

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderahmane Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur  
Département de Recherche Opérationnelle

# *MÉMOIRE DE MAGISTER*

En

Mathématiques Appliquées

Option :

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

*Thème :*

*Méthode adaptée pour la résolution des  
problèmes de programmation linéaire multiobjectifs*

Présenté par :

MERNACHE Taous

Devant le jury composé de :

<b>Président</b>	M <sup>r</sup>	Djamil	AÏSSANI	Professeur	Université de Béjaïa
<b>Rapporteur</b>	M <sup>r</sup>	Mohand Ouamer	BIBI	Professeur	Université de Béjaïa
<b>Examineur</b>	M <sup>r</sup>	Mohamed Saïd	RADJEF	Professeur	Université de Béjaïa
<b>Examineur</b>	M <sup>r</sup>	Abdelhafid	BERRACHEDI	Professeur	USTHB, Alger

Béjaïa, 2007

# Remerciements

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude au professeur M. O. Bibi pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la direction du présent mémoire. Je le remercie pour ses précieux conseils et orientations.

Je suis heureuse de pouvoir remercier Mr. D. Aissani pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Toute ma gratitude va également à Messieurs : Mr. M. S. Radjef et Mr. A. Berrachedi pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie tous mes collègues pour leurs aides et soutiens et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragée et soutenue.

Je dédie ce modeste travail :  
A mes très chers parents.  
A mes soeurs Challa, Karima et Noura.  
A mes frères Nadjim, Adel et Hamza.  
A mon futur mari Farid.  
A toute ma famille et ma belle famille.

# Table des matières

Introduction générale	1
<b>1 Rappels sur l’algèbre linéaire et l’analyse convexe</b>	<b>4</b>
1.1 Algèbre linéaire . . . . .	4
1.1.1 Espace vectoriel . . . . .	4
1.1.2 Indépendance linéaire . . . . .	6
1.1.3 Matrices . . . . .	6
1.2 Analyse convexe . . . . .	7
1.2.1 Ensembles convexes . . . . .	10
1.2.2 Fonctions convexes . . . . .	13
1.3 Cônes et leurs propriétés . . . . .	13
1.3.1 Propriété des cônes convexes . . . . .	14
1.3.2 Cônes polyédriques convexes . . . . .	15
1.3.3 Générateurs d’un cône . . . . .	15
1.3.4 La dimension d’un cône . . . . .	16
1.3.5 Cônes convexes usuels . . . . .	18
1.4 Séparation des ensembles convexes . . . . .	18
1.4.1 Séparation propre . . . . .	20
1.4.2 Séparation forte . . . . .	21
1.5 Théorèmes d’alternatives et différentes inégalités . . . . .	22
<b>2 Méthode adaptée de programmation linéaire monocritère</b>	<b>25</b>
2.1 Position du problème . . . . .	25
2.2 Formule d’accroissement de la fonction objectif . . . . .	26
2.2.1 Critère d’optimalité . . . . .	28

2.2.2	Estimation de suboptimalité . . . . .	30
2.3	Plan dual de support (non basique) . . . . .	31
2.3.1	Définitions . . . . .	31
2.4	Accroissement de la fonction duale et critère d'optimalité . . . . .	32
2.5	Méthode de résolution . . . . .	39
2.5.1	Construction d'une direction d'amélioration adaptée . . . . .	39
2.5.2	Changement de plan : . . . . .	40
2.5.3	Changement de support . . . . .	41
2.6	Algorithme de résolution . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Programmation linéaire multicritère à variables simples</b>	<b>50</b>
3.1	Problèmes d'optimisation multicritère . . . . .	50
3.2	Concepts de base . . . . .	52
3.3	Les concepts d'optimalité . . . . .	53
3.3.1	Optimalité de Pareto (efficacité) . . . . .	53
3.3.2	Optimalité de Slater (efficacité faible) . . . . .	57
3.4	Pondération des fonctions objectifs . . . . .	59
3.5	Génération des solutions efficaces . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Programmation linéaire multicritère à variables bornées</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Formule d'accroissement de la fonction objectif . . . . .	66
4.3	Les solutions efficaces et leurs propriétés . . . . .	68
4.3.1	Recherche d'un point extrême efficace initial . . . . .	68
4.3.2	Propriétés des solutions efficaces . . . . .	69
4.4	Les solutions $\epsilon$ -efficaces d'un problème de P.L.M.O . . . . .	77
4.5	Recherche d'une solution efficace ou $\epsilon$ -efficace . . . . .	81
4.6	Exemple Numérique . . . . .	83
	<b>Conclusion générale</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

# Introduction générale

Résoudre un problème d'optimisation consiste à trouver la ou les meilleures solutions vérifiant un ensemble de contraintes et d'objectifs définis par l'utilisateur. Pour déterminer si une solution est meilleure qu'une autre, on se sert alors d'un critère de comparaison. Ainsi, la meilleure solution, appelée aussi solution optimale, est celle qui obtient la meilleure valuation au regard du critère défini.

Lorsqu'un seul critère est donné, l'optimum recherché est clairement défini. Mais la plupart des problèmes qui se posent dans la pratique comportent plusieurs critères devant être optimisés simultanément. La solution idéale, ou celle qui optimise tous les critères à la fois, n'existe pas toujours à cause de situations conflictuelles et contradictoires existant entre les objectifs à atteindre. Le concept de solution optimale devient alors plus difficile à définir. Dans ce cas, la solution optimale cherchée n'est plus un point, mais un ensemble de compromis. Résoudre un problème comprenant plusieurs critères, appelé problème multiobjectif ( multicritère ), consiste donc à trouver le meilleur ensemble de solutions de compromis.

Les origines de l'optimisation multicritère remontent au développement de la théorie de l'utilité et du bien-être et, plus concrètement, aux travaux de Pareto et d'Edgeworth. Ce dernier dans "Mathematical Psychics" (1881) a étudié le problème d'échange de marchandises dans une économie sans production. Pareto, dans ses travaux publiés en 1896 [62] et 1906, a développé le modèle de l'équilibre général introduit par Walras, et a prouvé l'équivalence entre l'équilibre optimal et l'optimisation multicritère. Kuhn et Tucker (1950) sont les premiers à traiter formellement des problèmes d'optimisation multicritère et ont établi des conditions nécessaires d'optimalité. Les résultats de Kuhn et Tucker ont été généralisés par plusieurs auteurs. Dans le travail de Y. Sawaragi, H. Nakayama et T. Tanino [71] on peut trouver différents concepts d'optimalité et techniques de résolution. En 1974, Zeleny [89] a traité des problèmes d'optimisation multicritère dans le cas linéaire.

Depuis une trentaine d'années, le domaine de l'optimisation multicritère connaît une évolution importante. Cette évolution s'est traduite par le développement d'un grand nombre de méthodes qui sont généralement regroupées en deux classes. La première classe est constituée des méthodes qui utilisent des connaissances du problème pour fixer des préférences sur les critères et ainsi contourner l'aspect multicritère du problème ; c'est un processus interactif de décision [81]. La seconde classe est constituée des méthodes, dites classiques, qui mettent tous les critères au même niveau d'importance, mais là aussi il existe plusieurs façons de réaliser une telle opération. Plusieurs ouvrages ou articles de synthèse ont été rédigés et peuvent être consultés, notamment dans Ulungu, 1993 [78] ; Miettinen, 1999 [57] ; Ehrgott, 2005 [35] ; Srinivas et Deb, 1994 [73] ; Collette et Siarry, 2002 [23].

La multitude des méthodes d'optimisation multicritère est perçue comme une richesse incontestable dans ce domaine. Mais il est toujours difficile de choisir la méthode à appliquer face à une situation donnée.

Une solution optimale d'un problème de programmation multicritère correspond à un élément de l'espace des critères  $\mathbb{R}^k$ . Pour identifier les meilleurs compromis, il est alors vital de définir une relation d'ordre entre ces éléments. Ces relations d'ordre, appelées relations de dominance, correspondent à différents concepts d'optimalité existant dans la littérature : optimalité de Pareto, optimalité de Slater, optimalité de Geoffrion [35]. Mais la plus célèbre et la plus utilisée est la dominance au sens de Pareto, qui nous donne des solutions dites efficaces. C'est cette relation de dominance que nous allons utiliser dans ce travail.

L'objectif de ce travail est le développement d'une nouvelle méthode pour la résolution des problèmes de programmation linéaire multiobjectif (P.L.M.O), dite "méthode adaptée pour la résolution des problèmes P.L.M.O", et ce, en s'inspirant de la méthode adaptée de programmation linéaire monocritère à variables bornées, développée par R. Gabassov et F. M. Kirillova dans les années 70.

Après avoir énoncé et démontré un théorème de subefficacité qui caractérise les solutions  $\epsilon$ -efficaces, où  $\epsilon$  est un réel positif, ou carrément efficace si  $\epsilon = 0$ , on peut alors intégrer dans l'algorithme de résolution un critère d'arrêt dès que la précision obtenue est jugée satisfaisante. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle manipule

les contraintes de bornes telles qu'elles se présentent sans chercher à les modifier. Ce qui engendre ainsi un gain considérable en espace mémoire et en temps d'exécution. De plus, elle permet d'avoir une solution efficace à  $\epsilon$  près, où  $\epsilon$  est un réel positif ou nul, choisi à l'avance.

- Ce mémoire comporte une introduction, quatre chapitres et une conclusion.
- Le premier chapitre est consacré à quelques rappels sur l'algèbre linéaire et l'analyse convexe, qui sont utiles pour la suite de ce travail.
  - Dans le deuxième chapitre, on présente la méthode de R. Gabassov et F. M. Kirillova pour la résolution d'un programme linéaire monocritère, dont les variables de décision sont bornées inférieurement et supérieurement.
  - Dans le troisième chapitre, nous présentons l'optimisation multicritère classique, ainsi que les différents concepts d'optimalité, leurs propriétés et leurs caractérisations.
  - Le dernier chapitre est basé sur les résultats de Dimkov [29] obtenus dans le cas multicritère pour un ensemble réalisable dont les variables sont seulement bornées inférieurement ( $x \geq 0$ ). Ici, on généralise ses résultats au cas de variables bornées. Après avoir donné certaines propriétés du cône polyédrique des poids optimaux et défini les solutions  $\epsilon$ -efficaces de Pareto, on arrive à formuler un théorème de caractérisation de ces solutions  $\epsilon$ -efficaces. Ainsi, à partir d'un théorème d'équivalence entre la programmation linéaire multicritère et monocritère, on peut inclure dans les méthodes de recherche des solutions efficaces, une procédure qui permet d'arrêter le processus lorsque une solution  $\epsilon$ -efficace est obtenue.
  - Enfin, on clôture ce mémoire par une conclusion générale et quelques directions de recherche.



# Chapitre 1

## Rappels sur l'algèbre linéaire et l'analyse convexe

Dans ce chapitre, nous rappellerons brièvement quelques notions sur l'algèbre linéaire et l'analyse convexe. Nous donnons en particulier la description assez précise des polyèdres convexes et décrivons l'opération de séparation des ensembles convexes, qui nous seront utiles par la suite dans ce mémoire.

### 1.1 Algèbre linéaire

#### 1.1.1 Espace vectoriel

Un vecteur (point) de  $\mathbb{R}^n$  est une collection ordonnée  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  de  $n$  réels  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , appelés composantes de  $x$ . Le nombre  $n$  est appelé dimension du vecteur.

– **Addition** : La somme de deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , défini par :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T,$$

où  $(^T)$  représente le symbole de la transposition.

– **Multiplication par un réel** : Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . La multiplication du vecteur  $x$  par un réel  $\alpha$  est aussi un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , défini comme suit :

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)^T.$$

La structure que nous obtenons, l'ensemble de tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  avec les deux opérations définies précédemment, s'appelle l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^n$   $n$ -dimensionnel.

Alors les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, & \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, & (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, & (\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x). \end{cases}$$

### Produit scalaire de deux vecteurs :

Le produit de deux vecteurs  $x, y$  de  $\mathbb{R}^n$  appelé produit scalaire et noté  $\langle x, y \rangle$ , est un nombre réel défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

## Notation

Les relations usuelles  $=, >, \geq$  sont insuffisantes pour comparer les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Nous adapterons donc ces notations pour permettre de prendre en compte tous les cas de figures rencontrés lors de la comparaisons de deux vecteurs.

**Définition 1.1.** Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de même dimension  $k$ . On définit alors les relations d'ordre suivantes :

$$x > y \iff x_i > y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k;$$

$$x \geq y \iff \begin{cases} x_i \geq y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k, \\ \text{et} \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, k\} : x_j > y_j; \end{cases}$$

$$x \geq y \iff x_i \geq y_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Dans le cas où  $k = 1$  on aura :

$$\begin{cases} x > y \iff x > y; \\ x \geq y \iff x > y; \\ x \geq y \iff x \geq y. \end{cases}$$

Définissons maintenant les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^k$  comme suit :

1.  $\mathbb{R}_{\geq}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : x \geq 0\}$ , orthant non-négatif de  $\mathbb{R}^k$  ;
2.  $\mathbb{R}_{>}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : x \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq}^k \setminus \{0\}$  ;
3.  $\mathbb{R}_{>}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : x > 0\}$ , orthant positif de  $\mathbb{R}^k$ .

Si  $k = 1$ , on aura  $\mathbb{R}_{\geq} = \mathbb{R}_{>}$ .

**Définition 1.2.** ( Sous-espace linéaire)

Un sous-ensemble  $L$  non vide de  $\mathbb{R}^n$  est appelé sous-espace linéaire de  $\mathbb{R}^n$  s'il satisfait aux conditions de stabilité linéaires suivantes :

$$x + y \in L,$$

$$\alpha x \in L,$$

pour tout  $x, y \in L$  et pour tout scalaire  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### 1.1.2 Indépendance linéaire

Soient  $p$  vecteurs  $x^1, x^2, \dots, x^p$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ . On dit que le vecteur

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p$$

est une combinaison linéaire des vecteurs  $x^1, x^2, \dots, x^p$ .

Les vecteurs  $x^1, x^2, \dots, x^p$  sont dits linéairement indépendants si toute combinaison linéaire nulle implique que tous les coefficients sont nuls ; autrement dit :

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

Dans le cas contraire, les vecteurs  $x^1, x^2, \dots, x^p$  sont dits dépendants ou liés.

### 1.1.3 Matrices

**Définition 1.3.** Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Une matrice d'ordre  $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  est un tableau ayant  $m$  lignes et  $n$  colonnes et représenté sous la forme suivante :

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

où  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  et  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  représentent respectivement l'ensemble des indices des lignes et des colonnes de  $A$ . Si  $n = m$ , alors la matrice  $A$  est dite carrée. Pour

les calculs pratiques, la matrice  $A$  se note aussi

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_i^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix},$$

où

$$a_j = A(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

est un vecteur-colonne de dimension  $m$  et qui est considéré comme une matrice d'ordre  $(m \times 1)$ ,  $A_i^T = A(i, J) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  est un vecteur-ligne de dimension  $n$ ; il peut être considéré comme une matrice d'ordre  $(1 \times n)$ .

Par la suite, un vecteur, noté  $x = x(J) = (x_j, j \in J)$ , est considéré comme un vecteur colonne. Son vecteur ligne correspondant sera toujours noté  $x^T$ .

Le produit matriciel entre deux vecteurs  $x^T$  et  $y$  est le scalaire donné par  $x^T y$ . Ainsi, on a

$$x^T y = \langle x, y \rangle.$$

La matrice transposée de  $A$  sera notée :

$$A^T = A^T(J, I) = (a_{ji}, j \in J, i \in I).$$

## 1.2 Analyse convexe

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni d'une norme euclidienne  $\|\cdot\|$ , définie par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Rappelons qu'une norme sur  $\mathbb{R}^n$  est une application définie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^+$ , où pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on lui associe  $\|x\| \in \mathbb{R}^+$ , vérifiant les axiomes suivants :

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Définition 1.4. Boule ouverte**

Soient  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  et un nombre réel  $r > 0$ . L'ensemble

$$B_r(x^0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| < r \},$$

est appelé boule ouverte de centre  $x^0$  et de rayon  $r$ .

**Définition 1.5. Point intérieur**

Un vecteur  $x \in S \subset \mathbb{R}^n$  est appelé point intérieur de  $S$ , s'il existe un nombre réel  $\epsilon > 0$ , tel que :  $B_\epsilon(x) \subset S$ .

**Définition 1.6. Point adhérent**

Un vecteur  $x \in S \subset \mathbb{R}^n$  est un point adhérent de  $S$ , si pour tout nombre réel  $\epsilon > 0$ , on a  $B_\epsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ .

**Définition 1.7. frontière d'un ensemble**

Soit  $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ . Le point  $x$  est un point-frontière de  $S$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , on a

$$B_\epsilon(x) \cap S \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B_\epsilon(x) \cap C_{\mathbb{R}^n} S \neq \emptyset,$$

où  $C_{\mathbb{R}^n} S = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin S\}$  est le complémentaire de  $S$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

L'ensemble des points-frontière de  $S$ , noté  $\partial S$ , est appelé frontière de l'ensemble  $S$ .

**Définition 1.8. Ensemble ouvert**

Un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est dit ouvert, si tout point de  $S$  est un point intérieur.

**Définition 1.9. Ensemble fermé**

Un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est fermé, si son complémentaire  $C_{\mathbb{R}^n} S$  est un ensemble ouvert.

**Définition 1.10. Intérieur d'un ensemble**

L'intérieur de l'ensemble  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , noté  $\text{int}(S)$ , est l'ensemble des points intérieurs de  $S$  (c'est le plus grand ouvert inclus dans  $S$ ).

Évidemment on a  $\text{int}(S) \subset S$ . De plus, si  $S$  est ouvert, alors  $S = \text{int}(S)$ .

**Définition 1.11. Fermeture ou adhérence d'un ensemble**

La fermeture de l'ensemble  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , notée  $\bar{S}$ , est l'ensemble de ses points adhérents. Elle

est l'intersection de tous les ensembles fermés contenant  $S$  (c'est le plus petit fermé qui contient  $S$ ).

Évidemment, on a  $S \subset \overline{S}$  et si  $S$  est fermé, alors  $S = \overline{S}$ .

**Propriété 1.1.**

1. Toute union d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
2. Toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
3.  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$  sont des ensembles ouverts.

En utilisant la définition d'un ensemble fermé, les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la propriété 1.1.

**Propriété 1.2.**

1. Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé.
2. Toute union finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.
3.  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$  sont des ensembles fermés.

**Exemple 1.1.**

Soient la matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et un vecteur  $b \in \mathbb{R}^m$ .

1. Les ensembles suivants :  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  et  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$  sont des ensembles fermés dans  $\mathbb{R}^n$ .
2. L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax < b\}$  est un ensemble ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ .
3. L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  n'est ni fermé, ni ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.12. Ensemble borné**

Un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est borné, s'il existe un réel  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in S$ , on ait

$$\|x\| \leq M.$$

**Définition 1.13. Ensemble compact**

Un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est compact s'il est fermé et borné.

**Corollaire 1.1.** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , l'un fermé et l'autre compact.

Alors la somme

$$S = S_1 + S_2 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + y, \quad x \in S_1 \text{ et } y \in S_2\}$$

est un ensemble fermé.

### 1.2.1 Ensembles convexes

La convexité joue un rôle essentiel dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil important pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité.

**Définition 1.14.** Un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe si :

$$\forall x, y \in S, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

Autrement dit, un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est convexe, si tout segment défini par deux points quelconques de  $S$  appartient à  $S$  :

$$\forall x^1, x^2 \in S \implies [x^1, x^2] \subset S,$$

où

$$[x^1, x^2] = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \quad \lambda \in [0, 1]\}.$$

On dira qu'un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  est une combinaison linéaire convexe de  $k$  vecteurs  $x^i$  de  $\mathbb{R}^n$  si

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Comme exemple, l'orthant positif de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble convexe .

Nous conviendrons de dire que l'ensemble vide est convexe.

Les propositions suivantes résument les propriétés élémentaires des ensembles convexes.

**Proposition 1.1.** (*Caractérisation*)

*Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est convexe si toute combinaison convexe finie d'éléments  $x^i$  de  $S$  appartient à  $S$ .*

**Proposition 1.2.**

*Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$  :*

1. *L'ensemble  $\alpha S_1 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha x, x \in S_1\}$  est convexe pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*
2. *L'ensemble  $S = S_1 + S_2 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + y, x \in S_1 \text{ et } y \in S_2\}$  est convexe.*
3. *L'ensemble  $S = \alpha S_1 + \beta S_2$  est un ensemble convexe pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .*
4. *L'image directe et l'image inverse d'un sous-ensemble convexe par une application linéaire sont convexes.*

5. Toute intersection d'ensembles convexes est convexe.

6. Tout produit cartésien d'ensembles convexes est convexe.

**Définition 1.15.** On appelle enveloppe convexe d'un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$ , notée  $co(S)$ , l'intersection de tous les ensembles convexes contenant  $S$ . L'enveloppe convexe  $co(S)$  est alors le plus petit ensemble convexe qui contient  $S$ .

**Corollaire 1.2.** Un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est convexe si et seulement si  $S = co(S)$ .

**Définition 1.16. ( Polyèdre convexe )**

On appelle polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^n$  un ensemble de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice d'ordre  $(m \times n)$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ .

L'inégalité  $Ax \leq b$  se comprend composante par composante :  $A_i^T x \leq b_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , où  $A_i^T$  représente la  $i^{\text{ième}}$  ligne de la matrice  $A$ .

Géométriquement, un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^n$  est donc l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de  $\mathbb{R}^n$ .

Si un ensemble se présente avec des égalités linéaires  $Ax = b$ , on pourra se ramener à la forme (1.1) en les remplaçant par les deux inégalités  $Ax \leq b$  et  $-Ax \leq -b$ .

**Définition 1.17. (Points extrêmes)** Soit  $S$  un ensemble convexe. Un point  $x$  de  $S$  est dit point extrême (ou sommet) de  $S$  s'il ne peut être écrit sous forme de combinaison convexe de deux éléments différents de  $S$  :

$$\forall x^1, x^2 \in S, \forall \lambda \in ]0, 1[ : x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \implies x = x_1 = x_2.$$

On note l'ensemble des points extrêmes d'un ensemble  $S$  par  $ext(S)$ . Nécessairement,

$$ext(S) \subset \partial(S).$$

Tout point d'un convexe compact peut être représenté par une combinaison convexe de ses points extrêmes. Une telle représentation n'est pas possible avec un convexe non borné. C'est pourquoi, dans le cas de convexes non bornés, il est nécessaire d'introduire un nouveau concept pour pouvoir représenter ses éléments. Il s'agit de la notion de directions extrémales.



**Définition 1.18.** Soit  $S$  un polyèdre de  $\mathbb{R}^n$ . Un vecteur  $d \neq 0$  ( $d \in \mathbb{R}^n$ ) est appelé direction de  $S$  si :

$$\forall x \in S, \quad x + \alpha d \in S \quad \text{pour tout réel } \alpha \geq 0.$$

Deux directions  $d^1$  et  $d^2$  de  $S$  sont dites distinctes si  $d^1 \neq \alpha d^2$ ,  $\forall \alpha > 0$ .

Une direction  $d$  de  $S$  est dite extrémale si elle n'est pas combinaison linéaire positive de deux directions distinctes, c'est-à-dire si :

$$d = \alpha_1 d^1 + \alpha_2 d^2, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0 \implies d^1 = \alpha d^2 \text{ pour un } \alpha > 0.$$

Notons que les points extrêmes et les directions extrémales caractérisent entièrement les polyèdres. En effet, étant donné un polyèdre  $P$  de la forme  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ , alors tout élément de  $P$  s'écrit comme une combinaison convexe de ses points extrêmes plus éventuellement une combinaison non négative de ses directions extrémales. Ce résultat est fondamental pour plusieurs procédures de programmation linéaire et non linéaire.

**Propriété 1.3.** [52]

- *Tout polyèdre non vide  $P$  possède au moins un point extrême.*
- *Si  $P$  est non borné, il admet au moins une direction extrémale.*
- *Si  $P$  est borné, il est alors appelé polytope et ne possède aucune direction extrémale.*

**Définition 1.19.** ( **Face d'un polyèdre convexe** )

Soient  $S$  un polyèdre convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $F$  une partie convexe de  $S$ . Alors,  $F$  est appelée face ( ou partie extrémale de  $S$  ) si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in S, \quad x \neq y, \quad [x, y] \cap F \neq \emptyset \implies [x, y] \subset F.$$

On rappelle qu'une arête d'un convexe est une face de dimension 1 et qu'un point extrême (sommet) est une face de dimension 0.

