

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université A.MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique



Mémoire

Présenté par Mr.DJEGHIOUR Rabah

En vue de l'obtention du diplôme de Magistère en physique

Option : Physique Théorique

Thème

Effet des parois internes sur le ballonnement dans les réservoirs rectangulaires

Soutenu publiquement devant le jury suivant :

Président	Mr ZEBBOUDJ Youcef	Professeur	U.A.M	Béjaia
Rapporteur	Mr MEZIANI Bachir	M.C.A	U.A.M	Béjaia
Examineur	Mr SADAOUI Djamel	M.C.A	U.A.M	Béjaia
Examineur	Mme MEHIDI Nadia	M.C.A	U.A.M	Béjaia

Université A.MIRA de Béjaia, 11 Juillet 2012

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers mon rapporteur de thèse monsieur Bachir Meziani, Maître de Conférences Classe A au département des physiques à l'Université A.MIRA de Béjaia, pour les consultations fructueuses qu'il m'a accordé. Son engagement et son intérêt ont constitué une réelle source de motivation. Ma reconnaissance est acquise pour tout ce que j'ai appris à ses côtés ; ce fut une chance et un privilège que de pouvoir travailler sous sa direction.

J'exprime aussi ma reconnaissance à monsieur Salah Haouat Maître de Conférences Classe A à l'Université de Jijel, pour le soutien qu'il m'a apporté en me faisant part de ses expériences, ses conseils judicieux ont été pour moi une aide précieuse.

J'exprime mes sincères remerciements à l'ensemble des examinateurs, à monsieur le Professeur Zebboudj Yousef qui a accepté de présider le jury.

Je tiens à remercier Sadaoui Djamel et Mehidi Nadia, Maîtres de Conférences Classe A à l'Université A.MIRA de Béjaia, d'avoir accepté d'examiner cette thèse. Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait en s'intéressant à mon travail et en acceptant de faire partie de mon jury de thèse, il reste pour moi un excellent exemple à suivre dans le domaine de la recherche. Je souhaite aussi adresser ma reconnaissance à tous mes enseignants, depuis le primaire.

Je tiens à exprimer mes plus sincères sentiments à ma famille, ma mère et mon père, pour leur support et encouragement. J'exprime également ma gratitude à mes frères et sœurs, Boughaba Linda, mes amis, pour leur patience et leur soutien durant toutes mes études.

Résumé

Le mémoire est consacré à l'étude de quelques problèmes d'effets des parois internes sur le ballottement dans un réservoir rectangulaire. Le cas de ballottement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire fixe sans bloc où l'effet de la tension superficielle est pris en compte est étudié en adoptant l'hypothèse de l'écoulement potentiel. Les fréquences et les modes propres sont déterminés. L'effet de barrière fine de perforation de surface dans le réservoir rectangulaire est étudié en appliquant deux méthodes pour calculer les fréquences propres. Ces méthodes comprennent la méthode de développement de fonction propre et la méthode d'approximation d'espacement large, les solutions sont déterminées analytiquement. Les effets d'un bloc rectangulaire submergé au fond sur les caractéristiques de ballottement du fluide dans les réservoirs rectangulaires sont étudiés en utilisant la théorie linéaire des ondes de gravité, les solutions déterminées analytiquement. Les résultats d'analyse indiquent que la taille et l'endroit du bloc influencent remarquablement sur les fréquences et les formes de mode de ballottement.

Mots-clés: *Ballottement; Parois internes; Modes propres.*

Abstract

The memory is devoted to the study of some problems of effects of the internal walls on sloshing in a rectangular tank. The case of sloshing of a fluid in a fixed rectangular tank without block where the effect of the surface tension is taken into account is studied by adopting the assumption of the potential flow. The natural frequencies and shapes modes are determined. The effect of fine barrier of surface-perforation in the rectangular tank is studied by applying two methods to calculate the natural frequencies. These methods include Eigen function method and the method of wide-spacing approximation, the solutions is determined analytically. The effects of a rectangular block submerged at the bottom on the sloshing characteristics of the fluid in rectangular tanks are investigated using the linear theory of the waves of gravity, the solutions determined analytically. The analysis results indicate that the size and location of the block significantly influence the sloshing frequencies and mode shapes.

Keywords: *Sloshing; Internal walls; Natural modes.*

Notations

$O - xyz$: Coordonnées cartésiens.
 P : Pression du fluide.
 g : Accélération de gravité.
 η : L'élévation de la surface libre.
 w : Fréquence propre de ballonnement.

Cas de ballonnement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire fixe

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$: La vitesse du fluide.
 h : Hauteur du fluide.
 a : Amplitude d'onde initiale.
 P_a : Pression atmosphérique.
 ρ : Masse volumique du fluide.
 σ : Coefficient de tension superficielle.
 ϕ : Potentiel des vitesses.
 l : Largeur du réservoir rectangulaire.
 L : Longueur du réservoir rectangulaire.
 k_{mn} : Nombre d'onde dans le cas d'une géométrie rectangulaire tridimensionnelle.
 k_n : Nombre d'onde dans le cas d'une géométrie rectangulaire bidimensionnelle.

Cas de ballonnement dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines

$2b$: Longueur du réservoir rectangulaire tridimensionnelle et bidimensionnelle.
 l : Largeur du réservoir rectangulaire.
 h : Hauteur total du fluide.
 a : Hauteur de bloc.
 Φ : Potentiel des vitesses.
 ϕ_1 : Potentiel de vitesse dans la région I .
 ϕ_2 : Potentiel de vitesse dans la région II .
 p, α, k : Nombre d'onde dans le cas d'une géométrie rectangulaire tridimensionnelle.
 m_n : Nombre d'onde dans le cas d'une géométrie rectangulaire bidimensionnelle.
 U_n : Coefficient de Fourier.
 R, T : Les coefficients de réflexion et transmission.
 $k_1(y, t)$: Le kernel.

Cas de ballonnement dans un réservoir en présence d'obstacles de forme rectangulaire

L : Longueur du réservoir rectangulaire.

h : Hauteur de bloc.

H : Hauteur du fluide supérieur.

d : Hauteur total du fluide.

a : Largeur du bloc.

ϕ : Potentiel des vitesses.

φ_1 : Potentiel de vitesse dans la région I .

φ_2 : Potentiel de vitesse dans la région II .

φ_3 : Potentiel de vitesse dans la région III .

k_j, k_{mj} : Les nombres d'onde dans les régions des liquides I et III .

k'_j, k'_{nj} : Les nombres d'onde dans la région de liquide II .

t_{1j}, t_{mj} : Les coefficients des transmissions.

r_{1j}, r_{mj} : Les coefficients des réflexions.

U_{aj}, U_{sj} : Les matrices sont liées aux coefficients de réflexion et de transmission.

V_{aj}, V_{sj} : Les vecteurs sont liées aux coefficients de réflexion et de transmission.

Table des matières

1	Étude bibliographique	12
1.1	Introduction	12
1.2	Le ballotement des liquides dans les réservoirs en l'absence de cloisons internes	14
1.3	Le ballotement des liquides dans les réservoirs en présence de cloison	17
1.4	Conclusion	22
2	Ballotement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire fixe	23
2.1	Introduction	23
2.2	Équation sous forme générale	24
2.2.1	Équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement	24
2.2.2	La forme des équations dans un réservoir de géométrie rectangulaire	27
2.3	Théorie linéaire	28
2.4	Solutions des équations	29
2.5	Résultats et discussion	32
2.5.1	Fréquences propres	32
2.5.2	Modes propres	33
2.6	L'influence de la capillarité et la fréquence propre sur l'élévation de la surface libre	39
2.7	Conclusion	45
3	Ballotement dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines	47
3.1	Introduction	47
3.2	Formulation de problème	48
3.3	Méthode de fonction propre pour la barrière verticale	50
3.3.1	Le ballotement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire avec une cloison	50
3.3.2	Équations du système	50
3.4	Solutions des équations	52

3.5	Approximation d'espace large	56
3.6	Résultats et discussion	58
3.7	Conclusion	60
4	Ballotement dans un réservoir en présence d'obstacles de forme rectangulaire	61
4.1	Introduction	61
4.2	Le ballotement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire avec une barrière	62
4.2.1	Équations du ballotement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire en présence d'un bloc submergé	62
4.3	La solution générale d'un réservoir rectangulaire avec un bloc rectangulaire .	63
4.3.1	Fréquences de ballotement	65
4.4	La forme de mode du ballotement sur la surface libre	66
4.5	Résultats et discussion	76
4.6	Fréquences et formes de modes de ballotement	76
4.7	Conclusion	85
A	Orthogonalité des fonctions	89
B	Les vecteurs et matrices liés aux coefficients de réflexion et de transmission	90

Table des figures

2.1	Le ballottement dans un réservoir de géométrie quelconque.	24
2.2	Le sloshing dans une cuve rectangulaire.	27
2.3	Variations des fréquences propres adimensionnelles en fonction du taux de remplissage h . Pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$, avec $\sigma = 0.005$, $\sigma = 0.02$, $\sigma = 0.04$. Pour (a, d) $\sigma = 0.005$, (b, e) $\sigma = 0.02$, (c, f) $\sigma = 0.04$. Gravité pure (Ligne continue) et gravité-capillarité (ligne discontinue).	33
2.4	Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/4$	34
2.5	Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/4$	35
2.6	Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/2$	36
2.7	Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/2$	37
2.8	Formes des modes pour un réservoir rectangulaire à 3D.	38
2.9	L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0$. . .	40
2.10	L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0.02$. .	41
2.11	L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0.1$. .	42
2.12	L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0.2$. .	43
2.13	L'influence de la capillarité sur l'élévation de la surface libre pour $t = 0.03$. .	44
2.14	L'influence de la capillarité sur l'élévation de la surface libre pour $t = 0.1$. . .	45
3.1	Le sloshing dans un réservoir rectangulaire avec un corps.	48
3.2	Le ballottement dans un réservoir rectangulaire avec une barrière verticale. .	50
3.3	Variation des fréquences kd en fonction a/d dans un réservoir rectangulaire avec une barrière au centre où $x_0 = 0, b/d = 0.5, d/h = 1$	58
3.4	Variation des fréquences kd en fonction a/d dans un réservoir rectangulaire avec une barrière loin du centre où $x_0 = 0, b/d = 0.4, d/h = 1$	59
4.1	Le réservoir rectangulaire avec un bloc submergé.	62
4.2	Les fréquences et les modes de ballottement pour différentes tailles d'un bloc au centre ($d/L = 0.5$) : (a) le réservoir rectangulaire avec une cloison est situé au centre de réservoir ($L = 30, d = 15$) ; (b) les fréquences de ballottement ; (c), (d), (e), (f), (g) les formes des modes.	77

4.3	Les fréquences et les modes de ballottement pour différentes tailles d'un bloc situé loin du centre ($d/L = 0.5$) : (a) le réservoir rectangulaire avec une cloison loin du centre de réservoir ($L = 30, d = 15$); (b) les fréquences de ballottement; (c), (d), (e), (f), (g) les formes de mode.	78
4.4	Les fréquences de ballottement pour des tailles du bloc (h/d) différentes; (a) premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode.	79
4.5	Les fréquences de ballottement pour des largeurs du bloc ($2a/L$) différentes; (a) premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode.	80
4.6	Les fréquences de ballottement pour un bloc situé dans des endroits (b/L) différents; (a) premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode.	81
4.7	Les formes des modes de ballottement pour des tailles du bloc (h/d) différentes; (a) le réservoir avec ($d/L = 0.2$); (b) le réservoir avec ($d/L = 0.5$).	82
4.8	Les formes de modes de ballottement pour un bloc situé dans des endroits (b/L) différents; (a) le réservoir avec ($d/L = 0.2$); (b) le réservoir avec ($d/L = 0.5$).	83

Introduction générale

Les vibrations se manifestent dans de multiples phénomènes physiques naturels et industriels tel que : navires, plates-formes offshore soumises à la houle, câbles électriques, gratte-ciel et ponts suspendus qui vibrent sous l'effet du vent. Dans d'autres situations, les mouvements du liquide à surfaces libres sont concernés dans beaucoup de problèmes de technologie tel que : l'oscillation de l'eau dans un réservoir en raison de tremblement de terre, l'oscillation du carburant liquide dans les réservoirs d'avions et de vaisseaux spatiaux, l'oscillation d'huile dans des grands réservoirs de stockage, les réservoirs du transport du gaz naturel liquéfié (GNL), l'oscillation dans la piscine de stockage de carburant nucléaire due au tremblement de terre, l'oscillation dans les systèmes biomécanique. Ces vibrations conduisent des dommages pour les structures concernées. Dans d'autres situations, le fluide est à l'intérieure : tuyauteries mises en vibration par l'écoulement interne, réservoir subissant l'effet de mouvement de la surface libre du liquide contenu. En particulier, nous nous intéressons, dans ce travail, au mouvement de la surface libre du liquide dans un réservoir. Ce mouvement s'appelle le ballottement (sloshing). Le ballottement signifie n'importe quel mouvement de la surface libre du liquide à l'intérieur de son récipient. Elle est provoquée par n'importe quelle perturbation dans les réservoirs liquides partiellement remplis. Selon le type de la perturbation et la forme de récipient, la surface libre du liquide peut éprouver différents types de mouvements comprenant le ballottement simple, symétrique plan, non plan, de rotation, asymétrique, quasi-périodique et chaotique. Ainsi, ces interfaces liquide-air oscillent sous la forme d'onde stationnaire. De telles ondes stationnaires peuvent être visualisées comme des modes de vibration propre du fluide, appelés modes du ballottement. La connaissance de ces modes et des fréquences propres jouent un rôle important dans les processus industriels où les fréquences du contrôle sont fixées afin d'éviter les risques d'endommagements.

Depuis les années 1900, des recherches ont été faites afin de comprendre le problème du ballottement des liquides dans plusieurs types de structures. Jusqu'ici, beaucoup d'études sur le ballottement des liquides dans les réservoirs de stockage ont été effectuées avec la supposition que les parois des réservoirs sont rigides et que les réservoirs ont le même mouvement que l'appui au sol. L'effet du couplage entre le mouvement liquide et la réponse dynamique de la structure de réservoir est totalement ignoré.

Des études sérieuses sur les phénomènes du ballottement ont été commencées à partir des années 50 pour la conception des réservoirs de carburant liquide des fusées et l'influence des parois internes sur le ballottement dans des réservoirs. Depuis le début des années soixante, le problème de la dynamique du ballottement de liquide a été une préoccupation principale des chercheurs étudiant le ballottement des ergols dans les réservoirs qui peuvent induire une instabilité du pilotage et une augmentation ou une chute de pression, échauffement des ergols et l'influence des parois internes sur le ballottement dans des réservoirs. Ainsi, de nouveaux domaines de recherche ont émergé. Dans les années 70 et le début des années 80, quelques méthodes numériques ont été mises en œuvre pendant ce temps. Récemment, quelques résultats de calcul, en utilisant les programmes de simulation, sont enregistrés pour l'analyse de ce phénomène. Jusqu'ici, beaucoup de résultats intéressants ont été introduits pour le problème du ballottement bidimensionnel et tridimensionnel.

Les solutions analytiques sont limitées aux formes géométriques des réservoirs rectangulaires avec ou sans bloc. Mathématiquement difficile à résoudre analytiquement, car les conditions aux limites de surface libre ne sont pas linéaires. Le traitement analytique des oscillations d'une surface libre d'un liquide confiné dans un réservoir rectangulaire avec ou sans bloc partiellement rempli, donne les fréquences propres et les formes des modes.

Le premier objectif de ce mémoire est de résoudre analytiquement les équations linéaires régissant le mouvement de ballottement d'un fluide confiné dans des réservoirs rectangulaires avec ou sans cloison. Le réservoir rectangulaire sans cloisons soumis aux forces de rappels de type gravitaires et capillaires. Le second objectif est plus important dans ce mémoire, nous étudierons les effets des parois internes sur le ballottement dans un réservoir rectangulaire. L'effet des parois internes comprend la taille du bloc par rapport à la dimension de réservoir et leurs dispositions.

Le plan de ce mémoire est réparti sur les quatre chapitres suivants. Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques travaux réalisés sur la dynamique du ballottement d'un liquide contenu dans un réservoir avec ou sans barrière. Cette revue bibliographique sera répartie en deux parties. La première partie présente l'étude de ballottement des liquides dans les réservoirs en l'absence de cloisons. La deuxième partie présente l'étude de ballottement des liquides dans les réservoirs en présence de cloisons.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons la théorie analytique linéaire détaillée du ballottement d'un fluide contenu dans un réservoir rectangulaire fixe où la capillarité est considérée. On présente les équations du modèle en adoptant quelques hypothèses simplificatrices, le fluide est considéré parfait, incompressible en écoulement irrotationnel. En effet, cette dernière condition nous permet de linéariser les équations autour d'un état d'équilibre et d'établir ainsi la relation de dispersion, $w = w(k)$, des ondes. Cette relation relie leurs pulsations w à leurs vecteurs d'onde k . La détermination de celle-ci conduit au calcul d'un spectre de valeurs propres, ce dernier étant discret dans le cas considéré et pour la géométrie étudiée.

La détermination des modes propres correspondants, conduit à la détermination de la forme des surfaces libres.

Le troisième chapitre traitera le ballottement dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines. Une paroi verticale est considérée au niveau de la surface libre. Nous étudierons les effets de barrières internes fines et la taille de barrière par rapport aux dimensions du réservoir. Nous présentons les équations du modèle en adoptant quelques hypothèses simplificatrices, le fluide est considéré parfait, incompressible en écoulement irrotationnel. Nous présentons deux méthodes pour calculer les fréquences propres. Ces méthodes comprennent la méthode de développement de fonction propre et la méthode d'approximation d'espacement large. La fréquence propre de la méthode d'approximation d'espacement large est calculée en fonction des coefficients de réflexion et de transmission. Afin de vérifier la validité de ces méthodes, la méthode de développement de fonction propre développée est comparée à la méthode d'approximation d'espacement large.

Le quatrième chapitre traitera le ballottement dans un réservoir rectangulaire en présence d'obstacles de forme rectangulaire. Nous présentons les équations du modèle en adoptant quelques hypothèses simplificatrices, le fluide est considéré parfait, incompressible en écoulement irrotationnel. Nous étudierons les effets de bloc interne et la taille du bloc par rapport aux dimensions du réservoir et de leur disposition. Les fréquences et les formes des modes calculés en présence des coefficients de réflexion et transmission. Les fréquences et la forme du mode de ballottement varient sensiblement dans le cas des réservoirs larges et avec un bloc grand.

Ce travail sera clôturé par une conclusion générale qui résume les résultats importants mis en évidence et donnera quelques perspectives.

Chapitre 1

Étude bibliographique

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude bibliographique des travaux réalisés sur la dynamique du ballonnement des fluides contenus dans un réservoir. Un intérêt particulier sera porté sur les méthodes analytiques et numériques traitant le ballonnement dans des réservoirs avec ou sans bloc avec parois rigides imperméables soumis au champ de gravité terrestre. L'étude sur le ballonnement de fluide est détaillée dans le livre d'**Ibrahim (2005)**. **Ibrahim** [17] a étudié la théorie linéaire et non-linéaire, ainsi que l'interaction linéaire et non-linéaire du ballonnement d'un fluide avec les structures élastiques et la dynamique d'un fluide dans des réservoirs en rotation et le sloshing en microgravité.

Par ailleurs, cette synthèse bibliographique est constituée de deux parties principales qui s'intéressent respectivement aux travaux traitant les ballonnements dans un réservoir sans cloison et les ballonnements dans un réservoir en présence de cloison.

Dans cette revue bibliographique, nous discuterons les méthodes analytiques et numériques qui traitent le ballonnement de liquide dans un réservoir avec ou sans cloisons.

La théorie linéaire du ballonnement de liquide dans un réservoir est universellement utilisée en raison notamment de sa simplicité et parce qu'elle permet de rendre compte des effets majeurs du ballonnement sur les obstacles. Cette théorie simplifie le problème de résolution de ces équations, elle néglige les termes non-linéaires. Elle est basée sur l'estimation de mouvement de la surface libre du liquide, les forces et les moments hydrodynamiques résultants. Les solutions explicites sont possibles seulement pour quelques cas particuliers tels que le réservoir rectangulaire avec ou sans cloisons.

La théorie linéaire ne rend pas compte de la forme réelle du profil de la surface libre (les crêtes sont plus « pointues » que les creux). De plus, l'expérience montre que lorsque la cambrure de ballonnement (rapport du creux sur la longueur d'onde) devient suffisamment grande, les crêtes se brisent et s'écroulent : c'est ce que l'on appelle le déferlement. Or la

théorie linéaire ne permet pas de montrer l'existence de ce phénomène. La théorie linéaire du ballonnement est adéquate pour déterminer les fréquences propres et l'amplitude de l'onde de la surface libre. Sous l'effet d'une excitation extérieure, la théorie linéaire est utilisée également pour prévoir la pression hydrodynamique, forces et moments. Cependant, elle ne tient pas compte du déplacement vertical important du centre de gravité du liquide pour les grandes amplitudes de mouvement de la surface libre. Elle ne prévoit pas également des phénomènes complexes observés expérimentalement près de la résonance. Ces phénomènes, le mouvement instable non plan de la surface libre liée à la rotation (ballonnement tournant) et le ballonnement chaotique qui sont mis en évidence en utilisant la théorie faiblement non-linéaires pour l'analyse quantitative et la théorie moderne de dynamique non-linéaire pour l'analyse de stabilité. Les sources principales des non-linéarités dans les équations apparaissent dans les conditions cinématique et dynamique à la surface libre.

La méthode non-linéaire importante est l'approche modale qui consiste à développer l'élévation de la surface libre inconnue de l'onde et le potentiel des vitesses du liquide en séries de Fourier généralisées. Leurs substitutions dans le problème original de la frontière libre ou la formulation variationnelle mène à un système d'équations ordinaires non-linéaires de dimension infini (système modal) couplant les coordonnées généralisées.

Plusieurs méthodes numériques ont été employées pour résoudre les problèmes de frontières libres et mobiles. Parmi ces méthodes, on peut citer la Méthode Lagrangienne, Eulérienne et Lagrangienne-Eulérienne arbitraires (ALE). Ces méthodes sont très précises mais des corrections fréquentes sont exigées et leur mise en œuvre est compliquée. Lorsque le mouvement du liquide est faible, la description lagrangienne est la voie la plus naturelle pour décrire la surface libre. Pour un grand mouvement, la maille liquide peut subir une grande déformation. Une autre formulation est alors employée : la formulation Eulérienne pour laquelle le maillage reste fixe et le liquide traverse la grille. La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est une méthode particulière qui peut être qualifiée de "Lagrangienne" car les particules modélisent naturellement le mouvement de la surface libre.

La Méthode de volume du fluide (VOF) est basée sur le concept d'une fraction du volume de liquide. Dans chaque cellule de maillage (volume de contrôle), il est usuel de maintenir seulement une valeur pour chaque quantité d'écoulement (par exemple, pression, vitesse, température). Selon ce raisonnement, l'utilisation d'une seule quantité, la fraction volumique du liquide en chaque cellule du maillage, est conforme à la résolution des autres quantités d'écoulement [35]. Si nous connaissons la quantité de liquide sur chaque cellule, il est possible de localiser les surfaces, de déterminer les pentes et les courbures extérieures pour chaque cellule donc, nous obtenons la forme de la surface libre liquide. Cette fraction volumique valant 0, correspond à une cellule remplie d'air, et 1, à une cellule remplie d'eau. Les fractions comprises entre 0 et 1 indiquent des cellules composées d'air et du liquide. L'équilibre des pressions dans ces cellules permet de déterminer la valeur de la fraction volumique ainsi que les limites physiques du domaine fluide dans un maillage.

Pour étudier le comportement du ballonnement, des expériences sont la plupart de temps

utilisées mais elles exigent beaucoup de moyens et de temps. Pendant la dernière décennie, beaucoup de chercheurs ont utilisé la simulation numérique.

1.2 Le ballottement des liquides dans les réservoirs en l'absence de cloisons internes

Budiansky (1960) [1] a analysé le ballottement du liquide dans les canaux circulaires et les réservoirs sphériques partiellement remplis et soumis à une accélération latérale de type harmonique de petite amplitude. L'étude a évalué les fréquences naturelles et les modes propres sous l'influence du taux de remplissage en utilisant la théorie d'écoulement potentiel. Il a démontré que la première fréquence naturelle du ballottement augmente avec l'augmentation du taux de remplissage. Il a calculé les forces exercées sur les cloisons du récipient et a conclu que le taux de remplissage est un facteur important. L'étude de **Budiansky** a mené à beaucoup d'analyses sur le principe fondamental des fréquences du ballottement et le comportement du ballottement du liquide dans les réservoirs partiellement remplis.

Bauer (1963) [2] a étudié le ballottement de liquide dans un réservoir circulaire divisé en quatre secteurs égaux. Le réservoir est supposé rigide, soumis aux excitations de translation et de rotation. Les forces et les moments du liquide sont obtenus par l'intégration de la distribution de pression le long des murs du réservoir. Les résultats des études théoriques comparées aux valeurs expérimentales disponibles s'avèrent en bon accord.

L'interaction entre un liquide et la paroi élastique d'un réservoir rectangulaire bidimensionnel contenant ce liquide avec une surface libre a été étudié par **Chai et al. (1996)** [40]. Ils ont obtenu la solution linéaire basée sur la théorie potentielle. Les fréquences et les modes propres du système couplé ont été donnés explicitement. Les résultats concernent la mise en évidence de l'existence de deux types de modes propres :

- Le mode de type structure dont la forme propre est similaire à celle de structure.
- Le mode de type des fréquences couplées proches des fréquences propres non-couplées du fluide.

Warnitchai et Pinkaew (1998) [3] ont étudié les effets d'amortissement des dispositifs sur le ballottement dans les réservoirs rectangulaires rigides en utilisant un modèle bidimensionnel. Dans leur formulation, Ils ont supposé que le liquide est non visqueux, incompressible et irrotationnel. Les effets de tension superficielle ont été ignorés. Leur modèle numérique a été employé pour déterminer les effets des pôles verticaux, des cloisons et des filets sur le contrôle de ballottement du liquide.

Le ballottement du liquide incompressible et sans frottement dans un réservoir rectangulaire infiniment long où la surface libre est partiellement couverte, ont été étudiés par **Bauer et Eidel (2000)** [4]. Ils ont présenté les fréquences et la réponse à l'excitation de translation forcée harmonique. Ils ont comparé les résultats avec un réservoir non couvert.

Ils ont remarqué que les fréquences de ballotement augmentent avec l'augmentation de la surface libre couverte, en réduisant ainsi le mouvement du ballotement.

Faltinsen et al. (2000) [5] a établi une théorie modale tridimensionnelle (multidimensionnelle) importante par rapport aux autres théories modales non-linéaire pour un fluide parfait, incompressible en écoulement irrotationnel, dans un réservoir. La méthode modale multidimensionnelle, est le meilleur outil pour résoudre la dynamique non-linéaire du ballotement de liquide. Le mouvement de la surface et le potentiel des vitesses sont développés en utilisant les séries de Fourier généralisées. Cette théorie est dérivée de principe variationnel de **Bateman (1944)**[41] et **Luke (1967)**[42]. La méthode suppose une dimension infini. L'approximation modale multidimensionnelle est utilisée pour analyser le ballotement dans un réservoir rectangulaire de profondeur finie. La bonne concordance avec les expériences a été démontrée. Les transitions et le ballotement non-linéaire associés sont importants pour cette théorie. Ce modèle est limité quand l'élévation de la surface libre est l'ordre de la profondeur de ce fluide ou de largeur du réservoir et aussi quand la profondeur est près de la valeur critique dans l'eau peu profond.

Faltinsen et Timokha (2001) [6] ont proposé une méthode pour résoudre ce problème pour le ballotement résonnant dû à l'excitation sinusoïdale du mode primaire dans un réservoir rectangulaire. La méthode modale multidimensionnelle s'avère donc efficace et numériquement robuste. Ainsi, cette méthode peut être développée pour étudier des problèmes du ballotement plus complexes.

Frandsen et Borthwick (2003) [7] ont étudié le mouvement du ballotement d'un liquide dans les réservoirs rectangulaires fixes et verticalement excités. Ils ont développé un modèle numérique bidimensionnel non-linéaire qui décrit ce mouvement. Ils ont utilisé la méthode des différences finies sur une grille pour la résolution numérique des équations régissant l'écoulement. Une grille linéaire horizontale est également appliquée de sorte que le domaine numérique résultant soit rectangulaire, et se compose de cellules carrées unitaires. Ce modèle numérique est validé en simulant les ondes stationnaires de différentes longueurs d'onde dans le réservoir rectangulaire rigide et fixe. Ils ont démontré l'impuissance des solutions analytiques de premier et second ordre d'expliquer les effets non-linéaires d'ordre élevé sur les formes d'ondes, en augmentant la cambrure d'onde. Ils ont observé que le comportement du ballotement dans un réservoir excité verticalement est équivalent au ballotement libre dans un réservoir fixe quand le paramètre d'excitation est faible. Dans les régions instables les mouvements verticaux produisent des effets. Dans les régions stables les solutions restent finies à tout moment.

Cho et Lee (2004) [8] ont utilisé la méthode d'éléments finis précise et stable pour analyser le ballotement du liquide de grand amplitude dans le réservoir bidimensionnel soumis à une excitation. Le problème de ballotement est formulé comme un problème de valeur aux frontières basées sur la théorie d'écoulement potentielle non-linéaire. Les résultats numériques ont été comparés aux résultats de référence. Ils ont observé également que la

méthode numérique proposée est précise et vérifie la stabilité.

Frandsen (2004) [9] a exploré le comportement des mouvements des liquides dans un réservoir soumis à une excitation simultanée dans les directions horizontale et verticale. Il a étudié les effets de ce comportement en comparaison avec le mouvement horizontal pur et le mouvement vertical pur. Il a remarqué l'existence d'un nombre infini de fréquences de résonance additionnelles en raison du mouvement combiné du réservoir.

Vamsi et Ganesan (2006) [10] ont présenté une approche semi-analytique basée sur les éléments finis qui discrétisent la structure du réservoir cylindrique rempli de fluide. Le potentiel des vitesses a été approximé par des fonctions polynômiales au lieu des fonctions de Bessel. L'étude a été effectuée pour les réservoirs élastiques et viscoélastiques. Ils ont conclu que l'approche polynômiale serait meilleure et plus générale que l'approche de fonction de Bessel.

Yue et Wang (2006) [11] ont utilisé la méthode numérique pour étudier le problème dynamique de la surface libre tridimensionnelle. Cette méthode utilise un procédé numérique précis en calculant les vecteurs propres des nœuds sur la surface libre. Les résultats numériques ont été comparés aux résultats expérimentaux et analytiques. Ces méthodes peuvent décrire d'une façon précise la dynamique de la surface libre à trois dimensions. Ils ont observé également dans des exemples numériques des instabilités dynamiques, telle que la réponse harmonique secondaire d'une surface libre dans un réservoir cylindrique. L'effet d'une cloison d'amortissement rigide sous forme d'anneau sur le mouvement de la surface libre a été évalué numériquement. Ils ont observé que la présence de la cloison peut réduire considérablement l'amplitude de l'onde.

Le ballotement du liquide d'une grande amplitude dans les réservoirs rectangulaires et cylindriques soumis à une excitation de rotation, a été étudié par **Yue(2008)** [12]. En utilisant la même méthode. Cette méthode est précise pour calculer le ballotement du liquide tridimensionnel de grande amplitude dans les réservoirs sous l'excitation de rotation. Les résultats numériques montrent évidemment la présence des sauts hydrauliques et des ondes stationnaires.

