept de solution optimale pour tout type de jeu.

Cependant, il est vrai que tout jeu fini non-coopératif dans lequel les joueurs peuvent utiliser des stratégies mixtes a un équilibre de Nash, mais nous pouvons poser une question sur ce qu'une stratégie mixte peut avoir comme signification pour des individus réels. S'il semble plus approprié que les individus rationnels adoptent uniquement des stratégies pures, alors les théoriciens des jeux doivent admettre que certains jeux n'ont pas de solutions.

Un autre problème plus significatif de l'utilisation de l'équilibre de Nash apparaît dans les jeux avec plusieurs équilibres. Dans ce cas, comment un individu rationnel peut-il décider quel sera l'équilibre atteint ? Des tentatives pour résoudre ce problème ont fourni un nombre de raffinements possibles pour le concept d'équilibre de Nash [37], [23]. Ainsi, le problème consiste alors à choisir parmi une variété de subtilités au lieu de choisir entre plusieurs équilibres de Nash. Pour cela, Sammuelson, Larry et Zhang [71] espèrent qu'un développement dans la théorie des jeux évolutionnaires peut apporter une solution à ce problème.

3.1.3 Problème d'hyper-rationalité des individus

La théorie classique des jeux impose un degré de rationalité très élevé sur les individus. Cette nécessité est imposée par le développement de la théorie de l'utilité qui est à la base de la théorie des jeux. Par exemple, pour être capable d'assigner une fonction d'utilité fondamentale aux individus, nous assumons typiquement que chaque individu a une définition précise du jeu et un ensemble logique de préférences sur les différentes issues du jeu.

De nombreux résultats d'économie expérimentale ont montré que cette hypothèse forte de rationalité ne décrit pas le comportement réel des humains. Un humain est rarement un individu hyper-rationnel comme le décrit la théorie classique des jeux [36].

La théorie des jeux évolutionnaires explique avec succès la prédominance de certains comportements d'insectes et d'animaux, où l'hypothèse de rationalité forte est clairement non respectée, ce qui suppose que la rationalité n'est pas un élément principal pour analyser les situations de conflit comme il a été déjà considéré. Ce que nous espérons alors, est que la théorie des jeux évolutionnaires puisse permettre avec plus de succès de décrire et de prédire le choix des différents individus lorsque nous nous trouvons en face d'hypothèse de rationalité plus faible.

3.2 Définitions et Concepts

Définition 3.2.1. Une **population** est un ensemble d'individus qui coexistent dans le même environnement.
Un **individu** peut-être une personne, un animal, une entreprise, etc ....

Définition 3.2.2. [68] Un comportement particulier, ou une suite de comportements, que l'individu adopte est appelé ***stratégie***.

Définition 3.2.3. Un individu est dit **mutant**, s'il change son comportement (sa stratégie) au cours du temps par rapport à son comportement initial.

Définition 3.2.4. Une **stratégie** est dite **mutante**, si elle est adoptée par un mutant.

Définition 3.2.5. Une **stratégie** est dite **originelle**, si elle n'est pas une stratégie mutante.

Définition 3.2.6. Une stratégie α est dite **envahie** par une stratégie β, si les individus jouant la stratégie β obtiennent un payement (gain) plus élevé que les autres individus de la population jouant la stratégie α.

Définition 3.2.7. Un état de la population est dit :

- **Monomorphique**, si chaque individu de la population utilise la même stratégie.
- **Polymorphe**, si au moins deux individus de la population utilisent deux stratégies différentes.

Définition 3.2.8. Une stratégie x est ***stable***, si le payement des individus qui adoptent cette stratégie est supérieur au payement de tout autre mutant. S'il existe une stratégie mutante qui peut envahir la stratégie x, alors celle-ci est dite instable.

3.3 Définition des fonctions de gains

Pour définir les fonctions des gains des individus (joueurs), nous aurons besoin d'une description plus complète de la stratégie et de ses relations avec les autres stratégies. Ensuite, nous aurons besoin de convertir cette description en gains. Pour ce faire, nous aurons besoin des facteurs suivants.

- la valeur de la ressource ;
- la chance de gagner une ressource ;
- les prix impliqués dans la réussite (tout ce qui est engagé dans la rencontre, par exemple : l'énergie dépensée, coût des temps d'arrêt,etc ...) ;
- les coûts de perte ;
- la chance de perte d'une ressource.

Ainsi, toutes les fonctions de gains auront la forme générale suivante :

$$\text{Payement (stratégie , autre stratégie)} = \text{(le bénéfice des gains)} - \text{(le coût des pertes)}. \tag{3.1}$$

Puisqu'on est confronté à des rencontres (duels) entre les individus de la population, l'avantage procuré ou le prix à payer dépendent d'un nombre de facteurs. Ainsi, nous devons considérer le facteur lié à la chance de gagner une ressource d'une certaine valeur et à la chance de payer un prix dans la perte.

$$\begin{aligned}\text{Payement (stratégie, autre stratégie)} &= \text{(chance de victoire)} * \text{(valeur de la ressource)} \\ &- \text{(chance de perte)} * \text{(coût des pertes)}. \quad (3.2)\end{aligned}$$

L'equation (3.2) n'est probablement pas suffisante, puisqu'elle stipule que la réussite n'a aucun prix. Pourtant, dans beaucoup de concours, il y'a un prix à payer par le vainqueur. Par exemple, l' énergie dépensée ou les prix de temps de rupture (les temps d'arrêt), peuvent être vus comme le fait de baisser la valeur de la réussite. Ainsi (3.2) pourrait être développée :

$$\begin{aligned}\text{Payement (stratégie, autre stratégie)} &= \text{(chance de la victoire)} * \quad (3.3) \\ &* \text{(valeur de la ressource - prix de la victoire)} \\ &- \text{(chance de la perte)} * \text{(coût de la perte)}.\end{aligned}$$

3.4 Stratégie évolutionnairement stable

Le concept central, que Maynard-Smith et Price ont introduit en 1974 [78], [77] est spécifique à la théorie des jeux évolutionnaires, c'est le concept de stratégie évolutionnairement stable ou ESS (Evolutionnary Stable Strategy) que nous allons définir.

Une stratégie évolutionnairement stable est une stratégie qui résiste aux pressions évolutionnaires exercées par l'environnement, terme qui doit être compris comme l'ensemble des stratégies alternatives disponibles (le terme de stratégies mutantes est également utilisé) : une population jouant une telle stratégie ne peut être envahie par aucune autre stratégie mutante.

J. Maynard Smith a donné des conditions mathématiques pour qu'une stratégie soit évolutionnairement stable. Les hypothèses essentielles qui ont été utilisées dans son modèle consistaient à considérer une population infinie, les combats se font par paire d'individus et chaque paire de concurrents est considérée comme étant deux adversaires qui ont les mêmes aptitudes (c'est-à-dire un combat symétrique). Il considère que chaque individu de la population dispose d'un nombre fini de stratégies. Ceci permet de décrire le jeu entre deux individus par une matrice A des gains, ce qui donne des jeux symétriques matriciels à deux joueurs, chaque élément a_{ij} représente le gain de l'individu quand il choisit de jouer sa $i^{\text{ème}}$ stratégie pure et son adversaire sa $j^{\text{ème}}$ stratégie pure.

Comme il est supposé que chaque individu de la population dispose d'un même ensemble fini de stratégies (on suppose que le nombre de stratégies est "n"), alors on est conduit à considérer des jeux finis à deux joueurs avec des matrices des gains $A_1 = A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ et $A_2 = A^T$.

L'ensemble des stratégies mixtes associé à chaque individu est

$$\Delta = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \ \ / \ \ \alpha_i \in [0,1], \ \forall\ i = \overline{1,n}, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}.$$

Comme l'évolution de la population est considérée comme la résultante de confrontation d'individus (de cette population) par paire et donc connue des jeux matriciels, alors si ces jeux sont traités en stratégies mixtes, alors le gain espéré pour chaque individu, s'il adopte une stratégie mixte $\alpha \in \Delta$ et son adversaire une stratégie mixte $\beta \in \Delta$, sera :

$$u(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \beta_j.$$

Ainsi, l'étude de l'évolution de la population se ramène à l'étude du jeu symétrique à deux joueurs en stratégies mixtes

$$\langle\ \mathcal{A}, \mathcal{B}, u_1, u_2 \rangle, \tag{3.4}$$

où $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \Delta$, $u_1(\alpha, \beta) = u(\alpha, \beta) = \alpha^T A_1 \beta = \alpha^T A \beta$,
$u_2(\alpha, \beta) = \alpha^T A_2 \beta = \beta^T A_2^T \alpha = \beta^T A \alpha = u(\alpha, \beta)$.

Le jeu (3.4) est entièrement caractérisé par

$$\langle \ \ \Delta \ \ , \ \ u \ \ \rangle. \tag{3.5}$$

3.4.1 Définition d'une ESS

Définition intuitive

Intuitivement, le concept de stratégie évolutionnairement stable peut être interprété de la manière suivante. Supposons qu'on a une population infinie d'individus et ces derniers se rencontrent aléatoirement par paire pour jouer un jeu à deux joueurs symétrique. Supposons qu'à l'état initial, l'ensemble des individus de cette population adopte une même stratégie α (pure ou mixte) (on dit, dans ce cas, que la population est monomorphique). Dans ce cas, on note par $u(\alpha, \alpha)$ le gain d'un individu dans le jeu symétrique à deux joueurs.

Supposons maintenant qu'une proportion ε de cette population adopte une autre stratégie β (une stratégie mutante), tandis que le reste de la population maintient la stratégie α.

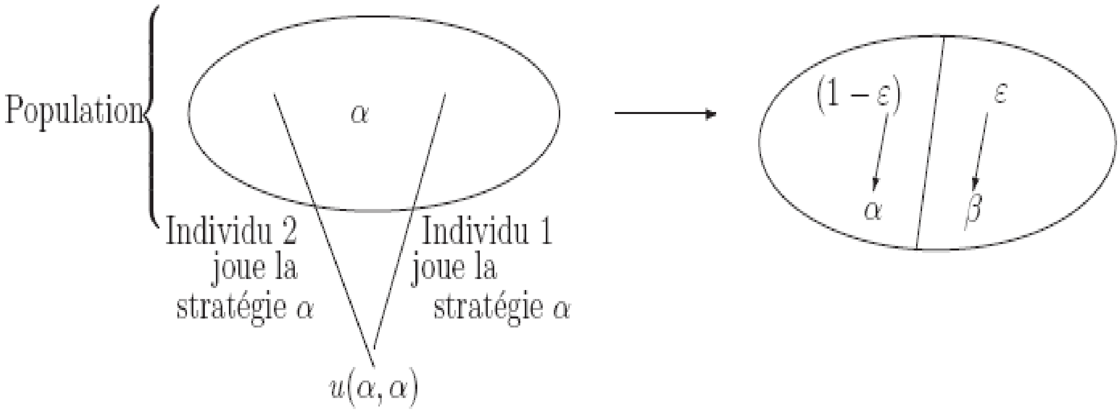

FIG. 3.1 – Changement de stratégie dans la population.

Mettons nous à la place d'un individu jouant une stratégie α. Alors la probabilité d'être apparié à un joueur jouant une stratégie α (pour jouer le jeu symétrique à deux joueurs) sera de $(1-\varepsilon)$ et la probabilité d'être apparié à un joueur jouant une stratégie β sera ε. Alors l'espérance de gain du joueur jouant une stratégie α sera :

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)u(\alpha, \alpha) + \varepsilon u(\alpha, \beta) &= (1-\varepsilon)\alpha^T A\alpha + \varepsilon\alpha^T A\beta, \\
&= \alpha^T A((1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta), \\
&= u(\alpha, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta).
\end{aligned}$$

Par contre, l'espérance de gain du joueur jouant une stratégie β sera :

$$\begin{aligned}
u(\beta, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta) &= (1-\varepsilon)\beta^T A\alpha + \varepsilon\beta^T A\beta, \\
&= \beta^T A((1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta).
\end{aligned}$$

La stratégie α sera gagnante face à la stratégie mutante β, si

$$u(\alpha, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta) \quad > \quad u(\beta, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta).$$

Cette intuition fournit la définition d'une ESS.

Définition 3.4.1. (Taylor et Joncker 1978)[82]
Une stratégie $\alpha \in \Delta$ est une **Stratégie évolutionnairement stable (ESS)**, si :
$\forall\ \beta \in \Delta, \quad \exists\ \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\beta) \in (0,1), \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}),$

$$u(\alpha, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta) > u(\beta, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta). \tag{3.6}$$

$$\text{ou bien,}\ \ \alpha^T A((1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta) > \beta^T A((1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta).$$

Dans ce cas, $\bar{\varepsilon}$ est appelé barrière d'invasion uniforme de la stratégie mutante β.

On note par Δ^{ESS}, l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables (ESS).

Définition 3.4.2. Barrières d'invasion

La barrière d'invasion (uniforme) $\bar{\varepsilon}(\beta)$ d'une stratégie α par une stratégie mutante β est donnée par la relation :

$$\bar{\varepsilon}(\beta) = sup\{\varepsilon \in (0,1) \mid \quad u(\alpha, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta) > u(\beta, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta)\}.$$

Notons par $\bar{\varepsilon}$ la barrière d'invasion de la stratégie α. Cette dernière doit être inférieure à toutes les bornes supérieures des barrières d'invasion associées aux stratégies mutantes, c'est-à-dire

$$\bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}(\beta), \quad \forall\ \beta \in \Delta,\ \beta \neq \alpha. \tag{3.7}$$

La barrière d'invasion $\bar{\varepsilon}$ de la stratégie $\alpha \in \Delta$ est obtenue par la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon} = \inf_{\beta \in \Delta} \{\bar{\varepsilon}(\beta)\}. \tag{3.8}$$

Toute stratégie mutante est inévitablement condamnée à l'éradication, si la proportion des individus dans la population adoptant des stratégies mutantes est inférieure à cette barrière d'invasion $\bar{\varepsilon}$, puisque $\forall\ \beta \in \Delta, \ \ \forall\ \varepsilon < \bar{\varepsilon}$,

$$u(\alpha, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta) > u(\beta, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta).$$

Définition 3.4.3. Une **barrière d'invasion** uniforme $\bar{\varepsilon}$ est dite **faible**, si

$$\bar{\varepsilon}(\beta) = sup\{\varepsilon \in (0,1) \mid \quad u(\alpha, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta) \geq u(\beta, (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta)\},$$

et $\bar{\varepsilon}$ est obtenue par la relation suivante

$$\bar{\varepsilon} = \inf_{\beta \in \Delta} \{\varepsilon(\beta)\}. \tag{3.9}$$

La définition d'une stratégie évolutionnairement stable implique cependant une autre condition pour départager la stratégie mutante β de la stratégie originelle α. Celle-ci survient dans le cas suivant :

$$u(\alpha, \alpha) = u(\beta, \alpha), \quad \beta \neq \alpha.$$

Ce cas suggère que la stratégie mutante peut-être une alternative crédible à un équilibre de Nash symétrique.

Proposition 3.4.1. *[77]**Maynard Smith (1982)***

$$\Delta^{ESS} = \{\alpha \in \Delta^{NE} : u(\beta, \beta) < u(\alpha, \beta) \;\; \forall \beta \in B(\alpha), \;\beta \neq \alpha\},$$

où

$$B(\alpha) = \{\beta \mid u(\beta, \alpha) \geq u(\gamma, \alpha), \quad \forall\, \gamma \in \Delta\}.$$

La proposition suivante formule à nouveau la définition d'une stratégie évolutionnairement stable en reprenant cette condition.

Proposition 3.4.2. *Une stratégie $\alpha \in \Delta$ est une ESS, si et seulement si :*

i) $\forall \beta \in \Delta\ , \quad \alpha^T A \alpha \geq \beta^T A \alpha.$

ii) $\forall \beta \in \Delta, \beta \neq \alpha$, *si :*

$$\alpha^T A \alpha = \beta^T A \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha^T A \beta > \beta^T A \beta.$$

La proposition 3.4.2 correspond à la formalisation initiale des stratégies évolutionnairement stables donnée par J. Maynard Smith. Elle est considérée par certains auteurs comme étant une définition équivalente d'une stratégie évolutionnairement stable. Cette proposition représente une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une stratégie évolutionnairement stable.