La figure (1.1) montre les différents types de faces d'un polyèdre convexe dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Propriété 1.4.** [52]

- *Une face  $F$  d'un polyèdre est un polyèdre.*
- *Le nombre de faces d'un polyèdre est fini.*

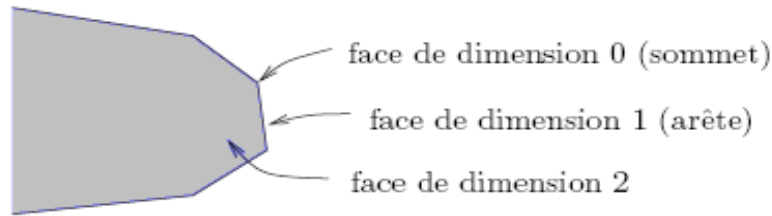


FIG. 1.1 – Faces d'un polyèdre convexe

## 1.2.2 Fonctions convexes

### Définition 1.20.

Soit  $S$  un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Alors une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si,  $\forall x^1$  et  $x^2 \in S$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , l'inégalité suivante a lieu

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda) f(x^2).$$

D'autre part, une fonction  $f$  est dite concave si  $(-f)$  est convexe, autrement dit :

$$\forall x^1, x^2 \in S, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2) \geq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda) f(x^2).$$

### Conséquence 1.1.

- Toute fonction linéaire est à la fois convexe et concave.
- La somme de fonctions convexes est une fonction convexe.
- Une fonction vectorielle  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ , où  $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ , est convexe si chacune des composantes  $f_i$  est convexe.

## 1.3 Cônes et leurs propriétés

### Définition 1.21.

Un sous-ensemble non vide  $K \subset \mathbb{R}^n$  est appelé cône s'il est stable pour la multiplication par un scalaire positif, c'est-à-dire :

$$\forall x \in K, \quad \alpha x \in K, \quad \forall \alpha > 0. \quad (1.2)$$

**Remarque 1.1.** Pour certains auteurs, un cône doit contenir l'origine.

**Définition 1.22.** Un cône  $K$  est dit :

- Non trivial si  $K \neq \{0\}$  et  $K \neq \mathbb{R}^n$ .
- Convexe, si  $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in K, \quad \forall x^1, x^2 \in K, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ .

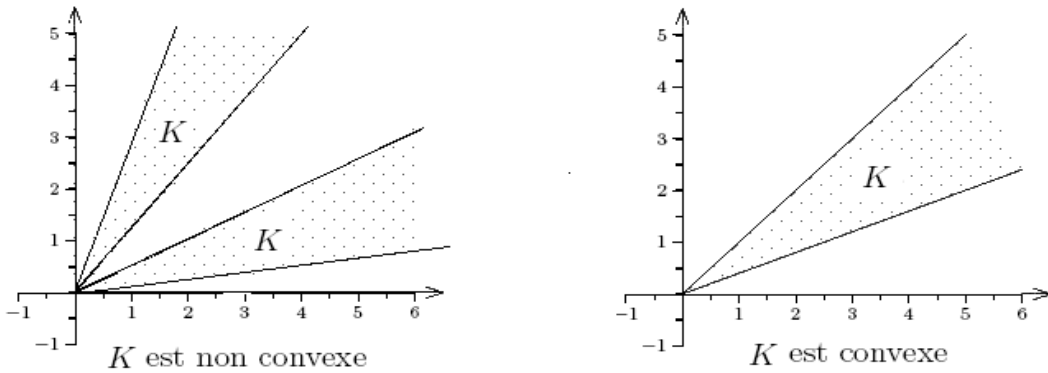


FIG. 1.2 – Exemple de cônes dans  $\mathbb{R}^2$

**Propriété 1.5.**

- Toute intersection de cônes est un cône.
- Tout produit cartésien de cônes est un cône.
- Tous les cônes sont illimités (non bornés).

### 1.3.1 Propriété des cônes convexes

**Propriété 1.6.**

- Toute intersection de cônes convexes est un cône convexe.
- Tout produit cartésien de cônes convexes est un cône convexe.

**Théorème 1.1.** Caractérisation [52]

Soit  $K$  un cône de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $K$  est convexe si et seulement si  $K + K \subseteq K$ .

**Preuve. Condition nécessaire :**

Supposons  $K$  est convexe. Alors

$$\forall x, y \in K, \quad x + y = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \in K \quad \implies \quad K + K \subset K.$$

**Condition suffisante :**

Supposons  $K + K \subset K$ . Alors

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \lambda \in ]0, 1[ : \quad (1 - \lambda)x \in K, \quad \lambda y \in K;$$

d'où

$$z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in K + K \subseteq K.$$

Pour  $\lambda = 0$  on a  $z = x \in K$  et pour  $\lambda = 1$  on a  $z = y \in K$ .  $\square$

**Remarque 1.2.** Si  $K$  est un cône, alors  $K$  est convexe si

$$\forall x^1, x^2 \in K, \quad x^1 + x^2 \in K.$$

Soit  $S$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . L'intersection de tous les cônes (convexes) contenant  $S$  est un cône (convexe) appelé enveloppe conique (convexe) de  $S$ . On la note

$$\text{cone}S = \bigcap \{K : K \text{ est un cône convexe contenant } S\}.$$

Évidemment, si l'ensemble  $S$  est un cône, alors  $\text{cone}S = S$ . L'enveloppe conique  $\text{cone}S$  est aussi appelée cône engendré par l'ensemble  $S$ .

**Proposition 1.3.** *Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $S$  est un cône convexe si et seulement si, il contient toutes les combinaisons linéaires non négatives de ses éléments.*

### 1.3.2 Cônes polyédriques convexes

Un cône polyédrique convexe est un polyèdre de la forme :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}. \quad (1.3)$$

Les cônes polyédriques jouent un rôle important dans la théorie de la programmation linéaire.

### 1.3.3 Générateurs d'un cône

Soit dans  $\mathbb{R}^n$  un ensemble de  $k$  vecteurs  $W = \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires non négatives des vecteurs de  $W$

$$K = \left\{v \in \mathbb{R}^n : v = \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i v^i, \quad \alpha_i \geq 0\right\}$$

est un cône convexe engendré par l'ensemble  $W$ ; les vecteurs  $v^i$  sont alors dits vecteurs générateurs de  $K$ .

- Un vecteur  $v^r \in \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$  est dit vecteur non essentiel si sans ce vecteur  $v^r$ , les autres vecteurs générateurs  $v^i$  peuvent toujours générer l'ensemble  $K$ .
- Un générateur non essentiel est un vecteur qui peut être exprimé comme combinaison linéaire non négative des autres générateurs, et ce, contrairement à un générateur essentiel.
- Dans un cône polyédrique convexe, le nombre de ses générateurs essentiels est fini.

Donnons les définitions suivantes :

- Un générateur essentiel est dit vecteur extrême.
- La demi-droite engendrée par les multiplications positives d'un vecteur extrême est appelée rayon extrême du cône.
- Le plus petit nombre de générateurs essentiels ( vecteurs extrêmes ) qui engendrent un cône est appelé le nombre minimal de générateurs de ce cône.

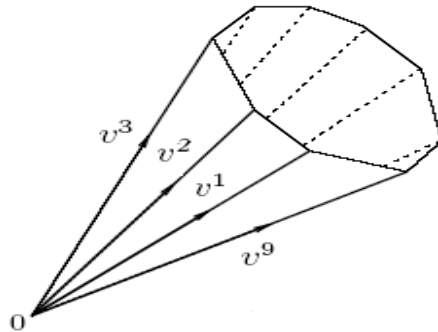


FIG. 1.3 – Cône polyédrique convexe engendré par les combinaisons linéaires positives des vecteurs :  $v^1, v^2, \dots, v^9$ . Les demi-droites supportées par ces vecteurs constituent les rayons extrêmes du cône.

### 1.3.4 La dimension d'un cône

La dimension d'un cône  $K$  est donnée par le nombre de vecteurs linéairement indépendant dans  $K$ .

Pour déterminer la dimension d'un cône quelconque, il suffit de calculer le *rang* de la matrice dont les lignes ou bien les colonnes sont les générateurs du cône.

#### Exemple 1.2.

1. La dimension du cône singleton  $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$  égale à 0.

2. La dimension d'un cône convexe engendré par un ensemble de  $k$  vecteurs linéairement indépendants est égale à  $k$ .

Dans un cône convexe  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K \neq \emptyset$ , le nombre minimal de générateurs est supérieur ou égal à la dimension du cône.

**Exemple 1.3.** Dans la figure (1.4) nous voyons que chaque vecteur de l'ensemble générateur  $\{v^1, v^2, v^3, v^4\}$  est un vecteur extrême (vecteur essentiel), mais ceci ne signifie pas que les vecteurs de cet ensemble sont linéairement indépendants.

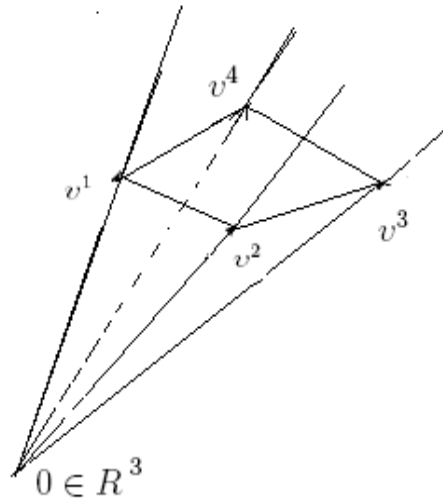


FIG. 1.4 – Cône polyédrique engendré par  $\{v^1, v^2, v^3, v^4\}$  dans  $\mathbb{R}^3$

**Exemple 1.4.**

Considérons le cône  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n$ . Ce cône n'admet pas de point extrême ni de rayon extrême. Les  $(n + 1)$  vecteurs suivants :

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{n+1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix},$$

constituent un ensemble minimal de générateurs de  $\mathbb{R}^n$ , car avec une combinaison linéaire non négative des vecteurs  $v^i$ , on peut atteindre tous les points de  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.3.5 Cônes convexes usuels

#### Cône dual (ou conjugué)

**Définition 1.23.** Soit  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle cône dual (ou conjugué) de  $K$  l'ensemble  $K^+$  défini par :

$$K^+ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in K\}.$$

Le cône bidual  $K^{++}$  de  $K$  est l'ensemble  $(K^+)^+$ .

**Lemme 1.1.** [52] Soit  $K$  un sous-ensemble quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $K^+$  est un cône convexe fermé.

**Théorème 1.2.** [52] Soit  $K$  un cône convexe fermé. Alors  $K^{++} = K$ .

On définit aussi le cône dual négatif  $K^-$ , parfois appelé cône polaire de  $K$ , comme l'opposé de son cône dual.

#### Cône polaire

**Définition 1.24.** Soit une partie  $K \subset \mathbb{R}^n$ . On appelle cône polaire de  $K$  et on le note  $K^-$ , l'ensemble

$$K^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in K\}.$$

## 1.4 Séparation des ensembles convexes

La séparation des ensembles convexes est un outil essentiel en analyse convexe. Supposons que nous ayons deux ensembles convexes dans  $\mathbb{R}^n$ . Quand pouvons-nous les séparer par un hyperplan de telle sorte que chacun des deux ensembles se trouve dans l'un des demi-espaces définis par l'hyperplan ?

**Définition 1.25.** Un hyperplan  $H$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble de dimension  $(n - 1)$  de la forme :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^n, \ a \neq 0, \ \text{et } \beta \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, nous pouvons associer à l'hyperplan  $H$  les demi-espaces fermés suivants :

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \beta\}, \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \beta\},$$

ainsi que les deux demi-espaces ouverts :

$$H^{++} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > \beta\}, \quad H^{--} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x < \beta\}.$$

Tous ces ensembles définis sont convexes.

On remarque que le demi-espace supérieur (ou inférieur) fermé est la fermeture du demi-espace ouvert correspondant, et  $H$  lui-même est la frontière de chaque un des quatre demi-espaces.

Il est évident que nos demi-espaces ouverts et  $H$  lui-même forment une partition de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\mathbb{R}^n = H^{--} \cup H^{++} \cup H.$$

Maintenant, définissons les deux différentes notions de séparation de deux ensembles convexes  $S_1$  et  $S_2$  par un hyperplan.

**Définition 1.26. (Séparation propre)**

On dit qu'un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}$  sépare proprement deux ensembles convexes non vides  $S_1$  et  $S_2$  si :

1. Les ensembles appartiennent chacun, à l'un des demi-espaces fermés  $H^+$  et  $H^-$  définis par  $H$  ;
2. Au moins, l'un des ensembles n'est pas inclus dans  $H$ .

Ainsi, nous disons qu'un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}$  sépare proprement deux ensembles non vides  $S_1$  et  $S_2$  si :

$$\forall x \in S_1, \quad \forall y \in S_2 \quad \implies \quad a^T x \geq \beta \geq a^T y.$$

**Exemple 1.5.**

1. L'hyperplan donné par  $x_2 - x_1 = 1$  dans  $\mathbb{R}^2$  sépare proprement les deux ensembles convexes polyédraux suivants :

$$S_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 3 \leq x_2 \leq 5\}, \quad S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq +1, x_2 = 0\}.$$

2. L'hyperplan  $x = 1$  dans  $\mathbb{R}$  sépare proprement les deux ensembles convexes suivants :

$$S_1 = \{x \leq 1\}, \quad S_2 = \{x \geq 1\}.$$



**Définition 1.27. (Séparation forte)**

Nous disons que deux ensembles non vides  $S_1$  et  $S_2$  de  $\mathbb{R}^n$  peuvent être séparés fortement, s'il existe un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}$ , tel que :

$$\forall x \in S_1, \forall y \in S_2 \implies a^T x > \beta > a^T y.$$

Il est ainsi clair que la séparation forte implique la séparation propre.

En revanche, il existe des exemples d'ensembles qui peuvent être séparés proprement, sans pouvoir être séparés fortement, par exemple :

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq \frac{1}{x_1}\} \text{ et } S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \leq 0\}.$$

On arrive maintenant à la question de savoir si deux ensembles convexes non vides  $S_1$  et  $S_2$  dans  $\mathbb{R}^n$  peuvent être séparés proprement ou fortement.

**1.4.1 Séparation propre**

La démonstration du théorème de la séparation propre se base sur le lemme suivant :

**Lemme 1.2.** *Soit  $S$  un ensemble convexe non vide dans  $\mathbb{R}^n$ . Si le vecteur nul  $0 \notin S$ , alors il existe un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n, a^T x = 0\}$ ,  $a \neq 0$ , qui sépare proprement  $S$  et  $0$ , c'est-à-dire*

$$\forall x \in S \implies a^T x \geq 0.$$

**Théorème 1.3.** *Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles convexes non vides disjoints de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n, a^T x = \beta\}$ ,  $a \neq 0$ , qui sépare proprement  $S_1$  et  $S_2$ , c'est-à-dire*

$$\exists a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, \exists \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in S_1, \forall y \in S_2 \implies a^T x \geq \beta \geq a^T y.$$

**Preuve.**

Soit  $S = S_1 - S_2 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x - y, x \in S_1, y \in S_2\}$ ; cet ensemble est convexe et  $0 \notin S$  car  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ .

D'après le lemme précédent 1.2, il existe un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n, a^T x = 0\}$ ,  $a \neq 0$ , tel que  $\forall z \in S \implies a^T z \geq 0$ . Ainsi, on a :

$$\forall x \in S_1, \forall y \in S_2, a^T(x - y) \geq 0 \implies a^T x \geq a^T y.$$

Par conséquent, on a

$$\beta_1 = \inf_{x \in S_1} a^T x \geq \sup_{y \in S_2} a^T y = \beta_2.$$

Posons  $\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ . Il s'ensuit que :

$$\forall x \in S_1, \quad a^T x \geq \beta_1 \text{ et } a^T x \geq \beta_2 \implies a^T x \geq \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \beta,$$

et

$$\forall y \in S_2, \quad a^T y \leq \beta_2 \text{ et } a^T y \leq \beta_1 \implies a^T y \leq \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \beta.$$

On aura alors

$$\forall x \in S_1, \forall y \in S_2, \quad a^T x \geq \beta \geq a^T y. \quad \square$$

### 1.4.2 Séparation forte

**Lemme 1.3.** *Soit  $S$  un ensemble non vide convexe et fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Si le vecteur nul  $0$  n'appartient pas à  $S$ , alors il existe un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}$ ,  $a \neq 0$ ,  $\beta > 0$ , qui sépare fortement  $S$  et  $0$ , c'est-à-dire*

$$\forall x \in S \implies a^T x > \beta > 0.$$

**Théorème 1.4.** *Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles non vides, convexes et disjoints de  $\mathbb{R}^n$ ,  $S_1$  étant compact et  $S_2$  fermé. Alors il existe un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n, a^T x = \beta\}$ ,  $a \neq 0$ , qui les sépare fortement, c'est-à-dire :*

$$\exists a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0; \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in S_1, \forall y \in S_2 \implies a^T x > \beta > a^T y.$$

**Preuve.**

Soit l'ensemble  $S = S_1 - S_2 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x - y, \quad x \in S_1, y \in S_2\}$ ; cet ensemble est convexe, fermé et ne contient pas le vecteur nul ( $0 \notin S$ ). D'après le lemme 1.3 ci-dessus, il existe alors un hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta'\}$ ,  $a \neq 0$ ,  $\beta' > 0$ , tel que :

$$\forall z \in S = S_1 - S_2, \quad a^T z > \beta' > 0,$$

c'est-à-dire,

$$\forall x \in S_1, \forall y \in S_2, \quad a^T(x - y) > \beta' > 0 \implies \begin{cases} a^T x > a^T y + \beta', \\ \beta' > 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$\beta_1 = \inf_{x \in S_1} a^T x \geq \sup_{y \in S_2} a^T y + \beta' > \sup_{y \in S_2} a^T y = \beta_2.$$

Posons  $\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ . Alors

$$\forall x \in S_1, \quad a^T x \geq \beta_1 \text{ et } a^T x > \beta_2 \implies a^T x > \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \beta,$$

et

$$\forall y \in S_2, \quad a^T y \leq \beta_2 \text{ et } a^T y < \beta_1 \implies a^T y < \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \beta.$$

On aura donc

$$\forall x \in S_1, \forall y \in S_2, \quad a^T x > \beta > a^T y. \quad \square$$

## 1.5 Théorèmes d'alternatives et différentes inégalités

**Définition 1.28.** Une matrice  $A$  est dite nonvacuous si elle contient au moins un élément. Une matrice  $A$  d'ordre  $m \times n$  avec  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$  est nonvacuous même si tous ses éléments  $a_{ij} = 0$ .

Pour démontrer les théorèmes d'alternatives qui suivent on aura besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.4.** [56] Soient  $A, B, C$ , et  $D$  des matrices respectivement d'ordre  $n_1 \times n$ ,  $n_2 \times n$ ,  $n_3 \times n$ ,  $n_4 \times n$ , avec  $A, B, C$  sont nonvacuous. Alors le système :

$$\begin{cases} Ax \geq 0 & Bx \geq 0 & Cx \geq 0 & Dx = 0, \\ A^T y^1 + B^T y^2 + C^T y^3 + D^T y^4 = 0, \\ x \in \mathbb{R}^n & y^1 \geq 0 & y^2 \geq 0 & y^3 \geq 0, \quad y^4 \in \mathbb{R}^{n_4}, \end{cases}$$

possède une solution  $(x, y^1, y^2, y^3, y^4) \in \mathbb{R}^{n+n_1+n_2+n_3+n_4}$  satisfaisant :

$$\begin{cases} Ax + y^1 > 0, \\ Bx + y^2 > 0, \\ Cx + y^3 > 0. \end{cases}$$

**Théorème 1.5.** [75] (**Motzkin**)

Soient  $A, C$ , et  $D$  des matrices respectivement d'ordre de  $n_1 \times n$ ,  $n_3 \times n$ , et  $n_4 \times n$ , où  $A$  est nonvacuous. Alors, soit le système :

$$(i) \quad Ax > 0, \quad Cx \geq 0, \quad Dx = 0,$$

admet une solution  $x \in \mathbb{R}^n$ , ou bien le système

$$(ii) \quad \begin{cases} A^T y^1 + C^T y^3 + D^T y^4 = 0, \\ y^1 \geq 0, \quad y^3 \geq 0, \quad y^4 \in \mathbb{R}^{n_4}, \end{cases}$$

admet une solution  $y = (y^1, y^3, y^4)$ ,  $y^1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y^3 \in \mathbb{R}^{n_3}$ ,  $y^4 \in \mathbb{R}^{n_4}$ , mais jamais les deux à la fois.

**Preuve.**

$$(i) \implies \text{non } (ii).$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  une solution de (i). Supposons que (ii) admet aussi une solution  $y = (y^1, y^3, y^4) \in \mathbb{R}^{n_1+n_3+n_4}$ . Puisque  $x^T D^T y^4 = 0$ ,  $x^T C^T y^3 \geq 0$ , et  $x^T A^T y^1 > 0$ , il s'ensuit que  $x^T A^T y^1 + x^T C^T y^3 + x^T D^T y^4 > 0$ . Contradiction avec la première égalité dans le système (ii).

$$\text{Non } (i) \implies (ii).$$

Supposons que (i) ne possède pas de solution. Soit alors le système suivant :

$$\begin{cases} Ax \geq 0, \quad Cx \geq 0, \quad Dx = 0, \\ A^T y^1 + C^T y^3 + D^T y^4 = 0, \\ y^1 \geq 0, \quad y^3 \geq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

D'après le lemme 1.4, le système (1.4) admet une solution  $(x, y^1, y^3)$  telle que :

$$\begin{cases} Ax + y^1 > 0, \\ Cx + y^3 > 0. \end{cases}$$

Puisque (i) ne possède pas de solution, alors forcément on a  $Ax \not\geq 0$ . Montrons que  $y^1 \geq 0$ .

En effet, il existe un indice  $i_0$  tel que  $A_{i_0}^T x = 0$ . Donc

$$A_{i_0}^T x + y_{i_0}^1 = y_{i_0}^1 > 0 \implies y^1 \geq 0.$$

Par conséquent le système (ii) admet une solution  $(y^1, y^3)$ .  $\square$

**Théorème 1.6.** [75](**Tucker**)

Soient  $B$ ,  $C$  et  $D$  des matrices respectivement d'ordre  $n_2 \times n$ ,  $n_3 \times n$  et  $n_4 \times n$ , où  $B$  est nonvacuous. Alors, soit le système :

$$(i) \quad Bx \geq 0, \quad Cx \geq 0, \quad Dx = 0,$$

admet une solution  $x \in \mathbb{R}^n$ , ou bien le système

$$(ii) \begin{cases} B^T y^2 + C^T y^3 + D^T y^4 = 0, \\ y^2 > 0, \quad y^3 \geq 0, \end{cases}$$

admet une solution  $y = (y^2, y^3, y^4) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3+n_4}$ , mais jamais les deux à la fois.

La démonstration de ce théorème est semblable à celle du théorème 1.5.

**Théorème 1.7.** [68] (*Fan-Glicksberg-Hoffman*)

Soit un ensemble convexe  $S \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$  une fonction concave dans  $S$ . Alors une et une seule de ces deux alternatives a lieu :

1. Le système  $f(x) > 0^{(k)}$  admet une solution  $x \in S$ .
2. Il existe  $y \geq 0^{(k)} : y^T f(x) \leq 0, \quad \forall x \in S$ .

Pour une référence au sujet de ces théorèmes d'alternatives, voir [56].

**Conclusion**

Dans ce chapitre, on a présenté quelques généralités sur l'algèbre linéaire et l'analyse convexe. Puis on a présenté les deux différentes notions de séparation de deux ensembles convexes et on a terminé par quelques théorèmes d'alternatives.

# Chapitre 2

## Méthode adaptée de programmation linéaire monocritère

Dans ce chapitre, on va présenter la méthode adaptée pour la résolution d'un problème de programmation linéaire monocritère à variables bornées, développée par R.Gabasso et F.M.Kirillova dans les années soixante-dix.

### 2.1 Position du problème

Considérons le problème (P) de programmation linéaire à variables bornées, s'écrivant sous la forme canonique suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} Z(x) = c^T x \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $A$  est une  $(m \times n)$ -matrice,  $\text{rang} A = m < n$ ;  $b$  est un  $m$ -vecteur;  $c, x, d^-$  et  $d^+$  sont des  $n$ -vecteurs. Notons

$I = \{1, 2, \dots, m\}$  : l'ensemble d'indices des lignes de  $A$ ,

$J = \{1, 2, \dots, n\}$  : l'ensemble d'indices des colonnes de  $A$ .

