



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire

Présenté par

Zaitri Mohamed Abdelaziz

Pour l'obtention du diplôme de Magister

Filière : **Mathématiques Appliquées**

Option : **Modélisation Mathématique et Techniques de Décision**

Thème

**Stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires
par la commande**

Soutenu le :

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom

Grade

Mr Radjef Mohammed Said

Professeur

Univ. de Béjaïa

Président

Mr Bibi Mohand Ouamer

Professeur

Univ. de Béjaïa

Rapporteur

Mr Mendil Boubakeur

Professeur

Univ. de Béjaïa

Examineur

Mr Abbas Karim

MCA

Univ. de Béjaïa

Examineur

Année Universitaire : 2013/2014

Table des matières

Introduction générale	4
1 Equations différentielles et stabilité	6
1.1 Introduction	6
1.2 Existence de solutions	6
1.2.1 Définitions et notations	6
1.2.2 Existence et Unicité de solution	7
1.3 Équations différentielles linéaires	8
1.3.1 Rappels d’algèbre linéaire, exponentielle de matrice	8
1.3.2 Équation différentielle linéaire d’ordre n à coefficients constants . . .	10
1.4 Stabilité des solutions d’équations différentielles	10
1.4.1 Stabilité et instabilité	11
1.4.2 Théorème de Lyapounov	13
1.4.3 Stabilité de Barbashin	14
1.4.4 Instabilité de Chetaev	14
2 Stabilité et stabilisation des systèmes dynamiques commandés	15
2.1 Introduction	15
2.1.1 Théorie de la commande	16
2.2 Le modèle interne - la représentation d’état	18
2.3 Les modèles externes (entrées-sorties)	19
2.3.1 La matrice de transfert	19
2.3.2 Les systèmes SISO (Single Input Single Output)	19
2.4 Stabilité des systèmes LTI (Linéaires Temps-Invariant)	20
2.4.1 Stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output)	20
2.4.2 Critère algébrique de ROUTH	20
2.4.3 Critère de stabilité	22

2.4.4	Relation entre la stabilité BIBO et la stabilité interne	23
2.5	Stabilisation des systèmes linéaires par retour d'état	24
2.5.1	Calcul du gain de retour d'état K dans le cas SISO	25
2.5.2	Critère du gain de retour d'état K dans le cas SISO	27
2.6	Stabilisation des systèmes linéaires par la commande linéaire quadratique (LQ)	28
2.6.1	La commande LQ à horizon infini	29
2.6.2	Choix des matrices de pondération	30
2.7	Stabilisation des systèmes linéaires par retour d'état proportionnel, intégral et dérivé (PID) par placement des pôles	30
2.7.1	Transformation du modèle sous la forme canonique commandable	32
2.7.2	Algorithme de calcul par retour d'état PID par placement des pôles	33
2.8	Stabilisation des systèmes non linéaires	34
2.8.1	Algorithme de calcul	35
2.9	Conclusion	36
3	Application : Stabilisation du pendule inversé commandé par un moteur électrique à courant continu.	38
3.1	Introduction	38
3.2	Modélisation de l'ensemble chariot-pendule	39
3.2.1	Énergie cinétique du système en mouvement	40
3.2.2	Énergie potentielle du système	41
3.3	Modélisation du moteur électrique à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit	42
3.3.1	Modèle d'état du moteur	43
3.4	Modélisation du système global : moteur-chariot-pendule	43
3.4.1	Relation entre la force mécanique et la tension	43
3.4.2	Modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule	44
3.5	Linéarisation du modèle autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$)	45
3.6	Stabilisation du pendule inversé par la commande LQ	47
3.6.1	Choix des matrices de pondération	47
3.6.2	Gains du régulateur	47
3.6.3	Résultat de simulation	48
3.7	Stabilisation du pendule inversé par la commande PID par placement des pôles	49

3.7.1 Résultats de simulation	50
3.8 Conclusion :	51
Conclusion générale	52
Bibliographie	52

Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui étudie les caractéristiques d'un système dynamique. Cette recherche active se développe à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie et de la théorie de la mesure.

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du *XIX^e* siècle. Ils concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la théorie de la stabilité qui traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations.

Nicolai Chetaev [44] a énoncé en 1934 un important critère d'instabilité de l'origine, généralisant un autre critère obtenu par Lyapunov en 1892. Le théorème de Chetaev a été lui-même généralisé par plusieurs auteurs, dont José Luis Massera [9] en 1956 et James A. Yorke [1] en 1968. Une contribution importante est celle faite par Evgenii Alekseevich Barbashin et N. Nikolai Krasovskii [5] en 1952, et indépendamment par Joseph P. LaSalle [11] en 1960, appelée « Principe d'invariance de Krasovskii-LaSalle ». Ce Principe a été tout d'abord obtenu pour les systèmes autonomes, sa généralisation au cas des systèmes non autonomes a été réalisée par Jack K. Hale et Joseph P. LaSalle [44] en 1967.

Les travaux traitant de cette thématique sont relativement récents, et en ce qui concerne l'étude de la stabilisation des systèmes par les différentes commandes, on peut citer les travaux présentés dans [3],[7],[12],[13],[15],[16],[19],[31],[38],[39] et [43].

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires décrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ y(t) = h(x(t), u(t), t), \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie. Les fonctions $f, h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions lipschitziennes par rapport à x , continues par rapport à u et continues par morceaux par rapport à t .

L'objectif principal est la détermination de loi de commande qui stabilise par retour d'état (Feedback) le système. L'étude de la stabilisation des systèmes linéaires conduit à utiliser les deux types de commande suivants :

- Le premier type de commande est appelé la commande linéaire quadratique (LQ) qui est basée sur l'utilisation de la minimisation de la fonction de coût et l'équation de Ricatti.
- Le deuxième type de commande est appelé la commande proportionnelle, intégrale et dérivée (PID) par placement des pôles, et elle est basée sur l'utilisation des polynômes caractéristiques d'une matrice et la théorie de placement des pôles.

L'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires est basée sur la linéarisation de ces derniers, donnant un système linéaire cité ci-dessus.

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre rappelle les éléments essentiels de la résolution d'un système d'équations différentielles et la stabilité.

Le second chapitre contient deux sections :

- La première section concerne l'étude de la stabilité des systèmes linéaires contrôlés par une commande, et la stabilisation des ces systèmes par les deux types de commande LQ et PID par placement des pôles.
- La seconde section concerne la linéarisation des systèmes non linéaires contrôlés par une commande au sens des moindres carrés.

Le troisième chapitre présente la stabilisation d'un pendule inversé commandé par un moteur à courant continu par les deux types de commande LQ et PID par placement des pôles.

Chapitre 1

Equations différentielles et stabilité

1.1 Introduction

Supposons qu'une fonction $y = f(x)$ exprime un phénomène du point de vue quantitatif. En examinant ce phénomène, il est souvent impossible d'établir directement le caractère de la dépendance entre x et y , mais l'on peut établir une dépendance entre les quantités x, y et les dérivées de y par rapport à $x : y', y'', \dots, y^{(p)}$, sous forme d'équation différentielle. Si on demande de déduire de la relation entre x, y et les différentes dérivées, la relation directe entre y et x , c'est-à-dire de trouver $y = f(x)$, c'est ce qu'on appelle alors intégrer une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, et $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert $I \times D$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Pour tout $(t, x(t)) \in I \times D$, on notera

$$f(t, x(t)) = (f_1(t, x(t)), \dots, f_n(t, x(t)))^T,$$

où chaque fonction f_i , $i = \overline{1, n}$, est continue de $I \times D$ dans \mathbb{R} .

1.2 Existence de solutions

1.2.1 Définitions et notations

Définition 1.1 Une solution de (1.1) est un couple $(I, x(t))$, où I est un intervalle de \mathbb{R} et $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ est une fonction dérivable sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^n telle que

$(t, x(t)) \in I \times D$ et

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x(t)), \quad \forall t \in I, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Définition 1.2 Soit $(t_0, x_0) \in I \times D$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

consiste à déterminer un couple $(I, x(t))$, où I est un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 et $x(t)$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{R}^n telle que $(t, x(t)) \in I \times D$ et

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I, \quad x(t_0) = x_0.$$

En intégrant l'équation différentielle ordinaire du problème de Cauchy (1.2) entre t_0 et t et en tenant compte de la condition $x(t_0) = x_0$, on obtient

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (1.3)$$

où il faut comprendre :

$$\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = \left(\int_{t_0}^t f_1(s, x(s)) ds, \dots, \int_{t_0}^t f_n(s, x(s)) ds \right)^T. \quad (1.4)$$

1.2.2 Existence et Unicité de solution

Théorème 1.1 (Ascoli-Peano) [35]

Soit $(t_0, x_0) \in I \times D$ et soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre

$$C = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\},$$

soit inclus dans $I \times D$. Si on note

$$M = \max_{(t,x) \in C} \|f(t, x)\| \quad \text{et} \quad \alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right),$$

alors il existe une unique solution maximale $x(t)$ au problème de Cauchy (1.2) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, avec $x(t_0) = x_0$.

1.3 Équations différentielles linéaires

1.3.1 Rappels d'algèbre linéaire, exponentielle de matrice

On notera $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et \mathbb{I}_n la matrice identité de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Pour $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, on note

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A),$$

le polynôme caractéristique de A . Ses racines distinctes, λ_k , $k = \overline{1, p}$, sont les valeurs propres de A , où $p \leq n$.

Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, le polynôme caractéristique se factorise sous la forme :

$$P_A(\lambda) = \prod_{k=1}^p (\lambda - \lambda_k)^{a_k},$$

a_k étant l'ordre de multiplicité algébrique de λ_k , avec $a_1 + \dots + a_p = n$.

Le polynôme minimal de A , noté

$$\mu_A(\lambda) = \prod_{k=1}^p (\lambda - \lambda_k)^{l_k}, \quad l_k \leq a_k,$$

est le plus petit polynôme annulateur de A .

Les sous-espaces propres caractéristiques

$$F_k = \ker(\lambda_k \mathbb{I}_n - A)^{l_k} = \ker(\lambda_k \mathbb{I}_n - A)^{a_k},$$

forment une somme directe de \mathbb{C}^n :

$$\mathbb{C}^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_p \quad \text{et} \quad \dim F_k = a_k, \quad k = \overline{1, p}.$$

Théorème 1.2 (réduction de Jordan) [35]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ une matrice dont le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ est scindé sur \mathbb{C} . Alors A est semblable à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_p(\lambda_p) \end{pmatrix},$$

où

$$J_k(\lambda_k) = (J_{ij})_{i,j=\overline{1,a_k}} = \begin{cases} 1 \vee 0 & \text{Si } j = i + 1, \\ \lambda_k & \text{Si } i = j, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \quad k = \overline{1,p}.$$

Si on pose $Z_{a_k} = J_k(\lambda_k) - \lambda_k \mathbb{I}_{a_k}$, alors

$$Z_{a_k} = (z_{ij})_{i,j=\overline{1,a_k}} = \begin{cases} 1 \vee 0 & \text{Si } j = i + 1, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$Z_{a_k}^s = (z_{ij}^s)_{i,j=\overline{1,a_k}} = \begin{cases} 1 \vee 0 & \text{Si } j = i + s, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

De plus

$$Z_{a_k}^s = \begin{cases} Z_{a_k}^s = Z_{s,a_k} & \text{Si } s < a_k, \\ 0_{a_k} & \text{Si } s \geq a_k. \end{cases}$$

D'après le théorème de réduction de Jordan, il existe une matrice inversible T telle que $J = T^{-1}AT$. On en déduit que

$$A = T \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_p(\lambda_p)) T^{-1},$$

$$e^{At} = T \text{diag}(e^{tJ_1(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_p(\lambda_p)}) T^{-1}.$$

On remarque

$$e^{tJ_k(\lambda_k)} = e^{t(\lambda_k \mathbb{I}_{a_k} + Z_{a_k})} = e^{t\lambda_k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s Z_{a_k}^s}{s!} = e^{t\lambda_k} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s Z_{s,a_k}}{s!},$$

donc

$$e^{tJ_k(\lambda_k)} = e^{t\lambda_k} \sum_{s=0}^{a_k-1} \frac{t^s}{s!} Z_{s,a_k}, \quad k = \overline{1,p}.$$

1.3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, n$ nombres complexes. Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0. \quad (1.5)$$

Cette équation peut se mettre sous forme d'équation différentielle matricielle d'ordre 1

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Lemme 1.1 Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

La matrice A est alors la matrice compagnon de son polynôme caractéristique.

