

THÈSE

Présentée par

MOHDEB Nadia

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Filière : Mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Thème

DISCRETISATION ET SECTEUR ELLIPTIQUE

Soutenue le : 14/05/2013

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
M. A. DAHMANI	Professeur	Univ. de Béjaïa	Président
M. N. MEHIDI	Professeur	Univ. de Béjaïa	Rapporteur
M. A. FRUCHARD	Professeur	Univ. de Mulhouse	Co-Rapporteur
M. R. BEBBOUCHI	Professeur	USTHB	Examineur
M. A. BERBOUCHA	M. C. A	Univ. de Béjaïa	Examineur
M. A. MAKHLOUF	Professeur	Univ. d'Annaba	Examineur

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Secteur elliptique dans le système différentiel générique et dans son discrétisé	11
1.1	Orbites homoclines du paradigme (8) et de son discrétisé : preuve du théorème 1.0.1	15
1.1.1	Orbites homoclines dans le système (8)	15
1.1.2	Orbites homoclines dans le système discret	22
1.2	Etude qualitative du comportement du système (7)	30
1.3	Discrétisation de la famille de systèmes différentiels du plan, difféomorphes au système (1.16)	35
1.4	Secteur elliptique dans le discrétisé du système (1.16) et dans le système discret (1.34) associé par difféomorphisme à (1.16) .	41
2	Secteur elliptique dans le système différentiel sous forme canonique pour $p = m$ et $\lambda > 0$	52
2.1	Orbites homoclines dans le système (2.2)	53
2.2	Orbites homoclines dans le système discret (2.3)	56
2.3	Etude qualitative du comportement du système (2.1)	61
2.4	Secteur elliptique dans le discrétisé du système (2.8) et dans le discrétisé associé par difféomorphisme au système (2.8) . . .	65
3	Secteur elliptique dans le système différentiel sous forme canonique (5) et dans son discrétisé, pour $p = m$ et $\lambda = 0$	73
3.1	Comportement des solutions du système (3.1)	74
3.2	Orbites homoclines dans le système discret (3.2), pour $p = 1$.	78
3.3	Secteur elliptique dans le discrétisé du système (3.1) lorsque $p > 1$	83
3.4	Etude du comportement du système (5) avec $p = 1$	88

3.5	Secteur elliptique dans le discrétisé du système (5) lorsque $p = 1$	91
4	Solutions homoclines dans un système différentiel quadratique à partie linéaire nulle et dans son discrétisé	97
4.1	Orbites homoclines dans le système (4.4)	98
4.2	Orbites homoclines dans le système discret associé à (4.4)	99
A	Rappels d'analyse non standard	103
A.1	L'axiomatique IST	103
A.1.1	Principe de Transfert	104
A.1.2	Idéalisation	104
A.1.3	Standardisation	105
A.2	Halos et galaxies	105
B	Les éclatements et le polygone de Newton	106
	Bibliographie	110

0.1 Introduction

On s'intéresse d'une façon générale dans cette thèse à l'étude de secteurs elliptiques pour les systèmes différentiels du plan et à leur persistance dans les discrétisés obtenus par la méthode d'Euler.

Considérons le champ de vecteurs

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = g_1(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

où $(\dot{}) = d/dt$ et f_1 et g_1 sont des fonctions analytiques de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

On suppose que le système (1) admet l'origine comme point stationnaire isolé.

Le système (1) peut s'écrire au voisinage de l'origine sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + P(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + Q(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

où a, b, c et d sont des réels et P et Q sont des fonctions analytiques dont le développement de Taylor au voisinage de l'origine commence par des termes de degré total supérieur ou égal à deux.

Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de la partie linéaire du système (2).

On suppose que la matrice M possède deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 .

Lorsque λ_1 et λ_2 sont non nulles, l'origine est dit *hyperbolique*. Le portrait de phase est alors décrit qualitativement par le théorème de Hartman-Grobman [2, 3, 36, 38].

Dans le cas où seul λ_1 est nul, l'origine est dite *semi-hyperbolique*. C'est un nœud, un col ou un nœud-col (cf. [43], p 241, [50]).

Le cas étudié dans ce mémoire est celui où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Le point singulier $(0, 0)$ est dit *non élémentaire* [23, 49]; c'est ce type de singularité auquel on s'intéresse dans ce travail. Il existe deux situations possibles. La première est celle où la matrice M est nulle; le point singulier $(0, 0)$ est dit *linéairement nul* [23]. Dans ce cas, le comportement des solutions au voisinage de l'origine est très complexe; par exemple, si P et Q commencent avec des termes de degrés m , le voisinage de l'origine est partagé en $2(m + 1)$ régions de trois types différents : parabolique, hyperbolique et elliptique [50], cf. Fig. 1 pour une description du portrait de phase.



FIGURE 1 – Les trois régions, hyperbolique, parabolique et elliptique, au voisinage d'un point linéairement nul.

La deuxième situation est celle où la matrice M n'est pas nulle et peut donc se ramener par une transformation linéaire à $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, le point singulier $(0, 0)$ est dit *nilpotent*. À titre d'exemple, on peut citer dans ce cas le point de Bogdanov-Takens qui est le croisement de trois bifurcations : nœud-col, Andronov-Hopf et homocline, en $\mu_1 = \mu_2 = 0$ dans le système [53]

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 x + x^2 \pm xy. \end{cases}$$

où μ_1 et μ_2 sont des paramètres réels.

C'est cette deuxième situation qui est l'objet principal de la thèse.

On s'intéressera dans ce mémoire aux secteurs elliptiques qu'on définira plus bas. Plus précisément, on s'intéressera à l'étude de secteurs elliptiques pour les systèmes différentiels du plan et on étudiera la question de la persistance de ces secteurs dans les systèmes discrétisés obtenus par la méthode d'Euler. La réponse est « oui » pour les systèmes analytiques ; cela est précisé à la fin de cette introduction. Dans le cas où $M = 0$, la situation générale semble inextricable. Nous n'avons exploré ce cas qu'à travers un exemple.

Brève description de la littérature existante :

Les travaux de W. J. Beyn [5], B. Fiedler et J. Scheurle [30] ainsi que Y. K. Zou [55] traitent le cas d'orbites homoclines non dégénérées d'un système autonome. Ces auteurs donnent une estimation de l'erreur d'ordre $O(h^d)$ entre la solution homocline du système différentiel et celle du discrétisé associé par la méthode d'ordre d à un pas h . De plus, la longueur $l(h)$ de l'intervalle du paramètre sur lequel l'orbite homocline persiste, vérifie $l(h) \leq C \exp(-\eta/h)$ où C et η sont des constantes positives.

Dans [7], W. J. Beyn montre que le portrait de phase d'un système dynamique au voisinage d'un point singulier hyperbolique est, sous certaines conditions fortes, correctement reproduit dans un intervalle de temps arbitrairement grand, par des méthodes numériques à un et plusieurs pas. Par

ailleurs, une trajectoire du système différentiel peut être approchée par une trajectoire discrète appropriée et vice versa, à un bon ordre de convergence, dans un intervalle de temps arbitrairement grand. En particulier les variétés stables et instables du système discrétisé convergent vers les variétés stables et instables du système continu.

Dans [8], il a été montré que les méthodes à un pas appliquées à des systèmes dynamiques ayant une orbite périodique hyperbolique exhibent, pour un pas de discrétisation suffisamment petit, une courbe fermée invariante convergeant vers l'orbite périodique et héritant de la stabilité de celle-ci.

Étant donné un système différentiel autonome avec un point singulier en $(0, 0)$ non nécessairement hyperbolique et présentant une variété centrale instable W_c^u , W. J. Beyn et J. Lorenz prouvent dans [6] que, dans un petit voisinage de l'origine, le système discret associé par la méthode à un pas possède sous certaines conditions, une variété invariante près de W_c^u . Dans [54], Y. K. Zou étudie l'existence de variétés invariantes pour un type spécial de systèmes non autonomes survenant dans l'étude des méthodes de discrétisation. Les résultats sont appliqués après discrétisation aux orbites homoclines des nœud-cols.

Dans [10], W. J. Beyn développe une méthode numérique pour le calcul de branches homoclines au voisinage d'un point de Bogdanov-Takens. Dans [11], une méthode numérique a été développée pour calculer les orbites homoclines transverses.

Dans [12], W. J. Beyn et M. Stiefenhofer développent une approche constructive dans le but de prouver l'existence d'orbites homoclines dans des systèmes singulièrement perturbés de dimension n à deux échelles de temps. Dans [13], W. J. Beyn prouve que la discrétisation par la méthode de Runge-Kutta appliquée aux systèmes du gradient singulièrement perturbés produit une dynamique discrète qui préserve, en terme de convergence, les propriétés géométriques et le comportement à long terme des solutions du système continu.

Dans [19], E. J. Doedel met en place une méthode numérique pour le calcul d'orbites hétéroclines connectant deux cols dans le plan.

Dans [25], T. Eirola examine les conditions qui font que la solution du système différentiel soit proche de la solution du système discrétisé associé sur un intervalle de temps infini. Une étude similaire a été faite dans [35] pour les systèmes structurellement stables ne possédant pas de solution périodique. Par ailleurs, M. Feckan montre dans [27] que, dans le cas hyperbolique, la variété stable locale du système discret tend vers celle du système différentiel

correspondant quand le pas de discrétisation tend vers zéro (voir aussi [28] et [34]). B. M. Garay donne dans [33] une extension de ce résultat aux systèmes différentiels non autonomes. Une approximation du développement de Taylor de cette variété a été donnée dans [26]. Dans [29] M. Feckan montre que, dans le cas hyperbolique, les applications définissant le champ de vecteurs et le discrétisé associé par la méthode à un pas sont uniformément topologiquement équivalentes.

Des résultats de stabilité structurelle de flots par rapport à des méthodes numériques ont été établis dans [44]-[47].

Le problème de calcul numérique d'orbites homoclines, hétéroclines et périodiques et celui d'approximation de portraits de phases ont été étudiés dans [6]-[14], [19]-[21], [30]-[32], [54] et [55].

Forme canonique de (2) :

Le cas où la matrice M est non nulle et possède deux valeurs propres nulles est une situation très dégénérée. C'est pour cette raison que partir de la forme normale est une chose incontournable.

Dans le cas où le point singulier est nilpotent, le système (2) se ramène par un changement de variables linéaire à

$$\begin{cases} \dot{x} = y + f_2(x, y) \\ \dot{y} = g_2(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

où f_2 et g_2 sont analytiques au voisinage de l'origine et de valuation totale au moins deux.

Le changement de variables $X = x$, $Y = y + f_2(x, y)$, transforme le système (3) en un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = G_2(X, Y). \end{cases} \quad (4)$$

En reprenant les notations habituelles x et y et en isolant les termes de degré 0 et 1 en y , on ramène le système (4) à la forme [1]

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^r(1 + k(x)) + bx^py(1 + g(x)) + y^2f(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

où f , g et k sont des fonctions analytiques, telles que $k(0) = g(0) = f(0, 0) = 0$. Par ailleurs, a et b sont des paramètres réels et r et p sont des paramètres entiers, vérifiant $r \geq 0$, $p \geq 1$ et $a \neq 0$.

Le système (5) admet un secteur elliptique [1, 50] lorsque $r = 2m + 1$, $m \geq 1$, $a < 0$, $b \neq 0$, $p \geq 1$, p impair et

- ou bien $p = m$ et $\lambda = b^2 + 4(m + 1)a \geq 0$,
- ou bien $p < m$.

Le système (5) est appelé *une forme canonique* de la famille des systèmes différentiels du plan dont la matrice Jacobienne associée en $(0, 0)$ est nilpotente non nulle. Dans [24, 50] la forme (5) est appelée forme normale. Cependant, l'expression « forme normale » est largement utilisée dans la littérature dans un sens différent de celui qui est exposé ici. C'est pourquoi dans cette thèse nous dirons que le système (5) est une forme canonique. On trouve le mot « canonique » dans [1].

Rappelons brièvement que la mise sous forme normale du système (1) consiste à écrire (1) sous la forme la plus simple possible ; une forme normale d'ordre $r - 1$ d'un système différentiel du plan dont le second membre est de classe C^r (dans la pratique on prend $r \geq 4$) [53] est une équation de \mathbb{R}^2 de la forme

$$\dot{W} = MW + F_2(W) + \dots + F_{r-1}(W) + o(|W|^r).$$

Elle est obtenue à partir du système (1) par une suite de changements de coordonnées analytiques, où $F_k(W) \in \mathcal{G}_k$, $2 \leq k \leq r$, l'ensemble \mathcal{G}_k étant l'espace supplémentaire de

$$\mathcal{L}^{(k)}(\mathcal{H}_k) = \{ \mathcal{L}^{(k)}(h_k(W)) = -(Dh_k(W)MW - Mh_k(W)) ; h_k(W) \in \mathcal{H}_k \},$$

où l'espace \mathcal{H}_k est l'espace des polynômes homogènes à valeurs vectorielles (une des bases de \mathcal{H}_k est constituée des éléments formés par le produit de tous les polynômes homogènes de degré k avec chaque élément de la base de \mathbb{R}^2).

On s'intéresse en grande partie dans cette thèse à la famille des systèmes différentiels donnés par (5) dans le cas où $p = m$ et $\lambda = b^2 + 4(p + 1)a \geq 0$ et à son discrétisé obtenu par la méthode d'Euler

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h(ax_n^{2p+1}(1 + k(x_n)) + bx_n^p y_n(1 + g(x_n)) + y_n^2 f(x_n, y_n)), \end{cases} \quad (6)$$

où $h > 0$ est le pas de discrétisation.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique d'objets associés au système (6) lorsque h tend vers zéro, tels que les solutions homoclines et les secteurs elliptiques. Nous avons choisi d'utiliser le formalisme

de l'analyse non standard dans la version IST (idéalisation, standardisation et transfert) d'E. Nelson. Les outils de l'analyse non standard utilisés seront essentiellement le principe de permanence ("Fehrele") et les outils plus spécifiques des systèmes dynamiques tels que le lemme de l'ombre courte et le lemme de stroboscopie (cf. chapitre 1). Le paramètre h sera ainsi supposé, dans tout le travail, infiniment petit.