Virella et al. (2008) [13] ont utilisé la méthode d'éléments finis pour étudier un modèle numérique. Ce modèle a étudié l'influence de la théorie non-linéaire des ondes sur les fréquences propres du ballotement bidimensionnel et la distribution modales de la pression pour les réservoirs rectangulaires. Les périodes et la forme des modes propres sont évaluées et comparées au modèle théorique linéaire et non-linéaire des ondes. Les distributions de pression agissant sur les murs du réservoir sont obtenues pour les trois premiers modes du ballotement en utilisant la théorie linéaire et non-linéaire des ondes. Les hauteurs de plus grandes pressions ont été obtenues en utilisant la théorie non-linéaire. La théorie linéaire a continuellement estimée l'importance de la distribution de pression.

Les simulations numériques par éléments finis des ballotements d'un réservoir rectangu-

laire partiellement rempli de liquide a été étudié par **Belakroum et al. (2008)** [14]. Le comportement non-linéaire de la surface libre et l'effet de la viscosité sont pris en considération. Ils ont employé une formulation Lagrangienne Eulérienne Arbitraire (ALE) des équations de Navier-Stokes largement utilisées pour le traitement des problèmes présentant des surfaces libres, des frontières mobiles, des grandes déformations ainsi que des interfaces de contact. La méthode numérique utilisée est celle des éléments finis stabilisés, dite de Galerkin moindre carré (GLS). Les effets de variation de la fréquence d'excitation extérieure harmonique horizontale, de la hauteur relative de la colonne du liquide et de l'inclinaison des parois solides latérales du réservoir ont été étudiés. Les résultats sont validés par rapport à des résultats numériques et analytiques.

Chantasiriwan (2009) [15] a étudié l'analyse modale de vibration libre de liquide dans le réservoir rigide par la méthode de solution fondamentale. Cette méthode est utilisée pour trouver des fréquences et des modes propres. La méthode de solution fondamentale a un avantage par rapport à la méthode d'éléments finis et à la méthode d'éléments de frontière parce qu'elle n'exige pas la génération de maille de volume ou la génération de maille de surface. Des analyses modales sont exécutées pour le réservoir cylindrique, le réservoir cylindrique en quart de cercle, le réservoir cylindrique en triangle équilatéral, le réservoir hémisphérique, et le réservoir cylindrique avec cloison. Cette méthode s'avère en bon accord avec résultats analytiques et numériques.

Firouz-Abadi et al. (2009) [16] ont développé un modèle numérique en utilisant la méthode d'éléments de frontière (BEM), ce modèle détermine la fréquence propre et la forme du mode propre de ballonnement d'un liquide dans le réservoir tridimensionnel avec des géométries arbitraires. Le liquide est considéré comme non visqueux et incompressible et l'amplitude d'oscillation est supposée petite. La méthode d'éléments de frontière (BEM) a été employée le long des parois et la condition de la surface libre pour obtenir les équations régissant le mouvement de liquide. Le modèle numérique valide pour la répartition en zones d'un réservoir, résout le problème de modélisation des cloisons. Le réservoir est divisé en quelques zones différentes. Chaque zone est un modèle complet d'éléments de frontière qui a les éléments communs de frontière avec les autres zones dans des interfaces. L'avantage de la répartition est que les matrices sont calculées pour chaque zone indépendamment, ce qui réduit le temps de traitement en utilisant le calcul des matrices pour différentes zones au lieu d'une grande matrice pour le modèle entier. Les résultats obtenus s'avèrent en bon accord avec les résultats des autres méthodes.

1.3 Le ballonnement des liquides dans les réservoirs en présence de cloison

Les fréquences de résonance dans un réservoir avec une cloison verticale a été étudié par **Evans et McIver (1987)** [18]. Notons que **Evans et McIver** ont étudié aussi les effets d'une

cloison verticale mince sur les fréquences de ballottement dans un réservoir rectangulaire en utilisant la théorie linéaire des ondes de gravité. Ils ont résolu une équation intégrale en utilisant la méthode de développement de fonction propre pour décrire le mouvement bidimensionnel. Les résultats obtenus s'avèrent en bon accord avec les résultats des autres méthodes.

Watson et Evans (1991) [19] ont étudié les fréquences de ballottement dans un réservoir rectangulaire avec un bloc rectangulaire submergé, qui a été placé au centre du réservoir. Ils ont considéré le potentiel symétriques et antisymétriques séparément. Ils ont employé la méthode de développement en fonction propre et des développements de Galerkin pour déterminer les fréquences de ballottement. Les résultats obtenus s'avèrent en bon accord avec les résultats des autres méthodes.

Choun et Yun (1996, 1999) [20, 21] ont présenté un traitement analytique des réservoirs rectangulaires avec un bloc submergé en utilisant la théorie linéaire des ondes de gravité. Ils ont déterminé les fréquences et la forme du mode dans un réservoir rectangulaire avec un bloc submergé de taille et de position arbitraire. Les fréquences et la forme du mode de ballottement varient sensiblement dans le cas des réservoirs larges et avec un bloc grand.

Les caractéristiques dynamiques de réservoir rectangulaire rempli de liquide avec des cloisons a été étudié par **Biswal et al. (2003)** [22]. Le réservoir est considéré rigide. Le ballottement du liquide dans un réservoir rectangulaire avec ou sans cloisons est étudié sous une excitation sinusoïdale. Une solution linéaire explicite, en utilisant la formulation en éléments finis pour l'analyse de ballottement bidimensionnelle du réservoir rectangulaire rempli par un liquide avec des cloisons et la théorie linéaire de l'onde où on suppose que aussi bien les mouvements du liquide que du réservoir sont petits. Ils ont calculé les fréquences de ballottement du liquide pour différentes dimensions et positions de la cloison. Les résultats pour le réservoir sans cloison obtenus sont comparables aux résultats disponibles. Les résultats de cette étude pour le réservoir avec des cloisons sont comme suite [34] :

- L'influence de la cloison sur la fréquence de ballottement est réduite graduellement (la cloison vers le fond de réservoir).
- L'influence de la cloison sur la fréquence de ballottement est négligeable (la cloison près de le fond de réservoir).
- L'influence de la cloison sur la fréquence de ballottement plus grand (la cloison est plus approchée à la surface libre).

Cho et al. (2005) [23] ont présenté l'analyse numérique des caractéristiques de résonance du ballottement de liquide dans un réservoir rectangulaire bidimensionnel avec une paire de cloisons. Le réservoir et cloison sont rigides. Le réservoir avec cloisons est soumis à une excitation harmonique horizontale. Ils supposent que le liquide est incompressible, non visqueux et l'écoulement de ballottement irrotationnel. Ils ont employé la méthode d'éléments finis pour analyser le ballottement résonant dans le domaine de fréquence. Ils ont déterminé les

fréquences dans un réservoir rectangulaire bidimensionnel avec une paire de cloisons submergées et peuvent changer considérablement selon le nombre, la position et la largeur de la cloison. Les résultats numériques ont été comparés aux résultats analytiques.

Une approche analytique pour étudier les caractéristiques du ballotement et des modes d'enflamment pour un réservoir de stockage, rempli de liquide, cylindrique circulaire rigide avec un toit annulaire élastique a été étudié par **Kim et Lee (2005)** [25]. Ils ont examiné les effets du rapport des rayons, de l'épaisseur du toit annulaire et du volume de liquide sur des caractéristiques de vibration du réservoir de stockage. Le liquide est supposé non visqueux et incompressible. Le domaine liquide est limité par une paroi cylindrique rigide et un fond plat rigide. Ils ont supposé que la solution pour le potentiel des vitesses comme une fonction harmonique qui satisfait l'équation de Laplace et les conditions de frontières appropriées. Ils ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour calculer les fréquences et les modes propres d'enflamment. Les résultats de l'approche analytique sont comparés avec les résultats des autres méthodes pour le réservoir cylindrique rigide avec ou sans couverture annulaire.

Gavrilyuk et al. (2006, 2007) [24] ont étudié le ballotement d'un liquide parfait, incompressible en écoulement irrotationnel dans un réservoir cylindrique vertical avec une cloison annulaire. Cette étude est partagée en deux parties : La première partie est axée sur la solution fondamentale linéaire du problème de ballotement de fluide dans un réservoir cylindrique circulaire vertical avec une cloison horizontale rigide en anneau mince. La deuxième partie est axée sur les ondes résonnantes non-linéaires [28]. Dans la première partie, ils ont développé une approche analytique qui fournit des approximations précises des fréquences et des modes propres. Une analyse numérique détermine les fréquences et les modes propres entre la position verticales et la largeur de cloison annulaire. Dans la deuxième partie est examiné le ballotement résonant non-linéaire dans un réservoir cylindrique circulaire avec un liquide d'une grande hauteur en utilisant une méthode asymptotique, qui est basée sur la théorie asymptotique de Moiseyev.

Biswal et al. (2006) [26] ont fait une analyse non-linéaire de ballotement de liquide dans un récipient rectangulaire rigide bidimensionnel avec les cloisons rigides. Le réservoir rectangulaire avec les cloisons sont étudiés sous l'effet d'une excitation de translation. Le fluide est supposé non visqueux et incompressible. Ils ont utilisé la méthode d'éléments finis et la formulation Eulerian-lagrangien pour calculer l'amplitude non-linéaire de ballotement du liquide. La solution est obtenue par la méthode de Galerkin, en utilisant la méthode de Runge-kutta de quatrième-ordre pour calculer la solution numérique dans le domaine de temps. Numériquement, ils ont étudié les réservoirs rectangulaires bidimensionnels partiellement remplis de liquide sans et avec cloisons. Ces réservoirs sont soumis à une accélération horizontale sinusoïdale. Les effets des paramètres de cloison tels que la position, la dimension et les nombres sur la réaction de système ont été étudiés. Ils ont comparé les études de la réponse linéaire et la réponse non linéaire. Le résultat numérique de réservoir rectangulaire

avec des cloisons montre que l'amplitude non-linéaire de ballonnement à la paroi de réservoir augmente avec l'augmentation h/H et diminue avec l'augmentation de rapport w/b . Ils ont comparé la réduction de ballonnement de réservoir rectangulaire avec un, deux et trois cloisons et le ballonnement du réservoir rectangulaire sans cloison.

Arafa (2007) [27] a étudié un modèle numérique en utilisant la méthode d'éléments finis, ce modèle examine le ballonnement des liquides dans les réservoirs rectangulaires partiellement remplis subissant l'excitation horizontale. Le domaine liquide est discrétisé par des éléments rectangulaires de quatre-nœud bidimensionnel avec le potentiel de vitesse représentant les degrés de liberté nodaux. Il examine le ballonnement des liquides dans un réservoir rectangulaire avec un bloc vertical et horizontal submergé. Les résultats numériques ont été comparés aux autres méthodes et s'avèrent en bon accord. L'effet d'une cloison d'amortissement rigide de forme rectangulaire sur le mouvement de la surface libre a été évalué numériquement, Il a observé que la présence de la cloison peut réduire considérablement l'amplitude de l'onde. En générale, la présence de la cloison réduit les fréquences de ballonnement.

La dynamique de ballonnement d'un réservoir rigide partiellement rempli avec des blocs submergés au fond a été étudié par **Mitra et Sinhamahapatra (2007)** [29]. Ils ont utilisé la méthode d'éléments finis basée sur la pression pour analyser la dynamique de ballonnement d'un récipient partiellement rempli avec les blocs submergés. Le fluide est homogène, isotrope, non visqueux, irrotationnel, compressible. Les résultats numériques obtenus sont comparés aux solutions existantes. L'étude du système de réservoir de fluide montre que l'influence de la taille et de la largeur de la structure submergée est très forte sur la dynamique de ballonnement. Ils ont observé que la pression hydrodynamique à la surface libre du réservoir rectangulaire montre une variation considérable pour des largeur et des tailles des blocs différentes.

L'effet des cloisons sur un réservoir cubique partiellement rempli a été étudié par **Eswaran et al. (2008)** [30]. Le fluide est considéré parfait, incompressible en écoulement irrotationnel et newtonien dans un réservoir tridimensionnel. Les simulations numériques ont été effectuées en utilisant la méthode de volume du fluide (VOF) avec la formulation Lagrangiennes-Eulériennes arbitraire qui adopte le déplacement du solide, la pression et le déplacement dans le fluide comme variables de modélisation du système couplé. Ce système couplé est obtenu en employant le logiciel **ADINA** qui offre des possibilités d'interaction de la structure avec le fluide par la méthode d'éléments finis. Les résultats obtenus sont comparés aux données expérimentales disponibles pour démontrer la réduction d'effets de ballonnement en modèle liquide.

Liu et Lin (2008) [31] ont développé un modèle numérique pour étudier le ballonnement d'un liquide dans un réservoir tridimensionnel avec des cloisons. Ce modèle numérique résout les équations de Navier-Stokes qui sont construites dans un référentiel non-inertiel avec six degrés de liberté. Les cloisons dans le réservoir sont modélisées par le concept

de la méthode virtuelle de la force de frontière (VBF). Le ballottement de liquide dans les réservoirs bidimensionnel avec des cloisons horizontales et verticales est alors étudié. Le modèle est validé d'abord avec la solution analytique et les données expérimentales pour le ballottement de liquide bidimensionnel dans un réservoir sans cloisons. Pour des petites amplitudes de ballottement, les résultats numériques sont conformes à la théorie linéaire et aux données expérimentales. Ils ont comparé la cloison horizontale et la cloison verticale pour réduire l'amplitude de ballottement.

Les vibrations couplées d'un réservoir cylindrique partiellement rempli de fluide avec une cloison interne cylindrique a été étudié par **Askari et Daneshmand (2009)** [32]. Ils ont examiné les effets d'une cloison interne rigide sur les vibrations couplées d'un réservoir cylindrique, de rayon de la cloison interne et de la longueur de barrière interne sur les fréquences propres. Ils ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour calculer les fréquences et les modes propres d'un récipient cylindrique partiellement rempli de fluide. Le domaine de liquide est continu, simplement relié, et non convexe. Le potentiel des vitesses pour le mouvement de liquide est formulé en termes d'un développement de fonction propre pour deux régions de liquides. Les équations résultantes sont résolues en employant la méthode de Galerkin. Les résultats de la méthode proposée sont en bon accord avec les solutions expérimentales et numériques disponibles.

Des travaux de recherche sont consacrés au ballottement d'amortissement dans les réservoirs rectangulaires avec cloison soumis à une excitation dynamique. Une approche analytique, de solution et la recherche expérimentale sont conduites pour décrire l'amortissement hydrodynamique qui est fourni par les cloisons verticales et horizontales dans les réservoirs rectangulaires partiellement remplis a été étudié par **Goudarzi et al. (2009)** [33]. En utilisant la formulation en potentiel de vitesses et la théorie linéaire de l'onde. Dans ce travail, une série d'expériences est effectuée avec un réservoir rectangulaire avec des cloisons verticales et horizontales. Les résultats de cette étude sont comme suite :

- Les cloisons horizontales sont plus efficaces que les cloisons verticales.
- L'efficacité des cloisons horizontales diminue lorsque la profondeur du liquide diminue.

Vu les mesures expérimentales des cloisons verticales et horizontales, les cloisons horizontales ont des effets d'atténuation dans les réservoirs minces. Tandis que, les cloisons verticales sont plus efficaces dans les réservoirs larges(avec de petite profondeur de liquides).

Faltinsen et al. (2011) [36] ont étudié les fréquences et les modes propres de ballottement dans un réservoir rectangulaire avec un écran de type lamelle. Le ballottement de fluide parfait, incompressible en écoulement irrotationnel, en utilisant la théorie de ballottement linéaire et la méthode de décomposition de domaine. Ils ont construit une solution approximative pour des modes propres antisymétriques de ballottement dans un réservoir rectangulaire avec un écran de type lamelle au milieu de réservoir.

L'effet des cloisons sur les oscillations des liquides dans les réservoirs circulaires horizontaux partiellement rempli a été étudié par **Hasheminejad et Mohammadi (2011)**

[37]. Ils ont utilisé une analyse hydrodynamique bidimensionnelle exacte basée sur la théorie potentielle linéaire pour étudier les caractéristiques de ballonnement des modes transversaux dans un réservoir circulaire horizontale non déformable. Ils ont examiné les effets du niveau de liquide et l'arrangement des cloisons sur les fréquences de ballonnement et les formes de modes de pression hydrodynamiques. En générale, les fréquences de ballonnement diminuent en raison de la présence de bloc.

1.4 Conclusion

La synthèse bibliographique proposée ici n'est pas exhaustive. C'est la raison pour laquelle cette étude bibliographique s'est limitée aux articles publiés sur le ballonnement des fluides dans des réservoirs avec ou sans cloison soumis au champ de gravité. L'étude bibliographique comprend les méthodes analytiques (traitant la théorie linéaire et non-linéaire) et numérique. Nous remarquons jusqu'à nos jours, de nombreux développements théoriques, numériques et expérimentaux ont exploité les différentes facettes du problème. En outre, la disponibilité des solutions analytiques diminue rapidement avec l'augmentation de la complexité du phénomène, le cas des réservoirs complexes, ainsi que le comportement non-linéaire de la surface libre ou l'interaction du fluide avec les parois du réservoir (la structure) et l'effet de parois interne sur le ballonnement dans un réservoir. En fait, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable comme d'ailleurs dans la plupart des problèmes dans lesquels intervient la physique des fluides ou l'ingénierie moderne.

L'objectif de ce travail sera l'étude des caractéristiques du ballonnement dans un réservoir rectangulaire avec un bloc submergé qui peuvent changer considérablement selon la taille et la position du bloc. En outre, nous déterminons les fréquences et la forme du mode dans un réservoir rectangulaire avec un bloc submergé de taille et de position arbitraire en utilisant la théorie linéaire des ondes de gravité. En effet, nous proposons d'abord d'examiner dans le chapitre qui suit les mouvements de faible amplitude d'un fluide avec surface libre contenu dans un réservoir rectangulaire fixe et rigide de profondeur uniforme. Ainsi, nous déterminons et nous étudions l'effet de la capillarité sur les fréquences et les modes propres du ballonnement linéaire.

Chapitre 2

Ballottement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire fixe

2.1 Introduction

La dynamique d'un fluide à surface libre, contenu dans un réservoir, est caractérisé par des fréquences et des modes propres. Les caractéristiques principales de tels modes seront décrites ci-dessous, pour lesquels les solutions linéaires peuvent être déterminées.

Dans ce chapitre, on traite respectivement la théorie linéaire détaillée du ballottement d'un fluide contenu dans un réservoir de géométrie rectangulaire, où la capillarité est considérée. On présente les équations générales du mouvement d'un fluide, le fluide est considéré parfait, incompressible en écoulement irrotationnel.

La difficulté dans l'étude du mouvement de la surface libre est dans les conditions aux limites de surface libre, qui ne sont pas linéaires. Du fait des termes non-linéaires qui apparaissent dans les conditions cinématiques et dynamiques. On développe les équations régissant le ballottement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire considéré immobile. Après avoir linéarisé ces équations, on cherche des solutions analytiques en utilisant la méthode de séparation des variables, l'hypothèse des oscillations de faible amplitude est adoptée. Les fréquences et les modes propres seront déterminés après avoir développé et linéarisé les équations gouvernant le comportement de la surface libre. Les fréquences propres du liquide apparaissent dans les conditions de la surface libre combiné (cinématique et dynamique) plutôt que dans l'équation de continuité (Laplace).

La dernière partie est consacrée à l'évaluation numérique de ces solutions analytiques, en montrant évidemment l'influence de la tension superficielle sur les fréquences propres et modes propres obtenus.

2.2 Équation sous forme générale

Le cas général d'un réservoir fixe. Le repère choisi est fixé au réservoir tel que le plan Oxy coïncide avec la surface libre non perturbée, comme illustrée dans la figure 2.1 :

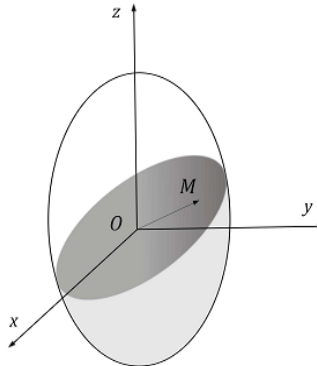


FIG. 2.1: Le ballonnement dans un réservoir de géométrie quelconque.

2.2.1 Équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement

Les équations régissant le mouvement d'un fluide dans un réservoir sont : les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On considère le fluide incompressible et non visqueux. La variable verticale est désignée par z . Les équations du mouvement s'écrivent comme suit :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla(-gz). \quad (2.2)$$

où \vec{v} , P et ρ sont respectivement la vitesse, la pression, la masse volumique du liquide, gz est le potentiel gravitationnel. Ces équations constituent un système de quatre équations aux dérivées partielles non-linéaires à quatre inconnues v_1 , v_2 , v_3 , et P . Par ailleurs, ces équations avec des conditions aux limites et initiales appropriées, nous conduisent à la détermination de champs des vitesses \vec{v} et de la pression P .

De plus, le mouvement peut être considéré irrotationnel ($rot \vec{v} = 0$). Ainsi, le champ des vitesses, \vec{v} peut être écrit comme le gradient d'un potentiel ϕ :

$$\vec{v} = \nabla \phi. \quad (2.3)$$

L'équation de la conservation de la masse se réduit alors à l'équation de Laplace :

$$\operatorname{div}(\nabla\phi) = \nabla(\nabla\phi) = \Delta\phi = 0. \quad (2.4)$$

Le potentiel des vitesses ϕ est donc une fonction harmonique des variables d'espace. En utilisant l'identité suivante :

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\right) - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}, \quad (2.5)$$

et puisque l'écoulement est irrotationnel, l'accélération de convection peut s'écrire :

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\right), \quad (2.6)$$

$$\vec{v} \nabla \vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi\right). \quad (2.7)$$

La substitution des relations (2.3) et (2.7) dans l'équation (2.2) donne :

$$\nabla \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{P}{\rho} + gz \right\} = 0, \quad (2.8)$$

soit après intégration :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{P}{\rho} + gz = C(t). \quad (2.9)$$

$C(t)$ est une fonction arbitraire du temps. On remarque qu'on peut ajouter au potentiel ϕ une fonction arbitraire de t qui disparaît dans la définition $\vec{v} = \nabla\phi$, on exploite cet arbitraire pour absorber la constante d'intégration $C(t)$. L'équation (2.9) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi \nabla\phi + gz + \frac{P}{\rho} = 0. \quad (2.10)$$

C'est l'équation de Bernoulli pour un écoulement incompressible et permanent. Elle détermine la pression du liquide en fonction du potentiel des vitesses ϕ .

2.2.1.1 Les conditions aux limites

On distingue deux types de conditions aux limites :

1. Conditions cinématiques à la surface libre et aux parois rigides.
2. Condition dynamique sur la surface libre.

(•) **Condition cinématique sur la surface libre:**

Soit $f(x, y, z, t)$ l'équation de la surface libre, ou si l'on préfère, sous forme $z = \eta(x, y, t)$. Nous exprimons la condition que cette surface est bien à tout instant la surface libre du fluide

en écrivant que la composante normale à la surface de la vitesse du fluide est exactement égale à la vitesse normale de déplacement de la surface [39]. Bien entendu, il peut y avoir un déplacement arbitraire tangentiel du fluide. La fonction $f(x, y, z, t) = z - \eta = 0$, doit donc vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{Df}{Dt} = 0, \quad (2.11)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée totale par rapport à t , soit :

$$\frac{D}{Dt}(z - \eta) = \frac{\partial}{\partial t}(z - \eta) + \vec{v} \cdot \nabla(z - \eta) = 0, \quad (2.12)$$

ce qui donne pour un fluide irrotationnel :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta \quad \text{à } z = \eta. \quad (2.13)$$

(•) **Les parois rigides :**

Le réservoir est considéré immobile, la condition de glissement sur les parois rigides s'exprime pour un fluide parfait en écoulement irrotationnel par l'égalité des composantes des vitesses normales :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \nabla \phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad (2.14)$$

où n est la normale à la paroi solide. Notons que cette condition de glissement est imposée sur une surface fixe.

(•) **Condition dynamique sur la surface libre :**

Puisque la surface libre est soumise à la pression atmosphérique. Les rayons de courbure de la surface de séparation sont grand, il est souvent suffisant d'imposer la continuité de la composante normale de la vitesse et également de la pression des deux côtés de la surface, pour une surface de séparation de rayons de courbure faible, la loi de Laplace donne une expression de la différence de pression au travers de la surface :

$$P = P_a - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = P_a - \sigma C, \quad (2.15)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux, σ est la tension superficielle, P et P_a les pressions des deux côtés. La somme $C = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ est la courbure moyenne de la surface libre. Alors, cette condition se réduit dans le cas où on a négligé la tension superficielle à l'égalité de la pression du fluide et la pression atmosphérique $P = P_a$. Avec la pression atmosphérique P_a constante, cette condition dynamique se réduit à la formule :

$$P = -\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -\sigma C \quad \text{à } z = \eta, \quad (2.16)$$

on remplace la formule (2.16) dans l'équation de Bernoulli et on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad \text{en } z = \eta. \quad (2.17)$$

Les équations (2.4) et (2.13) et (2.14) et (2.17) sont suffisantes pour déterminer le potentiel des vitesses et la forme de la surface libre d'un liquide supposé parfait en écoulement irrotationnel, dans un réservoir rectangulaire avec l'effet de tension superficielle inclu.

2.2.2 La forme des équations dans un réservoir de géométrie rectangulaire

Dans ce paragraphe nous allons écrire les équations du ballonnement d'un fluide dans le cas de géométrie rectangulaire.

2.2.2.1 Cas d'une cuve rectangulaire

Le réservoir est supposé limité par les quatre parois verticales $x = 0; l$ et $y = 0; L$, comme le montre la figure 2.2. Nous choisissons alors les coordonnées cartésiennes, qui sont adéquates pour décrire ce type de géométrie, l'équation de Laplace s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.18)$$

Les conditions dynamique et cinématique sur la surface libre $\eta(x, y, t)$ s'écrivent respectivement comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2.20)$$

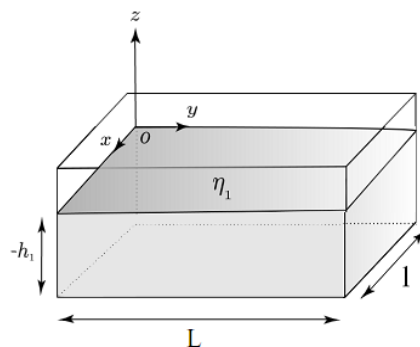


FIG. 2.2: Le sloshing dans une cuve rectangulaire.

En coordonnées cartésiennes, l'expression de la courbure, C , est donnée par :

$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\eta_{xx}(1 + \eta_y^2) + \eta_{yy}(1 + \eta_x^2) - 2\eta_x\eta_y\eta_{xy}}{\left[1 + \eta_x^2 + \eta_y^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.21)$$

Les conditions de glissement sur le fond plat et sur les parois verticales s'expriment respectivement par :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, -h, t) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z, t)|_{x=0, l} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z, t)|_{y=0, L} = 0. \quad (2.24)$$

L et l sont respectivement la longueur et la largeur du réservoir considéré.

2.3 Théorie linéaire

Les non-linéarités qui apparaissent dans les équations (2.13) et (2.17) sont prises sur une frontière à priori inconnue. Dans le cas de petites perturbations autour d'un état au repos, on choisit comme niveau de référence $z = 0$ le niveau de la surface libre au repos. On peut linéariser les équations (2.13) et (2.17) autour de l'état $\eta = 0$. C'est ce que nous allons faire dans un premier temps en ne gardant que les termes du premier ordre, ceci conduit à négliger respectivement les termes $\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$ et $\nabla\phi \cdot \nabla\eta$ dans ces équations. Par conséquent, les deux conditions (2.13) et (2.17) à la surface libre dont la position est inconnue se transforment, dans le cas où on a négligé la tension superficielle, en deux conditions sur une surface connue, $z = 0$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (2.26)$$

On peut éliminer η entre les deux conditions (2.25) et (2.26) pour obtenir une condition portant uniquement sur ϕ :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (2.27)$$

ϕ est une solution de l'équation de Laplace (2.18) avec la condition aux limites (2.27) celle-ci est insuffisante pour déterminer ϕ de manière unique.

L'expression de la courbure moyenne linéarisée, $C_l = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$, s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suite :

$$C_l = \eta_{xx} + \eta_{yy}. \quad (2.28)$$

En introduisant l'effet de la capillarité, la condition dynamique linéarisée devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (2.29)$$

En dérivant l'équation (2.29) comme suite :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (2.30)$$

La substitution de (2.25) dans l'équation (2.30) donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial y^2} \right) = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (2.31)$$

Pour la géométrie de réservoir considéré dans cette étude la condition au limite s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{en } z = 0, \quad (2.32)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (2.33)$$

On remplace la dernière équation dans l'équation (2.32) qui donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (2.34)$$

2.4 Solutions des équations

Après avoir linéarisé les équations gouvernant le ballonnement dans un réservoir rectangulaire, nous proposons dans ce qui suit de résoudre ces équations afin de déterminer les fréquences et les modes propres qui donnent la déformation de la surface libre par rapport à la position d'équilibre. La méthode de résolution la plus simple de l'équation de Laplace est évidemment la méthode de séparation des variables.

On cherche la solution du problème de ballonnement linéaire tridimensionnel ou bidimensionnel, lorsque le domaine de propagation est borné, car il est plus facile d'exploiter les conditions aux limites.

On s'intéresse à présent à l'écoulement tridimensionnel. En se référant à la figure 2.2, la solution de Laplace (l'Éq. (2.18)), avec les conditions aux limites (2.22) et (2.23) et (2.24) et la condition initiale, $\phi(x, y, z, 0) = 0$, qu'on peut déterminer par la méthode de séparation des variables, prend la forme suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \sin(w_{mn}t) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \frac{\cosh[k_{mn}(z+h)]}{\cosh(k_{mn}h)}, \quad (2.35)$$

où α_{mn} est une constante à déterminer par la condition initiale sur la surface libre. Les nombres d'ondes k_{mn} valent :

$$k_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{L^2}}, \quad (2.36)$$

L'élévation de la surface libre, $\eta(x, y, t)$, est obtenue en substituant l'équation (2.35) dans les conditions de surface libre (2.27), soit :

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} [w_{mn} \cos(w_{mn}t)] \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \quad (2.37)$$

Ainsi, la constante α_{mn} peut être déterminée en supposant qu'à $t = 0$, l'élévation de la surface libre est donnée par :

$$\eta(x, y) = a \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \quad (2.38)$$

on en déduit :

$$\alpha_{mn} = -\frac{ag}{w_{mn}} \quad (2.39)$$

où a est l'amplitude de l'onde initiale. Finalement, la solution générale du problème de ballonnement linéaire tridimensionnel est donnée par :

$$\phi(x, y, z, t) = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ag}{w_{mn}} \sin(w_{mn}t) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \frac{\cosh[k_{mn}(z+h)]}{\cosh(k_{mn}h)}, \quad (2.40)$$

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \cos(w_{mn}t). \quad (2.41)$$

(m, n) sont deux entiers positifs. w_{mn} est la fréquence propre de la surface libre qui est donnée par la relation de dispersion des ondes de surface.