On cherche à démontrer l'équivalence entre la définition 3.4.1 (A) et la proposition 3.4.2 (B).

$$A\left(\begin{array}{l} \alpha \in \Delta \texttt{ est une ESS} \Leftrightarrow \forall\, \beta \in \Delta, \quad \exists\, \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\beta) \in (0,1), \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{u(\alpha,(1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta) > u(\beta,(1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta)}_{(1)}. \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$B\left(\begin{array}{ll} \alpha \in \Delta \texttt{ est une ESS} \Leftrightarrow & (i)\ \ \forall\, \beta \in \Delta,\ \ \underbrace{\alpha^T A\alpha \geq \beta^T A\alpha}_{(2)} \\ & (ii)\ \ \forall\, \beta \in \Delta, \beta \neq \alpha, \\ & \ \ \alpha^T A\alpha = \beta^T A\alpha \implies \underbrace{\beta^T A\alpha > \beta^T A\beta}_{(3)} \end{array}\right)$$

Preuve.

$A \Longrightarrow B$

Posons $\varepsilon = 0$ dans (1), on aura :

$$\alpha^T A\alpha > \beta^T A\alpha \qquad \forall \beta \in \Delta, \beta \neq \alpha.$$

Supposons non ii), c'est-à-dire, il existe $\tilde{\beta} \in \Delta, \tilde{\beta} \neq \alpha$ tel que

$$\underbrace{\alpha^T A\alpha = \tilde{\beta}^T A\alpha}_{(4)} \quad \text{et} \quad \underbrace{\alpha^T A\tilde{\beta} \leq \tilde{\beta}^T A\tilde{\beta}}_{(5)}.$$

On multiplie (4) par $(1-\varepsilon)$ et (5) par $\varepsilon > 0$, on obtient après leur addition

$$(1-\varepsilon)\alpha^T A\alpha + \varepsilon\alpha^T A\tilde{\beta} \leq (1-\varepsilon)\tilde{\beta}^T A\alpha + \varepsilon\tilde{\beta}^T A\tilde{\beta}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha^T A[(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\tilde{\beta}] \leq \tilde{\beta}^T A[(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\tilde{\beta}].$$

D'où pour $\tilde{\beta} \in \Delta$, $\forall\, \bar{\varepsilon} > 0$, $\exists\, \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ tel qu'on aura non (1).

$B \Longrightarrow A$

Montrons que $Non\ A) \Longrightarrow Non\ B)$

$$Non\ A) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists\ \ \beta^* \in \Delta\ \ /\ \ \forall \bar{\varepsilon} > 0,\ \ \exists\ \ \varepsilon\ \ \in]0, \bar{\varepsilon}[\ \ / \\ \underbrace{\alpha^T A[(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta^*] \leq \beta^{*T} A[(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta^*]}_{(4)}. \end{array}\right)$$

Soit $\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{k}$, $\exists\ \varepsilon_k \ \in]0, \bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{k}[$ /

$$\alpha^T A[(1-\varepsilon_k)\alpha + \varepsilon_k\beta^*] \leq \beta^{*T} A[(1-\varepsilon_k)\alpha + \varepsilon_k\beta^*].$$

quand $k \longrightarrow \infty$, $\bar{\varepsilon}_k \longrightarrow 0$ et $\varepsilon_k \longrightarrow 0$ et (4) on aura

$$\underbrace{\alpha^T A\alpha \leq \beta^{*T} A\alpha}_{(5)}.$$

Dans (5) on a :

$\rightarrow$ Soit $\alpha^T A\alpha < \beta^{*T} A\alpha \implies Non(2) \implies Non(B)$.

$\rightarrow$ Soit $\underbrace{\alpha^T A\alpha = \beta^{*T} A\alpha}_{(6)}$. Si $\underbrace{\alpha^T A\beta^* < \beta^{*T} A\beta^*}_{(7)}$.

En multipliant (6) par $(1-\varepsilon)$ et (7) par $\varepsilon > 0$, alors on a $[(6) * (1-\varepsilon) + (7) * \varepsilon]$

$\implies \alpha^T A[(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta^*] > \beta^{*T} A[(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\beta^*]$ contradiction avec (4).

Donc, $\alpha^T A\beta^* \leq \beta^{*T} A\beta^* \quad \implies \quad Non(3)$.

■

3.4.2 ESS dans le jeu du Faucon et de la Colombe (Hawk and Dove)

Exemple 3.4.1. (**Jeu du faucon-colombe**)

On dispose d'une très grande population d'animaux (individus) d'une même espèce qui se disputent un territoire. Ces individus se rencontrent aléatoirement par paire (les combats se font par paire) pour jouer un jeu symétrique à deux joueurs. Dans la réalité, les animaux changent souvent leur comportement d'une manière très complexe.

Supposons que dans le jeu symétrique qui l'oppose à un autre individu (joueur) de la population, un individu peut adopter un comportement pacifique : on dira qu'il suit une stratégie du type Colombe (D) ou un comportement agressif : on dira qu'il suit une stratégie de type Faucon (H). Donc, tous les individus ont le même ensemble de stratégies

$$X = \{H, D\}.$$

- H : représente la stratégie faucon (Hawk), qui consiste à combattre à fond jusqu'à ce qu'il gagne (en blessant l'autre ou en le faisant fuir) ou qu'il soit lui même blessé.
- D : représente la stratégie colombe (Dove), qui consiste à combattre conventionnellement et s'enfuir dès que ça devient dangereux, avant d'être blessé.

Deux individus (animaux) pris aléatoirement de la population se disputent un territoire dont la valeur est V. Un individu qui n'obtient pas le territoire aura nécessairement un gain positif ou nul. A la fin de chaque affrontement, un individu jouant la stratégie α et son adversaire jouant la stratégie β, reçoit un gain $u(\alpha, \beta)$. Ce gain est déterminé par les trois facteurs suivants : le gain (gain du territoire), la perte (perte du territoire) si on est blessé, et la perte résultant d'un conflit prolongé évaluée à C.

L'ensemble des stratégies est donné par $X = \{H, D\}$. Les gains de toutes les configurations qui peuvent se présenter sont comme suit :

- Lorsque les deux individus adoptent tous les deux une stratégie D, alors ils partagent pacifiquement le territoire et ne subissent aucune perte, ce qui donnera un gain
$$u(D, D) = \frac{V}{2}.$$
- Lorsque le joueur adopte la stratégie agressive H et son adversaire la stratégie pacifique D, alors il obtiendrait la totalité du territoire.
$$u(H, D) = V.$$
- Lorsque le joueur adopte la stratégie pacifique D et son adversaire la stratégie agressive H, alors il ne gagnerait rien et ne subirait pas de perte.
$$u(D, H) = 0.$$
- Lorsque le joueur adopte la stratégie agressive et son adversaire adopte le même comportement, alors il obtiendrait la moitié du territoire avec une perte dûe aux blessures :
$$u(H, H) = \frac{V}{2} - \frac{C}{2}.$$

Ainsi, la matrice des gains associée est :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{H} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{H} \\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{(V-C)}{2} & \mathrm{V} \\ 0 & \frac{V}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

FIG. 3.2 – Forme stratégique du jeu Faucon-Colombe.

Les équilibres en stratégies pures

L'étude du jeu de manière globale en stratégies pures (sans probabilités), commence premièrement en considérant les configurations $V < C$, $V = C$, $V > C$.

Si $V > C$ **:**

$$u(H,H) = \frac{V-C}{2} > u(D,H) = 0.$$

D'après la définition 2.6.2, (H,H) est un équilibre de Nash strict.

Si $V = C$ **:**

$$0 = \frac{V-C}{2} = u(H,H) = u(D,H) = 0.$$

D'après la définition 2.6.6, (H,H) est un équilibre de Nash.

Si $V < C$ **:**

$$u(H,H) = \frac{V-C}{2} < u(D,H) = 0.$$

D'après la définition 2.6.6, la stratégie (H,H) n'est pas un équilibre de Nash. Par conséquent, H n'est pas une stratégie évolutionnairement stable. Par ailleurs, on a

$$u(D,D) = \frac{V}{2} < u(H,D) = V.$$

D'après la définition 2.6.6, (D,D) n'est pas un équilibre de Nash. Par conséquent, D n'est pas une stratégie évolutionnairement stable. Donc le jeu n'admet pas de stratégie évolutionnairement stable en stratégies pures.

Les équilibres en stratégies mixtes

Nous avons vu, dans l'exemple du Faucon et de la Colombe, que si $V < C$, le jeu n'admet pas de stratégie évolutionnairement stable en stratégies pures.

Supposons maintenant que l'individu va jouer sa stratégie H avec une probabilité ε et sa stratégie D avec une probabilité $(1-\varepsilon)$, donc, il va jouer une stratégie mixte $\alpha = \varepsilon H + (1-\varepsilon)D$.

Dans ce cas, existe-t-il une valeur de ε pour laquelle la stratégie α soit une ESS ? Pour pouvoir répondre à cette question, nous utilisons le théorème suivant prouvé par Bishop et Cannings [11], dans le cadre des jeux finis symétriques à deux joueurs, où l'ensemble des stratégies pures des deux joueurs est $X = X_1 = X_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Théorème 3.4.3. *[51](Bishop et Cannings, 1978)*
Si $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*) \in \Delta$ *avec* $\alpha_i^* > 0, \ \forall\ i = \overline{1,n}$ *est un ESS, alors :*

$$u(x_1, \alpha^*) = u(x_2, \alpha^*) = \ldots = u(x_n, \alpha^*) = u(\alpha^*, \alpha^*). \tag{3.10}$$

Preuve. notons qu'une stratégie pure $x_i \in X$ peut être considérée comme une stratégie mixte

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}\text{position}}, 0, \ldots, 0) \in \Delta.$$

Soit $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*) \in \Delta$ avec $\alpha_i^* > 0, \ \forall\ i = \overline{1,n}$ une ESS. D'après la proposition 3.4.2, i),

$$e_i^T A\alpha^* = u(x_i, \alpha^*) \leq u(\alpha^*, \alpha^*) = \alpha^{*T} A\alpha^*, \quad \forall\ i = \overline{1,n}. \tag{3.11}$$

Supposons qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$e_j^T A\alpha^* < \alpha^{*T} A\alpha^*. \tag{3.12}$$

En multipliant (3.11) par $\alpha_i^*, \ \ i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ et (3.12) par α_j^*, et en faisant la somme, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \ e_i^T A\alpha^* < (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^*)(\alpha^{*T} A\alpha^*).$$
$$\Longrightarrow \quad \alpha^{*T} A\alpha^* \ < \ \alpha^{*T} A\alpha^*,$$

Ce qui est absurde.

■

Remarque 3.4.1. Si $u(x_1, \alpha) > u(x_2, \alpha)$ alors il est intéressant d'adopter plus souvent la stratégie x_1 et moins souvent x_2. Si c'est le cas, la stratégie α n'est plus une ESS. Cependant, si α est une ESS, les paiements attendus par les différentes stratégies composant α doivent être égaux.

Exemple 3.4.2. (**Jeu du Faucon-Colombe**)
On a vu dans l'exemple 3.4.1, que le jeu du faucon-colombe peut admettre des stratégies évolutionnairement stables en stratégies pures, lorsque $V > C$ ou $V = C$. Lorsque $V < C$, le jeu n'admet pas des stratégies évolutionnairement stables en stratégies pures, donc on va chercher si le jeu admet des stratégies évolutionnairement stables en stratégies mixtes.

Soient $\varepsilon > 0$ et la stratégie mixte $\alpha = (\varepsilon, 1-\varepsilon)$, tel que ε est la probabilité de jouer la stratégie H et $(1-\varepsilon)$ est la probabilité de jouer la stratégie D. On applique le théorème 3.4.3 pour vérifier s'il existe une stratégie évolutionnairement stable en stratégies mixtes dans le jeu du Faucon-Colombe.

Donc, il faut déterminer une valeur de ε pour laquelle la stratégie $\alpha = \varepsilon H + (1-\varepsilon)D$ soit une ESS. D'après le théorème 3.4.3, pour que α soit une ESS, il est nécessaire que :

$$u(H, \alpha) = u(D, \alpha) = u(\alpha, \alpha),$$

$$u(H, \varepsilon H + (1-\varepsilon)D) = u(D, \varepsilon H + (1-\varepsilon)D) = u(\varepsilon H + (1-\varepsilon)D, \varepsilon H + (1-\varepsilon)D).$$

Par conséquent,

$$\varepsilon u(H, H) + (1-\varepsilon)u(H, D) = \varepsilon u(D, H) + (1-\varepsilon)u(D, D), \tag{3.13}$$

ce qui donne,

$$\frac{1}{2}(V-C)\varepsilon + V(1-\varepsilon) = \frac{1}{2}V(1-\varepsilon). \tag{3.14}$$

D'où

$$\varepsilon = \frac{V}{C}. \tag{3.15}$$

Donc la stratégie mixte α s'écrit sous la forme

$$\alpha = \left(\tfrac{V}{C}\right) H + \left(1 - \tfrac{V}{C}\right) D.$$

D'après le théorème 3.4.3, pour que la stratégie mixte $\alpha = \varepsilon H + (1-\varepsilon)D$ soit évolutionnairement stable, il est nécessaire que $\varepsilon = \frac{V}{C}$, autrement dit il est nécessaire que $\alpha = \left(\frac{V}{C}\right) H + \left(1 - \frac{V}{C}\right) D$.

Montrons que α satisfait les conditions de la proposition 3.4.2 :

- La condition de stabilité de α face à la stratégie D. Vérifions si on a :

$$u(\alpha, D) > u(D, D) \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} u(\alpha, D) &= \varepsilon u(H, D) + (1-\varepsilon)u(D, D), \\ &= \varepsilon V + (1-\varepsilon)\frac{V}{2}, \\ &= \frac{V}{2} + \frac{V}{2}\varepsilon, \\ &= (1+\varepsilon)\frac{V}{2}. \end{aligned}$$

On a $u(D,D) = \frac{V}{2}$. Donc $u(\alpha, D) > u(D,D)$. Par conséquent, α est stable face à la stratégie D.

- La condition de stabilité de α face à la stratégie H. Vérifions si on a :

$$u(\alpha, H) > u(H,H) \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} u(\alpha, H) &= \varepsilon u(H,H) + (1-\varepsilon)u(D,H), \\ &= \varepsilon\frac{V-C}{2} + (1-\varepsilon)(0), \\ &= \varepsilon\frac{V-C}{2}. \end{aligned}$$

On a, $u(H,H) = \frac{V-C}{2}$.

$$\begin{aligned} u(\alpha, H) - u(H,H) &= \varepsilon\frac{V-C}{2} - \frac{V-C}{2}, \\ &= \underbrace{(\varepsilon - 1)}_{<0}\underbrace{\frac{V-C}{2}}_{<0}. \end{aligned}$$

Donc, $u(\alpha, H) > u(H,H)$. Par conséquent, α est stable face à la stratégie H.

Donc, on peut déduire que la stratégie mixte $\alpha = (\frac{V}{C}, 1-\frac{V}{C})$ est une stratégie évolutionnairement stable. Maynard Smith indique que dans le cas où le coût du combat est supérieur à la récompense d'une victoire, il est recommandé d'utiliser une stratégie mixte. Dans ce contexte biologique, la réalisation d'une ESS mixte dépend de l'hypothèse qu'un génotype peut exister avec une probabilité spécifique et donne une espèce réelle.

Remarque 3.4.2. La stratégie mixte, dans le cas d'un jeu ayant une matrice A.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathrm{I} & \mathrm{J} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{J} \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

FIG. 3.3 – Forme stratégique d'un jeu symétrique avec deux stratégies pures.

D'après l'équation (3.13), nous avons :

$$\varepsilon\ u(I,I) + (1-\varepsilon)\ u(I,J) = \varepsilon\ u(J,I) + (1-\varepsilon)\ u(J,J),$$

$$\Rightarrow\ \ \varepsilon\ a + (1-\varepsilon)\ b = \varepsilon\ c + (1-\varepsilon)\ d,$$

$$\Rightarrow\ \ \varepsilon\ (b + c - a - d) = b - d,$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{b-d}{b+c-a-d}.$$

L'ESS consiste à adopter une stratégie I avec une probabilité

$$\varepsilon = \frac{(b-d)}{(b+c-a-d)}. \tag{3.18}$$

Comme $\varepsilon > 0$, alors on a

$$\begin{cases} b-d > 0, \\ b+c-a-d > 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a < c, \\ d < b. \end{cases}$$

Alors, il existe une stratégie évolutionnairement stable mixte si $a < c$ et $d < b$.