Par ailleurs, pour explorer le comportement des solutions au voisinage de la singularité, on utilisera des éclatements déduits à partir du polygone de Newton.

Structure de la thèse :

Dans le premier chapitre on ne considère que le cas $p = m = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^3(1+k(x)) + bxy(1+g(x)) + y^2f(x,y) \end{cases} \quad (7)$$

On commencera d'abord par le paradigme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^3 + bxy \end{cases} \quad (8)$$

de la famille (7). On se place dans la situation générique où on suppose que $\lambda = b^2 + 8a > 0$. On montre l'existence d'un secteur elliptique dans le système (8) et aussi sa préservation dans le système discret associé par Euler. On utilise ensuite les propriétés des solutions du système (8) pour montrer que ce résultat reste vrai dans le système (7) quand $\lambda > 0$ et dans le système discret obtenu par la méthode d'Euler.

À partir d'un système général de la forme (1), plusieurs études sont possibles :

- On peut ramener ce système à une forme canonique (5) par un difféomorphisme, puis discrétiser par la méthode d'Euler pour aboutir à la forme (6).
- On peut aussi discrétiser directement (1), puis ramener le système discret obtenu à une forme canonique adaptée aux systèmes discrets.

Ces deux opérations ne commutent pas nécessairement mais nous verrons que le discrétisé de (1) peut se ramener à une forme très voisine de (6) : au terme $hy^2f(x,y)$ s'ajoute un terme $h^2G(x,y)$ (cf. éq. (1.34)).

Dans le deuxième chapitre on généralise le résultat principal du chapitre 1, pour une famille plus générale de systèmes différentiels. Il s'agit du système (5) dans le cas $p = m$ et $\lambda = b^2 + 4(p+1)a > 0$.

Dans le troisième chapitre on montre la préservation du secteur elliptique dans le discrétisé obtenu par la méthode d'Euler du système différentiel (5) dans le cas $p = m$ et $\lambda = b^2 + 4(p + 1)a = 0$.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse au système différentiel (2) dans le cas où la matrice M est nulle; plus précisément, on étudie le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2\varepsilon xy \end{cases} \quad (9)$$

où ε est un paramètre réel strictement positif. Le début du chapitre 4 explique le lien entre le système (9) et l'itération du classique polynôme complexe $z^2 + c$. On montre qu'en dehors des solutions issues de l'axe (ox) , toutes les orbites du système (9) sont homoclines. On montre que cette propriété reste vraie dans la partie limitée du plan pour le discrétisé de (9) obtenu par la méthode d'Euler.

Finalement, on donne en annexe un petit rappel sur l'analyse non standard ainsi qu'un algorithme permettant l'utilisation du polygone de Newton dans les éclatements.

Ce que ne contient pas cette thèse :

Rappelons que la forme canonique est donnée dans (5) et que m est donné par $r = 2m + 1$. Les cas étudiés dans la thèse sont les cas parmi les plus génériques $m = p = 1$, $\lambda \geq 0$ et $m = p \geq 2$, $\lambda > 0$.

Le cas $m > p$ a été aussi étudié de près. On a montré que le secteur elliptique persiste après discrétisation par la méthode d'Euler. Cette situation n'est pas rédigée ici.

De même aussi pour le cas $p = m$ et $\lambda = 0$: on a montré que le résultat de préservation du secteur elliptique dans le discrétisé associé par la méthode d'Euler, reste vrai pour les systèmes différentiels difféomorphes aux systèmes sous forme canonique. Ce cas n'est pas rédigé ici. En fait, on a préféré regarder d'autres situations comme ce qui se passe quand $M = 0$, plutôt que de rédiger ces cas, dont les idées principales des démonstrations sont déjà données au chapitre 1.

Dans le cas où la matrice M est nulle, la situation est trop dégénérée pour qu'une preuve englobant tous les cas soit envisageable. On s'est ainsi contenté de l'étude d'un exemple présentant deux secteurs elliptiques. D'autres exemples de systèmes différentiels du même genre ainsi que des systèmes présentant trois, voire quatre secteurs elliptiques, ont été construits, et quelques généralisations ont été établies mais ne sont pas cités dans cette

thèse. L'inexistence d'une forme normale dans ce cas justifie le fait qu'il n'y a pas ici de preuve sur les systèmes différentiels difféomorphes aux systèmes ayant une matrice M nulle.

On attire l'attention du lecteur sur le fait que le chapitre 2 généralise le chapitre 1. Signalons que les grandes idées du travail ont été exposées d'une façon détaillée dans le chapitre 1.

Tout ce travail a été réalisé dans le cas des systèmes différentiels suffisamment réguliers, voire analytiques. Dans le but de rechercher des contre-exemples pour lesquels il n'y a pas de préservation du secteur elliptique après discrétisation, plusieurs exemples de systèmes ont été testés, mais aucun ne présente une perte du secteur elliptique. Par contre dans le cas de l'existence d'une unique solution homocline, on a montré sur l'équation de Duffing que bien que la solution homocline présentant un changement de concavité, ne se préserve pas après discrétisation. Ce travail non plus n'est pas présenté ici.

L'utilisation des éclatements nous a permis de désingulariser les singularités dégénérées et de procéder ensuite à des recollements. L'utilisation de l'analyse non standard nous a dispensé d'étudier une famille de systèmes dépendant du pas de discrétisation h qui tend vers zéro. On a donc fixé ce pas, supposé infiniment petit.

Chapitre 1

Secteur elliptique dans le système différentiel générique et dans son discrétisé

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence d'un secteur elliptique pour le système (5)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^r(1+k(x)) + bx^p y(1+g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases}$$

et de sa persistance dans le discrétisé associé par Euler

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h(ax_n^r(1+k(x_n)) + bx_n^p y_n(1+g(x_n)) + y_n^2 f(x_n, y_n)), \end{cases}$$

dans le cas $p = m = 1$ ($r = 2m + 1$) et $\lambda = b^2 + 8a > 0$, où $h > 0$ est le pas de discrétisation, supposé infiniment petit.

Sans perte de généralité, grâce au changement de variables

$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

on supposera dans toute la suite que $b > 0$.

Pour voir de près ce qui se passe localement dans ce cas, c'est-à-dire dans le système (7)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^3(1+k(x)) + bxy(1+g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases}$$

et dans son discrétisé

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h(ax_n^3(1+k(x_n)) + bx_ny_n(1+g(x_n)) + y_n^2f(x_n, y_n)), \end{cases} \quad (1.1)$$

on se focalise sur l'étude du comportement global du paradigme (8)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^3 + bxy \end{cases}$$

et de son discrétisé

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h(ax_n^3 + bx_ny_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans la première section de ce chapitre, on décrit d'abord le comportement global des solutions de (8) ; ensuite on montre que dans la partie limitée du plan toutes les solutions du système (1.2) issues de la partie limitée du secteur elliptique de (8) sont homoclines.

Dans la deuxième section on s'intéresse au comportement des solution du système (7), en montrant l'existence d'un secteur elliptique qu'on décrit localement.

Dans la troisième section, on donne la forme générale du système obtenu par discrétisation de la famille des systèmes différentiels planaires difféomorphes au système (7).

Dans la dernière section, en représentant les deux systèmes discrets (celui obtenu par discrétisation d'Euler de (7) et celui obtenu par discrétisation de la famille des systèmes différentiels planaires difféomorphes à (7)) par un seul système, on montre que la propriété d'existence de solutions homoclines est préservée.

On commence le chapitre en donnant la définition d'un secteur elliptique qui nécessite de donner la définition d'une solution homocline pour les systèmes continus. On donne au passage la définition d'une solution homocline pour les systèmes discrets. On définira aussi une nouvelle notion : la S-inversibilité.

Définition 1.0.1 [1] Soit le système différentiel de \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.3)$$

où f et g sont des fonctions de \mathbb{R}^2 suffisamment régulières. Supposons que l'origine est un point singulier isolé de (1.3). Soit $r_0 > 0$ un réel suffisamment petit pour que le cercle C de centre $(0, 0)$ et de rayon r_0 , ne contienne que $(0, 0)$ comme point singulier.

Supposons qu'il existe deux solutions γ_1 et γ_2 du système (1.3) tendant vers l'origine; notons γ_1^* et γ_2^* les orbites respectives correspondantes. Supposons par exemple que c^+ est quand t tend vers t^+ pour γ_1 et t tend vers t^- pour γ_2 , où $t^+, t^- \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, avec $]t^+, t^-[$ est l'intervalle maximal d'existence de γ_1^* et de γ_2^* . On suppose que γ_1^* et γ_2^* ne sont pas entièrement dans le disque $D(0, r_0)$. Soient M_1 et M_2 les points d'intersection de γ_1^* et de γ_2^* respectivement, avec le cercle C tels qu'en tenant compte du sens de parcours des orbites, M_1 est le dernier point d'intersection de γ_1^* avec le cercle C et M_2 est le premier point d'intersection de γ_2^* avec C (Fig. 1.1).

Soit σ la courbe fermée formée par les deux parties OM_1 et OM_2 respectives des deux orbites γ_1^* et γ_2^* , par l'origine et par l'arc de cercle M_1M_2 . La région ouverte R_σ bordée par σ est appelée *secteur*.

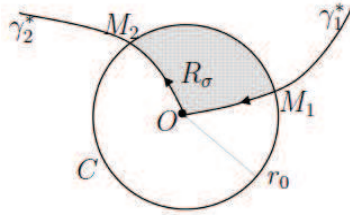


FIGURE 1.1 – Un secteur.

Définition 1.0.2 [16, 42] Une solution $(x(t), y(t))$ du système (1.3) est dite *homocline à l'origine* si $(x(t), y(t))$ est définie sur \mathbb{R} tout entier et tend vers $(0, 0)$ quand t tend vers $+\infty$ et quand t tend vers $-\infty$.

Définition 1.0.3 [1] Un *secteur elliptique* est un secteur ne contenant que des orbites ou des portions d'orbites homoclines emboîtées (Fig. 1.2).

Remarque 1.0.1 Dans la définition 1.0.3, les orbites du bord d'un secteur elliptique ne sont pas forcément homoclines.

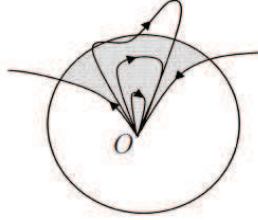


FIGURE 1.2 – Secteur elliptique

Il convient de définir la notion d'orbite homocline pour le système discret

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n) \end{cases} \quad (1.4)$$

même lorsque l'application

$$F_h : (x, y) \longmapsto (x + hf(x, y), y + hg(x, y))$$

n'est pas inversible. Cela nous conduit à définir la notion de S-inversibilité :

Définition 1.0.4 L'application F_h (ou le système (1.4)) est dite *S-inversible* si tout point limité du plan a un unique prédécesseur limité.

Pour les fonctions f et g standard, cette notion coïncide avec l'inversibilité usuelle.

Définition 1.0.5 [41] Si le système discret (1.4) est S-inversible et si une solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de (1.4) tend vers $(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$ et quand n tend vers $-\infty$, alors cette solution est dite *homocline à l'origine*.

Définition 1.0.6 Soit U un ouvert du disque $D(0, r_0)$, et simplement connexe. On dit que U est un *secteur elliptique* pour le système discret (1.4) si toute solution partant de U est homocline.

Concernant le paradigme (8) et son discrétisé (1.2), nous montrons dans ce chapitre le résultat suivant :

Théorème 1.0.1 *Dans la partie limitée du plan, pour tout secteur elliptique S du système (8), il existe un secteur elliptique du système (1.2) dont l'ombre est S .*

1.1 Orbites homoclines du paradigme (8) et de son discrétisé : preuve du théorème 1.0.1

1.1.1 Orbites homoclines dans le système (8)

Considérons le système différentiel (8). Notons $\varphi(x) = -(a/b)x^2$. La courbe $y = \varphi(x)$ est une partie de l'isocline $\dot{y} = 0$ (Fig. 1.3). Désignons par R_1, R_2, R_3 et R_4 les régions du plans définies par :

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, 0 < y < \varphi(x)\}.$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}.$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}.$$

$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, 0 < y < \varphi(x)\}.$$

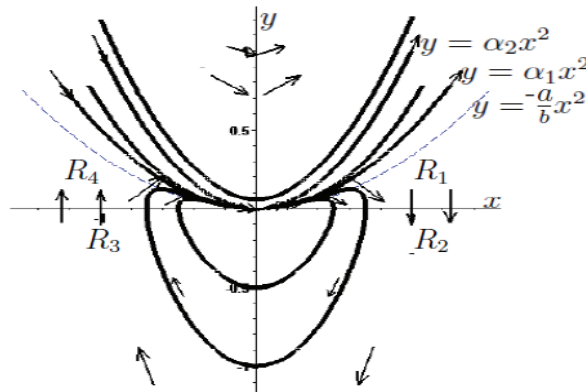


FIGURE 1.3 – Portrait de phases du système (8).

La recherche d'une solution du système (8) de la forme $y = \alpha x^2$ aboutit à l'équation

$$2\alpha^2 = a + b\alpha. \quad (1.5)$$

Les solutions de (1.5) sont $\alpha_1 = (b - \sqrt{\lambda})/4$ et $\alpha_2 = (b + \sqrt{\lambda})/4$ avec $\lambda = b^2 + 8a$.

On peut remarquer au passage que $-\frac{a}{b} < \alpha_1$. Ainsi, les paraboles $y = \alpha_1 x^2$ et $y = \alpha_2 x^2$ sont des solutions du système (8).

On montrera l'existence d'un secteur elliptique dans le système (8) : on montre que toutes les solutions du système (1.2) issues d'en dessous de la parabole $y = \alpha_1 x^2$, sont homoclines. La proposition qui suit décrit ainsi le portrait de phase du système (8). La symétrie nous permet de ne considérer que les solutions de (8) issues de points d'abscisses positives.