La relation de dispersion des ondes de gravité est donnée par :

$$w_{mn}^2 = gk_{mn} \tanh(k_{mn}h). \quad (2.42)$$

La relation de dispersion des ondes de gravité-capillarité est donnée par :

$$w_{mn}^2 = [gk_{mn} + \frac{\sigma}{\rho} k_{mn}^3] \tanh(k_{mn}h). \quad (2.43)$$

On s'intéresse à présent à l'écoulement bidimensionnel. Si la longueur est très longue, $L \rightarrow \infty$ un traitement bidimensionnel est adéquat. Considérons d'abord le cas où le mouvement est bidimensionnel le long de l'axe x , voir la figure 2.2. Le potentiel des vitesses, solution de l'équation de Laplace bidimensionnel, $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}) = 0$, avec les conditions aux limites (2.22) et (2.23) s'écrit sous la forme :

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(k_n x) \frac{\cosh[k_n(z+h)]}{\cosh(k_n h)} \sin(w_n t), \quad (2.44)$$

où α_n est une constante à déterminer par la condition initiale sur la surface libre. On suppose qu'initialement le fluide est au repos avec une perturbation initiale de la surface libre, soit :

$$\phi = 0; \eta = \eta_0(x); t = 0, \quad (2.45)$$

Le nombre d'onde k_n est donné par :

$$k_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (2.46)$$

L'élévation de la surface libre, $\eta(x, t)$, est obtenue en substituant l'équation(2.44) dans les conditions de surface libre (2.26), soit :

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} w_n \alpha_n \cos(k_n x) \cos(w_n t). \quad (2.47)$$

Si initialement on suppose que :

$$\eta_n(x, 0) = a \cos(k_n x), \quad (2.48)$$

on en déduit :

$$\alpha_n = -\frac{ag}{w_n}, \quad (2.49)$$

où a est l'amplitude de l'onde initiale. La solution générale du problème de ballonnement linéaire bidimensionnel est donnée par :

$$\phi(x, z, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ag}{w_n} \sin(w_n t) \cos(k_n x) \frac{\cosh[k_n(z+h)]}{\cosh(k_n h)}, \quad (2.50)$$

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a \cos(k_n x) \cos(w_n t). \quad (2.51)$$

w_n est la fréquence propre de la surface libre qui est donnée par la relation de dispersion des ondes de surface, qui vaut dans le cas purement gravitaire :

$$w_n^2 = gk_n \tanh(k_n h). \quad (2.52)$$

Si on considère maintenant la tension superficielle, les fréquences propres sont données par l'expression suivante :

$$w_n^2 = [gk_n + \frac{\sigma}{\rho}k_n^3] \tanh(k_n h). \quad (2.53)$$

2.5 Résultats et discussion

Dans cette section, les solutions analytiques présentées ci-dessus seront évaluées numériquement pour montrer l'évolution des fréquences propres dans un réservoir rectangulaire en fonction du taux de remplissage. On illustre aussi les effets de la capillarité sur ces fréquences et profils de la surface libre.

2.5.1 Fréquences propres

Afin de pouvoir mieux étudier la relation de dispersion donnée par l'Éq. (2.53) et l'Éq. (2.52) pour un réservoir rectangulaire. La relation de dispersion adimensionnelle d'onde de surface en cuve rectangulaire s'écrit respectivement comme suit :

$$w_n^2 = [gk_n + \frac{\sigma}{\rho}k_n^3] \tanh(k_n h), \quad (2.54)$$

Sur la figure 2.3, on montre les variations des fréquences linéaires bidimensionnelles du ballonnement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire sans et avec tension superficielle en fonction de la profondeur adimensionnelle pour $h = 0.5$, $h = 1$ (h n'est pas fixe) et $l = 1$.

Les graphes représentent ces fréquences pour les modes $n=2, 4, 6, 8, 10$, avec les tensions superficielles : (a, d) $\sigma = 0.005$, (b, e) $\sigma = 0.02$ et (c, f) $\sigma = 0.04$.

Ces graphes montrent, quelque soit la tension superficielle et le mode considéré, une augmentation rapide de ces fréquences lorsque le taux de remplissage augmente et qui se stabilisent pour des grands taux de remplissage. On remarque aussi que les fréquences propres augmentent en présence de la capillarité. Les effets de capillarité, qui sont directement liés à la courbure des interfaces, sont importants lorsqu'on s'intéresse à des phénomènes aux petites échelles de longueur. Autrement, ces effets sont masqués par l'influence de la gravité.

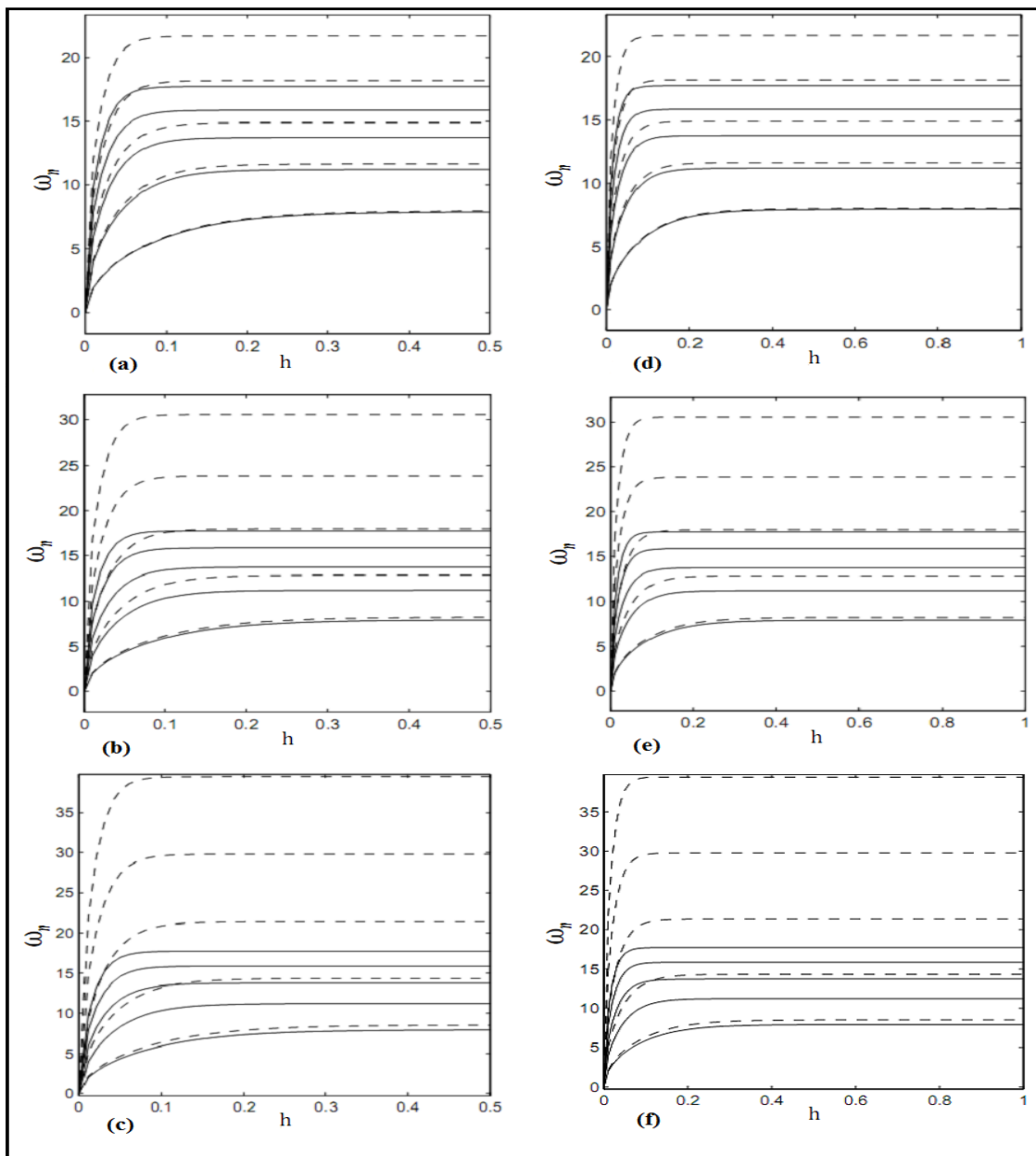
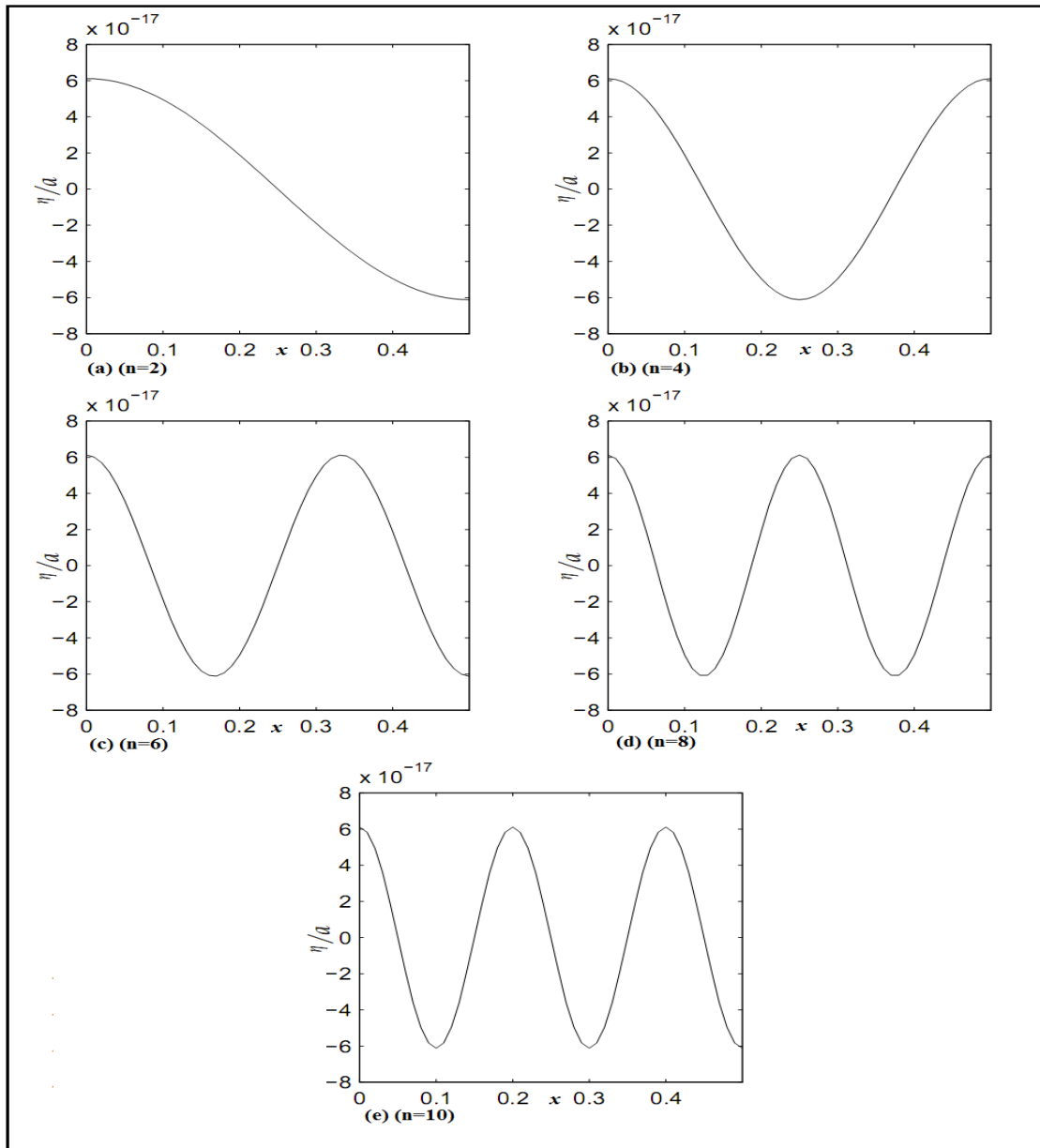


FIG. 2.3: Variations des fréquences propres adimensionnelles en fonction du taux de remplissage h . Pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$, avec $\sigma = 0.005$, $\sigma = 0.02$, $\sigma = 0.04$. Pour (a, d) $\sigma = 0.005$, (b, e) $\sigma = 0.02$, (c, f) $\sigma = 0.04$. Gravité pure (Ligne continue) et gravité-capillarité (ligne discontinue).

2.5.2 Modes propres

Nous allons maintenant présenter la forme de quelques modes en 2D et 3D, dans un réservoir rectangulaire.

FIG. 2.4: Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/4$.

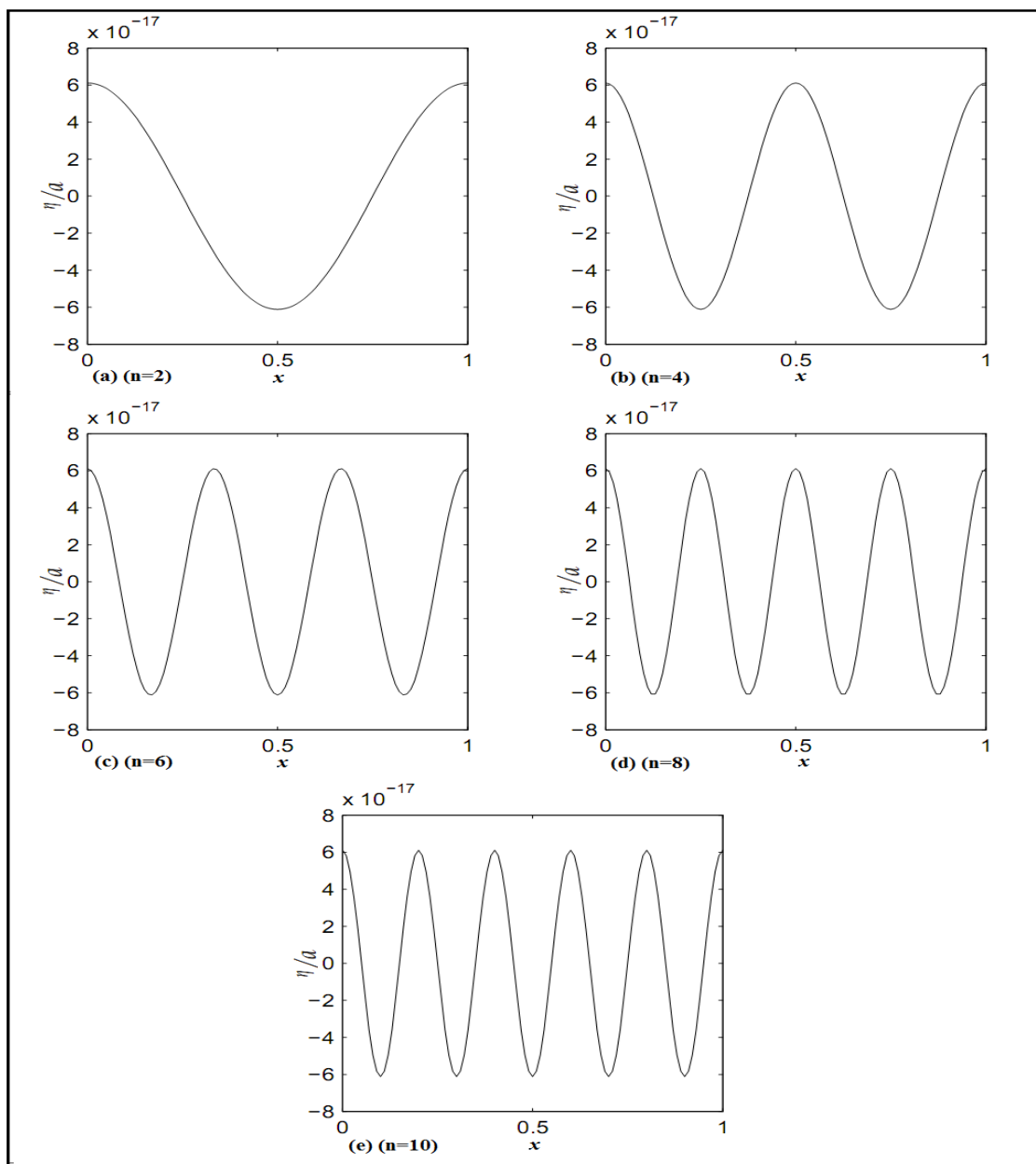


FIG. 2.5: Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/4$.

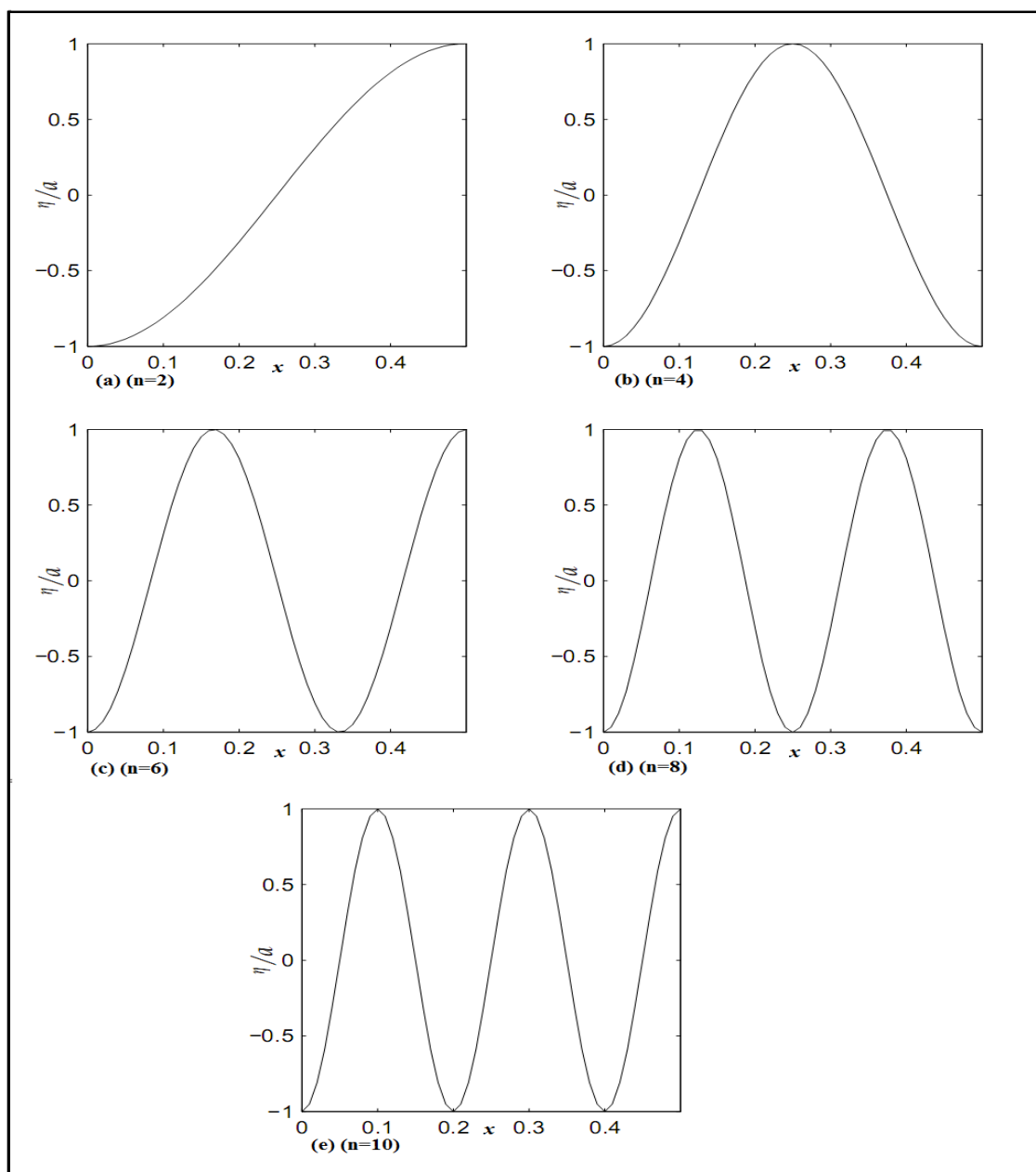


FIG. 2.6: Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/2$.

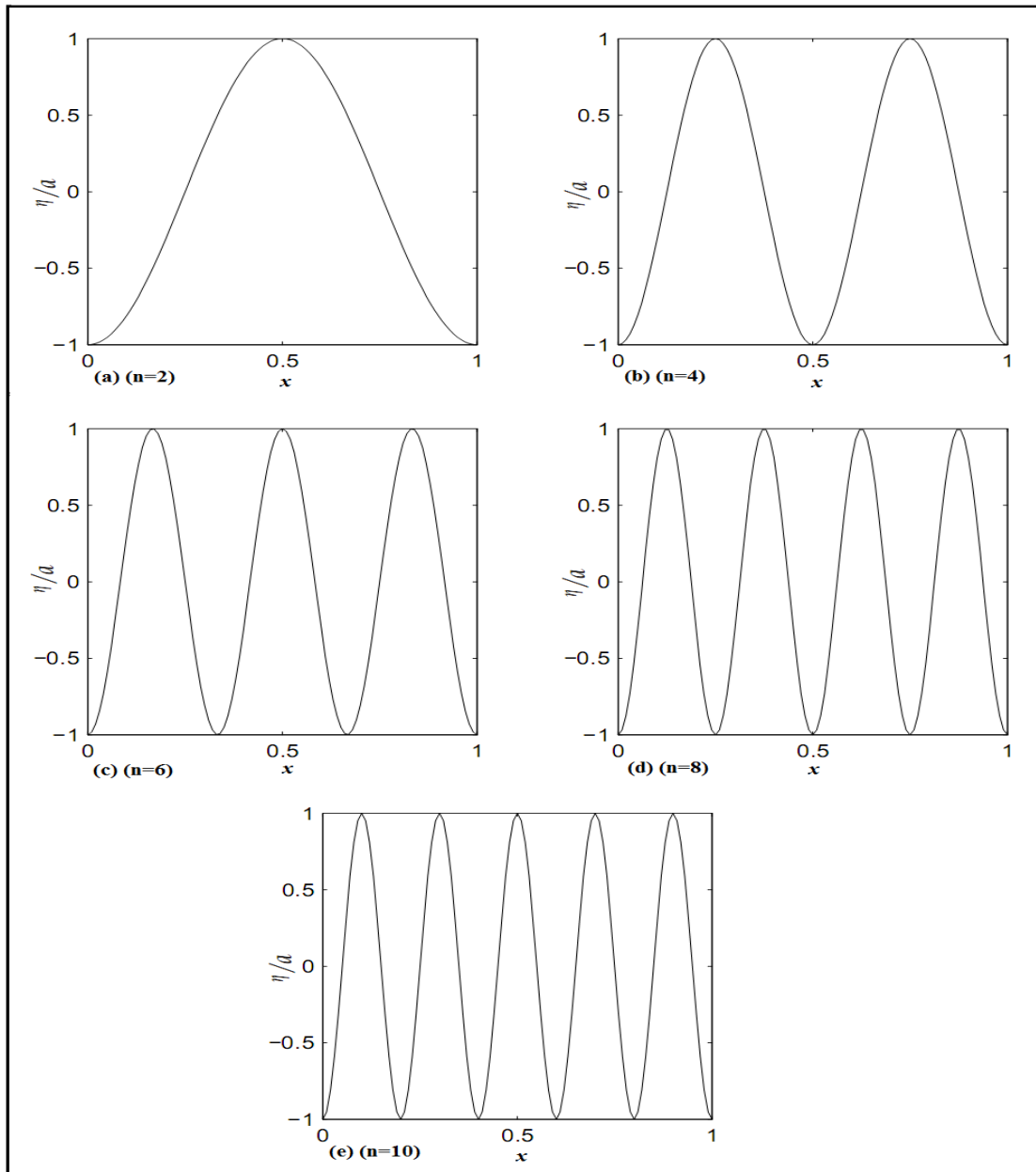


FIG. 2.7: Formes des modes pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$, à $t = T/2$.

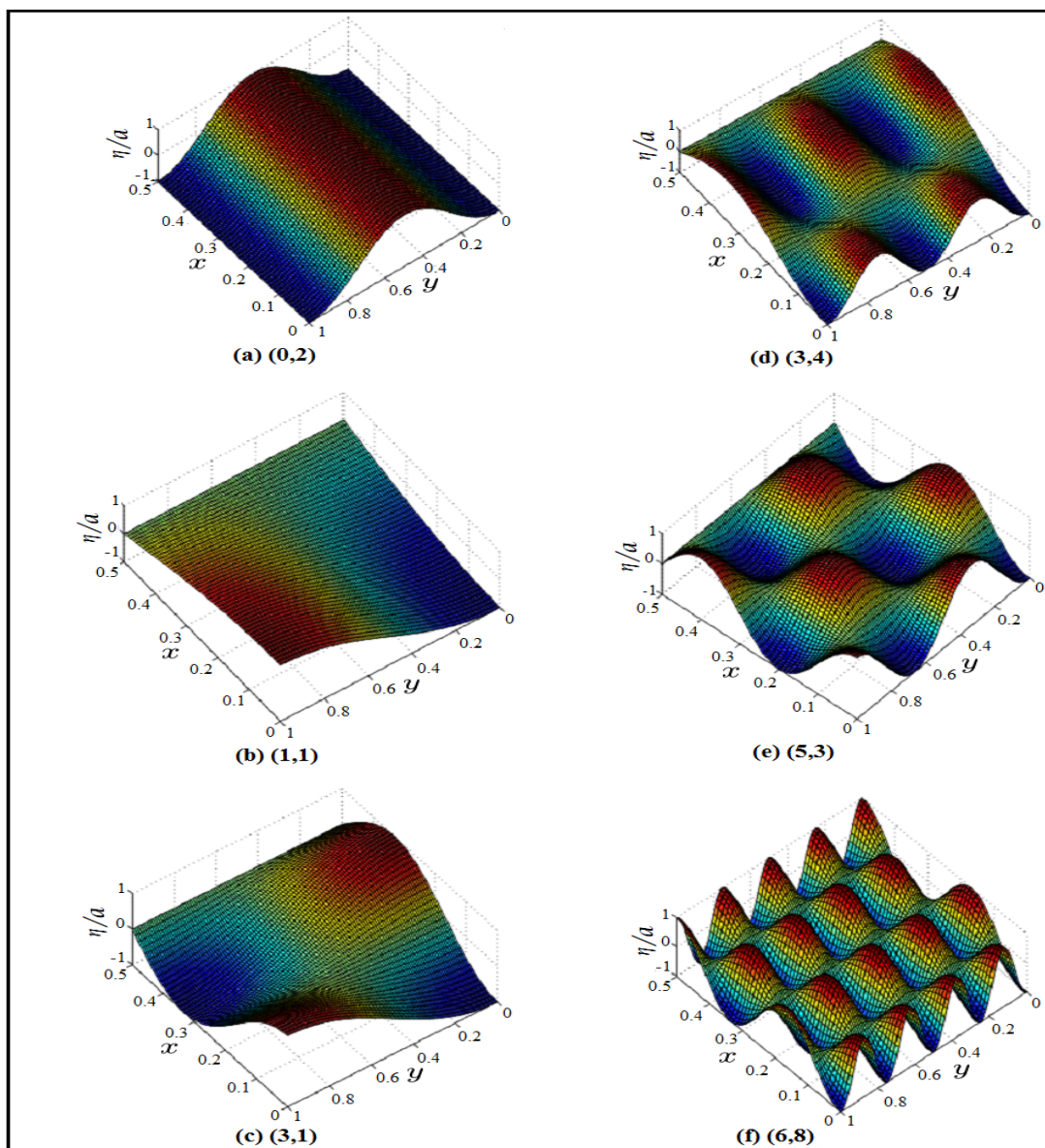


FIG. 2.8: Formes des modes pour un réservoir rectangulaire à 3D.

Les figures 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 montrent les profils de la surface libre en 2D ; pour $n = 2, 4, 6, 8, 10$ où $h = 1$. La figure 2.8 montre les profils de la surface libre en 3D ; pour les modes $(0, 2), (1, 1), (3, 1), (3, 4), (5, 3), (6, 8)$ où $h = 1$ et $l/L = 0.5$.

Ces graphes montrent que la forme de l'onde est une courbe des cosinus qui ne se propage pas. Une particule fluide de la surface libre oscille verticalement, dont l'amplitude est donnée par $a \cos(n\pi x)$ en (2D) et $a \cos(n\pi x) \cdot \cos(n\pi y)$ en (3D). La phase de ce mouvement est la

même pour toutes les particules fluides, ils ont donc une même période.

2.6 L'influence de la capillarité et la fréquence propre sur l'élévation de la surface libre

La présence de la capillarité augmente les fréquences de ballonnement d'un fluide. On observe aussi que le déphasage augmente avec l'augmentation de la tension superficielle. Par ailleurs, cette augmentation de l'élévation de la surface libre sera affectée via ces fréquences. Les graphes 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 présentent l'évolution dans le temps de l'élévation de la surface libre au bord du réservoir pour les modes $n = 2, 4, 6, 8, 10$, $h = 0.5$, et $\sigma = 0$, $\sigma = 0.02$, $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.2$. Dans le cas gravito-capillaire, pour $\sigma = 0$, $\sigma = 0.02$, $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.2$, le déphasage dû à la présence de la capillarité augmente avec le temps et avec l'augmentation de la tension superficielle adimensionnelle.

Les graphes 2.13 et 2.14 représentent respectivement l'élévation de la surface libre en fonction de x , pour les modes $n = 4, 6, 8, 10$ et la tension superficielle prend les valeurs, $\sigma = 0$, $\sigma = 0.05$, $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.2$.

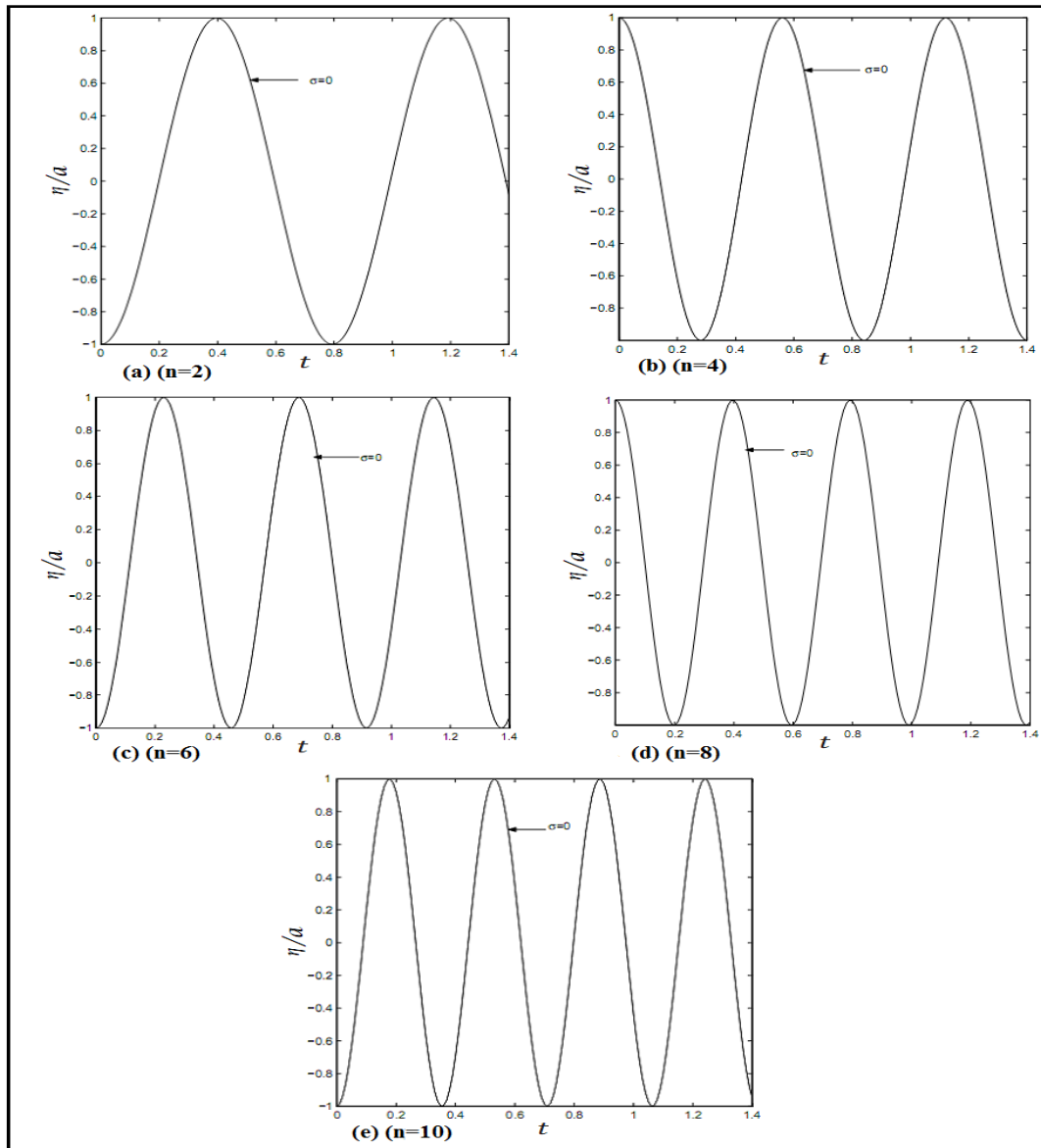


FIG. 2.9: L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0$.