Donnons les définitions suivantes :

- Un vecteur  $x$  vérifiant les contraintes  $Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+$ , est une solution réalisable ( ou plan ) du problème (2.1). L'ensemble des solutions réalisables est alors donné par :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+\}.$$

- Un plan  $x^0$  est dit optimal si

$$Z(x^0) = c^T x^0 = \max_{x \in X} c^T x.$$

- Un plan  $x^\epsilon$  est appelé  $\epsilon$ -optimal ou suboptimal si :

$$Z(x^0) - Z(x^\epsilon) = c^T x^0 - c^T x^\epsilon \leq \epsilon,$$

où  $x^0$  est une solution optimale du problème (2.1) et  $\epsilon$  un nombre supérieur ou égal à zéro choisi à l'avance.

- Soit un sous-ensemble d'indices  $J_B \subset J$  tel que  $J = J_B \cup J_N$ ,  $J_B \cap J_N = \emptyset$ ,  $|J_B| = m$ . L'ensemble  $J_B$  est alors appelé support si :

$$\det(A_B) = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

- Le couple  $\{x, J_B\}$  formé du plan  $x$  et du support  $J_B$  est appelé plan de support. Un plan de support  $\{x, J_B\}$  est dit basique si

$$\forall j \in J_N, \quad x_j = d_j^- \vee d_j^+.$$

- Le plan de support  $\{x, J_B\}$  est non dégénéré si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_B.$$

- En vertu de la partition de  $J = J_B \cup J_N$ , on peut alors écrire et fractionner les vecteurs et les matrices de la manière suivante :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = (x_j, j \in J_B), \quad x_N = (x_j, j \in J_N);$$

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}, \quad c_B = (c_j, j \in J_B), \quad c_N = (c_j, j \in J_N);$$

$$A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a_j, j \in J), \quad a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ est la } j^{\text{ième}} \text{ colonne de}$$

la matrice  $A$ ;

$$A = A(I, J) = (A_B \mid A_N),$$

$$A_B = A(I, J_B), \quad A_N = A(I, J_N).$$

## 2.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit  $\{x, J_B\}$  un plan de support du problème (2.1). Considérons un autre plan quelconque  $\bar{x} = x + \Delta x$ . L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c^T \bar{x} - c^T x = c^T \Delta x. \quad (2.2)$$

Par ailleurs on a :

$$A\bar{x} = Ax = b \implies A(\bar{x} - x) = 0 \implies A\Delta x = 0.$$

Posons  $\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_N \end{pmatrix}$ , où

$$\Delta x_B = (\Delta x_j, \quad j \in J_B), \quad \Delta x_N = (\Delta x_j, \quad j \in J_N).$$

L'égalité  $A\Delta x = 0$  peut alors s'écrire :

$$A\Delta x = \sum_{j \in J} a_j \Delta x_j = A(I, J_B)\Delta x_B + A(I, J_N)\Delta x_N = 0.$$

C'est à dire :

$$A\Delta x = A_B\Delta x_B + A_N\Delta x_N = 0.$$

D'où

$$\Delta x_B = -A_B^{-1}A_N\Delta x_N. \quad (2.3)$$

Ainsi, l'accroissement (2.2) devient :

$$\Delta Z = c^T \Delta x = c_B^T \Delta x_B + c_N^T \Delta x_N = -c_B^T A_B^{-1} A_N \Delta x_N + c_N^T \Delta x_N.$$

Donc

$$\Delta Z = -(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T) \Delta x_N. \quad (2.4)$$

On définit le vecteur des potentiels  $u$  et le vecteur des estimations comme suit :

$$u = c_B^T A_B^{-1},$$

$$E^T = u^T A - c^T \iff E_j = u^T a_j - c_j, \quad j \in J,$$

où  $E^T = (E_B^T, E_N^T)$ , avec

$$\begin{aligned} E_B^T &= u^T A_B - c_B^T \\ &= c_B^T A_B^{-1} A_B - c_B^T \\ &= c_B^T I - c_B^T \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$E_N^T = u^T A_N - c_N = c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T.$$

Finalement, la formule d'accroissement (2.4) prend la forme finale suivante :

$$\Delta Z = - \sum_{j \in J_N} E_j (\bar{x}_j - x_j). \quad (2.5)$$



### 2.2.1 Critère d'optimalité

On a le théorème d'optimalité suivant :

**Théorème 2.1.** ( Critère d'optimalité )

Soit  $\{x, J_B\}$  un plan de support du problème (2.1). Alors les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{pour } x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & \text{pour } x_j = d_j^+, \\ E_j = 0, & \text{pour } d_j^- < x_j < d_j^+, \end{cases} \quad j \in J_N, \quad (2.6)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan de support  $\{x, J_B\}$ . Ces relations sont aussi nécessaires, si le plan de support est non-dégénéré.

**Remarque 2.1.** Si le plan de support  $\{x, J_B\}$  est basique, alors les relations d'optimalité sont :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{pour } x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & \text{pour } x_j = d_j^+, \end{cases} \quad j \in J_N.$$

**Preuve.**

**Condition suffisante**

Soit  $\{x, J_B\}$  un plan de support vérifiant les relations (2.6). Pour tout plan de support  $\bar{x}$  du problème (2.1), la formule d'accroissement (2.5) donne :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = \Delta Z = - \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - d_j^-) - \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - d_j^+).$$

Comme

$$d_j^- \leq \bar{x}_j \leq d_j^+ \implies \bar{x}_j - d_j^- \geq 0 \text{ et } \bar{x}_j - d_j^+ \leq 0,$$

on déduit alors :

$$Z(\bar{x}) \leq Z(x).$$

pour tout  $\bar{x}$  solution réalisable.

Par conséquent, le vecteur  $x$  est une solution optimale du problème (2.1).

**Condition Nécessaire**

Soit  $\{x, J_B\}$  un plan de support optimal non dégénéré du problème (2.1), et supposons

que les relations (2.6) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire qu'il existe au moins un indice  $j_0 \in J_N$  tel que :

$$E_{j_0} > 0 \text{ et } x_{j_0} > d_{j_0}^-, \text{ ou bien } E_{j_0} < 0 \text{ et } x_{j_0} < d_{j_0}^+.$$

On construit alors un autre plan  $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$ , où  $\theta$  est un nombre réel positif ou nul, et  $l = \{l_j, j \in J\}$  est un vecteur de direction que l'on construit comme suit :

$$\begin{cases} l_{j_0} = -\text{sign}E_{j_0}, \\ l_j = 0 & j \neq j_0, & j \in J_N; \\ l_B = l(J_B) = -A_B^{-1} A_N l_N = A_B^{-1} a_{j_0} \text{sign}E_{j_0}. \end{cases}$$

Le vecteur  $\bar{x}$  vérifie la contrainte principale  $A \bar{x} = b$ . Pour que  $\bar{x}$  soit un plan du problème (2.1), il doit en plus vérifier l'inégalité :

$$d^- \leq \bar{x} \leq d^+ \iff d^- \leq x + \theta l \leq d^+ \iff d^- - x \leq \theta l \leq d^+ - x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, & j \in J_B, \\ d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq -\theta \text{sign}E_{j_0} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Puisque le plan de support  $\{x, J_B\}$  est non dégénéré on a alors :

$$d_j^- - x_j < 0 < d_j^+ - x_j, \quad j \in J_B,$$

et

$$\begin{cases} d_{j_0}^- - x_{j_0} < 0 & \text{si } E_{j_0} > 0, \\ d_{j_0}^+ - x_{j_0} > 0 & \text{si } E_{j_0} < 0. \end{cases}$$

Pour un nombre  $\theta > 0$  assez petit les relations (2.7) seront alors vérifiées et le vecteur  $\bar{x}$  sera un plan du problème (2.1).

La formule d'accroissement (2.5) nous donne donc :

$$\Delta Z = - \sum_{j \in J_N} E_j (\bar{x}_j - x_j) = -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j = \theta E_{j_0} \text{sign}E_{j_0} = \theta |E_{j_0}| > 0.$$

On déduit que  $Z(\bar{x}) > Z(x)$ , mais ceci est en contradiction avec le fait que  $x$  est un plan optimal du problème (2.1).

Par conséquent, si  $\{x, J_B\}$  est un plan optimal du (2.1) non dégénéré, alors les relations (2.6) sont vérifiées.  $\square$

## 2.2.2 Estimation de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale  $Z(x^0)$  et une autre valeur  $Z(x)$  d'un plan de support quelconque  $\{x, J_B\}$ , on remplace dans la formule d'accroissement (2.5) le vecteur  $\bar{x}$  par  $x^0$  et on aura :

$$\begin{aligned} Z(x^0) - Z(x) &= - \sum_{j \in J_N} E_j(x_j^0 - x_j) \\ &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Puisque le plan optimal  $x^0$  vérifie  $d_j^- \leq x_j^0 \leq d_j^+$ ,  $j \in J$ ,

alors il en résulte que :

$$x_j - d_j^+ \leq x_j - x_j^0 \leq x_j - d_j^-, \quad j \in J$$

Donc

$$\begin{cases} E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - d_j^-), & \text{si } E_j > 0, \\ E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - d_j^+), & \text{si } E_j < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient une majoration du membre de gauche de l'égalité (2.8) :

$$Z(x^0) - Z(x) \leq \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+). \quad (2.9)$$

Le nombre

$$\beta(x, J_B) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+), \quad (2.10)$$

est ainsi appelé estimation de suboptimalité.

**Théorème 2.2.** Soit  $\{x^\epsilon, J_B\}$  un plan de support du problème (2.1) et  $\epsilon$  un nombre positif ou nul arbitraire ( $\epsilon \geq 0$ ). Alors

$$x^\epsilon \text{ est } \epsilon\text{-optimal} \iff \beta(x^\epsilon, J_B) \leq \epsilon.$$

**Preuve.**

**Condition suffisante.**

Supposons qu'on a  $\beta(x^\epsilon, J_B) \leq \epsilon$ . Soit  $x^0$  une solution optimale du problème (2.1). Alors en vertu des relations (2.9) et (2.10), on peut écrire :

$$Z(x^0) - Z(x^\epsilon) \leq \beta(x^\epsilon, J_B) \leq \epsilon \implies Z(x^0) - Z(x^\epsilon) \leq \epsilon.$$

Par conséquent,  $x^\epsilon$  est  $\epsilon$ -optimal .

**Condition nécessaire.** Voir[38].

## 2.3 Plan dual de support (non basique )

### 2.3.1 Définitions

Considérons le dual du problème de programmation linéaire (2.1) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = b^T y - v^T d^- + w^T d^+ \longrightarrow \min, \\ A^T y - c - v + w = 0, \\ w \geq 0, \quad v \geq 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $\lambda = (y, v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , le vecteur  $y$  étant sans restriction de signe.

Le vecteur  $\lambda = (y, v, w)$  est appelé plan dual (ou solution réalisable duale) s'il vérifie les contraintes du problème (2.11). Le vecteur  $\delta = A^T y - c$  est alors dit coplan.

Un sous-ensemble d'indices  $J_B \subset J$  est dit support si  $|J_B| = m$  et

$$\det A_B = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

Le couple  $\{\lambda, J_B\}$ , formé d'un plan dual  $\lambda$  et d'un support  $J_B$ , est appelé plan dual de support du problème (2.11).

Un plan dual de support  $\{\lambda, J_B\}$  est dit non dégénéré si :

$$\delta_j \neq 0, \quad j \in J_N = J \setminus J_B.$$

Un plan dual  $\lambda^0 = (y^0, w^0, v^0)$  est dit plan dual optimal s'il réalise le minimum de la fonction  $L$  et le vecteur  $\delta^0 = A^T y^0 - c$  est alors dit coplan optimal.

Si on fixe le vecteur  $y$ , donc ainsi le vecteur  $\delta = A^T y - c$ , le problème ( 2.11) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \varphi(v, w) = -v^T d^- + w^T d^+ \longrightarrow \min, \\ v - \delta = w, \\ w \geq 0, \quad v \geq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

En remplaçant le vecteur  $w$  par  $v - \delta$ , le problème (2.12) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \varphi(v) = \sum_{j \in J} v_j (d_j^+ - d_j^-) - \delta^T d^+ \longrightarrow \min, \\ v_j \geq \delta_j, \quad v_j \geq 0 \quad j \in J. \end{cases}$$

Puisque  $d_j^+ - d_j^- > 0$ , alors la quantité  $v_j (d_j^+ - d_j^-)$  est minimale pour une valeur  $v_j \geq 0$  la plus petite possible. En tenant compte de la contrainte  $v_j \geq \delta_j$ , on aura par conséquent :

$$v_j = \begin{cases} \delta_j, & \text{si } \delta_j \geq 0, \\ 0, & \text{si } \delta_j < 0, \end{cases} \quad j \in J.$$

Les valeurs des composantes du vecteur  $w$  se déduisent alors ainsi :

$$w_j = v_j - \delta_j = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } \delta_j \geq 0 \\ -\delta_j & , \quad \text{si } \delta_j < 0, \quad j \in J. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on ne considère que les plans duaux  $\lambda = (y, v, w)$  vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_j = \delta_j, & w_j = 0, & \text{si } \delta_j > 0, \\ v_j = 0, & w_j = -\delta_j, & \text{si } \delta_j < 0, \\ v_j = 0, & w_j = 0, & \text{si } \delta_j = 0. \end{cases} \quad j \in J \quad (2.13)$$

De tels plans duaux sont dits alors accordés.

Définissons maintenant la notion de pseudoplan du problème (2.1). Soit  $\{\delta, J_B\}$  un coplan de support de problème (2.11) . Considérons le vecteur  $\kappa$  où les composantes non basiques sont données par

$$\begin{cases} \kappa_j = d_j^- & \text{si } \delta_j > 0, \\ \kappa_j = d_j^+ & \text{si } \delta_j < 0, \\ \kappa_j = \kappa_j \in [d_j^-, d_j^+] & \text{si } \delta_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_N \quad (2.14)$$

En considérant que  $A\kappa = b$ , les composantes basiques vérifient donc

$$\kappa_B = \kappa(J_B) = A_B^{-1}b - A_B^{-1} A_N \kappa_N. \quad (2.15)$$

Un tel vecteur satisfaisant les relations (2.14) et (2.15) est appelé pseudoplan de support du problème (2.1).

## 2.4 Accroissement de la fonction duale et critère d'optimalité

Soit  $\{\delta, J_B\}$  un coplan de support correspondant à un plan dual accordé de support  $\{\lambda, J_B\}$  du problème (2.11), avec  $\lambda = (y, v, w)$ . Considérons un autre plan dual accordé  $\bar{\lambda} = (\bar{y}, \bar{v}, \bar{w})$ , et son coplan correspondant  $\bar{\delta} = A^T \bar{y} - c$ , avec

$$\bar{\lambda} = \lambda + \Delta\lambda, \quad \bar{y} = y + \Delta y, \quad \bar{v} = v + \Delta v, \quad \bar{w} = w + \Delta w, \quad \bar{\delta} = \delta + \Delta\delta = \delta + t.$$

Calculons l'accroissement de la fonction objectif  $L$  du problème (2.11) :

$$L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) = (\Delta y)^T b - (\Delta v)^T d^- + (\Delta w)^T d^+. \quad (2.16)$$

Si  $\kappa$  est un pseudoplan, on aura alors

$$t^T = (\Delta\delta)^T = (\Delta y)^T A \implies (\Delta y)^T b = t^T \kappa.$$

L'accroissement (2.16) devient alors :

$$\Delta L(\lambda) = t^T \kappa - (\Delta v)^T d^- + (\Delta w)^T d^+ = \sum_{j \in J} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+). \quad (2.17)$$

Afin d'évaluer l'accroissement (2.17), calculons les composantes  $\Delta v_j$ ,  $\Delta w_j$ ,  $j \in J$ . En tenant compte des relations (2.13), on trouve

$$\begin{cases} \Delta v_j = t_j, & \Delta w_j = 0 & \text{si } \bar{\delta}_j \geq 0, \delta_j \geq 0, \\ \Delta v_j = \bar{\delta}_j, & \Delta w_j = \delta_j & \text{si } \bar{\delta}_j \geq 0, \delta_j < 0, \\ \Delta v_j = -\delta_j, & \Delta w_j = -\bar{\delta}_j & \text{si } \bar{\delta}_j < 0, \delta_j \geq 0, \\ \Delta v_j = 0, & \Delta w_j = -t_j & \text{si } \bar{\delta}_j < 0, \delta_j < 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour un sous-ensemble  $J_1$  de  $J$ , définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} J_1^{++} &= \{j \in J_1, \bar{\delta}_j \geq 0 \text{ et } \delta_j > 0\}, \\ J_1^{+0} &= \{j \in J_1, \bar{\delta}_j \geq 0 \text{ et } \delta_j = 0\}, \\ J_1^{+-} &= \{j \in J_1, \bar{\delta}_j \geq 0 \text{ et } \delta_j < 0\}, \\ J_1^{-+} &= \{j \in J_1, \bar{\delta}_j < 0 \text{ et } \delta_j > 0\}, \\ J_1^{-0} &= \{j \in J_1, \bar{\delta}_j < 0 \text{ et } \delta_j = 0\}, \\ J_1^{--} &= \{j \in J_1, \bar{\delta}_j < 0 \text{ et } \delta_j < 0\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En vertu de la définition du pseudoplan, on aura alors :

$$\begin{cases} \kappa_j = d_j^- & \text{si } j \in J_N^{++} \cup J_N^{-+}, \\ \kappa_j = d_j^+ & \text{si } j \in J_N^{+-} \cup J_N^{--}, \\ \kappa_j \in [d_j^-, d_j^+] & \text{si } j \in J_N^{+0} \cup J_N^{-0}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Ensuite, on décompose l'accroissement en deux sous-sommes basique et non basique :

$$L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) = S_B + S_N,$$

où

$$S_B = \sum_{j \in J_B} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+), \quad S_N = \sum_{j \in J_N} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+).$$

En vertu des relations (2.18) et (2.20), la sous-somme  $S_N$  peut être estimée de la manière suivante :

$$S_N = S_N^{++} + S_N^{+0} + S_N^{+-} + S_N^{-+} + S_N^{-0} + S_N^{--},$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} S_N^{++} = 0, \\ S_N^{+0} = \sum_{j \in J_N^{+0}} t_j (\kappa_j - d_j^-) \geq 0, \\ S_N^{+-} = \sum_{j \in J_N^{+-}} \bar{\delta}_j (d_j^+ - d_j^-) \geq 0, \\ S_N^{-+} = \sum_{j \in J_N^{-+}} \bar{\delta}_j (d_j^- - d_j^+) \geq 0, \\ S_N^{-0} = \sum_{j \in J_N^{-0}} t_j (\kappa_j - d_j^+) \geq 0, \\ S_N^{--} = 0. \end{array} \right.$$

Par conséquent, l'accroissement (2.17) sera de la forme :

$$L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) = S_B + S_N, \quad (2.21)$$

avec  $S_N \geq 0$ .

### **Théorème 2.3. ( Critère d'optimalité )**

Les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_j^- \leq \kappa_j \leq d_j^+, & \text{pour } \delta_j = 0, \\ \kappa_j = d_j^+ & \text{pour } \delta_j < 0, \\ \kappa_j = d_j^- & \text{pour } \delta_j > 0, \end{array} \right. \quad j \in J_B \quad (2.22)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du coplan de support  $\{\delta, J_B\}$ . Elles sont aussi nécessaires dans le cas où  $\{\delta, J_B\}$  est non dégénéré .

Le pseudoplan  $\kappa$  correspondant au coplan  $\delta$  est alors une solution optimale du problème primal (2.1).

#### **Preuve. Suffisance :**

Soit  $\{\delta, J_B\}$  un coplan de support vérifiant les relations (2.22).

En vertu des relations (2.18), (2.22), la sous-somme  $S_B$  peut être calculée de la manière suivante :

$$S_B = S_B^{++} + S_B^{+0} + S_B^{+-} + S_B^{-+} + S_B^{-0} + S_B^{--},$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} S_B^{++} = 0, \\ S_B^{+0} = \sum_{j \in J_B^{+0}} t_j (\kappa_j - d_j^-) \geq 0, \\ S_B^{+-} = \sum_{j \in J_B^{+-}} \bar{\delta}_j (d_j^+ - d_j^-) \geq 0, \\ S_B^{-+} = \sum_{j \in J_B^{-+}} \bar{\delta}_j (d_j^- - d_j^+) \geq 0, \\ S_B^{-0} = \sum_{j \in J_B^{-0}} t_j (\kappa_j - d_j^+) \geq 0, \\ S_B^{--} = 0. \end{array} \right.$$

Tous les termes de la somme  $S_B$  sont positifs ou nuls. On a alors  $L(\bar{\lambda}) \geq L(\lambda)$  pour tout plan dual accordé  $\bar{\lambda}$ , ce qui implique que le plan dual de support  $\{\lambda, J_B\}$  et son coplan correspondant  $\{\delta, J_B\}$  sont optimaux dans le problème dual (2.11).

Montrons maintenant que le pseudoplan  $\kappa$  vérifiant les relations (2.22) est une solution optimale du problème primal (2.1).

Le pseudoplan  $\kappa$  est effectivement un plan (solution réalisable). En outre, on a

$$\begin{aligned} c^T \kappa &= (-\delta^T + y^T A) \kappa \\ &= -\delta^T \kappa + y^T A \kappa \\ &= y^T b - v^T d^- + w^T d^+ - (\delta - v + w)^T \kappa + (d^- - \kappa)^T v - (d^+ - \kappa)^T w. \end{aligned}$$

D'après les contraintes du problème dual (2.11) on a :

$\delta - v - w = 0 \implies (\delta - v - w)^T \kappa = 0$ . Des relations (2.13) (2.14) et (2.22), on obtient pour tout  $j \in J$  :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \kappa_j = d_j^-, & v_j = \delta_j, & w_j = 0, & \text{si } \delta_j > 0, \\ \kappa_j = d_j^+, & v_j = 0, & w_j = -\delta_j, & \text{si } \delta_j < 0, \\ d_j^- \leq \kappa_j \leq d_j^+, & v_j = 0, & w_j = 0, & \text{si } \delta_j = 0. \end{array} \right.$$

Dans tous les cas et pour tout indice  $j \in J$ , on aura alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (d_j^- - \kappa_j) v_j = 0, \\ (d_j^+ - \kappa_j) w_j = 0. \end{array} \right. \quad \forall j \in J$$



Donc

$$c^T \kappa = y^T b - v^T d^- + w^T d^+ \implies z(\kappa) = L(\lambda).$$

Et d'après la théorie de la dualité en programmation linéaire, le vecteur  $\kappa$  est par conséquent une solution optimale du problème primal (2.1).

**Nécessité**

Soit  $\{\delta, J_B\}$  un coplan optimal de support non dégénéré et supposons que les relations (2.22) ne sont pas vérifiées. Il existe donc  $j_1 \in J_B$ , avec l'une des conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta_{j_1} > 0 & \text{et} \quad \kappa_{j_1} \neq d_{j_1}^-, \\ & \text{ou bien} \\ \delta_{j_1} < 0 & \text{et} \quad \kappa_{j_1} \neq d_{j_1}^+, \\ & \text{ou bien} \\ \delta_{j_1} = 0 & \text{et} \quad \kappa_{j_1} \notin [d_{j_1}^-, d_{j_1}^+]. \end{array} \right.$$

1 ) Soit la première condition réalisée :  $\delta_{j_1} > 0$  et  $\kappa_{j_1} \neq d_{j_1}^-$ .

Construisons alors un nouveau plan de support accordé  $\bar{\lambda}$  et son coplan  $\bar{\delta}$  de la manière suivante :

$$\bar{\delta} = \delta + \sigma t, \quad \bar{y} = y + \sigma \Delta y, \quad \bar{v} = v + \sigma \Delta v, \quad \bar{w} = w + \sigma \Delta w, \quad \bar{\lambda} = \lambda + \sigma \Delta \lambda, \quad \sigma \geq 0.$$

Pour ce faire, posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{j_1} = \kappa_{j_1} - d_{j_1}^-, \\ \Delta \delta_{j_1} = t_{j_1} = -\text{sign} \alpha_{j_1}, \\ \Delta \delta_j = t_j = 0, \quad j \neq j_1 \text{ et } j \in J_B. \end{array} \right. \tag{2.23}$$

On peut alors calculer directement  $\Delta y$ ,  $\Delta \delta = t$ , en fonction de  $t_B$  :

$$(\Delta \delta)^T = (\Delta y)^T A \implies (\Delta \delta_B)^T = t_B^T = (\Delta y)^T A_B.$$

D'où

$$\begin{aligned} (\Delta y)^T &= t_B^T A_B^{-1}, \\ (\Delta \delta)^T &= t_B^T A_B^{-1} A. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Les accroissements  $\Delta v$  et  $\Delta w$  se déduisent de (2.24) à partir des relations (2.13) et (2.18).