Proposition 1.1.1 Soient (x_0, y_0) un point du plan tel que $x_0 > 0$, $\gamma = (x(t), y(t))$ la solution du système (8) issue de ce point, $t \in]t^+, t^-[$ son intervalle maximal d'existence et γ^* l'orbite correspondant à cette solution. On a :

1) Si $y_0 < \alpha_1 x_0^2$, alors la trajectoire γ^* est homocline : on a $t^- = -\infty$, $t^+ = +\infty$ et

$$\lim_{t \rightarrow t^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow t^+} y(t) = 0.$$

2) Si $\alpha_1 x_0^2 < y_0 < \alpha_2 x_0^2$, alors $t^- = -\infty$, $t^+ < +\infty$ et

$$\lim_{t \rightarrow t^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t^-} y(t) = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow t^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow t^+} y(t) = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)^2} = \alpha_1$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)^2} = \alpha_2.$$

3) Si $\alpha_2 x_0^2 < y_0$, alors la trajectoire γ^* coupe l'axe (oy) en un point d'ordonnée positive. De plus, on a $-\infty < t^- < 0 < t^+ < +\infty$ et

$$\lim_{t \rightarrow t^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow t^+} y(t) = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow t^-} x(t) = -\infty.$$

Preuve de 1) :

Considérons l'éclatement

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 v \\ d\tau = u dt \end{cases}$$

Dans l'annexe B, on décrit en utilisant le polygone de Newton, la procédure permettant de trouver les éclatements adaptés.

Le système (8) devient

$$\begin{cases} u' = uv \\ v' = a + bv - 2v^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

où (\prime) désigne $d/d\tau$. Voir la figure 1.4 pour un portrait de phase de ce système.

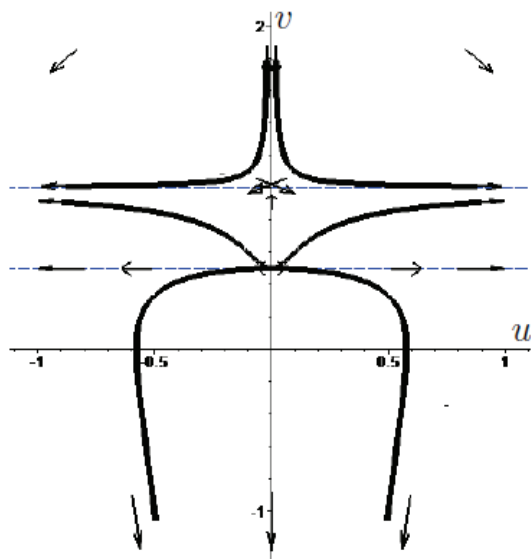


FIGURE 1.4 – Portrait de phases du système (1.6), pour $a = -1$ et $b = 3$.

Le système (1.6) admet deux points singuliers : un col $(0, \alpha_2)$ et un nœud répulsif $(0, \alpha_1)$.

Les droites $v = \alpha_1$ et $v = \alpha_2$ sont invariantes pour le système (1.6) et correspondent dans le plan (x, y) aux courbes $y = \alpha_1 x^2$ et $y = \alpha_2 x^2$, respectivement.

Montrons que toute solution de (1.6) partant de la bande délimitée par l'axe (ou) et la droite $v = \alpha_1$ coupe forcément la droite $v = 0$. En effet, soit γ_1 une trajectoire de (1.6) issue d'un point (u_0, v_0) tel que $u_0 > 0$ et $0 < v_0 < \alpha_1$, définie sur le demi-intervalle maximal $[0, t_{\max}[$.

Supposons que γ_1 ne coupe pas l'axe (ou) . On a

$$\forall t \in]0, t_{\max}[, 0 < v(t) < v_0.$$

Puisque la courbe d'équation

$$y = a + bx - 2x^2$$

est le graphe d'une fonction croissante sur l'intervalle $] - \infty, \alpha_1]$, on a

$$v' \leq a + bv_0 - 2v_0^2.$$

Notons $V_0 = a + bv_0 - 2v_0^2$. On a $V_0 < 0$ et

$$v(t) \leq V_0 t + v_0. \quad (1.7)$$

On aurait

$$\forall t \in [0, t_{\max}[, u'(t) \leq v_0 u(t),$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in [0, t_{\max}[, u(t) \leq u_0 \exp(v_0 t).$$

Si la solution γ_1 restait dans la région

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < v < \alpha_2\},$$

par le théorème de sortie de compacts [37], ceci entraîne que $t_{\max} = +\infty$. L'inégalité (1.7) donnerait alors $v(t_{\max}) < 0$ en contradiction avec l'hypothèse.

Il en résulte que la trajectoire γ de (8) issue de (x_0, y_0) coupe l'axe (ox) . Elle atteint un point (x_1, y_1) de R_2 .

Supposons maintenant que γ reste dans la région R_2 . Pour tout $t > 0$,

$$x(t) - x_1 = \int_0^t y(s) ds$$

Comme dans R_2 on a $y(s) < y_1, \forall 0 < s \leq t$, il s'ensuit que

$$x(t) \leq x_1 + \int_0^t y_1 ds = x_1 + y_1 t \quad (1.8)$$

Puisque $y_1 < 0$, il existe t_1 limité positif tel que $x(t_1)$ soit négatif. Ceci contredit le fait que γ ne quitte pas la région R_2 . Autrement dit, la trajectoire γ atteint un point de R_3 . Ainsi, par symétrie, elle atteint en un temps t_2 la région R_4 , puis le sens du champ de vecteurs fait que γ atteint un point $(x(t_3), y(t_3))$ de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > \varphi(x), x < 0\}$$

Comme la courbe

$$y = \alpha_1 x^2$$

est une solution du système (8), la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x) < y < \alpha_1 x^2, x < 0, y > 0\}$$

est invariante sous le système (8). De plus, dans cette région, la composante y est décroissante. Il s'ensuit que la partie

$$\gamma^+ = \{(x(t), y(t)) \in \gamma, t > t_3\}$$

de la trajectoire γ est contenue dans le compact défini par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x) \leq y \leq \alpha_1 x^2, x \leq 0, y \leq y(t_3)\}$$

Comme les composantes x et y sont monotones dans ce compact, il s'ensuit que la solution γ tend vers l'unique point singulier $(0, 0)$ du système (8) quand t tend vers $+\infty$.

Par symétrie par rapport à l'axe (oy) , la solution γ tend aussi vers $(0, 0)$ quand t tend vers $-\infty$, en restant dans la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, \varphi(x) \leq y \leq \alpha_1 x^2\}.$$

Preuve de 2) :

Considérons l'éclatement

$$\begin{cases} x = zw \\ y = z^2 \\ d\eta = zdt. \end{cases}$$

Ce changement de variables décrit le demi-plan $y \geq 0$. Le système (8) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} w' = 1 - \frac{a}{2}w^4 - \frac{b}{2}w^2 \\ z' = \frac{a}{2}w^3z + \frac{b}{2}wz. \end{cases} \quad (1.9)$$

Le portrait de phases du système (1.9) est représenté sur la figure 1.5.

Les solutions de (1.9) sont symétriques par rapport aux axes (ow) et (oz) ; il suffit donc de restreindre l'étude du champ de vecteurs (1.9) au quadrant

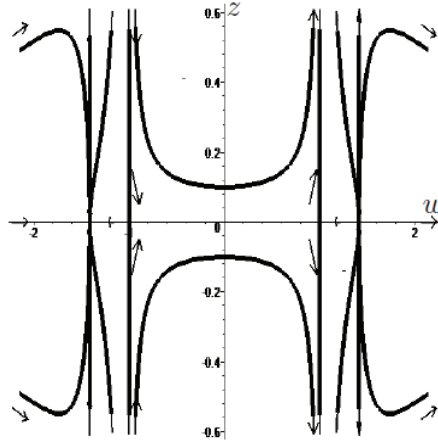


FIGURE 1.5 – Portrait de phases du système (1.9) pour $a = -1$ et $b = 3$.

$\{(w, z) \in \mathbb{R}^2; w \leq 0, z \geq 0\}$. Le système (1.9) possède quatre points singuliers : deux cols $A_1 = (w_1, 0)$ et $A_2 = (w_2, 0)$ et deux nœuds $A_3 = (w_3, 0)$ instable et $A_4 = (w_4, 0)$ stable, où

$$w_1 = \left(\frac{-b + \sqrt{\lambda}}{2a} \right)^{1/2}, \quad w_2 = - \left(\frac{-b + \sqrt{\lambda}}{2a} \right)^{1/2},$$

$$w_3 = \left(\frac{-b - \sqrt{\lambda}}{2a} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad w_4 = - \left(\frac{-b - \sqrt{\lambda}}{2a} \right)^{1/2}$$

La parabole $y = \alpha_2 x^2$ correspond dans le plan (w, z) à la réunion des deux droites

$$w = w_1 \text{ et } w = w_2$$

et la parabole $y = \alpha_1 x^2$ à celle des droites

$$w = w_3 \text{ et } w = w_4$$

Soit (w_0, z_0) un point du plan tel que $w_4 < w_0 < w_2$ et $(w(\tau), z(\tau))$ la solution du système (1.9) issue de ce point, parcourue dans le sens négatif du temps et définie dans un intervalle maximal $]\tau_{min}, 0]$.

On a

$$z(\tau) = z_0 \exp\left(\int_0^\tau \left(\frac{a}{2}w^3(s) + \frac{b}{2}w(s)\right) ds\right).$$

Le théorème de sortie de compacts appliqué à la solution $(w(\tau), z(\tau))$ dans la région

$$B = \{(w, z) \in \mathbb{R}^2; z > 0, w_4 < w < w_2\}$$

entraîne que $z(\tau)$ tend vers $+\infty$. Puisque dans la région B ,

$$\frac{a}{2}w^3(s) + \frac{b}{2}w(s) < 0, \forall s \in]\tau_{min}, 0[$$

et $\frac{a}{2}w^3(s) + \frac{b}{2}w(s)$ est borné pour tout s dans $] \tau_{min}, 0[$, ceci implique que $\tau_{min} = -\infty$. Il en résulte que la composante w tend vers w_2 quand τ tend vers $-\infty$. On montre de même que w tend vers w_4 quand τ tend vers $+\infty$. Ceci signifie que la solution γ issue de (x_0, y_0) tel que $x_0 < 0$ et $\alpha_1 x_0^2 < y_0 < \alpha_2 x_0^2$, tend vers la parabole $y = \alpha_2 x^2$ quand t tend vers $-\infty$ et vers la parabole $y = \alpha_1 x^2$ quand t tend vers $+\infty$.

Preuve de 3) :

L'axe (ow) est invariant dans le système (1.9). On montre que, pour une solution $(w(\tau), z(\tau))$ issue d'un point (w_0, z_0) tel que $w_2 < w(0) < 0$, $z_0 \neq 0$ il existe un temps $t_1 > 0$ tel que $0 < w(t_1) < w_1$ (Fig. 1.5). Ceci signifie que, si $y_0 > \alpha_2 x_0^2$, alors la solution γ issue de (x_0, y_0) coupe l'axe (oy) .

Lorsque $0 > w(0) > w_2$ et $z_0 \neq 0$, on a

$$\forall \tau < 0, w_2 < w(\tau) < 0$$

et

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} w(\tau) \neq 0.$$

De plus,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} z(\tau) = +\infty.$$

Ceci signifie que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = - \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty.$$

De même par symétrie,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty. \blacksquare$$

1.1.2 Orbites homoclines dans le système discret

À partir de maintenant, on fera appel à des outils et une terminologie de l'analyse non standard. En fait, on utilisera essentiellement dans toute la suite les trois résultats importants présentés ci-après : le principe de permanence, le lemme de l'ombre courte et le lemme de stroboscopie.

Pour plus de détails et une brève introduction à l'analyse non standard, voir l'annexe A.

Le principe de permanence existe sous plusieurs formes. Voici la version dite "de Fehrel" :

Principe de permanence. [17] *Aucun halo ne peut être une galaxie.*

Le lemme de l'ombre courte permet de comparer les solutions de deux équations différentielles infiniment proches, sur des intervalles de temps limités :

Lemme 1.1.2 (*Lemme de l'ombre courte*) [17] *Considérons les deux équations différentielles suivantes :*

$$\dot{x} = F_0(x) ; x(0) = c_0 \in U_0, \quad (1.10)$$

et

$$\dot{x} = F(x) ; x(0) = c \in U. \quad (1.11)$$

Soit U_0 un ouvert standard de \mathbb{R}^n , soit $F_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ standard et continue et soit c_0 standard. Supposons que le problème de Cauchy (1.10) admet une solution unique $x_0(t)$ et soit $J = [0, \omega[$ tel que $0 < \omega \leq +\infty$, son intervalle positif maximal de définition. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant tous les éléments presque standard de U_0 . Soit $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que $F(x) \simeq F_0(x)$ pour tout x presque standard dans U_0 . Alors, lorsque $c \simeq c_0$, toute solution $x(t)$ du problème de Cauchy (1.11) est définie pour tout t presque standard de J et satisfait $x(t) \simeq x_0(t)$.

Le lemme de stroboscopie [51] permet de comparer une solution d'une équation différentielle et celle de l'équation obtenue par discrétisation :

Lemme 1.1.3 (*Lemme de stroboscopie*) Soit T un réel standard strictement positif, $h \simeq 0$ positif fixé et soit N la partie entière de T/h ($Nh \leq T < (N+1)h$).

Soient U un ouvert standard de \mathbb{R}^2 et F une fonction standard et continue de U dans \mathbb{R}^2 .

Soit $\{X_n; n = 0, \dots, N+1\}$ une suite de U telle que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, X_n est presque standard et

$$X_{n+1} = X_n + hF(X_n)$$

Alors la fonction standard $X : [0, T] \rightarrow U$, définie pour tout t standard par $X(t) = {}^\circ X_n$, où n est tel que $nh \leq t < (n+1)h$, est une solution de l'équation différentielle $\dot{X} = F(X)$ de condition initiale $X(0) = {}^\circ X_0$, et vérifie que $X_n \simeq X(nh)$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$.

Revenons au paradigme (8) et à son discrétisé (1.2). L'idée essentielle de la démonstration du théorème 1.0.1 est d'utiliser le fait que les courbes $y = \alpha x^2$, avec $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$, constituent des barrières supérieures du champ de vecteurs (8) et de montrer que cela reste vrai pour les itérés du système (1.2).

Dans la preuve du théorème 1.0.1, on fait appel à une série de lemmes qu'on énoncera et démontrera ci-après.