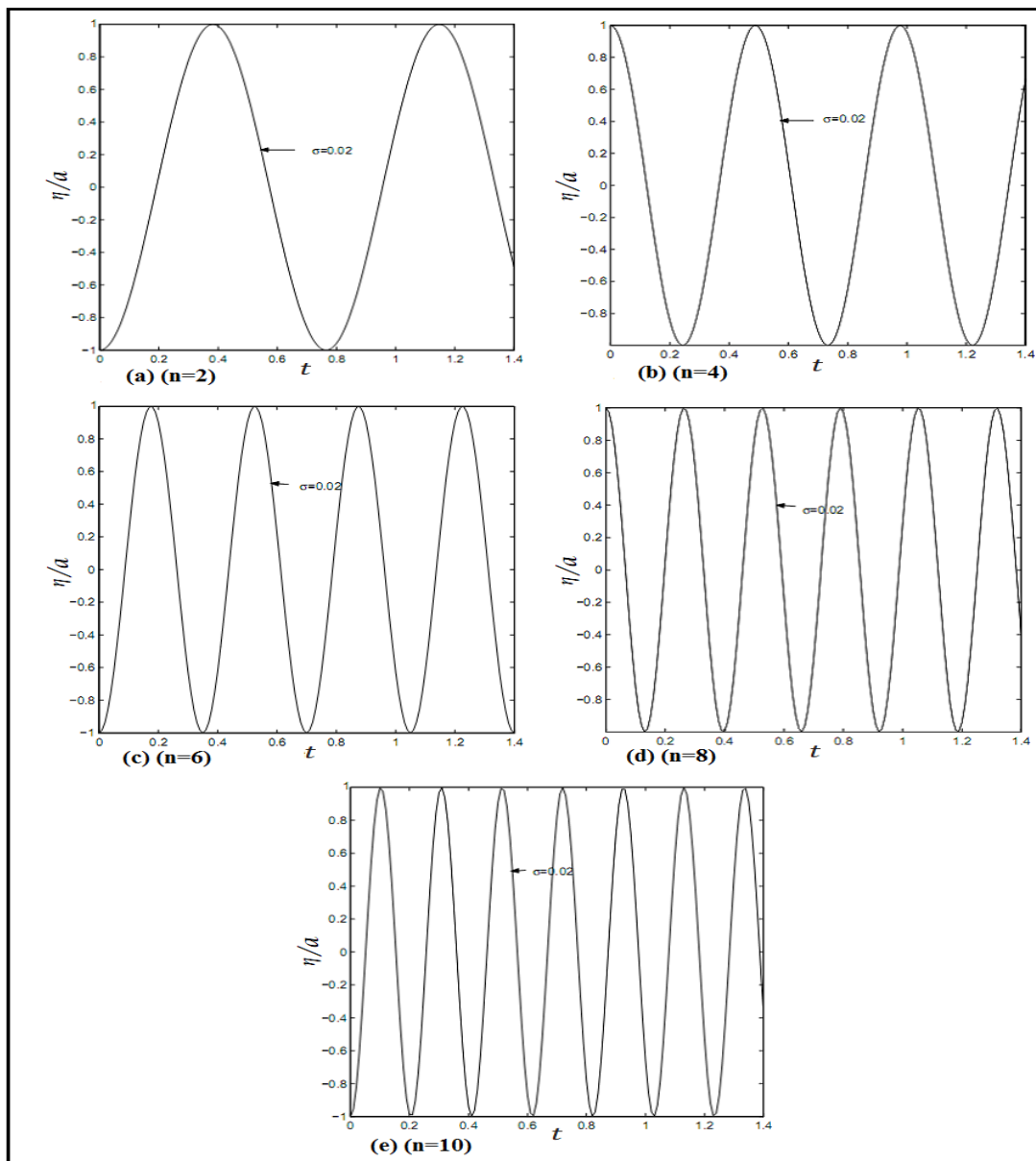


FIG. 2.10: L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0.02$.

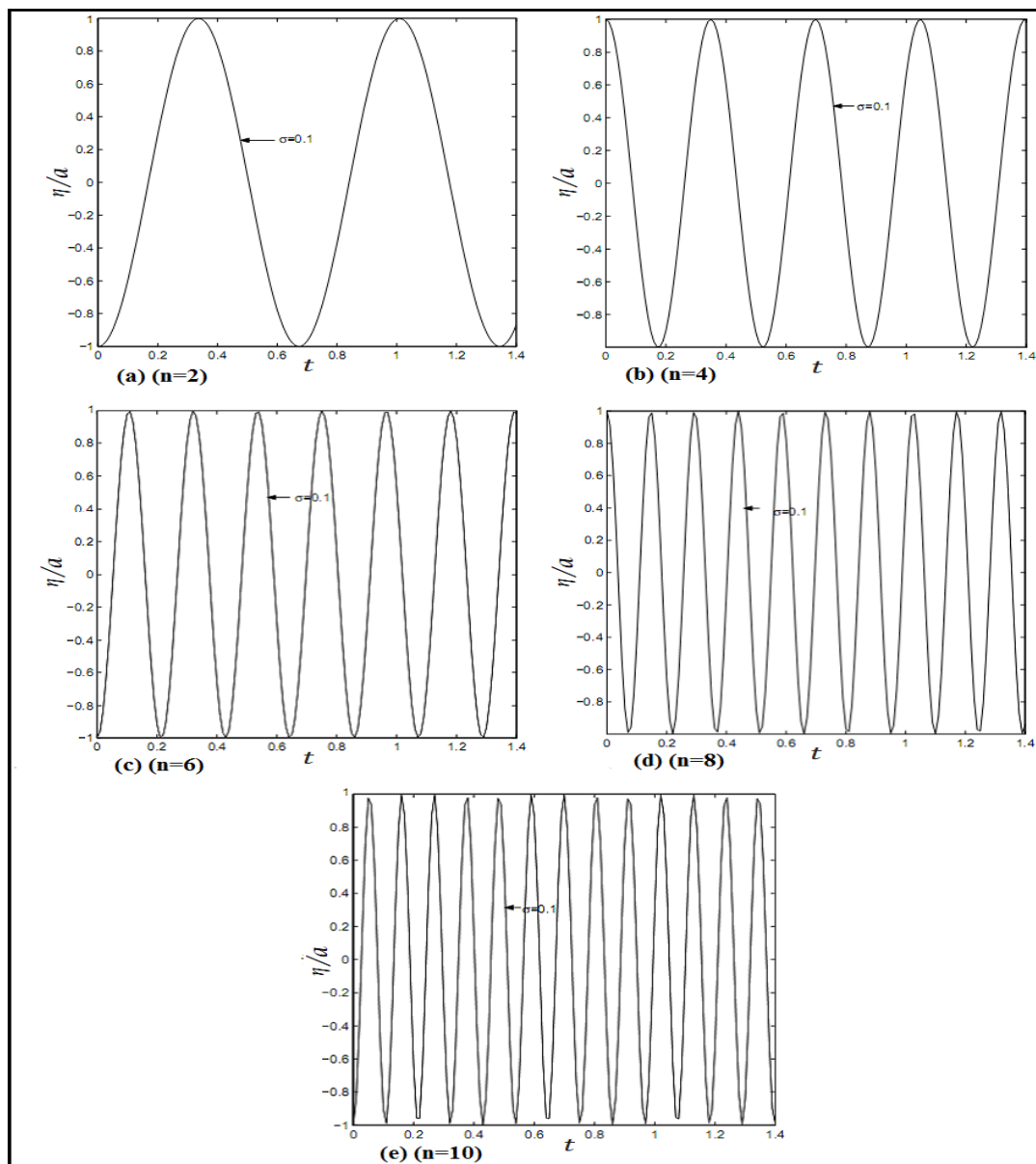


FIG. 2.11: L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0.1$.

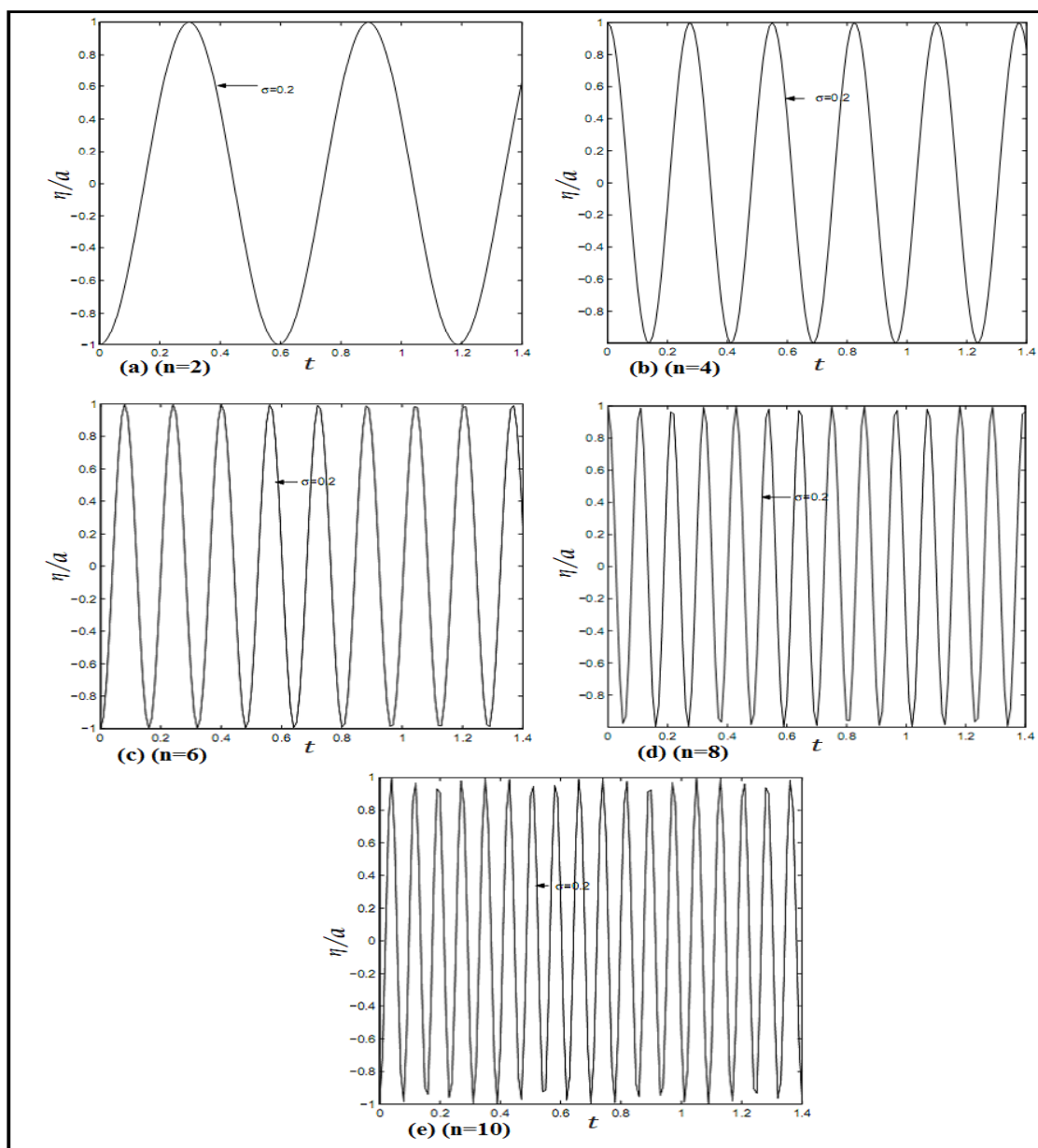


FIG. 2.12: L'évolution de l'élévation de la surface libre en fonction de t pour $\sigma = 0.2$.

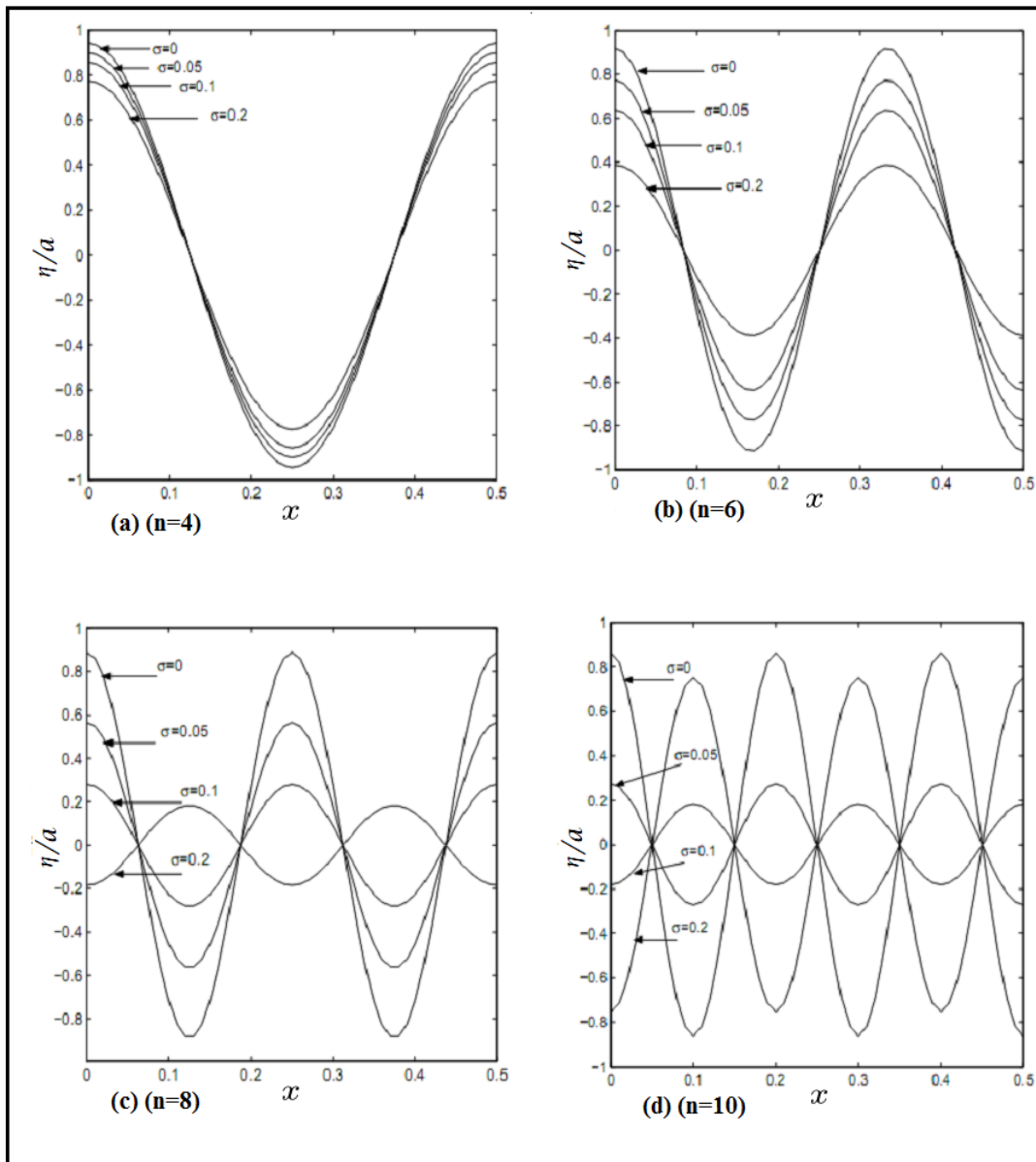


FIG. 2.13: L'influence de la capillarité sur l'élévation de la surface libre pour $t = 0.03$.

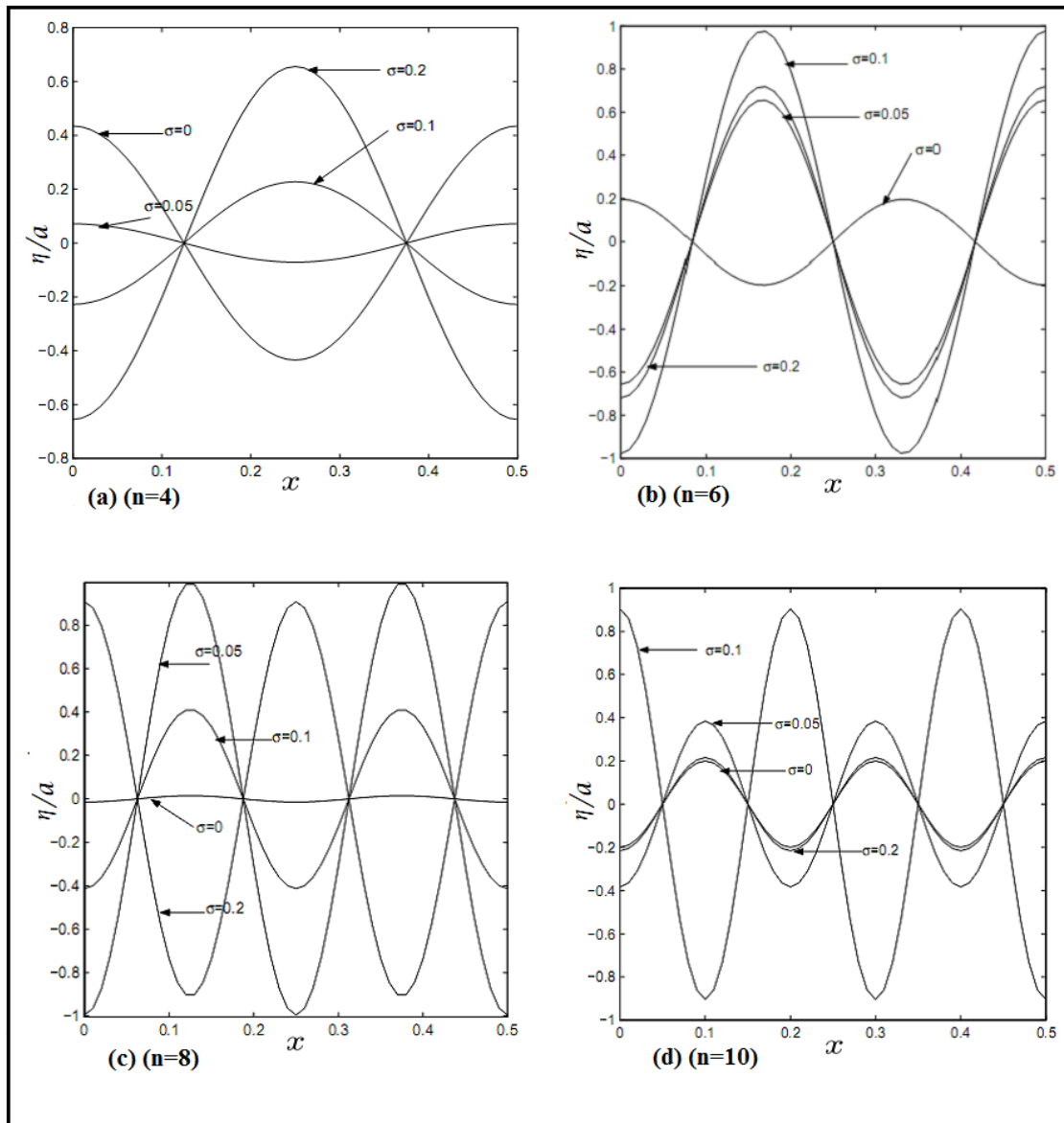


FIG. 2.14: L'influence de la capillarité sur l'élévation de la surface libre pour $t = 0.1$.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les équations gouvernant le mouvement d'une surface libre d'un fluide confinée dans un réservoir rectangulaire fixe, en utilisant l'équation de continuité et l'équation de la quantité de mouvement, ainsi que les conditions aux limites associées. Cependant, les conditions aux limites de la surface libre ne sont pas linéaires. La linéarisation conduit à négliger les termes non-linéaires dans les équations mais aussi à

remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile inconnues d'équation $z = \eta$ par des conditions aux limites sur une surface fixe connue d'équation $z = 0$. Dans le cadre de la théorie linéaire, la méthode de séparation des variables permet de construire les solutions et d'obtenir les fréquences et les modes propres. La présence de la tension superficielle augmente les fréquences propres de la surface libre. La forme de quelques modes, dans la géométrie étudiée, a été présentée. La théorie linéaire développée dans ce chapitre repose sur l'hypothèse d'une onde de faible amplitude.

Cette étude est faite dans un réservoir rectangulaire fixe sans parois internes. Nous avons démontré que la fréquence propre du ballottement augmente avec l'augmentation du taux de remplissage. En effet, nous proposons d'abord d'examiner dans le chapitre qui suit le ballottement dans un réservoir en présence de parois internes fines. Ainsi, nous étudions l'influence de la taille et la position de parois internes sur les fréquences.

Chapitre 3

Ballottement dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines

3.1 Introduction

Le ballottement de liquide dans un réservoir avec ou sans barrière peut être étudié analytiquement, expérimentalement et numériquement. Dans le chapitre précédent, nous avons étudié un réservoir rectangulaire fixe partiellement rempli de liquide. Les fréquences propres de ballottement sont facilement déterminées sur la base d'une théorie linéaire en utilisant la méthode de séparation des variables. Dans un certain nombre de circonstances, il est important de savoir les fréquences propres du fluide avec la surface libre dans un réservoir. Pour éviter des oscillations indésirables, nous avons inséré une barrière plate fine et rigide verticale. Nous avons examiné comment les fréquences propres sont influencées par la taille et la position de barrière.

Ce chapitre, traite respectivement les fréquences de ballottement du fluide dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines. Ici la paroi verticale est considérée comme une perforation de surface. Le fluide est considéré parfait, incompressible en écoulement irrotationnel. Nous établirons les équations régissant le ballottement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire avec une barrière interne fine. Le problème est défini par l'équation de Laplace et les conditions aux limites de surface libre, qui ne sont pas linéaires. Après avoir linéarisé ces équations, on cherche des solutions analytiques en utilisant la méthode de séparation des variables. Nous utiliserons deux méthodes pour calculer les fréquences propres. Ces méthodes comprennent la méthode de développement de fonction propre et la méthode d'approximation d'espacement large.

3.2 Formulation de problème

Le but principal est de calculer les fréquences propres. La figure 3.1 montre le modèle analytique du problème. Le fluide est parfait, incompressible en écoulement irrotationnel dans un réservoir rectangulaire tridimensionnel avec un corps. Le réservoir rectangulaire est considéré rigide et limité par :

$$x = b; \quad 0 \leq z \leq l; \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$x = -b; \quad 0 \leq z \leq l; \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$z = 0; \quad -b \leq x \leq b; \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$z = l; \quad -b \leq x \leq b; \quad 0 \leq y \leq h.$$

Le fluide occupe le réservoir qui a un fond plat $y = h$. Le corps parallèle à la direction de z sera présent dans le réservoir et une section transversale est illustrée sur la figure 3.1. Dans cette section transversale, un point de référence dans le corps a des coordonnées $(x, y) = (x_0, y_0)$ et la surface de la section transversale de corps notée par C .

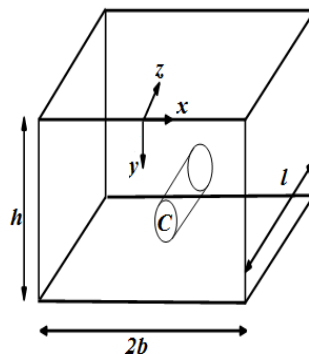


FIG. 3.1: Le sloshing dans un réservoir rectangulaire avec un corps.

Naturellement, le système de coordonnées utilisées pour étudier le ballonnement dans cette géométrie est le système de coordonnées cartésiennes, l'équation de Laplace s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.1)$$

Dans le fluide, on a pas d'écoulement au niveau des parois à $z = 0, l$, la vitesse de liquide s'écrit comme suite :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, l. \quad (3.2)$$

Dans le cas de la théorie linéaire, nous pouvons présenter un potentiel de vitesse :

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y) \cos pz \quad e^{i\omega t}. \quad (3.3)$$

où $p = n\pi/l$, n est un nombre entier. La substitution de l'équation (3.3) dans l'équation (3.1) donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - p^2 \phi = 0. \quad (3.4)$$

Le facteur de $\cos pz$ a été enlevé pour le problème bidimensionnel. Dans le cas des petites oscillations, les conditions aux limites cinématiques (voir chapitre 2, Éq. (2.25)) et dynamiques (voir chapitre 2, Éq. (2.26)) sur la surface libre s'écrivent comme suite :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{à} \quad y = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta \quad \text{à} \quad y = 0. \quad (3.6)$$

En combinant les équations (3.5) et (3.6), par exemple en éliminant η , on obtient la condition de surface libre linéarisée :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (3.7)$$

Le potentiel indépendant du temps satisfait maintenant la condition de surface libre linéarisée sur le potentiel ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + K\phi = 0 \quad y = 0; \quad |x| < b, \quad (3.8)$$

Le paramètre K détermine la fréquence propre de ballonnement, avec $K = w^2/g$, g accélération de gravité et w la fréquence propre de ballonnement.

Les conditions sur le fond plat et sur le long de la paroi latérale de réservoir et pour la paroi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = h; \quad |x| \leq b, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm b; \quad 0 < y < h, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad C. \quad (3.11)$$

où n est la normale mesurée dans le fluide.

En l'absence du corps, la méthode de résolution la plus simple de l'équation (3.4) est évidemment la méthode de séparation des variables, qui s'écrit sous la forme :

$$\Phi(x, y, z) = \cos[\alpha(x - b)] \cosh[k(h - y)] \cos pz. \quad (3.12)$$

où

$$\alpha = \frac{M\pi}{2b}, \quad k = (\alpha^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

M est un nombre entier. Les fréquences propres sont données par l'expression suivante :

$$\frac{w^2}{g} = K = k \tanh kh. \quad (3.14)$$

3.3 Méthode de fonction propre pour la barrière verticale

L'objet de cette section est de déterminer les nombres d'onde en termes de quantité A . Nous proposons comme procédure la méthode de fonction propre pour obtenir les solutions exactes.

3.3.1 Le ballottement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire avec une cloison

Nous considérons dans cette section C comme une barrière verticale fine dans un réservoir rectangulaire bidimensionnel. Le réservoir est rempli de liquide à une hauteur h . Les murs du réservoir sont en $x = -b$ et b , et le liquide occupe $0 < y < h$ avec $y = 0$ la surface libre au repos. La hauteur de barrière verticale fine est a . Pour le cas de barrière verticale, la barrière occupe $x = x_0$, $0 < y < a$ ($a < h$), comme indiqué sur la figure 3.2. La surface $y = \eta$ représente la surface libre du système.

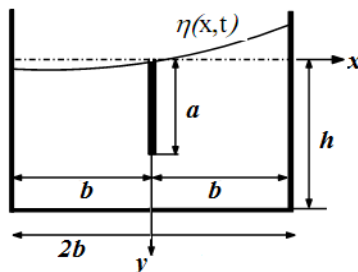


FIG. 3.2: Le ballottement dans un réservoir rectangulaire avec une barrière verticale.

3.3.2 Équations du système

Vu les hypothèses adoptées pour cette étude, le fluide est parfait, incompressible et l'écoulement est considéré irrotationnel. Les équations du mouvement sont déterminées par la théorie potentielle qui assure l'existence des potentiels des vitesses $\Phi(x, y, t)$. Pour le mouvement de fluide qui satisfait l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.15)$$

Dans ce cas, les conditions dynamiques (voir chapitre 2, Éq. (2.10)) et cinématiques (voir chapitre 2, Éq. (2.13)) sur la surface libre, $y = \eta(x, t)$ s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + g(y - h) + \frac{P}{\rho} = 0 \quad \text{à} \quad y = \eta, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{à} \quad y = \eta. \quad (3.17)$$

Les conditions sur le fond plat et sur le long de paroi latérale de réservoir s'expriment respectivement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad y = h; \quad -b < x < b, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad x = x_0; \quad 0 < y < a, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad x = -b, b; \quad 0 < y < h. \quad (3.20)$$

Dans le cas de la théorie linéaire nous pouvons présenter un potentiel de vitesse de la forme :

$$\Phi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{iwt}. \quad (3.21)$$

Ainsi, pour le mouvement de fluide, le potentiel $\phi(x, y)$ indépendant de temps satisfait l'équation de Laplace dans le domaine liquide :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad -b < x < b; \quad 0 < y < h, \quad x \neq x_0. \quad (3.22)$$

Dans le cas des petites oscillations, les conditions aux limites dynamiques (Éq. (3.16)) et cinématiques (Éq. (3.17)) sur la surface libre s'écrivent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta \quad \text{à} \quad y = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{à} \quad y = 0. \quad (3.24)$$

En combinant les équations (3.23) et (3.24), par exemple en éliminant η , on obtient la condition de surface libre linéarisée :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (3.25)$$

Le potentiel indépendant du temps satisfait maintenant la condition de surface libre linéarisée sur le potentiel ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + K\phi = 0 \quad y = 0; \quad -b < x < b, \quad x \neq x_0. \quad (3.26)$$

Le paramètre K détermine la fréquence propre de ballonnement, avec $K = w^2/g$, g accélération de gravité et w la fréquence propre de ballonnement.

Les conditions sur le fond plat et sur le long des parois latérales de réservoir s'expriment respectivement comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad y = h; \quad -b < x < b, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad x = x_0; \quad 0 < y < a, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad x = -b, b; \quad 0 < y < h. \quad (3.29)$$

3.4 Solutions des équations

Après avoir linéarisé les équations gouvernant le ballonnement dans un réservoir rectangulaire avec une cloison, nous proposons dans ce qui suit de résoudre ces équations. La méthode de résolution la plus simple de l'équation de Laplace est évidemment la méthode de séparation des variables. Les solutions s'écrivent sous la forme suivante :

$$\phi_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{m_n x} + B_n e^{-m_n x}) \psi_n(y), \quad x_0 < x < b, \quad (3.30)$$

$$\phi_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n e^{m_n x} + D_n e^{-m_n x}) \psi_n(y), \quad -b < x < x_0. \quad (3.31)$$

Où A_n , B_n , C_n , et D_n sont des constantes, et $\psi_n(y)$ sont données par l'équation :

$$\psi_n(y) = N_n^{-1} \cos k_n(h - y), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.32)$$

$\psi_n(y)$ sont les fonctions propres orthogonales dans l'intervalle $[0, h]$, avec N_n un facteur de normalisation. Le facteur de normalisation est :

$$N_n = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2k_n h}{2k_n h} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

La fonction propre orthogonale $\psi_n(y)$ satisfait la condition de fond plat (3.27). Dans ce cas, les fonctions propres $\psi_n(y)$ s'écrivent respectivement :

$$\psi_n(y) = \frac{\cos k_n(h - y)}{\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2k_n h}{2k_n h} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.34)$$

où m_n est le nombre d'onde qui vaut :

$$m_n^2 = \underbrace{p^2}_0 + k_n^2, \quad (3.35)$$

$$m_0 = i \left(k^2 - \underbrace{p^2}_0 \right)^{\frac{1}{2}} = i\alpha. \quad (3.36)$$

Tandis que m_0 est une racine imaginaire de la relation (3.36).