Remarque 3.4.3. A priori, l'interprétation d'un équilibre en stratégies mixtes dans le cadre d'un modèle statique n'est guère évidente, mais elle présente un grand intérêt dans la perspective évolutionnaire. Cet équilibre décrit une situation où les probabilités sont les proportions de la population d'équilibre ayant respectivement un comportement conciliant et un comportement agressif. Toute autre répartition de la population ne constituera pas une ESS en ce sens que, pour cette autre répartition de la fraction des individus adoptant la stratégie pure qui correspond à une espérance de gain moindre tendrait à se réduire, jusqu'à ce qu'il y ait égalité entre les gains attendus des deux stratégies. Dans cette interprétation, l'état d'équilibre requiert la coexistence de comportements différents : la sélection n'aboutit pas à éliminer un type au profit de l'autre, car chacun ne doit pas être trop généralisé dans la population [83].

3.5 Comparaison

On présente ce qui suit, une comparaison entre la théorie des jeux classique et la théorie des jeux évolutionnaires.

	Théorie des jeux classique	Théorie des jeux évolutionnaires
Objectif	Résoudre un conflit.	Etude des dynamiques de l'évolution.
Hypothèses principales	- Comportement très rationnel pour chaque individu. - Théorie statique.	- Rationalité faible. - Population infinie. - Théorie dynamique.
Notions de base	- Équilibre et en particulier l'équilibre de Nash.	- Stratégie évolutionnairement stable. - Etat stable d'une population.
Caractéristiques	- Jeux à un seul coup. - Jeux répétés.	- Combat par paire d'individus. - Utilisation des stratégies mixtes.
Problèmes	- Il existe des jeux sans équilibre de Nash. - Il existe des jeux avec plusieurs équilibres de Nash. - Un équilibre de Nash conduit vers une solution sous-optimale. - Dans la vie réelle, les individus ne sont pas souvent rationnels.	- Approche complètement théorique. - Non automatisable. - Simplification du monde réel. - Les combats ne se font pas toujours par paire.

3.6 Conclusion

Nous avons introduit, dans ce chapitre, la théorie des jeux évolutionnaires qui constitue aujourd'hui un pilier essentiel de la théorie des jeux, et qui a révolutionné notre compréhension à la fois de certains phénomènes biologiques et de la théorie des jeux classique elle-même. Nous avons montré que l'idée principale sous-jacente aux jeux évolutionnaires est que ce n'est plus la rationalité de chaque individu qui le pousse à adapter son comportement aux stratégies de ses adversaires, mais une évolution propre à l'ensemble de la population à laquelle il appartient, et dont il est simplement un acteur parmi d'autres. Nous avons introduit le concept de base d'équilibre ou de solution spécifique à la théorie des jeux évolutionnaires, celui de stratégie évolutionnairement stable (ESS). Nous avons illustré cette notion à l'aide d'un célèbre jeu celui du Faucon et de la colombe.

Chapitre 4

Caractérisation des stratégies évolutionnairement stables

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques propriétés et caractéristiques des stratégies évolutionnairement stables puis nous énonçons un théorème sur la relation entre le concept de stratégie évolutionnairement stable et celui de réplication dynamique.

4.1 Propriétés des stratégies évolutionnairement stables

4.1.1 Propriétés

Propriété 4.1.1. $(\alpha^*, \alpha^*) \in \Delta \times \Delta$ *est un équilibre de Nash dans le jeu (3.4) si et seulement si*

$$u(\alpha^*, \alpha^*) = \alpha^{*T} A \alpha^* \geq \beta^T A \alpha^* = u(\beta, \alpha^*), \quad \forall \beta.$$

Preuve. $(\alpha^*, \alpha^*) \in \Delta^2$ est un équilibre de Nash $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(\alpha^*, \alpha^*) \geq u_1(\beta, \alpha^*), & \forall \beta \in \Delta, \\ u_2(\alpha^*, \alpha^*) \geq u_2(\alpha^*, \beta), & \forall \beta \in \Delta. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u(\alpha^*, \alpha^*) \geq u(\beta, \alpha^*), & \forall \beta \in \Delta, \\ u(\alpha^*, \alpha^*) \geq u(\alpha^*, \beta), & \forall \beta \in \Delta. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow u(\alpha^*, \alpha^*) \geq u(\beta, \alpha^*), \quad \forall \beta \in \Delta.$$

■

De la propriété 4.1.1 et de la proposition 3.4.2, on déduit :

Corollaire 4.1.2. *[16]*
Si une stratégie $\alpha \in \Delta$ est une ESS, alors $\alpha \in \Delta^{NE}$.

On note par Δ^{EN}, l'ensemble des stratégies d'équilibre de Nash.

Remarque 4.1.1. Comme toute stratégie évolutionnairement stable est un équilibre de Nash, alors on peut considérer que la notion de stratégies évolutionnairement stables est une forme de raffinement de l'équilibre de Nash.

$$\Delta^{ESS} \quad \subset \quad \Delta^{EN}.$$

Exemple 4.1.1. Soit un jeu à deux joueurs. L'ensemble des stratégies pures des joueurs est $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. La matrice des gains associée à ce jeu est :

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad x_1 & \quad\quad x_2 & \quad\quad x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (15,15) & (11,15) & (11,15) \\ (15,11) & (12,12) & (11,11) \\ (15,11) & (11,11) & (10,10) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ce jeu est symétrique puisque $X_1 = X_2$ et $u_1(x_i, x_j) = u_2(x_j, x_i)$, $\forall\, i = \overline{1,3}$, $\forall\, j = \overline{1,3}$. L'ensemble des équilibres de Nash du jeu en stratégies pures est

$$\Delta^{NE} = \{(x_1, x_1)\}.$$

La stratégie x_1 est la seule stratégie candidate à être une stratégie évolutionnairement stable. Si on pose $u(x_i, x_j) = u_1(x_1, x_j)$, $\forall i = \overline{1,3}$, $\forall\, j = \overline{1,3}$ pour que x_1 soit une ESS , il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

i) $\forall y \in X, u(x_1, x_1) \geq u(y, x_1)$.

ii) $\forall y \in X,\ y \neq x$, tel que $u(x_1, x_1) = u(y, x_1)$ on a $u(x_1, y) > u(y, y)$.

Comme (x_1, x_1) est un équilibre de Nash, alors la condition $i)$ de la proposition 3.4.2est vérifiée.

Considérons $y = x_2$. On a $u(x_1, x_1) = 15 = u(x_2, x_1)$, mais $u(x_1, x_2) = 11 < 12 = u(x_2, x_2)$. Donc la condition $ii)$ de la proposition 3.4.2 n'est pas vérifiée. et x_1 n'est pas une ESS. D'où

$$\Delta^{ESS} = \varnothing.$$

Proposition 4.1.3. *[86]*
Si $\alpha \in \Delta$ est faiblement dominée, alors $\alpha \notin \Delta^{ESS}$.

Preuve.

Montrons que si $\alpha^* \in \Delta$ est faiblement dominée, alors $\alpha^* \notin \Delta^{ESS}$.

Par définition, $\alpha^* \in \Delta$ est faiblement dominée, s'il existe $\alpha \in \Delta$, $\alpha \neq \alpha^*$ telle que

$$u(\alpha, \beta) \geq u(\alpha^*, \beta), \qquad \forall \beta \in \Delta. \tag{4.1}$$

En posant $\beta = \alpha^*$ dans (4.1), on aura :

$$u(\alpha, \alpha^*) \geq u(\alpha^*, \alpha^*), \qquad \forall \beta \in \Delta. \tag{4.2}$$

→ Si dans (4.2), on a l'inégalité stricte, alors la condition i) de la proposition 3.4.2 n'est pas vérifiée et $\alpha^* \notin \Delta^{ESS}$.

→ Si dans (4.2), on a l'égalité, ie

$$u(\alpha, \alpha^*) = u(\alpha^*, \alpha^*).$$

En posant $\beta = \alpha$ dans (4.1), on aura

$$u(\alpha, \alpha) \geq u(\alpha^*, \alpha).$$

La condition *ii*) de la proposition 3.4.2 n'est pas vérifiée et donc $\alpha^* \notin \Delta^{ESS}$.

Ainsi, dans les deux cas $\alpha^* \notin \Delta^{ESS}$.

■

Salten ([74], [75]) montre que l'équilibre de Nash strict est une ESS, c'est-à-dire que la stratégie de l'équilibre de Nash strict est l'unique meilleure réponse à elle-même.

La proposition suivante est une condition suffisante pour l'existence d'une stratégie évolutionnairement stable.

Proposition 4.1.4. *[10] Si la stratégie α est un équilibre de Nash strict, alors α est une ESS.*

Preuve.

α^* est un équilibre de Nash strict dans un jeu symétrique à deux joueurs, si

$$u(\alpha^*, \alpha^*) > u(\alpha, \alpha^*), \qquad \forall\, \alpha \in \Delta, \alpha \neq \alpha^*. \tag{4.3}$$

De (4.3), la condition i) de la proposition 3.4.2 est vérifiée.

Les conditions de réalisation de l'assertion ii) de la proposition 3.4.2 ne seront jamais vérifiées, puisque, d'après (4.3), il n'existe pas de $\alpha \in \Delta$ tel que $u(\alpha^*, \alpha^*) = u(\alpha, \alpha^*)$. D'où α^* est une ESS.

■

Exemple 4.1.2. Jeu du Faucon-Colombe

Reprenons l'exemple du jeu du faucon-colombe et la matrice des gains associée :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{H} & \text{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{H} \\ \text{D} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{(V-C)}{2} & \text{V} \\ 0 & \frac{V}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

FIG. 4.1 – Forme stratégique du jeu Faucon-Colombe.

- Supposons $V > C$:

  La stratégie H sera une stratégie dominante, si elle vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(H,H) \geq u(D,H), & (1) \\ u(H,D) \geq u(D,D), & (2) \\ u(H,H) \geq u(H,H), & (3) \\ u(H,D) \geq u(H,D). & (4) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (3) et (4) & \text{est évidente,} \\ \frac{V-C}{2} \geq 0 & \Longrightarrow \text{ (1) est vérifiée,} \\ V \geq \frac{V}{2} & \Longrightarrow \text{ (2) est vérifiée, .} \end{cases}$$

  D'où H est dominante.

  D'autre part, on a

$$\begin{cases} u(H,H) = \frac{V-C}{2} > 0, \\ u(D,H) = 0. \end{cases} \Longrightarrow u(D,H) = 0 < \frac{V-C}{2} = u(H,H)$$

  D'où H est un équilibre de Nash strict.

  D'après la proposition 4.1.4, la stratégie H est une stratégie évolutionnairement stable.

  Puisque H est une stratégie dominante et que c'est un équilibre de Nash strict, d'après la proposition 4.1.4, la stratégie H est une ESS.

- Supposons $V < C$. Le traitement de l'exemple 3.4.2 a montré que l'unique équilibre de Nash en stratégies mixtes est $\alpha = \left(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C}\right)$.

  Pour vérifier si la stratégie α est une stratégie évolutionnairement stable, il suffit de vérifier si la condition (ii) de la proposition 3.4.2 est satisfaite.

  Soit $\beta \in \Delta,\ \beta \neq \alpha$ on a alors :

$$
\begin{aligned}
\alpha^T A\beta - \beta^T A\beta &= (\alpha_H, \alpha_D)A(\beta_H, \beta_D)^T - (\beta_H, \beta_D)A(\beta_H, \beta_D)^T,\\
&= (\alpha_H(\frac{V-C}{2}), \alpha_H V + \alpha_D \frac{V}{2})(\beta_H, \beta_D)^T - (\beta_H(\frac{V-C}{2}), \beta_H V + \beta_D \frac{V}{2})(\beta_H, \beta_D)^T,\\
&= \alpha_H \beta_H(\frac{V-C}{2}) + \alpha_H \beta_D V + \alpha_D \beta_D \frac{V}{2} - \beta_H \beta_H(\frac{V-C}{2}) - \beta_H \beta_D V - \beta_D \beta_D \frac{V}{2},\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\beta_H(\frac{V-C}{2}) + \beta_D V) + (\alpha_D - \beta_C)(\beta_D \frac{V}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\beta_H(\frac{V-C}{2}) + \beta_D V) + ((1-\alpha_H) - (1-\beta_H))(\beta_D \frac{V}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\beta_H(\frac{V-C}{2}) + \beta_D V) + (\beta_H - \alpha_H)(\beta_D \frac{V}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\beta_H(\frac{V-C}{2}) + \beta_D V - \beta_D \frac{V}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\beta_H(\frac{V-C}{2}) + \beta_D \frac{V}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\frac{\beta_H(V-C) + \beta_D V}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\frac{\beta_H V - \beta_H C + \beta_D V}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\frac{(\beta_H + \beta_D)V - \beta_H C}{2}),\\
&= (\alpha_H - \beta_H)(\frac{V - \beta_H C}{2}).
\end{aligned}
$$

Puisque $\alpha_H = \frac{V}{C}$, cela implique que :

$$
\begin{aligned}
\alpha^T A\beta - \beta^T A\beta &= (\alpha_H - \beta_H)(\frac{V - \beta_H C}{2}),\\
&= (\frac{V}{C} - \beta_H)(\frac{V - \beta_H C}{2}),\\
&= (\frac{V - \beta_H C}{C})(\frac{V - \beta_H C}{2}),\\
&= \frac{1}{2C}(V - \beta_H C)^2 \ > \ 0.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\alpha^T A\beta > \beta^T A\beta.$$

D'où la condition ii) de la proposition 3.4.2 est vérifiée, donc, $\alpha = \left(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C}\right)$ est une stratégie évolutionnairement stable.

Exemple 4.1.3. Considérons la matrice des gains associée à un jeu fini à deux joueurs symétrique (2.10) suivante :

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit la matrice des gains suivante :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

où, $a_1 = b_{11} - b_{21}$ et $a_2 = b_{22} - b_{12}$ et supposons que $a_1 a_2 \neq 0$.

Catégorie I, IV : Si a_1 et a_2 ont des signes opposés, alors le jeu a exactement un seul équilibre de Nash qui est de plus strict. Par conséquent, d'après la proposition 4.1.4, le même jeu admet une seule ESS. D'une manière plus explicite,

$$\Delta^{ESS} = \Delta^{NE} = \{x_1\} \text{ si } a_1 > 0 \text{ et } a_2 < 0 \qquad \text{(Catégorie I).}$$

et

$$\Delta^{ESS} = \Delta^{NE} = \{x_2\} \text{ si } a_1 < 0 \text{ et } a_2 > 0 \qquad \text{(Catégorie IV).}$$

Catégorie II : Si a_1 et a_2 sont tous les deux positifs, alors nous avons trois équilibres de Nash qui sont

$$\Delta^{NE} = \{x_1, x_2, \alpha\},$$

où $\alpha = \varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2$, avec $\varepsilon = \frac{a_2}{a_1+a_2}$.

Puisque

$$\begin{aligned} \max_{\varepsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix} &= \max_{\varepsilon} (\varepsilon a_1, (1-\varepsilon)a_2) \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix}, \\ &= \max_{\varepsilon} (\varepsilon^2 a_1 + (1-\varepsilon)^2 a_2). \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^2 a_1 + (1-\varepsilon)^2 a_2) = 0 \Longrightarrow 2\ \varepsilon a_1 - 2\ (1-\varepsilon)a_2 = 0 \Longrightarrow \varepsilon = \frac{a_2}{a_1+a_2}$,

et $\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\left[\varepsilon^2 a_1 + (1-\varepsilon)^2 a_2\right] = 2(a_1+a_2) > 0$, alors effectivement $\varepsilon = \frac{a_2}{a_1+a_2}$.

Chacun des deux équilibres en stratégies pures sont stricts, ainsi x_1 et x_2 sont évolutionnairement stables.