On a les lemmes suivants :

Lemme 1.1.4 Soit (x_0, y_0) un point limité de la région R_1 , avec x_0 appréciable.

1) La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (1.2) issue de (x_0, y_0) atteint un point limité (x_q, y_q) de la région R_4 pour un certain $q \in \mathbb{N}$.

2) Le successeur (x_{q+1}, y_{q+1}) de (x_q, y_q) vérifie que $x_{q+1} < 0$.

Preuve :

1) Soit γ_1 la solution de (8) issue du point $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. On sait qu'en un temps standard \bar{t} (on peut prendre $\bar{t} = t_2 + 1$ où t_2 est donné dans la preuve de la proposition 1.1.1), la solution γ_1 aura atteint un point de la région R_4 .

Le point 1) est une conséquence du lemme 1.1.3, en prenant $X = (x, y)$, $T = \bar{t}$, et $F = (f_1, g_1)$ avec

$$f_1(x, y) = y$$

et

$$g_1(x, y) = ax^3 + bxy.$$

La preuve de 2) découle de l'équation

$$x_{q+1} = x_q + hy_q.$$

Puisque $x_q < 0$ et $y_q < \alpha_1 x_q^2$, on a

$$x_{q+1} < x_q + h\alpha_1 x_q^2 = x_q(1 + h\alpha_1 x_q) < 0. \blacksquare$$

Notons F_h l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$F_h(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Lemme 1.1.5 *Soit (x_0, y_0) un point limité de la région R_4 et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (1.2) issue de ce point. Alors, il existe n_2 dans \mathbb{N}^* tel que $y_{n_2} > \varphi(x_{n_2})$.*

Preuve

Supposons que la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne quitte pas la région R_4 . Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes dans R_4 . La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par $\varphi(x_0)$). Elle converge vers une limite $l_2 \geq y_0$. De plus, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par zéro), donc convergente vers une limite l_1 . Par continuité de F_h , la limite $L = (l_1, l_2)$ vérifie $F_h(L) = L$. D'où $L = (0, 0)$. Ceci est en contradiction avec $l_2 \geq y_0$. Le sens de parcours des itérés $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de conclure. \blacksquare

Lemme 1.1.6

Aucune solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (1.2) issue d'un point limité (x_0, y_0) de la région

$$R_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, \varphi(x) < y < \alpha_1 x^2\}$$

ne quitte celle-ci.

Preuve :

On a

$$y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^2 = y_n + h(ax_n^3 + bx_n y_n) - \alpha_1 (x_n + hy_n)^2,$$

c'est-à-dire

$$y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^2 = (y_n - \alpha_1 x_n^2) + h(b - 2\alpha_1)x_n \left(y_n + \frac{a}{b - 2\alpha_1} x_n^2 \right) - h^2 \alpha_1 y_n^2.$$

Comme

$$\frac{a}{b - 2\alpha_1} = -\alpha_1$$

il s'ensuit que

$$y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^2 = (y_n - \alpha_1 x_n^2)(1 + h(b - 2\alpha_1)x_n) - \alpha_1 h^2 y_n^2.$$

On sait d'après le lemme 1.1.5 que, si (x_0, y_0) est un point de R_4 , alors la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point limité de la région R_7 . Or dans R_7 , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante; ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reste limitée. Il en résulte par récurrence que

$$y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^2 < 0$$

dès que

$$y_0 - \alpha_1 x_0^2 < 0.$$

D'autre part, on a

$$y_{n+1} + \frac{a}{b} x_{n+1}^2 = y_n + hb x_n \left(y_n + \frac{a}{b} x_n^2 \right) + \frac{a}{b} x_{n+1}^2.$$

Or $x_{n+1} = x_n + h y_n$. Comme $y_n < \alpha_1 x_n^2$, on aura

$$x_{n+1} \leq x_n(1 + h\alpha_1 x_n^2).$$

Ceci signifie, puisque $x_n < 0$, que $x_{n+1} < 0$. Ainsi, puisque $x_n < x_{n+1} < 0$, $a < 0$ et $b > 0$, on obtient

$$y_{n+1} + \frac{a}{b} x_{n+1}^2 > \left(y_n + \frac{a}{b} x_n^2 \right) + hb x_n \left(y_n + \frac{a}{b} x_n^2 \right) = \left(y_n + \frac{a}{b} x_n^2 \right) (1 + hb x_n).$$

Ainsi, par récurrence

$$y_{n+1} + \frac{a}{b} x_{n+1}^2 > 0$$

dès que

$$y_0 + \frac{a}{b} x_0^2 > 0. \blacksquare$$

On regarde maintenant en remontant le temps, l'existence des itérés inverses pour le système discret (1.2).

Lemme 1.1.7 *Le système (1.2) est S -inversible.*

Autrement dit, tout point limité du plan, admet un unique prédécesseur limité par le système (1.2).

Preuve :

Soit (u, v) un point limité du plan. Cherchons (x, y) limité tel que

$$F_h(x, y) = (u, v). \quad (1.12)$$

On a

$$x = u - hy.$$

Ceci implique que

$$v = y + h(a(u - hy)^3 + b(u - hy)y). \quad (1.13)$$

L'équation (1.13), de degré trois en y , a entre une et trois solutions réelles. Nous montrons ci-dessous qu'elle admet une unique solution limitée y . La solution (x, y) de (1.12) correspondante est telle que $(x, y) \simeq (u, v)$. Par conséquent les autres solutions de l'équation (1.13) sont réelles avec $|y|$ infiniment grand ou sont complexes. Posons

$$g(x, y) = ax^3 + bxy$$

On va montrer qu'il existe un unique $y \in]v - 1, v + 1[$ tel que

$$v = y + hg(u - hy, y)$$

Pour (u, v) fixé, notons

$$G(y) = v - y - hg(u - hy, y)$$

Comme $g(u - h(v + 1), v)$ est limité, on a

$$G(v + 1) = -1 - hg(u - h(v + 1), v) < 0.$$

De même,

$$G(v-1) = 1 - hg(u - h(v-1), y) > 0.$$

On a aussi pour tout y limité positif,

$$G'(y) = -1 - h \left(-h \frac{\partial g}{\partial x}(u - hy, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(u - hy, y) \right) < 0.$$

Comme G est continue, l'équation

$$G(x) = 0 \tag{1.14}$$

admet une unique solution limitée y appartenant à $]v-1, v+1[$. Or si une solution de l'équation (1.14), donc de l'équation (1.13) est limitée, elle sera forcément infiniment proche de v . Ainsi, (1.13) admet une unique solution limitée. ■

Grâce au lemme 1.1.7, on définit la suite (x_{-n}, y_{-n}) comme étant la solution du système

$$\begin{cases} x_{-n} = x_{-n-1} + hy_{-n-1} \\ y_{-n} = y_{-n-1} + h(ax_{-n-1}^3 + bx_{-n-1}y_{-n-1}) \end{cases}$$

vérifiant $(x_{-1}, y_{-1}) \simeq (x_0, y_0)$ et tant que (x_{-n}, y_{-n}) est limité, on a

$$(x_{-n-1}, y_{-n-1}) \simeq (x_{-n}, y_{-n}).$$

Lemme 1.1.8 *Soient $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$ et (x_0, y_0) un point limité du plan tel que $x_0 > 0$ et $0 < y_0 < \alpha x_0^2$. Alors la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ du système (1.2) issue de (x_0, y_0) ne quitte pas la région du plan*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 0 < y < \alpha x^2\}.$$

Preuve :

On a

$$y_0 - \alpha x_0^2 = y_{-1} - \alpha x_{-1}^2 + h(b - 2\alpha)x_{-1}y_{-1} + h\alpha x_{-1}^3 - \alpha h^2 y_{-1}^2.$$

Comme $y_0 - \alpha x_0^2 < 0$, on aura

$$y_{-1} - \alpha x_{-1}^2 + h(b - 2\alpha)x_{-1}y_{-1} + h\alpha x_{-1}^3 - \alpha h^2 y_{-1}^2 < 0. \tag{1.15}$$

Le discriminant Δ du polynôme de degré deux en y_{-1} défini dans (1.15) est strictement positif. L'inégalité (1.15) entraîne

$$y_{-1} < \bar{y} \text{ ou } y_{-1} > \bar{y}$$

où

$$\bar{y} = \frac{1 + h(b - 2\alpha)x_{-1} + \sqrt{\Delta}}{2\alpha h^2} > 0$$

et

$$\bar{y} = \frac{1 + h(b - 2\alpha)x_{-1} - \sqrt{\Delta}}{2\alpha h^2} > 0.$$

Le réel \bar{y} est infiniment grand et on vérifie facilement que, puisque $\alpha_1 \ll \alpha \ll \alpha_2$, on a $\bar{y} < \alpha x^2$. Il en résulte que $y_{-1} < \alpha x_{-1}^2$. De même par récurrence, on montre que $y_{-n} < \alpha x_{-n}^2$, pour tout $n > 1$. ■

Lemme 1.1.9 *La suite des prédécesseurs $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ d'un point limité (x_0, y_0) de la région R_1 vérifie :*

1)

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, y_{-k} > \varphi(x_{-k}),$$

2)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > k \implies y_{-n} > \varphi(x_{-n}).$$

Preuve de 1) :

Pour montrer la première propriété, supposons que la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ne quitte pas la région

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, 0 < y < \varphi(x)\}.$$

La preuve est similaire à celle du lemme 1.1.5 : dans cette région la suite $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par $\varphi(x_0)$). Elle converge vers une limite $l \geq y_0$. De plus, la suite $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (par zéro), donc convergente.

Une simple vérification donne que la limite de la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est $(0, 0)$. Ceci est en contradiction avec $l \geq y_0 > 0$.

Preuve de 2) :

Pour montrer la deuxième propriété, supposons que

$$\exists q \in \mathbb{N}^*, q > k \text{ tel que } y_{-q} < \varphi(x_{-q}).$$

D'après le lemme 1.1.4, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } -n > -q, y_{-n} < \varphi(x_{-n}).$$

En particulier, $y_{-k} < \varphi(x_{-k})$ ($-k > -q$). Ceci est absurde. ■

On peut maintenant faire la démonstration du théorème 1.0.1.

Preuve du théorème 1.0.1 :

Soit (x_0, y_0) un point limité de R_1 . D'après le lemme 1.1.4, la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (1.2) issue de (x_0, y_0) atteint un point de R_4 , puis un point (x_k, y_k) , $k > 0$, tel que $x_k < 0$ et $\varphi(x_k) < y_k < \alpha_1 x_k^2$ d'après le lemme 1.1.5 ci-dessus, pour ne plus jamais quitter la région

$$R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, \varphi(x) < y < \alpha_1 x^2\}$$

d'après le lemme 1.1.6. Dans la région R_5 , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Ainsi la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est l'unique point stationnaire $(0, 0)$ de (1.2).

D'après le lemme 1.1.7 ci-dessus, le système (1.2) admet une suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ de prédécesseurs, issue du point (x_0, y_0) .

Concernant la partie directe $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la solution, d'après le lemme 1.1.9, la partie des prédécesseurs $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point (x_{-p}, y_{-p}) , $p > 0$, de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > \varphi(x)\}$$

et reste d'après le lemme 1.1.8, dans la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, 0 < y < \alpha x^2\}$$

où $\alpha_2 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_1$.

De même, en utilisant les propriétés de monotonie des deux suites $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient que la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(0, 0)$ quand n tend vers $-\infty$. ■

1.2 Etude qualitative du comportement du système (7)

On s'intéresse dans cette section au comportement des solutions du système différentiel du plan (7)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^3(1+k(x)) + bxy(1+g(x)) + y^2f(x,y) \end{cases}$$

où k , g et f sont des fonctions analytiques, telles que $k(0) = g(0) = 0$. Les paramètres réels a et b sont supposés vérifier $a < 0$, $b > 0$ (on a vu précédemment que, par un changement de variables linéaire, on peut supposer que b est strictement positif) et $\lambda = b^2 + 8a > 0$.

Une transformation affine

$$(x, y) \mapsto (x, \sqrt{-a}y)$$

acompanée du changement de temps $\tau = \sqrt{-a}t$ et du changement

$$b \mapsto \frac{b}{\sqrt{-a}}$$

permet de supposer que $a = -1$. On écrit ainsi en réutilisant les lettres f , g et k , le système (7) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3(1+k(x)) + bxy(1+g(x)) + y^2f(x,y) \end{cases} \quad (1.16)$$

L'origine est un point singulier dégénéré dans le système (1.16). Pour étudier le comportement des solutions de (1.16) au voisinage de ce point, on effectue une série d'éclatements directionnels quasi-homogènes de degré (α, β) qu'on déterminera : l'éclatement dans la direction des x

$$(x, y) \mapsto (\pm x^\alpha, x^\beta y)$$

et l'éclatement dans la direction des y

$$(x, y) \mapsto (xy^\alpha, \pm y^\beta)$$

On choisit les poids dans ces éclatements à l'aide du polygone de Newton.

On a la proposition suivante :

Proposition 1.2.1 *Le système (1.16) possède un secteur elliptique. Le comportement des solutions de (1.16) au voisinage de l'origine est similaire à celui dans le système (8) quand $a = -1$.*

Preuve :

On procède par une série d'éclatements :

Les indices minimaux correspondants aux monômes $x^{i+1}y^j$ de \dot{x} et $x^i y^{j+1}$ de \dot{y} sont : $(-1, 1)$, $(1, 0)$ et $(3, -1)$.

Le polygone de Newton \mathcal{P} associé au système (1.16) est l'enveloppe convexe

$$\{(r, s) \in \mathbb{R}; r + 2s \geq 1 \text{ et } r \geq -1\}$$

illustrée sur la figure 1.6.

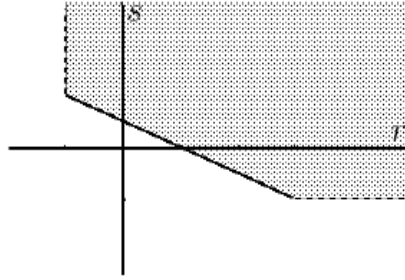


FIGURE 1.6 – Polygone de Newton associé au système (1.16).