Théorème 1.3 [35] Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $1 \leq p \leq n$, les valeurs propres distinctes de la matrice A , chaque λ_k ayant pour ordre de multiplicité géométrique le nombre d_k .

Alors les fonctions $t^l e^{\lambda_k t}$, avec $k = \overline{1, p}$, et $l = \overline{0, d_k - 1}$, sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.5). La solution générale est

$$y(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{d_k-1} C_{k,l} t^l e^{\lambda_k t},$$

où $C_{k,l} \equiv$ constante, pour tout $k = \overline{1, p}$, et $l = \overline{0, d_k - 1}$.

1.4 Stabilité des solutions d'équations différentielles

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

où $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue.

Définition 1.3 Un point $x_e \in D$ est un point d'équilibre, ou un point singulier du système (1.6) si : $f(t, x_e) = 0, \forall t \in I$.

Définition 1.4 On considère le système (1.6), et $V : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction vectorielle ayant des dérivées partielles sur $I \times D$. On définit la dérivée totale \dot{V} pour le système (1.6) par :

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x) f_i(t, x).$$

1.4.1 Stabilité et instabilité

Définition 1.5

- Le point x_e du système (1.6) est dit stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

- Le point x_e du système (1.6) est dit attractif si :

$$\exists \delta > 0, \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e.$$

- Le point x_e est dit asymptotiquement stable si x_e est stable et attractif.
- Le point x_e du système (1.6) est dit exponentiellement stable si :

$$\exists \delta > 0, \exists K > 0, \exists \sigma > 0, \|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq K \|x_0 - x_e\| e^{-\sigma t}, \forall t \geq 0.$$

On considère maintenant le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ possède des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p, p \leq n$.

Lemme 1.2 Si $Re(\lambda_k) < 0, \forall k = \overline{1, p}$, alors pour toute fonction $x(t)$, solution du système (1.7), il existe deux constantes positives ρ et σ telles que

$$\|x(t)\| \leq \rho e^{-\sigma t}.$$

Démonstration La solution $x(t)$ s'écrit

$$x(t) = \sum_{k=1}^p h_k(t) e^{t\lambda_k},$$

où $h_k(t)$ est une fonction polynomiale vectorielle.

On a $Re\lambda_k < 0, \forall k = \overline{1, p}$, alors $\exists \sigma > 0$ tel que $Re\lambda_k < -\sigma < 0, k = \overline{1, p}$. Donc

$$\|x(t)\| \leq \sum_{k=1}^p \|h_k(t)\| e^{t\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^p \|h_k(t)\| e^{tRe\lambda_k}.$$

Si on multiplie les deux membres de l'égalité par $e^{\sigma t}$, on aura

$$e^{\sigma t} \|x(t)\| \leq \sum_{k=1}^p \|h_k(t)\| e^{t(Re\lambda_k + \sigma)}, \quad (Re\lambda_k + \sigma) < 0.$$

On a $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p \|h_k(t)\| e^{t(Re\lambda_k + \sigma)} = 0$, alors $\exists \rho > 0$ tel que $\sum_{k=1}^p \|h_k(t)\| e^{t(Re\lambda_k + \sigma)} \leq \rho$.

Ceci implique que $e^{\sigma t} \|x(t)\| \leq \rho$, et donc

$$\|x(t)\| \leq \rho e^{-\sigma t}. \square$$

Théorème 1.4 Soit le système (1.7), où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ possède des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p, p \leq n$. Alors

1. Le point $x_e = 0$ est un point d'équilibre stable si :

$$\begin{cases} Re\lambda_k \leq 0, \forall k = \overline{1, p}, \\ Re\lambda_k = 0 \Rightarrow a_k = 1. \end{cases}$$

2. Le point $x_e = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable si :

$$Re\lambda_k < 0, \forall k = \overline{1, p}.$$

3. Le point $x_e = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable si :

$$Re\lambda_k < 0, \forall k = \overline{1, p}.$$

Démonstration

1. On considère les deux ensembles suivantes

$$E_1 = \{\lambda_k, Re\lambda_k < 0, 1 \leq k \leq p\},$$

$$E_2 = \{\lambda_k, Re\lambda_k = 0, 1 \leq k \leq p\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} x_0 \\ &= \sum_{\lambda_k \in E_1} e^{tRe\lambda_k} P_k(t) (\cos(tIm\lambda_k) + i \sin(tIm\lambda_k)) + \sum_{\lambda_k \in E_2} \gamma_k (\cos(tIm\lambda_k) + i \sin(tIm\lambda_k)), \end{aligned}$$

où $\deg P_k(t) \leq a_k$, pour $\lambda_k \in E_1$, et $\gamma_k \equiv \text{constante}$, pour $\lambda_k \in E_2$.

Puisque $\text{Re}\lambda_k < 0$, $\forall \lambda_k \in E_1$, on a donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\text{Re}\lambda_k} P_k(t) = 0, \quad \forall \lambda_k \in E_1 \quad \text{et} \quad |\cos(t\text{Im}\lambda_k) + i \sin(t\text{Im}\lambda_k)| = 1, \quad \forall \lambda_k \in E_2.$$

Alors $\exists M > 0$ vérifiant

$$|x(t)| \leq M,$$

donc le point $x_e = 0$ est stable.

2. On suppose que $\text{Re}\lambda_k < 0$, $\forall k = \overline{1, p}$. La solution de ce système s'écrit

$$x(t) = \sum_{k=1}^p h_k(t) e^{t\lambda_k},$$

où $h_k(t)$ est une fonction polynomiale vectorielle, donc $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

3. La solution $x(t)$ du système (1.7) s'écrit

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) x_0^{(i)}.$$

D'après lemme 1.2, il existe $\rho_k > 0$ et $\sigma > 0$ tels que $\|x_i(t)\| \leq \rho_i e^{-\sigma t}$.

On pose $\rho = \max\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$, alors $\|x_i(t)\| \leq \rho e^{-\sigma t}$. Donc

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i(t)| \|x_0^{(i)}\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \rho e^{-\sigma t} |x_0^{(i)}| \\ &= n\rho \|x_0\|_{\infty} e^{-\sigma t}. \quad \square \end{aligned}$$

1.4.2 Théorème de Lyapounov

Théorème 1.5 Soit x_e un point d'équilibre du système différentiel (1.6). Supposons qu'il existe un voisinage \mathcal{V}_{x_e} de x_e et une fonction de Lyapounov

$$V : \mathcal{V}_{x_e} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

1. V est définie positive,
2. la dérivée totale \dot{V} pour (1.6) est négative.

Alors x_e est stable.

Si $-\dot{V}$ est définie positive dans \mathcal{V}_{x_e} , alors x_e est asymptotiquement stable.

1.4.3 Stabilité de Barbashin

Théorème 1.6 Soient x_e un point d'équilibre de (1.6), et $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction de classe \mathcal{C}^n , vérifiant

1. V est définie positive,
2. la dérivée totale \dot{V} pour (1.6) est définie négative,
3. $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow \|V(x)\| \rightarrow \infty$.

Alors x_e est globalement asymptotiquement stable.

1.4.4 Instabilité de Chetaev

Théorème 1.7 Soit le système (1.6), admettant l'origine pour équilibre. S'il existe un voisinage \mathcal{V} et une fonction

$$V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R},$$

continue ayant des dérivées partielles, telle que :

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in B(0, \varepsilon) : V(t, x_0) \leq 0, \forall t \geq 0,$
2. V est minorée sur un sous-domaine \mathcal{D}' de $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{V}, V(t, y) \leq 0, \forall t \geq 0\},$
3. la dérivée totale \dot{V} pour le système (1.6) est définie négative sur \mathcal{D}' .

Alors l'origine est instable.

Exemple 1.1 On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t}x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité du point d'équilibre 0, on pose

$$V(t, x) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2.$$

Cette fonction est définie positive, car elle domine la fonction définie positive

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2,$$

indépendante de t . De plus, la dérivée totale de V pour ce système est

$$\dot{V}(t, x) = -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t})),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2), \\ &\leq -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2. \end{aligned}$$

On en déduit alors que \dot{V} est définie négative, et que 0 est asymptotiquement stable.

Chapitre 2

Stabilité et stabilisation des systèmes dynamiques commandés

2.1 Introduction

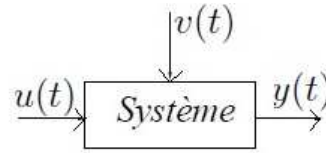
Un système, agrégation d'éléments interconnectés, est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sortie.

Le système est généralement représenté schématiquement par un schéma fonctionnel consistant en un rectangle auquel les signaux d'entrée représentés par des flèches entrantes sont appliqués. L'action des entrées produit de manière causale des effets mesurés par les signaux de sortie représentés par des flèches sortantes.



Figure 2.1 Schéma fonctionnel.

Les entrées affectant un système peuvent être de nature différente. Les unes ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système, ce sont les commandes. Les autres entrées troublent le fonctionnement désiré et sont définies comme des perturbations.

Figure 2.2 Commandes $u(t)$ et perturbations $v(t)$.

Chaque élément constitutif de l'ensemble système peut être caractérisé par un nombre fini de variables et l'interdépendance des variables caractérisant chaque élément peut être exprimée sous la forme d'une loi mathématique. Ainsi la relation entre les entrées et les sorties du système est l'expression des lois de la physique associées au système. L'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre les entrées et les sorties du système constitue le modèle mathématique du système. La modélisation, étape préliminaire de l'analyse d'un système quelconque, indépendamment de sa nature physique, de sa composition et de son degré de complexité comporte donc les étapes suivantes :

1. identification des variables pertinentes pour la caractérisation de chaque élément constituant le système,
2. caractérisation des relations entre ces variables,
3. représentation mathématique des interactions entre les éléments à travers la représentation mathématique des interactions entre les variables,
4. formation d'un système de relations entre les variables caractérisant le système comme un tout,
5. formation d'un système de relations entre les variables d'entrée et les variables de sortie.

2.1.1 Théorie de la commande

Le processus préliminaire de modélisation achevé, les performances, au sens large, d'un système peuvent être analysées et des méthodes de correction via l'action d'un système de commande peuvent être proposées si une commande active est nécessaire et possible. La commande passive doit ainsi être distinguée de la commande active qui fait l'objet essentiel de ce chapitre pour stabiliser un système dynamique.