En vertu de l'accroissement (2.21), on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) &= \sigma \left[ \sum_{j \in J_B} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+) \right] \\ &+ \sigma \left[ \sum_{j \in J_N} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+) \right] \\ &= S_B(\sigma) + S_N(\sigma), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_N(\sigma) &= \sigma \left[ \sum_{j \in J_N} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+) \right] \\ &= S_N^{+0}(\sigma) + S_N^{+-}(\sigma) + S_N^{-+}(\sigma) + S_N^{-0}(\sigma). \end{aligned}$$

Et comme le coplan de support est non dégénéré, c'est-à-dire  $\delta_j \neq 0$ ,  $j \in J_N$ , alors

$$S_N^{+0}(\sigma) = S_N^{-0}(\sigma) = 0,$$

et il existe un nombre strictement positif  $\sigma_1$  assez petit tel que :

$$S_N^{+-}(\sigma) = S_N^{-+}(\sigma) = 0, \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_1].$$

Donc

$$\begin{aligned} L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) &= S_B(\sigma) \\ &= \sigma \left[ \sum_{j \in J_B} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+) \right] \\ &= \sigma (t_{j_1} \kappa_{j_1} - \Delta v_{j_1} d_{j_1}^- + \Delta w_{j_1} d_{j_1}^+) + \sigma \left[ \sum_{j \in J_B \setminus \{j_1\}} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+) \right]. \end{aligned}$$

Vu que  $t_j = 0$  pour tout  $j \in J_B \setminus \{j_1\}$ , on obtient

$$\sum_{j \in J_B \setminus \{j_1\}} (t_j \kappa_j - \Delta v_j d_j^- + \Delta w_j d_j^+) = 0.$$

En outre, il existe  $\sigma_{j_1} > 0$  assez petit tel que  $\bar{\delta}_{j_1} \delta_{j_1} > 0$ .

En prenant  $\sigma^0 = \min\{\sigma_1, \sigma_{j_1}\}$ , on aura alors :

$$\begin{aligned} L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) &= S_B(\sigma) \\ &= \sigma^0 (t_{j_1} \kappa_{j_1} - \Delta v_{j_1} d_{j_1}^- + \Delta w_{j_1} d_{j_1}^+). \end{aligned}$$

Comme  $\delta_{j_1} > 0$  et  $\bar{\delta}_{j_1} > 0$ , en utilisant les relations (2.18), on trouve :

$$\begin{aligned}
L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) &= \sigma^0(t_{j_1}\kappa_{j_1} - t_{j_1}d_{j_1}^- + 0d_{j_1}^+) \\
&= \sigma^0(t_{j_1}\kappa_{j_1} - t_{j_1}d_{j_1}^-) \\
&= -\sigma^0 \text{sign } \alpha_{j_1} (\kappa_{j_1} - d_{j_1}^-) \\
&= -\sigma^0 |\kappa_{j_1} - d_{j_1}^-| \\
&= -\sigma^0 |\alpha_{j_1}| < 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité contredit l'optimalité du plan dual  $\lambda$ . Par conséquent, les relations (2.22) sont nécessairement vérifiées.

**2)** On suppose que  $j_1$  n'est pas optimal avec  $\delta_{j_1} < 0$  et  $\kappa_{j_1} \neq d_{j_1}^+$ .

Dans ce cas, on prend

$$\alpha_{j_1} = \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+, \quad t_{j_1} = -\text{sing } \alpha_{j_1}, \quad t_j = 0, \quad \forall j \in J_B \setminus j_1.$$

Choisissons un nombre  $\sigma^0$  positif de telle sorte que  $\delta$  et  $\bar{\delta}$  aient le même signe. On aura donc :

$$\begin{aligned}
L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) &= \sigma^0(t_{j_1}\kappa_{j_1} - t_{j_1}d_{j_1}^+) \\
&= \sigma^0 t_{j_1} (\kappa_{j_1} - d_{j_1}^+) \\
&= -\sigma^0 |\kappa_{j_1} - d_{j_1}^+| \\
&= -\sigma^0 |\alpha_{j_1}| < 0.
\end{aligned}$$

D'où la contradiction avec l'optimalité du plan dual  $\lambda$ . Par conséquent, les relations (2.22) sont nécessairement vérifiées.

**3)** L'indice  $j_1$  est non optimal avec  $\delta_{j_1} = 0$  et  $\kappa_{j_1} \notin [d_{j_1}^-, d_{j_1}^+]$ . Posons

$$\Delta\delta_{j_1} = t_{j_1} = -\text{sign } \alpha_{j_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_{j_1} = \kappa_{j_1} - d_{j_1}^- < 0, \\ -1 & \text{si } \alpha_{j_1} = \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+ > 0. \end{cases}$$

Pour  $\alpha_{j_1} = \kappa_{j_1} - d_{j_1}^- < 0$ , on obtient :

$$L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) = -\sigma^0 |\kappa_{j_1} - d_{j_1}^-| < 0,$$

et pour  $\alpha_{j_1} = \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+ > 0$ , on aura :

$$L(\bar{\lambda}) - L(\lambda) = -\sigma^0 |\kappa_{j_1} - d_{j_1}^+| < 0.$$

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction avec l'optimalité du plan dual  $\lambda$ .  $\square$

## 2.5 Méthode de résolution

Étant donné un nombre réel positif ou nul et un plan de support initial  $\{x, J_B\}$ , le but de cet algorithme est alors de construire un plan  $\epsilon$ -optimal  $x^\epsilon$  ou carrément un plan optimal  $x^0$ .

Une itération de l'algorithme consiste à faire le passage de  $\{x, J_B\}$  vers  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ , tel que  $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$ .

Si le critère d'optimalité ou de suboptimalité n'est pas vérifié, c'est-à-dire  $\beta(x, J_B) > \epsilon$ , il faut alors améliorer le plan  $x$ .

### 2.5.1 Construction d'une direction d'amélioration adaptée

La méthode directe de support est une méthode d'amélioration basée sur la métrique du simplexe où un seul indice change.

Ici, le plan de support admet d'autres métriques pour les directions d'amélioration. Considérons en effet la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible  $l$  ( $Al = 0$ ) :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (2.25)$$

Cette métrique dépend du plan  $x$ , et de ce fait elle est dite adaptée.

Les composantes (2.25) se calculent, en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des indices non basiques. A cet effet, considérons l'accroissement suivant :

$$Z(x + l) - Z(x) = - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j = - \sum_{j \in J_N} E_j l_j.$$

En tenant compte de la métrique (2.25), celui-ci atteint son maximum pour les valeurs des composantes non basiques de  $l$  suivantes :

$$\begin{cases} l_j = d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ l_j = d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ l_j = 0 & \text{si } E_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_N \quad (2.26)$$

Les composantes basiques de  $l$  seront déduites de la formule :

$$Al = 0 \iff l_B = -A_B^{-1} A_N l_N. \quad (2.27)$$

### 2.5.2 Changement de plan :

On construit alors un nouveau plan  $\bar{x} = x + \theta^0 l$ , où  $l$  est la direction d'amélioration définie par (2.26) et (2.27), le nombre  $\theta^0$  étant le pas maximal le long de cette direction et il se calcule de façon que les contraintes directes sur le vecteur  $\bar{x}$  soient vérifiées, c'est-à-dire :

$$(d^- \leq x + \theta l \leq d^+) \iff \begin{cases} d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, & j \in J_N, \\ d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, & j \in J_B. \end{cases}$$

Des premières inégalités on déduit que  $\theta^0 \leq 1$ .

Pour satisfaire les deuxièmes inégalités, on doit choisir  $\theta^0$  comme suit :

$$\theta^0 = \theta_{j_1} \quad \text{et} \quad \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j < 0, \\ \infty, & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_B$$

On prendra donc :  $\theta^0 = \min(\theta_{j_1}, 1)$ .

Deux cas peuvent alors se présenter :

1.  $\theta^0 = 1$  : Le plan  $\bar{x} = x + l$  vérifie le critère d'optimalité. Il est donc optimal et le processus de résolution est terminé .
2.  $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$  : Dans ce cas, la fonction objectif du problème (2.1) aura augmenté de :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = -\theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j l_j = \theta^0 \beta(x, J_B).$$

L'estimation de suboptimalité du nouveau plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  s'écrit :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{\bar{E}_j > 0, j \in J_N} \bar{E}_j (\bar{x}_j - d_j^-) + \sum_{\bar{E}_j < 0, j \in J_N} \bar{E}_j (\bar{x}_j - d_j^+).$$

Comme  $\bar{E} = E$ , car  $E$  ne dépendant pas de  $x$ , on aura alors

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j (x_j + \theta^0 l_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j (x_j + \theta^0 l_j - d_j^+) \\ &= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j l_j + \theta^0 \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j l_j. \end{aligned}$$

En remplaçant  $l_j$  par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \beta(\bar{x}, J_B) &= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j (d_j^- - x_j) + \theta^0 \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j (d_j^+ - x_j) \\
 &= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) \\
 &= (1 - \theta^0) \beta(x, J_B).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Si  $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \epsilon$ , le plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  est alors  $\epsilon$ -optimal et le processus de résolution du problème (2.1) est arrêté.

Dans le cas contraire, on devra changer le support  $J_B$ , car on a

$$\theta^0 = \theta_{j_1}, \quad j_1 \in J_B \implies x_{j_1} + \theta^0 l_{j_1} = d_{j_1}^- \vee d_{j_1}^+.$$

En effet, la composante  $\bar{x}_{j_1}$  prend dans ce cas une valeur critique et le vecteur  $a_{j_1}$  devra sortir de la base.

A cet effet, on cherche à le remplacer par un vecteur  $a_{j_0}$ ,  $j_0 \in J_N$ , de telle sorte que l'ensemble :  $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$  soit un support, c'est-à-dire :

$$\det \bar{A}_B = \det A(I, \bar{J}_B) \neq 0.$$

Contrairement à la méthode du simplexe, le choix de l'indice  $j_0$  n'est pas ici unique. On distinguera alors plusieurs variantes que l'on présentera ci-dessous.

### 2.5.3 Changement de support

#### 1) Variante simple

Comme on a vu, le changement de support se fait lorsque  $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$ . Ce cas se réalise donc pour un indice  $j_1$  de  $J_B$  tel que  $l_{j_1} \neq 0$ .

En vertu de la relation (2.27), on peut alors écrire :

$$l_B = -A_B^{-1} A_N l_N = - \sum_{j \in J_N} A_B^{-1} a_j l_j = - \sum_{j \in J_N} X_j l_j,$$

où

$$X_j = A_B^{-1} a_j = (x_{ij}, i \in J_B).$$

Donc

$$l_{j_1} = e_{j_1}^T l_B = - \sum_{j \in J_N} e_{j_1}^T X_j l_j = - \sum_{j \in J_N} x_{j_1 j} l_j \neq 0, \tag{2.29}$$

où  $e_{j_1}^T$  est un vecteur unitaire dont la composante  $j_1$  vaut 1.

D'autre part, l'ensemble des indices non optimaux s'écrit :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N, E_j > 0, x_j \neq d_j^- \vee E_j < 0, x_j \neq d_j^+\}.$$

Comme  $l_j = 0$  pour  $j \in J_N \setminus J_{NNO}$ , la relation (2.29) devient :

$$l_{j_1} = - \sum_{j \in J_{NNO}} x_{j_1 j} l_j \neq 0.$$

Il existe donc un indice  $j_0 \in J_{NNO}$  tel que  $x_{j_1 j_0} \neq 0$ ; cette condition nous assure que le nouvel ensemble  $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ , est bien un support.

Si le critère d'optimalité ou de suboptimalité n'est pas vérifié, on recommencera alors une nouvelle itération à partir du nouveau plan de support  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ , avec  $\bar{x} = x + \theta^0 l$ ,  $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ .

## 2) Variante adaptée :

Dans la variante simple ci-dessus, le choix de  $j_0$  est basé uniquement sur une condition algébrique. Ici on s'efforcera de choisir dans l'ensemble  $J_{NNO}$ , l'indice  $j_0$  d'une manière optimale. En effet, l'estimation de suboptimalité  $\beta(x, J_B)$ , dépend à la fois de  $x$ , et du support  $J_B$ . Par conséquent, le choix de l'indice  $j_0$  sera fait de telle sorte que l'estimation de suboptimalité diminue.

A cet effet, on peut faire correspondre au plan de support  $\{x, J_B\}$ , un plan dual  $\lambda = (y, v, w)$  et un coplan de support  $\{\delta, J_B\}$ , définis de la manière suivante :

$$y^T = u^T = c_B^T A_B^{-1}, \quad \delta = E = A^T y - c.$$

$$\begin{cases} v_j = E_j, & w_j = 0 & \text{si } E_j \geq 0, \\ v_j = 0, & w_j = -E_j & \text{si } E_j < 0, \end{cases} \quad j \in J. \quad (2.30)$$

On fera remarquer que le plan dual  $\lambda$  et son coplan correspondent  $\delta$  dépendant uniquement de  $J_B$ . On montre que l'estimation de suboptimalité se décompose ainsi :

$$\beta(x, J_B) = \beta(x) + \beta(J_B), \quad (2.31)$$

avec

$$\beta(x) = c^T x^0 - c^T x,$$

$$\beta(J_B) = L(\lambda) - L(\lambda^0) = b^T y - v^T d^- + w^T d^+ - b^T y^0 + (v^0)^T d^- - (w^0)^T d^+,$$

où  $x^0$  et  $\lambda^0 = (y^0, v^0, w^0)$  sont des solutions optimales, respectivement du problème (2.1) et de son dual :

$$\begin{cases} L(\lambda) = b^T y - v^T d^- + w^T d^+ \longrightarrow \min, \\ A^T y - c - v + w = 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

En vertu des relations (2.30), on peut en effet écrire :

$$\begin{aligned} \beta(x, J_B) &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) \\ &= \underbrace{\sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j x_j + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j x_j + \sum_{E_j = 0, j \in J_N} E_j x_j}_{E^T x} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{E_j > 0} E_j d_j^-}_{v^T d^-} - \underbrace{\sum_{E_j < 0} E_j d_j^+}_{-w^T d^+}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \beta(x, J_B) &= E^T x - v^T d^- + w^T d^+ \\ &= (y^T A - c^T)x - v^T d^- + w^T d^+ \\ &= y^T b - v^T d^- + w^T d^+ - c^T x \\ &= L(\lambda) - z(x). \end{aligned}$$

puisque  $L(\lambda^0) = z(x^0)$ , on aura donc :

$$\begin{aligned} \beta(x, J_B) &= L(\lambda) - z(x) = L(\lambda) - L(\lambda^0) + z(x^0) - z(x) \\ &= \underbrace{[z(x^0) - z(x)]}_{\beta(x)} + \underbrace{[L(\lambda) - L(\lambda^0)]}_{\beta(J_B)} \\ &= \beta(x) + \beta(J_B). \end{aligned}$$

Grâce au changement du plan  $x$  par  $\bar{x}$ , on a amélioré l'estimation de suboptimalité en diminuant  $\beta(x)$  :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(\bar{x}) + \beta(J_B) = \beta(x) - (c^T \bar{x} - c^T x) + \beta(J_B) \leq \beta(x, J_B).$$

On fera de même en diminuant  $\beta(J_B)$  :

$$\beta(\bar{J}_B) = \beta(J_B) - (L(\lambda) - L(\bar{\lambda})).$$



Pour ce faire, on effectue une itération de la méthode duale du support en passant du coplan de support  $\{\delta, J_B\}$  au coplan de support  $\{\bar{\delta}, \bar{J}_B\}$  pour lequel  $\beta(\bar{J}_B) \leq \beta(J_B)$  :  
 A cet effet, on construit le pseudoplan  $\kappa$  correspondant au coplan de support  $\{\delta, J_B\}$  :

$$\begin{cases} \kappa_j = d_j^- = x_j + l_j & \text{si } E_j > 0, \\ \kappa_j = d_j^+ = x_j + l_j & \text{si } E_j < 0, \\ \kappa_j = x_j = x_j + l_j & \text{si } E_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_N$$

$$\kappa_B = A_B^{-1}(b - A_N \kappa_N) = \underbrace{A_B^{-1}(b - A_N x_N)}_{x_B} - \underbrace{A_B^{-1} A_N l_N}_{-l_B} = x_B + l_B.$$

Il s'ensuit que

$$\kappa = x + l. \quad (2.33)$$

Puisque la composante  $\bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^-$  ou bien  $\bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^+$  et  $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$ , on aura alors :

$$\begin{cases} \kappa_{j_1} = x_{j_1} + l_{j_1} < x_{j_1} + \theta^0 l_{j_1} = \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^- & \text{si } l_{j_1} < 0, \\ \kappa_{j_1} = x_{j_1} + l_{j_1} > x_{j_1} + \theta^0 l_{j_1} = \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^+ & \text{si } l_{j_1} > 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on voit bien que l'indice  $j_1$  ne vérifie pas le critère d'optimalité pour le problème dual (2.32). On posera donc

$$\alpha_0 = \begin{cases} \kappa_{j_1} - d_{j_1}^- & \text{si } \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^-, \\ \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+ & \text{si } \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^+. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{j_1} = -\text{sign } \alpha_0, \quad t_j = 0, \quad j \neq j_1, \quad j \in J_B, \\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N. \end{cases}$$

$$\bar{\delta} = \delta + \sigma^0 t \quad \sigma^0 \geq 0.$$

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min_{j \in J_N} \sigma_j,$$

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-\delta_j}{t_j} & \text{si } \delta_j t_j < 0, \\ 0 & \text{si } \delta_j = 0, \quad t_j < 0, \\ \infty & \text{si non} \end{cases}.$$

Avec un tel indice  $j_0$  ainsi choisi, on construit un nouveau support  $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ .

Le passage du coplan de support  $\{\delta, J_B\}$  au coplan de support  $\{\bar{\delta}, \bar{J}_B\}$  fera alors diminuer

la fonction duale d'une valeur  $\sigma_0 |\alpha_0|$ . On aura alors

$$\begin{aligned}\beta(\bar{J}_B) &= L(\bar{\lambda}) - L(\lambda^0) = L(\lambda) - \sigma_0 |\alpha_0| - L(\lambda^0) \\ &= \beta(J_B) - \sigma_0 |\alpha_0| \leq \beta(J_B).\end{aligned}$$

Donc l'estimation de suboptimalité  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$  vaut alors :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) - \sigma^0 |\alpha_0|. \quad (2.34)$$

Par conséquent, le changement du support  $J_B$  en  $\bar{J}_B$  s'effectue de façon que la valeur de la fonction duale diminue.

## 2.6 Algorithme de résolution

Le but de cet algorithme est de construire un plan de support  $\epsilon$ -optimal ou carrément optimal.

### Algorithme

1. Soit un nombre réel positif ou nul quelconque  $\epsilon$  et un plan de support initial  $\{x, J_B\}$  du problème (2.1).

2. Calculer le vecteur des estimations  $E_N^T = (c_B)^T A_B^{-1} A_N - c_N^T$  ;

Calculer la valeur de suboptimalité  $\beta(x, J_B)$  :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+).$$

– Si  $\beta(x, J_B) = 0$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{x, J_B\}$  plan de support optimal.

– Si  $\beta(x, J_B) < \epsilon$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{x, J_B\}$  plan de support  $\epsilon$ -optimal.

– Si  $\beta(x, J_B) > \epsilon$ , aller en (3).

3. Changement du plan.

– Calculer la direction d'amélioration  $l$  :

$$\begin{cases} l_j = d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ l_j = d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ l_j = 0 & \text{si } E_j = 0, \end{cases} \quad j \in J_N \quad (2.35)$$

$$l_B = -A_B^{-1} A_N l_N;$$

- Calculer le pas optimal  $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}\}$ ,  $\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j$ , avec

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_j} & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_j} & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0; \end{cases} \quad j \in J_B,$$

- Calculer  $\bar{x} = x + \theta^0 l$ ; deux cas peuvent alors se présenter :
- (a) Si  $\theta^0 = 1$ , le processus s'arrête et le plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  est optimal.
- (b) Si  $\theta^0 < 1$ , calculer l'estimation de suboptimalité correspondant au plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B).$$

- Si  $\beta(\bar{x}, J_B) < \epsilon$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{\bar{x}, J_B\}$  plan de support  $\epsilon$ -optimal.
- Si  $\beta(\bar{x}, J_B) > \epsilon$ , aller en (4).

#### 4. Changement du support $J_B$ en $\bar{J}_B$ :

- Calculer le pseudoplan  $\kappa$  correspondant :

$$\kappa = x + l.$$

- Calculer  $\alpha_0$  :

$$\alpha_0 = \begin{cases} \kappa_{j_1} - d_{j_1}^- & \text{si } \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^-, \\ \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+ & \text{si } \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^+. \end{cases}$$

- Calculer le vecteur  $t$  :

$$\begin{cases} t_{j_1} = -\text{sign } \alpha_0, & t_j = 0, \quad j \neq j_1, \quad j \in J_B, \\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N. \end{cases}$$

- Calculer  $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min_{j \in J_N} \sigma_j$ , où

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j}{t_j} & \text{si } E_j t_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0, \quad t_j < 0, \\ \infty & \text{si non} \quad . \end{cases}$$

- Poser  $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ .

- Calculer l'estimation de suboptimalité correspondant au plan de support  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \beta(\bar{x}, J_B) - \sigma^0 | \alpha_0 | .$$

- Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  plan de support optimal.
- Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) < \epsilon$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  plan de support  $\epsilon$ -optimal.
- Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \epsilon$ , on pose  $J_B = \bar{J}_B$  et  $x = \bar{x}$  et aller en (1).

**Exemple 2.1.** Résoudre le problème suivant avec la méthode adaptée :

$$Z(x) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \longrightarrow \max,$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 4,$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 6, \quad 0 \leq x_4 \leq 8.$$

On démarre à partir du plan de support  $\{x, J_B\}$ ,  $x^T = (0, 0, 5, 4)$  et  $J_B = \{4, 3\}$ .

Le vecteur des estimations vaut

$$E_N^T = (E_1, E_2) = u^T A_N - c_N = (-6, 7).$$

L'estimation de suboptimalité est égale à

$$\beta(x, J_B) = E_1(x_1 - d_1^+) + E_2(x_2 - d_2^-) = 12.$$

En calculant la direction d'amélioration  $l$  on trouve

$$l_N^T = (l_1, l_2) = (2, 0), \quad l_B^T = (l_4, l_3) = (-A_B^{-1} A_N l_N)^T = (-4, 2).$$

Le pas optimal  $\theta^0$  est calculé comme suit :

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_1}, 1\}, \quad \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

où

$$\begin{cases} \theta_4 = \frac{d_4^- - x_4}{l_4} = \frac{0-4}{-4} = 1, \\ \theta_3 = \frac{d_3^+ - x_3}{l_3} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

alors

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \frac{1}{2} \implies j_1 = 3.$$

Donc

$$\bar{x}^T = x^T + \theta^0 l^T = (0, 0, 5, 4) + \frac{1}{2}(2, 0, 2, -4) = (1, 0, 6, 2),$$

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B) = (1 - \frac{1}{2})12 = 6.$$

Afin de choisir l'indice  $j_0 \in J_N = \{1, 2\}$  par lequel il faudra remplacer l'indice sortant  $j_1$ , faisons alors une itération duale. Pour cela, posons

$$\alpha_0 = \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+ = \kappa_3 - d_3^+ = x_3 + l_3 - d_3^+ = 5 + 2 - 6 = 1 \quad (l_3 > 0),$$

$$t_B^T = (t_4, t_3) = (0, -1), \quad (t_N)^T = (t_1, t_2) = (0, -1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (1, -3),$$

$$t = (1, -3, -1, 0).$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{-E_1}{t_1} = \frac{6}{1} = 6, \\ \sigma_2 = \frac{-E_2}{t_2} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}, \end{cases}$$

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min_{j \in J_N} \sigma_j = \min\{\sigma_1, \sigma_2\} = \min\{6, \frac{7}{3}\} = \frac{7}{3} = \sigma_2 \implies j_0 = 2.$$

On aura donc

$$\bar{J}_B = J_B \setminus \{j_1\} \cup \{j_0\} = \{4, 3\} \setminus \{3\} \cup \{2\} = \{4, 2\},$$

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \beta(\bar{x}, J_B) - \sigma^0 |\alpha_0| = \frac{11}{3}.$$

Ce qui montre que  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$  n'est pas optimal.