Le premier côté γ_1 du polygone de Newton \mathcal{P} a pour équation $x + 2y = 1$. Ainsi, on choisit $(1, 2)$ comme étant la puissance des éclatements qu'on effectuera sur (1.16).

On aura besoin d'un éclatement suivant la direction des x et deux suivant celle des y .

Éclatement quasi-homogène suivant la direction des x :

En appliquant l'éclatement quasi homogène dans la direction des x suivant :

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2v \\ d\tau = udt, \end{cases} \quad (1.17)$$

on aboutit au système

$$\begin{cases} u' = uv \\ v' = -1 + bv - (p+1)v^2 - h(u) + bvg(u) + uv^2 f(u, u^2v). \end{cases} \quad (1.18)$$

Le système (1.18) possède deux points singuliers : un nœud répulsif $A_1 = (0, \alpha_1)$ et un col $A_2 = (0, \alpha_2)$ (Fig. 1.7), où

$$\alpha_1 = \frac{b - \sqrt{\lambda}}{4}$$

et

$$\alpha_2 = \frac{b + \sqrt{\lambda}}{4}.$$

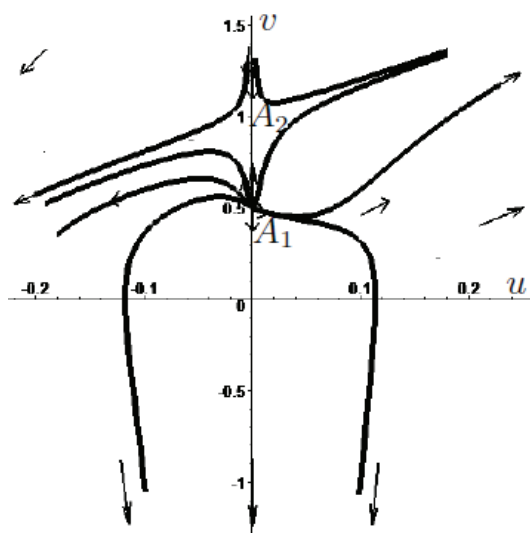


FIGURE 1.7 – Portrait de phases du système (1.18) au voisinage de A_1 et A_2 , avec $f(x, y) = g(x) = k(x) = x$ et $b = 3$.

L'axe (ov) est invariant sous le système (1.18). La continuité des solutions par rapport aux conditions initiales donne l'existence d'un $\delta > 0$ tel que pour tout u_0 dans l'intervalle $]-\delta, \delta[$, la solution $\gamma(u(t), v(t))$ issue de $(u_0, 0)$ tend vers A_1 quand τ tend vers $-\infty$ et passe dans le demi-plan inférieur quand τ tend vers $+\infty$.

Dans le plan (x, y) , la solution $\gamma(x(t), y(t))$ correspondante coupe l'axe (ox) . Elle passe, lorsque le temps est décroissant, du quadrant du plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y > 0\}$ au quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}$.

De même, lorsque le temps est croissant, cette solution passe du quadrant du plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ au quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$.

Elle tend vers $(0,0)$ dans la partie du plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$ quand $t \rightarrow +\infty$ et dans la partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ quand $t \rightarrow -\infty$.

Les autres solutions de (1.18) ne coupent pas forcément l'axe (ou) .

On peut remarquer que l'axe (oy) excepté l'origine, n'est pas représenté par le changement de variables (1.17). D'où la nécessité d'un éclatement quasi-homogène suivant la direction des y .

Éclatement quasi-homogène suivant la direction des y positifs :

L'éclatement $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v^2 \\ d\tau = v dt \end{cases} \quad (1.19)$$

transforme le système (1.16) en

$$\begin{cases} u' = 1 + \frac{u^4}{2}(1 + h(uv)) - \frac{bu^2}{2}(1 + g(uv)) - \frac{uv}{2}f(uv, v^2) \\ v' = -\frac{u^3v}{2}(1 + h(uv)) + \frac{buv}{2}(1 + g(uv)) + \frac{v^2}{2}f(uv, v^2) \end{cases} \quad (1.20)$$

Le système (1.20) possède quatre points singuliers (Fig. 1.8) : deux nœuds $B_1 = (u_1, 0)$ stable et $B_2 = (u_2, 0)$ instable et deux cols $B_3 = (u_3, 0)$ et $B_4 = (u_4, 0)$, où

$$u_1 = \left(\frac{b - \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2}, u_2 = -\left(\frac{b - \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2}, \\ u_3 = \left(\frac{b + \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2} \text{ et } u_4 = -\left(\frac{b + \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2}.$$

Certaines solutions de (1.20) tendent vers B_1, B_2, B_3 et B_4 quand τ tend vers ∞ . Les solutions de (1.16) correspondantes tendent lorsque $y > 0$, vers $(0, 0)$, dans le sens croissant du temps quand $x < 0$, et dans le sens décroissant du temps quand $x > 0$.

Les séparatrices ayant aux voisinages de B_1, B_2, B_3 et B_4 pour tangentes $u = u_1, u = u_2, u = u_3$ ou $u = u_4$, correspondent, dans le plan (x, y) , aux solutions du système (1.16) dont les tangentes au voisinage de $(0, 0)$ sont données par

$$y = \frac{1}{u_2^2}x^2 \quad (1.21)$$

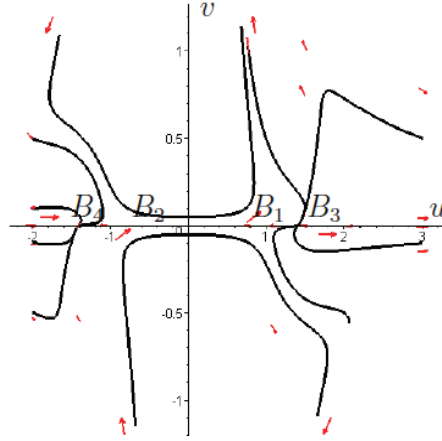


FIGURE 1.8 – Portrait de phases du système (1.20) au voisinage de B_1 , B_2 , B_3 et B_4 , avec $f(x, y) = g(x) = k(x) = x$ et $b = 3$.

et

$$y = \frac{1}{u_4^2} x^2 \quad (1.22)$$

On peut remarquer que $\frac{1}{u_2^2} = \alpha_2$ et $\frac{1}{u_4^2} = \alpha_1$.

L'axe (ou) est invariant sous le système (1.20). Par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, des solutions de (1.20) qui passent au voisinage de B_1 et de B_2 suffisamment proches des droites $u = u_1$ et $u = u_2$, avec des conditions initiales (u_0, v_0) telles que $u_2 < u_0 < u_1$ longent l'axe (ou), puis coupent l'axe (ov) en des points d'ordonnées proches de zéro.

Dans le plan (x, y) , ceci signifie que les solutions correspondantes passent au voisinage de l'origine près des courbes (1.21) et (1.22), puis coupent l'axe (oy) au voisinage de l'origine.

Une solution de (1.20) dont la composante v tend vers l'infini correspond dans le plan (x, y) , à une solution dont la composante y tend vers $+\infty$.

Les solutions tendant vers B_3 et B_4 ont une des deux composantes u ou v qui tend vers l'infini. Si v tend vers l'infini, ces solutions ne sont pas homoclines.

L'éclatement (1.19) est restreint au demi-plan $y \geq 0$. Pour $y < 0$, on effectue sur le système (1.16) l'éclatement suivant la direction des y négatifs

Éclatement quasi-homogène suivant la direction des y négatifs :

L'éclatement suivant

$$\begin{cases} x = uv \\ y = -v^2 \\ d\tau = vdt \end{cases} \quad (1.23)$$

transforme le système (1.16) en

$$\begin{cases} u' = -1 - \frac{u^4}{2}(1 + h(uv)) - \frac{bu^2}{2}(1 + g(uv)) + \frac{uv}{2}f(uv, -v^2) \\ v' = \frac{u^3v}{2}(1 + h(uv)) + \frac{buv}{2}(1 + g(uv)) - \frac{v^2}{2}f(uv, -v^2) \end{cases} \quad (1.24)$$

Le système (1.24) ne possède aucun point singulier et l'axe (ou) est invariant sous ce système.

Le champ sur l'axe (ou) est horizontal.

Par continuité des solutions de (1.24) par rapport aux conditions initiales, il existe des solutions issues de points suffisamment proches de l'axe (ou) , qui coupent l'axe (ov) en des points d'ordonnées suffisamment proches de zéro.

On en déduit que, dans le demi-plan inférieur, aucune solution du système (1.16) ne tend vers $(0, 0)$.

En assemblant les trois éclatements (1.17), (1.19) et (1.23) appliqués au système (1.16), on déduit que ce dernier possède un secteur elliptique qui localement est similaire à celui du système (8). ■

1.3 Discrétisation de la famille de systèmes différentiels du plan, difféomorphes au système (1.16)

Dans le but d'étudier la persistance d'un secteur elliptique dans le discrétisé associé par Euler à un système différentiel analytique

$$\begin{cases} \dot{u} = f_1(u, v) \\ \dot{v} = g_1(u, v), \end{cases} \quad (1.25)$$

difféomorphe au système (1.16), on construit dans cette section un système discret difféomorphe au discrétisé de (1.25) et ayant, à un terme près, la

même forme que le discrétisé

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h\left(-x_n^3(1+k(x_n)) + bx_ny_n(1+g(x_n)) + y_n^2f(x_n, y_n)\right) \end{cases} \quad (1.26)$$

de (1.16).

Considérons donc le système différentiel (1.25) où f_1 et g_1 sont des fonctions analytiques et standard de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Supposons que l'origine des coordonnées est un point singulier isolé du système (1.25).

Supposons aussi que (1.25) est difféomorphe par l'application

$$\phi = (\varphi_1, \varphi_2) : (x, y) \mapsto (u, v) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$$

au système (1.16).

Le système (1.25) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv + P(u, v) \\ \dot{v} = cu + dv + Q(u, v) \end{cases} \quad (1.27)$$

où a, b, c et d sont des réels et P et Q sont des fonctions analytiques dont le développement de Taylor au voisinage de l'origine commencent par des termes de degré total supérieurs ou égal à deux en x et y .

On sait que, si le système (1.27) admet un secteur elliptique alors la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

possède deux valeurs propres nulles [43]. Dans le cas où cette matrice est non nulle, on aura

$$\begin{cases} a = -d \\ a^2 + bc = 0 \\ |a| + |b| + |c| \neq 0. \end{cases}$$

Le cas le plus générique se présente quand $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$. Dans ce cas, le changement de variables

$$\begin{cases} \bar{x} = v \\ \bar{y} = cu - av \end{cases} \quad (1.28)$$

permet d'écrire le système (1.27) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} + \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dot{\bar{y}} = \bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \quad (1.29)$$

où \bar{P} et \bar{Q} sont des polynômes de degré supérieur ou égal à deux en \bar{x} et \bar{y} . De même, le changement de variables

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} + \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \quad (1.30)$$

permet d'écrire le système (1.29) sous la forme (1.16). Finalement, le changement de variables

$$\psi : (u, v) \mapsto (x, y) = \psi(u, v)$$

défini par

$$\begin{cases} x = v \\ y = cu - av + \bar{P}(v, cu - av) \end{cases} \quad (1.31)$$

transforme le système (1.27) en (1.16).

Le jacobien de ψ au point $(0, 0)$ est égal à $(-c) \neq 0$. Par conséquent, dans un certain voisinage de $(0, 0)$, l'application ψ est bijective. Ainsi, il suffit de poser $\phi = \psi^{-1}$. On écrit

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = \bar{f}(x, y) \\ \varphi_2(x, y) = x \end{cases} \quad (1.32)$$

où \bar{f} est une fonction analytique telle que $\bar{f}(0, 0) = 0$. On a

$$\varphi_1(x_{n+1}, y_{n+1}) - \varphi_1(x_n, y_n) = hf_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n))$$

et

$$\varphi_2(x_{n+1}, y_{n+1}) - \varphi_2(x_n, y_n) = hg_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n)).$$

On aura

$$(x_{n+1} - x_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_n, y_n) + (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_n, y_n) + R(h) = hf_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n))$$

où

$$\begin{aligned} R(h) &= \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(x_n, y_n) + \\ &\quad (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_n, y_n) + \\ &\quad o(\|(x_{n+1}, y_{n+1}) - (x_n, y_n)\|^3) \end{aligned}$$

On aura aussi

$$(x_{n+1} - x_n) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_n, y_n) + (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_n, y_n) + \bar{R}(h) = hg_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n))$$

où

$$\begin{aligned} \bar{R}(h) &= \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(x_n, y_n) + \\ &\quad (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_n, y_n) + \\ &\quad o(\|(x_{n+1}, y_{n+1}) - (x_n, y_n)\|^3) \end{aligned}$$

Notons

$$d_n = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_n, y_n) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_n, y_n) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_n, y_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_n, y_n)$$

Lorsque $d_n \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{d_n} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_n, y_n) f_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n)) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_n, y_n) g_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n)) \right) + \\ &\quad \frac{R_1(h)}{d_n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - \frac{h}{d_n} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_n, y_n) f_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n)) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_n, y_n) g_1(\varphi_1(x_n, y_n), \varphi_2(x_n, y_n)) \right) + \frac{R_2(h)}{d_n} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
R_1(h) = & \left(\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(x_n, y_n) + \right. \\
& \left. (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_n, y_n) \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_n, y_n) - \\
& \left(\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(x_n, y_n) + \right. \\
& \left. (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_n, y_n) \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_n, y_n) + \\
& o(\|(x_{n+1}, y_{n+1}) - (x_n, y_n)\|^3)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_2(h) = & \left(\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(x_n, y_n) + \right. \\
& \left. (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_n, y_n) \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_n, y_n) - \\
& \left(\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(x_n, y_n) + \right. \\
& \left. (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_n, y_n) \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_n, y_n) + \\
& o(\|(x_{n+1}, y_{n+1}) - (x_n, y_n)\|^3)
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\dot{x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) + \dot{y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) = \dot{u} = f_1(u, v) = f_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$$

et

$$\dot{x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) + \dot{y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) = \dot{v} = g_1(u, v) = g_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$$

Notons

$$d = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y)$$

Il s'ensuit pour $d \neq 0$ que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{d} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) f_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) g_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) \right) \\ &= y \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\frac{1}{d} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) f_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) g_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) \right) \\ &= -x^3(1 + k(x)) + bxy(1 + g(x)) + y^2 f(x, y) \end{aligned}$$

En discrétisant (1.25) par Euler, on obtient le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf_1(u_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + hg_1(u_n, v_n) \end{cases} \quad (1.33)$$

Il résulte de ce qui précède que le difféomorphisme ϕ transforme le système (1.33) en

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h \left(-x_n^3(1 + k(x_n)) + bx_n y_n(1 + g(x_n)) + y_n^2 f(x_n, y_n) \right) + h^2 G(x_n, y_n) \end{cases} \quad (1.34)$$

où

$$\begin{aligned} G(x_n, y_n) &= \frac{1}{d_n} \left(\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}(x_n, y_n) + \frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(x_n, y_n) + \right. \\ &\quad \left. (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_n, y_n) + \\ &\quad o(\|(x_{n+1}, y_{n+1}) - (x_n, y_n)\|^3) \end{aligned}$$

On vérifie que G s'écrit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sous la forme

$$G(x, y) = xyG_1(x, y) + y^2G_2(x, y)$$

où G_1 et G_2 sont des fonctions analytiques dans \mathbb{R}^2 .