La commande passive : Le principe de la commande passive consiste à modifier structurellement le système à commander afin qu'il réalise au mieux les fonctions souhaitées. Connue également sous la dénomination de commande structurelle, cette technique s'applique principalement dans les domaines du contrôle des vibrations (acoustique, mécanique)

affectant les structures mécaniques et dans le domaine du contrôle des écoulements laminaires et turbulents.

La commande active : A la différence de la commande passive, la commande active suppose l'emploi d'un dispositif spécifique appelé système de commande afin de modifier le comportement dynamique du système étudié. Le but d'un système de commande est donc d'exercer des actions entraînant une amélioration du comportement du système et de ses performances.

Quelle que soit la nature du système à commander, il est toujours possible de classer les différentes structures de commande en deux grandes familles. Ce sont les structures de commande en boucle ouverte et les structures de commande à contre-réaction appelées également structures de commande en boucle fermée.

La commande en boucle ouverte : La commande en boucle ouverte d'un système consiste à introduire, à l'entrée de ce système, le signal $e(t)$ permettant d'obtenir à sa sortie, le signal $y(t)$ correspondant à la réponse voulue.

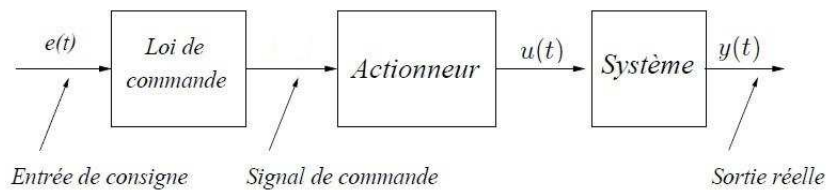


Figure 2.3 Commande en boucle ouverte.

La commande en boucle fermée : Toutefois, si le système à commander n'est pas parfaitement connu ou si des perturbations l'affectent, les signaux de sortie ne seront pas ceux souhaités. L'introduction d'un retour d'information sur les sorties mesurées s'avère alors nécessaire. Le principe de commande en boucle fermée est illustré sur la figure suivante et définit la structure de commande à contre-réaction (feedback en anglais).

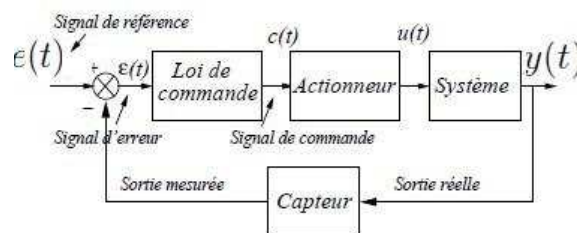


Figure 2.4 Commande en boucle fermée.

Cette structure de commande permet ainsi d'améliorer les performances dynamiques du système commandé (rapidité, rejet de perturbation, meilleur suivi de consignes, moindre sensibilité aux variations paramétriques du modèle, stabilisation de systèmes instables en boucle ouverte).

2.2 Le modèle interne - la représentation d'état

La théorie moderne de la commande des systèmes repose en grande partie sur le concept d'état d'un système et sur le modèle associé, la représentation d'état. Le concept d'état a été introduit de manière systématique par R.E. Kalman et par les ingénieurs travaillant sur les premières applications spatiales (Apollo, Polaris) aux débuts des années 1960. Il était déjà largement utilisé dans d'autres disciplines scientifiques telles que la Mécanique (formulation hamiltonienne) ou la Thermodynamique (travaux de H. Poincaré).

L'état d'un système est caractérisé par un ensemble de variables dynamiques appelées variables d'état non uniques et qui résument complètement la configuration courante du système.

Définition 2.1 (Représentation d'état)

Tout système dynamique peut être représenté par ses équations d'état définies par un ensemble d'équations différentielles du premier ordre appelées équations dynamiques et un ensemble d'équations algébriques appelées équations de sortie ou de mesure :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ y(t) = h(x(t), u(t), t), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie. Les fonctions $f, h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions lipschitziennes par rapport à x , continues par rapport à u et continues par morceaux par rapport à t .

Les équations d'état caractérisent complètement le comportement dynamique du système.

Dans le cas où le système est linéaire, on peut représenter ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

où $A(t) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice dynamique, $B(t) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ est la matrice de commande ou d'entrée, $C(t) \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice de sortie et $D(t) \in \mathcal{M}_{r \times m}(\mathbb{R})$ est la matrice de transmission directe.

Si A, B, C et D sont constantes, le système est dit Linéaire Temps-Invariant (LTI).

Définition 2.2 (ordre-système propre)

La dimension du vecteur d'état est l'ordre n du modèle. Si la matrice de transmission directe $D = 0$, alors le modèle est dit strictement propre, sinon il est dit propre.

2.3 Les modèles externes (entrées-sorties)**2.3.1 La matrice de transfert**

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Définition 2.3 Soit f une fonction du temps t . La transformée de Laplace de f est la fonction F de la variable complexe p , définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Du fait de la linéarité de l'opérateur de Laplace, il est possible de l'appliquer aux équations ci-dessus et on obtient :

$$\begin{cases} X(p) = (pI - A)^{-1}(BU(p) + x_0), \\ Y(p) = C(pI - A)^{-1}(BU(p) + x_0) + DU(p). \end{cases} \quad (2.4)$$

Pour des conditions initiales nulles, $x_0 = 0$, on obtient la relation entrées-sorties :

$$Y(p) = (C(pI - A)^{-1}B + D)U(p) = G(p)U(p).$$

La matrice $G(p) \in \mathcal{M}_{r \times m}(\mathbb{C})$ est appelée matrice de transfert liant l'entrée $U(p)$ à la sortie $Y(p)$.

2.3.2 Les systèmes SISO (Single Input Single Output)**La fonction transfert**

Soit un système LTI mono-entrée ($u(t)$) et mono-sortie ($y(t)$). Il peut alors être décrit par l'équation différentielle à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t).$$

Si les conditions initiales sur le signal d'entrée et de sortie sont nulles :

$$u(0) = \dot{u}(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = 0,$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

et si la transformée de Laplace est appliquée aux signaux d'entrée et de sortie, on obtient la fonction de transfert du système SISO

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Les racines qui annulent le dénominateur ($U(p)$) sont appelés les pôles de la fonction de transfert.

2.4 Stabilité des systèmes LTI (Linéaires Temps-Invariant)

2.4.1 Stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Définition 2.4 (Stabilité Bounded Input Bounded Output)

Un système au repos (conditions initiales nulles) est stable au sens BIBO si et seulement si pour toute entrée $u(t)$ bornée, la sortie $y(t)$ est bornée.

La stabilité BIBO est un type de stabilité n'utilisant que l'information contenue dans les signaux d'entrée et de sortie, et définie uniquement pour les systèmes au repos.

2.4.2 Critère algébrique de ROUTH

Principe

Le critère algébrique de Routh ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît un ou plusieurs paramètres :

Soit $G(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée et soit $U(p)$ le dénominateur de $G(p)$, qui est un polynôme de degré n :

$$U(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0.$$

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients a_i , sur deux lignes, dans l'ordre décroissant des indices, alternativement sur une ligne puis l'autre. On effectue

ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \cdots & a_3 & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \cdots & a_2 & a_0 \\
 \frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}} & & \frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}} & & \dots & \dots & \frac{a_{n-1}a_1-a_na_0}{a_{n-1}} & 0
 \end{array}$$

On dispose alors d'un tableau à trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes. On complète alors celle-ci, à droite, par des zéros :

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_3 & a_1 \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_2 & a_0 \\
 \gamma_m & \gamma_{m-1} & \gamma_{m-2} & \cdots & \gamma_0 & 0
 \end{array}$$

On recommence le même calcul sur les deux dernières lignes pour créer une quatrième ligne :

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \cdots & a_3 & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \cdots & a_2 & a_0 \\
 \gamma_m & & \gamma_{m-1} & & \gamma_{m-2} & \cdots & \gamma_0 & 0 \\
 \frac{\gamma_m a_{n-3}-a_{n-1}\gamma_{m-1}}{\gamma_m} & & \frac{\gamma_m a_{n-5}-a_{n-1}\gamma_{m-2}}{\gamma_m} & & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 sur la dernière ligne.

Le nombre des pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert $G(p)$, est alors égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

En conséquence, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

Exemple 2.1 Soit

$$G(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3)},$$

la fonction de transfert d'un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire.

La fonction de transfert en boucle fermée G_{BF} est donné par :

$$G_{BF} = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p(p^2 + p + 3) + K}.$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$U(p) = p^3 + p^2 + 3p + K.$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{cc}
 1 & 3 \\
 1 & K \\
 3 - K & 0 \\
 K & 0
 \end{array}$$

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne. Le système est donc stable si $0 < K < 3$.

2.4.3 Critère de stabilité

On considère le système commandé suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice dynamique possédant des valeurs propres distinctes λ_k , $k = \overline{1, p}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ est la matrice de commande et $u(t)$ la commande qui vérifie

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in [0, \infty[.$$

Lemme 2.1 Pour tout ε positif, on a

$$\|e^{At}\| \leq e^{(\max_k \operatorname{Re} \lambda_k + \varepsilon)t}.$$

Démonstration On a

$$e^{At} = T \operatorname{diag}(e^{tJ_1(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_p(\lambda_p)}) T^{-1},$$

donc

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &\leq \|T\| \max_k \|e^{tJ_k(\lambda_k)}\| \|T^{-1}\| \\ &\leq \|T\| \max_k \|e^{\lambda_k t} \sum_{s=0}^{a_k-1} \frac{t^s}{s!} Z_{s, a-k}\| \|T^{-1}\| \\ &\leq \|T\| e^{\max_k \operatorname{Re} \lambda_k t} \sum_{s=0}^{a_k-1} \frac{t^s}{s!} \|T^{-1}\|. \end{aligned}$$

Puisque pour tout ε positif, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|T\| \sum_{s=0}^{a_k-1} \frac{t^s}{s!} \|T^{-1}\|}{e^{\varepsilon t}} = 0,$$

ceci implique que

$$\|e^{At}\| \leq e^{(\max_k \operatorname{Re} \lambda_k + \varepsilon)t}. \quad \square$$

Théorème 2.1 La solution $x(t)$ du système (2.5) est stable si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

Démonstration La solution $x(t)$ du système (2.5) est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

On va borner maintenant la norme de $x(t)$:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|e^{At}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|B\| |u(s)| ds \\ &\leq e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)t} \|x_0\| + \int_0^t e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)(t-s)} \|B\| |u(s)| ds \\ &\leq e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)t} \left(\|x_0\| + \|B\| L \int_0^t e^{-(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)s} ds \right) \\ &\leq e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)t} \left(\|x_0\| + \|B\| L \frac{1 - e^{-(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)t}}{\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon} \right) \\ &\leq e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)t} \|x_0\| + \|B\| L \frac{e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon)t} - 1}{\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon}. \end{aligned}$$

On a $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, $k = \overline{1, p}$, donc il existe un ε positif qui vérifie

$$\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon < 0,$$

alors $\exists M = \frac{-\|B\|L}{\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon} > 0$ vérifiant

$$|x(t)| \leq M,$$

donc le système (2.5) est stable. \square

2.4.4 Relation entre la stabilité BIBO et la stabilité interne

Pour les modèles LTI, il est possible sous les hypothèses de réalisation d'état minimal d'établir un lien entre stabilité BIBO et stabilité asymptotique. Pour une réalisation d'état minimal, la stabilité BIBO est équivalente à la stabilité asymptotique.