Dans le cas de $x = x_0$, et l'intervalle $[0, h]$ non occupé par la barrière. Puis la continuité de la pression et de la vitesse d'horizontale et la condition (3.29), $\phi_1(x, y)$, et $\phi_2(x, y)$ peuvent s'écrire sous les formes :

$$\phi_1(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{\cosh m_n(b-x)}{m_n \sinh m_n b} \psi_n(y), \quad x_0 < x < b, \quad (3.37)$$

$$\phi_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{\cosh m_n(b+x)}{m_n \sinh m_n b} \psi_n(y), \quad -b < x < x_0. \quad (3.38)$$

La valeur correspondante du paramètre K de fréquence est :

$$K + k_n \tan k_n h = 0, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.39)$$

$$\frac{w^2}{g} = -k_n \tan k_n h. \quad (3.40)$$

Tandis que $k_0 = ik$ ($k > 0$) est une racine imaginaire de la relation (3.39). U_n sont les coefficients de Fourier dans le développement de la vitesse $U(y)$ à l'intervalle $x = x_0$, $0 \leq y \leq h$.

Pour définir les coefficients de Fourier U_n et la vitesse horizontale $U(y)$ sur l'intervalle $[0, h]$, on va appliquer les conditions de continuité suivante :

$$\phi_1(x = x_0, y) = \phi_2(x = x_0, y), \quad (3.41)$$

$$\frac{\phi_1}{\partial x}(x = x_0, y) = \frac{\phi_2}{\partial x}(x = x_0, y). \quad (3.42)$$

On prend la condition de continuité (3.42) pour calculer les U_n et $U(y)$. Les expressions de $\frac{\phi_1}{\partial x}(x = x_0, y)$ et $\frac{\phi_2}{\partial x}(x = x_0, y)$ sont données par :

$$\frac{\phi_1}{\partial x}(x = x_0, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} U_n \psi_n(y), \quad (3.43)$$

$$\frac{\phi_2}{\partial x}(x = x_0, y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \psi_n(y). \quad (3.44)$$

Les expressions de $\frac{\phi_1}{\partial x}(x = x_0, y) = \frac{\phi_2}{\partial x}(x = x_0, y)$ sont données par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \psi_n(y) = - \sum_{n=0}^{\infty} U_n \psi_n(y), \quad (3.45)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \psi_n(y) = 0. \quad (3.46)$$

Dans le cas de l'intervalle $0 < y < a$, la vitesse $U(y) = 0$, est défini comme suit :

$$U(y) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \psi_n(y). \quad (3.47)$$

Pour trouver le U_n , on va multiplier l'équation (3.47) par $\psi_m(y)$ et calculer l'intégrale sur l'intervalle $[0, h]$:

$$\int_0^h U(y) \psi_m(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \int_0^h \psi_n(y) \psi_m(y) dy, \quad (3.48)$$

$$\int_0^a \underbrace{U(y)}_0 \psi_m(y) dy + \int_a^h U(y) \psi_m(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \delta_{nm}. \quad (3.49)$$

L'expressions de U_n est donnée par :

$$U_n = \int_a^h U(y) \psi_n(y) dy. \quad (3.50)$$

Les formes (3.37) et (3.38) avec (3.50), satisfont les équations (3.22) et (3.29) qui confirment la continuité de la vitesse horizontale sur l'intervalle $[a, h]$.

La continuité du potentiel sur l'intervalle $[a, h]$ donne après quelques manipulations, l'équation intégrale :

$$\phi_1(x = x_0, y) = \phi_2(x = x_0, y). \quad (3.51)$$

Les expressions de $\phi_1(x = x_0, y)$ et $\phi_2(x = x_0, y)$ sont données par :

$$\begin{aligned} \phi_1(x_0, y) &= U_0 m_0^{-1} \cot m_0(b - x_0) \psi_0(y) - \sum_{n=1}^{\infty} U_n m_n^{-1} \coth m_n(b - x_0) \psi_n(y), \\ \phi_2(x_0, y) &= -U_0 m_0^{-1} \cot m_0(b + x_0) \psi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n m_n^{-1} \coth m_n(b + x_0) \psi_n(y). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Les expressions de $\phi_1(x_0, y) = \phi_2(x_0, y)$ sont données comme suite :

$$\begin{aligned} U_0 m_0^{-1} (\cot m_0(b - x_0) + \cot m_0(b + x_0)) \psi_0(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n m_n^{-1} (\coth m_n(b - x_0) \\ &\quad + \coth m_n(b + x_0)) \psi_n(y), \\ -iU_0 (\cot m_0(b - x_0) + \cot m_0(b + x_0)) \psi_0(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \alpha m_n^{-1} (\coth m_n(b - x_0) \\ &\quad + \coth m_n(b + x_0)) \psi_n(y), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$-U_0 (\coth \alpha(b - x_0) + \coth \alpha(b + x_0)) \psi_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n S_n \psi_n(y). \quad (3.54)$$

La substitution de la relation (3.50) dans l'équation (3.54) donne :

$$\psi_0(y) = AU_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} U_n S_n \psi_n(y), \quad (3.55)$$

$$\psi_0(y) = AU_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} S_n \psi_n(y) \int_a^h U(t) \psi_n(t) dt, \quad (3.56)$$

$$\psi_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \psi_n(y) \int_a^h u(t) \psi_n(t) dt, \quad (3.57)$$

$$\psi_0(y) = \int_a^h u(t) k_1(y, t) dt. \quad (3.58)$$

Les formes $k_1(y, t)$, S_n , $u(t)$, A sont données par les expressions :

$$k_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \psi_n(y) \psi_n(t), \quad (3.59)$$

$$S_n = \alpha m_n^{-1} (\coth m_n(b - x_0) + \coth m_n(b + x_0)), \quad (3.60)$$

$$u(t) = AU_0^{-1} U(t), \quad (3.61)$$

$$A = \frac{-1}{(\coth \alpha(b - x_0) + \coth \alpha(b + x_0))}. \quad (3.62)$$

La multiplication de (3.61) par $\psi_0(y)$ est calculée l'intégrale sur l'intervalle $[a, h]$, nous obtenons :

$$A = \int_a^h u(y) \psi_0(y) dy, \quad (3.63)$$

$$A = \langle u, \psi_0 \rangle. \quad (3.64)$$

Les expressions (3.58) et (3.64) donnent le variationnel de A . Ce variationnel s'écrit comme suit :

$$A = \frac{\langle u, \psi_0 \rangle^2}{\sum_{n=1}^{\infty} (\langle u, \psi_n \rangle^2 S_n)}. \quad (3.65)$$

$U(y)$ peut être développé sous forme d'une série infinie de termes de l'ensemble orthonormal ψ_m . Nous supposons maintenant :

$$U(y) = \sum_{m=0}^M u_m \psi_m. \quad (3.66)$$

dans l'équation (3.65), nous obtenons :

$$A = \frac{U^T C U}{U^T B U}. \quad (3.67)$$

où

$$U^T = (u_0, u_1, \dots, u_m), C = cc^T, c^T = (c_{00}, c_{10}, c_{20}, \dots, c_{m0}), \quad (3.68)$$

$$c_{mn} = \langle \psi_m, \psi_n \rangle, B = (B_{mn}), B_{mp} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} c_{pn} S_n. \quad (3.69)$$

La meilleure approximation de la forme (3.66) est obtenue maintenant en exigeant que u_m dans l'équation (3.65) soit stationnaire. Par différentiation de l'équation (3.67) par rapport aux éléments de U , nous obtenons :

$$\det(C - AB) = 0. \quad (3.70)$$

Dans cette équation C et B sont des matrices connues (données par (Éq.(3.68), Éq.(3.69)) et A est lié aux valeurs propres inconnues k par l'intermédiaire des équations (Éq.(3.35), Éq.(3.36)) et (Éq.(3.62)).

3.5 Approximation d'espaceur large

L'approximation d'espaceur large suppose que la longueur de l'onde est petite par rapport à la distance entre la barrière et les parois [38]. Cette méthode est employée pour une barrière verticale. En utilisant l'approximation d'espaceur large, nous obtenons une expression générale pour déterminer les fréquences propres en termes de coefficients de réflexion et de transmission pour cette barrière.

(•) à $x = b$ le potentiel doit satisfaire la condition au limite sur la paroi du réservoir. Nous pouvons écrire $\phi(x, y)$ aussi :

$$\phi(x, y) = B(e^{i\alpha(x-b)} + e^{-i\alpha(x-b)})\psi_0(y). \quad (3.71)$$

où B est une constante complexe.

(•) à $x = -b$ le potentiel doit satisfaire la condition au limite sur la paroi du réservoir. Nous pouvons écrire $\phi(x, y)$ aussi :

$$\phi(x, y) = C(e^{i\alpha(x+b)} + e^{-i\alpha(x+b)})\psi_0(y). \quad (3.72)$$

où C est une constante complexe.

Nous considérons la source des vagues voyageant loin de la barrière $x = x_0$ et on suppose $B = 1$ et $C = 1$.

$$e^{-i\alpha(x_0+b)} = R_1 e^{i\alpha(x_0+b)} + T_1 e^{-i\alpha(x_0-b)}, \quad (3.73)$$

$$e^{i\alpha(x_0-b)} = R_2 e^{-i\alpha(x_0-b)} + T_2 e^{i\alpha(x_0+b)}. \quad (3.74)$$

Les R_1 et T_1 sont les coefficients de réflexion et de transmission pour l'onde incidente qui arrive de la gauche de la barrière. Les R_2 et T_2 sont les coefficients de réflexion et de

transmission pour l'onde incidente qui arrive de la droite de la barrière.

Le coefficient de transmission est indépendant de la direction de l'onde incidente pour n'importe quel corps bidimensionnel arbitraire. En utilisant cette idée nous pouvons prouver que $T_1 = T_2 = T$ pour n'importe quel corps tridimensionnel arbitraire dans le réservoir de vague.

Employons la conservation de l'énergie :

$$|R_1|^2 + |T_1|^2 = |R_2|^2 + |T_2|^2 = 1. \quad (3.75)$$

donne $|R_1| = |R_2| = |R|$.

La multiplication des équations (3.73) et (3.74) donne l'équation suivante :

$$T^2 e^{2iab} = e^{-2iab} - 2R \cos(2\alpha x_0) + R^2 e^{2iab}. \quad (3.76)$$

C'est une expression générale dérivée en utilisant l'approximation d'espace large pour la détermination des fréquences dans un réservoir contenant n'importe quelle barrière.

Pour le problème perturbé avec une barrière verticale à la surface libre présenté dans le réservoir, α est défini :

$$\alpha = (k^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha_M - \frac{f(\epsilon)}{2b} \sigma_2. \quad (3.77)$$

où $\alpha_M = M\pi/2b$, M est un nombre entier et les formes du $f(\epsilon)$ et σ_2 sont déterminés. Dans ce chapitre nous considérons la limite de $f(\epsilon) \ll 1$.

dans l'équation (3.77), k est défini :

$$k = k_M - \frac{M\pi}{4b^2 k_M} f(\epsilon) \sigma_2 + \dots, \quad (3.78)$$

où

$$k_M = (\alpha_M^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.79)$$

et

$$\cosh^2 kh = \frac{1}{2} \left(\cosh 2k_M h + 1 - \frac{M\pi h}{4b^2 k_M} f(\epsilon) \sigma_2 \sinh 2k_M h + \dots \right). \quad (3.80)$$

Pour une barrière verticale à la surface libre. R peut être écrit comme suit :

$$R = -\frac{\alpha\pi i h}{4N_0^2} \cosh^2 kh \epsilon^2 + 0(\epsilon^4). \quad (3.81)$$

où $\epsilon = a/h$. Les expressions de R et T sont données par :

$$T + R = 1. \quad (3.82)$$

A partir des équations (Éq.(3.76)), (Éq.(3.77)) et (Éq.(3.80)), (Éq.(3.81)), (Éq.(3.82)), et après quelques manipulations, nous déduisons :

$$f(\epsilon) \sigma_2 = -\frac{\alpha_M \pi h}{4N_{0,M}^2} \cosh^2 k_M h \epsilon^2 \left(1 - (-1)^M \cos 2\alpha_M x_0 \right). \quad (3.83)$$

et

$$N_{0,M}^2 = \frac{1}{4k_M h} [\sinh(2k_M h) + 2k_M h]. \quad (3.84)$$

Afin de trouver σ_2 , nous définissons $f(\epsilon) = \epsilon^2$. L'expression de σ_2 s'écrit comme suit :

$$\sigma_2 = \frac{\alpha_M \pi h}{4N_{0,M}^2} \cosh^2 k_M h \left(1 - (-1)^M \cos 2\alpha_M x_0 \right). \quad (3.85)$$

La substitution de l'équation(3.85) dans l'équation(3.77) donne :

$$\alpha = \frac{M\pi}{2b} - \epsilon^2 \frac{M\pi^2 h}{16b^2 N_{0,M}^2} \cosh^2 k_M h \left(1 - (-1)^M \cos 2\alpha_M x_0 \right). \quad (3.86)$$

L'expression de k est donnée comme suite :

$$k = k_M - \epsilon^2 \frac{M\pi^2 h \alpha_M}{16b^2 N_{0,M}^2 k_M} \cosh^2 k_M h \left(1 - (-1)^M \cos 2k_M x_0 \right). \quad (3.87)$$

3.6 Résultats et discussion

Dans cette section, les solutions analytiques présentées ci-dessus seront évalués numériquement pour montrer la variation des fréquences propres de réservoir rectangulaire avec un bloc étudié en fonction de a/d . Le but est d'examiner comment les fréquences de ballottement sont influencées par la présence du corps. Les solutions sont donnés pour la solution exacte et la relation d'approximation (3.87). Les fréquences kd ($d = 2b$) sont présentées en fonction de a/d pour la valeur de $h/d = 1$, avec $b/d = 0.5$ et 0.4 .

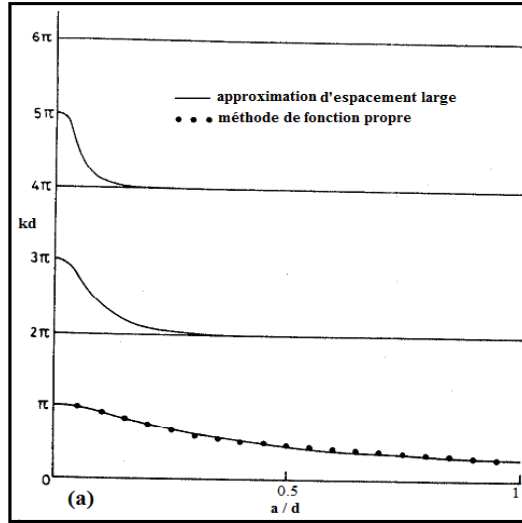


FIG. 3.3: Variation des fréquences kd en fonction a/d dans un réservoir rectangulaire avec une barrière au centre où $x_0 = 0$, $b/d = 0.5$, $d/h = 1$.

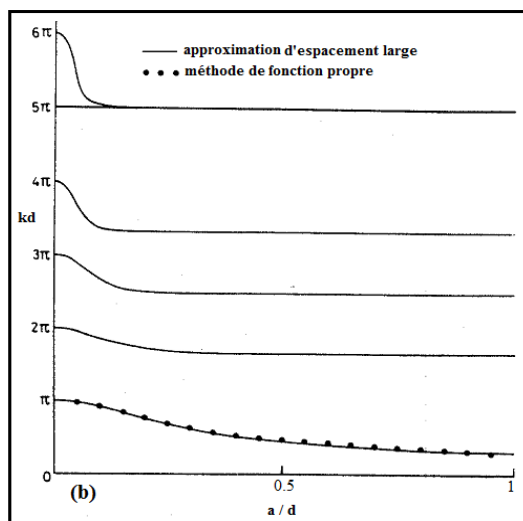


FIG. 3.4: Variation des fréquences kd en fonction a/d dans un réservoir rectangulaire avec une barrière loin du centre où $x_0 = 0, b/d = 0.4, d/h = 1$.

Au début, les fréquences de ballottement sont calculées pour différents tailles et endroits du bloc en utilisant deux méthodes actuelles, et les résultats sont comparés avec ceux qui emploient le même modèle. Les résultats de l'analyse actuelle sont en bon accord avec les résultats **d'Evans et McIver** dans la référence [18].

Sur la figure 3.3 est représentée les variations des fréquences propres du ballottement en fonction a/d où le bloc est au centre de réservoir. Les graphes présentent ces fréquences pour les modes $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Nous remarquons que la présence de la paroi interne fine a pour effet de diminuer ces fréquences propres.

Nous observons que lorsque les modes pairs des fréquences ne sont pas affectés par le bloc. Les fréquences de ballottement impairs diminuent pour différents rapport de (a/d) . Une diminution lente des valeurs de kd pour le mode le plus bas ($n = 1$) tandis que pour les autres modes, elle est rapide.

Sur la figure 3.4 sont représentées les variations des fréquences propres du ballottement en fonction de a/d lorsque le bloc est loin du centre de réservoir. Les graphes présentent ces fréquences pour les modes $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Nous observons que les modes pairs des fréquences sont affectés par le bloc lorsqu'il est loin du centre de réservoir.

Les résultats d'approximation d'espace large s'avèrent en bon accord avec les résultats de la méthode de développement de fonction propre.

3.7 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'étudier l'influence des parois internes fines sur le ballonnement dans un réservoir rectangulaire, que nous avons ignoré dans le chapitre précédent (l'absence de parois internes). Nous avons écrit les équations gouvernant le mouvement de fluide dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines, en supposant que le fluide est parfait, incompressible en écoulement irrotationnel. Nous avons utilisé l'équation de continuité (Éq. de Laplace) et l'équation de Bernoulli ainsi que les conditions aux limites associées. Cependant, les équations obtenues, les conditions aux limites de surface libre, ne sont pas linéaires. C'est la raison pour laquelle nous avons adopté l'hypothèse de la linéarité qui consiste à ne considérer que les petits mouvements de la surface libre. La linéarisation conduit à négliger les termes non-linéaires dans les équations mais aussi à remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile inconnue par des conditions aux limites sur une surface fixe connue. Les fréquences propres ont été obtenues analytiquement dans le cadre de cette théorie linéaire et la méthode de développement de fonction propre. Dans la méthode d'approximation d'espacement large, nous avons obtenu la forme générale des fréquences propres en fonction des coefficients de réflexion et de transmission.

Les résultats d'approximation d'espacement large s'avèrent en bon accord avec les résultats de la méthode de développement de fonction propre. Les fréquences propres de ballonnement, en général diminuent en raison de la présence de parois internes fines. Les résultats d'analyse indique que l'endroit du bloc influence sur les fréquences propres.

Chapitre 4

Ballottement dans un réservoir en présence d'obstacles de forme rectangulaire

4.1 Introduction

Le chapitre précédent, nous avons étudié le ballottement dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines. Les fréquences propres correspondantes ont été obtenues analytiquement dans le cadre de cette théorie linéaire par la méthode de développement de fonction propre et l'approximation d'espacement large. En général, nous avons vu évidemment l'influence de la taille et de la position de la barrière sur les fréquences propres.

Dans ce chapitre, nous étudierons les effets de parois internes et la taille des cloisons par rapport aux dimensions du réservoir et de leur disposition. Le problème est défini par l'équation de Laplace et les conditions aux limites de surface libre, qui ne sont pas linéaires. Nous établirons les équations linéaires du ballottement dans un réservoir rectangulaire avec une barrière. Par la suite, nous résoudrons ces équations par la méthode de séparation des variables afin de déterminer les fréquences et les formes de modes propres du système. Les fréquences et la forme du mode sont calculées en fonction des coefficients de réflexion et de transmission. Les fréquences et la forme du mode de ballottement varient sensiblement dans le cas des réservoirs larges et avec un bloc de grande taille.

4.2 Le ballottement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire avec une barrière

Nous considérons dans cette section le ballottement d'un fluide parfait, incompressible en écoulement irrotatif dans un réservoir rectangulaire bidimensionnel à parois rigides de longueur L , partiellement rempli de liquide à une taille d à partir du fond. Le réservoir est également occupé par un bloc rectangulaire de hauteur h , placée à une distance b et c des parois gauche et droit de réservoir, d'une largeur de $(2a)$. La surface $z = \eta$ représente la surface libre du système, comme représentée dans la figure 4.1.

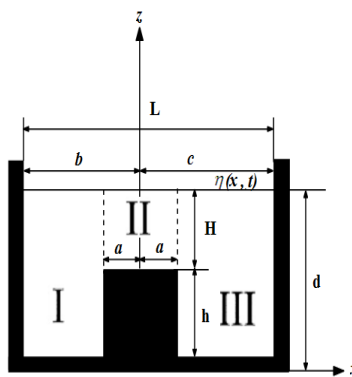


FIG. 4.1: Le réservoir rectangulaire avec un bloc submergé.

4.2.1 Équations du ballottement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire en présence d'un bloc submergé

L'objectif est de déterminer les inconnus du problème, et voir comment les équations générales du problème se simplifient dans le cadre des hypothèses adoptées. Ces hypothèses sont que le fluide est supposé parfait, incompressible et son mouvement est faible et irrotationnel avec pour conditions aux limites, les conditions de surface libre, les conditions de glissement sur le fond plat et sur le long des parois latérales de réservoir.

Ainsi, pour le domaine fluide, l'équation de conservation de la masse s'écrit (voir chapitre 2, Éq. (2.4)) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.1)$$

Les conditions aux limites cinématiques sur la surface libre en $z = \eta$ s'expriment respectivement par (voir chapitre 2, Éq. (2.13)) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta. \quad (4.2)$$

Les conditions aux limites dynamiques sur la surface libre en $z = \eta$ s'expriment respectivement par (voir chapitre 2, Éq. (2.10)) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + g(z - d) + \frac{P}{\rho} = 0 \quad \text{en } z = \eta. \quad (4.3)$$

Les conditions aux limites dynamiques sur la surface libre en $z = \eta$ s'exprime respectivement par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + g\eta = 0 \quad \text{en } z = \eta. \quad (4.4)$$

Dans le cas des petites oscillations, la condition cinématique sur la surface libre (Éq. (4.2)) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en } z = 0, \quad (4.5)$$

La condition dynamique sur la surface libre (Éq. (4.4)) se réduit à :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (4.6)$$

(●) La condition de glissement sur le long des parois latérales de réservoir s'exprime respectivement comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad \begin{cases} x = -b, & 0 < z < d, \\ x = c, & 0 < z < d, \\ |x| = a, & 0 < z < h. \end{cases} \quad (4.7)$$

(●) La condition de glissement sur le fond plat s'exprime par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{à} \quad \begin{cases} -b < x < -a, & z = 0, \\ -a < x < a, & z = h, \\ a < x < c, & z = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

En combinant les équations (4.5) et (4.6), par exemple en éliminant η , on obtient la condition de surface libre linéarisée :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (4.9)$$

La surface libre $\eta(x, t)$ est le déplacement de la surface libre à $z = d$ de plan horizontal. e indique l'endroit de la structure submergée du centre du réservoir donné par :

$$e = \frac{(c - b)}{2}. \quad (4.10)$$

4.3 La solution générale d'un réservoir rectangulaire avec un bloc rectangulaire

Après avoir linéariser les équations gouvernant le ballonnement d'un réservoir rectangulaire avec un bloc rectangulaire, nous proposons dans ce qui suit de résoudre ces équations.

La méthode de résolution la plus simple de l'équation de Laplace est évidemment la méthode de séparation des variables. Le problème est divisé en trois régions comme représente sur la figure 4.1, le potentiel des vitesses pour chaque région de liquide peut être écrit :

$$\phi_i = \varphi_i(x, z)e^{i\omega t} \quad \text{en } (i = 1, 2, 3). \quad (4.11)$$

Le potentiel des vitesses, solution de l'équation de Laplace bidimensionnel (Éq.(4.1)), avec les conditions aux limites (4.7) et (4.8), qu'on peut déterminer par la méthode de séparation des variables, prennent les formes suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ A_j e^{-(ik_j b + ik_j x)} + r_{1j}^{(1)} A_j e^{(-ik_j b + ik_j x)} + \frac{1}{2} B_j e^{-ik_j c} \left(t_{1j}^{s(3)} \cos k_j (x + l_1) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + t_{1j}^{a(3)} \sin k_j (x + l_1) \right) \right\} f_{1j}(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ A_{mj} e^{-(ik_j b + k_{mj} x)} + r_{mj}^{(1)} A_j e^{-(ik_j b - k_{mj} x)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} B_j e^{-ik_j c} \left(t_{mj}^{s(3)} \cosh k_{mj} (x + l_1) + t_{mj}^{a(3)} \sinh k_{mj} (x + l_1) \right) \right\} f_{mj}(z) \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$(-b \leq x \leq -a)$$

$$\varphi_2(x, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C_{1j} \sin k'_j x + D_{1j} \cos k'_j x \right) g_{1j}(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(C_{nj} \sinh k'_n x + D_{nj} \cosh k'_n x \right) g_{nj}(z) \right], \quad (4.13)$$

$$(-a \leq x \leq a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ B_j e^{-(ik_j c - ik_j x)} + r_{1j}^{(3)} B_j e^{-(ik_j c + ik_j x)} + \frac{1}{2} A_j e^{-ik_j b} \left(t_{1j}^{s(1)} \cos k_j (x - l_3) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + t_{1j}^{a(1)} \sin k_j (x - l_3) \right) \right\} f_{1j}(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ B_{mj} e^{-(ik_j c - k_{mj} x)} + r_{mj}^{(3)} B_j e^{-(ik_j c + k_{mj} x)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} A_j e^{-ik_j b} \left(t_{mj}^{s(1)} \cosh k_{mj} (x - l_3) + t_{mj}^{a(1)} \sinh k_{mj} (x - l_3) \right) \right\} f_{mj}(z) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$(a \leq x \leq c)$$

où

$$l_1 = \frac{1}{2}(b + a), \quad (4.15)$$

$$l_3 = \frac{1}{2}(c + a). \quad (4.16)$$

Les fonctions $f_{1j}(z)$, $f_{mj}(z)$, et $g_{1j}(z)$, $g_{nj}(z)$, prennent les formes suivantes :

$$f_{1j}(z) = \left[\frac{d}{2} \left(1 + \frac{\sinh 2k_j d}{2k_j d} \right) \right]^{\frac{-1}{2}} \cosh k_j z, \quad (4.17)$$

$$f_{mj}(z) = \left[\frac{d}{2} \left(1 + \frac{\sin 2k_{mj} d}{2k_{mj} d} \right) \right]^{\frac{-1}{2}} \cos k_{mj} z, \quad (4.18)$$

$$g_{1j}(z) = \left[\frac{H}{2} \left(1 + \frac{\sinh 2k'_j H}{2k'_j H} \right) \right]^{\frac{-1}{2}} \cosh k'_j (z - h), \quad (4.19)$$

$$g_{nj}(z) = \left[\frac{H}{2} \left(1 + \frac{\sin 2k'_{nj} H}{2k'_{nj} H} \right) \right]^{\frac{-1}{2}} \cos k'_{nj} (z - h). \quad (4.20)$$

Les fonctions $f_{1j}(z)$, $f_{mj}(z)$, $g_{1j}(z)$ et $g_{nj}(z)$, qui décrivent respectivement l'évolution en z .

A_j et B_j sont les constantes complexes liées aux amplitudes des ondes qui sont produites par les mouvements des murs latéraux gauche et droit respectivement. A_{mj} et B_{mj} sont les constantes complexes liées aux ondes dispersives. C_{1j} , C_{nj} , D_{1j} , D_{nj} sont les constantes complexes liées aux amplitudes des ondes transmises dans la région *II*. $r_{1j}^{(1)}$, $r_{mj}^{(1)}$, $r_{1j}^{(3)}$, $r_{mj}^{(3)}$ sont les coefficients de réflexion complexes. $t_{1j}^{s(1)}$, $t_{mj}^{s(1)}$, $t_{1j}^{s(3)}$, $t_{mj}^{s(3)}$, $t_{1j}^{a(1)}$, $t_{mj}^{a(1)}$, $t_{1j}^{a(3)}$, $t_{mj}^{a(3)}$ sont les coefficients de transmission complexes.

Les indices supérieurs s et a représentent les parties symétriques et antisymétriques du potentiel des vitesses. Les nombres (1) et (3) représentent les régions liquides *I* et *III* respectivement. k_j et k_{mj} sont les nombres d'ondes dans les régions liquides *I* et *III*. k'_j et k'_{nj} sont les nombres d'ondes dans la région liquide *II*. $f_{1j}(z)$ et $f_{mj}(z)$ sont les fonctions orthonormées dans l'intervalle ($0 < z < d$). $g_{1j}(z)$ et $g_{nj}(z)$ sont les fonctions orthonormées dans l'intervalle ($h < z < d$).

4.3.1 Fréquences de ballonnement

L'objet de ce paragraphe est de déterminer les fréquences de ballonnement caractérisant les petits mouvements de fluide superposé confiné dans un réservoir rectangulaire avec un bloc rectangulaire, fixe, rigide, du fond plat. La recherche de solutions pour $\phi(x, z, t)$, tel que $\phi(x, z, t)$ satisfait aux conditions limites (4.8), l'expression linéaire de la surface libre est donnée en coordonnée cartésienne par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{w^2}{g} \phi, \quad -b < x < c, \quad z = d. \quad (4.21)$$

w est la fréquence de ballonnement de la surface libre qui est donnée par la relation de dispersion des ondes de surface :

$$w_j^2 = gk_j \tanh k_j d = -gk_{mj} \tan k_{mj} d, \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.22)$$

$$w_j^2 = gk'_j \tanh k'_j H = -gk'_{n_j} \tan k_{n_j} H, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.23)$$

4.4 La forme de mode du ballonnement sur la surface libre

Pour calculer les coefficients d'amplitude de vague A_j et B_j on dérive les équations (4.12) et (4.14) dans l'équation (4.7) et employer les conditions orthonormaux de $f_{1j}(z)$ et de $f_{mj}(z)$. Les coefficients d'amplitude de vague est une expression générale pour la détermination des nombres résonnants de vague. Les expressions de k_j peuvent être obtenues à partir des relations entre A_j et B_j .