1.4 Secteur elliptique dans le discrétisé du système (1.16) et dans le système discret (1.34) associé par difféomorphisme à (1.16)

On étudie dans cette partie la préservation du secteur elliptique pour le système discret (1.26)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h \left(-x_n^3(1+k(x_n)) + bx_n y_n(1+g(x_n)) + y_n^2 f(x_n, y_n) \right) \end{cases}$$

associé par Euler au système différentiel (1.16). On étudie aussi l'existence d'un secteur elliptique dans le système discret (1.33) en passant par le système (1.34).

On sait d'après la proposition 1.2.1 que le système (1.16) possède un secteur elliptique. On montrera que cette propriété est préservée dans le système (1.26) et que de plus, le secteur elliptique de (1.16) et celui de (1.26) ont même ombre.

De même pour le système (1.33) : le système (1.16) possède un secteur elliptique. Par conséquent, le système (1.25) admet aussi un secteur elliptique. On va montrer en passant par le système (1.34) obtenu par difféomorphisme à partir de (1.16), que le système (1.33) admet un secteur elliptique ayant la même ombre que celle du système (1.25).

On énonce d'abord le lemme suivant concernant l'isocline zéro du système (1.16) :

Lemme 1.4.1 *Il existe une courbe dont le développement de Taylor au voisinage de $x = 0$ est donné par*

$$y = \psi(x) := \frac{1}{b}x^2 + o(x^2),$$

sur laquelle la composante y du champ de vecteurs (1.16) s'annule.

On a le théorème suivant, décrivant le secteur elliptique des systèmes (1.26) et (1.33) à travers celui de (1.16) et de (1.25) respectivement.

Théorème 1.4.2 *Dans la partie limitée du plan :*

Pour tout secteur elliptique S_1 du système (1.16), il existe un secteur elliptique du système (1.26) dont l'ombre est S_1 .

Pour tout secteur elliptique S_2 du système (1.25), il existe un secteur elliptique du système (1.33) dont l'ombre est S_2 .

Idée de la preuve du théorème 1.4.2 :

Tout d'abord, pour alléger les écritures, on rassemble les deux systèmes (1.34) et (1.26) dans le système

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h \left(-x_n^3(1+k(x_n)) + bx_n y_n(1+g(x_n)) + F(x_n, y_n) \right) \end{cases} \quad (1.35)$$

où $F(x, y) = y^2 f(x, y) + hG(x, y)$. Remarquons que quand $G \equiv 0$, le système (1.35) est le système (1.26).

Soit (x_0, y_0) un point limité du plan appréciablement dans le secteur elliptique du système (1.16). Plusieurs cas sont possibles, mais un seul est présenté ici : $x_0 > 0$ et $0 < y_0 < \psi(x_0)$, les autres cas sont similaires.

Notons $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ la solution du système (1.16) issue du point (x_0, y_0) et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (1.35) issue du même point.

Lorsque nh est limité, on a par application du lemme de stroboscopie que

$$(x_n, y_n) \simeq (\bar{x}(nh), \bar{y}(nh)) \quad (1.36)$$

Considérons les deux ensembles suivants :

$$H = \{n \in \mathbb{N}; (x_n, y_n) \simeq (x(nh), y(nh))\}$$

et

$$G = \{n \in \mathbb{N}; nh \text{ limité}\}$$

L'ensemble H est un halo, l'ensemble G est une galaxie (voir annexe A) et $G \subset H$.

Par permanence, $G \subsetneq H$. Ainsi, il existe N dans \mathbb{N} pour lequel Nh est infiniment grand et pour tout $n < N$, l'approximation (1.36) reste vraie. On aura

$$(\bar{x}(Nh), \bar{y}(Nh)) \simeq (0, 0)$$

Soit $\varepsilon = -\bar{x}(Nh)$ et posons

$$\begin{cases} x_n = \varepsilon X_n \\ y_n = \varepsilon^2 Y_n \end{cases} \quad (1.37)$$

En posant $h\varepsilon = \bar{h}$, le système (1.35) devient

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \bar{h}Y_n \\ Y_{n+1} = Y_n + \bar{h}\left(-X_n^3(1+k(\varepsilon X_n)) + bX_nY_n(1+g(\varepsilon X_n)) + \mathcal{F}(X_n, Y_n)\right) \end{cases} \quad (1.38)$$

où

$$\mathcal{F}(X, Y) = \varepsilon Y^2 f(\varepsilon X, \varepsilon^2) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^4} G(\varepsilon X, \varepsilon^2 Y).$$

On prendra dans toute la suite ε^4 infiniment grand devant \bar{h} . Ceci est possible par un choix convenable de N .

Le changement de variables

$$\begin{cases} x = \varepsilon X \\ y = \varepsilon^2 Y \end{cases} \quad (1.39)$$

où $\varepsilon \simeq 0$ et le changement de temps $\tau = \varepsilon t$ transforment le système (1.16) en

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = -X^3(1+k(\varepsilon X)) + bXY(1+g(\varepsilon X)) + \varepsilon Y^2 f(\varepsilon X, \varepsilon^2 Y) \end{cases} \quad (1.40)$$

où $(') = d/d\tau$. En utilisant le lemme de l'ombre courte, on montre que les solutions du système (1.40) issues de points limités (X_0, Y_0) ont pour ombres pour un temps limité, des solutions du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + bxy \end{cases} \quad (1.41)$$

qui est le système (8) pour $a = -1$.

Ainsi, pour montrer le théorème 1.4.2, on utilisera les propriétés des solutions du système (8).

On sait que les courbes d'équations $y = \alpha_1 x^2$ et $y = \alpha_2 x^2$ sont des solutions du système (1.41). L'idée essentielle de la démonstration est d'utiliser le fait que pour $\alpha_2 \gtrsim \alpha \gtrsim \alpha_1$, les courbes $y = \alpha x^2$ constituent des barrières supérieures pour le champ de vecteurs (1.16). Nous montrons grâce à ceci que c'est aussi le cas pour les itérés du système (1.26).

Preuve du théorème 1.4.2 :

D'une façon analogue que dans la preuve du lemme 1.1.4, on montre que la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, 0 < y < \psi(x)\}$$

que tant que $y_n < \alpha_2 x_n^2$, on a $x_{n+1} < 0$ et que cette solution atteint pour $\alpha_2 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_1$, un point (x_q, y_q) infiniment proche de l'origine, de la région

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, 0 < y < \alpha x^2\},$$

De plus, on a d'après le lemme 1.4.3 ci-dessous que

$$\forall n > q, x_n < 0, 0 < y_n < \alpha x_n^2.$$

Dans la région S , la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est le point stationnaire $(0, 0)$ de (1.35).

De même en utilisant les lemmes 1.4.4 et 1.4.5 ci-après, on montre que la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est bien définie d'après le lemme 1.4.4, converge vers $(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$. ■

Enfin, donnons les lemmes 1.4.3, 1.4.4 et 1.4.5 et leurs preuves :

Lemme 1.4.3 Soit $\alpha_2 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_1$. Aucune solution $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (1.38) issue d'un point limité (X_0, Y_0) de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, 0 < y < \alpha x^2\},$$

ne quitte celle-ci.

Preuve :

On a

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) + \bar{h}(b - 2\alpha)X_n Y_n - \bar{h}X_n^3 - \alpha \bar{h}^2 Y_n^2 - \\ &\quad \bar{h}X_n^3 k(\varepsilon X_n) + b\bar{h}X_n Y_n g(\varepsilon X_n) + \bar{h}\varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + \\ &\quad \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^4} G(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2\alpha + bg(\varepsilon X_n))X_n\right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2\alpha^2 + b\alpha - 1 + b\alpha g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n)\right) X_n^3 - \alpha \bar{h}^2 Y_n^2 + \\ &\quad \bar{h}\varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^4} G(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n). \end{aligned}$$

Lorsque

$$G(x, y) = xyG_1(x, y),$$

on aura

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2\alpha + bg(\varepsilon X_n))X_n \right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2\alpha^2 + b\alpha - 1 + b\alpha g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) \right) X_n^3 + \\ &\quad \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon} X_n Y_n G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) - a\bar{h}^2 Y_n^2. \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) \left(1 + \bar{h} \left(b - 2\alpha + bg(\varepsilon X_n) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) X_n \right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2\alpha^2 + b\alpha - 1 + b\alpha g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) + \alpha \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) X_n^3 + \\ &\quad \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) - \alpha \bar{h}^2 Y_n^2. \end{aligned}$$

Posons

$$\beta = -2\alpha^2 + b\alpha - 1 + b\alpha g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) + \alpha \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n).$$

On a $\beta \gtrsim 0$. Montrons que lorsque $Y_n < \alpha X_n^2$ et $X_n < 0$, on a

$$\beta X_n^3 + \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) < 0. \quad (1.42)$$

En effet, si $f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \leq 0$, la propriété (1.42) est vérifiée.

Supposons alors que $f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) > 0$ et procédons par l'absurde. Pour cela, supposons que

$$\beta X_n^3 + \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \geq 0$$

On aura, soit

$$Y_n \leq -\sqrt{\frac{-\beta X_n^3}{\varepsilon f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)}}$$

ou bien

$$Y_n \geq \sqrt{\frac{-\beta X_n^3}{\varepsilon f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)}}$$

Comme $Y_n > 0$, en posant $\omega = -\beta/\varepsilon f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)$, on aura

$$Y_n \geq \sqrt{\omega X_n^3}$$

D'autre part, puisque ω est infiniment grand, lorsque X_n est limité on a $\sqrt{\omega X_n^3} > \alpha X_n^2$, c'est-à-dire $Y_n > \alpha X_n^2$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi

$$\beta X_n^3 + \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) < 0$$

D'où $Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 < 0$.

Lorsque

$$G(x, y) = y^2 G_2(x, y),$$

on aura

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2\alpha + bg(\varepsilon X_n))X_n \right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2\alpha^2 + b\alpha - 1 + bag(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) \right) X_n^3 + \\ &\quad \bar{h}^2 Y_n^2 G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) - a \bar{h}^2 Y_n^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2\alpha + bg(\varepsilon X_n))X_n + \bar{h}^2 Y_n G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2\alpha^2 + b\alpha - 1 + bag(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) \right) X_n^3 + \\ &\quad a \bar{h}^2 Y_n X_n^2 G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) - a \bar{h}^2 Y_n^2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) \times \\ &\quad \left(1 + \bar{h}(b - 2\alpha + bg(\varepsilon X_n))X_n + \bar{h}^2 Y_n G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + a \bar{h}^2 X_n^2 G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) + \\ &\quad \alpha^2 \bar{h}^2 X_n^4 G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + \bar{h} \left(-2\alpha^2 + b\alpha - 1 + bag(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) \right) X_n^3 + \\ &\quad \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) - \alpha \bar{h}^2 Y_n^2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 &= (Y_n - \alpha X_n^2) \times \\
&\quad \left(1 + \bar{h} (b - 2\alpha + bg(\varepsilon X_n)) X_n + \bar{h}^2 Y_n G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + a\bar{h}^2 X_n^2 G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) + \\
&\quad \bar{h} (-2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) + a^2 \bar{h} X_n G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)) X_n^3 \\
&\quad + \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) - a\bar{h}^2 Y_n^2
\end{aligned}$$

Notons

$$\delta = -2\alpha^2 + b\alpha - 1 + b\alpha g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) + \alpha^2 \bar{h} X_n G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)$$

On a $\delta \gtrsim 0$ et de même que pour (1.42) on aura

$$\delta X_n^3 + \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) < 0$$

D'où, $Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 < 0$.

Le même raisonnement que ci-dessus reste valable lorsque $G = xyG_1 + y^2G_2$. C'est aussi le cas lorsque $G_1 = G_2 = 0$ (lorsque $G_1 = G_2 = 0$ on obtient le système (1.26)). ■

Lemme 1.4.4 *Tout point limité du plan, admet un unique prédécesseur limité par le système (1.35).*

Preuve

Notons F_h l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$F_h(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

où $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la solution du système (1.35).

On veut montrer que pour tout point limité (u, v) du plan, il existe un unique point limité (x, y) tel que

$$F_h(x, y) = (u, v) \tag{1.43}$$

Cela revient à montrer qu'il existe un unique $(x, y) \simeq (u, v)$ tel que (1.43) soit vérifiée. Posons

$$l(x, y) = -x^3(1 + k(x)) + bxy(1 + g(x)) + F(x, y)$$

On a

$$x = u - hy,$$

c'est-à-dire

$$v = y + hl(u - hy, y) \tag{1.44}$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe un unique $y \in]v - 1, v + 1[$ vérifiant (1.44). Pour cela notons pour (u, v) limité fixé,

$$L(y) = v - y - hl(u - hy, y).$$

Comme $l(u - h(v + 1), v)$ est limité, on a

$$L(v + 1) = -1 - hl(u - h(v + 1), y) < 0$$

De même,

$$L(v - 1) = 1 - hl(u - h(v - 1), y) > 0$$

On a aussi pour tout y limité,

$$L'(y) = -1 - h \left(-h \frac{\partial l}{\partial x}(u - hy, y) + \frac{\partial l}{\partial y}(u - hy, y) \right) < 0$$

Comme L est continue, l'équation

$$L(x) = 0$$

admet une solution limitée y unique appartenant à $]v - 1, v + 1[$. ■

Soient $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des prédécesseurs du système (1.35) définie comme dans la preuve du lemme 1.4.4 et $(X_{-n}, Y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des prédécesseurs du système (1.38) correspondante.