Théorème 2.2 Pour un modèle dynamique LTI commandable et observable décrit par sa fonction de transfert ou sa réalisation d'état minimal

$$G(p) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Le système est BIBO-stable.
2. Zéro est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système autonome.
3. Tous les pôles de la fonction de transfert $G(p)$ sont à partie réelle strictement négative.
4. Toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

2.5 Stabilisation des systèmes linéaires par retour d'état

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice caractéristique du système en boucle ouverte, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ est la matrice de commande, $C \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice de sortie, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables d'état, $u(t)$ et $y(t)$ sont des signaux d'entrée et de sortie respectivement.

On désire asservir le système à une valeur $y_{ref}(t)$ tout en imposant les dynamiques du régime transitoire et en maintenant une erreur petite ou nulle en régime permanent. Modifier le régime transitoire de ce système, c'est modifier les pôles de la matrice dynamique A .

La loi de commande s'écrit comme suit :

$$u(t) = -Kx(t) + v(t),$$

où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice appelée gain du retour d'état et $v(t)$ est une nouvelle entrée pour le système en boucle fermée (éventuellement ce dernier signal peut représenter la consigne). C'est une commande en boucle fermée car elle dépend des signaux internes du système même si elle ne prend pas en compte directement la sortie du système $y(t)$ comme le montre la figure suivante :

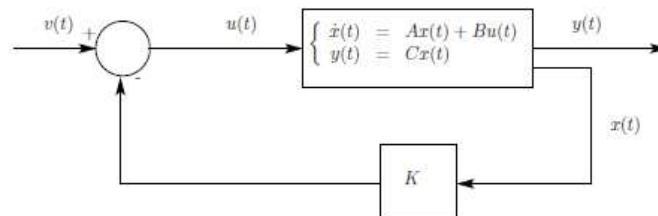


Figure 2.5 Schéma d'une boucle de régulation.

Le système en boucle fermée s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Remarque 2.1 Nous pouvons modifier tous les pôles du système si et seulement si le système est commandable, c'est-à-dire si et seulement si la paire (A, B) vérifie le critère de commandabilité :

$$\text{rang } \mathcal{C} = \text{rang } [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n.$$

2.5.1 Calcul du gain de retour d'état K dans le cas SISO

On utilise le changement de repère

$$x = P_c x_c,$$

$$A_c = P_c^{-1}AP_c, \quad B_c = P_c^{-1}B, \quad C_c = CP_c \text{ et } K_c = KP_c,$$

où P_c est la matrice de passage donnée par :

$$P_c = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ \vdots \\ q_1 A^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad q_1(1 \times n) = e_n^T \cdot \mathcal{C}^{-1},$$

où e_n est un vecteur unitaire donné par : $e_n(1 \times n) = (0 \ 0 \ \dots \ 1)^T$.

La loi de commande par retour d'état s'écrit donc sous forme :

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) = -K_c x_c(t) + v(t),$$

où $K_c = KP_c = (k_{c1}, \dots, k_{cn})$ est un vecteur de gain du retour d'état dans la base commandable.

Dans la base commandable, les matrices A_c et B_c s'écrivent comme suit :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où les coefficients $a_i, i = \overline{0, n-1}$, sont les coefficients du polynôme caractéristique associé

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

La matrice dynamique du système bouclé par le retour d'état s'écrit alors :

$$A_c - B_c K_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - k_{c1} & -a_1 - k_{c2} & \dots & \dots & -a_{n-1} - k_{cn} \end{pmatrix}.$$

La matrice $A_c - B_c K_c$ est sous forme commandable et on peut alors aisément calculer le polynôme caractéristique du système en boucle fermée

$$P_{A_c - B_c K_c}(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A_c + B_c K_c) = \lambda^n + (a_{n-1} + k_{cn})\lambda^{n-1} + \dots + (a_0 + k_{c1}).$$

Or, nous voulons placer les pôles de la boucle fermée en p_1, \dots, p_n . Le polynôme caractéristique désiré P_{des} , de la boucle fermée est donc déterminé d'une façon unique par le choix des pôles désirés et nous avons donc la relation suivante :

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \dots (\lambda - p_n) = P_{des}(\lambda) = \lambda^n + u_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + u_0 = P_{A_c - B_c K_c}(\lambda).$$

Nous en tirons donc le valeur du gain K_c permettant d'obtenir le polynôme désiré et donc de placer les pôles en p_1, \dots, p_n :

$$\begin{cases} k_{c1} = -a_0 + u_0, \\ k_{c2} = -a_1 + u_1, \\ \vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ k_{cn} = -a_{n-1} + u_{n-1}. \end{cases}$$

Le gain du correcteur K dans la base initiale s'écrit alors :

$$K = (u_0 - a_0 \quad \dots \quad u_{n-1} - a_{n-1}) \cdot P_c^{-1}.$$

Exemple 2.2 Soit le système linéaire défini par :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On désire placer les pôles du système en -3 et -4 . Le polynôme caractéristique désiré s'écrit donc

$$P_{des}(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12.$$

La première étape est de vérifier que le système est commandable. La matrice de commandabilité s'écrit

$$\mathcal{C} = [B \ AB] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \text{rang } \mathcal{C} = 2.$$

On calcule alors $A - BK$ et le polynôme caractéristique associé P_{A-BK} :

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2k_1 & -1 - 2k_2 \\ 1 - k_1 & 5 - k_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient donc le polynôme caractéristique

$$P_{A-BK}(\lambda) = \lambda^2 + (-7 - 2k_1 - k_2)\lambda + 11 - 10k_1 - k_2.$$

En boucle fermée, ce polynôme caractéristique admet comme racine -3 et -4 . On obtient alors la valeur de K :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{26}{15} & \frac{158}{15} \end{pmatrix}.$$

2.5.2 Critère du gain de retour d'état K dans le cas SISO

On considère que le système commandé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

est instable, où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice dynamique possédant des valeurs propres distinctes $\lambda_k, k = \overline{1, p}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ est la matrice de commande et $u(t)$ la commande qui vérifie

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in [0, \infty[.$$

Théorème 2.3 Pour tout $\varepsilon > 0$, la condition suffisante pour la stabilité est de choisir K telle que

$$\max_k \operatorname{Re} \gamma_k < -(\max_k \operatorname{Re} \lambda_k + \varepsilon), \quad k = \overline{1, p},$$

où $\gamma_k, k = \overline{1, p}$, sont des valeurs propres distinctes de la matrice BK .

Démonstration

Si on utilise la commande par retour d'état $u(t) = Kx(t)$, le système (2.6) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

La solution de ce système est donnée par

$$x(t) = e^{t(A+BK)}x_0,$$

et pour tout ε positif, la borne supérieure de $x(t)$ est

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|e^{(A+BK)t}\| \|x_0\| \\ &\leq \|e^{At}\| \|e^{BKt}\| \|x_0\| \\ &\leq e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon_1)t} e^{(\max_k \operatorname{Re}\gamma_k + \varepsilon_2)t} \|x_0\|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ &\leq e^{(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon + \max_k \operatorname{Re}\gamma_k)t} \|x_0\|, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$, si

$$\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon + \max_k \operatorname{Re}\gamma_k < 0,$$

ce qui implique que

$$\max_k \operatorname{Re}\gamma_k < -(\max_k \operatorname{Re}\lambda_k + \varepsilon). \square$$

2.6 Stabilisation des systèmes linéaires par la commande linéaire quadratique (LQ)

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice caractéristique du système en boucle ouverte, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ est la matrice de commande, $C \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice de sortie, $u(t)$ et $y(t)$ sont des signaux d'entrée et de sortie respectivement, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables d'état et x_0 est l'état initial à l'instant initial $t = 0$.

2.6.1 La commande LQ à horizon infini

On définit la commande optimale à horizon infini $u_{opt}(t)$ comme la commande qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left(\int_0^{t_1} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \right),$$

où $Q = Q^T \geq 0$ est une matrice de pondération qui donne un poids différent à chaque composante du vecteur d'état dans le critère, $R = R^T > 0$ est une matrice de pondération de la commande qui affecte un poids différent à chaque composante du vecteur de commande.

Résolution d'un problème de commande LQ

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{2}(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) + \lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t)),$$

où $\lambda(t)$ est un vecteur adjoint tel que $-\dot{\lambda}$ est composé des dérivées partielles de H par rapport à la variable d'état.

Le Hamiltonien est minimal pour :

$$\nabla_u H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = Ru(t) + B^T \lambda(t) = 0.$$

La commande optimale est alors donnée par :

$$u_{opt}(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t).$$

Les équations de Hamilton-Pontriaguine s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax(t) - BR^{-1}B^T \lambda(t), \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx(t) - A^T \lambda(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

La solution du système est fournie par le théorème suivant :

Théorème 2.4 [6]

La solution optimale du problème (2.8) est donnée par :

$$u_{opt}(t) = -R^{-1}B^T P_0 x(t). \quad (2.9)$$

où P_0 est l'unique solution symétrique semi-définie positive de l'équation de Riccati :

$$P_0 A + A^T P_0 - P_0 B R^{-1} B^T P_0 + Q = 0.$$

2.6.2 Choix des matrices de pondération

La synthèse des matrices de gain du contrôleur optimal repose directement sur les matrices de pondération Q et R . On peut trouver la règle de Bryson qui suggère de choisir des matrices de pondération diagonales, dont les coefficients diagonaux sont égaux au carré de l'inverse de l'écart maximum souhaité sur la variable correspondante. Bryson indique également que cette règle ne fournit que des valeurs initiales, que l'on peut ensuite améliorer par simulation successives. La règle de Bryson donne :

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{et} \quad R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m),$$

où

$$q_i = \left[\frac{1}{\sup(x_i)} \right]^2, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{et} \quad r_j = \left[\frac{1}{\sup(u_j)} \right]^2, \quad j = \overline{1, m}.$$

Théorème 2.5 [6]

Le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{opt}(t), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est quadratiquement stabilisable par retour d'état

$$u_{opt}(t) = -R^{-1}B^T P_0 x(t),$$

s'il existe une matrice $P_0 = P_0^T > 0$ solution de l'équation de Riccati suivante :

$$P_0 A + A^T P_0 - P_0 B R^{-1} B^T P_0 + Q = 0.$$

2.7 Stabilisation des systèmes linéaires par retour d'état proportionnel, intégral et dérivé (PID) par placement des pôles

La relation entre la sortie $x(t)$ et le signal $u(t)$ par retour d'état est :

$$u(t) = Kx(t).$$

Si on ajoute l'action ID, on obtient alors une commande PID :

$$u(t) = K_p x(t) + K_i \int_0^t x(\tau) d\tau + K_d \frac{dx(t)}{dt},$$

où $K_p, K_i, K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont les matrices de gain conçues pour imposer le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée.

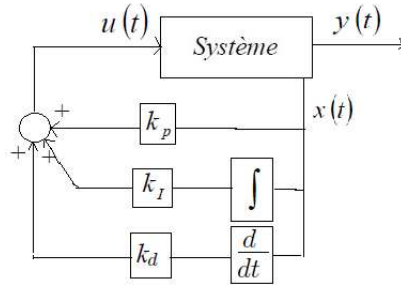


Figure 2.6 Schéma de commande par retour d'état PID.