En dérivant l'équation (4.12) est remplacé la valeur $x = -b$, et après quelques manipulations nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ A_j(-ik_j)(1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b}) + \frac{k_j}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{1j}^{a(3)} \cos k_j(-b + l_1) - t_{1j}^{s(3)} \right. \right. \\ & \times \sin k_j(-b + l_1)) \left. \right\} f_{1j}(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -k_{mj} e^{-ik_j b} (A_{mj} e^{k_{mj} b} - r_{mj}^{(1)} A_j e^{-k_{mj} b}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{mj}}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{mj}^{a(3)} \cosh k_{mj}(-b + l_1) + t_{mj}^{s(3)} \sinh k_{mj}(-b + l_1)) \right\} f_{mj}(z) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$(-b \leq x \leq -a)$$

En dérivant l'équation (4.14) est remplacé la valeur $x = c$, et après quelques manipulations nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ B_j(-ik_j)(-1 + r_{1j}^{(3)} e^{-i2k_j c}) + \frac{k_j}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{1j}^{a(1)} \cos k_j(c - l_3) - t_{1j}^{s(1)} \right. \right. \\ & \times \sin k_j(c - l_3)) \left. \right\} f_{1j}(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ k_{mj} e^{-ik_j c} (B_{mj} e^{k_{mj} c} - r_{mj}^{(3)} B_j e^{-k_{mj} c}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{mj}}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{mj}^{a(1)} \cosh k_{mj}(c - l_3) + t_{mj}^{s(1)} \sinh k_{mj}(c - l_3)) \right\} f_{mj}(z) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$(a \leq x \leq c)$$

En dérivant l'équation (4.13), prend la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[k'_j (C_{1j} \cos k'_j x - D_{1j} \sin k'_j x) g_{1j}(z) + \sum_{n=2}^{\infty} k'_{n_j} (C_{n_j} \cosh k'_{n_j} x + D_{n_j} \sinh k'_{n_j} x) g_{n_j}(z) \right] = 0. \quad (4.26)$$

$$(-a \leq x \leq a)$$

On pose :

$$-b + l_1 = \left(\frac{-b + a}{2}\right) = -b_0, \quad (4.27)$$

$$c - l_3 = \left(\frac{c - a}{2}\right) = c_0. \quad (4.28)$$

En remplaçant la relation (4.27) dans l'équation (4.24) donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ A_j(-ik_j)(1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b}) + \frac{k_j}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0 + t_{1j}^{s(3)} \right. \right. \\ & \times \sin k_j b_0) \left. \right\} f_{1j}(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -k_{mj} e^{-ik_j b} (A_{mj} e^{k_{mj} b} - r_{mj}^{(1)} A_j e^{-k_{mj} b}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{mj}}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{mj}^{a(3)} \cosh k_{mj} b_0 - t_{mj}^{s(3)} \sinh k_{mj} b_0) \right\} f_{mj}(z) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

($-b \leq x \leq -a$)

En remplaçant la relation (4.28) dans l'équation (4.25) donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ B_j(-ik_j)(-1 + r_{1j}^{(3)} e^{-i2k_j c}) + \frac{k_j}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{1j}^{a(1)} \cos k_j c_0 - t_{1j}^{s(1)} \right. \right. \\ & \times \sin k_j c_0) \left. \right\} f_{1j}(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ k_{mj} e^{-ik_j c} (B_{mj} e^{k_{mj} c} - r_{mj}^{(3)} B_j e^{-k_{mj} c}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{mj}}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{mj}^{a(1)} \cosh k_{mj} c_0 + t_{mj}^{s(1)} \sinh k_{mj} c_0) \right\} f_{mj}(z) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

($a \leq x \leq c$)

En utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions $f_{1j}(z)$, $f_{mj}(z)$ (voir annexe A), les équations (4.29) et (4.30), il vient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ A_j(-ik_j)(1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b}) + \frac{k_j}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0 + t_{1j}^{s(3)} \right. \right. \\ & \times \sin k_j b_0) \left. \right\} + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -k_{mj} A_j e^{-ik_j b} (e^{k_{mj} b} - r_{mj}^{(1)} e^{-k_{mj} b}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{mj}}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{mj}^{a(3)} \cosh k_{mj} b_0 - t_{mj}^{s(3)} \sinh k_{mj} b_0) \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

($-b \leq x \leq -a$)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ B_j(-ik_j)(-1 + r_{1j}^{(3)} e^{-i2k_j c}) + \frac{k_j}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{1j}^{a(1)} \cos k_j c_0 - t_{1j}^{s(1)} \right. \right. \\ & \times \sin k_j c_0) \left. \right\} + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ k_{mj} B_j e^{-ik_j c} (e^{k_{mj} c} - r_{mj}^{(3)} e^{-k_{mj} c}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{mj}}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{mj}^{a(1)} \cosh k_{mj} c_0 + t_{mj}^{s(1)} \sinh k_{mj} c_0) \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$(a \leq x \leq c)$$

Soit le système d'équation linéaire :

$$\begin{cases} A_j(-ik_j)(1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b}) + \frac{k_j}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0 + t_{1j}^{s(3)} \sin k_j b_0) = 0, \\ B_j(-ik_j)(-1 + r_{1j}^{(3)} e^{-i2k_j c}) + \frac{k_j}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{1j}^{a(1)} \cos k_j c_0 - t_{1j}^{s(1)} \sin k_j c_0) = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Le système linéaire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = 0, \quad (4.34)$$

En calcule le déterminant :

$$\det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0, \quad (4.35)$$

$$\alpha\delta = \beta\gamma. \quad (4.36)$$

où :

$$\alpha = (-i)(1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b}), \quad (4.37)$$

$$\beta = \frac{1}{2} e^{-ik_j c} (t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0 + t_{1j}^{s(3)} \sin k_j b_0), \quad (4.38)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} e^{-ik_j b} (t_{1j}^{a(1)} \cos k_j c_0 - t_{1j}^{s(1)} \sin k_j c_0), \quad (4.39)$$

$$\delta = i(1 - r_{1j}^{(3)} e^{-i2k_j c}). \quad (4.40)$$

L'expression (4.36) s'écrit alors comme suite :

$$\begin{aligned} (e^{ik_j b} - r_{1j}^{(1)} e^{-ik_j b})(e^{ik_j c} - r_{1j}^{(3)} e^{-ik_j c}) = - \left[\frac{1}{4} (t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0 + t_{1j}^{s(3)} \sin k_j b_0) \right. \\ \left. \times (-t_{1j}^{a(1)} \cos k_j c_0 + t_{1j}^{s(1)} \sin k_j c_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

La solution de cette système, prend la forme suivante :

$$B_j = i \frac{2e^{ik_j c} (1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b})}{(t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0 + t_{1j}^{s(3)} \sin k_j b_0)} A_j, \quad (4.42)$$

$$B_j = -i \frac{(-t_{1j}^{a(1)} \cos k_j c_0 + t_{1j}^{s(1)} \sin k_j c_0)}{2e^{ik_j b} (1 - r_{1j}^{(3)} e^{-i2k_j c})} A_j. \quad (4.43)$$

À partir de (4.42) et (4.43), une expression générale pour la détermination des nombres résonnants de vague.

Soit le système d'équation linéaire :

$$\begin{cases} A_j e^{-ik_j b} (e^{k_{mj} b} - r_{mj}^{(1)} e^{-k_{mj} b}) + \frac{1}{2} B_j e^{-ik_j c} (t_{mj}^{s(3)} \sinh k_{mj} b_0 - t_{mj}^{a(3)} \cosh k_{mj} b_0) = 0, \\ B_j e^{-ik_j c} (e^{k_{mj} c} - r_{mj}^{(3)} e^{-k_{mj} c}) + \frac{1}{2} A_j e^{-ik_j b} (t_{mj}^{a(1)} \cosh k_{mj} c_0 + t_{mj}^{s(1)} \sinh k_{mj} c_0) = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Le système linéaire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = 0, \quad (4.45)$$

En calcule le déterminant :

$$\det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0, \quad (4.46)$$

$$\alpha\delta = \beta\gamma. \quad (4.47)$$

$$\alpha = e^{-ik_j b} (e^{k_{mj} b} - r_{mj}^{(1)} e^{-k_{mj} b}), \quad (4.48)$$

$$\beta = \frac{1}{2} e^{-ik_j c} (t_{mj}^{s(3)} \sinh k_{mj} b_0 - t_{mj}^{a(3)} \cosh k_{mj} b_0), \quad (4.49)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} e^{-ik_j b} (t_{mj}^{a(1)} \cosh k_{mj} c_0 + t_{mj}^{s(1)} \sinh k_{mj} c_0), \quad (4.50)$$

$$\delta = e^{-ik_j c} (e^{k_{mj} c} - r_{mj}^{(3)} e^{-k_{mj} c}). \quad (4.51)$$

L'expression (4.47) s'écrit alors comme suite :

$$\begin{aligned} (e^{k_{mj} b} - r_{mj}^{(1)} e^{-k_{mj} b})(e^{k_{mj} c} - r_{mj}^{(3)} e^{-k_{mj} c}) &= \left[\frac{1}{4} (-t_{mj}^{a(3)} \cosh k_{mj} b_0 + t_{mj}^{s(3)} \sinh k_{mj} b_0) \right. \\ &\quad \left. \times (t_{mj}^{a(1)} \cosh k_{mj} c_0 + t_{mj}^{s(1)} \sinh k_{mj} c_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

La solution de cette système, prend la forme suivante :

$$B_j = \frac{2e^{ik_j c} e^{-ik_j b} (e^{k_{mj} b} - r_{mj}^{(1)} e^{-k_{mj} b})}{(t_{mj}^{a(3)} \cosh k_{mj} b_0 - t_{mj}^{s(3)} \sinh k_{mj} b_0)} A_j, \quad (4.53)$$

$$B_j = -\frac{e^{-ik_j b} (t_{mj}^{a(1)} \cosh k_{mj} c_0 + t_{mj}^{s(1)} \sinh k_{mj} c_0)}{2e^{-ik_j c} (e^{k_{mj} c} - r_{mj}^{(3)} e^{-k_{mj} c})} A_j. \quad (4.54)$$

La forme de mode sur la surface libre peut être déterminée en substituant B_j dans (Éq. (4.12))- (Éq. (4.14)) et normalisant ces équations.

on pose :

$$k_j = i \frac{2e^{ik_j b} (1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b})}{t_{1j}^{s(3)} \sin k_j b_0 + t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0}. \quad (4.55)$$

L'expression (4.42) prend la forme suivante :

$$B_j = i \frac{2e^{ik_j c} e^{ik_j b} e^{-ik_j b} (1 - r_{1j}^{(1)} e^{-i2k_j b})}{t_{1j}^{s(3)} \sin k_j b_0 + t_{1j}^{a(3)} \cos k_j b_0} A_j, \quad (4.56)$$

$$B_j = k_j e^{ik_j c} e^{-ik_j b} A_j. \quad (4.57)$$

Les fonctions $t_{1j}^{s(3)} \cos k_j(x + l_1)$, $t_{1j}^{a(3)} \sin k_j(x + l_1)$, $t_{1j}^{s(1)} \cos k_j(x - l_3)$, $t_{1j}^{a(1)} \sin k_j(x - l_3)$, $t_{mj}^{s(3)} \cosh k_{mj}(x + l_1)$, $t_{mj}^{a(3)} \sinh k_{mj}(x + l_1)$, $t_{mj}^{s(1)} \cosh k_{mj}(x - l_3)$, $t_{mj}^{a(1)} \sinh k_{mj}(x - l_3)$ peuvent être développées comme suite :

$$t_{1j}^{s(3)} \cos k_j(x + l_1) = \frac{1}{2} t_{1j}^{s(3)} e^{ik_j x} e^{ik_j l_1} + \frac{1}{2} t_{1j}^{s(3)} e^{-ik_j x} e^{-ik_j l_1}, \quad (4.58)$$

$$t_{1j}^{a(3)} \sin k_j(x + l_1) = -\frac{i}{2} t_{1j}^{a(3)} e^{ik_j x} e^{ik_j l_1} + \frac{i}{2} t_{1j}^{a(3)} e^{-ik_j x} e^{-ik_j l_1}, \quad (4.59)$$

$$t_{mj}^{s(3)} \cosh k_{mj}(x + l_1) = \frac{1}{2} t_{mj}^{s(3)} e^{k_{mj} x} e^{k_{mj} l_1} + \frac{1}{2} t_{mj}^{s(3)} e^{-k_{mj} x} e^{-k_{mj} l_1}, \quad (4.60)$$

$$t_{mj}^{a(3)} \sinh k_{mj}(x + l_1) = \frac{1}{2} t_{mj}^{a(3)} e^{k_{mj} x} e^{k_{mj} l_1} - \frac{1}{2} t_{mj}^{a(3)} e^{-k_{mj} x} e^{-k_{mj} l_1}, \quad (4.61)$$

$$t_{1j}^{s(1)} \cos k_j(x - l_3) = \frac{1}{2} t_{1j}^{s(1)} e^{ik_j x} e^{-ik_j l_3} + \frac{1}{2} t_{1j}^{s(1)} e^{-ik_j x} e^{ik_j l_3}, \quad (4.62)$$

$$t_{1j}^{a(1)} \sin k_j(x - l_3) = -\frac{i}{2} t_{1j}^{a(1)} e^{ik_j x} e^{-ik_j l_3} + \frac{i}{2} t_{1j}^{a(1)} e^{-ik_j x} e^{ik_j l_3}, \quad (4.63)$$

$$t_{mj}^{s(1)} \cosh k_{mj}(x - l_3) = \frac{1}{2} t_{mj}^{s(1)} e^{k_{mj} x} e^{-k_{mj} l_3} + \frac{1}{2} t_{mj}^{s(1)} e^{-k_{mj} x} e^{k_{mj} l_3}, \quad (4.64)$$

$$t_{mj}^{a(1)} \sinh k_{mj}(x - l_3) = \frac{1}{2} t_{mj}^{a(1)} e^{k_{mj} x} e^{-k_{mj} l_3} - \frac{1}{2} t_{mj}^{a(1)} e^{-k_{mj} x} e^{k_{mj} l_3}. \quad (4.65)$$

avec

$$\begin{aligned} (t_{1j}^{s(3)} \cos k_j(x + l_1) + t_{1j}^{a(3)} \sin k_j(x + l_1)) &= \frac{1}{2} \left[(t_{1j}^{s(3)} - it_{1j}^{a(3)}) e^{ik_j(x+l_1)} \right. \\ &\quad \left. + (t_{1j}^{s(3)} + it_{1j}^{a(3)}) e^{-ik_j(x+l_1)} \right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} (t_{mj}^{s(3)} \cosh k_{mj}(x + l_1) + t_{mj}^{a(3)} \sinh k_{mj}(x + l_1)) &= \frac{1}{2} \left[(t_{mj}^{s(3)} + t_{mj}^{a(3)}) e^{k_{mj}(x+l_1)} \right. \\ &\quad \left. + (t_{mj}^{s(3)} - t_{mj}^{a(3)}) e^{-k_{mj}(x+l_1)} \right], \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} (t_{1j}^{s(1)} \cos k_j(x - l_3) + t_{1j}^{a(1)} \sin k_j(x - l_3)) &= \frac{1}{2} \left[(t_{1j}^{s(1)} - it_{1j}^{a(1)}) e^{ik_j(x-l_3)} \right. \\ &\quad \left. + (t_{1j}^{s(1)} + it_{1j}^{a(1)}) e^{-ik_j(x-l_3)} \right], \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} (t_{mj}^{s(1)} \cosh k_{mj}(x - l_3) + t_{mj}^{a(1)} \sinh k_{mj}(x - l_3)) &= \frac{1}{2} \left[(t_{mj}^{s(1)} + t_{mj}^{a(1)}) e^{k_{mj}(x-l_3)} \right. \\ &\quad \left. + (t_{mj}^{s(1)} - t_{mj}^{a(1)}) e^{-k_{mj}(x-l_3)} \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

L'expression de $\varphi_{1j}(x, d)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\varphi_{1j}(x,d) = & \left[\left\{ A_j e^{-ik_j b} (\cos k_j x - i \sin k_j x + r_{1j}^{(1)} (\cos k_j x + i \sin k_j x)) + \frac{1}{4} B_j e^{-ik_j c} ((t_{1j}^{s(3)} - it_{1j}^{a(3)}) \right. \right. \\
& \times e^{ik_j l_1} (\cos k_j x + i \sin k_j x) + (t_{1j}^{s(3)} + it_{1j}^{a(3)}) e^{-ik_j l_1} (\cos k_j x - i \sin k_j x) \left. \right\} f'_{1j}(d) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ A_j \right. \\
& \times e^{-ik_j b} (\cosh k_{mj} x - \sinh k_{mj} x + r_{mj}^{(1)} (\cosh k_{mj} x + \sinh k_{mj} x)) + \frac{1}{4} B_j e^{-ik_j c} ((t_{mj}^{s(3)} + t_{mj}^{a(3)}) \\
& \times e^{k_{mj} l_1} (\cosh k_{mj} x + \sinh k_{mj} x) + (t_{mj}^{s(3)} - t_{mj}^{a(3)}) e^{-k_{mj} l_1} (\cosh k_{mj} x - \sinh k_{mj} x) \left. \right\} f'_{mj}(d) \left. \right]. \tag{4.70}
\end{aligned}$$

En remplaçant la relation de B_j dans l'équation (4.70), et après quelques manipulations nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\varphi_{1j}(x,d) = & A_j e^{-ik_j b} \left[\left\{ \left(1 + \frac{1}{4} k_j (t_{1j}^{s(3)} + it_{1j}^{a(3)}) e^{-ik_j l_1} + r_{1j}^{(1)} + \frac{1}{4} k_j (t_{1j}^{s(3)} - it_{1j}^{a(3)}) e^{ik_j l_1} \right) \cos k_j x \right. \right. \\
& - i \left(1 + \frac{1}{4} k_j (t_{1j}^{s(3)} + it_{1j}^{a(3)}) e^{-ik_j l_1} - r_{1j}^{(1)} - \frac{1}{4} k_j (t_{1j}^{s(3)} - it_{1j}^{a(3)}) e^{ik_j l_1} \right) \sin k_j x \left. \right\} f'_{1j}(d) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4} k_j (t_{mj}^{s(3)} - t_{mj}^{a(3)}) e^{-k_{mj} l_1} + r_{mj}^{(1)} + \frac{1}{4} k_j (t_{mj}^{s(3)} + t_{mj}^{a(3)}) e^{k_{mj} l_1} \right) \cosh k_{mj} x \right. \\
& \left. \left. - \left(1 + \frac{1}{4} k_j (t_{mj}^{s(3)} - t_{mj}^{a(3)}) e^{-k_{mj} l_1} - r_{mj}^{(1)} - \frac{1}{4} k_j (t_{mj}^{s(3)} + t_{mj}^{a(3)}) e^{k_{mj} l_1} \right) \sinh k_{mj} x \right\} f'_{mj}(d) \right]. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Finalement, la forme générale de $\varphi_{1j}(x, d)$ s'écrit respectivement :

$$\begin{aligned}
\varphi_{1j}(x,d) = & \left[\left\{ (\Omega_{11j}^{(1)} + \Omega_{21j}^{(1)}) \cos k_j x - i (\Omega_{11j}^{(1)} - \Omega_{21j}^{(1)}) \sin k_j x \right\} f'_{1j}(d) \right. \\
& \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(1)} + \Omega_{2mj}^{(1)}) \cosh k_{mj} x - (\Omega_{1mj}^{(1)} - \Omega_{2mj}^{(1)}) \sinh k_{mj} x \right\} f'_{mj}(d) \right]. \tag{4.72}
\end{aligned}$$

$$(-b \leq x \leq -a)$$

L'expression de $\varphi_{2j}(x, d)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\varphi_2(x,d) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C'_{1j} \frac{\sin k'_j x}{\sin k'_j a} + D'_{1j} \frac{\cos k'_j x}{\cos k'_j a} \right) g_{1j}(d) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(C'_{nj} \frac{\sinh k'_{nj} x}{\sinh k'_{nj} a} + D'_{nj} \frac{\cosh k'_{nj} x}{\cosh k'_{nj} a} \right) g_{nj}(d) \right]. \tag{4.73}$$

$$(-a \leq x \leq a)$$

L'expression de $\varphi_{3j}(x, d)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_{3j}(x, d) = & \left[\left\{ B_j e^{-ik_j c} (\cos k_j x + i \sin k_j x + r_{1j}^{(3)} (\cos k_j x - i \sin k_j x)) + \frac{1}{4} A_j e^{-ik_j b} ((t_{1j}^{s(1)} - it_{1j}^{a(1)}) \right. \right. \\ & \times e^{-ik_j l_3} (\cos k_j x + i \sin k_j x) + (t_{1j}^{s(1)} + it_{1j}^{a(1)}) e^{ik_j l_3} (\cos k_j x - i \sin k_j x) \left. \right\} f'_{1j}(d) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ B_j \right. \\ & \times e^{-ik_j c} (\cosh k_{mj} x + \sinh k_{mj} x + r_{mj}^{(3)} (\cosh k_{mj} x - \sinh k_{mj} x)) + \frac{1}{4} A_j e^{-ik_j b} ((t_{mj}^{s(1)} + t_{mj}^{a(1)}) \\ & \times e^{-k_{mj} l_3} (\cosh k_{mj} x + \sinh k_{mj} x) + (t_{mj}^{s(1)} - t_{mj}^{a(1)}) e^{-k_{mj} l_3} (\cosh k_{mj} x - \sinh k_{mj} x)) \left. \right\} f'_{mj}(d) \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

En remplaçant la relation de B_j dans l'équation (4.74), et après quelques manipulations nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi_{3j}(x, d) = & A_j e^{-ik_j b} \left[\left\{ (k_j + \frac{1}{4} (t_{1j}^{s(1)} - it_{1j}^{a(1)}) e^{-ik_j l_3} + k_j r_{1j}^{(3)} + \frac{1}{4} (t_{1j}^{s(1)} + it_{1j}^{a(1)}) e^{ik_j l_3}) \cos k_j x \right. \right. \\ & + i(k_j + \frac{1}{4} (t_{1j}^{s(1)} - it_{1j}^{a(1)}) e^{-ik_j l_3} - k_j r_{1j}^{(3)} - \frac{1}{4} (t_{1j}^{s(1)} + it_{1j}^{a(1)}) e^{ik_j l_3}) \sin k_j x \left. \right\} f'_{1j}(d) \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (k_j + \frac{1}{4} (t_{mj}^{s(1)} + t_{mj}^{a(1)}) e^{-k_{mj} l_3} + k_j r_{mj}^{(3)} + \frac{1}{4} (t_{mj}^{s(1)} - t_{mj}^{a(1)}) e^{k_{mj} l_3}) \cosh k_{mj} x \right. \\ & \left. \left. + (k_j + \frac{1}{4} (t_{mj}^{s(1)} + t_{mj}^{a(1)}) e^{-k_{mj} l_3} - k_j r_{mj}^{(3)} - \frac{1}{4} (t_{mj}^{s(1)} - t_{mj}^{a(1)}) e^{k_{mj} l_3}) \sinh k_{mj} x \right\} f'_{mj}(d) \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Finalement, la forme générale de $\varphi_{3j}(x, d)$ s'écrit respectivement :

$$\begin{aligned} \varphi_{3j}(x, d) = & \left[\left\{ (\Omega_{11j}^{(3)} + \Omega_{21j}^{(3)}) \cos k_j x + i(\Omega_{11j}^{(3)} - \Omega_{21j}^{(3)}) \sin k_j x \right\} f'_{1j}(d) \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(3)} + \Omega_{2mj}^{(3)}) \cosh k_{mj} x + (\Omega_{1mj}^{(3)} - \Omega_{2mj}^{(3)}) \sinh k_{mj} x \right\} f'_{mj}(d) \right]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$(a \leq x \leq c)$$

Les expressions $\Omega_{11j}^{(1)}$, $\Omega_{21j}^{(1)}$, $\Omega_{1mj}^{(1)}$, $\Omega_{2mj}^{(1)}$, $\Omega_{11j}^{(3)}$, $\Omega_{21j}^{(3)}$, $\Omega_{1mj}^{(3)}$, $\Omega_{2mj}^{(3)}$ sont données par les relations

suivantes :

$$\begin{aligned}
\Omega_{11j}^{(1)} &= 1 + \frac{k_j}{4} (t_{1j}^{s(3)} + it_{1j}^{a(3)}) e^{-ik_j l_1}, \\
\Omega_{21j}^{(1)} &= r_{1j}^{(1)} + \frac{k_j}{4} (t_{1j}^{s(3)} - it_{1j}^{a(3)}) e^{ik_j l_1}, \\
\Omega_{1mj}^{(1)} &= 1 + \frac{k_j}{4} (t_{mj}^{s(3)} - t_{mj}^{a(3)}) e^{-k_{mj} l_1}, \\
\Omega_{2mj}^{(1)} &= r_{mj}^{(1)} + \frac{k_j}{4} (t_{mj}^{s(3)} + t_{mj}^{a(3)}) e^{k_{mj} l_1}, \\
\Omega_{11j}^{(3)} &= k_j + \frac{1}{4} (t_{1j}^{s(1)} - it_{1j}^{a(1)}) e^{-ik_j l_3}, \\
\Omega_{21j}^{(3)} &= k_j r_{1j}^{(3)} + \frac{1}{4} (t_{1j}^{s(1)} + it_{1j}^{a(1)}) e^{ik_j l_3}, \\
\Omega_{1mj}^{(3)} &= k_j + \frac{1}{4} (t_{mj}^{s(1)} + t_{mj}^{a(1)}) e^{-k_{mj} l_3}, \\
\Omega_{2mj}^{(3)} &= k_j r_{mj}^{(3)} + \frac{1}{4} (t_{mj}^{s(1)} - t_{mj}^{a(1)}) e^{k_{mj} l_3}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

où

$$f'_{1j} = \frac{f_{1j}(d)}{\varphi_{0j}}, \quad f'_{mj} = \frac{f_{mj}(d)}{\varphi_{0j}}, \quad \varphi_{0j} = \varphi_{1j}(-b, d), \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1j}(-b, d) &= \left[A_j (\Omega_{11j}^{(1)} + \Omega_{21j}^{(1)} e^{-i2k_j b}) f_{1j}(d) + \sum_{m=2}^{\infty} A_j e^{-ik_j b} \right. \\
&\quad \left. \times (\Omega_{1mj}^{(1)} e^{k_{mj} b} + \Omega_{2mj}^{(1)} e^{-k_{mj} b}) f_{mj}(d) \right].
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Les formes de modes de ballottement pour les trois régions de liquides différents φ_{1j} , φ_{2j} , et φ_{3j} , si être continu au $x = -a$ et $x = a$. Les conditions de continuités de liquides sont données comme suite :

$$\varphi_{1j} = \varphi_{2j}, \quad \frac{d\varphi_{1j}}{dx} = \frac{d\varphi_{2j}}{dx} \quad \text{à } x = -a, \tag{4.80}$$

$$\varphi_{2j} = \varphi_{3j}, \quad \frac{d\varphi_{2j}}{dx} = \frac{d\varphi_{3j}}{dx} \quad \text{à } x = a. \tag{4.81}$$

Les expressions de $\varphi_{1j}(-a, d) = \varphi_{2j}(-a, d)$ sont données par :

$$\begin{aligned}
&\left[(-C'_{1j} + D'_{1j}) g_{1j}(d) + \sum_{n=2}^{\infty} (-C'_{nj} + D'_{nj}) g_{nj}(d) \right] = \\
\varphi_{0j}^{-1} &\left[\left\{ (\Omega_{11j}^{(1)} + \Omega_{21j}^{(1)}) \cos k_j a + i(\Omega_{11j}^{(1)} - \Omega_{21j}^{(1)}) \sin k_j a \right\} f_{1j}(d) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Omega_{2mj}^{(1)}) \cosh k_{mj} a + (\Omega_{1mj}^{(1)} - \Omega_{2mj}^{(1)}) \sinh k_{mj} a \right\} f_{mj}(d) \right].
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Les expressions de $\varphi_{1jx}(-a, d) = \varphi_{2jx}(-a, d)$ sont données par :

$$\begin{aligned} & \left[k'_j (C'_{1j} \cot k'_j a + D'_{1j} \tan k'_j a) g_{1j}(d) + \sum_{n=2}^{\infty} k'_{nj} (C'_{nj} \coth k'_{nj} a - D'_{nj} \tanh k'_{nj} a) g_{nj}(d) \right] = \\ & \varphi_{0j}^{-1} \left[k_j \left\{ (\Omega_{11j}^{(1)} + \Omega_{21j}^{(1)}) \sin k_j a - i(\Omega_{11j}^{(1)} - \Omega_{21j}^{(1)}) \cos k_j a \right\} f_{1j}(d) + \sum_{m=2}^{\infty} k_{mj} \left\{ -(\Omega_{1mj}^{(1)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \Omega_{2mj}^{(1)}) \sinh k_{mj} a - (\Omega_{1mj}^{(1)} - \Omega_{2mj}^{(1)}) \cosh k_{mj} a \right\} f_{mj}(d) \right]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Les expressions de $\varphi_{2j}(a, d) = \varphi_{3j}(a, d)$ sont données par :

$$\begin{aligned} & \left[(C'_{1j} + D'_{1j}) g_{1j}(d) + \sum_{n=2}^{\infty} (C'_{nj} + D'_{nj}) g_{nj}(d) \right] = \\ & \varphi_{0j}^{-1} \left[\left\{ (\Omega_{11j}^{(3)} + \Omega_{21j}^{(3)}) \cos k_j a + i(\Omega_{11j}^{(3)} - \Omega_{21j}^{(3)}) \sin k_j a \right\} f_{1j}(d) + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \Omega_{2mj}^{(3)}) \cosh k_{mj} a + (\Omega_{1mj}^{(3)} - \Omega_{2mj}^{(3)}) \sinh k_{mj} a \right\} f_{mj}(d) \right]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Les expressions de $\varphi_{2jx}(a, d) = \varphi_{3jx}(a, d)$ sont données par :

$$\begin{aligned} & \left[k'_j (C'_{1j} \cot k'_j a - D'_{1j} \tan k'_j a) g_{1j}(d) + \sum_{n=2}^{\infty} k'_{nj} (C'_{nj} \coth k'_{nj} a + D'_{nj} \tanh k'_{nj} a) g_{nj}(d) \right] = \\ & \varphi_{0j}^{-1} \left[k_j \left\{ -(\Omega_{11j}^{(3)} + \Omega_{21j}^{(3)}) \sin k_j a + i(\Omega_{11j}^{(3)} - \Omega_{21j}^{(3)}) \cos k_j a \right\} f_{1j}(d) + \sum_{m=2}^{\infty} k_{mj} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \Omega_{2mj}^{(3)}) \sinh k_{mj} a + (\Omega_{1mj}^{(3)} - \Omega_{2mj}^{(3)}) \cosh k_{mj} a \right\} f_{mj}(d) \right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Les équations (Éq. (4.82)), (Éq.(4.83)), (Éq.(4.84)), (Éq.(4.85)) prennent respectivement les formes suivantes :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k'_j \cot k'_j a & k'_j \tan k'_j a \\ 1 & 1 \\ k'_j \cot k'_j a & -k'_j \tan k'_j a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C'_{1j} \\ D'_{1j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Lambda_{11j} \\ \Lambda_{12j} \\ \Lambda_{13j} \\ \Lambda_{14j} \end{Bmatrix}, \quad (4.86)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ k'_{nj} \coth k'_{nj} a & -k'_{nj} \tanh k'_{nj} a \\ 1 & 1 \\ k'_{nj} \coth k'_{nj} a & k'_{nj} \tanh k'_{nj} a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C'_{nj} \\ D'_{nj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Lambda_{n1j} \\ \Lambda_{n2j} \\ \Lambda_{n3j} \\ \Lambda_{n4j} \end{Bmatrix}, \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (4.87)$$

À partir des équations (4.86) et (4.87), les coefficients inconnus C'_{1j} , D'_{1j} , C'_{nj} et D'_{nj} dans l'équation (4.73) peuvent être déterminés.

où Λ_{nij} ($n = 1, 2, 3, \dots$ et $i = 1, \dots, 4$) sont données respectivement :

$$\begin{aligned} \Lambda_{n1j} = & \varphi_{0j}^{-1} \left[\left\{ (\Omega_{11j}^{(1)} + \Omega_{21j}^{(1)}) \cos k_j a + i(\Omega_{11j}^{(1)} - \Omega_{21j}^{(1)}) \sin k_j a \right\} \psi_{1nj} \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(1)} + \Omega_{2mj}^{(1)}) \cosh k_{mj} a + (\Omega_{1mj}^{(1)} - \Omega_{2mj}^{(1)}) \sinh k_{mj} a \right\} \psi_{mnj} \right], \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n2j} = \varphi_{0j}^{-1} & \left[k_j \left\{ (\Omega_{11j}^{(1)} + \Omega_{21j}^{(1)}) \sin k_j a - i(\Omega_{11j}^{(1)} - \Omega_{21j}^{(1)}) \cos k_j a \right\} \psi_{1nj} \right. \\ & \left. - \sum_{m=2}^{\infty} k_{mj} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(1)} + \Omega_{2mj}^{(1)}) \sinh k_{mj} a + (\Omega_{1mj}^{(1)} - \Omega_{2mj}^{(1)}) \cosh k_{mj} a \right\} \psi_{mnj} \right], \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n3j} = \varphi_{0j}^{-1} & \left[\left\{ (\Omega_{11j}^{(3)} + \Omega_{21j}^{(3)}) \cos k_j a + i(\Omega_{11j}^{(3)} - \Omega_{21j}^{(3)}) \sin k_j a \right\} \psi_{1nj} \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(3)} + \Omega_{2mj}^{(3)}) \cosh k_{mj} a + (\Omega_{1mj}^{(3)} - \Omega_{2mj}^{(3)}) \sinh k_{mj} a \right\} \psi_{mnj} \right], \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n4j} = \varphi_{0j}^{-1} & \left[-k_j \left\{ (\Omega_{11j}^{(3)} + \Omega_{21j}^{(3)}) \sin k_j a - i(\Omega_{11j}^{(3)} - \Omega_{21j}^{(3)}) \cos k_j a \right\} \psi_{1nj} \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} k_{mj} \left\{ (\Omega_{1mj}^{(3)} + \Omega_{2mj}^{(3)}) \sinh k_{mj} a + (\Omega_{1mj}^{(3)} - \Omega_{2mj}^{(3)}) \cosh k_{mj} a \right\} \psi_{mnj} \right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

avec

$$\psi_{mnj} = \int_h^d f_{mj}(z) g_{nj} dz, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.92)$$

En conclusion, les fréquences et les formes de mode de ballonnement seront obtenus par des coefficients de réflexion et de transmission. Les coefficients de réflexion et de transmission pour les régions liquide *I* et *III* sont définis comme suite :

$$\begin{aligned} r_{1j}^{(1)} &= \frac{1}{4} \left(\chi_{1j}^{a(1)} + \chi_{(m+1)j}^{a(1)} + \chi_{1j}^{s(1)} + \chi_{(m+1)j}^{s(1)} \right) e^{2ik_j a}, \\ t_{1j}^{a(1)} &= \frac{\chi_{1j}^{a(1)} - \chi_{(m+1)j}^{a(1)}}{2 \sin k_j c_0} e^{ik_j a}, \\ t_{1j}^{s(1)} &= \frac{\chi_{1j}^{s(1)} - \chi_{(m+1)j}^{s(1)}}{2 \cos k_j c_0} e^{ik_j a}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} r_{1j}^{(3)} &= \frac{1}{4} \left(\chi_{1j}^{a(3)} + \chi_{(m+1)j}^{a(3)} + \chi_{1j}^{s(3)} + \chi_{(m+1)j}^{s(3)} \right) e^{2ik_j a}, \\ t_{1j}^{a(3)} &= \frac{\chi_{1j}^{a(3)} - \chi_{(m+1)j}^{a(3)}}{2 \sin k_j b_0} e^{ik_j a}, \\ t_{1j}^{s(3)} &= \frac{\chi_{1j}^{s(3)} - \chi_{(m+1)j}^{s(3)}}{2 \cos k_j b_0} e^{ik_j a}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission pour les parties antisymétriques $\chi_{1j}^{a(1)}$, $\chi_{1j}^{a(3)}$ et symétriques $\chi_{1j}^{s(1)}$, $\chi_{1j}^{s(3)}$ de potentiel de vitesse sont définis (voir annexe *B*).