Cependant, α n'est pas une ESS. En effet, si on prend la stratégie mixte

$$\beta = (1,0) \iff \beta = x_1$$

on a :

$$\alpha^T A\alpha = (\varepsilon, 1-\varepsilon)\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2},$$

et

$$\beta^T A\alpha = (1,0)\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix} = a_1\varepsilon = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2}.$$

D'où

$$\alpha^T A\alpha = \beta^T A\alpha,$$

mais

$$\alpha^T A\beta = (\varepsilon, 1-\varepsilon)\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\varepsilon = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2}.$$

$$\beta^T A\beta = (1,0)\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1,$$

et

$$\alpha^T A\beta = \varepsilon a_1 < a_1 = \beta^T A\beta,$$

et d'après la proposition 3.4.2, α n'est pas une ESS. Par conséquent, on a :

$$\Delta^{ESS} = \{x_1, x_2\}.$$

Catégorie III : Si a_1 et a_2 sont tous les deux négatifs, alors nous avons deux équilibres de Nash asymétriques et un équilibre de Nash symétrique.

$$\Delta^{NE} = \{(x_2, x_1), (x_1, x_2), \alpha\},$$

où $\alpha = \varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2$.

Cependant, cette stratégie α est évolutionnairement stable, puisque pour tout $\beta \in \Delta$, on a

$$u(\alpha,\alpha) = \alpha^T A\alpha = \frac{a_1 a_2}{a_1+a_2} = \beta^T A\alpha = u(\beta,\alpha),$$

et

$$\begin{aligned}
u(\alpha,\beta) &= \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \\
&= (\varepsilon, 1-\varepsilon) \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \\
&= (\varepsilon a_1, (1-\varepsilon)a_2) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \\
&= \varepsilon a_1\beta_1 + (1-\varepsilon)a_2\beta_2, \\
&= \left(\tfrac{a_2}{a_1+a_2} \right) a_1\beta_1 + \left(\tfrac{a_1}{a_1+a_2} \right) a_2\beta_2, \\
&= \left(\tfrac{a_2 a_1}{a_1+a_2} \right) \beta_1 + \left(\tfrac{a_1 a_2}{a_1+a_2} \right) \beta_2, \\
&= \left(\tfrac{a_2 a_1}{a_1+a_2} \right) (\beta_1 + \beta_2), \\
&= \left(\tfrac{a_2 a_1}{a_1+a_2} \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u(\beta,\beta) &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \\
&= (\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \\
&= (\beta_1 a_1, \beta_2 a_2) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \\
&= a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$u(\beta,\beta) = a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2 < \left(\tfrac{a_2 a_1}{a_1+a_2} \right) = u(\alpha,\beta).$$

La stratégie α vérifie la condition ii) de la proposition 3.4.2. Par conséquent,

$$\Delta^{ESS} = \{\alpha\}.$$

4.1.2 Stratégies neutralement stables

L'absence de stratégie évolutionnairement stable dans un grand nombre de jeux constitue la principale faiblesse du concept d'ESS. Pour y remédier, J. Maynard Smith [77] a introduit le concept de stratégie neutralement stable (NSS), où il est permis à des joueurs adoptant des stratégies mutantes de réaliser un gain au plus égal à celui obtenu par des joueurs adoptant la stratégie originelle [83].

Définition 4.1.1. [30]
Une stratégie $\alpha \in \Delta$ est une **Stratégie Neutralement Stable (NSS)**, si :

$$\forall\, \beta \in \Delta, \quad \exists\, \bar{\varepsilon} \in (0,1) \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}), \quad u(\alpha,(1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta) \geq u(\beta,(1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta).$$

On note par Δ^{NSS} l'ensemble des stratégies neutralement stables (NSS).

Cette définition de l'équilibre ne demande pas à α d'être meilleure que les stratégies mutantes dans la situation post-mutation, mais simplement de ne pas être inférieure à celles-ci.

Nous pouvons, comme pour une ESS, définir une barrière d'invasion faible qui convient à toutes les stratégies mutantes β.

La proposition suivante nous donne la relation entre l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables (ESS), l'ensemble des stratégies d'équilibre de Nash (EN) et l'ensemble des stratégies neutralement stables (NSS).

Proposition 4.1.5. *On a*

$$\Delta^{ESS} \quad \subset \quad \Delta^{NSS} \quad \subset \quad \Delta^{EN}.$$

4.1.3 Stratégies évolutionnairement robustes

Swinkels a développé, pour sa part dans [80], le concept de stratégie robuste face aux entrants en équilibre (REE). L'idée provient d'un constat simple : la stabilité évolutionnaire n'établit aucune restriction sur les stratégies mutantes. Or, dans un environnement où les modifications de stratégies peuvent être le fait d'expérimentations dûes à des petits groupes d'individus, il paraît raisonnable de définir une robustesse à l'intrusion des seules stratégies en mesure de devenir optimales après avoir été introduites dans la population.

Alors que la stabilité évolutionnaire ne requiert aucune rationalité des individus qui adoptent une stratégie mutante, Swinkels les dotes de capacité à choisir une stratégie optimale et propose un critère de robustesse valable uniquement à l'encontre de ces stratégies. Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 4.1.2. (**Stratégie robuste face aux entrants en équilibre (REE)**)[86]
La stratégie $\alpha \in \Delta$ est une stratégie robuste face aux entrants en équilibre (REE), s'il existe $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$ tel que $\forall \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$, $\forall \beta \in \Delta$, $\beta \neq \alpha$, on a :

$$\beta \notin B((1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta),$$

où

$$B((1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta)=\{\gamma\in\Delta \ / \ \ u(\gamma,(1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta)\geq u(\eta,(1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta), \ \ \forall\eta\in\Delta\}.$$

C'est à dire que, la stratégie β n'est pas une meilleure réponse à la stratégie mixte $((1-\varepsilon)\alpha+\varepsilon\beta)$.

On note par Δ^{REE}, l'ensemble des stratégies robustes face aux entrants en équilibre (REE).

Cela signifie qu'aucune stratégie mutante ne peut être optimale dans l'éventuelle situation post-mutation qui en résulterait, pour une part de stratégies mutantes suffisamment faible dans cette nouvelle situation. Cette notion est surtout utile pour faire le lien entre la théorie des jeux évolutionnaires et l'économie, car elle indique que, si la situation initiale α est une REE, alors un petit groupe d'individus doués de réflexion ne se mettrait pas à jouer la stratégie mutante β, car cette stratégie ne serait pas optimale dans la nouvelle situation qui adviendrait, et cela $\forall \ \ \beta\neq\alpha$.

La proposition suivante nous donne la relation entre l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables (ESS), l'ensemble des stratégies d'équilibre de Nash (EN) et l'ensemble des stratégies robustes face aux entrants en équilibre (REE).

Proposition 4.1.6. *[86] On a :*

$$\Delta^{ESS} \ \subset \ \Delta^{REE} \ \subset \ \Delta^{EN}$$

4.1.4 Caractérisation des ESS

Définition 4.1.3. [10] Une stratégie $\alpha\in\Delta$ est une stratégie **localement supérieure "LSS"** (Locally Superior Strategy), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}(\alpha)$ de α dans Δ tel que :

$$\forall\ \beta\in\mathcal{V}(\alpha)\setminus\{\alpha\}, \ \ u(\alpha,\beta)>u(\beta,\beta). \tag{4.4}$$

Définition 4.1.4. [10] Une stratégie $\alpha\in\Delta$ est une stratégie **faiblement localement supérieure**, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}(\alpha)$ de α dans Δ tel que :

$$\forall\ \beta\in\mathcal{V}(\alpha)\setminus\{\alpha\}, \ \ u(\alpha,\beta)\geq u(\beta,\beta). \tag{4.5}$$

Définition 4.1.5. Une stratégie $\alpha\in\Delta$ localement supérieure est appelée une **stratégie évolutionnairement robuste "ERS"** (Evolutionary Robust Strategy).

Il sera souligné que le concept de stratégie LSS dépend de la topologie utilisée sur Δ, qui est une issue non triviale dans les cas infinis, par conséquent, la détermination d'une ERS. Le concept de stratégie LSS est plus fort que le concept de stratégie ESS, comme le montre le résultat suivant :

Proposition 4.1.7. *[86]*

$\alpha \in \Delta^{ESS}$, si et seulement si α est localement supérieure.

Preuve.

"$\Leftarrow$"

Supposons que $\alpha \in \Delta$ est une stratégie localement supérieure, par définition, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ de α tel que $u(\alpha, \beta) > u(\beta, \beta)$ pour tout $\beta \neq \alpha$, $\beta \in \Delta \cap \mathcal{V}$.

Pour $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \in \Delta$, il existe alors un certain $\bar{\varepsilon}_\gamma \in (0, 1)$ tel que $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_\gamma)$, $\omega = \varepsilon\gamma + (1 - \varepsilon)\alpha \in \mathcal{V}$.

Par hypothèse, nous avons $u(\alpha, \omega) > u(\omega, \omega)$.

Puisque la fonction u est linéaire, on aura :

$$u(\omega, \omega) = u(\varepsilon\gamma + (1 - \varepsilon)\alpha, \omega) = \varepsilon u(\gamma, \omega) + (1 - \varepsilon)u(\alpha, \omega).$$

Puisque

$$\begin{aligned}
u(\alpha, \omega) &> u(\omega, \omega), \\
u(\alpha, \omega) &> \varepsilon u(\gamma, \omega) + (1 - \varepsilon)u(\alpha, \omega), \\
u(\alpha, \omega) &> \varepsilon u(\gamma, \omega) + u(\alpha, \omega) - \varepsilon u(\alpha, \omega), \\
0 &> \varepsilon u(\gamma, \omega) + u(\alpha, \omega) - \varepsilon u(\alpha, \omega) - u(\alpha, \omega), \\
0 &> \varepsilon u(\gamma, \omega) - \varepsilon u(\alpha, \omega), \\
0 &> \varepsilon[u(\gamma, \omega) - u(\alpha, \omega)], \\
u(\alpha, \omega) &> u(\gamma, \omega).
\end{aligned}$$

Puisque $\omega = \varepsilon\gamma + (1 - \varepsilon)\alpha$, on aura :

$$u(\alpha, \varepsilon\gamma + (1 - \varepsilon)\alpha) > u(\gamma, \varepsilon\gamma + (1 - \varepsilon)\alpha).$$

Donc, $\alpha \in \Delta^{ESS}$.

"$\Rightarrow$"

Supposons que $\alpha \in \Delta^{ESS}$, soit $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$ une barrière d'invasion uniforme. Soit $Z_\alpha \subset bd(\Delta)$ tel que $bd(\Delta)$ est l'union de toutes les frontières des faces de Δ ne contenant pas α.

$$Z_\alpha = \{z \in \Delta, z_i = 0, \forall\ i \in C(x)\}.$$

Soit

$$\mathcal{D} = \{\beta \in \Delta, \beta = \varepsilon\gamma + (1-\varepsilon)\alpha, \forall z \in Z_\alpha, \forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})\}.$$

Alors Z_α est un ensemble fermé ne contenant pas α. Il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ de α tel que

$$\mathcal{V} \cap \Delta \subset \mathcal{D}.$$

Supposons que $\beta \neq \alpha$, $\beta \in \mathcal{V} \cap \Delta$. Alors $\beta \in \mathcal{D}$, et

$$u(\gamma, \beta) < u(\alpha, \beta), \tag{4.6}$$

où γ est définit de la même façon que dans la définition de l'ensemble $\mathcal{D}$. Puisque la fonction u est linéaire, l'inégalité (4.6) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$u(\beta, \beta) < u(\alpha, \beta).$$

D'où, la stratégie α est localement supérieure.

La proposition suivante nous donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une stratégie neutralement stable.

Proposition 4.1.8. *Une stratégie α est une NSS si et seulement si elle est faiblement localement supérieure.*

Proposition 4.1.9. *Pour une stratégie $\alpha \in \Delta$, les trois cas suivants sont équivalents*

1. $\alpha \in \Delta^{ESS}$.
2. *α a une faible barrière d'invasion uniforme.*
3. *α est faiblement localement supérieure.*

4.1.5 Structure de l'ensemble des ESS

Le théorème suivant, qui porte sur le support des ESS, est absolument fondamental. Il permet de prouver la finitude de l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables Δ^{ESS} et donne même un critère simple suffisant pour affirmer l'unicité d'une ESS.

Théorème 4.1.10. *[86](**Support des ESS**)*
Soit C une correspondance de $\Delta \longrightarrow \Delta$.
Si $\alpha \in \Delta^{ESS}$ et $C(\beta) \subset C(\alpha)$ $\forall \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$, alors $\beta \notin \Delta^{NE}$.

Le nombre de stratégies évolutionnairement stables est fini (peut être nul). Nous établirons le résultat suivant.

Corollaire 4.1.11. *[86]*
L'ensemble $\Delta^{ESS} \subset \Delta$ est un ensemble fini.

Corollaire 4.1.12. *[30]*
S'il existe une ESS $\alpha \in int(\Delta)$, alors cette ESS est unique.

4.1.6 Efficacité dans les jeux doublement symétriques

Les jeux doublement symétriques servent à modéliser les interactions "coopératives" . Dans ce cadre, nous pouvons nous poser la question de savoir si l'évolution favorise les stratégies qui seront les plus efficaces ou non. Pour cela, nous introduisons la notion d'efficacité :

Définition 4.1.6. [30](**Efficacité**)
La stratégie $\alpha \in \Delta$ est dite :

- localement strictement efficace, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de α tel que

$$\forall \beta \in \mathcal{V},\ \beta \neq \alpha \quad u(\alpha,\alpha) > u(\beta,\beta).$$

- localement faiblement efficace, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de α tel que

$$\forall \beta \in \mathcal{V},\ \beta \neq \alpha, \quad u(\alpha,\alpha) \geq u(\beta,\beta).$$

- globalement efficace, si $\forall \beta \in \Delta \quad u(\alpha,\alpha) \geq u(\beta,\beta)$.

Les stratégies globalement efficaces sont les stratégies optimales.

La proposition suivante fait le lien entre efficacité et ESS (dans le cas des jeux doublement symétriques).

Proposition 4.1.13. *[86] Une stratégie $\alpha \in \Delta^{ESS}$ si et seulement si α est localement strictement efficace.*

Proposition 4.1.14. *Une stratégie $\alpha \in \Delta^{NSS}$ si et seulement si α est localement faiblement efficace.*

4.2 Etude dynamique

La théorie des jeux évolutionnaires est une théorie qui permet de modéliser explicitement la dynamique présente dans les interactions entre les joueurs. Cette branche de la théorie des jeux analyse l'évolution de la fréquence des stratégies (comportements) au sein d'une population d'agents interagissant stratégiquement et dotés d'une rationalité nulle ou limitée.

La théorie des jeux évolutionnaire combine le concept statique de stratégie évolutionnairement stable avec le concept dynamique de réplication dynamique, une notion formalisée par Taylor et Jonker [82], voir aussi, par exemple, Zeeman [95], Bomze [13], Van Damme [21] et Weibull [86]. Cependant, d'autres critères peuvent aussi intervenir pour motiver le choix d'une stratégie en fonction d'autres dynamiques possibles du jeu. Il existe d'autres modèles modélisant la dynamique des populations que le modèle de réplication dynamique, entre autres : le modèle par imitation, le modèle monotone, le modèle de la meilleure réponse, etc.

4.2.1 Dynamique des populations

Intéressons-nous maintenant plus directement au processus dynamique concernant l'évolution des stratégies dans la population. Les processus évolutionnaires comportent deux mécanismes de base : la mutation et la sélection des stratégies. La stabilité évolutionnaire souligne le rôle des stratégies mutantes dans la mesure où l'on étudie la stabilité des solutions du jeu [92].

Pour pouvoir étudier la dynamique de sélection, nous allons d'abord nous placer dans un cadre particulier où chaque individu joue une stratégie pure. Cela va nous permettre de faire apparaître une approche qui a été développée au sein de la théorie de l'évolution, pour modéliser la dynamique des populations : *la dynamique de réplication.*

Le modèle de replication dynamique développé par Taylor et Jonker (1978) [82], Zeeman [95], Bomze [13] en 1986, décrit un processus de sélection.