On recommence une nouvelle itération avec le plan de support  $\{x, J_B\}$ , où

$$x^T = (1, 0, 6, 2), \quad J_B = \{4, 2\}.$$

Calculons alors le vecteur des estimations  $E_N$  :

$$E_N^T = (E_1, E_3) = u^T A_N - c_N = (-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}).$$

D'où le vecteur de direction d'amélioration  $l$  est donné par :

$$l_N^T = (l_1, l_3) = (d_1^+ - x_1, d_3^+ - x_3) = (2 - 1, 6 - 6) = (1, 0);$$

$$l_B^T = (l_4, l_2) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Le pas optimal  $\theta^0$  est calculé comme suit :

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_1}, 1\}, \quad \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

où

$$\begin{cases} \theta_4 = \frac{d_4^- - x_4}{l_4} = \frac{0-2}{-\frac{3}{5}} = \frac{6}{5} > 1, \\ \theta_2 = \frac{d_2^+ - x_2}{l_2} = \frac{4-0}{\frac{1}{3}} = 12 > 1. \end{cases}$$

Donc

$$\theta^0 = \min\left\{\frac{6}{5}, 1\right\} = 1 \implies \theta^0 = 1.$$

Alors le nouveau plan  $\bar{x}$  est égal à

$$\bar{x} = x + \theta^0 l = x + l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\theta^0 = 1$ , le vecteur  $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  est alors une solution optimale du problème considéré, avec

$$z(x^0) = \frac{59}{3}.$$

### Conclusion

Le but de la méthode adaptée est de construire un plan  $\epsilon$ -optimal  $x^\epsilon$  ou carrément un plan optimal  $x^0$ . Partant d'une solution réalisable initiale de support, constituée d'une solution réalisable et d'un support, chaque itération de cette méthode consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif tout en s'assurant de ne pas sortir du domaine admissible délimité par les contraintes du problème.

L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle traite les données du problème telles qu'elles se présentent.

# Chapitre 3

## Programmation linéaire multicritère à variables simples

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'optimisation multiobjectif (multicritère) qui sera le cadre de travail de ce mémoire. Nous introduisons les concepts fondamentaux et certains théorèmes caractérisant l'optimalité.

### 3.1 Problèmes d'optimisation multicritère

Certains problèmes de recherche opérationnelle qui se posent dans la pratique comportent plusieurs critères devant être optimisés simultanément. Alors que pour les problèmes monocritères, l'optimum recherché est clairement défini, il n'en est pas de même pour les problèmes multicritères, à cause de situations conflictuelles et contradictoires existant entre les objectifs à atteindre.

Les problèmes d'optimisation multiobjectif sont une généralisation à  $k$  fonctions objectives des problèmes d'optimisation classique :

$$\begin{cases} f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^T \longrightarrow \max, \\ x \in S, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $k$  fonctions objectives sont à optimiser sur un ensemble admissible  $S$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le vecteur des fonctions objectives est noté par :

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^T,$$

où

$$f_i : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, k} \quad k \geq 2.$$

Les composantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des éléments  $x$  de l'ensemble de décision  $S$  sont appelées variables de décision et le vecteur  $x$  est appelé vecteur des variables de décision. L'image de la région admissible  $S$ , appelée l'ensemble des critères est donnée par :

$$Z = f(S) = \{z \in \mathbb{R}^k : z = f(x), \quad x \in S\},$$

où  $z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T, z_i = f_i(x), \quad i = \overline{1, k}$ . L'espace des critères est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^k$  et ses éléments  $z = f(x)$  sont dits vecteurs critères.

Les problèmes d'optimisation multiobjectif sont répartis en différentes classes, comme dans l'optimisation mono-objectif, selon les caractéristiques des fonctions objectifs et des contraintes.

**Définition 3.1.** Lorsque toutes les fonctions objectifs et les contraintes qui définissent  $S$  sont linéaires, le problème d'optimisation multiobjectif est dit linéaire. En bref, c'est un problème de P.L.M.O ( Programmation Linéaire Multi-Objectif).

Dans ce mémoire, on ne s'intéresse qu'aux problèmes de programmation linéaire multiobjectif et on suppose que toutes les fonctions objectifs sont à maximiser. Si une fonction objectif  $f_i$  est à minimiser, il est équivalent de maximiser la fonction  $-f_i$ .

Considérons le problème de programmation linéaire multiobjectif suivant :

$$\begin{cases} Cx = z \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $A$  est une  $(m \times n)$ -matrice,  $\text{rang}A = m < n$ ;  $b$  est un  $m$ -vecteur;  $x$  est un  $n$ -vecteur;  $C$  est une  $(k \times n)$ -matrice dont les lignes sont des  $n$ -vecteurs  $C_i, i = \overline{1, k}$ .

Notons

$I = \{1, 2, \dots, m\}$  : l'ensemble d'indices des lignes de  $A$ ,

$J = \{1, 2, \dots, n\}$  : l'ensemble d'indices des colonnes de  $A$  ou de  $C$ ,

$K = \{1, 2, \dots, k\}$  : l'ensemble d'indices des lignes de  $C$ .

Donnons les définitions suivantes :

- Un vecteur  $x$  vérifiant les contraintes  $Ax = b, \quad x \geq 0$ , est une solution réalisable (ou plan ) du problème (3.2). L'ensemble des solutions réalisables est alors donné par :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad x \geq 0\}.$$



- Soit un sous-ensemble d'indices  $J_B \subset J$  tel que  $J = J_B \cup J_N$ ,  $J_B \cap J_N = \emptyset$ ,  $|J_B| = m$ .  
L'ensemble  $J_B$  est alors appelé support si :

$$\det(A_B) = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

- Le couple  $\{x, J_B\}$  formé du plan  $x$  et du support  $J_B$  est appelé plan de support.
- Le plan de support  $\{x, J_B\}$  est non dégénéré si :

$$x_j > 0, \quad \forall j \in J_B.$$

- Une solution réalisable  $\{x, J_B\}$  est dite basique si :

$$x_j = 0, \quad \forall j \in J_N.$$

Le point  $x$  correspondant à une solution réalisable basique est alors dit point extrême de l'ensemble admissible  $S$ .

## 3.2 Concepts de base

Une solution optimale d'un problème de programmation multicritère correspond à un élément de l'ensemble des critères  $\mathbb{R}^k$ . Pour identifier les meilleurs compromis, il est alors vital de définir une relation d'ordre entre ces éléments. Ces relations d'ordre, appelées relations de dominance, correspondent à différents concepts d'optimalité existant dans la littérature : optimalité de Pareto, optimalité de Slater, optimalité de Geoffrion [35]. Mais la plus célèbre et la plus utilisée est la dominance au sens de Pareto, qui nous donne des solutions dites efficaces. C'est cette relation de dominance que nous allons utiliser dans ce travail.

### Définition 3.2. ( Vecteur idéal )

Les composantes  $z_i^*$  du vecteur critère idéal  $z^* \in \mathbb{R}^k$  sont obtenues en maximisant chacune des fonctions objectifs individuellement.

S'il existe un vecteur de décision  $x^*$  dont l'image est un vecteur critère idéal, on dit alors que  $x^*$  est une solution idéale du problème multiobjectif. Si la solution idéale existe, alors la résolution du problème multiobjectif est transformée en une résolution de plusieurs problèmes mono-objectifs. Malheureusement, dans la plupart des problèmes multiobjectifs, il n'y a pas de vecteur dans l'ensemble des solutions réalisables  $S$ , qui maximise simultanément tous les objectifs ; c'est rarement le cas.

### 3.3 Les concepts d'optimalité

Dans cette section, on essayera d'expliciter les deux principales notions d'optimalité, appliquées au problème (3.2).

#### Dominance

**Définition 3.3.** Soient deux vecteurs critères  $z^1, z^2 \in Z$ . On dit que  $z^1$  domine  $z^2$  si  $z^1 \geq z^2$ .

Un point  $z^0 \in Z$  est dit non dominé s'il n'existe pas un autre point  $z \in Z$  tel que  $z$  domine  $z^0$ .

**Remarque 3.1.** Si  $z^1$  domine  $z^2$ , alors  $z^1$  est aussi bon que  $z^2$  sur tous les critères, et meilleur que lui sur au moins un critère.

#### Dominance forte

**Définition 3.4.** Soient deux vecteurs critères  $z^1, z^2 \in Z$ . On dit que  $z^1$  domine fortement  $z^2$  si  $z^1 > z^2$ .

Un point  $z^0 \in Z$  est dit non fortement dominé s'il n'existe pas un autre point  $z \in Z$  tel que  $z$  domine fortement  $z^0$ .

**Remarque 3.2.** Si  $z^1$  domine fortement  $z^2$ , alors  $z^1$  est meilleur que  $z^2$  sur tous les critères.

#### 3.3.1 Optimalité de Pareto (efficacité)

**Définition 3.5.** Un point  $x^0 \in S$  est dit solution efficace (optimale au sens de Pareto) du problème (3.2) s'il n'existe pas d'autre point  $x \in S$  tel que  $Cx \geq Cx^0$ , c'est-à-dire :

$$\nexists x \in S, \quad x \neq x^0 \text{ tel que } \begin{cases} C_i x \geq C_i x^0, & \forall i = \overline{1, k}; \\ \text{et} \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, k\} : & C_j x > C_j x^0. \end{cases}$$

A partir d'une solution efficace, il est impossible d'augmenter la valeur d'un des critères sans diminuer la valeur d'au moins un autre critère.

L'ensemble de toutes les solutions efficaces  $x^0 \in S$  du problème (3.2) est noté  $S^E$ .

**Remarque 3.3.**

1. Si  $x^0$  est une solution efficace, alors son image  $z^0 = Cx^0$  est un point non dominé.
2. L'image de l'ensemble des solutions efficaces  $S^E$  est l'ensemble de tous les points non dominés noté par

$$Z^N = \{z \in Z, \text{ tel que il n'existe pas } z' \in Z : z' \geq z\}.$$

**Propriété 3.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $x^0 \in S^E$ .
2.  $\forall x \in S, Cx \not\geq Cx^0$ .
3. *S'il existe  $x \in S$  tel que  $Cx \geq Cx^0$  alors  $Cx = Cx^0$ .*
4. *Il n'existe pas  $x \in S \setminus \{x^0\}$  tel que  $Cx \in Cx^0 + \mathbb{R}_{\geq}^k$ .*
5.  $Z \cap (Cx^0 + \mathbb{R}_{\geq}^k) = \{Cx^0\}$ .

**Définition 3.6.** On dit que  $S^E$  est extérieurement stable, si :

$$\forall x \in S, \exists x^0 \in S^E : C_i x \leq C_i x^0, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

**Lemme 3.1.** [64, 67] *Si  $S \neq \emptyset$  est compact et la fonction objectif  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$  continue, alors  $S^E$  est non vide et extérieurement stable .*

**Exemple 3.1.** *Considérons l'exemple suivant pour illustrer les solutions efficaces et les points non dominés .*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \rightarrow \max; \\ -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max; \\ x_2 \leq 3, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

*L'espace de décision représenté sur la figure (3.1) est donné par*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 3, \quad 3x_1 - x_2 \leq 6, \quad x \geq 0\}.$$

*L'espace des critères représenté sur la figure (3.2) est donné par*

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^2 : z = Cx = (3x_1 + x_2, \quad -x_1 - 2x_2)^T, \quad x = (x_1, x_2)^T \in S\}.$$

*La ligne en gras, dans la figure 3.2, représente l'ensemble des points non dominés  $Z^N$ , qui est l'ensemble des vecteurs critères limites allant de  $Z^1 = Cx^1$  à  $Z^4 = Cx^4$ , de  $Z^4 = Cx^4$*

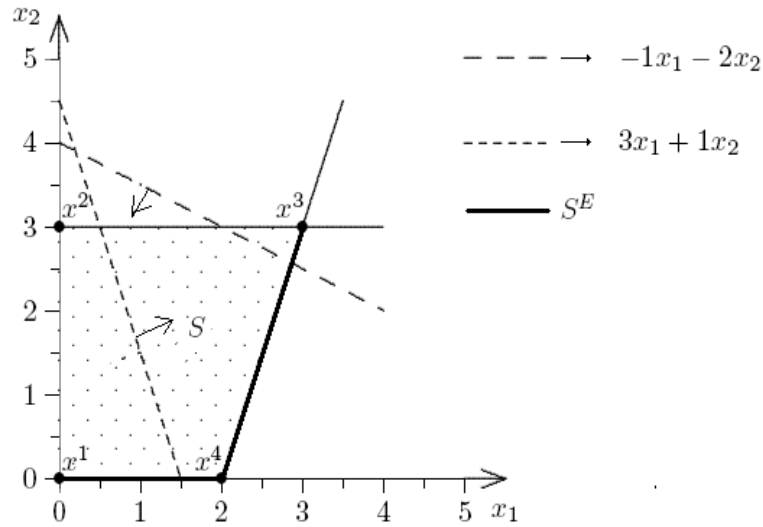


FIG. 3.1 – Représentation dans l'espace de décision.

à  $Z^3 = Cx^3$ .

Dans la figure (3.1), l'ensemble des solutions efficaces  $S^E$  est l'ensemble des images inverses des vecteurs critères dans  $Z^N$ , c'est-à-dire l'ensemble des points limites allant de  $x^1$  à  $x^4$ , de  $x^4$  à  $x^3$ .

On a bien  $\forall z^0 \in Z^N, (z^0 + \mathbb{R}_{\geq}^2) \cap Z = \{z^0\}$ .

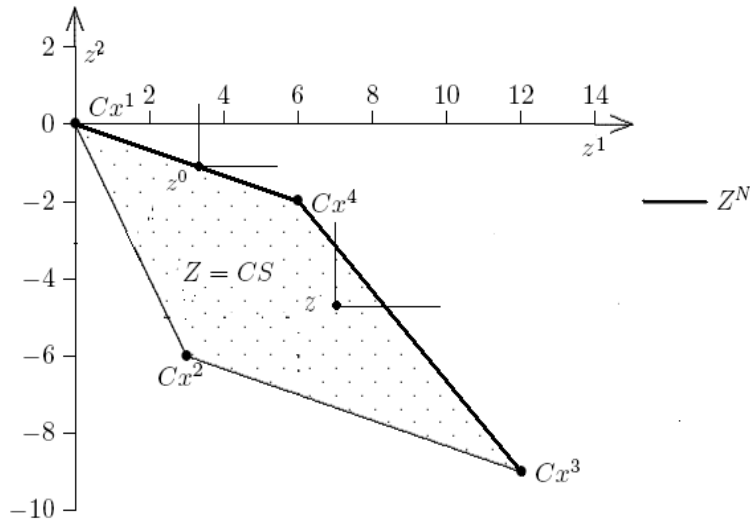


FIG. 3.2 – Représentation dans l'espace des critères.

Une des questions qui se pose, c'est l'existence et les propriétés des ensembles des solutions efficaces  $S^E$  et des points non dominés  $Z^N$ .

**Proposition 3.1.** [35]

Retranchant l'orthant positif  $\mathbb{R}_{\geq}^k$  de l'ensemble des critères  $Z$ , l'ensemble des points non dominés ne change pas, c'est-à-dire

$$Z^N = (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N.$$

**Preuve.** Le résultat est trivial si  $Z = \emptyset$ , car si  $Z = \emptyset$  alors  $Z - \mathbb{R}_{\geq}^k = \emptyset$  et les sous-ensembles non dominés sont eux aussi vides.

Si  $Z \neq \emptyset$  :

$$1) (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N \subseteq Z^N :$$

On suppose le contraire, c'est-à-dire  $(Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N \not\subseteq Z^N$ . Alors il existe  $z \in (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N$  et  $z \notin Z^N$ , on a deux cas :

1. Si  $z \notin Z$  et  $z \notin Z^N$ , alors il existe  $z' \in Z$  et  $0 \neq d \in \mathbb{R}_{\geq}^k$  tel que  $z = z' - d \implies z' \geq z$  et comme  $z' = z' - 0 \in Z - \mathbb{R}_{\geq}^k$ , alors ceci constitue une contradiction avec  $z \in (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N$ .
2. Si  $z \in Z$  et  $z \notin Z^N$ , alors il existe  $z' \in Z$  tel que  $z' \geq z$ . Comme  $z' = z' - 0 \in Z - \mathbb{R}_{\geq}^k$ , on aura ainsi une contradiction avec  $z \in (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N$ .

Donc

$$(Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N \subseteq Z^N.$$

$$2) Z^N \subseteq (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N :$$

Supposons  $Z^N \not\subseteq (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N$ . Alors il existe  $z \in Z^N$  et  $z \notin (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N$ . Donc  $\exists z' \in (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)$  tel que  $z' \geq z$ . Par conséquent, il existe  $z'' \in Z$  et  $d \in \mathbb{R}_{\geq}^k$  tel que  $z' = z'' - d \geq z$ . Il s'ensuit que  $z'' \geq z$ , ce qui constitue une contradiction avec  $z \in Z^N$ . Donc

$$Z^N \subseteq (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N. \quad \square$$

Une deuxième proposition, intuitivement claire, montre que l'ensemble des points non dominés est inclus dans la frontière de l'ensemble des critères  $Z$ .

**Proposition 3.2.** L'ensemble des points non dominés est inclus dans la frontière de l'ensemble des critères  $Z$ , c'est-à-dire :

$$Z^N \subset \partial Z.$$

**Preuve.** Soit  $z \in Z^N$ . Supposons que  $z \notin \partial Z$ , alors  $z \in \text{int}(Z)$ , ce qui implique qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B_\epsilon(z) \subset Z$ . Soit  $d \neq 0, d \in \mathbb{R}_{\geq}^k$ . On peut choisir  $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \epsilon$ , de telle sorte que  $z + \alpha d \in B_\epsilon(z)$ . Comme  $\alpha d \in \mathbb{R}_{\geq}^k$ , alors on aura  $Z \cap (z + \mathbb{R}_{\geq}^k) \neq \{z\}$ , ce qui constitue une contradiction avec  $z \in Z^N$ .

A partir des propositions 3.1, 3.2, on aura immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1.** *Si l'ensemble des critères  $Z$  (ou bien  $Z - \mathbb{R}_{\geq}^k$ ) est ouvert, alors*

$$Z^N = (Z - \mathbb{R}_{\geq}^k)^N = \emptyset.$$

En plus de l'optimalité de Pareto, d'autres concepts sont aussi utilisés.

### 3.3.2 Optimalité de Slater (efficacité faible)

**Définition 3.7.** Un point  $x^0 \in S$  est dit solution faiblement efficace (optimale au sens de Slater) du problème (3.2) s'il n'existe pas d'autre point  $x \in S$  tel que  $Cx > Cx^0$ , c'est-à-dire :

$$\nexists x \in S, \quad x \neq x^0 \text{ telle que } C_i x > C_i x^0, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

A partir d'une solution faiblement efficace, il est impossible d'améliorer tous les critères simultanément.

L'ensemble de toutes les solutions faiblement efficaces  $x^0 \in S$  du problème (3.2) est noté par  $S^{EF}$ .

**Remarque 3.4.**

1. Si  $x^0$  est une solution faiblement efficace, alors son image  $Cx^0$  est un vecteur critère non fortement dominé .
2. S'il existe  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tel que la solution optimale du problème monocritère  $\max_{x \in S} C_i x$  existe, alors cette solution optimale est une solution faiblement efficace du problème (3.2).

**Propriété 3.2.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $x^0 \in S^{EF}$ .
2.  $\forall x \in S : Cx \not> Cx^0$ .
3.  $\forall x \in S, \exists i \in \{1, 2, \dots, k\} : C_i x \leq C_i x^0$ .

4.  $\nexists x \in S$  tel que  $Cx \in Cx^0 + \text{int } \mathbb{R}_{\geq}^k = Cx^0 + \mathbb{R}_{>}^k$ .

5.  $(Cx^0 + \mathbb{R}_{>}^k) \cap Z = \emptyset$ .

Dans l'exemple de la figure 3.3, l'ensemble des points faiblement non dominés est la ligne en gras, et le point représente l'ensemble des points non dominés.

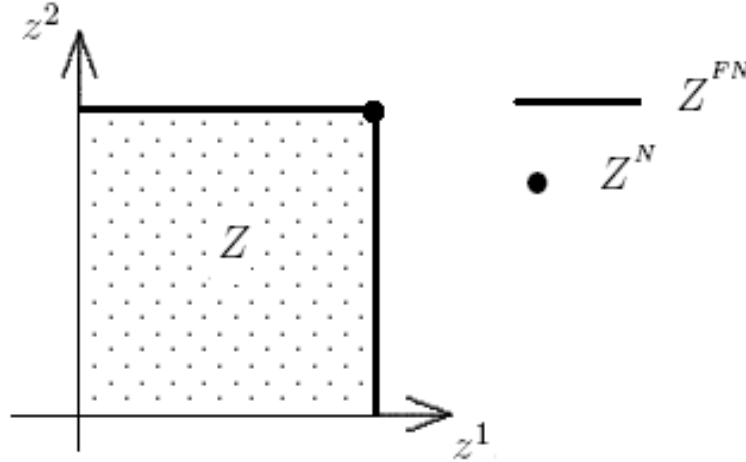


FIG. 3.3 – Représentation des points faiblement non dominés et dominés.

Soit  $S_i = \{\hat{x} \in S : C_i x \leq C_i \hat{x} \text{ pour tous } x \in S\}$  l'ensemble des solutions optimales pour le programme linéaire mono-objectif

$$\max_{x \in S} C_i x.$$

1. Si  $x^0 \in \bigcap_{i=1}^{i=k} S_i$ , alors  $x^0$  est une solution idéale du problème (3.2).
2. Si  $\bigcap_{i=1}^{i=k} S_i = \emptyset$ , alors le problème (3.2) n'admet pas de solution idéale.
3. Si  $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tel que  $x^0 \in S_i$  alors  $x^0$  est une solution faiblement efficace.

**Remarque 3.5.** La relation qui relie les deux concepts d'optimalité est que l'ensemble des solutions efficaces (points de Pareto) est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions faiblement efficaces (points de Slater) :

$$S^E \subseteq S^{EF}.$$

### 3.4 Pondération des fonctions objectifs

Le but ici est de revenir à un problème d'optimisation monocritère dont il existe de nombreuses méthodes de résolution. La manière la plus simple de procéder consiste à prendre chacune des fonctions objectifs  $C_i x$ , à leur appliquer un coefficient de pondération positif  $\lambda_i$  et à faire la somme des fonctions objectifs pondérées. On obtient alors un problème linéaire monocritère suivant :

$$\begin{cases} \lambda^T C x \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Les vecteurs  $\lambda$  sont appelés vecteurs poids et peuvent être normalisés. Ainsi, sans perte de généralité, on peut supposer que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

L'ensemble de tous les coefficients de pondération est donné par

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Sa fermeture est notée :

$$\bar{\Lambda} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Théorème 3.1.** [75, 87]

Soient  $x^0 \in S$  et  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice diagonale avec :  $d_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j^0 = 0, \\ 0 & \text{si } x_j^0 \neq 0, \end{cases}$ .  
Alors  $x^0 \in S^E \iff$  il existe  $\pi \in \mathbb{R}^k$ ,  $y^3 \in \mathbb{R}^n$  et  $y^4 \in \mathbb{R}^m$ , tels que ;

$$\begin{cases} C^T \pi + D^T y^3 + A^T y^4 = 0, \\ \pi > 0 \quad y^3 \geq 0. \end{cases}$$

On a alors le théorème classique suivant :

**Théorème 3.2.** [75]

Une solution réalisable  $x^0$  est efficace si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \Lambda \quad \text{tel que} \quad \lambda^T C x^0 = \max_{x \in S} \lambda^T C x.$$

**Preuve.**

$\implies$ )

Soit  $x^0 \in S^E$ . D'après le théorème 3.1, il existe  $\pi \in \mathbb{R}^k$ ,  $y^3 \in \mathbb{R}^n$  et  $y^4 \in \mathbb{R}^m$  tels que

$$\begin{cases} C^T \pi + D^T y^3 + A^T y^4 = 0, \\ \pi > 0 \quad y^3 \geq 0. \end{cases}$$



Soit  $\alpha = \sum_{i=1}^k \pi_i > 0$  et  $\lambda = \frac{\pi}{\alpha}$ . Le système devient :

$$\begin{cases} (C^T \lambda) \alpha + D^T y^3 + A^T y^4 = 0, \\ \alpha > 0 \quad y^3 \geq 0. \end{cases}$$

En vertu du théorème 1.6, le système suivant

$$(\lambda^T C)u \geq 0, \quad Du \geq 0, \quad Au = 0,$$

n'admet pas de solution. D'autre part, on a

$$D(x - x^0) \geq 0 \quad \text{et} \quad A(x - x^0) = 0, \quad \forall x \in S.$$

Il en résulte alors que

$$\lambda^T C(x - x^0) < 0, \quad x \in S \setminus \{x^0\}.$$

D'où

$$\lambda^T Cx \leq \lambda^T Cx^0, \quad x \in S.$$

Par conséquent, on obtient

$$\lambda^T Cx^0 = \max_{x \in S} \lambda^T Cx.$$

$\Leftarrow$ ) :

Supposons  $x^0 \in S$  n'est pas efficace. Alors il existe  $x \in S$  tel que  $Cx \geq Cx^0$ , et comme  $\lambda > 0$ , alors  $\lambda^T Cx > \lambda^T Cx^0$ . Ceci contredit l'optimalité de  $x^0$  pour le problème scalarisé  $\max_{x \in S} \lambda^T Cx$ . Par conséquent,  $x^0$  est efficace.  $\square$

### **Théorème 3.3.** [75] (*Gourith*)

*Une solution réalisable  $x^0$  est une solution optimale de Slater (faiblement efficace) si et seulement si :*

$$\exists \lambda \in \bar{\Lambda} \quad \text{tel que} \quad \lambda^T Cx^0 = \max_{x \in S} \lambda^T Cx.$$

**Preuve.**

$\Rightarrow$ )

Soit  $x^0 \in S^{EF}$ . Alors le système d'inégalités  $C_i x > C_i x^0$ ,  $i = \overline{1, k}$  n'admet pas de solution dans  $S$ , ainsi le système  $Cx - Cx^0 > 0^{(k)}$  n'admet pas de solution. D'après le théorème 1.7

$$\begin{aligned} \exists \mu \geq 0^{(k)}, \quad \mu^T (Cx - Cx^0) \leq 0, \quad \forall x \in S &\implies \mu^T Cx \leq \mu^T Cx^0, \quad \forall x \in S \\ &\implies \left( \frac{\mu}{\sum_{i=1}^k \mu_i} \right)^T Cx \leq \left( \frac{\mu}{\sum_{i=1}^k \mu_i} \right)^T Cx^0, \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

On pose  $\lambda = \left( \frac{\mu}{\sum_{i=1}^k \mu_i} \right)$ ,  $\lambda \in \bar{\Lambda}$ , d'où on aura :

$$\lambda^T Cx \leq \lambda^T Cx^0, \quad \forall x \in S \implies \lambda^T Cx^0 = \max_{x \in S} \lambda^T Cx.$$

$\Leftarrow$ )

Soit  $\lambda \in \bar{\Lambda}$  tel que  $\lambda^T Cx^0 = \max_{x \in S} \lambda^T Cx$ .