Soit le modèle d'état du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Le comportement dynamique du système est fixé par le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

et le modèle d'état du système en boucle fermée est dans ce cas donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B \left(K_p x(t) + K_i \int_0^t x(\tau) d\tau + K_d \frac{dx(t)}{dt} \right), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

et le polynôme caractéristique $P_{BF}(\lambda)$ en boucle fermée donné par :

$$P_{BF}(\lambda) = \det \left(\lambda \mathbb{I}_n - A - B \left(K_p + \frac{K_i}{\lambda} + K_d \cdot \lambda \right) \right).$$

Soit $P_{des}(\lambda)$ le polynôme caractéristique désiré :

$$P_{des}(\lambda) = u_0 + u_1 \lambda + \dots + u_n \lambda^n + u_{n+1} \lambda^{n+1}.$$

Pour déterminer les coefficients de la matrice de retour d'état on considère que le système est commandable.

2.7.1 Transformation du modèle sous la forme canonique commandable

Dans la base commandable (voir la page 25) les matrices A_c et B_c s'écrivent :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La loi de commande obtenue dans la nouvelle base s'écrit :

$$u(t) = K_p P_c x_c(t) + K_i P_c \int_0^t x_c(\tau) d\tau + K_d P_c \frac{dx_c(t)}{dt}.$$

Le modèle d'état du système en boucle fermée dans la nouvelle base est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c \left(K_p P_c x_c(t) + K_i P_c \int_0^t x_c(\tau) d\tau + K_d P_c \frac{dx_c(t)}{dt} \right) \\ y(t) = C_c^T x_c(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Soit $K_{pc} = K_p P_c = (K_{pc1} \dots K_{pcn})$, $K_{ic} = K_i P_c = (K_{ic1} \dots K_{icn})$ et

$K_{dc} = K_d P_c = (K_{dc1} \dots K_{dcn})$. Le polynôme caractéristique $P_{BF}(\lambda)$ en boucle fermée dans ce cas est donné par :

$$P_{BF}(\lambda) = \det \left(\lambda \mathbb{I}_n - A_c - B_c \left(K_{pc} + \frac{K_{ic}}{\lambda} + K_{dc} \cdot \lambda \right) \right).$$

Les matrices $B_c K_{pc}$, $B_c K_{ic}$ et $B_c K_{dc}$ sont respectivement données par :

$$B_c K_{pc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{pc1} & K_{pc2} & \dots & \dots & K_{pcn} \end{pmatrix},$$

$$B_c K_{ic} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{ic1} & K_{ic2} & \dots & \dots & K_{icn} \end{pmatrix},$$

Étape 3 : Spécifier les $n + 1$ pôles à imposer à la boucle fermée (réelles ou complexes) conjugués deux à deux (ce qui garantit un polynôme caractéristique à coefficients réels) à partie réelle strictement négative (ce qui garantit la stabilité).

Étape 4 : Calculer les coefficients du polynôme caractéristique désiré.

Étape 5 : Calculer les matrices de gain K_p, K_i et K_d .

2.8 Stabilisation des systèmes non linéaires

Comme les méthodes d'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires sont compliquées, on se base alors sur l'utilisation de la linéarisation au sens des Moindres Carrés [41]. Ceci va approximer le système donné en un système linéaire. Ce dernier peut être stabilisé par les deux types de commande (LQ et PID par placement des pôles) par retour d'état.

Considérons un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie. La fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne par rapport à x , continue par rapport à u et continue par morceaux par rapport à t . En l'absence la commande ($u(t) = 0$) le système est au point d'équilibre.

Nous avons les hypothèses suivantes :

H1) $\forall t \in I, f(0, 0, t) = 0,$

H2) f est continue, lipchitzienne, de constante de Lipchitz $L,$

H3) Le spectre $\sigma(Df(x(t), u(t), t))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re}z < 0\}$ pour tous $x \neq 0,$ dans un voisinage de 0, où $Df(x(t), u(t), t)$ existe.

On va trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

approchant l'équation non linéaire (2.11) telle que la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|f(x(t), u(t), t) - Ax(t) - Bu(t)\|^2 dt, \quad (2.13)$$

soit minimale. La minimisation de la fonctionnelle $G(A, B)$ est obtenue en calculant la différentielle par rapport à A et B . Cette minimisation nous permet de calculer les matrices optimales \tilde{A} et \tilde{B} , telles que

$$\begin{cases} DG(A) \cdot \alpha = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - f(x(t), u(t), t), \alpha x \rangle dt, \\ DG(B) \cdot \beta = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - f(x(t), u(t), t), \beta u \rangle dt, \end{cases}$$

pour toutes les matrices α et β , en particulier pour les matrices telles que

$$\begin{cases} \alpha_{lm} = 1; \alpha_{ij} = 0, si(i, j) \neq (l, m), \\ \beta_{lm} = 1; \beta_{ij} = 0, si(i, j) \neq (l, m). \end{cases}$$

Si on pose

$$\begin{cases} \Gamma_A(x) = \int_0^{+\infty} x(t)x^T(t)dt, \\ \Gamma_B(u) = \int_0^{+\infty} u(t)u^T(t)dt, \\ \Phi_A(u, x) = \int_0^{+\infty} u(t)x^T(t)dt, \\ \Phi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} x(t)u^T(t)dt, \\ \Psi_A(x, u) = \int_0^{+\infty} f(x(t), u(t), t)x^T(t)dt, \\ \Psi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} f(x(t), u(t), t)u^T(t)dt, \end{cases}$$

On obtient [41]

$$\begin{cases} A = (\Psi_A(x, u) - B\Phi_A(u, x))(\Gamma_A(x))^{-1}, \\ B = (\Psi_B(x, u) - A\Phi_B(x, u))(\Gamma_B(u))^{-1}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Les matrices A et B sont définies et uniques à condition que les fonctions $\Gamma_A(x)$ et $\Gamma_B(u)$ soient inversibles.

2.8.1 Algorithme de calcul

On va utiliser le calcul précédent de manière itérative. On suppose que les matrices successives A_j et B_j sont de type stable, leur spectre est contenu dans $\{z : Rez < 0\}$. Les matrices initiales A_0 et B_0 sont respectivement les matrices jacobienne de f en x_0 où $Df(x)$ existe, et en u_0 où $Df(u)$ existe, x_0 étant la condition initiale et u_0 représente la commande à l'instant $t = 0$.

Étape 1 : Calcul de $\begin{cases} A_0 = Df(x_0), \\ B_0 = Df(u_0). \end{cases}$

Étape 2 : Calcul de A_1 et B_1 à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A_0 y(t) + B_0 v(t), \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|f(y(t), v(t), t) - Ay(t) - Bv(t)\|^2 dt,$$

où A_1 et B_1 sont déterminées de manière unique par le système d'équations (2.14), x est remplacé par y et $v(t)$ étant la commande à l'instant t .

On voit ainsi que mises à part les matrices initiales, les matrices déterminées par la procédure ne sont pas les matrices jacobiennes de f en un point donné. Par la suite, il est nécessaire que les conditions du début de cette étude soient satisfaites à chaque pas. Si nous supposons que cela est vrai, alors la procédure marche comme suit

Étape 3 : Pour calculer A_j à partir de A_{j-1} et B_j à partir de B_{j-1} , on doit d'abord résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A_{j-1} y(t) + B_{j-1} v(t), \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A, B) = \int_0^{+\infty} \|f(y_j(t), v_j(t), t) - Ay_j(t) - Bv_j(t)\|^2 dt$$

conduit à

$$\begin{cases} A_j = (\Psi_{A_j}(y_j, v_j) - B_j \Phi_{A_j}(v_j, y_j))(\Gamma_{A_j}(y_j))^{-1}, \\ B_j = (\Psi_{B_j}(y_j, v_j) - A_j \Phi_{B_j}(v_j, y_j))(\Gamma_{B_j}(v_j))^{-1}. \end{cases}$$

Si les suites (A_j, B_j) convergent, alors (\tilde{A}, \tilde{B}) représentent la dérivation optimale de $f(y(t), v(t), t)$ au point (x_0, u_0) .

2.9 Conclusion

Les méthodes utilisées dans les systèmes linéaires sont très puissantes en raison des outils disponibles (algèbre linéaire, équations différentielles et systèmes différentiels linéaires, etc.).

Malgré tout, se cantonner aux systèmes linéaires présente plusieurs limitations :

- Aucun système physique n'est complètement linéaire. Les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint.
- Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, sous forme de système linéaire.
- Certains phénomènes ne peuvent pas être décrits par des modèles et méthodes linéaires.

Les méthodes d'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires sont basées sur l'utilisation de la linéarisation au sens des moindres carrées ou la linéarisation dynamique. Elles peuvent conduire à des résultats plus ou moins satisfaisants du point de vue pratique.

Chapitre 3

Application : Stabilisation du pendule inversé commandé par un moteur électrique à courant continu.

3.1 Introduction

Un pendule inversé est un pendule simple monté sur un chariot. Le mouvement du chariot doit maintenir le pendule dans sa position d'équilibre instable (masse dirigée vers le haut).

Le but de la commande du pendule inversé est de maintenir en équilibre vertical une tige en aluminium à l'extrémité de laquelle est montée une masse de forme cylindrique.

Cette tige est fixée par une articulation pivotante sur un chariot qui peut se déplacer en glissant le long d'un rail de guidage horizontal.

Le mouvement de rotation d'un moteur électrique est transformé en mouvement de translation du chariot par l'intermédiaire d'une poulie et d'une courroie crantée.

Le déplacement du chariot dans un sens ou dans l'autre assure par réaction l'équilibre vertical du bras du pendule [38].

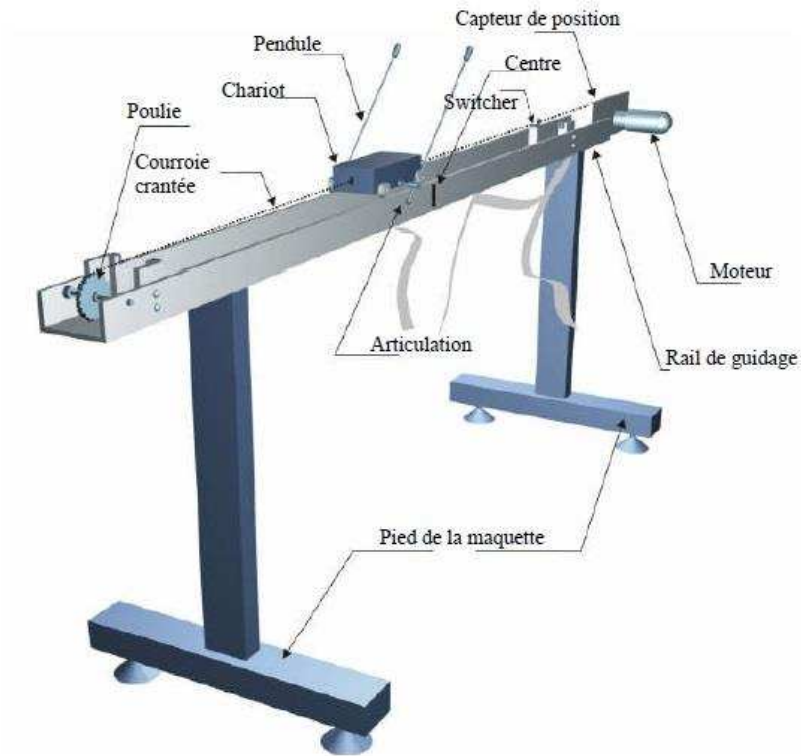


Figure 3.1 Synoptique de la maquette du pendule inversé.