Dans le modèle de réplication dynamique, on considère que la population est constituée de différents groupes d'individus vivant en coexistence, chacun d'eux étant caractérisé par une stratégie pure spécifique. L'idée centrale est alors que la croissance d'un groupe de la population dépend des gains retirés de leurs stratégies. En conséquence, le processus de réplication dynamique analyse la façon dont des groupes, caractérisés par différentes stratégies pures dans la population, évoluent au cours du temps.

La dynamique de réplication est un modèle explicite du processus de sélection, spécifiant comment une population est associée avec différentes stratégies pures dans un jeu qui évolue dans le temps. La formulation mathématique de la dynamique de réplication est dûe à Taylor et Joncker (1978) [82].

4.2.2 Modèles de replication dynamique

Considérons une large population finie d'individus, jouant chacun une stratégie pure $x_i \in X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, qui sont tirés au hasard par paires pour jouer un jeu fini symétrique à deux joueurs.

Si le nombre $m_i(t) \geq 0$ désigne le nombre d'individus qui jouent la stratégie pure $x_i \in X$ au temps t et $m(t)$ le nombre total d'individus dans la population, alors

$$m(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t).$$

L'*état de la population* associé à cette situation peut être représenté par le vecteur

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)),$$

où $p_i(t)$ est la proportion d'individus de la population jouant la stratégie pure x_i au temps t :

$$p_i(t) \equiv m_i(t)/m(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Remarque 4.2.1. L'état $p(t)$ de la population est formellement identique à une stratégie mixte du jeu à deux joueurs à l'état initial.

A) Le modèle discret

Il existe plusieurs versions de la dynamique de réplication. En temps discret, à chaque période de temps, les individus sont tirés au hasard par paires pour jouer exactement une instance du jeu. A la fin de la période (phase de reproduction), ils prennent connaissance, de leurs gains respectifs et des gains des autres joueurs. Cela leur permet d'utiliser ces informations de manière à réviser le choix de leurs stratégies. Ainsi, chaque individu est remplacé par un nombre d'individus jouant la même stratégie, proportionnel au gain reçu lors des confrontations. Le nombre moyen de remplacements pour un individu jouant la stratégie pure x_i est proportionnel à $U(x_i, p)$:

$$U(x_i, p) = Eu(x_i, p) = \sum_{j=1}^{n} u(x_i, x_j)p_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j = (Ap)_i, \tag{4.7}$$

où $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ est la matrice des paiements du jeu.

Pour un individu jouant la stratégie pure x_i, il n'y a pas de différence en fait entre une rencontre avec un autre individu tiré aléatoirement de la population jouant la stratégie p et jouer face à un vrai joueur jouant la stratégie mixte p.

Le gain moyen dans la population, et donc le gain espéré d'un individu participant à une rencontre aléatoire dans la population jouant la stratégie mixte p, est donné par :

$$U(p, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i, p) = p^T Ap. \tag{4.8}$$

Le gain $U(p, p)$ est équivalent au gain espéré d'un joueur jouant la stratégie mixte p contre un autre individu jouant la stratégie mixte p.

La proportion d'individus de la population, adoptant la stratégie x_i à la période $t + 1$, est :

$$p_i(t + 1) = p_i(t)\frac{U(x_i, p(t))}{U(p(t), p(t))} = p_i(t)\frac{(Ap(t))_i}{p(t)^T Ap(t)}. \tag{4.9}$$

L'évolution de la population est caractérisée par le processus $\Delta p_i(t) = p_i(t+1) - p_i(t)$. Donc

$$\begin{aligned}
\Delta p_i(t) &= p_i(t+1) - p_i(t), \\
&= p_i(t)\left[\tfrac{U(x_i,p(t))}{U(p(t),p(t))} - 1\right], \\
&= p_i(t)\left[\tfrac{U(x_i,p(t))-U(p(t),p(t))}{U(p(t),p(t))}\right], \\
&= p_i(t)\left[\tfrac{(Ap(t))_i - p(t)^T Ap(t)}{p(t)^T Ap(t)}\right].
\end{aligned}$$

En abandonnant l'indice relatif au temps, la dernière expression peut se réécrire :

$$\Delta p_i(t) = p_i(t+1) - p_i(t) = p_i \frac{(Ap)_i - p^T Ap}{p^T Ap}. \tag{4.10}$$

Le système d'équations aux différences Δp décrit le processus de réplication à temps discret.

B) Le modèle continu

Il est également plus simple de travailler en temps continu. Si les périodes de temps deviennent très courtes, alors l'équation aux différences $\Delta p_i = p_i(t+\Delta t) - p_i(t)$ peut être approximée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = p_i \frac{(Ap)_i - p^T Ap}{p^T Ap}.$$

Ces équations ont des propriétés équivalentes à celles de l'équation simplifiée :

$$\dot{p}_i = p_i \lfloor (Ap)_i - p^T Ap \rfloor. \tag{4.11}$$

Le système d'équations différentielles $\dot{p}$ décrit, pour sa part, le processus de réplication en temps continu.

En résumé nous avons :

$$\dot{p}_i = p_i[U(x_i,p) - U(p,p)] = p_i[(Ap)_i - p^T Ap], \tag{4.12}$$

où

- ⋆ $U(x_i,p)$: est le gain espéré quand la stratégie pure x_i est jouée contre le profil de stratégie p.
- ⋆ $U(p,p)$: est le gain espéré de la position de joueur i quand le profil de stratégie x est joué dans la population (le gain moyen dans la population avec la stratégie p).

⋆ $\dot{p}_i$ donne le pourcentage d'individus jouant la stratégie x_i nouvellement dénombrée au sein de la population à la prochaine période.

Remarque 4.2.2.

- Des stratégies non jouées au début du jeu (à l'instant initial) ne peuvent pas apparaître dans la dynamique de réplication.
- La proportion d'individus de la population jouant une stratégie quelconque peut devenir très petite, mais jamais nulle.

Exemple 4.2.1. Soit une population d'individus, où les rencontres se produisent par paires d'individus. Considérons la matrice des gains suivante associée à un jeu fini symétrique à deux joueurs (2.10).

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $a_1 a_2 \neq 0$.

De (4.11) et (4.12), on déduit que la dynamique de réplication associée à ce jeu peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{p}_1 = (a_1 p_1 - a_2 p_2) p_1 p_2, \quad \dot{p}_2 = (a_2 p_2 - a_1 p_1) p_1 p_2, \tag{4.13}$$

où p_1 et p_2 sont respectivement les proportions des individus jouant les stratégies x_1 et x_2 dans la population, telles que $p_2 = 1 - p_1$. De (4.13), on déduit que $\dot{p}_2 = -\dot{p}_1$.

Catégorie I, IV Si $a_1 a_2 < 0$, la proportion $p_1(t)$ d'individus utilisant la stratégie x_1 dans la population décline continûment si $a_1 < 0$ et $a_2 > 0$. En effet, d'après la relation (4.13), on aura

$$\dot{p}_1 = (a_1 p_1 - a_2 p_2) p_1 p_2$$

avec $a_1 p_1 < 0$, $-a_2 p_2 < 0$, $p_1 p_2 > 0$, d'où $\dot{p}_1 < 0$.

Par contre, si $a_1 > 0$ et $a_2 < 0$, la proportion $p_1(t)$ d'individus utilisant la stratégie x_1 dans la population croît continûment. Par conséquent, en démarrant, de n'importe quel point intérieur (c-à-d, les deux stratégies existent à l'état initial) l'état de la population converge vers l'unique ESS du jeu.

- Si $a_1 < 0$ et $a_2 > 0$, donc il converge vers x_2.
- Si $a_1 > 0$ et $a_2 < 0$, donc il converge vers x_1.

Catégorie II,III Si $a_1 a_2 > 0$, le taux de croissance de x_1 change de signe quand $a_1 p_1 = a_2 p_2$. Ce changement se produit donc à la stratégie mixte d'équilibre de Nash :

$$a_1 p_1 = a_2 p_2 \implies p_1^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2},\ p_2^* = 1 - p_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

- Supposons que les deux payements soient positifs (catégorie II, $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$). Alors p_1 décroît vers 0, en partant de n'importe quelle valeur initiale $p_1(0) < p_1^*$, et, inversement, croît vers 1 en partant de n'importe quelle valeur initiale $p_1(0) > p_1^*$.
  - ⋆ Si $p_1(0) < p_1^*$, l'état de la population converge vers une dominance par la stratégie x_2.
  - ⋆ Si $p_1(0) > p_1^*$, l'état de la population converge vers une dominance par la stratégie x_1.

  Par conséquent, à partir d'un point intérieur quelconque, l'état de la population converge vers l'une des deux stratégies évolutionnairement stables.
- Supposons que les deux payements soient négatifs (catégorie III, $a_1 < 0$ et $a_2 < 0$). La proportion de la stratégie x_1 dans la population croît vers p_1^* en partant de n'importe quelle valeur initiale (point intérieur) $p_1(0) < p_1^*$ et décroît vers p_1^*, en partant de n'importe quelle valeur initiale (intérieure) $p_1(0) > p_1^*$. Par conséquent, l'état de la population converge vers l'unique ESS en partant de n'importe quelle valeur initiale (point intérieur) de ce jeu.

L'équation de la dynamique de réplication (4.12) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = p_i[U(x_i, p) - U(p, p)] = p_i[(Ap)_i - p^T Ap]. \tag{4.14}$$

En posant,

$$p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t)),$$

on aura

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p} = f(p), \tag{4.15}$$

où

$$f(p) = (f_1(p), \ldots, f_n(p)), \quad f_i(p) = p_i[(Ap)_i - p^T Ap],$$

et $p(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0))$ est l'état de la population à l'instant initial.

On note par $p(p(0), t)$, l'application $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, telle que $p(p(0), t)$ est l'état de la population à l'instant t en partant de la condition initiale $p(0)$ en $t = 0$.

Définition 4.2.1. $p^* \in \Delta$ est un point stationnaire ou un point d'équilibre pour l'équation différentielle (4.15) définie sur $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$, si $f(p^*) = 0$.

Définition 4.2.2. $p^* \in \Delta$ est un point stable, s'il est un point stationnaire de l'équation différentielle (4.15) et pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de p^*, il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ tel que si $p(0) \in \mathcal{U}$ alors $p(p(0), t) \in \mathcal{V}$ pour tout $t > 0$.

Définition 4.2.3. $p^* \in \Delta$ est asymptotiquement localement stable, s'il est un point stable et il existe un voisinage W de p^* tel que $p(0) \in W$ entraîne

$$\lim_{t \to +\infty} p(p(0), t) = p^*.$$

Définition 4.2.4. $p^* \in \Delta$ est globalement stable, s'il est un point stable tel que pour tout $p(0) \in int(\Delta)$ on ait :

$$\lim_{t \to +\infty} p(p(0), t) = p^*.$$

Le résultat suivant est dûe à Taylor et Jonker [82] voir [95], et peut être vu comme le résultat de base reliant la réplication dynamique et les stratégies évolutionnairement stables.

Théorème 4.2.1. *[50]*
Tout $\alpha \in \Delta^{ESS}$ est asymptotiquement stable dans la réplication dynamique (4.12).

Remarque 4.2.3. Le théorème 4.2.1 dit que pour n'importe quel stratégie ESS, il y a un voisinage $\mathcal{V}$ de cette stratégie tel que n'importe quelle trajectoire de la dynamique de réplication commençant dans ce voisinage $\mathcal{V}$ converge vers cette ESS. Cependant, l'inverse n'est pas vrai. La dynamique de réplication peut converger vers une stratégie n'étant pas une ESS.

D'ailleurs, une trajectoire ne converge pas toujours à un certain point limite p^* si t tends vers l'infini.

4.2.3 Stabilité de la réplication dynamique et ESS

Il est connu que dans un jeu fini 2.4 linéaire,(voir [43], [70] pour une analyse plus détaillée), la relation entre le concept de stratégie évolutionnairement stable et celui de réplication dynamique est explicité dans le théorème suivant.

Théorème 4.2.2. *[10] Considérons le jeu linéaire (2.4).*

Tout point stable de l'équation (4.12) est un point d'équilibre de Nash.

Théorème 4.2.3. *[19] Soit un jeu linéaire fini (2.4).*

- *Si* $\alpha \in \Delta$ *est une ESS, alors* α *est localement asymptotiquement stable pour la réplication dynamique (4.12).*
- *Si* $\alpha \in int(\Delta)$ *est une ESS, alors* α *est globalement stable.*

Cas des jeux doublement symétriques

Corollaire 4.2.4. *Considérons le jeu 2.9. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\alpha \in \Delta^{ESS}$.
2. α *est localement strictement efficace.*
3. $\alpha \in \Delta$ *est asymptotiquement stable dans la réplication dynamique (4.12).*

4.3 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre, à la présentation de quelques propriétés et caractéristiques des stratégies évolutionnairement stables (ESS). Nous montrons que les stratégies évolutionnairement stables correspondent aux stratégies de l'équilibre de Nash, mais l'inverse n'est pas vrai. Puis, nous avons spécifié la définition d'une ESS dans certains exemples de jeux. Enfin, nous avons formulé la relation entre le concept de stratégie évolutionnairement stable et celui de réplication dynamique.

Chapitre 5

Jeux évolutionnaires dans les problèmes de concurrence d'entreprises

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques unes des applications de la théorie des jeux évolutionnaires en économie. Notamment, nous nous sommes intéressés à une étude détaillée d'un cas de problème de concurrence d'entreprises.

5.1 Économie en théorie des jeux évolutionnaires

Les jeux évolutionnaires ont saisi une part grande et croissante de la littérature de la théorie des jeux ces dernières années. Mais les applications économiques de la théorie des jeux évolutionnaires demeurent peu explorées, alors qu'une part dominante de la littérature appliquée aux sciences économiques se fonde sur la théorie des jeux classique.

Friedman [32] définit un jeu évolutionnaire comme un modèle formel d'interaction stratégique qui perdure dans le temps et dans lequel les stratégies qui s'accompagnent des gains les plus élevés tendent à se substituer à celles dont les gains sont faibles, mais où l'élimination des stratégies les moins rentables est marquée d'une certaine inertie, dans le sens où le changement ne se produit pas soudainement mais progressivement, où, enfin, les agents ne tentent pas systématiquement d'influencer les actions futures de leurs partenaires (comme c'est le cas dans le modèle du choix rationnel). D'autres auteurs (par exemple Weibull [86], Van Damme [21]) proposent une définition plus restrictive en imposant des conditions supplémentaires : la population doit être très importante, les individus ont une rationalité limitée, les rencontres entre agents s'effectuent aléatoirement et les stratégies sont observables. Néanmoins, Friedman [32] juge inutiles ces différentes restrictions dès lors que les problèmes étudiés concernent des situations économiques.

5.2 Modèle de jeu évolutionnaire

5.2.1 Éléments du modèle

Les modèles de jeux évolutionnaires sont construits à partir des éléments suivants :

1. Une population de joueurs (individus), tous ces individus ont un ensemble commun de stratégies. Dans le cas d'un jeu matriciel symétrique 2×2, l'ensemble des stratégies est constitué de deux stratégies alternatives. Dans un jeu du marché, nous pourrions avoir une population de traders chacun avec un prix q au-dessus duquel une unité est vendue et en-dessous duquel une unité est achetée.
2. Une fonction payement. Dans le cas d'un jeu matriciel, la fonction gain est représentée par une matrice dont l'élément a_{ij} est le payement d'un joueur choisissant sa $i^{\text{ème}}$ stratégie quand son opposant choisit sa $j^{\text{ème}}$ stratégie. Dans le jeu du marché, le payement serait par exemple, un profit d'échange donné, le prix d'achat, l'ordre de vente du commerçant pour toute stratégie de celui-ci.
3. Une dynamique décrivant l'évolution des fréquences des stratégies dans une population au cours du temps. Une des dynamiques les plus utilisées est la réplication dynamique.
4. Une ou plusieurs notions de solutions (d'équilibre) qui peuvent exister dans un jeu évolutionnaire.

5.2.2 Dynamique

L'approche directe par les ESS est nettement insuffisante. En effet, au contraire de la théorie classique des jeux antagonistes, la théorie des jeux évolutionnaire ne postule pas la rationalité des joueurs.

Sur le marché du travail, et dans un environnement instable, la seule manière de prendre une décision à peu près fondée, est, d'une année sur l'autre, d'observer l'efficacité relative d'une stratégie par rapport à une autre.