Supposons que  $x^0 \notin S^{EF}$ . Alors il existe  $x$  dans  $S$  tel que  $Cx > Cx^0$ , ce qui implique

$$C_i x > C_i x^0, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Puisque  $\lambda \geq 0^{(k)}$ , on aura alors

$$\lambda^T Cx > \lambda^T Cx^0,$$

ceci contredit notre hypothèse. Donc

$$x^0 \in S^{EF}. \quad \square$$

La pondération des fonctions objectifs a l'avantage évident de pouvoir réutiliser tous les algorithmes classiques dédiés aux problèmes d'optimisation monocritère.

### 3.5 Génération des solutions efficaces

La génération des solutions optimales de Pareto est une phase importante en optimisation multiobjectif et, mathématiquement, le problème est résolu quand l'ensemble des solutions optimales de Pareto est trouvé. Pour résoudre les problèmes multiobjectifs, il existe plusieurs méthodes de résolution. Dans tous les cas, les méthodes comprennent quatre phases :

#### 1. Recherche d'une solution réalisable de base initiale

Cette phase est la phase ordinaire de la programmation linéaire monocritère. Elle consiste à rechercher une solution réalisable de base initiale en résolvant le système des contraintes du programme.

## 2. Recherche d'un premier point extrême efficace

A partir d'une solution réalisable, il faut trouver une solution extrême efficace s'il en existe une, sinon le problème est non borné. Pour cela il faut disposer d'un test. Les tests proposés par différents auteurs sont nombreux, et ils reposent en fait sur l'équivalence entre le problème multiobjectif et le programme linéaire multiparamétrique. On peut citer la méthode de Steuer et Evans [36], la méthode de Ecker et Kouada [34, 31], la méthode de H. Isermann [48, 47], la méthode de Yu et Zeleny [87, 88].

### Méthode de H. Benson

La procédure proposée par H. Benson [7] pour la recherche d'un point initial efficace est implémentée en résolvant deux problèmes de programmation linéaire. Notons que lorsque  $S = \emptyset$ , il est clair que le problème (3.2) ne possède aucune solution efficace. Donc sans perte de généralité, on suppose que  $S \neq \emptyset$ .

Pour expliciter la procédure, on définit le programme linéaire :

$$\begin{cases} -u^T C x^0 + w^T b \longrightarrow \min, \\ u^T C - w^T A + \alpha^T = -e^T C, \\ \alpha \geq 0, \quad u \geq 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $x^0 \in S$  et  $e$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^k$  dont toutes les composantes valent 1.

La procédure de H. Benson est alors donnée par les trois étapes suivantes :

- Étape (1) : Trouver un point réalisable  $x^0 \in S$ .
- Étape (2) : S'il en existe, trouver une solution optimale  $(u^0, w^0, \alpha^0)$  de (3.4), et aller à l'étape (3), sinon arrêter.
- Étape (3) : Obtenir un point extrême, solution optimale du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda^T C x \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\lambda = (u^0 + e)$ .

Pour établir la validité de cette procédure, on va démontrer les deux résultats qui suivent. Soit  $x^0$  le point choisi à l'étape (1) de la procédure.

**Théorème 3.4.** *Si le programme (3.4) admet une solution optimale  $(u^0, w^0, \alpha^0)$ , alors le programme (3.5) avec  $\lambda = (u^0 + e)$  possède un point extrême comme solution optimale.*

**Preuve.** Soit  $(u^0, w^0, \alpha^0)$  une solution optimale du problème (3.4). Avec  $\lambda = (u^0 + e)$ , le problème dual de (3.5) est donné par

$$\begin{cases} w^T b \longrightarrow \min, \\ w^T A \geq ((u^0)^T + e^T)C. \end{cases} \quad (3.6)$$

Comme  $(u^0, w^0, \alpha^0)$  est une solution optimale de (3.4), alors  $w^0$  est une solution réalisable pour (3.6) et comme  $S \neq \emptyset$ , le programme (3.5) est un problème réalisable. De la théorie de la dualité en programmation linéaire, on déduit que (3.5), avec  $\lambda = (u^0 + e)$ , possède une solution optimale qui est un point extrême.  $\square$

Avant d'énoncer le deuxième résultat, donnons le lemme suivant de J.G.Ecker et I.A.Kouada qui est démontré en 1975.

**Lemme 3.2.** [33] *Le programme linéaire*

$$\begin{cases} e^T Cx \longrightarrow \max, \\ Cx \geq Cx^0, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

*possède une solution optimale si, et seulement si, le programme (3.2) admet une solution efficace.*

**Théorème 3.5.** *Le problème (3.4) admet une solution optimale si, et seulement si, (3.2) possède une solution efficace.*

**Preuve.** La démonstration de ce théorème se base sur le lemme 3.2 et sur la théorie de la dualité en programmation linéaire.

### 3. Recherche des solutions extrêmes efficaces

La recherche de toutes les solutions extrêmes efficaces est basée sur une caractéristique des points extrêmes efficaces qui constituent un ensemble fini de points bien enchaînés, c'est-à-dire qu'ils peuvent être reliés par une ligne continue formée de plusieurs arêtes.

**Définition 3.8.** Une base est dite efficace dans le problème (3.2), si on peut lui faire correspondre une solution de base optimale pour le problème scalarisé (3.3).

Les points extrêmes de l'ensemble des solutions réalisables du problème correspondent de manière biunivoque aux solutions de base réalisables si celles-ci ne sont pas dégénérées.

**Théorème 3.6.** [65]

*L'ensemble des points extrêmes efficaces est bien enchainé.*

Ce théorème est fondamental car c'est sur lui que se fondent toutes les méthodes de recherche des points extrêmes efficaces. Il suffit en effet de se déplacer de base efficace en base efficace afin de les identifier ; on est sûr de ne pas en oublier puisque l'ensemble de ces bases est bien enchainé.

Deux stratégies sont cependant possibles.

- Stratégie A : à partir du premier point efficace, on calcule un point voisin et on teste s'il est efficace.
- Stratégie B : à partir du premier point efficace, on cherche si un point extrême voisin est efficace et on le calcule.

Les deux stratégies ont été exploitées. Pour la stratégie(A), on trouve la méthode de Yu et Zeleny [88, 87, 89]. Quant à la stratégie (B), on la trouve dans la méthode de Philip [63] et celle de Steuer et Evans.

## 4. Générer l'ensemble des solutions efficaces

Dès que l'ensemble des solutions extrêmes efficaces est trouvé, alors l'ensemble des solutions efficaces est l'ensemble des arcs joignant deux solutions extrêmes voisines efficaces.

### Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les principaux concepts de l'optimisation multicritère.

# Chapitre 4

## Programmation linéaire multicritère à variables bornées

### 4.1 Introduction

La majorité des problèmes pratiques présentent des contraintes de bornes inférieures et supérieures sur les variables de décision. Pour cette raison, on traite dans ce chapitre les problèmes P.L.M.O à variables bornées. Le travail présenté ici est basé sur les résultats de Dimkov (1981) [29] obtenus pour le cas multicritère sur un ensemble réalisable dont les variables sont seulement bornées inférieurement ( $x \geq 0$ ). On a donc généralisé ses résultats au cas de variables bornées du type  $d^- \leq x \leq d^+$ , où  $d^-$  et  $d^+$  sont des  $n$ -vecteurs. Nous décrivons aussi une nouvelle méthode de résolution.

Considérons le problème de Programmation Linéaire Multi-Objectif (P.L.M.O) à variables bornées, s'écrivant sous la forme canonique suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} Cx = Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $A$  est une  $(m \times n)$ -matrice,  $\text{rang}A = m < n$ ;  $b$  est un  $m$ -vecteur;  $x$ ,  $d^-$  et  $d^+$  sont des  $n$ -vecteurs;  $C$  est une  $(k \times n)$ -matrice dont les lignes sont des  $n$ -vecteurs  $C_i, i = \overline{1, k}$ .

Notons

$I = \{1, 2, \dots, m\}$  : l'ensemble d'indices des lignes de  $A$ ,

$J = \{1, 2, \dots, n\}$  : l'ensemble d'indices des colonnes de  $A$  ou de  $C$ ,

$K = \{1, 2, \dots, k\}$  : l'ensemble d'indices des lignes de  $C$ .

Donnons les définitions suivantes :

- Un vecteur  $x$  vérifiant les contraintes  $Ax = b$ ,  $d^- \leq x \leq d^+$ , est une *solution*

*réalisable* ( ou *plan* ) du problème (4.1). L'ensemble des solutions réalisables est alors donné par :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+\}.$$

- Soit un sous-ensemble d'indices  $J_B \subset J$  tel que  $J = J_B \cup J_N$ ,  $J_B \cap J_N = \emptyset$ ,  $|J_B| = m$ . L'ensemble  $J_B$  est appelé support si :

$$\det(A_B) = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

- Le couple  $\{x, J_B\}$  formé du plan  $x$  et du support  $J_B$  est appelé *plan de support*.
- Le plan de support  $\{x, J_B\}$  est non dégénéré si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_B.$$

- En vertu de la partition de  $J = J_B \cup J_N$ , on peut alors écrire et fractionner les vecteurs et les matrices de la manière suivante :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = (x_j, \quad j \in J_B), \quad x_N = (x_j, \quad j \in J_N);$$

$$A = A(I, J) = (A_B | A_N), \quad A_B = A(I, J_B), \quad A_N = A(I, J_N);$$

$$C = C(K, J) = (C_B | C_N), \quad C_B = C(K, J_B), \quad C_N = C(K, J_N).$$

Dans ce travail, on ne traite que les problèmes non dégénérés, c'est à dire, toutes les solutions réalisables basiques sont non dégénérées. Rappelons qu'une solution réalisable basique  $\{x, J_B\}$  est telle que :

$$x_j = d_j^- \vee d_j^+, \quad j \in J_N.$$

## 4.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit  $\{x, J_B\}$  un plan de support du problème (4.1) et considérons un autre plan quelconque  $\bar{x} = x + \Delta x$ . L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\Delta Z = C\bar{x} - Cx = C\Delta x.$$

Par ailleurs, on a :  $\begin{cases} Ax = b \\ A\bar{x} = b \end{cases} \iff A\bar{x} = A(\Delta x + x) = A\Delta x + Ax = b \implies A\Delta x = 0.$

En posant  $\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ - \\ \Delta x_N \end{pmatrix}$ ,  $\Delta x_B = (\Delta x_j, j \in J_B)$ ,  $\Delta x_N = (\Delta x_j, j \in J_N)$ , alors l'égalité  $A\Delta x = 0$  peut s'écrire comme suit :

$$A_B \Delta x_B + A_N \Delta x_N = 0 \implies \Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N.$$

La formule d'accroissement de la fonction objectif devient alors :

$$\Delta Z = -(C_B A_B^{-1} A_N - C_N) \Delta x_N.$$

On définit la matrice des potentiels  $U$  :

$$U = C_B A_B^{-1},$$

ainsi que la matrice des estimations du plan de support  $\{x, J_B\}$  :

$$E = E(K, J) = UA - C = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{k1} & E_{k2} & \cdots & E_{kn} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $E = C_B A_B^{-1} A - C$  est représentée par ses vecteurs colonnes  $E_j$ .

On peut aussi fractionner la matrice  $E$  de la manière suivante :

$$E = E(K, J) = (E_B \mid E_N),$$

avec

$$E_B = E(K, J_B) = 0,$$

$$E_N = E(K, J_N) = C_B A_B^{-1} A_N - C_N. \quad (4.2)$$

La formule d'accroissement prend alors la forme finale suivante :

$$\Delta Z = -E_N \Delta x_N = \begin{pmatrix} - \sum_{j \in J_N} E_{1j} \Delta x_j \\ - \sum_{j \in J_N} E_{2j} \Delta x_j \\ \vdots \\ - \sum_{j \in J_N} E_{kj} \Delta x_j \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$



**La valeur de suboptimalité pour un critère  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$**

Pour tout  $i = \overline{1, k}$ , la valeur de l'estimation de suboptimalité de l'objectif  $i$  est donné par :

$$\beta_i(x, J_B) = \sum_{E_{ij} > 0, j \in J_N} E_{ij}(x_j - d_j^-) + \sum_{E_{ij} < 0, j \in J_N} E_{ij}(x_j - d_j^+). \quad (4.4)$$

### 4.3 Les solutions efficaces et leurs propriétés

**Définition 4.1.** Un point  $x^0 \in X$  est dit solution efficace du problème (4.1) s'il n'existe pas d'autre point  $x \in X$ , tel que  $Cx \geq Cx^0$ ,  $Cx \neq Cx^0$ .

Une solution efficace  $x^0$  est aussi appelée solution optimale de Pareto pour le problème (4.1).

Soit  $X^E$  l'ensemble des solutions efficaces du problème (4.1) et  $X_B^E$  celui de ses solutions efficaces basiques.

#### 4.3.1 Recherche d'un point extrême efficace initial

En s'inspirant de la procédure proposée par H.P.Benson [7, 69] pour trouver un point extrême efficace initial dans les problèmes P.L.M.O où les variables de décisions sont bornées inférieurement ( $x \geq 0$ ), on va déduire une procédure qui va tenir compte de la spécificité des contraintes du programme (4.1).

Soit le problème monocritère suivant :

$$\begin{cases} \lambda^T Cx \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour établir la procédure de résolution, on définit le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} y^T b - u^T Cx^0 - v^T d^- + w^T d^+ \longrightarrow \min, \\ y^T A - u^T C - v^T + w^T = e^T C, \\ y \in \mathbb{R}^m, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad e^T = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k, \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $x^0 \in X$ . La procédure est donnée par les trois étapes suivantes :

- Étape (1) : Trouver un point réalisable  $x^0 \in X$ .
- Étape (2) : S'il en existe une, alors trouver une solution optimale  $(y^0, u^0, v^0, w^0)$  du programme (4.6) et aller en étape (3).

- Étape (3) : Obtenir un point extrême, solution optimale du problème (4.5) avec  $(\lambda = u^0 + e)$ .

Dans la suite,  $x^0$  est le vecteur trouvé dans la première étape.

Énonçons le lemme suivant :

**Lemme 4.1.** [32, 34] *Le programme linéaire suivant :*

$$\begin{cases} e^T Cx \longrightarrow \max, \\ Cx \geq Cx^0, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases} \quad (4.7)$$

admet une solution optimale si, et seulement si, le programme (4.1) possède une solution efficace.

**Remarque 4.1.** Puisque le problème (4.6) est le dual du problème (4.7), alors le programme (4.6) admet une solution optimale si, et seulement si, le programme (4.1) possède une solution efficace.

### 4.3.2 Propriétés des solutions efficaces

**Définition 4.2.** Deux plans basiques sont dits voisins ou adjacents si leurs bases ne diffèrent que d'un seul vecteur.

Il est clair que si  $x^0$  et  $x^*$  sont deux plans basiques efficaces voisins, alors tout point de l'intervalle  $[x^0, x^*]$  est aussi efficace.

Désignons par  $X_a^{EB}(x^0)$  l'ensemble des plans basiques efficaces, voisins ( ou adjacents) du plan basique efficace  $x^0$ .

En se basant sur le théorème classique 1.6, considérons une solution optimale basique  $\{x^0, J_B\}$  du problème monocritère  $(P_\lambda)$  suivant :

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} c^\lambda x \longrightarrow \max, \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+\}, \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $c^\lambda = \lambda^T C$ .

Puisque  $\{x^0, J_B\}$  est supposée non dégénérée, alors les relations d'optimalité suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} E_j^\lambda = \lambda^T E_j \geq 0, & \text{pour } x_j^0 = d_j^-, \\ E_j^\lambda = \lambda^T E_j \leq 0, & \text{pour } x_j^0 = d_j^+, \end{cases} \quad j \in J_N. \quad (4.9)$$

On définit alors les ensembles :

$$J_N^+ = \{j \in J_N : \lambda^T E_j \geq 0, \quad x_j^0 = d_j^-\},$$

$$J_N^- = \{j \in J_N : \lambda^T E_j \leq 0, \quad x_j^0 = d_j^+\}.$$

On a bien

$$J_N^+ \cup J_N^- = J_N.$$

Il s'ensuit que

$$E_N = E(K, J_N) = (E_N^+, E_N^-); \quad E_N^+ = E(K, J_N^+), \quad E_N^- = E(K, J_N^-).$$

On a donc les inégalités suivantes :

$$\lambda^T E_N^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda^T E_N^- \leq 0.$$

Soit maintenant  $\{x^0, J_B\}$  une solution basique efficace du problème (4.1). On définit alors l'ensemble des poids  $\Lambda(x^0)$  :

$$\Lambda(x^0) = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda^T (E_N^+, -E_N^-) \geq 0, \quad \lambda > 0\}. \quad (4.10)$$

L'ensemble  $\Lambda(x^0)$  représente un cône polyédrique convexe ( en général non fermé). Soit  $\overline{\Lambda(x^0)}$  sa fermeture.

Relevons certaines propriétés de l'ensemble  $\Lambda(x^0)$ , où  $x^0$  est une solution réalisable basique efficace.

**Propriété 4.1.** *Soient  $\{x^0, J_B\}$  une solution réalisable basique efficace et  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda > 0$ . On a alors l'équivalence suivante :*

$$\lambda \in \Lambda(x^0) \iff \lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x. \quad (4.11)$$

**Preuve. Condition nécessaire**

Soit  $\lambda \in \Lambda(x^0)$ . Alors on a

$$\begin{cases} \lambda^T E_N^+ \geq 0 & \iff & \lambda^T E_j \geq 0 & x_j^0 = d_j^-, & j \in J_N^+; \\ \lambda^T E_N^- \leq 0 & \iff & \lambda^T E_j \leq 0 & x_j^0 = d_j^+, & j \in J_N^-. \end{cases} \quad (4.12)$$

Il s'ensuit que  $\{x^0, J_B\}$  est une solution basique optimale du problème  $(P_\lambda)$ . Donc

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x.$$

**Condition Suffisante**

Inversement, soit  $\lambda \in \mathbb{R}^k, \lambda > 0$  tel que :

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x.$$

Donc  $\{x^0, J_B\}$  est une solution réalisable basique optimale du problème  $(P_\lambda)$ . Les relations d'optimalité (4.9) sont alors vérifiées :

$$\lambda^T E_N^+ \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda^T E_N^- \leq 0.$$

D'où  $\lambda \in \Lambda(x^0)$ .  $\square$

En vertu de (4.11), le cône  $\Lambda(x^0)$  est appelé cône des poids optimaux du plan basique efficace  $x^0$ .

**Propriété 4.2.** *Pour que la solution réalisable  $x^0$  soit une solution efficace unique dans  $X$ , il est nécessaire, et aussi suffisant dans le cas où  $\text{rang } C = n$ , que l'on ait  $\Lambda(x^0) = \mathbb{R}_{>}^k$ .*

**Preuve. Condition nécessaire**

Supposons que  $x^0$  est une solution réalisable basique efficace unique ; il est facile de voir que les conditions du lemme 3.1 sont vérifiées pour notre problème. Donc

$$\forall x \in X, \quad C_i x \leq C_i x^0, \quad i = \overline{1, k}.$$

D'où

$$\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>}^k.$$

D'après la propriété 4.1, on conclut que  $\lambda \in \Lambda(x^0)$ . Ainsi, on obtient  $\mathbb{R}_{>}^k \subset \Lambda(x^0)$ .

L'inclusion inverse étant évidente, il s'ensuit que  $\Lambda(x^0) = \mathbb{R}_{>}^k$ .

**Condition suffisante**

Soit  $\mathbb{R}_{>}^k = \Lambda(x^0)$ , et  $\text{rang } C = n$ . Dans  $\Lambda(x^0)$ , considérons la suite des vecteurs :

$$\{\lambda_j^n\} = \left\{ \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 1, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \right\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

où la  $j^{\text{eme}}$  composante est égale à 1. Quand  $n$  tend vers l'infini, on aura

$\{\lambda_j^n\} \longrightarrow \{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}, \quad 1 \leq j \leq k$ . D'après la propriété 4.1, on a :

$$(\lambda_j^n)^T C x^0 = \max_{x \in X} (\lambda_j^n)^T C x, \quad j = \overline{1, k}.$$

Le passage à la limite dans ces égalités donne :

$$C_j x^0 = \max_{x \in X} C_j x, \quad j = \overline{1, k}. \quad (4.13)$$

Si  $\bar{x} \in X$  était une autre solution efficace, elle aurait satisfait en vertu de (4.13) les relations :

$$C_j \bar{x} \leq C_j x^0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Supposons qu'il existe un indice  $j_1$ , avec  $C_{j_1} \bar{x} < C_{j_1} x^0$ . Alors le point  $x^0$  est tel que

$$C x^0 \geq C \bar{x}, \quad C x^0 \neq C \bar{x}.$$

Ceci contredit le fait que  $\bar{x}$  est une solution efficace. Donc

$$C x^0 = C \bar{x} \quad \text{et} \quad C(\bar{x} - x^0) = 0.$$

Comme  $\text{rang } C = n$ , alors les vecteurs-colonnes de  $C$  sont linéairement indépendants et donc  $\bar{x} = x^0$ .  $\square$

**Propriété 4.3.** Soit  $X_B^E = \{x^1, x^2, \dots, x^r\}$  l'ensemble des solutions réalisables basiques efficaces du problème (4.1). Alors

$$\bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i) = \mathbb{R}_{>}^k,$$

où  $\Lambda(x^i)$  est le cône des poids optimaux du plan basique efficace  $x^i$ .

**Preuve.**

L'inclusion  $\bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i) \subset \mathbb{R}_{>}^k$  est évidente. Démontrons l'inclusion inverse : soit  $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}_{>}^k$  et considérons le problème  $(P_{\hat{\lambda}})$  suivant :

$$(\hat{\lambda})^T C x \longrightarrow \max, \quad x \in X.$$

Comme  $X$  est un ensemble compact, alors ce problème est soluble et il possède au moins une solution réalisable basique optimale  $\hat{x}$ . Du théorème 3.2, on conclut que  $\hat{x} \in X_B^E$ . En vertu de la propriété 4.1, on a  $\hat{\lambda} \in \Lambda(\hat{x})$  et donc :

$$\mathbb{R}_{>}^k \subset \bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i).$$

Par conséquent, la propriété est démontrée.  $\square$

Pour toute solution efficace basique  $x^0$ , on construit le cône des poids optimaux :

$$\Lambda(x^0) = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda^T(E_N^+, -E_N^-) \geq 0, \lambda > 0\}.$$

Comme on l'a remarqué déjà, le cône  $\Lambda(x^0)$  peut ne pas être fermé. On se propose de trouver les vecteurs générateurs  $b_1^0, b_2^0, \dots, b_{p(0)}^0$ , engendrant la fermeture  $\overline{\Lambda(x^0)}$ , où  $p(0)$  est le nombre minimal de générateurs essentiels. Pour cela, on résout le problème spécial suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k \lambda_i \longrightarrow \max, \\ \lambda^T(E_N^+, -E_N^-) \geq 0, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq 1, \quad \lambda \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

L'intersection  $\Pi$  du cône  $\overline{\Lambda(x^0)}$  avec l'hyperplan  $L = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$  forme un polyèdre dont les sommets sont les points d'intersection des générateurs recherchés avec l'hyperplan  $L$ .