Lemme 1.4.5 *Soient $a \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_2 \lesssim a \lesssim \alpha_1$ et (X_0, Y_0) un point limité du plan tel que $0 < Y_0 < aX_0^2$ et $X_0 > 0$. La solution $(X_{-n}, Y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ du système (1.38) issue de (X_0, Y_0) , ne quitte pas la région du plan définie par*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 0 < y < ax^2\}$$

Preuve :

On a

$$\begin{aligned} Y_0 - aX_0^2 &= (Y_{-1} - aX_{-1}^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2a + bg(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}\right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_{-1}) - k(\varepsilon X_{-1})\right) X_{-1}^3 - a\bar{h}^2 Y_{-1}^2 + \\ &\quad \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2 f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) + \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^4} G(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}). \end{aligned}$$

Si

$$G(x, y) = y^2 G_1(x, y)$$

alors

$$\begin{aligned} Y_0 - aX_0^2 &= (Y_{-1} - aX_{-1}^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2a + bg(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}\right) + \\ &\quad \bar{h}(-2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_{-1}) - k(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}^3 - a\bar{h}^2 Y_{-1}^2 + \\ &\quad \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2 f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) + \bar{h}^2 Y_{-1}^2 G_1(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Y_0 - aX_0^2 &= (Y_{-1} - aX_{-1}^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2a + bg(\varepsilon X_{-1}))X_{-1} + \right. \\ &\quad \left. \bar{h}^2 Y_{-1} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + a\bar{h}^2 X_{-1}^2 G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)\right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_{-1}) - k(\varepsilon X_{-1}) + \right. \\ &\quad \left. a\frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + a^2 \bar{h}^2 X_{-1} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)\right) X_{-1}^3 - \\ &\quad a\bar{h}^2 Y_{-1}^2 + \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2 f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}). \end{aligned}$$

Si

$$G(x, y) = xy G_2(x, y)$$

on aura

$$\begin{aligned} Y_0 - aX_0^2 &= (Y_{-1} - aX_{-1}^2) \left(1 + \bar{h}(b - 2a + bg(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}\right) + \\ &\quad \bar{h} \left(-2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_{-1}) - k(\varepsilon X_{-1})\right) X_{-1}^3 - a\bar{h}^2 Y_{-1}^2 + \\ &\quad \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2 f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) + \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon} X_{-1} Y_{-1} G_2(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) \end{aligned}$$

Ainsi

$$Y_0 - aX_0^2 = (Y_{-1} - aX_{-1}^2) \left(1 + \bar{h} \left(b - 2a + bg(\varepsilon X_{-1}) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) X_{-1} \right) + \bar{h} \left(-2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_{-1}) - k(\varepsilon X_{-1}) + a \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) X_{-1}^3 - a\bar{h}^2 Y_{-1}^2 + \bar{h} \varepsilon Y_{-1}^2 f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1})$$

Soient

$$\alpha = -2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_{-1}) - k(\varepsilon X_{-1}) + a \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) + a^2 \bar{h}^2 X_{-1} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)$$

et

$$\beta = -2a^2 + ba - 1 + bag(\varepsilon X_{-1}) - k(\varepsilon X_{-1}) + a \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n).$$

On a

$$\beta X_{-1}^3 + (\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) Y_{-1}^2 = \beta X_{-1}^3 + \left(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h} \right) (Y_{-1} - aX_{-1}^2) Y_{-1} + a(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) X_{-1}^2 Y_{-1}.$$

C'est-à-dire

$$\beta X_{-1}^3 + (\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) Y_{-1}^2 = \left(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h} \right) (Y_{-1} - aX_{-1}^2) Y_{-1} + a \left(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h} \right) X_{-1}^2 \left(Y_{-1} + \frac{\beta}{a(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h})} X_{-1} \right).$$

Si $\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h} \geq 0$, on a

$$0 \geq Y_0 - aX_0^2 \geq (Y_{-1} - aX_{-1}^2) \left(1 + \bar{h} \left(b - 2a + bg(\varepsilon X_{-1}) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) X_{-1} \right)$$

Si $\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h} < 0$, on a

$$\frac{\beta}{a(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h})} X_{-1} + aX_{-1}^2 = \left(\frac{\beta}{a(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h})} + aX_{-1} \right) X_{-1}$$

Comme $\beta \approx 0$ alors $\beta/a(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h})$ est infiniment grand et

$$\frac{\beta}{a(\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h})} X_{-1} + aX_{-1}^2 < 0$$

Ainsi

$$\beta X_{-1}^3 + (\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) Y_{-1}^2 > (\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) (Y_{-1} - aX_{-1}^2) (Y_{-1} + aX_{-1}^2).$$

On montre de même que

$$\alpha X_{-1}^3 + (\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) Y_{-1}^2 > (\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) (Y_{-1} - aX_{-1}^2) (Y_{-1} + aX_{-1}^2)$$

D'où

$$\begin{aligned} & (Y_{-1} - aX_{-1}^2) \left(1 + \bar{h} \left(b - 2a + bg(\varepsilon X_{-1}) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon} G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) \right) \right) X_{-1} + \\ & (\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) - a\bar{h}) (Y_{-1} + aX_{-1}^2) < Y_0 - aX_0^2 < 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que $Y_{-1} < aX_{-1}^2$.

La même preuve que ci-dessus reste valable lorsque $G = xyG_1 + y^2G_2$ et lorsque $G = 0$. ■

Chapitre 2

Secteur elliptique dans le système différentiel sous forme canonique pour $p = m$ et $\lambda > 0$

On a montré dans le premier chapitre que, pour $p = 1$ ($r = 2p + 1$ et $\lambda = b^2 + 4(p + 1)a > 0$), le système (5)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^r(1 + k(x)) + bx^p y(1 + g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases}$$

et son discrétisé

$$\begin{cases} x_n = x_n + hy_n \\ y_n = y_n + h(ax_n^r(1 + k(x_n)) + bx_n^p y_n(1 + g(x_n)) + y_n^2 f(x_n, y_n)) \end{cases}$$

admettent des secteurs elliptiques d'ombres égales.

Dans ce chapitre on généralise ce résultat à la famille des systèmes différentiels (5) dans le cas où $p = m \geq 3$. Pour cela, on suivra le même plan que dans le premier chapitre. On écrira le système (5) dans ce cas, sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^{2p+1}(1 + k(x)) + bx^p y(1 + g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $a < 0$ et $b > 0$.

Nous commençons d'abord par regarder la forme particulière la plus simple

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^{2p+1} + bx^p y \end{cases} \quad (2.2)$$

qui nous permettra d'avoir une idée sur le comportement des solutions de (2.1) et de son discrétisé.

On étudie le comportement global des solutions du système (2.2) lorsque $\lambda = b^2 + 4(p+1)a > 0$; on montrera en particulier que (2.2) possède un secteur elliptique balayant toute la zone limitée de la partie du plan

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y < -\frac{a}{b}x^{p+1} \right\}$$

où $y = (-a/b)x^{p+1}$ est une isocline du champ de vecteurs (2.2). On notera dans la suite $\varphi_1(x) = (-a/b)x^{p+1}$.

Par ailleurs, on montre qu'après discrétisation par Euler du système (2.2), le système obtenu

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h(ax_n^{2p+1} + bx_n^p y_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

admet aussi un secteur elliptique qui est de plus, infiniment proche au sens de la distance de Hausdorff, de celui du système (2.2).

2.1 Orbites homoclines dans le système (2.2)

Comme pour le système (8), les courbes $y = \alpha_1 x^{p+1}$ et $y = \alpha_2 x^{p+1}$ où $\alpha_1 = (b - \sqrt{\lambda})/2(p+1)$ et $\alpha_2 = (b + \sqrt{\lambda})/2(p+1)$, sont des solutions du système (2.2).

Soit $\gamma = (x(t), y(t))$ la solution du système (2.2) issue d'un point du plan (x_0, y_0) . Par symétrie, on suppose que $x_0 > 0$.

La proposition qui suit est une généralisation sur le paramètre p , de la proposition 1.1.1.

Proposition 2.1.1 1) Si $y_0 < \alpha_1 x_0^{p+1}$, alors l'orbite correspondante à γ est homocline.

2) Si $\alpha_1 x_0^{p+1} < y_0 < \alpha_2 x_0^{p+1}$, alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)^{p+1}} = \alpha_1$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)^{p+1}} = \alpha_2.$$

3) Si $\alpha_2 x_0^{p+1} < y_0$, alors la trajectoire γ coupe la droite $x = 0$ en un point d'ordonnée positive. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty.$$

Preuve de 1) :

Pour montrer les trois propriétés, on utilisera le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 1.1.1.

Considérons le changement de variables

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^{p+1}v \\ d\tau = u^p dt. \end{cases}$$

Le système (2.2) devient

$$\begin{cases} u' = uv \\ v' = a + bv - (p+1)v^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

où ($'$) désigne $d/d\tau$. Le portrait de phases de ce système est similaire à celui présenté sur la figure 1.4.

Les points $(0, \alpha_1)$ et $(0, \alpha_2)$ sont les seules singularités du système (2.4); elles sont respectivement un col et un nœud instable.

Les droites $v = \alpha_1$ et $v = \alpha_2$ correspondent dans le plan (x, y) aux courbes $y = \alpha_1 x^{p+1}$ et $y = \alpha_2 x^{p+1}$, respectivement. On montre que toute solution $\gamma_1(u(t), v(t))$ de (2.4) issue d'un point (u_0, v_0) du plan tel que $0 < v_0 < \alpha_1$ et $u_0 > 0$, coupe forcément la droite $v = 0$.

En effet, on peut exhiber un compact K dans la région du plan délimitée par l'axe (ou) et la droite $v = \alpha_1$, sur lequel le champ de vecteurs (2.4) est comme illustré sur la figure 2.1. De plus K contient une partie de la solution γ_1 et ne contenant aucun point stationnaire du système (2.4).

Le théorème de sortie de compact assure que la solution γ_1 quitte le compact K , en coupant l'axe (ou) . Ainsi, la solution γ du système (2.2),

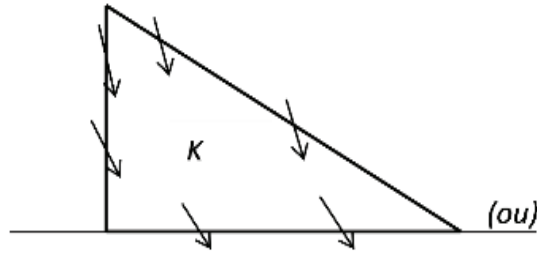


FIGURE 2.1 – Le compact K .

correspondante à γ_1 dans le plan (x, y) , issue du point (x_0, y_0) tel que $0 < y_0 < \alpha_1 x_0^{p+1}$, coupe l'axe (ox) . Par conséquent, elle atteint un point (x_1, y_1) tel que $x_1 > 0$ et $y_1 < 0$.

De même, on montre que la trajectoire γ atteint un point du quadrant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}.$$

Ainsi, par symétrie, elle atteint un point de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, 0 < y < \varphi_1(x)\},$$

puis un point $(x(t_1), y(t_1))$ de la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \varphi_1(x), x < 0, y > 0\}$. Tenant compte du fait que les courbes

$$y = \alpha_1 x^{p+1} \text{ et } y = \alpha_2 x^{p+1}$$

sont des solutions du système (2.2), et du sens du champ de vecteurs (2.2), il apparait que la solution γ tend vers l'unique point singulier $(0, 0)$ de (2.2) quand t tend vers $+\infty$ et aussi quand t tend vers $-\infty$ par symétrie.

Preuve de 2) :

L'éclatement

$$\begin{cases} x = zw \\ y = z^{p+1} \\ d\tau = z^p dt \end{cases}$$

transforme (2.2) en le système

$$\begin{cases} w' = 1 - \frac{a}{2} w^{2p+2} - \frac{b}{2} w^{p+1} \\ z' = \frac{a}{p+1} w^{2p+1} z + \frac{b}{p+1} w^p z \end{cases} \quad (2.5)$$

ayant deux cols $A_1 = (w_1, 0)$ et $A_2 = (w_2, 0)$ et deux nœuds $A_3 = (w_3, 0)$ répulsif et $A_4 = (w_4, 0)$ attractif, où

$$w_1 = -w_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\lambda}}{2a} \right)^{1/(p+1)} \quad \text{et} \quad w_3 = -w_4 = \left(\frac{-b - \sqrt{\lambda}}{2a} \right)^{1/(p+1)}$$

La parabole $y = \alpha_2 x^{p+1}$ correspond dans le plan (w, z) à la réunion des deux droites $w = w_1$ et $w = w_2$ et la parabole $y = \alpha_1 x^{p+1}$ à la réunion des deux droites $w = w_3$ et $w = w_4$.

Le portrait de phase de (2.5) est similaire à celui de la figure 1.5. Le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 1.1.1 permet de déduire que la solution γ issue de (x_0, y_0) tel que $\alpha_1 x_0^{p+1} < y_0 < \alpha_2 x_0^{p+1}$, tend vers la parabole $y = \alpha_2 x^{p+1}$ quand t tend vers $-\infty$ et vers $y = \alpha_2 x^2$ quand t tend vers $+\infty$.

Preuve de 3) :

Toute solution issue de la partie $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u_2 < u < u_1\}$ du plan (u, v) , coupe l'axe (ov) . Autrement dit, si $\alpha_2 x_0^{p+1} < y_0$, alors la solution γ issue de (x_0, y_0) coupe l'axe (oy) .

Lorsque $u_2 < u_0 < 0$, on a

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v(\tau) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} u(\tau) \neq 0.$$

Ceci signifie que les deux composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution γ tendent vers l'infini quand t tend vers $-\infty$. ■

2.2 Orbites homoclines dans le système discret (2.3)

Nous étudions dans cette section le système discret (2.3), associé par Euler au système (2.2).