Comme le fait remarquer Orléan [62], cette dynamique laisse de côté un aspect important de la logique évolutionnaire, à savoir la présence de facteurs de mutation. En effet, deux éléments peuvent se superposer pour expliquer qu'un certain nombre de joueurs ne vont pas se déterminer directement en calculant l'avantage relatif d'une stratégie. Tout d'abord, il existe toujours un certain pourcentage de la population qui a un accès très restreint à l'information qui est supposée libre et sans coût pour les joueurs.

5.3 Modélisation d'un conflit routier sous forme d'un jeu

Clinet et Piatecki [18] ont proposé un modèle de jeu évolutionnaire pour l'analyse des conflits récurrents dans le secteur des transports routiers. Nous allons présenter, dans ce qui suit, la modélisation et l'analyse de ce problème plus en détails.

5.3.1 Modélisation du conflit

Le secteur des transports routiers est composé de 38.000 entreprises en France. Malgré des tailles très diverses, ce nombre traduit un fait évident : ce sont essentiellement de très petites entreprises. On peut donc supposer qu'il n'existe pas d'effet d'entreprise dominante et que le secteur est réellement concurrentiel. Cette concurrence est renforcée par le comportement des clients. En effet, même si une part non négligeable des transports est réalisée systématiquement par une relation contractuelle, implicite ou explicite entre les deux parties transporteur et client, la plupart du temps, lorsqu'un client recherche un transporteur, en faisant l'hypothèse que cette recherche d'information est onéreuse, nous pouvons supposer que les clients s'adressent en moyenne à deux entreprises. Ces dernières, de ce fait sont appariées deux à deux.

Considérons que chaque entreprise puisse adopter deux stratégies distinctes :

1. la stratégie s_e, dans laquelle l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération élevée, mais qui a pour conséquence que ses profits seront à un niveau bas et donc de déterminer une valeur de ses cash-flow V_e faible.
2. la stratégie s_b, dans laquelle l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération plus faible, mais qui a pour conséquence que ses profits seront à un niveau plus élevé et donc de déterminer une valeur de ses cash-flow V_b forte.

On considère le jeu suivant :

$$\langle \mathcal{N}, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{N}} \rangle.$$

Avec

- $\mathcal{N}$: l'ensemble des joueurs. Dans notre cas, l'ensemble des entreprises du transport routier sont au nombre de : $N = 38000$.

$$\mathcal{N} \quad = \quad \{1, 2, \dots, 38000\}.$$

- $\{X_i\}_{i\in\mathcal{N}}$: l'ensemble des stratégies admissibles de l'entreprise i, pour $i \in \mathcal{N}$.

$$X_i = \{s_e, s_b\};$$

  avec

  ⋆ s_e : l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération élevée.

  ⋆ s_b : l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération plus faible.

  On définit

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots X_N.$$

  le produit cartésien des $X_i,\ i \in \mathcal{N}$.

- $\{u_i\}_{i\in\mathcal{N}}$: est la fonction de payement de l'entreprise i pour $i \in \mathcal{N}$,

$$u_i \ : \quad X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

  Dans ce cas, la fonction u_i représente la valeur du cash-flow, c'est à dire, la différence entre les profits et les rémunérations qu'elle offre à ses chauffeurs.

On a donc $V_e \leq V_b$. Partant du principe qu'une entreprise appariée avec une entreprise dont l'offre est moins onéreuse perd le marché, mais que seul le hasard décide de l'obtention du marché dans le cas où elle est appariée avec une entreprise qui adopte la même stratégie qu'elle. En d'autres termes, la probabilité d'obtenir le contrat est dans ce cas de $\frac{1}{2}$. La matrice du jeu est représentée dans le tableau 5.1.

À l'équilibre de Nash, le jeu ne laisse pas de place pour la moindre considération sociale puisque l'équilibre unique est (s_b, s_b) équilibre associé au couple de rémunération $(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$.

Mais la modélisation du conflit des routiers en termes d'équilibre de Nash pur est inadéquate. En effet, chaque entreprise sait qu'elle opère dans un marché concurrentiel

Entreprise 1 / Entreprise 2	s_e	s_b
s_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	$(0, V_b)$
s_b	$(V_b, 0)$	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$

TAB. 5.1 – Matrice des gains

et non dans un duopole. Elles savent aussi que la réussite d'une stratégie dépend de la proportion des autres entreprises qui adoptent cette stratégie. Il est vraisemblable qu'elles interprètent les conditions du jeu comme les conditions d'un jeu évolutionnaire. À la différence d'un jeu traditionnel, ce dernier reconnaît explicitement :

1. que les entreprises sont en grand nombre,
2. que les stratégies qu'elles adoptent sont prédéterminées au préalable des conflits potentiels auxquels elles vont participer,
3. qu'elles sont appariées au hasard ; en ce sens qu'aucune d'entre elles n'a de contrôle sur la demande d'information de la part des clients.

Dans ce cas, si la population est composée d'un grand nombre de s_e-entreprises, c'est-à-dire d'entreprises qui préfèrent offrir des rémunérations élevées à leurs chauffeurs, il peut être, à priori intéressant pour une entreprise de décider d'être elle-même une s_e-entreprise. En effet, dans la mesure où elle se trouve rarement appariée à une s_b-entreprise, elle ne perd pas automatiquement trop de marchés. En réalité, comme nous allons le montrer ci-dessous, la stratégie s_b est une *stratégie évolutionnairement stable.*

Dans une population composée de "ε" s_e-entreprises et donc de "$(1-\varepsilon)$" s_b-entreprises, une entreprise a une probabilité ε d'être appariée à une entreprise s_e et une probabilité $(1-\varepsilon)$ d'être appariée à une entreprise s_b. Donc, si on prend deux entreprises (qu'on notera entreprise 1 et entreprise 2), les gains des deux entreprises tenant compte de la matrice des gains dans le tableau 5.1, on aura :

Entreprise 1 / Entreprise 2	s_e	s_b	
s_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	$(0, V_b)$	ε
s_b	$(V_b, 0)$	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$	$(1-\varepsilon)$
	ε	$(1-\varepsilon)$	

Les espérances de rémunération d'une s_e-entreprise

Sachant qu'une entreprise jouant une stratégie s_e a une probabilité ε de rencontrer une entreprise jouant la même stratégie qu'elle et a une probabilité $(1-\varepsilon)$ de rencontrer une entreprise jouant la stratégie s_b, alors son espérance de gain sera :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(s_e) &= \varepsilon U(s_e, s_e) + (1-\varepsilon)U(s_e, s_b), \\ &= \varepsilon \, \frac{V_e}{2} + (1-\varepsilon) \; (0), \\ &= \varepsilon \, \frac{V_e}{2}. \end{aligned}$$

Les espérances de rémunération d'une s_b-entreprise

Sachant qu'une entreprise jouant une stratégie s_b a une probabilité $(1-\varepsilon)$ de rencontrer une entreprise jouant la même stratégie qu'elle et a une probabilité ε de rencontrer une entreprise jouant la stratégie s_b, alors son espérance de gain sera :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(s_b) &= \varepsilon U(s_b, s_e) + (1-\varepsilon)U(s_b, s_b), \\ &= \varepsilon \, V_b + (1-\varepsilon) \, \frac{V_b}{2}, \\ &= \varepsilon \, \frac{V_b}{2} + \frac{V_b}{2}, \\ &= (1+\varepsilon) \, \frac{V_b}{2}. \end{aligned}$$

Donc

- $\mathbb{E}U(s_e) \;=\; U(s_e, \varepsilon s_e + (1-\varepsilon)s_b) \;=\; \varepsilon \, \frac{V_e}{2}$.
- $\mathbb{E}U(s_b) \;=\; U(s_b, \varepsilon s_e + (1-\varepsilon)s_b) \;=\; (1+\varepsilon) \, \frac{V_b}{2}$.

On vérifie si la relation suivante est justifiée.

$$\mathbb{E}U(s_b) \overbrace{>}^{?} \mathbb{E}U(s_e).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(s_b) - \mathbb{E}U(s_e) &= (1+\varepsilon) \, \frac{V_b}{2} - \varepsilon \, \frac{V_e}{2}, \\ &= \frac{(1+\varepsilon) \; V_b - \varepsilon \; V_e}{2}, \\ &= \frac{V_b + \varepsilon \; V_b - \varepsilon \; V_e}{2}, \\ &= \frac{V_b + \varepsilon \; (V_b - \; V_e)}{2} \; > \; 0. \qquad (\text{on a } \; V_b \geq V_e) \end{aligned}$$

Donc on a $\mathbb{E}U(s_b) > \mathbb{E}U(s_e)$. Par conséquent, d'après la définition 3.4.1 d'une ESS, on peut dire que s_b est une stratégie évolutionnairement stable.

Supposons qu'initialement la population des entreprises soit essentiellement composée de s_b-entreprises, ce que nous traduisons par $0 < \varepsilon \ll 1$. Alors, dans ce cas, la matrice des gains représentée dans le tableau (5.1) est réduite à :

Entreprise 1 / Entreprise 2	s_b
s_b	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$

En d'autres termes, dans le long terme, les s_e-entreprises vont disparaître complètement au profit des s_b-entreprises et, comme nous l'avions annoncé, s_b est une stratégie évolutionnairement stable.

Remarque 5.3.1. Cette analyse est-elle définitive ? N'est-il pas possible que des entreprises immergées dans cet univers hautement concurrentiel ne décident d'adopter une stratégie de type s_e sans disparaître du marché ? Pour aller plus loin dans l'analyse de ce problème, introduisons sa dynamique évolutionnaire.

5.3.2 La dynamique évolutionnaire du conflit des routiers

Dans la section précédente, nous avons supposé l'état stationnaire. En d'autres termes, nous n'avons pas tenu compte de l'histoire des stratégies. Or, même si au moment de jouer, les entreprises ont déterminé la stratégie qu'elles vont adopter, elles possèdent assez d'information pour décider de changer de stratégie, si la stratégie qu'elles avaient adoptée précédemment s'avère inefficiente. La théorie des jeux évolutionnaires interprète l'inefficience comme le fait qu'une stratégie offre une rémunération inférieure à la moyenne de l'espérance de rémunération qu'offre l'ensemble des stratégies. Si $p(t)$ est le pourcentage d'entreprises qui adoptent la stratégie s_e à l'instant t, l'espérance moyenne de rémunération des entreprises est :

$$\mathbb{E}U(t) = p(t)\mathbb{E}U(s_e) + (1 - p(t))\mathbb{E}U(s_b).$$

Le taux de croissance de la part de la population qui adopte la stratégie s_e $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$ est alors commandé par l'écart entre l'espérance de rémunération de cette stratégie et la moyenne des espérances de rémunération de toutes les stratégies à l'instant t (voir le modèle réplication dynamique définie dans l'équation (4.12)). En d'autres termes :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} &= \mathbb{E}U(s_e) - [p(t)\mathbb{E}U(s_e) + (1 - p(t))\mathbb{E}U(s_b)],\\ &= (1 - p(t))[\mathbb{E}U(s_e) - \mathbb{E}U(s_b)].\end{aligned}$$

En remplaçant $\mathbb{E}U(s_e)$ et $\mathbb{E}U(s_b)$ par leurs valeurs, on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} &= (1-p(t))[\mathbb{E}U(s_e) - \mathbb{E}U(s_b)],\\
&= (1-p(t))[p(t)\frac{V_e}{2} - (p(t)V_b + (1-p(t))\frac{V_b}{2})],\\
&= (1-p(t))[p(t)\frac{V_e}{2} - p(t)V_b - (1-p(t))\frac{V_b}{2}],\\
&= (1-p(t))[p(t)\frac{V_e}{2} - p(t)V_b - \frac{V_b}{2} + p(t)\frac{V_b}{2}],\\
&= (\frac{1}{2})(1-p(t))[p(t)V_e - 2p(t)V_b - V_b + p(t)V_b],\\
&= (\frac{1}{2})(1-p(t))[p(t)V_e - p(t)V_b - V_b],\\
&= (\frac{1}{2})(1-p(t))[p(t)(V_e - V_b) - V_b],\\
&= (\frac{(V_e - V_b)}{2})(1-p(t))[p(t) - \frac{V_b}{(V_e - V_b)}].
\end{aligned}$$

On pose

$$\delta = \frac{(V_b - V_e)}{2}.$$

$$p^* = \frac{V_b}{(V_e - V_b)}.$$

Après ces substitutions et réarrangements, il vient que la dynamique du jeu, dite "dynamique de replication", est :

$$\dot{p}(t) = -\ \delta p(t)(1-p(t))[p(t) - p^*], \tag{5.1}$$

avec

$$\delta = \frac{(V_b - V_e)}{2},\ p^* = \frac{V_b}{(V_e - V_b)}.$$

Étant donné que nous avons postulé que $V_e < V_b$, on a :

$$\delta = \frac{(V_b - V_e)}{2} > 0 \ \text{ et } \ p^* = \frac{V_b}{(V_e - V_b)} < 0.$$

Puisqu'on a une valeur de p^* qui est négative, or nous savons que p^* est une proportion d'entreprises dans la population qui adoptent la stratégie s_e, donc, $p^* \geq 0$. Puisque la dynamique de réplication nous donne les proportions des individus jouant les différentes stratégies pures, par conséquent, p^* n'est pas un équilibre de la dynamique de réplication, puisque $p^* < 0$.

Comme la conjugaison de tous les termes du membre de droite de l'équation (5.1) de la dynamique de réplication est négative, alors en partant de n'importe quelle répartition initiale de la population $(p(0), (1 - p(0)))$ on aboutit à la répartition d'équilibre $(\bar{p}, (1 - \bar{p})) = (0, 1)$. En d'autres termes, la stratégie $(\bar{p}, (1 - \bar{p})) = (0, 1)$ correspond au cas d'équilibre où les entreprises jouent leur stratégie s_b, donc cela nous donne la stabilité de la stratégie s_b.

Plus formellement, on peut remarquer qu'au voisinage de $p = 0$, l'équation de la dynamique de réplication prend la forme :

$$\dot{p}(t) = -\ \delta\ p(t)\ (1 - p(t))\ (p(t) - p^*).$$

Au voisinage de $p = 0$, l'équation devient

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} &= -\ \delta\ (1 - p(t))\ (p(t) - p^*); \\
&= -\ \delta\ (1 - 0)\ (0 - p^*) + \mathcal{O}(p^2)\ \approx\ \delta p^*; \\
&= \delta p^*\ <\ 0,
\end{aligned}$$

puisque $\delta > 0$ et $p^* < 0$. Le taux de croissance de p est négatif, cela veut dire qu'une stratégie qui n'existe pas dans la population (la proportion des individus jouant cette stratégie est nulle) ne peut pas apparaître au cours de l'évolution. Par conséquent, le processus $\dot{p}(t)$ est stable pour $p = 0$.

De la même manière, en posant

$$z(t) = 1 - p(t),$$

on aura

$$\dot{z}(t) = -\ \delta\ (1 - z(t))\ z(t)\ (1 - z(t) - p^*).$$

En divisant cette expression par $z(t)$, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} &= -\ \delta\ (1 - z(t))\ (1 - z(t) - p^*); \\
&= -\ \delta\ (1)\ (1 - p^*) + \mathcal{O}(z^2); \\
&= -\ \delta(1 - p^*)\ <\ 0,
\end{aligned}$$

puisque $(1 - p^*) > 0$ et $\delta > 0$. Le taux de croissance de p est négatif, cela veut dire qu'une stratégie qui existe dans la population avec une proportion égale à 1, ne peut pas disparaître au profit des autres stratégies au cours de l'évolution. Par conséquent, le processus $\dot{z}(t)$ est instable pour $z = 1$.

Nous avons donc la confirmation que dans le cas des entreprises de transport routier, sans intervention de l'État, il n'est pas possible que des entreprises adoptant la stratégie s_e subsistent longtemps. Avec la disparition de ces entreprises, et l'absence complète d'espoir de la part des chauffeurs d'être mieux traités par leurs employeurs, la réapparition des conflits routiers peut être prédite sans trop d'erreur.