3.2 Modélisation de l'ensemble chariot-pendule

L'ensemble du chariot-pendule possède deux degrés de liberté dont les coordonnées généralisées sont respectivement x pour le déplacement horizontal du chariot et θ pour la rotation du pendule.

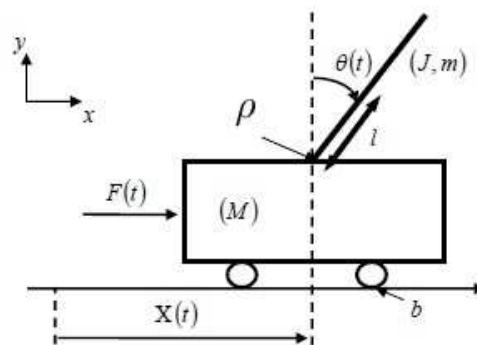


Figure 3.2 Schéma de l'ensemble chariot et pendule inversé.

Les paramètres de l'ensemble pendule-chariot sont :

Paramètre	Terme	Unité
Masse du chariot	$M = 2.3$	Kg
Coefficient de frottement des roues du chariot	$b = 5 \times 10^{-5}$	$N \cdot s/m$
Position du chariot	$x(t)$	m
Coefficient de frottement de rotation du pendule	$\rho = 5 \times 10^{-3}$	$N \cdot m \cdot s/rad$
Masse du pendule	$m = 0.2$	Kg
Demi longueur du pendule	$l = 0.3$	m
Angle de rotation du pendule	$\theta(t)$	rad
Force exercée sur le chariot	$F(t)$	N
Intensité de la pesanteur	$g = 9.81$	m/s^2

Les équations du mouvement du pendule sont déterminées par le formalisme d'Euler-Lagrange qui est basé sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique.

Le Lagrangien est défini comme suit :

$$L = E_c - E_p, \quad (3.1)$$

où E_c est l'énergie cinétique du système et E_p l'énergie potentielle.

3.2.1 Énergie cinétique du système en mouvement

L'énergie cinétique du chariot est donnée par :

$$E_{cM} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2. \quad (3.2)$$

L'énergie cinétique du pendule est donnée par :

$$E_{cm} = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2, \quad (3.3)$$

où v_c est la vitesse de centre de gravité du pendule, $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire du pendule et J le moment d'inertie. La position du centre gravité du pendule est donnée par :

$$r_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j}. \quad (3.4)$$

La vitesse du centre de gravité du pendule est donc :

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} - l\dot{\theta} \sin \theta \vec{j}. \quad (3.5)$$

Si on remplace les équations (3.4) et (3.5) dans l'équation (3.3), on obtient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2. \quad (3.6)$$

Finalement l'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot-pendule est donnée par :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2. \quad (3.7)$$

3.2.2 Énergie potentielle du système

Puisque le chariot est en mouvement sur un rail horizontal, alors le seul élément possédant une énergie potentielle est le pendule.

L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = mgl \cos \theta. \quad (3.8)$$

Si on remplace les équations (3.7) et (3.8) dans l'équation (3.1), on obtient :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (3.9)$$

On utilise maintenant l'équation générale d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\xi}_j} = F_j, \quad (3.10)$$

où ξ_j désigne les deux degrés de liberté $\xi_1 = x(t)$ et $\xi_2 = \theta(t)$, D_f désigne l'énergie dissipée par frottement, F la force généralisée et L représente le Lagrangien.

On définit donc l'équation de Lagrange pour le pendule inversé comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_j} = F_j, \quad (3.11)$$

- Si $j = 1$, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b\dot{x}. \quad (3.12)$$

Ceci implique que :

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta) - 0 = F - b\dot{x}. \quad (3.13)$$

Donc la première équation de Lagrange est

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F - b\dot{x}. \quad (3.14)$$

- Si $j = 2$, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\rho\dot{\theta}. \quad (3.15)$$

Ceci implique que :

$$\frac{d}{dt} (ml\dot{x} \cos \theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + mgl \sin \theta) = -\rho\dot{\theta}. \quad (3.16)$$

Donc la deuxième équation de Lagrange est

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta = -\rho\dot{\theta}. \quad (3.17)$$

Le modèle mathématique de l'ensemble chariot-pendule est donné par :

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F, \\ ml\ddot{x} \cos \theta + N\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0, \end{cases}$$

où $h = M + m$ et $N = ml^2 + J$.

3.3 Modélisation du moteur électrique à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit

Comme le moteur utilisé pour entraîner le chariot est un moteur à courant continu et à aimant permanent, le flux inducteur est constant ($\varphi(t) = \varphi_0$).

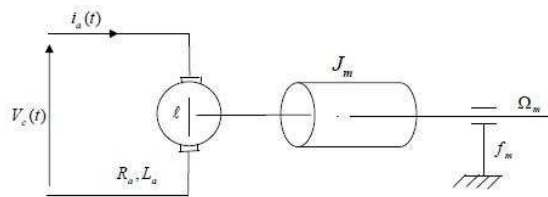


Figure 3.3 Schéma électrique et mécanique de l'induit.

Les paramètres du moteur sont :

Paramètre	Terme	Unité
Résistance de l'induit	$R_a = 2.5$	Ω
Inductance de l'induit	$L_a = 25 \times 10^{-4}$	H
La tension d'alimentation de l'induit du moteur	$-2.5 \leq V_c \leq 2.5$	V
Intensité du courant	$i_a(t)$	A
Constante électrique du moteur	$K_b = 5 \times 10^{-2}$	N/A
Constante mécanique	$K_m = 5 \times 10^{-2}$	Nm
Force contre électromotrice (Fcem)	$l(t)$	
Moment d'inertie	$J_m = 1.4 \times 10^{-5}$	$Kg \cdot m^2$
Couple résistant	$C_r(t)$	
Couple moteur	$C_m(t)$	
Coefficient de frottement visqueux	$f_m = 10^{-6}$	$Kg \cdot m^2/s$
Vitesse angulaire de l'arbre de moteur	Ω_m	rad/s

Les équations régissant le fonctionnement du moteur à courant continu et à aimant permanent sont :

Les équations électriques :

– Equation de l'induit :

$$V_c(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + E(t). \quad (3.18)$$

– Equation de la Fcem :

$$E(t) = K\varphi_0\Omega_m(t) = K_b\Omega_m, \quad (3.19)$$

où K est une constante générale liée à la machine tournante (MKSA).

– Equation mécanique :

$$C_m(t) = J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} + C_r(t) + f_m\Omega_m(t). \quad (3.20)$$

– Equation du couple :

$$C_m(t) = K_m i_a(t). \quad (3.21)$$

3.3.1 Modèle d'état du moteur

Si on considère que la vitesse angulaire de l'arbre de moteur comme sortie et ($C_r(t) = 0$), alors en remplaçant l'équation (3.21) dans l'équation (3.20) et l'équation (3.19) dans l'équation (3.18), on obtient :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{d\Omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_a(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-f_m}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_m(t) \\ i_a(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{pmatrix} V_c(t), \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_m \\ i_a \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.4 Modélisation du système global : moteur-chariot-pendule

3.4.1 Relation entre la force mécanique et la tension

Si on néglige la dynamique du moteur , on a :

$$V_c = R_a i_a + K_b \Omega_m. \quad (3.23)$$

Et comme $x = r\Phi$, où Φ est la position d'un point quelconque située sur le périmètre de la poulie et $r = 0.0027m$ le rayon de la poulie, on obtient :

$$\dot{x} = r \frac{d\Phi}{dt} = r\Omega_m. \quad (3.24)$$

Ceci implique que :

$$\Omega_m = \frac{\dot{x}}{r}. \quad (3.25)$$

En remplaçant l'équation (3.25) dans l'équation (3.23), on obtient l'expression du courant de l'induit I_a qui s'écrit :

$$I_a = \frac{V_c}{R_a} - \frac{K_b}{rR_a} \dot{x}. \quad (3.26)$$

Le couple produit à l'arbre du moteur crée une force qui est donnée par

$$F = \frac{C_m}{r} = \frac{K_m I_a}{r}. \quad (3.27)$$

En remplaçant l'équation (3.26) dans l'équation (3.27), on obtient :

$$F = \frac{K_m}{rR_a} V_c - \frac{K_m K_b}{r^2 R_a} \dot{x}. \quad (3.28)$$

3.4.2 Modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule

Le modèle mathématique de l'ensemble chariot-pendule est donné par :

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F. \\ ml\ddot{x} \cos \theta + N\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Ceci implique que :

$$\ddot{x} = \frac{\begin{vmatrix} F + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b\dot{x} & ml \cos \theta \\ mgl \sin \theta - \rho\dot{\theta} & N \end{vmatrix}}{hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} h & F + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b\dot{x} \\ ml \cos \theta & mgl \sin \theta - \rho\dot{\theta} \end{vmatrix}}{hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.29)$$

Si on pose z comme vecteur d'état du nouveau système tel que :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T, \quad (3.30)$$

alors on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2. \\ \dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} z_2 - \frac{m^2l^2g}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} \cos z_3 \sin z_3 + \frac{ml\rho \cos z_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} z_4 + \frac{mlN \sin z_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 \\ \quad + \frac{N}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c - \frac{N}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} z_2 \\ \dot{z}_3 = z_4. \\ \dot{z}_4 = \frac{mgl}{N} \sin z_3 - \frac{\rho}{N} z_4 + \frac{mlb \cos z_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} z_2 + \frac{m^3l^3g \cos^2 z_3 \sin z_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} - \frac{m^2l^2\rho \cos^2 z_3}{N(hN-m^2l^2 \cos^2 z_3)} z_4. \\ \quad - \frac{m^2l^2 \cos z_3 \sin z_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 - \frac{ml \cos z_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c + \frac{ml \cos z_3}{hN-m^2l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} z_2. \\ y_1 = z_1. \\ y_2 = z_3. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

3.5 Linéarisation du modèle autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$)

Le modèle du pendule inversé est trop complexe et non linéaire, et comme l'objectif de la commande dans le système du pendule inversé est d'asservir la position x du chariot et l'angle θ à zéro, alors une linéarisation autour de cet état a été établie.