Les vecteurs de coefficients de réflexion et de transmission pour les parties antisymétriques et symétriques du potentiel de vitesse sont définis :

$$X_{aj}^{(1)} = U_{aj}^{(1)-1} V_{aj}^{(1)}, \quad (4.95a)$$

$$X_{sj}^{(1)} = U_{sj}^{(1)-1} V_{sj}^{(1)}, \quad (4.95b)$$

$$X_{aj}^{(3)} = U_{aj}^{(3)-1} V_{aj}^{(3)}, \quad (4.95c)$$

$$X_{sj}^{(3)} = U_{sj}^{(3)-1} V_{sj}^{(3)}. \quad (4.95d)$$

où

$$X_{aj}^{(1)} = \langle \chi_{1j}^{a(1)} \quad \chi_{2j}^{a(1)} \quad \cdots \quad \chi_{(m+1)j}^{a(1)} \quad \chi_{(m+2)j}^{a(1)} \quad \cdots \chi_{2mj}^{a(1)} \rangle^T, \quad (4.96a)$$

$$X_{sj}^{(1)} = \langle \chi_{1j}^{s(1)} \quad \chi_{2j}^{s(1)} \quad \cdots \quad \chi_{(m+1)j}^{s(1)} \quad \chi_{(m+2)j}^{s(1)} \quad \cdots \chi_{2mj}^{s(1)} \rangle^T, \quad (4.96b)$$

$$X_{aj}^{(3)} = \langle \chi_{1j}^{a(3)} \quad \chi_{2j}^{a(3)} \quad \cdots \quad \chi_{(m+1)j}^{a(3)} \quad \chi_{(m+2)j}^{a(3)} \quad \cdots \chi_{2mj}^{a(3)} \rangle^T, \quad (4.96c)$$

$$X_{sj}^{(3)} = \langle \chi_{1j}^{s(3)} \quad \chi_{2j}^{s(3)} \quad \cdots \quad \chi_{(m+1)j}^{s(3)} \quad \chi_{(m+2)j}^{s(3)} \quad \cdots \chi_{2mj}^{s(3)} \rangle^T. \quad (4.96d)$$

$U_{aj}^{(1)}, U_{sj}^{(1)}, U_{aj}^{(3)}, U_{sj}^{(3)}, V_{aj}^{(1)}, V_{sj}^{(1)}, V_{aj}^{(3)}, V_{sj}^{(3)}$ sont des matrices et des vecteurs liés aux coefficients de réflexion et de transmission (voir annexe *B*).

4.5 Résultats et discussion

Dans cette section, les solutions analytiques présentées ci-dessus seront évalués numériquement pour montrer les évolutions des fréquences et formes de modes propres dans un réservoir rectangulaire avec un bloc submergé. Le but est d'examiner comment les fréquences et formes de modes sont influencées par la taille, l'endroit et la largeur de bloc.

4.6 Fréquences et formes de modes de ballonnement

Les fréquences w_j et formes de modes de ballonnement sont présentées pour tailles, largeurs et positions du bloc différent. Des calculs sont exécutés avec une largeur de réservoir $L = 30$ et hauteur de liquide $d = 15$.

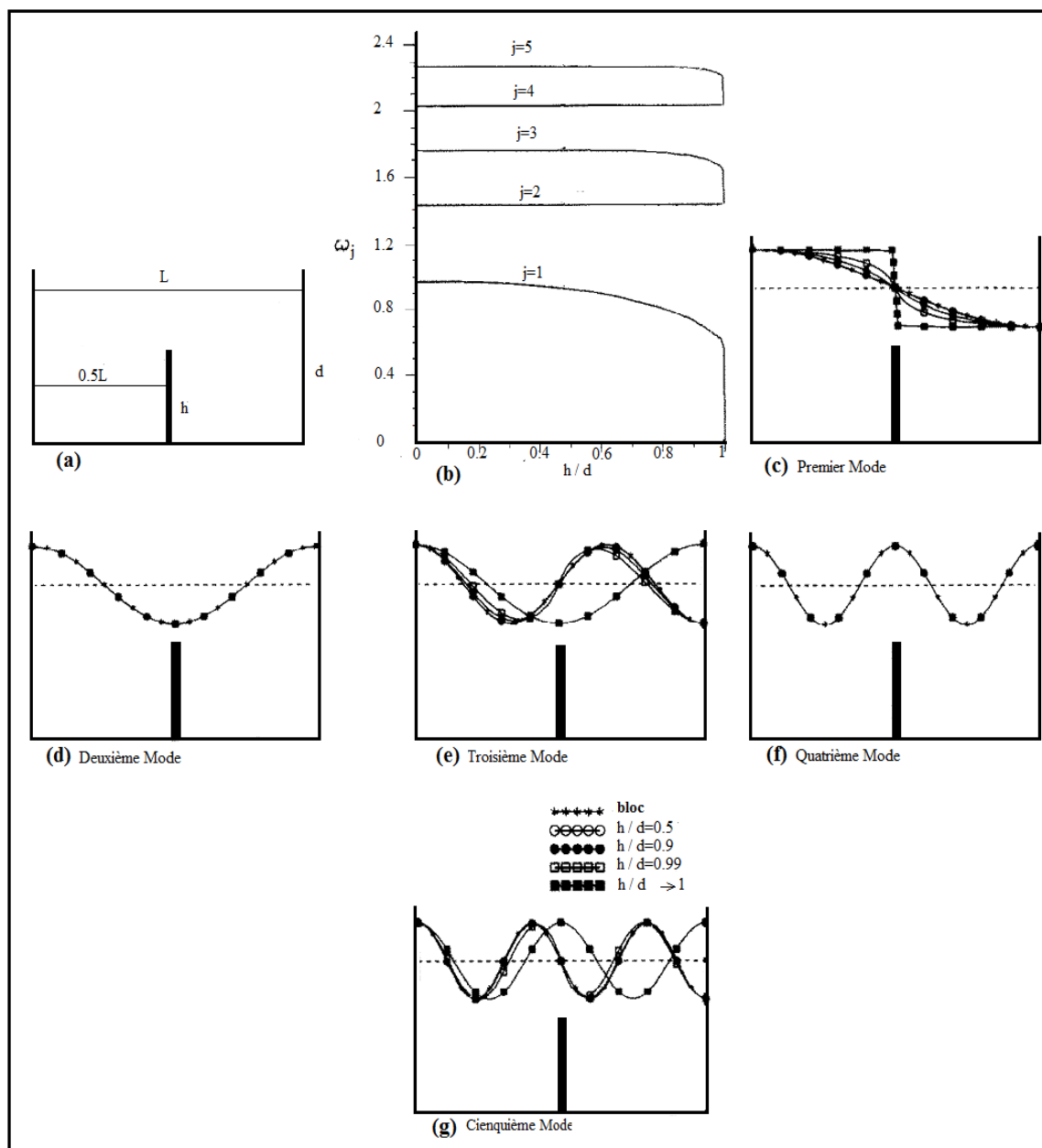


FIG. 4.2: Les fréquences et les modes de ballonnement pour différentes tailles d'un bloc au centre ($d/L = 0.5$) : (a) le réservoir rectangulaire avec une cloison est situé au centre de réservoir ($L = 30, d = 15$); (b) les fréquences de ballonnement; (c), (d), (e), (f), (g) les formes des modes.

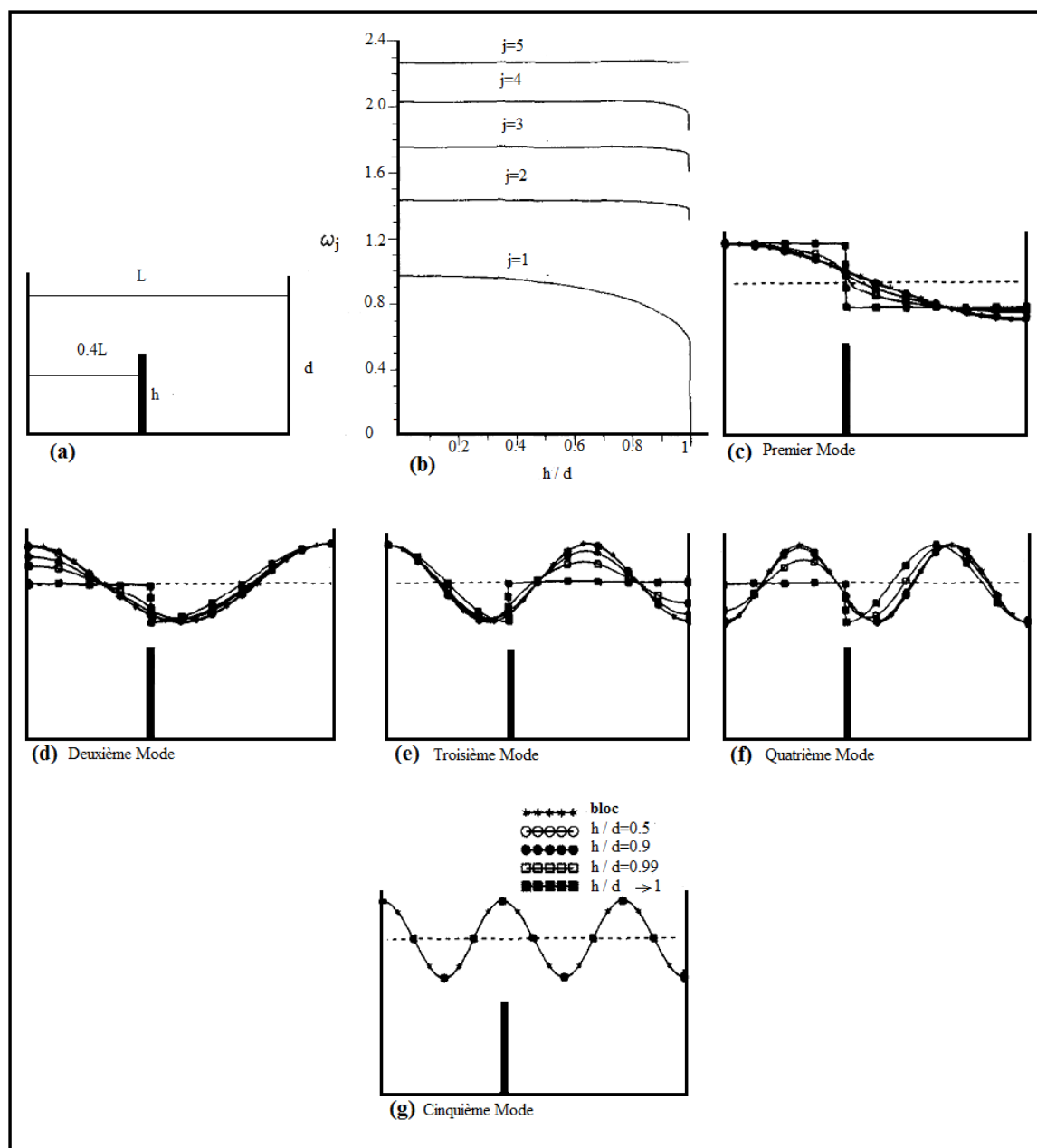


FIG. 4.3: Les fréquences et les modes de ballotement pour différentes tailles d'un bloc situé loin du centre ($d/L = 0.5$) : (a) le réservoir rectangulaire avec une cloison loin du centre de réservoir ($L = 30, d = 15$) ; (b) les fréquences de ballotement ; (c), (d), (e), (f), (g) les formes de mode.

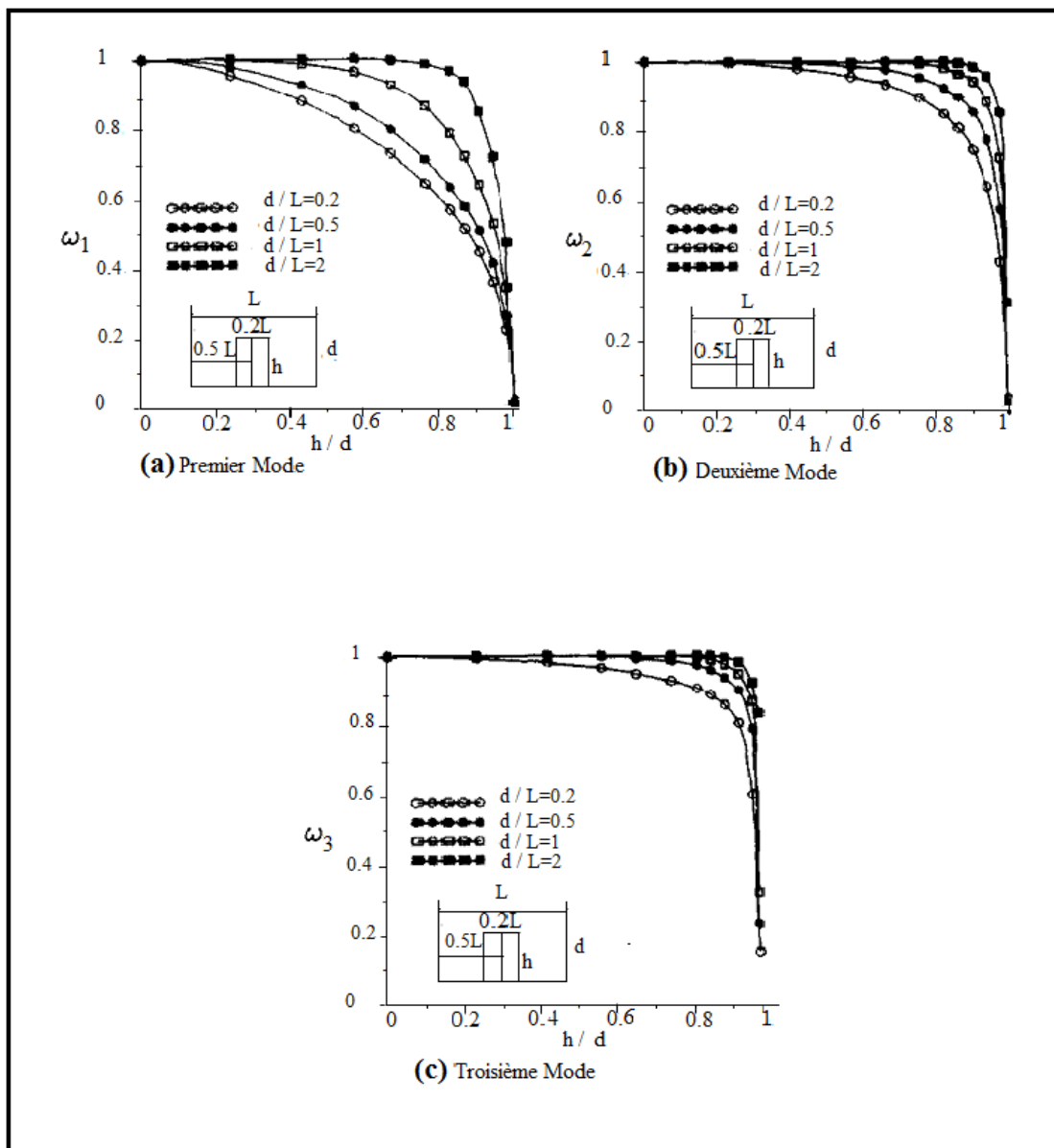


FIG. 4.4: Les fréquences de ballonnement pour des tailles du bloc (h/d) différentes; (a) premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode.

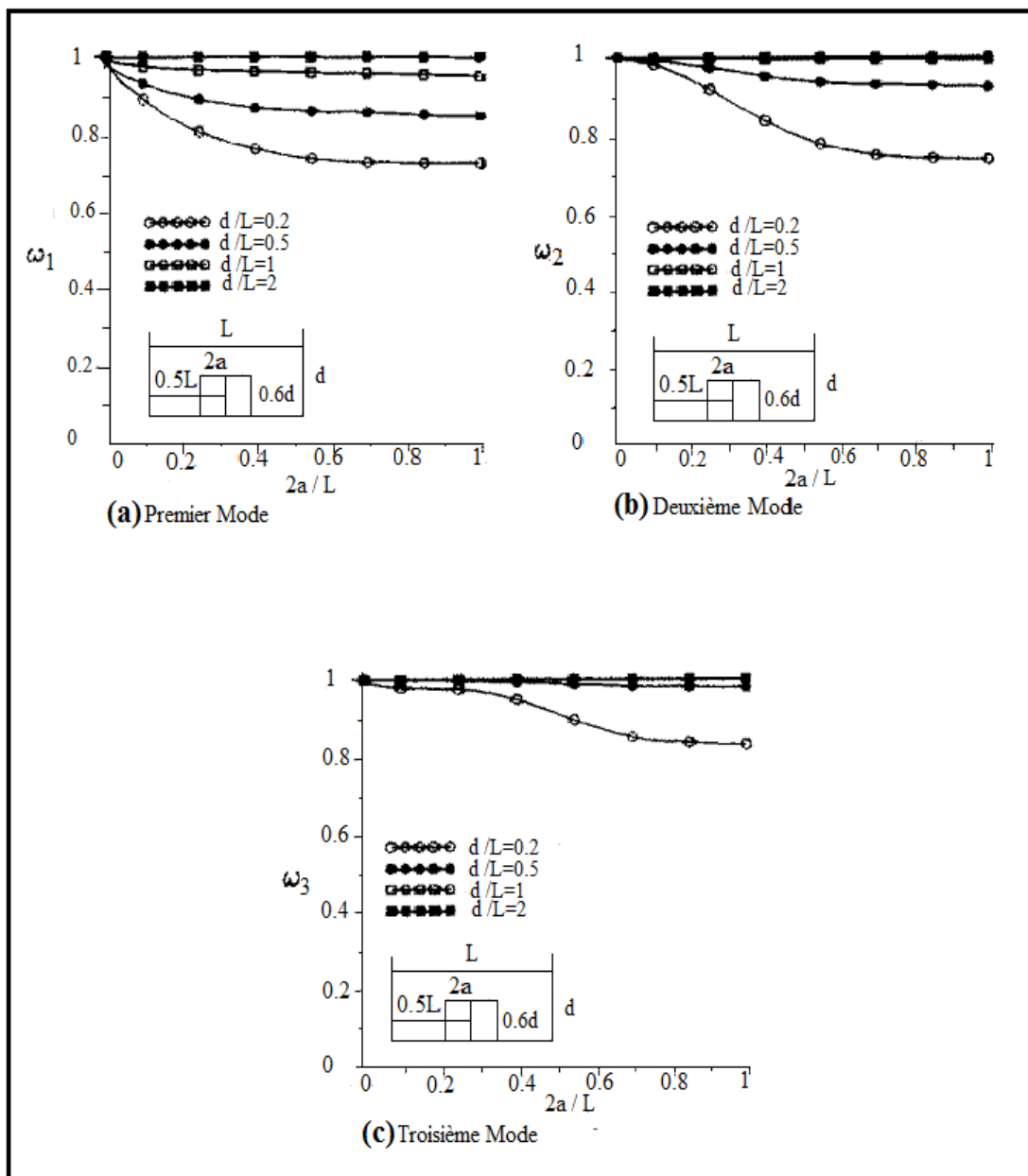


FIG. 4.5: Les fréquences de ballotement pour des largeurs du bloc ($2a/L$) différentes; (a) premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode.

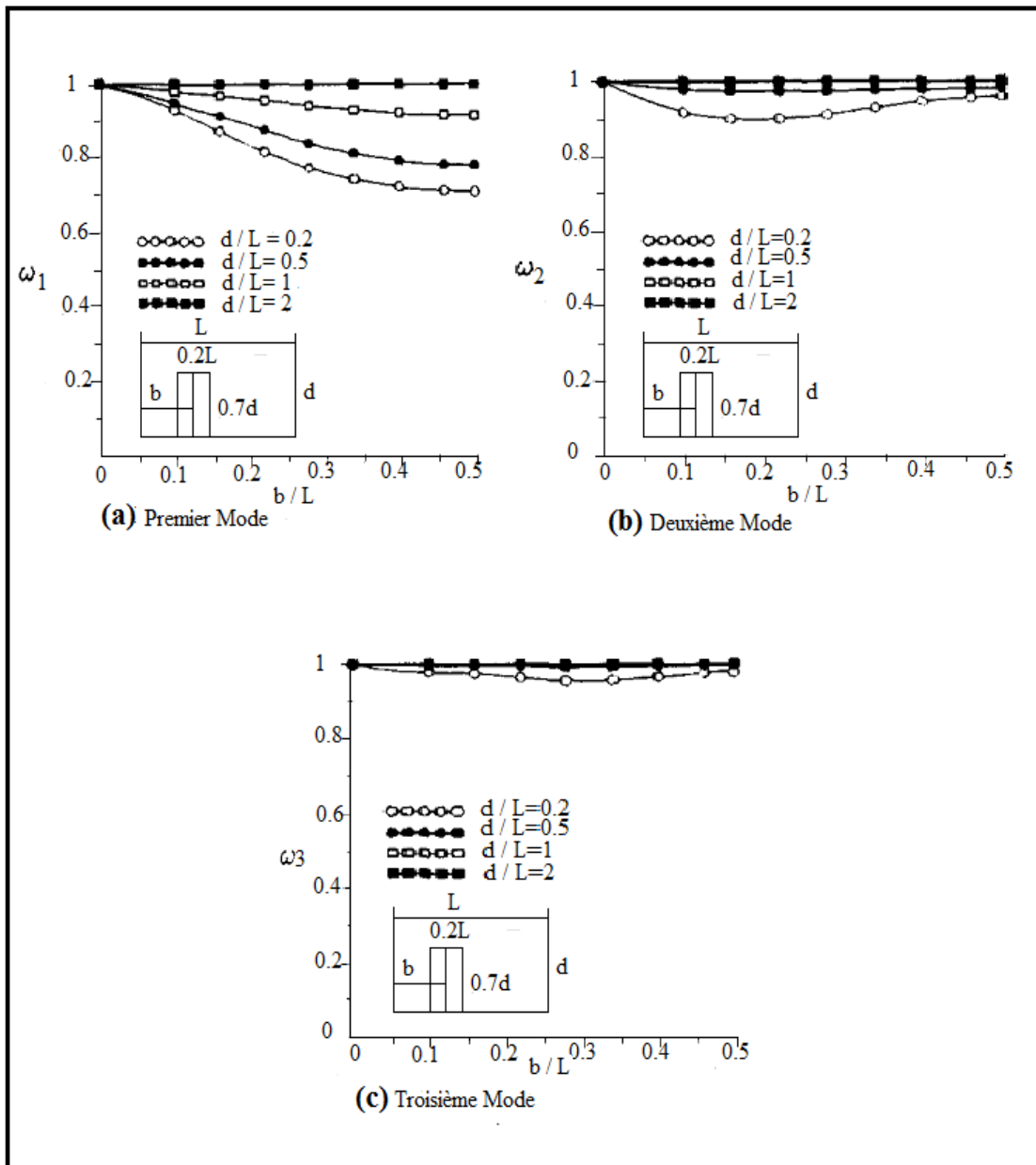


FIG. 4.6: Les fréquences de ballotement pour un bloc situé dans des endroits (b/L) différents ; (a) premier mode ; (b) deuxième mode ; (c) troisième mode.

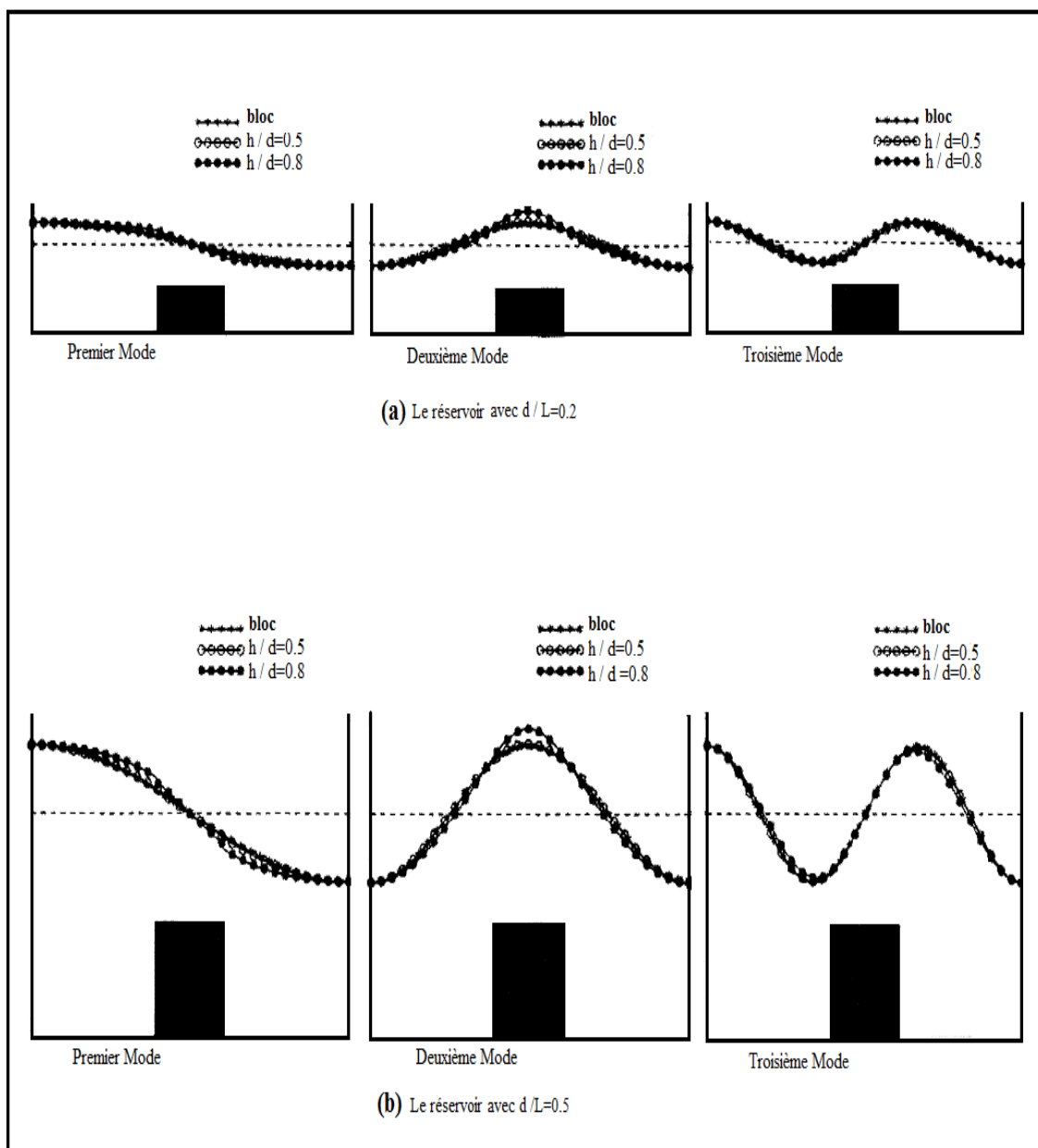


FIG. 4.7: Les formes des modes de ballotement pour des tailles du bloc (h/d) différentes ; (a) le réservoir avec ($d/L = 0.2$) ; (b) le réservoir avec ($d/L = 0.5$).