5.3.3 Problématique de l'intervention de l'Ètat

Comment l'Ètat peut-il intervenir dans un conflit privé ? Une première solution consiste à modifier la matrice de jeu au travers des rémunérations des entreprises. Ceci peut-être obtenu de deux manières distinctes :

1. en pénalisant les s_b-entreprises,
2. en subventionnant les s_e-entreprises.

Ici les deux politiques étatiques sont strictement équivalentes. L'objectif de l'Ètat est alors de choisir la politique qui permette, soit d'éliminer les s_b-entreprises, soit d'obtenir une répartition non dégénérée (la fraction de chacun des types d'entreprises dans la population n'est pas nulle) des entreprises entre les deux types d'entreprises, et ce , dans le but de prévenir les conflits sociaux.

Une condition nécessaire pour qu'une telle politique aboutisse est d'intérioriser l'équilibre p^* c'est-à-dire déplacer p^* dans l'intervalle $]0, 1]$. On doit donc avoir

$$0 < p^* \leq 1.$$

$$0 < \frac{\tilde{V}_b}{\tilde{V}_e - \tilde{V}_b} \leq 1,$$

ou $\tilde{V}_{(j)}$: est la rémunération des entreprises après l'intervention de l'Ètat pour $j = b$ et $j = e$. Or, dans le cadre du jeu tel qu'il a été décrit jusqu'ici, ceci n'est possible que si cette intervention aboutit à $\tilde{V}_e > \tilde{V}_b$ et si $\tilde{V}_b < \frac{\tilde{V}_e}{2}$, voir la figure 5.1

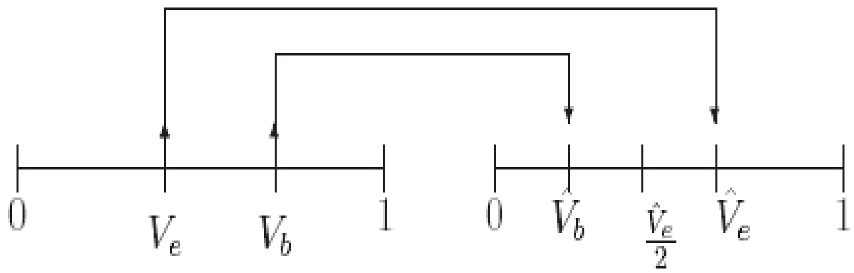

FIG. 5.1 – Déplacement des rémunération après intervention de l'état.

Notons que ce qui importe ici, n'est pas simplement d'augmenter ou de diminuer la rémunération absolue d'une stratégie et sa position relative par rapport à l'autre. La seconde conséquence de l'intervention de l'État est de transformer δ en :

$$\tilde{\delta} = \frac{\tilde{V}_e - \tilde{V}_b}{2} \;>\; 0.$$

Reste à savoir si, après l'intervention de l'Ètat, le problème peut être modélisé par les mêmes termes que précédemment. En réalité, cette solution qui, dans un premier temps, peut paraître attrayante, ne l'est pas. En effet, si elle permet d'éliminer les s_b-entreprises, ceci n'est réalisé qu'à un coût qui ne peut que devenir prohibitif dans le long terme.

De plus, la France est devenue maintenant une simple unité dans le complexe important de nations qui constituent l'Europe. La modification des conditions du jeu envisagée ci-dessus ne peut qu'inviter les transporteurs étrangers à envahir le marché français car les règles communautaires de la concurrence interdisent de discriminer entre les entreprises originaires des différentes nations européennes.

De ce fait, soit la France serait obligée de traiter les entreprises étrangères de manière identique que ses entreprises domestiques, et ce, sans garantie de réciprocité (les entreprises françaises de transport ne pouvant alors décrocher aucun contrat étranger), soit elle s'exposerait à des poursuites de la part de la communauté européenne. Dans tous les cas, en pratiquant une telle politique, la France condamnerait à terme son secteur des transports routiers. Une solution moins onéreuse consiste à introduire une indemnité compensatoire pour rééquilibrer la matrice des rémunérations.

Notons par I la valeur présente de cette indemnité et supposons qu'il est possible de la fixer de telle sorte que $I > \frac{V_b}{2}$, parce que, pour toute autre configuration des indemnités, on retourne au cas précédent. Donc, si une s_e-entreprise se rencontre avec une s_b-entreprise, alors, le gain de la s_b-entreprise est de V_b, mais dans ce cas l'État va intervenir en indemnisant les s_e-entreprises d'une valeur de I.

La matrice des rémunérations devient alors :

Entreprise 1 / Entreprise 2	s_e	s_b
s_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	(I, V_b)
s_b	(V_b, I)	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$

Dans ce cas, apparaissent deux équilibres de Nash différents :

$$(s_e, s_b) \text{ et } (s_b, s_e).$$

Ces équilibres sont associés aux couples de rémunération :

$$(I, V_b) \text{ et } (V_b, I).$$

5.3.4 Le jeu évolutionnaire avec intervention de l'Ètat

On suppose, comme précédemment, qu'on a une population composée de ε entreprises adoptant la stratégie s_e et $(1-\varepsilon)$ entreprises utilisant la stratégie s_b. Donc pour un joueur (une entreprise) extrait de la population, on a une probabilité de ε qu'il joue la stratégie s_e et $(1-\varepsilon)$ qu'il joue la stratégie s_b. Si on choisit par hasard deux entreprises de cette population et on suppose qu'elles se mettent en concurrence, alors on obtient un jeu à 2 joueurs avec la matrice des gains suivante :

Entreprise 1 / Entreprise 2	s_e	s_b	
s_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	(I, V_b)	ε
s_b	(V_b, I)	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$	$(1-\varepsilon)$
	ε	$(1-\varepsilon)$	

L'espérance de rémunération d'une s_e-entreprise est :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}U(s_e) &= \varepsilon U(s_e, s_e) + (1-\varepsilon) U(s_e, s_b), \\
&= \varepsilon \frac{V_e}{2} + (1-\varepsilon)\ (I), \\
&= \varepsilon \frac{V_e}{2} + (1-\varepsilon)\ I.
\end{aligned}$$

L'espérance de rémunération d'une s_b-entreprise est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(s_b) &= \varepsilon U(s_b, s_e) + (1-\varepsilon)U(s_b, s_b), \\ &= \varepsilon\, V_b + (1-\varepsilon)\, \frac{V_b}{2}. \end{aligned}$$

Donc

- $\mathbb{E}U(s_e) \ = \ \varepsilon\, \frac{V_e}{2} + (1-\varepsilon)\ I,$
- $\mathbb{E}U(s_b) \ = \ \varepsilon\, V_b + (1-\varepsilon)\ \frac{V_b}{2}.$

Supposons qu'initialement la population des entreprises soit essentiellement composée de S_b-entreprises, ce que nous traduisons par $0 < \varepsilon \ll 1$, alors, dans ce cas :

· $\mathbb{E}U(s_e) \ \approx \ (1-\varepsilon)\ I,$

· $\mathbb{E}U(s_b) \ \approx \ (1-\varepsilon)\ \frac{V_b}{2}.$

Donc, comme nous avons postulé que l'État instaurait une indemnité telle que $I > \frac{V_b}{2}$, alors on a :

$$\mathbb{E}U(s_e) \ \approx \ (1-\varepsilon)\ I \quad > \quad (1-\varepsilon)\ \frac{V_b}{2} \ \approx \ \mathbb{E}U(s_b). \tag{5.2}$$

On vérifie laquelle des deux stratégies $\{s_e, s_b\}$ est une ESS. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U(s_e) - \mathbb{E}U(s_b) &= (1-\varepsilon)\ I - (1-\varepsilon)\ \frac{V_b}{2}, \\ &= \underbrace{(1-\varepsilon)}_{>0}\ \underbrace{(I - \frac{V_b}{2})}_{>0} \quad > 0. \qquad (\text{on a } \ I > \frac{V_b}{2}) \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}U(s_e) > \mathbb{E}U(s_b)$, d'après la condition i) de la proposition 3.4.2, la stratégie s_e est une ESS.

En ce qui concerne la dynamique évolutionnaire, on procède de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\varepsilon_1}(t)}{\varepsilon_1(t)} &= (1-\varepsilon_1(t))[\mathbb{E}U(s_e)-\mathbb{E}U(s_b)],\\
&= (1-\varepsilon_1(t))\left[\varepsilon_1(t)\tfrac{V_e}{2}+(1-\varepsilon_1(t))I-(\varepsilon_1(t)V_b+(1-\varepsilon_1(t))\tfrac{V_b}{2})\right],\\
&= (1-\varepsilon_1(t))\left[\varepsilon_1(t)\tfrac{V_e}{2}+I-\varepsilon_1(t)I-\varepsilon_1(t)V_b-\tfrac{V_b}{2}+\varepsilon_1(t)\tfrac{V_b}{2}\right],\\
&= (1-\varepsilon_1(t))\left[\varepsilon_1(t)\tfrac{V_e}{2}+I-\varepsilon_1(t)I-\varepsilon_1(t)\tfrac{V_b}{2}-\tfrac{V_b}{2}\right],\\
&= (1-\varepsilon_1(t))\left[\varepsilon_1(t)(\tfrac{V_e}{2}-I-\tfrac{V_b}{2})+I-\tfrac{V_b}{2}\right],\\
&= (\frac{V_e}{2}-I-\frac{V_b}{2})(1-\varepsilon_1(t))\left[\varepsilon_1(t)+\frac{I-\frac{V_b}{2}}{(\frac{V_e}{2}-I-\frac{V_b}{2})}\right],\\
&= (\frac{V_e}{2}-I-\frac{V_b}{2})(1-\varepsilon_1(t))\left[\varepsilon_1(t)-\frac{\frac{V_b}{2}-I}{(\frac{V_e}{2}-I-\frac{V_b}{2})}\right].
\end{aligned}$$

En posant

$$\delta_1 = -(\frac{V_e}{2}-I-\frac{V_b}{2}),$$

$$\varepsilon_1^* = \frac{\frac{V_b}{2}-I}{(\frac{V_e}{2}-I-\frac{V_b}{2})},$$

on obtient la dynamique de réplication suivante.

$$\dot{\varepsilon}_1(t) = -\delta_1\ \varepsilon_1(t)\ (1-\varepsilon_1(t))\ (\varepsilon_1(t)-\varepsilon_1^*). \tag{5.3}$$

Étant donné que $V_e \leq V_b$, on aura $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon_1^* \in]0,1[$.

Pour comprendre comment évolue la population d'entreprises, on peut développer, comme précédemment, une analyse de stabilité locale au voisinage de $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$ et $\varepsilon_1 = 1$.

Dans les deux premiers cas, on retrouve :

1. Au voisinage de $\varepsilon_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\varepsilon}_1(t)}{\varepsilon_1(t)} &= -\delta_1\ (1-\varepsilon_1(t))\ (\varepsilon_1(t)-\varepsilon_1^*);\\
&= -\delta_1\ (1-0)\ (0-\varepsilon_1^*)+\mathcal{O}(\varepsilon_1^2)\ \approx\ \delta\varepsilon_1^*;\\
&= \delta_1\varepsilon_1^*\ >\ 0,
\end{aligned}$$

puisque $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon_1^* > 0$. Une stratégie qui n'existe pas à l'état initial dans la population ne peut pas apparaître au cours de l'évolution. Par conséquent, le processus $\dot{\varepsilon}_1(t)$ est instable pour $\varepsilon_1 = 0$.

2. Au voisinage de $\varepsilon_1 = 1$.

   En posant
   $$z_1(t) = 1 - \varepsilon_1(t) = 0,$$
   de l'équation (5.3), on déduit :
   $$\dot{z}_1(t) = -\delta_1\ (1 - z_1(t))\ z_1(t)\ (1 - z_1(t) - \varepsilon_1^*).$$
   Comme quand $\varepsilon_1(t)$ se rapproche de 1, $z_1(t)$ se rapproche de 0, alors on déduit :
   $$\begin{aligned} \frac{\dot{z}_1(t)}{z_1(t)} &= -\delta_1\ (1 - z_1(t))\ (1 - z_1(t) - \varepsilon_1^*); \\ &= \delta_1\ (1)\ (1 - \varepsilon_1^*) + \mathcal{O}(z_1^2); \\ &\simeq \delta_1(1 - \varepsilon_1^*)\ >\ 0. \end{aligned}$$
   Car $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon_1^* \in]0, 1[$. Une stratégie qui existe à l'état initial dans la population ne peut pas disparaître au cours de l'évolution. Par conséquent, le processus $\dot{\varepsilon}_1(t)$ est instable pour $\varepsilon_1 = 1$.

   Comme les deux points extrêmes ne sont pas des attracteurs de la dynamique de réplication, il ne reste plus qu'une possibilité pour ε_1^* d'être stable.

3. Au voisinage de $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$.

   Posons
   $$z_1(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_1^*.$$
   De l'équation (5.3), on obtient
   $$\dot{z}_1(t) \ = \ -\delta_1\ (1 - z_1(t) - \varepsilon_1^*)\ z_1(t)\ (z_1(t) + \varepsilon_1^*).$$
   En divisant cette expression par $z_1(t)$, on aboutit à :
   $$\frac{\dot{z}_1(t)}{z_1(t)} \ = \ -\delta_1\ (1 - z_1(t) - \varepsilon_1^*)\ (z_1(t) + \varepsilon_1^*).$$
   Au voisinage de $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$, on déduit :
   $$\begin{aligned} \frac{\dot{z}_1(t)}{z_1(t)} &= -\delta(1 - \varepsilon_1^*)\varepsilon_1^* + \mathcal{O}(z_1^2(t)), \\ &\approx -\delta(1 - \varepsilon_1^*)\varepsilon_1^*\ <\ 0. \end{aligned}$$
   Comme nous l'avons postulé, le processus $\dot{\varepsilon}_1(t)$ est stable pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^*$.

Ainsi l'intervention de l'Ètat, par versement d'une indemnité compensatoire pour les entreprises qui adoptent la stratégie s_e, mais versée dans tous les cas où elles sont appariées avec les entreprises s_b, conduit à une répartition des entreprises entre les deux stratégies.

Comment interpréter le fait que $]0,1[$ soit le bassin d'attraction de ε_1^*. Supposons qu'initialement $\varepsilon_1(0) \in]0,\varepsilon_1^*[$. Dans ce cas, nous avons observé par l'équation (5.2) que $\mathbb{E}U(s_e) > \mathbb{E}U(s_b)$ parce que la fréquence des appariements entre s_e-entreprises est faible. La stratégie s_e est donc plus attrayante pour les entreprises qui vont progressivement l'adopter, en conséquence de quoi, par l'équation (5.2), $\varepsilon_1(t)$ va croître jusqu'en ε_1^*. Elle se maintient en ce point parce que le processus inverse se produit si $\varepsilon_1(0) \in]\varepsilon_1^*, 1[$. En effet, cette fois $\mathbb{E}U(s_e) < \mathbb{E}U(s_b)$, ce qui par le même raisonnement conduit à une diminution de $\varepsilon_1(t)$.

On note pour déterminer qu'une augmentation de l'indemnité induit un accroissement de la représentation de s_e-entreprises puisque :

$$\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial I} = \frac{\frac{V_b}{2}}{[\frac{V_e}{2} - I + \frac{V_b}{2}]^2},$$

et accélère la vitesse de convergence, puisque localement cette dernière est une fonction croissante de ε_1^*.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la possibilité d'intervenir de la manière la plus légère possible de telle sorte que les conflits récurrents entre les entreprises de transport cessent, dans le cadre d'un jeu évolutionnaire, dans lequel les entreprises de transport peuvent choisir d'afficher des salaires bas et donc des prix faibles ou des salaires élevés et donc des prix forts.

Nous avons montré qu'il n'est pas possible de maintenir sur le marché des transports des s_e-entreprises hors du champ de l'intervention de l'État.

Conclusion générale

Après avoir introduit la théorie des jeux classique, qui définit les notions de base de la théorie des jeux qui a été utilisée en premier par les économistes, nous avons précisé ses concepts de base et ses caractéristiques principales pour mieux comprendre le raisonnement apporté par cette théorie.

Dans ce mémoire, nous avons réalisé une synthèse des travaux sur la théorie des jeux évolutionnaires comprenant les éléments mathématiques fondamentaux de la théorie des jeux classique, la théorie des jeux évolutionnaires et la théorie de l'évolution.