Le développement en série de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de $\theta = 0$ des fonctions $\cos \theta$ et $\sin \theta$ est donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \simeq 1, \\ \sin \theta \simeq \theta. \end{array} \right.$$

On considère que tous les termes d'ordre supérieur sont nuls :

$$\dot{\theta}^2 \simeq 0. \quad (3.32)$$

En remplaçant l'équation (3.28) dans le système (3.31), on trouve le système d'équation linéaire du système moteur-chariot-pendule suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2. \\ \dot{z}_2 = \left(\frac{-bN}{hN-m^2l^2} - \frac{NK_m K_b}{(hN-m^2l^2)R_a r^2} \right) z_2 - \frac{m^2l^2g}{hN-m^2l^2} z_3 \\ \quad + \frac{ml\rho}{hN-m^2l^2} z_4 + \frac{N}{hN-m^2l^2} \frac{K_m}{R_a r} V_c. \\ \dot{z}_3 = z_4. \\ \dot{z}_4 = \left(\frac{mlb}{hN-m^2l^2} + \frac{mlK_m K_b}{(hN-m^2l^2)R_a r^2} \right) z_2 + \left(\frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{N(hN-m^2l^2)} \right) z_3. \\ \quad - \left(\frac{\rho}{N} + \frac{m^2l^2\rho}{N(hN-m^2l^2)} \right) z_4 - \frac{ml}{hN-m^2l^2} \frac{K_m}{R_a r} V_c. \\ y_1 = z_1. \\ y_2 = z_3. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Le modèle linéaire (3.33) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cz(t), \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN-m^2l^2} - \frac{NK_mK_b}{(hN-m^2l^2)R_a r^2} & -\frac{m^2l^2g}{hN-m^2l^2} & \frac{ml\rho}{hN-m^2l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN-m^2l^2} + \frac{mlK_mK_b}{(hN-m^2l^2)R_a r^2} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{N(hN-m^2l^2)} & -\frac{\rho}{N} - \frac{m^2l^2\rho}{N(hN-m^2l^2)} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N}{hN-m^2l^2} \frac{K_m}{R_a r} \\ 0 \\ -\frac{ml}{hN-m^2l^2} \frac{K_m}{R_a r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = V_c.$$

Si on utilise les paramètres réels dans le modèle du pendule inversé linéarisé au voisinage de $\theta_0 = 0$, on obtient l'exemple numérique suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cz(t), \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5786 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.2443 & 22.2449 & -0.1890 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3124 \\ 0 \\ -0.6719 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u(t) = V_c.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont données par

$$\text{Spec}(A) = \{0, -0.5483, -4.8291, 4.6093\}.$$

Celles-ci montrent que le système est instable. Cela justifie l'utilisation d'une commande permettant la stabilisation du pendule. On va utiliser la commande optimale linéaire quadratique (LQ) et la commande par retour d'état proportionnel, intégral et dérivé (PID) par placement des pôles pour stabiliser le système.

3.6 Stabilisation du pendule inversé par la commande LQ

3.6.1 Choix des matrices de pondération

Nous utilisons la règle de Bryson pour trouver les matrices de pondération Q et R , en choisissant les matrices suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad R = 0.16.$$

3.6.2 Gains du régulateur

L'utilisation de l'algorithme LQR (Linear-Quadratic-Regulator) pour la recherche des gains optimums est d'une grande efficacité. La matrice de gain K qui minimise la fonction de coût J est donnée par :

$$K = \begin{pmatrix} -1.2500 & -6.6573 & -85.7402 & -18.1005 \end{pmatrix}.$$

Les pôles de la boucle fermée sont :

$$\text{Spec}(A - BK) = \{-5.6559, -3.9326, -0.7957, -0.4655\}.$$

La commande de système est donnée par

$$u(t) = \begin{pmatrix} -1.2500 & -6.6573 & -85.7402 & -18.1005 \end{pmatrix} z(t).$$

3.6.3 Résultat de simulation

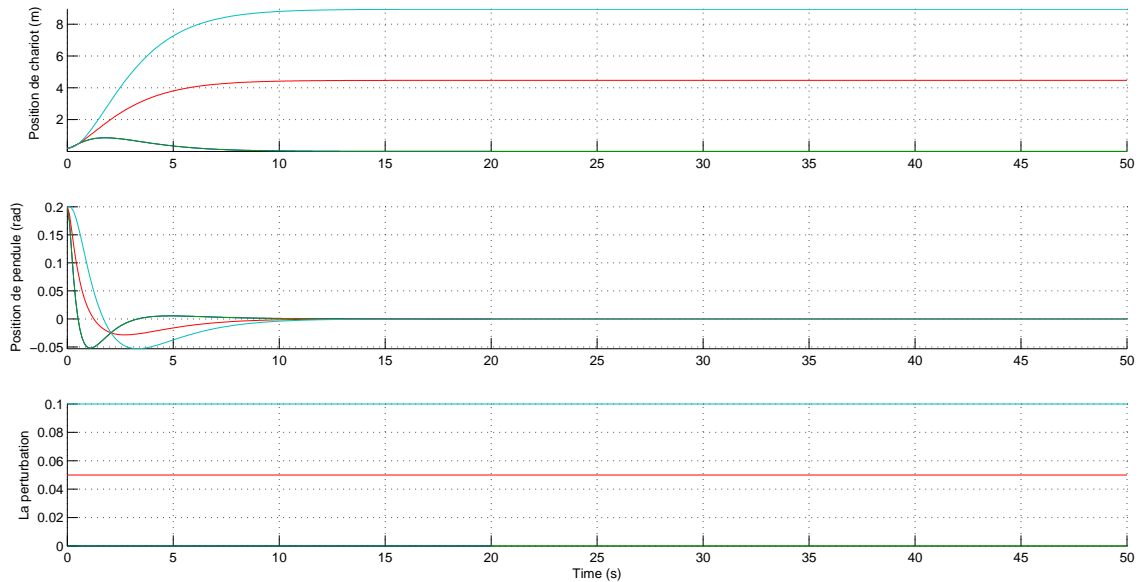


Figure 3.4 Résultat de simulation de stabilisation du pendule inversé linéarisé avec le régulateur d'état LQ, $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0.2, 0, 0.2, 0]$.

La figure 3.4 montre que le système du pendule inversé linéaire se stabilise quelle que soit la perturbation. Si la perturbation égale 0, le système est stable au bout de 9.41 sec et le déplacement du chariot ne dépasse pas 0.66 m. Si la perturbation égale 0.05, le système est stable au bout de 12.5 sec et le déplacement du chariot ne dépasse pas 4.2 m, et si la perturbation égale 0.1, le système est stable au bout de 13.33 sec et le déplacement du chariot ne dépasse pas 9 m.

3.7 Stabilisation du pendule inversé par la commande PID par placement des pôles

Dans cette application, la matrice de commandabilité est donnée par :

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{pmatrix} 0 & 0.3124 & -0.1838 & 0.4674 \\ 0.3124 & -0.1838 & 0.4674 & -0.6145 \\ 0 & -0.6719 & 0.5157 & -15.2725 \\ -0.6719 & 0.5157 & -15.2725 & 14.9399 \end{pmatrix},$$

donc $\det \mathcal{C} = 19.6091$. Cela signifie que tous les états du systèmes sont commandables, alors les matrices A et B peuvent être mises sous la forme commandable. La matrice de transformation P_c est donnée par :

$$P_c = \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \cdot \mathcal{C}^{-1} \\ \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \cdot \mathcal{C}^{-1} \cdot A \\ \vdots \\ \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \cdot \mathcal{C}^{-1} \cdot A^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow P_c = \begin{pmatrix} -0.1517 & -0.0013 & -0.0707 & -0.0006 \\ 0 & -0.1517 & -0.0126 & -0.0705 \\ 0 & 0.0000 & -1.4883 & 0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0.0001 & -1.4883 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A_c et B_c sont données par :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & -0.0000 & 0 \\ 0 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & -0.0000 & -0.0000 & 1.0000 \\ 0 & 12.2066 & 22.1411 & -0.7676 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les pôles à imposer au système en boucle fermée sont choisis tels que :

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4, \lambda_5 = -10.$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est dans ce cas donné par :

$$P_{des}(\lambda) = \lambda^5 + 20\lambda^4 + 125\lambda^3 + 278\lambda^2 + 304\lambda + 240.$$

L'étape 5 de l'algorithme permet de calculer dans la nouvelle base les matrices de gain proportionnel, intégral et dérivée K_{pc} , K_{ic} et K_{dc} :

$$K_{pc} = \begin{pmatrix} 0 & -12.2066 & -22.1411 & 0.7676 \end{pmatrix},$$

$$K_{ic} = \begin{pmatrix} -240 & -304 & -278 & -125 \end{pmatrix},$$

$$K_{dc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la commande du système est donnée par

$$u(t) = K_p z(t) + K_i \int_0^t z(\tau) d\tau + K_d \frac{dz(t)}{dt},$$

où

$$K_p = K_{pc} P_c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.8519 & 33.1074 & -0.2814 \end{pmatrix},$$

$$K_i = K_{ic} P_c^{-1} = \begin{pmatrix} 36.4156 & 46.4332 & 434.5419 & 207.6287 \end{pmatrix},$$

$$K_d = K_{dc} P_c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.0002 & 29.7663 & -0.0001 \end{pmatrix}.$$

3.7.1 Résultats de simulation

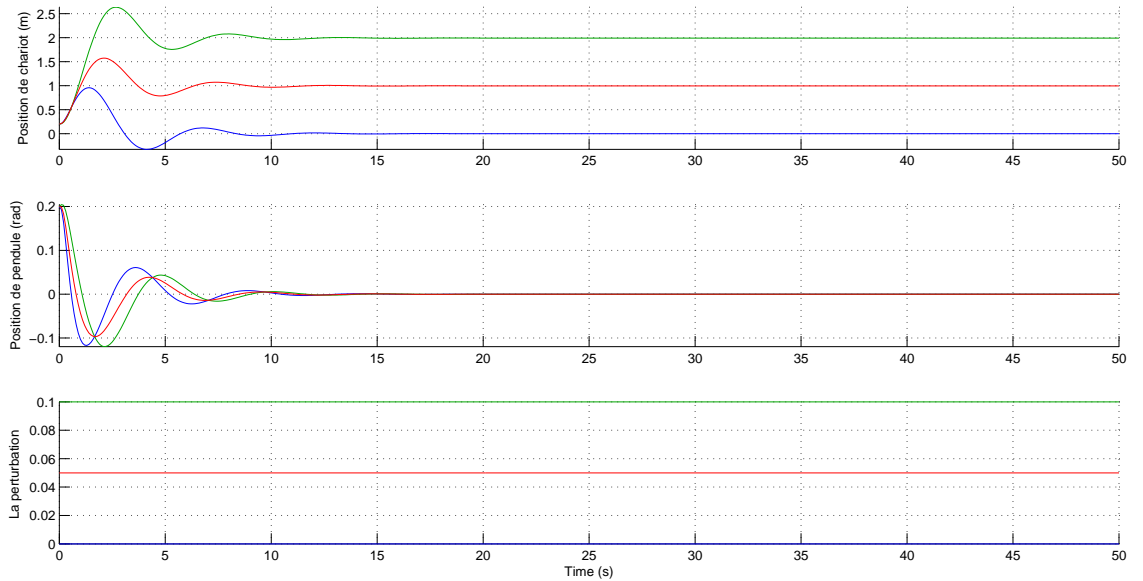


Figure 3.5 Résultat de simulation de stabilisation du pendule inversé linéarisé avec le régulateur d'état PID par placement des pôles, $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0.2, 0, 0.2, 0]$.

La figure 3.5 représente le résultat de simulation de la commande par retour d'état proportionnel, intégral et dérivé, appliqué pour la stabilisation de pendule inversé linéarisé autour de $\theta = 0$ avec les conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0.2, 0, 0.2, 0]$. Cette figure montre que le système du pendule inversé linéaire se stabilise quelle que soit la perturbation. Si

la perturbation égale 0, le système est stable au bout de 14.44 *sec* et le déplacement du chariot ne dépasse pas 0.9 *m*. Si la perturbation égale 0.05, le système est stable au bout de 14.75 *sec* et le déplacement du chariot ne dépasse pas 1.6 *m*, et si la perturbation égale 0.1, le système est stable au bout de 14.6 *sec* et le déplacement du chariot ne dépasse pas 2.6 *m*.