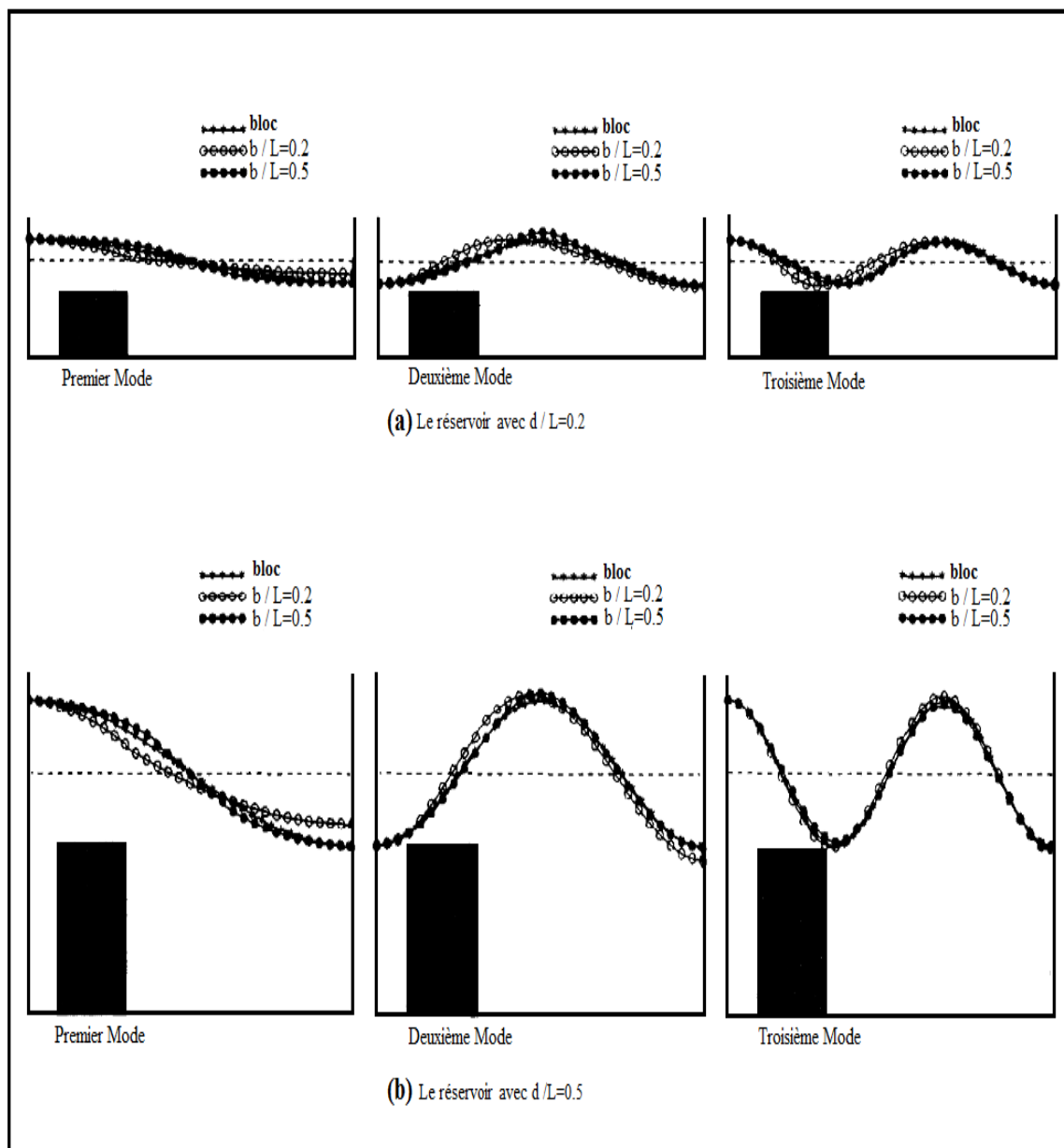


FIG. 4.8: Les formes de modes de ballotement pour un bloc situé dans des endroits (b/L) différents; (a) le réservoir avec ($d/L = 0.2$); (b) le réservoir avec ($d/L = 0.5$).

Sur la figure 4.2 on représente l'évolution des fréquences et des modes de ballottement pour différentes tailles d'une cloison. La cloison est située au centre du réservoir. On remarque que les fréquences et les formes des modes pairs de ballottement ne sont pas affectées par la cloison. Par contre, les modes impairs changent en raison de la cloison. Si ($h/d > 0.9$), les fréquences diminuent rapidement.

Sur la figure 4.3 on représente l'évolution des fréquences et des modes de ballottement pour différentes tailles d'une cloison. La cloison est situé loin au centre de réservoir. Les fréquences de ballottement des quatre premiers modes diminuent lorsque le rapport de (h/d) augmente, alors que le cinquième mode ne change pas.

Sur la figure 4.4 on montre la variation des fréquences de ballottement d'un fluide avec la taille d'un bloc (h/d) pour différents rapports de profondeur à la largeur (d/L). Le bloc est situé au centre de réservoir. Les fréquences de ballottement diminuent lorsque la taille de bloc augmente. Les fréquences de ballottement diminuent rapidement pour des valeurs (h/d) grandes. La diminution des fréquences de ballottement est plus évidente pour le premier mode de ballottement et pour des réservoirs larges. Pour des cas d'un bloc court ($h/d < 0.5$) dans un réservoir grand ($d/L > 2$), on remarque un petit changement des fréquences de ballottement.

Sur la figure 4.5 on montre la variation des fréquences de ballottement d'un fluide avec le rapport de largeur au bloc à la largeur du réservoir ($2a/L$) pour différents rapports de profondeur à la largeur (d/L). Le bloc est situé au centre de réservoir et la taille est prise ($0.6d$). Les fréquences de ballottement diminuent quand la largeur de bloc augmente. Les fréquences sont pratiquement constantes à partir ($2a/L > 0.8$). La largeur de bloc n'influence pas de manière significative les fréquences de ballottement pour le rapport ($d/L > 1$).

Sur la figure 4.6 on montre la variation des fréquences de ballottement d'un fluide avec l'endroit de bloc (b/L) pour différents rapports de profondeur à la largeur (d/L). Le bloc est situé loin du centre de réservoir et la taille est ($0.7d$). On remarque que la première fréquence de ballottement diminue considérablement. Les fréquences, d'ordre deux et trois, changent légèrement avec la position du bloc et la quatrième fréquence ne change pas. Pour des réservoirs grands avec ($d/L > 1$), les fréquences de ballottement ne changent pas beaucoup.

La figure 4.7 montre les modes de ballottement pour différentes tailles de bloc (h/d) avec deux réservoirs larges (réservoir avec le rapport ($d/L = 0.2$) et ($d/L = 0.5$)). Nous remarquons que les modes sont affectés sensiblement par la taille de bloc.

La figure 4.8 montre les modes de ballottement pour différentes positions du bloc (b/L) avec deux réservoirs larges (réservoir avec le rapport ($d/L = 0.2$) et ($d/L = 0.5$)). On remarque que les modes sont affectés sensiblement par la position de bloc.

Les résultats de l'analyse actuelle sont en bon accord avec les résultats de **Choun et Yun** dans la référence [20].

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le ballottement dans un réservoir rectangulaire en présence d'obstacles de forme rectangulaire. Plus spécifiquement, les effets de la taille et la position d'un bloc submergé sur les fréquences de ballottement et les formes de mode. Nous avons écrit les équations gouvernant le mouvement de fluide, en supposant que le fluide est parfait, incompressible en écoulement irrotationnel. Les fréquences et la forme des modes correspondants ont été obtenues analytiquement dans le cadre de la théorie linéaire par la méthode de séparation des variables. Les fréquences et les formes des modes sont calculées en présence des coefficients de réflexion et de transmission. Les résultats d'analyse indiquent que la taille et la position du bloc influencent les fréquences et les formes de modes de ballottement. En général, les fréquences de ballottement diminuent quand le bloc devient large et haut.

L'effet d'un bloc interne sur le comportement de ballottement peut être récapitulé comme suit :

- Les fréquences de ballottement, en général, diminuent en raison de la présence du bloc interne.
- Les modes de ballottement, c.-à-d l'augmentation de la taille de bloc conduit à l'augmentation des ondes de surface.
- Les fréquences et les modes de ballottement changent plus dans le cas des réservoirs larges ($d/L < 0.5$) avec un bloc grand ($h/d > 0.5$). Pour des réservoirs larges ($d/L > 2$) avec un bloc grand ($h/d > 0.5$), les fréquences de ballottement ne changent pas beaucoup.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons essayé de répondre à un certain nombre de questions reliés aux phénomènes du ballottement des liquides dans des réservoirs rectangulaires avec ou sans cloisons, comprendre l'effet des cloisons sur le ballottement dans un réservoir rectangulaire, aussi bien pour valider certaines hypothèses que pour proposer des solutions analytiques pour la résolution des problèmes étudiés. Cependant, l'étude analytique d'un tel phénomène est complexe, même pour ces géométries considérées simples, en raison de la multitude de paramètres qui entrent en jeu et de la non-linéarité du phénomène.

Le premier chapitre comprend une recherche bibliographique décrivant le comportement des liquides en mouvement contenus dans un réservoir avec ou sans cloison. L'accent est porté sur les méthodes analytiques et numériques traitant le ballottement dans des réservoirs avec ou sans bloc.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les caractéristiques du ballottement d'un fluide contenu dans un réservoir rectangulaire fixe. Nous avons considéré le modèle d'écoulement le plus simple. Par ailleurs, l'écoulement étudié est régi par l'équation de continuité et l'équation de mouvement d'Euler, ainsi que les conditions aux limites associés dont celles exprimées sur la frontière mobile qui sont ensuite linéarisées. Ce qui permet d'obtenir des solutions ondulatoires assez simples. La présence de la tension superficielle fait augmenter ces fréquences propres de la surface libre. En effet, cette augmentation est évidente pour les grands modes. Le point notable est le fait que ce mouvement est dispersif. L'approche linéaire est bien adaptée tant que l'amplitude des oscillations reste faible devant la longueur d'onde.

L'objectif du chapitre trois a été de proposer un modèle analytique de ballottement dans un réservoir rectangulaire en présence de parois internes fines. Nous avons étudié l'effet de la taille et de la position de barrière sur les fréquences propres. Ce chapitre consiste en l'étude de deux méthodes pour calculer les fréquences propres. Ici la paroi verticale est considérée comme une perforation au niveau de la surface libre. Les équations gouvernant le mouvement d'une surface libre d'un fluide confiné dans un réservoir rectangulaire avec un bloc ont été développées en utilisant l'équation de continuité (Éq. de Laplace) et l'équation de Bernoulli ainsi que les conditions aux limites associées. Cependant, les équations obtenues, les conditions aux limites de surface libre, ne sont pas linéaires. C'est la raison pour laquelle nous avons adopté l'hypothèse de la linéarité qui consiste à ne considérer que les petits mouvements de la surface libre. Les fréquences propres ont été obtenues analytiquement dans le cadre de la théorie linéaire par la méthode de développement des fonctions propres et l'approximation d'espacement large.

Cette approximation d'espacement large suppose que la longueur de l'onde est petite par rapport à la distance entre le bloc et les parois. L'approximation d'espacement large comprend les coefficients de transmission et réflexion. La méthode de développement de fonctions propres est comparée à l'approximation d'espacement large. Une bonne concordance a été réalisée entre ces deux méthodes. Les fréquences propres sont influencées par la taille et la position de bloc. Les fréquences diminuent en présence de parois internes fines.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié les caractéristiques du ballonnement dans un réservoir rectangulaire avec un bloc submergé qui peuvent changer considérablement selon la taille et la position du bloc. Par ailleurs, l'écoulement étudié est régi par l'équation de continuité et l'équation d'Euler, ainsi que les conditions aux limites associées dont celles exprimées sur la frontière mobile qui sont ensuite linéarisées. Les coefficients de réflexion et de transmission liés au bloc sont calculés. Nous avons déterminé les fréquences et la forme des modes dans un réservoir rectangulaire avec un bloc submergé de taille et de position arbitraire en utilisant la théorie linéaire des ondes de gravité. Les fréquences et les formes de modes sont calculées en présence des coefficients de réflexion et de transmission. Les fréquences et la forme du mode de ballonnement varient sensiblement dans le cas des réservoirs larges et avec un bloc grand.

- Les fréquences et les modes de ballonnement changent plus dans le cas des réservoirs larges ($d/L < 0.5$) et avec un bloc grand ($h/d > 0.5$).
- Les formes de modes de ballonnement, l'augmentation de la taille de bloc conduit à l'augmentation des ondes de surface.

Les formes des modes montrent que la forme de l'onde est ondulatoire.

Les conclusions principales tirées de cette recherche sont récapitulées ci-dessous : nous avons remarqué que le ballonnement d'un fluide dans un réservoir rectangulaire fixe produit une déformation de la surface libre et les fréquences augmentent avec ou sans la capillarité tandis que la présence de cloison fait que les fréquences et la déformation de la surface libre diminuent.

Les cloisons sont efficaces pour diminuer l'effet de ballonnement du liquide. La réponse dynamique est affectée sensiblement par divers paramètres de la cloison, telle que la position et la taille des cloisons. En présence d'une cloison, nous avons observé que la meilleure position pour que la cloison réduise l'effet de ballonnement liquide est près de la surface libre de liquide.

Pour un usage plus rentable des cloisons dans la réduction du ballonnement liquide, les recommandations sont :

- L'épaisseur de cloison ne devrait pas être plus grande que l'épaisseur des parois de réservoir.
- L'utilisation de cloisons minces pratiquement possible au lieu d'utiliser une cloison épaisse.
- La taille de la cloison devrait être choisie de façon optimale [34].
- En utilisant les cloisons, les fréquences sur les parois de réservoir peuvent être diminuées sensiblement par rapport au réservoir rectangulaire correspondant qui n'utilisent aucune cloison.

Des études peuvent également être effectuées pour explorer le dispositif anti-ballonnement. Par exemple, si on remplace le volume vide occupé par l'air par un gaz spécifique pour appliquer plus de pression sur le liquide. Ceci permet de réduire au minimum le mouvement de la surface libre du

liquide.

Annexe A

Orthogonalité des fonctions

Dans cette annexe sont données les relations d'orthogonalités des fonctions $f_{1j}(z)$, $f_{mj}(z)$ et $g_{1j}(z)$, $g_{nj}(z)$.

Les relations d'orthogonalité des fonctions $f_{1j}(z)$ et $f_{mj}(z)$ sur l'intervalle $[0, d]$. Les indices m , k et j sont des nombres entiers positifs.

$$\int_0^d f_{1j}(z)f_{1k}(z)dz = \delta_{jk}, \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^d f_{mj}(z)f_{mk}(z)dz = \delta_{jk}. \quad (\text{A.2})$$

Les relations d'orthogonalité des fonctions $g_{1j}(z)$ et $g_{nj}(z)$ sur l'intervalle $[h, d]$. Les indices n , k et j sont des nombres entiers positifs.

$$\int_h^d g_{1j}(z)g_{1k}(z)dz = \delta_{jk}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int_h^d g_{nj}(z)g_{nk}(z)dz = \delta_{jk}. \quad (\text{A.4})$$

où δ_{mn} est le Kroneker.

Annexe B

Les vecteurs et matrices liés aux coefficients de réflexion et de transmission

Dans cette annexe sont données les matrices $U_{aj}^{(1)}$, $U_{sj}^{(1)}$, $U_{aj}^{(3)}$, $U_{sj}^{(3)}$ et les vecteurs $V_{sj}^{(1)}$, $V_{aj}^{(1)}$, $V_{sj}^{(3)}$, $V_{aj}^{(3)}$ liés aux coefficients de réflexion et de transmission dans les équations (4.95a)-(4.95d).

Pour les parties antisymétriques des potentiels de vitesse :

$$U_{aj}^{(1)} = \begin{bmatrix} (u_{11j}^a + 1) & u_{12j}^a & \dots & u_{1(m+1)j}^a & u_{1(m+2)j}^a & \dots & u_{1(2m)j}^a \\ u_{21j}^a & (u_{22j}^a + 1) & \dots & u_{2(m+1)j}^a & u_{2(m+2)j}^a & \dots & u_{2(2m)j}^a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{(m+1)1j}^a & u_{(m+1)2j}^a & \dots & (u_{(m+1)(m+1)j}^a - 1) & u_{(m+1)(m+2)j}^a & \dots & u_{(m+1)(2m)j}^a \\ u_{(m+2)1j}^a & u_{(m+2)2j}^a & \dots & u_{(m+2)(m+1)j}^a & (u_{(m+2)(m+2)j}^a - 1) & \dots & u_{(m+2)(2m)j}^a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{(2m)1j}^a & u_{(2m)2j}^a & \dots & u_{(2m)(m+1)j}^a & u_{(2m)(m+2)j}^a & \dots & (u_{(2m)(2m)j}^a - 1) \end{bmatrix}$$

$$V_{aj}^{(1)} = \langle 1 - (u_{11j}^a + u_{1(m+1)j}^a) - (u_{21j}^a + u_{2(m+1)j}^a) \dots - 1 - (u_{(m+1)1j}^a + u_{(m+1)(m+1)j}^a) - (u_{(m+2)1j}^a + u_{(m+2)(m+1)j}^a) \dots - (u_{(2m)1j}^a + u_{(2m)(m+1)j}^a) \rangle^T. \quad (\text{B.1})$$

où

$$\begin{aligned}
u_{pqj}^a &= \alpha_{1qj}(\tan k_j c_0 - i), & \text{pour } p = 1, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^a &= \beta_{1(q-m)j}(\tan k_j c_0 + i), & \text{pour } p = 1, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \\
u_{pqj}^a &= \alpha_{pqj}(\tanh k_{pj} c_0 + 1), & \text{pour } p = 2, 3, \dots, m, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^a &= \beta_{p(q-m)j}(\tanh k_{pj} c_0 - 1), & \text{pour } p = 2, 3, \dots, m, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \\
u_{pqj}^a &= \alpha_{1qj}(\tan k_j c_0 + i), & \text{pour } p = m + 1, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^a &= \beta_{1(q-m)j}(\tan k_j c_0 - i), & \text{pour } p = m + 1, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \\
u_{pqj}^a &= \alpha_{(p-m)qj}(\tanh k_{pj} c_0 - 1), & \text{pour } p = m + 2, m + 3, \dots, 2m, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^a &= \beta_{(p-m)(q-m)j}(\tanh k_{pj} c_0 + 1), & \text{pour } p = m + 2, m + 3, \dots, 2m, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

avec

$$\alpha_{1qj} = \frac{k'_j}{2k_j} \cot k'_j a \psi_{11j} \psi_{q1j} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k'_{nj}}{2k_j} \coth k'_{nj} a \psi_{1nj} \psi_{qnj}, \tag{B.3}$$

$$\beta_{1qj} = \frac{k'_j}{2k_j} \tan k'_j a \psi_{11j} \psi_{q1j} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k'_{nj}}{2k_j} \tanh k'_{nj} a \psi_{1nj} \psi_{qnj}, \tag{B.4}$$

$$\alpha_{pqj} = \frac{k'_j}{2k_{pj}} \cot k'_j a \psi_{p1j} \psi_{q1j} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k'_{nj}}{2k_{pj}} \coth k'_{nj} a \psi_{pnj} \psi_{qnj}, \tag{B.5}$$

$$\beta_{pqj} = \frac{k'_j}{2k_{pj}} \tan k'_j a \psi_{p1j} \psi_{q1j} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k'_{nj}}{2k_{pj}} \tanh k'_{nj} a \psi_{pnj} \psi_{qnj}. \tag{B.6}$$

où $\psi_{pqj} = \int_h^d f_{pj}(z) g_{qj}(z) dz$.

Pour les parties symétriques des potentiels de vitesse :

$$U_{sj}^{(1)} = \begin{bmatrix} (u_{11j}^s + 1) & u_{12j}^s & \dots & u_{1(m+1)j}^s & u_{1(m+2)j}^s & \dots & u_{1(2m)j}^s \\ u_{21j}^s & (u_{22j}^s - 1) & \dots & u_{2(m+1)j}^s & u_{2(m+2)j}^s & \dots & u_{2(2m)j}^s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{(m+1)1j}^s & u_{(m+1)2j}^s & \dots & (u_{(m+1)(m+1)j}^s - 1) & u_{(m+1)(m+2)j}^s & \dots & u_{(m+1)(2m)j}^s \\ u_{(m+2)1j}^s & u_{(m+2)2j}^s & \dots & u_{(m+2)(m+1)j}^s & (u_{(m+2)(m+2)j}^s + 1) & \dots & u_{(m+2)(2m)j}^s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{(2m)1j}^s & u_{(2m)2j}^s & \dots & u_{(2m)(m+1)j}^s & u_{(2m)(m+2)j}^s & \dots & (u_{(2m)(2m)j}^s + 1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
V_{sj}^{(1)} = & \langle 1 - (u_{11j}^s + u_{1(m+1)j}^s) - (u_{21j}^s + u_{2(m+1)j}^s) \dots - 1 - (u_{(m+1)1j}^s + u_{(m+1)(m+1)j}^s) \\ & - (u_{(m+2)1j}^s + u_{(m+2)(m+1)j}^s) \dots - (u_{(2m)1j}^s + u_{(2m)(m+1)j}^s) \rangle^T.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
u_{pqj}^s &= \beta_{1qj}(\cot k_j c_0 + i), & \text{pour } p = 1, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^s &= \alpha_{1(q-m)j}(\cot k_j c_0 - i), & \text{pour } p = 1, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \\
u_{pqj}^s &= \beta_{pqj}(\coth k_{pj} c_0 + 1), & \text{pour } p = 2, 3, \dots, m, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^s &= \alpha_{p(q-m)j}(\coth k_{pj} c_0 - 1), & \text{pour } p = 2, 3, \dots, m, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \\
u_{pqj}^s &= \beta_{1qj}(\cot k_j c_0 - i), & \text{pour } p = m + 1, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^s &= \alpha_{1(q-m)j}(\cot k_j c_0 + i), & \text{pour } p = m + 1, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \\
u_{pqj}^s &= \beta_{(p-m)qj}(\coth k_{pj} c_0 - 1), & \text{pour } p = m + 2, m + 3, \dots, 2m, \quad q = 1, 2, \dots, m, \\
u_{pqj}^s &= \alpha_{(p-m)(q-m)j}(\coth k_{pj} c_0 + 1), & \text{pour } p = m + 2, m + 3, \dots, 2m, \quad q = m + 1, m + 2, \dots, 2m.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Les vecteurs et les matrices $U_{aj}^{(3)}$, $V_{aj}^{(3)}$, $U_{sj}^{(3)}$ et $V_{sj}^{(3)}$ peuvent être obtenus en remplaçant c_0 avec b_0 dans les équations (B.2) et (B.8).

Les coefficients de réflexion pour les parties antisymétriques $\chi_{1j}^{a(1)}$, $\chi_{1j}^{a(3)}$ et symétriques $\chi_{1j}^{s(1)}$, $\chi_{1j}^{s(3)}$ de potentiel de vitesse sont définis :

$$\chi_{1j}^{a(1)} = r_{1j}^{a(1)} + t_{1j}^{a(1)} \sin k_j c_0, \tag{B.9a}$$

$$\chi_{(m+1)j}^{a(1)} = r_{1j}^{a(1)} - t_{1j}^{a(1)} \sin k_j c_0, \tag{B.9b}$$

$$\chi_{1j}^{s(1)} = r_{1j}^{s(1)} + t_{1j}^{s(1)} \cos k_j c_0, \tag{B.9c}$$

$$\chi_{(m+1)j}^{s(1)} = r_{1j}^{s(1)} - t_{1j}^{s(1)} \cos k_j c_0, \tag{B.9d}$$

$$\chi_{1j}^{a(3)} = r_{1j}^{a(3)} + t_{1j}^{a(3)} \sin k_j b_0, \tag{B.9e}$$

$$\chi_{(m+1)j}^{a(3)} = r_{1j}^{a(3)} - t_{1j}^{a(3)} \sin k_j b_0, \tag{B.9f}$$

$$\chi_{1j}^{s(3)} = r_{1j}^{s(3)} + t_{1j}^{s(3)} \cos k_j b_0, \tag{B.9g}$$

$$\chi_{(m+1)j}^{s(3)} = r_{1j}^{s(3)} - t_{1j}^{s(3)} \cos k_j b_0. \tag{B.9h}$$

Les $r_{1j}^{a(1)}$, $r_{1j}^{a(3)}$, $r_{1j}^{s(3)}$ et $r_{1j}^{s(1)}$ sont les coefficients de réflexion complexes pour les parties antisymétriques et symétriques de potentiel de vitesse, respectivement.

Bibliographie

- [1] B. Budiansky (1960), *Sloshing of liquids in circular canals and spherical tanks*, Journal of the Aerospace Sciences, V27, No 3, pp 161-173.
- [2] H. F. Bauer (1963), *Liquid sloshing in a circular quarter tank*, AIAA Journal, Vol. 1, No. 11 : 2601-2605.
- [3] P. Warnitchai, T. Pinkaew (1998), *Modelling of liquid sloshing in rectangular tanks with flow-dampening devices*, Engineering Structures, 2(7) : 593-600.
- [4] H. F. Bauer, W. Eidel (2000), *Free and forced oscillations of a frictionless liquid in a long rectangular tank with structural obstructions at the free liquid surface*, Arch. appl. Mech. 70 : 550-560.
- [5] O. M. Faltinsen, O. F. Rognebakke, I. A. Lukovsky, A. N. Timokha (2000), *Multidimensional modal analysis of non-linear sloshing in a rectangular tank with finite water depth*, J. Fluid Mech. 407 : 201-234.
- [6] O. M. Faltinsen, A. N. Timokha (2001), *An adaptive multidimensional approach to non-linear sloshing in a rectangular tank*, J. Fluid Mech. 432 : 167-200.
- [7] J.B. Frandsen, A. G. L. Borthwick (2003), *Simulation of sloshing motions in fixed and vertically excited containers using a 2-D inviscid transformed finite difference solver*, J. Fluids Struct. 18 (2) : 197-214.
- [8] J. R. Cho, H. W. Lee (2004), *Non-linear finite element analysis of large amplitude sloshing flow in two-dimensional tank*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 61 : 514-531.
- [9] J. B. Frandsen (2004), *Sloshing motions in excited tanks*, J. Computat. Phys. 196 : 53-87.
- [10] K. B. Vamsi, N. Ganesan (2006), *Polynomial approach for calculating added mass for fluid-filled cylindrical shells*, Journal of Sound and Vibration. 291 : 1221- 1228.
- [11] B. Yue, Z. wang (2006), *Numerical study of three-dimensional free surface dynamics*, Acta. Mech. Sin. 22 : 120-125.
- [12] B. Yue (2008), *Large-scale amplitude liquid sloshing in container under pitching excitation*, Chinese Science Bulletin Vol. 53, No. 24 : 3816-3823.

- [13] J. C. Virella, C. A. Prato, L. A. Godoy (2008), *Linear and non-linear 2D finite element analysis of sloshing modes and pressures in rectangular tanks subject to horizontal harmonic motion*, J. Sond. Vib. 312 : 442–460.
- [14] R. Belakroum, T. H. Mai, M. Kadja, V. Pavel (2008), *Simulation numérique par éléments finis des ballottements d'un réservoir partiellement rempli de liquide*, Université Mentouri Constantine, Algérie.
- [15] Somchart Chantasiriwan (2009), *Modal analysis of free vibration of liquid in rigid container by the method of fundamental solutions*, Engineering Analysis with Boundary Elements.
- [16] R. D. Firouz-Abadi, H. Haddadpour, M. A. Noorian, M. Ghasemi (2009), *Reduced order modeling of liquid sloshing in 3D tanks using boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 33(1) : 750-761.
- [17] R. A. Ibrahim (2005), *Liquid sloshing dynamics*, Cambridge University Press.
- [18] D. V. Evans, P. McIver (1987), *Resonant frequencies in a container with a vertical baffle*, J. Fluid Mech. 175 : 295-307.
- [19] E. B. B. Watson, D. V. Evans (1991), *Resonant frequencies of a fluid container with internal bodies*, J. Engng. Math. 25 : 115-135.
- [20] Y. S. Choun, C. B. Yun (1996), *Sloshing characteristics in rectangular tanks with a submerged block*, Elsevier Science Ltd. Vol. 61. No. 3 : 401-413.
- [21] Y. S. Choun, C. B. Yun (1999), *Sloshing analysis of rectangular tanks with a submerged structure by using small-amplitude wave theory*, Earthquake Engineering and Structure Dynamics. 28(7) : 763-783.
- [22] K. C. Biswal, S. K. Bhattacharyya, P. K. Sinha (2003), *Free-vibration analysis of liquid-filled tank with baffles*, J. Sond. Vib. 259 : 177-192.
- [23] J. R. Cho, H. W. Lee, S. Y. Ha (2005), *Finite element analysis of resonant sloshing response in a 2D baffled tank*, Journal of Sound and Vibration. 228(4-5) : 829-845.
- [24] I. Gavriljuk, I. Lukovsky, Yu. Trotsenko, A. Timokha (2006), *Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part1. Linear fundamental solutions*, Appl. Math. and Mech. 28(8) : 1007–1018.
- [25] Young-Wann Kim, Young-Shin Lee (2005), *Coupled vibration analysis of liquid-filled rigid cylindrical storage tank with an annular plate cover*, Journal of Sound and Vibration. 279 : 217-235.
- [26] K. C. Biswal, S. K. Bhattacharyya, P. K. Sinha (2006), *Nonlinear sloshing in partially liquid filled containers with baffles*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 68(3) : 317-337.
- [27] Mustafa Arafa (2007), *Finite element analysis of sloshing in liquid-filled containers*, J. Vib. Control (Sage Publication), 13(7) : 883-903.

- [28] I. Gavriluk, I. Lukovsky, Yu. Trotsenko, A. Timokha (2007), *Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part2. Nonlinear resonant waves*, J. Eng. Math. 57 : 57-78.
- [29] S. Mitra, K. P. Sinhamahapatra (2007), *Slosh dynamics of liquid-filled containers with submerged components using pressure-based finite element method*, Journal of Sound and Vibration. 304 : 361-381.
- [30] M. Eswarana, U. K. Saha, D. Maity (2008), *Effect of baffles on a partially filled cubic tank : numerical simulation and experimental validation*, Computers and Structures, 87 : 198-205.
- [31] Dongming Liu, Pengzhi Lin (2008), *Three-dimensional liquid sloshing in a tank with baffles*, Elsevier Ltd. 28(8) : 1007–1018.
- [32] E. Askari, F. Daneshmand (2009), *Coupled vibration of a partially fluid-filled cylindrical container with a cylindrical internal body*, J. Fluids Struct. 25 : 389-405.
- [33] M. A. Goudarzi, S. R. Sabbagh-Yazdi, W. Marx (2009), *Investigation of sloshing damping in baffled rectangular tanks subjected to the dynamic excitation*, Bull Earthquake Eng, 8 : 1055-1072.
- [34] Luong Van Hai (2008), *Modelling, simulation and behaviour of sloshing liquid-tank-ship coupled system*, Thesis of Doctorat, University of Singapore.
- [35] Messaoud Toumi (2008), *Étude et analyse de la stabilité des camions citernes*, Thèse de Doctorat, (UQAC) Université du Québec à Chicoutimi.
- [36] O. M. Faltinsen, R. Firoozkoobi, A. N. Timokha (2011), *Steady-state liquid sloshing in a rectangular tank with a slat-type screen in the middle : quasi linear modal analysis and experiments*, Physics of Fluids, 23 : 042101.
- [37] Seyyed M. Hasheminejad, M. M. Mohammadi (2011), *Effect of anti-slosh baffles on free liquid oscillations in partially filled horizontal circular tanks*, Ocean Engineering, 38 : 49-62.
- [38] R. Jeyakumaran (1993), *Some scattering and sloshing problems in linear water wave theory*, Thèse de Doctorat, Université de Brunel.
- [39] M. Talon (2006), *Ondes de surface*, LPTHE Université Paris Vi–Cnrs.
- [40] X. J. Chai, J. M. Genevaux, J. P. Brancher (1996), *Fluid-solid interaction in a rectangular container*, J. Fluid Mech. 15(6) : 865–883.
- [41] H. Bateman (1944), *Partial differential equations of mathematical physics*, Dover.
- [42] J. C. Luke (1967), *A variational principle for a fluid with free surface*, J. Fluid Mech. 27 : 395-397.