Nous avons ensuite décrit la théorie des jeux évolutionnaires qui cherche à étudier la dynamique d'évolution des populations. Cette théorie a été utilisée principalement en biologie théorique pour décrire le comportement animal dans des environnements homogènes.

Contrairement aux jeux classiques, où les joueurs sont supposés être individuellement rationnels, ces derniers sont dotés d'une rationalité nulle ou limitée dans les jeux évolutionnaires. Ce qui explique que la notion d'équilibre de Nash ne peut pas être directement appliqué dans le contexte des jeux évolutionnaires. Cela nous a conduit à raffiner la notion d'équilibre de Nash et définir ainsi la notion de stratégies évolutionnairement stables, qui peuvent être aussi définies par la réplication dynamique des populations. Dans les deux cas, on aboutit à un état d'équilibre évolutionnairement stable. Enfin, pour mieux illustrer les notions précitées, nous avons présenté une application de la théorie des jeux évolutionnaires dans un problème de concurrence d'entreprises.

Nous pouvons conclure que la théorie des jeux évolutionnaires n'est intéressante que si nous la pratiquons convenablement. Elle a pour but de découvrir comment des individus dotés d'une rationalité limitée devraient interagir lorsqu'ils ont des intérêts conflictuels.

En guise de perspectives, nous pouvons citer quelques directions de recherche :

- Élargir notre étude aux cas où on est en présence de plusieurs populations dont les individus sont en interactions.

- Prendre en considération, la possibilité d'avoir des appariements multiples au lieu des appariements paires par paires.
- Pour pouvoir étudier plus de cas réels, nous envisageons une étude sur les possibilités d'application de la théorie des jeux évolutionnaires au cas des jeux multicritères.
- Pour pouvoir étudier le plus de comportements possibles, nous souhaitons introduire de nouvelles notions telles que la *coalition* entre agents. Ces situations sont souvent rencontrées dans la vie réelle comme par exemple le cas des entreprises qui coopèrent pour concurrencer d'autres entreprises sur le marché.
- Une autre notion importante que nous souhaitons prendre en considération consiste à introduire l'*apprentissage* dans le comportement des joueurs. Dans ce cas, nous considérons que les joueurs peuvent assimiler (mémoriser) les comportements de leurs adversaires au cours du temps. Ce comportement permet aux individus de connaître leurs adversaires et donc de mieux adapter leurs comportements.

Bibliographie

[1] Les approches économiques de la norme sociale : la réciprocité intergénérationnelle comme illustration. 1998.

[2] Stratégie évolutionnairement stable. *Wikipédia, l'encyclopédie libre*, 2005.

[3] C. Alós-Ferrer and A. B. Ania. The asset market game. *Journal of Mathematical Economics, Elsevier*, 2 :67–90, 2005.

[4] A. B. Ania. Evolutionary stability and Nash equilibrium in finite populations, with an application to price competition. *Journal of economic behavior and organization*, 2005.

[5] J. P. Aubin. *Initiation à l'analyse appliquée*. Masson, 1994.

[6] J. P. Aubin. Optima and equilibria : An introduction to non linear analysis. *Second Edition, Spring-verlang*, 1998.

[7] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusion (Set-Valued Maps and Viability Theory)*. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 1984.

[8] R. Axelrod. The evolution of cooperation. *Basic Book, United State of America*, 1984.

[9] T. Basar and G. J. Olsder. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press New York, 1982.

[10] P. Benhard and A. J. Shaiji. Evolutionary stable strategies and dynamics. tutorial, example, and open problems. *University of Nice Antipolis and CNRS*, Septembre 2005.

[11] D. T. Bishop and C. Cannings. A generalized war of attrition. *Journal of Theoretical Biology*, 70 :85–124, 1978.

[12] L. E. Blume. Population game. *Department of Economics, Cornell University, Ithaca*, 1999.

[13] I. Bomze. Non-cooperative two-person games in biology : A classification. *International Journal of Game Theory*, 15 :31–57, 1986.

[14] M. Broom. Evolutionary games with variable payoffs. *Biological modelling / Biomodelization*, 328 :403–412, 2005.

[15] J. S. Brown and T. L. Vincent. G-function for the hermeneutic circle of evolution. *Computers and operations research*, 33 :479–499, 2006.

[16] A. Cabrales. Evolutionary games- winter. 2005.

[17] G. Choquet. *Cours de topologie*. Masson, 1992.

[18] F. Clinet and C. Piatecki. Peut-on réguler un jeu évolutionnaire : une analyse des conflits réccurents dans le secteur des transports routiers. *Laboratoire d'économie d'orléans*, 1998.

[19] R. Cressman. Evolutionary game theory with two groups of individuals. *Games and Economic Behavior*, 11 :237–253, 1995.

[20] R. Cressman. Evolutionary dynamics and extensive form games. *International Review of Economics and Finance*, 15 :136–140, 2006.

[21] E. Van Damme. *Stability and perfection of Nash Equilibria*. Springer-Verlag, Berlin 1987, 2ème edition, 1991.

[22] E. Van Damme. Evolutionary game theory. *European economic review, Elsevier*, 38 :847–858, 1994.

[23] E. Van Damme and J. W. Weibull. Evolution and raffinement with endogenous mistake probabilites. *EEA conference*, 2000.

[24] K. G. Dastidar. On the existance of pure strategie bertrand equilibrium. *Economic Theory*, 5 :19–32, 1995.

[25] R. W. Diamand and M. A. Diamand. Théorie des jeux et analyse économique 50 ans aprés. *Von Neumann and Morgenstren in historical perspective*, 4 :539–57, 2000.

[26] Cooperative endavour Research groups. Behavioural models in economics and finance. *Departement of economics, university of vienna (austria) ; Departement of economics and economic history, university of salamanca (spain) ; Institute for empirical research in economics, university of zurich(switzerland)*, 2005.

[27] A. Ferhat. Sur les jeux non- antagonistes multicritères. *Université A. Mira de Béjaia*, 2005.

[28] R. A. Fisher. The genetic theory of natural selection. *Oxford, Clerendon, Press*, 1930.

[29] S. Fomine and A. Kolmogorov. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. MIR, 2ème edition, 1977.

[30] D. A. Fournie, C. C. Gomes, T. Gouzenes, and Y. Li. Introduction à l'interprétation stratégique de l'évolution des populations. *Ecole polythechnique, Paris*, 2005.

[31] D. Friedman. Evolutionary games theory. *Econometrica*, 59(3) :637–666, 1991.

[32] D. Friedman. On economic applications of evolutionary game theory. *Journal of evolutionary economic*, 8 :15–43, 1998.

[33] D. Friedman. Towards evolutionary game models of financial markets. 2000.

[34] J. S. Gale and B. J. Eaves. Logic of animal conflit. *Nature*, 254 :463–464, 1975.

[35] V. Geist. The evolution of horn-like organs. *Organs. Behavior*, 27 :175–213, 1966.

[36] G. Grand. La théorie des jeux. *Flammarion*, 2000.

[37] B. Guerrien. La théorie des jeux. *Economica, 2éme édition*, 1995.

[38] W. D. Hamilton. Extraordinary sex ratios. *Science*, 46 :477–488, 1967.

[39] M. Hazi. *Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier*. OPU, Ben-Aknoun Alger, Décembre 1993.

[40] T. Hens, I. Evstigneev, and K. Reiner Schenk-Hoppé. Evolutionary stable stock markets. 2003.

[41] T. Hens, S. Reinmann, and B. Vogt. Nash competitive equilibria and two-period fund separation. *Journal of Mathematical Economics, Elsevier*, 2004.

[42] C. Hickson. A review of evolutionary economics. *Journal of economic dynamics and control*, 22 :801–810, 1998.

[43] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, 1998.

[44] M. Howard. The evolution of trading rules in an artificial stock market. *University of Massachusetts, Amherst*, 1999.

[45] J. S. Huxley. Ritualization of behavior in animals and man. *Phil. Trans. Roy. Soc. b*, 30 :249–271, 1973.

[46] F. Kacher. Un concept d'équilibre pour un jeu coopératif sous forme normale ayant une structure de cooalitions et en presence de paramètres indetérminés. *Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou*, 1999.

[47] N. Khimoum. Résolution numérique d'un jeu bi-matriciel multicritère. *Université A. Mira de Béjaia*, 2007.

[48] S. Konieczny. Introduction à la théorie des jeux. *Université Paul Sabatier - Toulouse*, 2003.

[49] H. Kummer. Primate societies. *Group techniques of ecological adaptation, Chicago, Adline Press*, 1971.

[50] G. Van Der Laan and X. Tieman. Evolutionary game theory and the modelling of economic behavior. *Faculty of Economics and Econometrics, Free university, Amsterdam*, 1996.

[51] O. Labbani. Comparaison des théories des jeux pour l'études du comportement d'agents. *LIFL-USTL(Université des sciences et technologies de Lille)*, 2003.

[52] R. C. Lewontin. Evolution and the theory of games. *J. Theo. Biol*, 1, 1961.

[53] K. Lorez. On aggression. *Methuen, London*, 1966.

[54] R. H. MacArthur. In t. waterman and h. morowitlands. *Theoretical and Mathematical Biology, NY, Blaisdell*, 1965.

[55] G. J. Mailath. Introduction : symposium on evolutionary game theory. *Journal of economic theory*, 57 :259–277, 1992.

[56] J. Mathiot and R. Nadeau. Signification et portée des modèles d'évolution en économie et en sciences sociales. *Philosophiques*, 25(2) :151–161, 1998.

[57] J. Miekisz. Eequilibrium selection in evolutionary games with random matching of players. *Journal of Theoretical Biology*, 232 :47–53, 2005.

[58] H. Moulin. *Théorie des jeux pour l'économie et la politique.* collection méthodes, paris, hermann edition, 1981.

[59] J. Nash. Equilibrium point in n-person games. *Proccedings of the National Academy of Sciences*, 36 :48–49, 1950.

[60] J. Von Neumann and O. Morgenstern. Theory of game and economic behavior. *Princeton University Press*, 1994.

[61] I. Olivieri and P. H. Gouyon. Génétique évolutive et théorie des jeux. *Institut des sciences de l'Evolution,Université Montpellier II ; Evolution et Systématique des Végétaux, Université Paris-sud*.

[62] A. Orléan. Influence informationnelle et efficacité. *WP. CREA*, 1995.

[63] T. Ostrowski. Population equilibrium with support in evolutionary matrix games. *Linear Algebra and its Applications*, 417 :211–219, 2006.

[64] G. C. Parker. Assessment strategy and the evolution of fighting behaviour (animals conflits). *Journal of Theoretical Biology*, 45 :223–243, 1975.

[65] D. Phan. Jeux de population, dynamique des systèmes complexes et applications aux sciences humaines et sociales. *ENST, Bretagne*, Mars 2004.

[66] E. Pianka. Evolutionary stable strategies. *University of Texas at Austin, USA*, 2001.

[67] C. Piatecki. Le choix des études dans le cadre d'un jeu évolutionnaire. *Laboratoire d'économie d'orléans*, 1998.

[68] K. N. Prestwich. Game theory and evolutionary stable strategies. *Worcester, MA USA*, 1999.

[69] M. S. Radjef. Cours en post graduation sur la théorie des jeux et l'optimisation multicritère. *Université de A.Mira de Béjaia*, 2005.

[70] L. Samuelson. *Evolutionary Games and Equilibrium Selection.* MIT Press, Cambridge, Massachusettes, USA, 1998.

[71] L. Samuelson and J. Zhang. Evolutionary stability in assymetric games. *Journal of economic theory*, 57 :363–391, 1992.

[72] L. Schwartz. *ANALYSE ; Topologie générale et Analyse fonctionnelle.* Hermann, Paris, 1970.

[73] R. Selten. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4 :25–55, 1975.

[74] R. Selten. A note on evolutionary stable strategies in asymmetric animal conflits. *Journal of theoretical biology*, 84 :93–101, 1980.

[75] R. Selten. Evolutionary stability in extensive two-person games. *Mathematical social sciences*, 5 :269–363, 1983.

[76] J. Maynard Smith. The theory of games and the evolution of animal conflits. *Journal of theoretical Biology*, 47, 1974.

[77] J. Maynard Smith. Evolution and the theory of games. *Cambridge University Press*, 1982.

[78] J. Maynard Smith and G. Price. The logic of animal conflit. *Nature*, 246 :15–18, 1973.

[79] M. Souam. Cours de théorie des jeux. *Université François Rabelais de Tours*, 2005.

[80] J. Swinkels. Evolutionary stability with equilibrium entrants. *Journal of economic theory*, 57 :306–332, 1992.

[81] Y. Tanaka. Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentied goods. *International Journal of Industrial Organization*, 19 :1423–1440, 2001.

[82] P. D. Taylor and L. B. Jonker. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical biosciences, Elsevier*, 40 :145–156, 1978.

[83] T. Tazdait, J. C. Pereau, and A. Caparros. *Coopération et jeux non coopératifs.* CNRS Editions, Paris, 2005.

[84] S. Vanacker. Quelques résultats et applications surprenanates de la théorie des jeux. *Ecoles des mines de DUAI*, 2003.

[85] Y. Viossat. Equilibres corrélés, jeux d'évolution et dynamique de population. *Ecole polytechnique, Institut Henri Poincaré, Paris*, 2005.

[86] J. W. Weibull. Evolutionnary game theory. *Cambridge, MA : The M.I.T. Press*, 1995.

[87] J. W. Weibull. What have we learned from evolutionary game theory so far ? *Stockholm school of economics and I.U.I*, 1998.

[88] J. W. Weibull. Evolutionary stability and replicator dynamic. 2006.

[89] M. Willensdorfer and M. A. Nowak. Mutation in evolutionary games can increase average fitness at equilibrium. *Journal of Theoretical Biology*, 237 :355–362, 2005.

[90] O. Yaniv. Properties of a mixed ess candidate in continuous strategy sets. *Journal of Theorical Biology*, 238(4) :795–804, 2006.

[91] K. K. Yee. Ownership and trade from evolutionary games. *International review of law and economics*, 23 :183–197, 2003.

[92] M. Yildizoglu. *Introduction à la théorie des jeux.* Université de Bordeaux IV-Montesquieu, 2003.

[93] H. P. Young. *Individual strategy and social structure : an evolutionary theory of institutions*. Princeton University Press, 1998.

[94] J. Yu and G.X.Z. Yuan. The study of pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods. *Computers math. applic.*, 35 (9) :17–24, 1998.

[95] E. Zeeman. Dynamics of the evolution of animal conflits. *Journal of Theoretical Biology*, 89 :249–270, 1981.

Résumé

Dans ce mémoire, il a été présenté un état de l'art sur la théorie des jeux évolutionnaires, comprenant les éléments mathématiques fondamentaux de cette nouvelle classe de jeux. Contrairement aux jeux classiques, où les joueurs sont supposés être individuellement rationnels, ils sont dotés d'une rationalité nulle ou limitée dans les jeux évolutionnaires. Ce qui explique que la notion d'équilibre de Nash ne peut pas être directement appliqué dans le contexte des jeux évolutionnaires. Cela nous a conduit à raffiner la notion d'équilibre de Nash et définir ainsi la notion de stratégies évolutionnairement stables, qui peuvent être aussi définit par la réplication dynamique des populations. Dans les deux cas, on aboutit à un état d'équilibre évolutionnairement stable. Enfin, pour mieux illustrer les notions précitées nous avons construit un exemple sur un problème de concurrence d'entreprises.

Mots clés : Théorie des jeux évolutionnaires, stratégie évolutionnairement stable, réplication de dynamique, concurrence d'entreprises.

Abstract

In this thesis, it was presented a state of art on evolutionary games theory, consisting of fundamental elements mathematics of this new class of games. Contrary to classical games, where the players are assumed be individually rational, they are endowed without rationality or restricted one in evolutionary games. What explains that the notion of Nash equilibrium cannot be directly applied in the context of evolutionary games. It led us to defecate the notion of Nash equilibrium and to define the notion of evolutionary stable strategies so, who can to be also defines by the replicator dynamic of populations. In both cases, they lead to a state of evolutionary stable equilibrium. Finally, to illustrate the aforementioned notions we constructed an example on a problem of competition of firms.

Keywords : Evolutionary games theory, Evolutionary stable strategies, Replicator dynamic, Competition of firms.