3.8 Conclusion :

La commande LQ stabilise le système et elle permet en outre de minimiser l'énergie (Fonction de coût), donc cette commande est optimale.

La commande PID par placement des pôles stabilise le système sans une prise en compte de l'aspect énergétique.

Le choix des coefficients K_p, K_i et K_d est très important pour la commande, car ces coefficients sont déterminants pour la rapidité, la précision et la stabilité.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilisation des systèmes dynamiques par retour d'état avec la commande linéaire quadratique (LQ) et la commande proportionnelle, intégrale et dérivée (PID) par placement des pôles.

Avant de procéder à la stabilisation des systèmes dynamiques, on a d'abord fait une synthèse sur la stabilité des systèmes dynamiques en se basant sur la méthode de Lyapounov et sur le critère de Routh.

La commande LQ stabilise les systèmes linéaires par retour d'état. Cette commande LQ est calculée au moyen de l'équation de Hamilton, et ce, en introduisant la règle de Bryson qui choisit les matrices de pondération et en calculant la solution de l'équation de Riccati pour déterminer la commande LQ.

La commande PID par placement des pôles stabilise les systèmes linéaires par retour d'état. Le choix des coefficients K_p , K_i et K_d influe sur les caractéristiques de réponse du système.

Dans le cas des systèmes non linéaires, nous avons appliqué la linéarisation qui a permis d'obtenir un modèle linéaire. Par conséquent, la stabilisation d'un système non linéaire revient à stabiliser un autre système linéaire qui lui est proche.

On oriente actuellement nos recherches autour de trois axes :

- Les critères de stabilité pour les systèmes dynamiques commandés non stationnaires.
- Les commandes qui stabilisent par retour d'état les systèmes dynamiques commandés non stationnaires.
- Le développement d'outils formels et des algorithmes pour la linéarisation des systèmes dynamiques commandés non stationnaires au sens des moindres carrés.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] A. York James. An extension of Chetaev's instability theorem using invariant sets and an example, in Seminar of Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, 60, p. 100-106, 1968.
- [2] D. Arzelier. Représentation et analyse des systèmes linéaires. LAAS-CNRS, 2010.
- [3] D. Normand-Cyrot, Fossard. Systèmes non linéaires. Tome 2 : Stabilité-Stabilisation. Elsevier Masson, Paris, 1993.
- [4] D. Normand-Cyrot, Fossard. Systèmes non linéaires. Tome 3 : Commande. Elsevier Masson, Paris, 1993.
- [5] E.A. Barbashin, N.N. Krasovskii. On the stability of motion as a whole. Doklady Akademii Nauk SSSR 86 : 453-456, Russia, 1952.
- [6] E. Trélat. Contrôle optimal : théorie et applications. Vuibert, Paris, 2005.
- [7] F. Lahouazi. Mise en oeuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application à un pendule inversé. Mémoire de Magister en Automatique, UMMTO, Algérie, 2011.
- [8] F. Rotella, P. Borne. Théorie et pratique du calcul matriciel. Technp, Paris, 1995.
- [9] J.L. Massera. Contributions to Stability Theory. -Ann. of Math., 56, p. 182-206, 1956.
- [10] J.P. LaSalle, S. Lefschetz. Stability by Liapunov's Direct Method. Academic Press, New York, 1961.
- [11] J.P. LaSalle. Some extensions of Liapunov's second method. IRE Transactions on Circuit Theory, CT-7, pp. 520-527, New York, 1960.
- [12] J-M. Coron. Stabilisation des systèmes contrôlables et observables. Numdam, Tome 4,n°1,p.31-59, 1995.
- [13] K. Andrew. Standup and stabilization of the inverted pendulum. Massachusetts Institute of Technology, 1999.
- [14] K.H. Khalil. Non linear system. 3th edition, USA, 2004.

-
- [15] K. Dchich, A. Zaafouri. Stabilisation Quadratique de Systèmes Linéaires Incertains par Optimisation Convexe et Optimisation Non Convexe. Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis, Université de Tunis, 2012.
- [16] L.X. Wang. Stable and Optimal Fuzzy Control of Linear Systems. IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 6, n°1, pp. 137-143, 1998.
- [17] Lohmiller, W. and Slotine, J.J.E. Non linear process control using contraction theory. International Journal of control, 2000.
- [18] Lohmiller, W. and Slotine, J.J.E. Contraction analysis of non linear distributed systems. International Journal of control, 2005.
- [19] M. Ait Rami et L. El Ghaoui. LMI Optimization for Nonstandard Riccati Equations Arising in Stochastic Control. IEEE Transactions on Autom. Contr, vol. 41, n° 11, 1996.
- [20] M. Azi. Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière. Mémoire de Magister, Université de Béjaia, Algérie, 2010.
- [21] M. Azi and M.O. Bibi. Méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal avec une application financière. Actes de COSI'2011, 24-27 Avril 2011, Université de Guelma, Algérie, pp. 172-183.
- [22] M.O. Bibi. Optimization of a Linear Dynamic System with Double Terminal Constraint on the Trajectories. Optimization, 30 :359-366, 1994.
- [23] M.O. Bibi. Optimization of a Linear Dynamic System with Double Terminal Constraint on the Trajectories. Collected abstracts of the 16th IFIP-Conference on systems modelling and optimization, Compiègne, France, 1993.
- [24] M.O. Bibi. Méthode de Résolution d'un Problème Linéaire-Quadratique de Commande Optimale Multivariable. Actes du Premier Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur, 37 :97-102, 1987.
- [25] M.O. Bibi and S. Medjdoub. Optimal Control of a linear-quadratic Problem with free initial condition. 26th European Conference on Operational Research, Rome, Italy, July 01-04, 2013. Book of Abstracts, p.362.
- [26] M.O. Bibi. Optimal Control of a quadratic Problem with a piecewise-linear Entry. Actes de la 7^{ème} Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle (CIRO'10), du 24 au 27 Mai 2010, Université de Marrakech, Maroc, p.1-4.
- [27] M.O. Bibi. Cours de Post-Graduation sur la Programmation Quadratique Convexe. Université de Béjaia, 2010.
-

-
- [28] M.O. Bibi. Cours de Post-Graduation sur le Contrôle Optimal. Université de Béjaia, 2012.
- [29] M.O. Bibi and N. Khimoum. Primal-dual method for solving a linear-quadratic multivariate optimal control problem. Actes du 9ème Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information (COSI'2012), Université de Tlemcen, du 12 au 15 Mai 2012, pp.302-311.
- [30] M.O. Bibi and N. Khimoum. Solving a linear-quadratic multivariate optimal control problem. Proceedings of the second International Symposium on Operational Research (ISOR'11), May 30th- June 02th, 2011, USTHB, Algiers, Algeria, pp 86-88.
- [31] M. Bugeja. Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system. Eurocon Ljubljana, Slovenia, 2003.
- [32] M.C.M. Teixeira, S.H. Zak. Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models. IEEE trans. on Fuzzy Systems, vol. 7, n° 2, pp.133-142, 1999.
- [33] N.N. Krasovskii. Problems of the Theory of Stability of Motion. Russian, 1959. English translation : Stanford University Press, Stanford, CA, 1963.
- [34] N. Piskounov. Calcul différentiel et integral. Tome2, Mir, 1977.
- [35] N. Rouche, J. Mawhin. Equations différentielles ordinaires, Tome 1 : Théorie générale. Masson, Paris, 1973.
- [36] P. Prouvost. Automatique : Contrôle et régulation. Dunod, Paris, 2010.
- [37] R. Gabassov, F.M. Kirillova and E.A. Ruzhitskaya. Design of feedback for systems Executing a Given Motion. Automation and Remote Control, 64(8) p.p.1225-1236, 2003.
- [38] Steven, A.P.Quintera Controlling the inverted Pendulum. Departement of Electrical and Computer Engineering, University of California, Santa Barbara 1999.
- [39] S. Hammami. Sur la stabilisation de systèmes dynamiques continus non linéaires exploitant les matrices de formes en flèche. Thèse de Doctorat, Université de Tunis, El Manar, 2009.
- [40] S. Medjdoub. Contrôle Optimal d'un Système Dynamique Linéaire avec Coût Quadratique et Etat Initial Libre. Mémoire de Magister, Université de Béjaia, Algérie, 2012.
-

- [41] T. Benouaz. Lyapounov Function Generated by Least Square Approximation. Deuxième Conférence Maghrébine sur l'Automatique, 3-5 December, Vol.1 pp.73-75, Tlemcen, Algeria, 1996.
- [42] U. Boscain, B. Piccoli. Optimal synthesis for control systems on 2-D manifolds. *Mathématiques et Applications*, vol. 43, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [43] W-J. Mao. An LMI approach to D -stability and D -stabilization of linear discrete singular systems with state delay. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 1694-1704, 2011.
- [44] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, 1967.
- [45] Y. Granjon. *Automatique : Systèmes linéaires, non-linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*. Dunod, Paris, 2008.

Résumé

Après un rappel sur la stabilité des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, on étudie dans ce mémoire deux types de commande pour stabiliser les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires par retour d'état.

Pour stabiliser un système linéaire, on utilise la commande optimale qui minimise la fonction de coût (minimisation de l'énergie), ou une autre commande PID par placement des pôles. Cette dernière améliore le dépassement du système et le temps de réponse, mais elle ignore le coût énergétique qui peut causer un déficit à l'actionnaire.

Pour stabiliser un système non linéaire, on utilise la linéarisation autour du point d'équilibre qui nous donne un système linéaire et auquel nous appliquons les méthodes précédentes.

Mots Clés : Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, Stabilité, Commande, Retour d'état, Stabilisation.

Abstract

After a brief retrieval on the stability of linear and nonlinear dynamical systems, we study in this thesis two types of control to stabilize both linear and nonlinear dynamical systems.

To stabilize a linear system, we use the optimal control by state feedback which minimizes the cost function (minimization of the energy), or another PID control by pole placement. The latter improves response time specifications, but it ignores the energetic cost, causing to the actuators to break down.

To stabilize a nonlinear system, the linearization around the equilibrium point gives us a linear system for which we use previous control methods.

Keywords : Linear and nonlinear dynamical systems, Stability, control, State Feedback, Stabilization.

ملخص

بعد تطرقنا لدراسة استقرار الأنظمة الديناميكية الخطية و الغير خطية، قمنا بدراسة نوعين من التحكم من أجل إستقرار الأنظمة الديناميكية الخطية و الغير خطية بواسطة رجوع الحالة.

من أجل إستقرارية الأنظمة الديناميكية الخطية إستعملنا التحكم الأمثل الذي يساعد في إقتصاد الطاقة، وكذلك التحكم PID الذي يحسن الخصائص المميزة للنظام الديناميكي.

من أجل إستقرارية الأنظمة الديناميكية الغير الخطية إستعملنا التقريب الذي يعطي لنا نظام ديناميكي خطي يمكن التحكم فيه.

الكلمات الدلالية : الأنظمة الديناميكية الخطية و الغير خطية، الإستقرار، التحكم، رجوع الحالة، الإستقرارية.