Dès qu'on a l'ensemble des générateurs essentiels  $\{b_1^0, b_2^0, \dots, b_{p(0)}^0\}$  du cône  $\overline{\Lambda(x^0)}$ , on peut alors représenter ce cône sous la forme :

$$\overline{\Lambda(x^0)} = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \lambda = \sum_{j=1}^{p(0)} \alpha_j b_j^0, \alpha_j \geq 0, j = \overline{1, p(0)}\}. \quad (4.15)$$

A partir de ces générateurs essentiels, on construit les faces efficaces de l'ensemble  $X^E$  passant par le point  $x^0$ . Pour cela, pour chaque vecteur générateur essentiel  $b_l^0$ ,  $l = \overline{1, p(0)}$ , on définit l'ensemble :

$$\eta^l(x^0) = \begin{cases} x \in X : (b_l^0)^T Cx = (b_l^0)^T Cx^0, & \text{si } b_l^0 \in \Lambda(x^0), \\ \emptyset, & \text{si } b_l^0 \notin \Lambda(x^0). \end{cases} \quad (4.16)$$

L'ensemble  $\eta^l(x^0)$  représente une certaine face efficace qui passe par  $x^0$ . Pour la construire, il suffit de trouver ses sommets, en utilisant un problème spécial de P.L :

$$b_l^T Cx \longrightarrow \max, \quad x \in X, \quad (4.17)$$

Si  $\eta^l(x^0) \neq \emptyset$ ,  $\eta^l(x^0)$  sera alors l'ensemble des arcs joignant deux sommets voisins efficaces.

Tout sommet adjacent du plan efficace  $x^0$  appartient à l'une des surfaces efficaces qui passe par  $x^0$ , ce que nous affirme le théorème suivant :

**Théorème 4.1.** *Si  $x^0$  est un plan basique efficace, alors :*

$$X_a^{EB}(x^0) \subset \bigcup_{l=1}^{p(0)} \eta^l(x^0).$$

**Preuve.** Supposons le contraire, soit  $\bar{x} \in X_a^{EB}(x^0)$ , mais  $\bar{x} \notin \bigcup_{l=1}^{p(0)} \eta^l(x^0)$ , alors pour tout vecteur générateur, formant le cône  $\overline{\Lambda(x^0)}$ ,  $b_l^0$ ,  $l = \overline{1, p(0)}$ , on a :

$$(b_l^0)^T C\bar{x} < (b_l^0)^T Cx^0 = \max_{x \in X} (b_l^0)^T Cx, \quad l = \overline{1, p(0)}. \quad (4.18)$$

Comme chaque vecteur  $\lambda$  de  $\Lambda(x^0)$  peut être représenté sous la forme :

$$\lambda = \sum_{l=1}^{p(0)} \alpha_l b_l^0, \quad \alpha_l \geq 0, \quad \sum_{l=1}^{p(0)} \alpha_l > 0,$$

alors de la relation (4.18) il vient :

$$\lambda^T C\bar{x} < \lambda^T Cx^0 = \max_{x \in X} \lambda^T Cx, \quad \lambda \in \Lambda(x^0). \quad (4.19)$$

Soit  $x^* = \alpha x^0 + (1 - \alpha)\bar{x}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , avec  $x^* \in X^E$ . En vertu du théorème (3.2),  $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}_{>}^k$  tel que  $(\lambda^*)^T Cx^* = \max_{x \in X} (\lambda^*)^T Cx$ .

Il en résulte que

$$\begin{cases} (\lambda^*)^T Cx^* \geq (\lambda^*)^T Cx^0, \\ \text{et} \\ (\lambda^*)^T Cx^* \geq (\lambda^*)^T C\bar{x}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Montrons que les inégalités (4.20) sont en fait des égalités. Supposons  $(\lambda^*)^T Cx^* > (\lambda^*)^T C\bar{x}$ , alors de (4.20) il vient :

$$(\lambda^*)^T Cx^* = \alpha(\lambda^*)^T Cx^0 + (1 - \alpha)(\lambda^*)^T C\bar{x}.$$

D'où

$$(\lambda^*)^T Cx^* = \alpha(\lambda^*)^T Cx^* + (1 - \alpha)(\lambda^*)^T Cx^* > \alpha(\lambda^*)^T Cx^0 + (1 - \alpha)(\lambda^*)^T C\bar{x} = (\lambda^*)^T Cx^*.$$

De la contradiction, on déduit que

$$(\lambda^*)^T Cx^* = (\lambda^*)^T C\bar{x}.$$

De la même manière on démontre  $(\lambda^*)^T Cx^* = (\lambda^*)^T Cx^0$ .

Comme  $(\lambda^*)^T Cx^* = (\lambda^*)^T Cx^0 = \max_{x \in X} (\lambda^*)^T Cx$ , par la propriété (4.1) on a  $\lambda^* \in \Lambda(x^0)$ .

Donc  $(\lambda^*)^T C\bar{x} = (\lambda^*)^T Cx^0$  et cela contredit la relation (4.19). Par conséquent,

$$X_a^{EB}(x^0) \subset \bigcup_{l=1}^{p(0)} \eta^l(x^0). \quad \square$$

Soient  $X_B^E = \{x^1, x^2, \dots, x^r\}$  l'ensemble des solutions réalisables basiques efficaces du problème (4.1),  $b_1^i, b_2^i, \dots, b_{p(i)}^i$  les vecteurs générateurs essentiels du cône polyédrique  $\overline{\Lambda(x^i)}$ , où  $p(i)$  est le nombre minimal de vecteurs essentiels du cône  $\overline{\Lambda(x^i)}$ ,  $i = \overline{1, r}$ .

Introduisons les faces efficaces qui passent par  $x^i$  :

$$\eta^l(x^i) = \begin{cases} x \in X : (b_l^i)^T Cx = (b_l^i)^T Cx^i, & \text{si } b_l^i \in \Lambda(x^i), \\ \emptyset, & \text{si } b_l^i \notin \Lambda(x^i). \end{cases} \quad (4.21)$$

Le théorème suivant nous donne une description complète de l'ensemble  $X^E$ .

**Théorème 4.2.** *L'ensemble des solutions efficaces  $X^E$  du problème (4.1), se confond avec l'ensemble :*

$$H = \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{l=1}^{p(i)} \eta^l(x^i) = X^E.$$

**Preuve.** De la définition 4.21 et de la propriété 4.1, il s'ensuit que pour tout  $\hat{x} \in \eta^l(x^i)$ ,  $\eta^l(x^i) \neq \emptyset$ , la condition suivante est vérifiée :

$$(b_l^i)^T C\hat{x} = \max_{x \in X} (b_l^i)^T Cx.$$

D'où  $\hat{x} \in X^E$  et donc l'inclusion  $H \subset X^E$  est montrée.

Démontrons l'inclusion inverse :

Soit  $x^0 \in X^E$ , d'après le théorème (3.1), il existe  $\lambda^0 \in \mathbb{R}_{>}^k$  tel que :

$$(\lambda^0)^T Cx^0 = \max_{x \in X} (\lambda^0)^T Cx. \quad (4.22)$$

Comme  $\lambda^0 \in \mathbb{R}_{>}^k = \bigcup_{i=1}^r \Lambda(x^i)$ , d'après la propriété 4.3 il existe alors un indice  $s$ ,  $1 \leq s \leq r$ , tel que  $\lambda^0 \in \Lambda(x^s)$ , c'est à dire :

$$\exists \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, p(s)}, \quad \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i = 1 \quad \text{tel que} \quad \lambda^0 = \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i b_i^s.$$

De la relation 4.22, il vient :

$$\sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i (b_i^s)^T Cx^0 = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i (b_i^s)^T Cx. \quad (4.23)$$

Le point  $x^s$  par la propriété 4.1 satisfait la condition :

$$(\lambda^0)^T Cx^s = \max_{x \in X} (\lambda^0)^T Cx, \quad \lambda^0 \in \Lambda(x^s). \quad (4.24)$$



Comme  $x^0 \in X^E$  et  $\lambda^0 = \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i b_i^s \in \Lambda(x^s)$  à l'aide des égalités (4.23) et (4.24), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i (b_i^s)^T C x^0 = \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i (b_i^s)^T C x^s. \quad (4.25)$$

De nouveau, en vertu de la propriété 4.1, on a :

$$(b_i^s)^T C x^s = \max_{x \in X} (b_i^s)^T C x, \quad 1 \leq i \leq p(s).$$

Alors

$$(b_i^s)^T C x^s \geq (b_i^s)^T C x^0, \quad 1 \leq i \leq p(s).$$

Montrons qu'il existe un indice  $m \in \{1, 2, \dots, p(s)\}$  tel que

$$(b_m^s)^T C x^s = (b_m^s)^T C x^0.$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire,  $(b_i^s)^T C x^s > (b_i^s)^T C x^0, \quad \forall i = \overline{1, p(s)}$ .

Comme  $\alpha_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p(s)\}$ , alors

$$\alpha_i (b_i^s)^T C x^s \geq \alpha_i (b_i^s)^T C x^0.$$

De plus, on a  $\sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i = 1$ , donc

$$\exists m \in \{1, 2, \dots, p(s)\} \text{ tel que } \alpha_m (b_m^s)^T C x^s > \alpha_m (b_m^s)^T C x^0,$$

il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i (b_i^s)^T C x^s > \sum_{i=1}^{p(s)} \alpha_i (b_i^s)^T C x^0.$$

Contradiction avec l'égalité (4.25). Alors il existe un indice  $m, \quad 1 \leq m \leq p(s)$ , tel que :

$$(b_m^s)^T C x^s = (b_m^s)^T C x^0 \implies x^0 \in \eta^m(x^s).$$

Donc  $X^E \subset H$ . Par conséquent,  $X^E = H$ .  $\square$

**Remarque 4.2.** Le théorème 4.2 donne une description complète de  $X^E$ . Cette description peut être faite si l'ensemble  $X_B^E$  est connu.

Comment trouver l'ensemble de tous les points efficaces basiques à partir d'un point efficace basique  $x^0$  ?

Il est connu [87] que l'ensemble  $X_B^E$  est connexe, c'est à dire pour tous  $x^*$  et  $\bar{x}$  de  $X_B^E$ , il existe une suite d'éléments de  $X_B^E$ ,  $x^1, x^2, \dots, x^s$  tels que  $x^i$  et  $x^{i+1}$ ,  $i = \overline{1, s-1}$ , sont adjacents, avec  $x^1 = x^*$  et  $x^s = \bar{x}$ .

Soit  $x^0$  un plan basique efficace initial, et  $\bar{x}$  un autre élément arbitraire de  $X_B^E$ . En vertu de la connexité de  $X_B^E$ , il existe des points  $x^1, x^2, \dots, x^s$  de  $X_B^E$  tels que  $x^1 = x^0$ ,  $x^s = \bar{x}$ , avec  $x^i$  et  $x^{i+1}$  adjacents,  $i = \overline{1, s-1}$ . Pour le point  $x^1 = x^0$ , construisons l'ensemble  $\bigcup_{l=1}^{p(1)} \eta^l(x^1)$ , où  $p(1)$  est le nombre de vecteurs générateurs essentiels formant le cône  $\Lambda(x^1)$ . En vertu du théorème 4.1, on a forcément  $x^2 \in \bigcup_{l=1}^{p(1)} \eta^l(x^1)$ , pour lequel on construit l'ensemble  $\bigcup_{l=1}^{p(2)} \eta^l(x^2)$ . En appliquant le théorème 4.1, on aura  $x^3 \in \bigcup_{l=1}^{p(2)} \eta^l(x^2)$ . En continuant ce processus, on aura  $x^s = \bar{x}$ , avec  $x^s \in \bigcup_{l=1}^{p(s-1)} \eta^l(x^{s-1})$ . On a ainsi démontré qu'en partant de  $x^0$  ( plan basique efficace initial) et en construisant successivement les ensembles  $\eta^l(x^i)$ , on est arrivé à trouver n'importe quel élément de  $X_B^E$ .

## 4.4 Les solutions $\epsilon$ -efficaces d'un problème de P.L.M.O

**Définition 4.3.** Un point  $x^\epsilon \in X$  est appelé  $\epsilon$ -efficace ( subefficace ) dans le problème (4.1), s'il existe un point efficace  $x^0$  tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

où  $\epsilon$  est un nombre réel positif ou nul arbitraire.

Dorénavant, l'ensemble des solutions  $\epsilon$ -efficaces sera désigné par  $X_\epsilon^E$ .

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition des solutions  $\epsilon$ -efficaces :

1.  $X^E \subset X_\epsilon^E$ ,  $\forall \epsilon > 0$  et  $X^E = X_\epsilon^E$ , pour  $\epsilon = 0$ .
2. Si  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$ , alors  $X_{\epsilon_2}^E \subset X_{\epsilon_1}^E$ .

**Lemme 4.2.** Le point  $x^\epsilon \in X$  est  $\epsilon$ -efficace dans le problème (4.1) si, et seulement si, il existe un point efficace  $x^0 \in X$  tel que pour tout vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , satisfaisant la condition  $\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x$ , l'inégalité suivante a lieu :

$$\lambda^T (C x^0 - C x^\epsilon) \leq \epsilon. \quad (4.26)$$

**Preuve. Condition nécessaire**

Soit  $x^\epsilon$  un point  $\epsilon$ -efficace dans  $X$ . Alors il existe un point efficace  $x^0 \in X$  tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

En vertu du théorème 3.2,  $\exists \lambda > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  tel que  $\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x$ . D'où

$$\lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \lambda_i \epsilon, \quad \forall i = \overline{1, k}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon \implies \lambda^T (C x^0 - C x^\epsilon) \leq \epsilon.$$

**Condition suffisante**

Supposons que pour une certaine solution efficace  $x^0$ , un vecteur  $\lambda^0$  tel que,

$\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^k$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i^0 = 1$  et un certain point  $x^\epsilon \in X$ , les conditions du lemme sont remplies.

Soit

$$X^0 = \{\tilde{x} \in X : (\lambda^0)^T C \tilde{x} = \max_{x \in X} (\lambda^0)^T C x\}.$$

D'après le théorème 3.2, tout point  $\tilde{x}$  de  $X^0$  est un point efficace. Considérons alors le problème :

$$\tilde{\epsilon} \longrightarrow \max, \quad C_i \tilde{x} = C_i x^\epsilon + \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{x} \in X^0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (4.27)$$

Soit  $(\hat{x}, \hat{\epsilon})$  une solution optimale du problème (4.27). Puisque  $\hat{x} \in X^0$ , alors  $\hat{x}$  est une solution efficace. Montrons que  $\hat{\epsilon} \leq \epsilon$ . En supposant le contraire, alors on aura :

$$C_i \hat{x} = C_i x^\epsilon + \hat{\epsilon} > C_i x^\epsilon + \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

Donc

$$\lambda_i^0 C_i \hat{x} > \lambda_i^0 C_i x^\epsilon + \lambda_i^0 \epsilon, \quad i = \overline{1, k} \implies (\lambda^0)^T C \hat{x} > (\lambda^0)^T C x^\epsilon + \epsilon.$$

Comme  $x^0$  et  $\hat{x}$  sont dans  $X^0$ , alors  $(\lambda^0)^T C \hat{x} = (\lambda^0)^T C x^0$ ; par suite on obtient :

$$(\lambda^0)^T C x^0 > (\lambda^0)^T C x^\epsilon + \epsilon.$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse du lemme, c'est-à-dire, la relation (4.26) supposée vraie. Par conséquent, il existe un point efficace  $\hat{x} \in X$  tel que  $C_i \hat{x} \leq C_i x^\epsilon + \epsilon$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Donc  $x^\epsilon$  est un point  $\epsilon$ -efficace. Le lemme est démontré.  $\square$

**Théorème 4.3. (Théorème de subefficacité)**

Le point  $x^\epsilon \in X$  est  $\epsilon$ -efficace si, et seulement si, il existe un support  $J_B$  et un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , tels que :

$$\sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon,$$

où

$$E^\lambda = u^T A - c^\lambda = (E_j^\lambda, j \in J),$$

$u$  est le  $m$ -vecteur vérifiant l'équation  $u^T A_B - \lambda^T C_B = 0$ , c'est-à-dire,  $u^T = c_B^\lambda A_B^{-1}$ .

**Preuve.**

**Condition nécessaire :**

Soit  $x^\epsilon$  un point  $\epsilon$ -efficace dans  $X$ , alors il existe un point efficace  $x^0 \in X^E$  tel que :

$$C_i x^0 - C_i x^\epsilon \leq \epsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

En vertu du théorème 3.2,  $\exists \lambda > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , tel que :  $\lambda^T C x^0 = \max_{x \in X} \lambda^T C x$ .

On a alors

$$\lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \lambda_i \epsilon, \quad i = \overline{1, k},$$

ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (C_i x^0 - C_i x^\epsilon) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \epsilon.$$

D'où

$$\lambda^T (C x^0 - C x^\epsilon) \leq \epsilon \implies \lambda^T C x^0 - \lambda^T C x^\epsilon \leq \epsilon \implies c^\lambda (x^0 - x^\epsilon) \leq \epsilon.$$

Par conséquent, le point  $x^\epsilon$  est une solution  $\epsilon$ -optimale du problème monocritère  $(P_\lambda)$  :

$$c^\lambda x \longrightarrow \max, \quad Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+.$$

D'après le théorème 2.2 [38] il existe un support  $J_B$  tel que l'estimation de suboptimalité  $\beta^\lambda(x^\epsilon, J_B)$  du plan de support  $\{x^\epsilon, J_B\}$  soit inférieure ou égale à  $\epsilon$ , où

$$\beta^\lambda(x^\epsilon, J_B) = \sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

La nécessité est ainsi démontrée.

**Condition suffisante :**

Supposons que pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}^k, \lambda > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  et pour un certain plan de support  $\{x^\epsilon, J_B\}$ , les conditions du théorème sont remplies, c'est à dire :

$$\sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

Considérons le problème monocritère (  $P_\lambda$  ) suivant :

$$\begin{cases} c^\lambda x = \lambda^T Cx \longrightarrow \max, \\ x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Soit  $x^0$  une solution optimale de ce problème. D'après le théorème 3.2, c'est une solution efficace du problème (4.1).

Développons alors l'expression :

$$c^\lambda (x^0 - x^\epsilon) = c^\lambda \Delta x = c_B^\lambda \Delta x_B + c_N^\lambda \Delta x_N.$$

Puisque  $x^0$  et  $x^\epsilon \in X$  alors on aura  $A \Delta x = 0$  et  $\Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N$ . En remplaçant, on obtient

$$c^\lambda (x^0 - x^\epsilon) = c^\lambda \Delta x = (-c_B^\lambda A_B^{-1} A_N + c_N^\lambda) \Delta x_N = -E_N^\lambda (x_N^0 - x_N^\epsilon).$$

Donc

$$c^\lambda \Delta x = c^\lambda (x^0 - x^\epsilon) = \lambda^T (Cx^0 - Cx^\epsilon) = \sum_{j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - x_j^0).$$

Comme  $d^- \leq x^0 \leq d^+$ , on aura :

$$\begin{cases} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - x_j^0) \leq E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^-), & \text{si } E_j^\lambda > 0, \\ E_j^\lambda (x_j^\epsilon - x_j^0) \leq E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^+), & \text{si } E_j^\lambda < 0. \end{cases}$$

De là, on tire

$$\lambda^T (Cx^0 - Cx^\epsilon) = \sum_{j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - x_j^0) \leq \sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^\epsilon - d_j^+) \leq \epsilon.$$

En vertu du lemme 4.2, on déduit que  $x^\epsilon$  est une solution  $\epsilon$ -efficace dans le problème (4.1).  $\square$

## 4.5 Recherche d'une solution efficace ou $\epsilon$ -efficace

A partir du théorème 4.3, on peut inclure dans la méthode de recherche des solutions efficaces une procédure qui permet d'arrêter le processus lorsque une solution  $\epsilon$ -efficace est obtenue. Notre algorithme s'inspire de la procédure de H. Benson [7] pour trouver le paramètre  $\lambda$  et utilise la méthode adaptée de résolution des problèmes de programmation linéaire monocritère [16]. Il a pour but de construire un plan de support  $\epsilon$ -efficace ou carrément efficace. Une itération de cet algorithme est résumée dans les étapes suivantes :

**Étape (1)** Trouver une solution réalisable  $x^0$  du problème (4.1).

- Si elle existe, aller à **l'étape (2)**
- Sinon arrêter, le problème est irréalisable.

**Étape(2)** Trouver une solution optimale  $(y^0, u^0, v^0, w^0)$  du programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} y^T b - u^T C x^0 - v^T d^- + w^T d^+ \longrightarrow \min, \\ y^T A - u^T C - v^T + w^T = e^T C, \\ y \in \mathbb{R}^m, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad e^T = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k, \end{cases}$$

et aller à **l'étape (3)**

**Étape (3)** Trouver le vecteur  $\lambda = (u^0 + e)$  et aller à **l'étape (4)** .

**Étape (4)** Résoudre le programme linéaire monocritère suivant :

$$\begin{cases} \lambda^T C x \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases}$$

en commençant par le plan de support initial  $\{x^0, J_B\}$  et en choisissant  $\epsilon \geq 0$ .

1. **Calculer le vecteur des estimations :**

$$E_N^\lambda = (c_B^\lambda)^T A_B^{-1} A_N - c_N^\lambda.$$

2. **Calculer la valeur de subefficacité**

$$\beta^\lambda(x^0, J_B) = \sum_{E_j^\lambda > 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^0 - d_j^-) + \sum_{E_j^\lambda < 0, j \in J_N} E_j^\lambda (x_j^0 - d_j^+).$$

- Si  $\beta^\lambda(x^0, J_B) = 0$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{x^0, J_B\}$  plan de support efficace.
- Si  $\beta^\lambda(x^0, J_B) < \epsilon$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{x^0, J_B\}$  plan de support  $\epsilon$ -efficace.

- Si  $\beta^\lambda(x^0, J_B) > \epsilon$ , aller en 3.

### 3. Changement de plan :

- Calculer la direction d'amélioration  $l$  :

$$\begin{cases} l_j = d_j^- - x_j^0 & \text{si } E_j^\lambda > 0, \\ l_j = d_j^+ - x_j^0 & \text{si } E_j^\lambda < 0, \\ l_j = 0 & \text{si } E_j^\lambda = 0, \\ l_B = -A_B^{-1} A_N l_N. \end{cases} \quad j \in J_N \quad (4.29)$$

- Calculer le pas optimal  $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}\}$ ,  $\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j$ , avec

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j^0}{l_j} & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j^0}{l_j} & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_B$$

- Calculer  $\bar{x} = x^0 + \theta^0 l$ ; deux cas peuvent alors se présenter :

- Si  $\theta^0 = 1$ , le processus s'arrête et le plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  est efficace.
- Si  $\theta^0 < 1$ , calculer l'estimation de subefficacité correspondant au plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  :

$$\beta^\lambda(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0) \beta^\lambda(x, J_B).$$

- Si  $\beta^\lambda(\bar{x}, J_B) < \epsilon$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{\bar{x}, J_B\}$  plan de support  $\epsilon$ -efficace.
- Si  $\beta^\lambda(\bar{x}, J_B) > \epsilon$ , aller en (4).

### 4. Changement de support :

- Calculer le pseudoplan  $\kappa$  correspondant :

$$\kappa = x^0 + l.$$

- Calculer  $\alpha_0$  :

$$\alpha_0 = \begin{cases} \kappa_{j_1} - d_{j_1}^- & \text{si } \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^-, \\ \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+ & \text{si } \bar{x}_{j_1} = d_{j_1}^+. \end{cases}$$

- Calculer le vecteur  $t$  :

$$\begin{cases} t_{j_1} = -\text{sign } \alpha_0, & t_j = 0, \quad j \neq j_1, \quad j \in J_B, \\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N. \end{cases}$$

- Calculer  $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min_{j \in J_N} \sigma_j$  où

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j^\lambda}{t_j} & \text{si } E_j^\lambda t_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j^\lambda = 0, \quad t_j < 0, \\ \infty & \text{si non} \quad . \end{cases}$$

- Poser  $\overline{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ .

5. Calculer l'estimation de subefficacité correspondant au plan de support  $\{\overline{x}, \overline{J}_B\}$  :

$$\beta^\lambda(\overline{x}, \overline{J}_B) = \beta^\lambda(\overline{x}, J_B) - \sigma^0 |\alpha_0|.$$

- Si  $\beta^\lambda(\overline{x}, \overline{J}_B) = 0$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{\overline{x}, \overline{J}_B\}$  plan de support efficace.
- Si  $\beta^\lambda(\overline{x}, \overline{J}_B) < \epsilon$ , alors le processus de résolution s'arrête avec  $\{\overline{x}, \overline{J}_B\}$  plan de support  $\epsilon$ -efficace.
- Si  $\beta^\lambda(\overline{x}, \overline{J}_B) > \epsilon$ , on pose  $x^0 = \overline{x}$  et  $J_B = \overline{J}_B$  et aller au point 1 de l'étape (4).

## 4.6 Exemple Numérique

Soit le programme linéaire multicritère suivant :

$$4x_1 + x_2 \longrightarrow \max,$$

$$x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18, \end{cases} \quad (4.30)$$

$$3 \leq x_1 \leq 6, \quad 2 \leq x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \quad 0 \leq x_4 \leq 6, \quad 0 \leq x_5 \leq 5.$$

- Soit  $x^0 = (3, 2, 2, 6, 5)$  une solution réalisable de ce problème.



– Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} y^T b - u^T C x^0 - v^T d^- + w^T d^+ \longrightarrow \min, \\ y^T A - u^T C - v^T + w^T = e^T C, \\ y \in \mathbb{R}^m, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad e^T = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k, \end{cases}$$

Le problème est donc

$$\begin{cases} 7y_1 + 18y_2 + 18y_3 - 14u_1 - 7u_2 - 3v_1 - 2v_2 + 6w_1 + 5w_2 + 2w_3 + 6w_5 + 5w_5 \longrightarrow \min, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 4u_1 - u_2 - v_1 + w_1 = 4; \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 - u_1 - 3u_2 - v_2 + w_2 = 5; \\ y_1 - v_3 + w_3 = 0; \\ y_2 - v_4 + w_4 = 0; \\ y_3 - v_5 + w_5 = 0; \\ y \in \mathbb{R}^3, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0. \end{cases}$$

La solution optimale obtenue de ce problème est  $(y^0, u^0, v^0, w^0) = (4.8578, 0.0471, 0, 0, 0, 0.9529, 0, 4.8586, 0.0471, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

– Résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \lambda^T C x \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases}$$

où

$$\lambda = u^0 + e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le problème à résoudre est donc

$$\begin{aligned} & 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max, \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18, \end{cases} \quad (4.31) \\ & 3 \leq x_1 \leq 6, \quad 2 \leq x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \quad 0 \leq x_4 \leq 6, \quad 0 \leq x_5 \leq 5. \end{aligned}$$

Soit le plan de support initial  $\{x^0, J_B\}$ , où  $x^0 = (3, 2, 2, 6, 5)$ ,  $J_B = \{3, 4, 5\}$ .

1. Le vecteur des estimations vaut

$$(E^\lambda)_N^T = (E_1^\lambda, E_2^\lambda) = c_B^\lambda A_B^{-1} A_N - c_N^\lambda = (-5, -4).$$

L'estimation de subefficacité est égale à :

$$\begin{aligned}\beta^\lambda(x, J_B) &= E_1^\lambda(x_1 - d_1^+) + E_2^\lambda(x_2 - d_2^+) \\ &= -5(3 - 6) - 4(2 - 5) \\ &= 27.\end{aligned}$$

En calculant la direction d'amélioration  $l$ , on trouve

$$l_N^T = (l_1, l_2) = (3, 3); \quad l_B^T = (-A_B^{-1}A_N l_N)^T = (l_3, l_4, l_5) = (-6, -15, -15).$$

2. Le pas optimal  $\theta^0$  est calculé comme suit :

$$\theta^0 = \min(\theta_{j_1}, 1), \quad \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

où

$$\begin{cases} \theta_3 = \frac{d_3^- - x_3}{l_3} = \frac{0 - 2}{-6} = \frac{1}{3}, \\ \theta_4 = \frac{d_4^- - x_4}{l_4} = \frac{0 - 6}{-15} = \frac{2}{5}, \\ \theta_5 = \frac{d_5^- - x_5}{l_5} = \frac{0 - 5}{-15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Donc

$$\theta^0 = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\} = \theta_3 = \theta_5 = \frac{1}{3}.$$

En prenant  $\theta^0 = \theta_3 = \frac{1}{3}$ ,  $j_1 = 3$ , la nouvelle solution réalisable obtenue est la suivante :

$$\bar{x} = x^0 + \theta^0 l = (3, 2, 2, 6, 5) + \frac{1}{3}(3, 3, -6, -15, -15) = (4, 3, 0, 1, 0).$$

3. La valeur de subefficacité correspondant au plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  est

$$\beta^\lambda(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta^\lambda(x, J_B) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)27 = 18.$$

Alors le plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  n'est pas efficace. Afin de choisir l'indice  $j_0 \in J_N$  pour lequel il faudra remplacer l'indice sortant de la base, faisons une itération duale. Pour cela, posons

$$\alpha_0 = \kappa_3 - d_3^- = x_3 + l_3 - d_3^- = 2 - 6 - 0 = -4.$$

Alors

$$t_B^T = (t_3, t_4, t_5) = (1, 0, 0), \quad t_N^T = (t_1, t_2) = t_B^T A_B^{-1} A_N = (1, 1).$$

On calcule maintenant

$$\sigma^0 = \min(\sigma_1, \sigma_2), \quad \text{où} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{-E_1^\lambda}{t_1} = 5, \\ \sigma_2 = \frac{-E_2^\lambda}{t_2} = 4, \end{cases}$$

$\sigma^0 = \min\{5, 4\} = 4 = \sigma_2$ ,  $j_0 = 2$ . On aura donc

$$\overline{J}_B = J_B \setminus \{3\} \cup \{2\} = \{2, 4, 5\}, \quad \beta^\lambda(\overline{x}, \overline{J}_B) = \beta^\lambda(\overline{x}, J_B) - \sigma^0 \mid \alpha_0 \mid = 18 - 16 = 2.$$

Alors le plan de support  $\{\overline{x}, \overline{J}_B\}$  n'est pas efficace.

On recommence une nouvelle itération avec le plan de support  $\{x^0, J_B\}$ , où

$$x^0 = (4, 3, 0, 1, 0) \quad \text{et} \quad J_B = \{2, 4, 5\}; \quad J_N = \{1, 3\}.$$

1. Calculons alors le vecteur des estimations  $E_N^\lambda$  :

$$(E_N^\lambda)^T = c_B^\lambda A_B^{-1} A_N - c_N^\lambda = (E_1^\lambda, E_3^\lambda) = (-1, 4).$$

D'où

$$l_N^T = (l_1, l_3) = (2, 0), \quad l_B^T = (l_2, l_4, l_5) = (-2, 2, -2).$$

2. Le pas optimal  $\theta^0$  est calculé comme suit :

$$\theta^0 = \min(\theta_{j_1}, 1), \quad \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

où

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{d_2^- - x_2}{l_2} = \frac{2-3}{-2} = \frac{1}{2}, \\ \theta_4 = \frac{d_4^+ - x_4}{l_4} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}, \\ \theta_5 = \frac{d_5^- - x_5}{l_5} = \frac{0-0}{2} = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\theta^0 = 0 = \theta_5, \quad \text{alors} \quad j_1 = 5.$$

Le nouveau plan obtenu est le suivant :

$$\overline{x} = x^0 + \theta^0 l = (4, 3, 0, 1, 0).$$

3. La valeur de subefficacité ne change pas :

$$\beta^\lambda(\overline{x}, J_B) = (1 - \theta^0) \beta^\lambda(x, J_B) = (1 - 0)2 = 2.$$

Alors le plan de support  $\{\bar{x}, J_B\}$  n'est pas efficace.

Calculer  $\alpha_0$  :

$$\alpha_0 = \kappa_5 - d_5^- = x_5 + l_5 - d_5^- = 0 - 2 - 0 = -2.$$

Alors

$$t_B^T = (t_2, t_4, t_5) = (0, 0, 1), \quad t_N^T = (t_1, t_3) = t_B^T A_B^{-1} A_N = (1, -2), \quad \sigma^0 = \min(\sigma_1, \sigma_3),$$

où

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{-E_1^\lambda}{t_1} = \frac{1}{1} = 1, \\ \sigma_3 = \frac{-E_3^\lambda}{t_2} = \frac{-4}{-2} = 2. \end{cases}$$

Alors  $\sigma^0 = 1 = \sigma_1$ ,  $j_0 = 1$ .

Il s'ensuit que

$$\overline{J}_B = \{2, 4, 5\} \setminus \{5\} \cup \{1\} = \{2, 4, 1\}.$$

4. L'estimation de subefficacité correspondant au nouveau plan de support  $\{\bar{x}, \overline{J}_B\}$  est

$$\beta^\lambda(\bar{x}, \overline{J}_B) = \beta^\lambda(\bar{x}, J_B) - \sigma^0 \mid \alpha_0 \mid = 2 - 2 = 0.$$

Alors le plan de support  $\{x, J_B\}$ , où  $x = (4, 3, 0, 1, 0)$ ,  $J_B = \{2, 4, 1\}$  est efficace.

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème de programmation linéaire multicritère sur un polyèdre, où les variables de décision sont bornées inférieurement et supérieurement. Après avoir donné certaines propriétés du cône polyédrique des poids optimaux et défini les solutions  $\epsilon$ -efficaces, où  $\epsilon$  est un nombre positif ou nul donné à l'avance, nous avons formulé un théorème de caractérisation de ces solutions  $\epsilon$ -efficaces. A partir de ce théorème, on peut inclure dans la méthode de recherche des solutions efficaces une procédure qui permet d'arrêter le processus lorsque une solution  $\epsilon$ -efficace est obtenue.

# Conclusion générale

Après avoir rappelé certaines notions d'algèbre linéaire et d'analyse convexe dans le premier chapitre, nous avons présenté dans le deuxième chapitre la méthode adaptée pour la résolution des problèmes linéaires mono-objectifs à variables bornées. Cette méthode a la particularité de tenir compte des caractéristiques des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leur modélisation première. Elle possède un critère d'arrêt si une certaine précision obtenue est satisfaisante. En effet, le calcul d'un nombre, appelé estimation de suboptimalité, permet d'estimer l'écart entre la valeur de la fonction objectif à une itération donnée et sa valeur optimale. Les algorithmes qui sont déduits de cette méthode exploitent au maximum la structure particulière des problèmes d'optimisation pour plus d'efficacité.

Vu que la majorité des problèmes pratiques présentent des critères multiples, nous avons pensé à appliquer cette méthode afin de trouver les solutions efficaces pour les programmes linéaires multicritères.

Avant de présenter la méthode, on a donné quelques rappels sur les notions fondamentales de l'optimisation multicritère dont les variables de décision sont bornées inférieurement. Le théorème classique d'équivalence entre les problèmes multicritères et les problèmes monocritères paramétriques nous permet de calculer des solutions efficaces pour les problèmes multicritères à partir de la résolution d'un problème monocritère paramétrique. Pour trouver ce paramètre, on utilise la méthode de H. Benson [7].

Après avoir énoncé et démontré le théorème de subefficacité, on peut alors intégrer un critère d'arrêt dans le processus de résolution dès que la précision obtenue est jugée satisfaisante. La méthode que nous avons proposée présente certains avantages :

- Cette méthode ignore la procédure du test ( triage) et de vérification sur l'efficacité d'une solution.
- Elle traite les contraintes de bornes telles qu'elles se présentent dans le problème initial, sans avoir à les transformer, comme le font certaines autres méthodes, ce qui

engendre ainsi un gain considérable en espace mémoire et en temps d'exécution.

Il est à noter que ce travail de Magistère a donné lieu à un article [18] accepté sous forme de poster au colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information (COSI 2007), qui va se dérouler à l'université des Sciences et de la Technologie d'Oran du 11 au 13 juin 2007.

Enfin, on cite quelques axes de recherche qui peuvent être intéressants à suivre :

- Programmer la méthode que nous avons proposée et la comparer avec les autres méthodes existantes afin de confirmer expérimentalement les résultats théoriques obtenus.
- Généraliser cette méthode pour un programme quadratique multicritère.
- Donner un algorithme de construction de l'ensemble des solutions efficaces pour un problème de programmation linéaire multicritère à variables bornées à l'aide des cônes des poids optimaux.

# Bibliographie

- [1] N. Akkouche. Sur les méthodes numériques d'aide multicritère à la décision. Mémoire de Magister, Université de Béjaia, 2005.
- [2] B. Alain. *Optimisation multiobjectif et stratégies d'évolution en environnement dynamique*. Thèse de doctorat, Université des Sciences Sociales, Toulouse I, 2001.
- [3] A. Arbel. An interior multiobjective primal-dual linear programming algorithm based on approximated gradients and efficient anchoring points. *Computers and Operations Research*, 24(4) :353–365, 1997.
- [4] P. Armand and C. Malivert. Determination of the efficient set in multiobjective linear programming. *Journal of optimization theory and applications*, 70(3) :467–490, 1991.
- [5] C. Audet. *Optimisation globale structurée : Propriétés, équivalences et résolution*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique de Montréal, 1997.
- [6] S. Bellaassali. *Contributions à l'optimisation multicritère*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, 2003.
- [7] H. Benson. Finding an initial efficient extreme point for linear multiple objective program. *Journal of Operational Research Society*, 32(6) :495–498, 1981.
- [8] H. Benson. Further analysis of an outcome set-based algorithm for multiple-objective linear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 97(1) :1–10, 1998.
- [9] H. Benson. Hybrid approach for solving multiple-objective linear programs in outcome space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98(1) :17–35, 1998.
- [10] H. Benson. An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem. *Journal of Global Optimization*, 13(1) :1–24, 1998.

- 
- [11] H. Benson and E. Sun. Outcome space partition of the weight set in multiobjective linear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 105(1) :17–36, 2000.
- [12] M. Bentoubache. Nouvelle méthode pour la résolution des problèmes de programmation linéaire sous forme canonique et à variables bornées. Mémoire de Magister, Université de Béjaia, 2005.
- [13] M. O. Bibi. *Methods for solving linear-quadratic problems of optimal control*. Phd Thesis, University of Minsk, 1985.
- [14] M. O. Bibi. Optimization of linear dynamic system with double constraint on the trajectories. *Collected abstracts of the 16<sup>th</sup> conference on systems modeling and optimization, Compiègne (France)*, 1 :53–54, July 5-9 1993.
- [15] M. O. Bibi. Support method for solving a linear quadratic problem with polyhedral constraints on control. *Optimization*, 37 :139–147, 1996.
- [16] M. O. Bibi. Méthodes adaptées de la programmation linéaire. Cours de Post-graduation en Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, 2005.
- [17] M. O. Bibi and N. Ikheneche. Optimisation par la méthode adaptée d'un problème linéaire-quadratique convexe à variables bornées. *Actes du Colloque international MSS'4, U.S.T.H.B, Alger*, pages 1–6, 17-19 Avril 2004.
- [18] M. O. Bibi and T. Mernache. Les solutions *epsilon*-efficaces dans un problème linéaire multicritère. *Article accepté sous forme de poster au colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information (COSI 2007), USTO, Oran*, 11-13 juin 2007.
- [19] B. Brahmi. Méthodes primale et duale pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe. Mémoire de Magister, Université de Béjaia, 2006.
- [20] J. M. Cadenas and F. Jiménez. A dual approach in fuzzy linear programming. *Mathware et soft computing*, 3 :383–394, 1996.
- [21] V. Chankong and Y. Haimes. *Multiobjective Decision Making : Theory and Methodology*. Elsevier Science Publishing Co., New York, NY, 1983.
- [22] J. Cohon. *Multiobjective Programming and Planning*. Academic Press, New York, 1978.



- 
- [23] Y. Collette and P. Siarry. *Optimisation multiobjectif*. Eyrolles, 2002.
- [24] G. B. Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 1963.
- [25] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. *Linear Programming*, volume I : Introduction. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [26] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. *Linear Programming*, volume II : Theory and Extensions. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [27] J. Dauer and R. Gallagher. A combined constraint-space, objective-space approach for determining high-dimensional maximal efficient faces of multiple objective linear programs. *European Journal of Operational Research*, 88 :368–381, 1990.
- [28] A. R. Dietz. *Optimisation multicritère pour la conception d’ateliers discontinus multiproduits : aspects économique et environnemental*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [29] M. P. Dimkov. Recherche sur les problèmes de programmation linéaire multicritère. In les problèmes de commande optimale, sous la direction de R. Gabassov et F. M. Kirillova. *Edition Naouka i Technika*, pages 25–42, 1981.
- [30] F. Droesbek, M. Hallin, and C. L. Lefevre. *programmation linéaire par l’exemple*. 1986.
- [31] J. G. Ecker and N. S. Heger. On computing an initial efficient extreme point. *Journal of Operational Research Society*, 29(10) :1005–1007, 1978.
- [32] J. G. Ecker, N. S. Hegner, and I. A. Kouada. Generating all maximal efficient faces for multiple objective linear programs. *Journal of optimization theory and applications*, 30(3) :353–381, 1980.
- [33] J. G. Ecker and I. A. Kouada. Finding efficient points for linear multiobjective problem. *Mathematical Programming*, 8 :375–377, 1975.
- [34] J. G. Ecker and I. A. Kouada. Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs. *Mathematical Programming*, 14 :249–261, 1978.
- [35] M. Ehrgott. *Multicriteria Optimization*. Springer , New York, 2005.
- [36] J. P. Evans and R. E. Steuer. A revised simplex method for linear multiple objective programs. *Mathematical Programming*, 5(1) :54–72, 1973.

- 
- [37] R. Gabassov. Adaptive method of linear programming. Preprints of the University of Karlsruhe, Institute of Statistics and Mathematics, Karlsruhe, Germany, 1993.
- [38] R. Gabassov and F. M. Kirillova. *Méthodes de programmation linéaire*, volume 1, 2 et 3. Edition de l'Université de Minsk, 1977, 1978 et 1980.
- [39] R. Gabassov and F. M. Kirillova. *Méthodes d'optimisation*. Edition de l'Université de Minsk, 1981.
- [40] R. Gabassov, F. M. Kirillova, and V. M. Raketky. On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. *Soviet. Math. Dokl.*, 23 :653–657, 1981.
- [41] R. Gabassov, O. I. Kostyukova, F. M. Kirillova, and V. M. Raketky. *Constructive methods of optimization*, volume 4 : Convex Problems. University Press, Minsk, 1987.
- [42] J. Gauvin. *Leçons de programmation mathématique*. Editions de l'École Polytechnique de Montréal, 1995.
- [43] R. Hartley. On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34(2) :211–222, 1978.
- [44] R. Hartley. *Linear and non linear programming : an introduction to linear methods in mathematical programming*. Ellis Horwood, England, 1985.
- [45] M. Hazi. *Espace Topologique en général et Espace Métrique en particulier*. Office des Publications Universitaires, Ben-aknoun, Alger, 1993.
- [46] N. Ikheneche. Méthode de support pour la minimisation d'une fonctionnelle quadratique convexe. Mémoire de Magister, Université de Béjaia, 2004.
- [47] H. Isermann. Proper efficiency and linear vector maximum problem. *Operational Research*, 22 :189–191, 1974.
- [48] H. Isermann. The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program. *Journal of Operational Research*, 28(3) :711–725, 1977.
- [49] J. Jahn. *Vector Optimization – Theory, Applications, and Extensions*. Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [50] B. Jimenez and V. Novo. First and second order sufficient conditions for strict minimality in multiobjective programming. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 23(3/4) :303–322, 2002.

- 
- [51] I. Kaliszewski. A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming. *Computers and Operations Research*, 14(4) :315– 323, 1987.
- [52] A. Keraghel. *Analyse Convexe, Théorie Fondamentale et Exercices*. Edition de l'Université de Sétif, Faculté des Sciences, Laboratoire de Mathématique Fondamentale et Numérique, 1987.
- [53] V. V. Khomenouk. Application du critère de l'efficacité maximale dans les problèmes d'optimisation vectorielle. Dans les actes : Méthodes pratiques en théorie de l'optimisation. *Vladivostok*, pages 20–27, 1977.
- [54] E. A. Kostina. The long step rule in the bounded-variable dual simplex method : Numerical experiments. *Mathematical Methods of Operations Research*, 55(3) :413–429, 2002.
- [55] S. Lipschutz. *Topologie : cours et problèmes*. New York, 1997.
- [56] O. L. Mangasarian. *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill Book Co, New York, second edition, 1994.
- [57] K. Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. International Series in Operations Research and Management Science, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [58] S. G. Nash and A. Sofer. *Linear and Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, New York, 1996.
- [59] G. Nemhauser and L. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons, New York, 1999.
- [60] I. Othmani. *Optimisation multicritère : Fondements et Concepts*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier de Grenoble, 1998.
- [61] M. Padberg. *Linear optimization and extensions*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [62] V. Pareto. *Cours d'économie politique*. Rouge, Lausanne, Switzerland, 1896.
- [63] J. Philip. Algorithm for the vector maximization problem. *Mathematical programming*, 2 :207–229, 1972.
- [64] V. V. Polinovsky and V. D. Noguine. *Solutions optimales de Pareto dans les problèmes multicritères ( en russe)*. Naouka, Moscou, 1982.

- 
- [65] M. Prevot and S. Holin. *Programmation linéaire multiobjectifs*. Technical Report 31, Collection de l'Institut de Mathématiques Economiques, Dijon, France, 1986.
- [66] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [67] M. S. Radjef. *Décisions optimales dans les problèmes multicritères avec indétermination*. Laboratoire LAMOS, Université de Béjaïa, 1995.
- [68] M. S. Radjef. Cours de post-graduation sur les notions d'optimalité en optimisation multicritère. Université de Béjaïa, 2005.
- [69] S. Radjef. Sur la programmation linéaire multiobjectif. Mémoire de Magister, Université de Béjaïa, 2001.
- [70] G. Savard. *Cours sur l'introduction aux méthodes de points intérieurs*. Ecole Polytechnique de Montréal, 2001.
- [71] Y. Sawaragi, H. Nakayama, and T. Tanino. Theory of multiobjective optimization. Academic Press, Volume 176, 1985.
- [72] S. Sayin. An algorithm based on facial decomposition for finding the efficient set in multiple objective linear programming. *Operations Research Letters*, 19 :87–94, 1996.
- [73] N. Srinivas and K. Deb. Multiobjective optimization using non dominated string in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 3(2) :221–248, 1994.
- [74] R. Steuer and E. Choo. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Mathematical Programming*, 26 :326–344, 1983.
- [75] R. E. Steuer. *Multiple criteria optimization : Theory, Computation, and Application*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [76] J. Tind and M. Wiecek. Augmented lagrangian and Tchebycheff approaches in multiple objective programming. *Journal of Global Optimization*, 14 :251–266, 1999.
- [77] V. T'kindt and J. C. Billaut. *Multicriteria Scheduling Theory, Models and Algorithms*. Springer, Berlin Heidelberg New York, second edition, 2006.
- [78] E. L. Ulungu. *Optimisation Combinatoire Multicritère : Détermination de l'ensemble des solutions efficaces et méthodes interactives*. 1993.
- [79] R. J. Vanderbei. *Linear Programming : Foundations and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, second edition, 2001.

- 
- [80] B. Vincent. *Approches Hybrides pour les Problèmes Multiobjectifs*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale d'Angers, 2003.
- [81] P. Vincke. *L'aide multicritère à la décision*. Université de Bruxelles, Belgique, 1989.
- [82] S. Wang. Second-order necessary and sufficient conditions in multiobjective programming. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 12(1-2) :237–252, 1991.
- [83] S. J. Wright. An interior method for linearly constrained optimization. *SIAM Journal of Optimization*, 1(4), 1992.
- [84] Y. Yamamoto. Optimization over the efficient set :– overview. *Journal of Global Optimization*, 22 :285–317, 2002.
- [85] P. Yu. Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 14 :319–377, 1974.
- [86] P. Yu. *Multiple Criteria Decision Making : Concepts, Techniques and Extensions*. Plenum Press, New York, NY, 1985.
- [87] P. L. Yu and M. Zeleny. The set of all non-dominated solutions on linear cases and multicriteria simplex method. *Journal of mathematical analysis and applications*, 49(2) :430–468, 1975.
- [88] P.L Yu and M. Zeleny. The technic of linear multiobjective programming. *Rairo*, 3 :51–71, 1974.
- [89] M. Zeleny. linear multiobjective programming, lectures notes in economics and mathematical systems. *Springer Verlag*, 1974.