Le théorème 2.2.1 suivant permet de localiser la partie limitée du secteur elliptique dans le système (2.3).

Théorème 2.2.1 *Dans la partie limitée du plan, pour tout secteur elliptique S du système (2.2), il existe un secteur elliptique du système (2.3) dont l'ombre est S .*

Les courbes $y = \alpha x^{p+1}$, avec $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$, constituent des barrières supérieures du champ de vecteurs (2.2), chose qu'en utilisera pour prouver le théorème 2.2.1 ; mais avant ça, notons $\bar{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 0 < y < \varphi_1(x)\}$ et $\bar{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, 0 < y < \varphi_1(x)\}$.

Les lemmes suivants sont nécessaires pour montrer le théorème 2.2.1 :

Lemme 2.2.2 1) La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point limité (x_q, y_q) de la région \bar{R}_2 .

2) Le successeur (x_{q+1}, y_{q+1}) de (x_q, y_q) vérifie que $x_{q+1} < 0$.

Lemme 2.2.3 Supposons que la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est issue de \bar{R}_2 . Alors, il existe n_0 dans \mathbb{N}^* tel que $y_{n_0} > \varphi_1(x_{n_0})$.

Lemme 2.2.4 Tout point limité du plan, admet un prédécesseur limité par le système (2.3).

D'après le lemme 2.2.4, on définit la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ comme étant la solution du système

$$\begin{cases} x_{-n} = x_{-n-1} + h y_{-n-1} \\ y_{-n} = y_{-n-1} + h (a x_{-n-1}^{2p+1} + b x_{-n-1}^{p+1} y_{-n-1}) \end{cases}$$

issue du point limité (x_0, y_0) vérifiant $(x_{-1}, y_{-1}) \simeq (x_0, y_0)$ et tant que (x_{-n}, y_{-n}) est limité, on a

$$(x_{-n-1}, y_{-n-1}) \simeq (x_{-n}, y_{-n}).$$

Lemme 2.2.5 Soit (x_0, y_0) un point limité de \bar{R}_1 . La suite des prédécesseurs $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ issue de (x_0, y_0) atteint un point de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} ; y > \varphi_1(x)\}$$

et ne quitte plus cette dernière.

Les lemmes 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.5 ont une preuve similaire à celle des lemmes 1.1.4, 1.1.5, 1.1.7 et 1.1.9 respectivement.

Lemme 2.2.6 1) Soit (x_0, y_0) un point limité du plan tel que $x_0 < 0$ et $y_0 < \alpha_1 x_0^{p+1}$. Alors, la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (2.3) issue de ce point vérifie que pour tout n dans \mathbb{N}^* , on a $x_n < 0$ et $y_n < \alpha_1 x_n^{p+1}$.

2) Aucune solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (2.3) issue d'un point limité (x_0, y_0) de la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > \varphi_1(x), x < 0\}$, ne quitte cette région.

Preuve de 1) :

On a

$$y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^{p+1} = y_n + h (ax_n^{2p+1} + bx_n^p y_n) - \alpha_1 (x_n + hy_n)^{p+1}.$$

C'est à dire,

$$y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^{p+1} = y_n + hax_n^{2p+1} + hbx_n^p y_n - \alpha_1 \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k h^k x_n^{p+1-k} y_n^k$$

On écrit

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^{p+1} &= (y_n - \alpha_1 x_n^{p+1}) + hax_n^{2p+1} + hbx_n^p y_n - \\ &\alpha_1 \left(C_{p+1}^1 x_n^p h y_n + C_{p+1}^2 x_n^{p-1} h^2 y_n^2 + \dots + C_{p+1}^{p+1} h^{p+1} y_n^{p+1} \right) \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^{p+1} &= (y_n - \alpha_1 x_n^{p+1}) + \\ &h (b - \alpha_2 C_{p+1}^1) x_n^p \left(y_n + \frac{a}{b - \alpha_1 C_{p+1}^1} x_n^{p+1} \right) - \\ &\alpha_1 \left(C_{p+1}^2 x_n^{p-1} h^2 y_n^2 + \dots + C_{p+1}^p x_n h^p y_n^p \right) - \alpha_2 h^{p+1} y_n^{p+1} \end{aligned}$$

Or

$$\frac{a}{b - \alpha_2 C_{p+1}^1} = -\alpha_1$$

D'où

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^{p+1} &= (y_n - \alpha_1 x_n^{p+1}) (1 + h(b - \alpha_1 C_{p+1}^1) x_n^p) - \\ &\alpha_1 (C_{p+1}^2 x_n^{p-1} h^2 y_n^2 + \dots + C_{p+1}^p x_n h^p y_n^p) + \\ &-\alpha_1 C_{p+1}^{p+1} h^{p+1} y_n^{p+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} C_{p+1}^2 x_n^{p-1} h^2 y_n^2 + \dots + C_{p+1}^p x_n h^p y_n^p &= h^3 C_{p+1}^3 y_n^2 x_n^{p-2} \left(\frac{C_{p+1}^2}{h C_{p+1}^3} x_n + y_n \right) + \\ &h^5 C_{p+1}^5 y_n^4 x_n^{p-4} \left(\frac{C_{p+1}^4}{h C_{p+1}^5} x_n + y_n \right) + \dots + \\ &h^p C_{p+1}^p y_n^{p-1} x_n \left(\frac{C_{p+1}^{p-1}}{h C_{p+1}^p} x_n + y_n \right). \end{aligned}$$

On a aussi puisque $x_n < 0$,

$$\alpha_2 x_n^{p+1} < -\frac{C_{p+1}^{p-1}}{hC_{p+1}^p} x_n, \quad \forall p \geq 3.$$

Ceci signifie que dès qu'on a $y_n < \alpha_1 x_n^{p+1}$, on obtient

$$y_n < -\frac{C_{p+1}^{p-1}}{hC_{p+1}^p} x_n, \quad \forall p \geq 3$$

Il en résulte par récurrence que $y_{n+1} - \alpha_1 x_{n+1}^{p+1} < 0$, dès que $y_n - \alpha_1 x_n^{p+1} < 0$.

Preuve de 2) :

On a

$$y_{n+1} + \frac{a}{b} x_{n+1}^{p+1} = y_n + hb x_n^p \left(y_n + \frac{a}{b} x_n^{p+1} \right) + \frac{a}{b} x_{n+1}^{p+1}.$$

Puisque $x_n < x_{n+1} < 0$, $a < 0$, $b > 0$ et $(p+1)$ est pair, on obtient

$$y_{n+1} + \frac{a}{b} x_{n+1}^{p+1} > \left(y_n + \frac{a}{b} x_n^{p+1} \right) + hb x_n^p \left(y_n + \frac{a}{b} x_n^{p+1} \right) \quad (2.6)$$

Le terme de droite de l'inégalité (2.6) s'écrit

$$\left(y_n + \frac{a}{b} x_n^{p+1} \right) (1 + hb x_n^p)$$

On déduit par récurrence que $y_{n+1} - \varphi_1(x_{n+1}^{p+1}) > 0$, dès que $y_n - \varphi_1(x_n^{p+1}) > 0$.

■

On a le dernier lemme :

Lemme 2.2.7 Soient $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$ et (x_0, y_0) un point limité du plan tel que $x_0 > 0$ et $0 < y_0 < \alpha x_0^{p+1}$. Alors, la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ du système (2.3) issue de (x_0, y_0) vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{-n} > 0 \text{ et } 0 < y_{-n} < \alpha x_{-n}^{p+1}$$

Preuve :

On a

$$0 > y_0 - \alpha x_0^{p+1} = y_{-1} + h a x_{-1}^{2p+1} + h b x_{-1}^p y_{-1} - \alpha \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k x_{-1}^{p+1-k} h^k y_{-1}^k$$

D'autre part,

$$y_0 - \alpha x_0^{p+1} \geq y_{-1} + hax_{-1}^{2p+1} + hbx_{-1}^p y_{-1} - \alpha x_{-1}^{p+1} - \alpha(p+1)hx_{-1}^p y_{-1} - \alpha h^2 y_{-1}^2 \sum_{k=2}^{p+1} C_{p+1}^k x_{-1}^{p+1-k}.$$

Ainsi,

$$y_0 - \alpha x_0^{p+1} \geq y_{-1} + hax_{-1}^{2p+1} + hbx_{-1}^p y_{-1} - \alpha x_{-1}^{p+1} - \alpha(p+1)hx_{-1}^p y_{-1} - \alpha\beta h^2 y_{-1}^2 \sum_{k=2}^{p+1} x_{-1}^{p+1-k}$$

où β est un nombre réel vérifiant $C_{p+1}^k \leq \beta$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq p+1$. Il s'ensuit que

$$\left(1 + (bh - (p+1)\alpha h)x_{-1}^p\right)y_{-1} - \alpha x_{-1}^{p+1} + hax_{-1}^{2p+1} - \alpha\beta h^2 \left(\frac{1-x_{-1}^p}{1-x_{-1}}\right)y_{-1}^2 \leq 0. \quad (2.7)$$

Le discriminant Δ du polynôme de second degré en y_{-1} dans (2.7) est strictement positif. Il admet lorsque $x_{-1} \neq 1$ deux solutions

$$\bar{y}_{-1} = \frac{1 + (bh - (p+1)\alpha h)x_{-1}^p + \sqrt{\Delta}}{2\alpha\beta h^2 \frac{1-x_{-1}^p}{1-x_{-1}}} > 0$$

et

$$\bar{\bar{y}}_{-1} = \frac{(1 + (bh - (p+1)\alpha h)x_{-1}^p) - \sqrt{\Delta}}{2\alpha\beta h^2 \left(\frac{1-x_{-1}^p}{1-x_{-1}}\right)} > 0$$

La racine \bar{y}_{-1} est infiniment grande. Ainsi, l'inégalité (2.7) est vérifiée si et seulement si $y_{-1} \leq \bar{\bar{y}}_{-1}$. On a,

$$\bar{\bar{y}}_{-1} \leq \alpha x_{-1}^{p+1}.$$

En effet, par un simple développement limité, on obtient

$$\bar{\bar{y}}_{-1} = \alpha x_{-1}^{p+1} - hax_{-1}^{2p+1} - h(\alpha x_{-1}^p + hx_{-1}^{2p+1})(-(p+1)\alpha x_{-1}^p + bx_{-1}^p) + o(h)$$

Or

$$-ax_{-1}^{2p+1} - (\alpha x_{-1}^p + hx_{-1}^{2p+1}) (bx_{-1}^p - (p+1)\alpha x_{-1}^p) = ((p+1)\alpha^2 - b\alpha - a)x_{-1}^{2p+1} - \alpha h(p+1)x_{-1}^{3p+1} + bhx_{-1}^{3p+1}$$

Comme $(p+1)\alpha^2 - b\alpha - a \ll 0$, du fait que $\alpha_1 \ll \alpha \ll \alpha_2$, il en résulte que

$$x_{-1}^{2p+1} - (\alpha x_{-1}^p + hx_{-1}^{2p+1}) (-(p+1)\alpha x_{-1}^p + bx_{-1}^p) < 0$$

Ceci signifie que $\bar{y}_{-1} \leq \alpha x_{-1}^{p+1}$. Il est facile de vérifier que ceci reste vrai lorsque $x_{-1} = 1$. ■

Preuve du théorème 2.2.1 :

Soit (x_0, y_0) un point limité de \bar{R}_1 , avec x_0 appréciable et soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (2.3) issue de ce point.

D'après le lemme 2.2.2, la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point de \bar{R}_2 puis atteint d'après le lemme 2.2.3, un point de la région

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \varphi_1(x), x < 0, y < \alpha_1 x^{p+1}\}$$

et y reste d'après le lemme 2.2.6. Dans la région S , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Ainsi la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est $(0, 0)$.

En utilisant les lemmes 2.2.4, 2.2.5 et 2.2.7 ci-dessus, il vient que la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(0, 0)$ quand n tend vers $-\infty$. ■

Remarque 2.2.1 *Les preuves des deux lemmes 2.2.4 et 2.2.5 sont similaires à celles des deux lemmes 1.1.7 et 1.1.9 : pour le lemme 2.2.4, il suffit de remplacer dans le lemme 1.1.7, la fonction g par $ax^{p+1} + bx^p y$.*

2.3 Etude qualitative du comportement du système (2.1)

On étudie dans cette section le comportement des solutions du système différentiel du plan (2.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^{2p+1}(1+k(x)) + bx^p y(1+g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases}$$

On rappelle que les fonctions f , g et k sont analytiques telles que $k(0) = g(0) = 0$. Les paramètres réels a , b et p sont supposés tels que $a < 0$, $b \neq 0$, p impair strictement supérieur à 1 et $\lambda = b^2 + 4(p+1)a > 0$. Le cas $p = 1$ a été étudié au premier chapitre. On s'intéressera en particulier à l'existence d'un secteur elliptique dans le système (2.1) et à sa localisation.

L'origine est un point singulier dégénéré du système (2.1). La transformation affine $(x, y) \mapsto (x, \sqrt{-a}y)$, le changement de temps $\tau = \sqrt{-a}t$ et le changement $b \mapsto b/\sqrt{-a}$ permettent de supposer que $a = -1$. Le système (2.1) s'écrira

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^{2p+1}(1+h(x)) + bx^py(1+g(x)) + y^2f(x,y) \end{cases} \quad (2.8)$$

En faisant le changement de variables $y \mapsto -y$ et le changement de temps $t \mapsto -t$, on ne perd pas de généralité si on suppose que $b > 0$.

Proposition 2.3.1 *Le système (2.8) possède un secteur elliptique.*

Preuve :

Comme au chapitre 1, on procède par une série d'éclatements :

Le côté γ_1 du polygone de Newton associé au système (2.8), a pour équation $x + (p+1)y = p$. Le couple $(1, p+1)$ sera choisi comme étant la puissance des éclatements quasi-homogènes suivant la direction des x et suivant la direction des y , qu'on appliquera sur (2.8).

L'éclatement quasi homogène suivant la direction des x

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^{p+1}v \\ d\tau = u^p dt \end{cases} \quad (2.9)$$

transforme (2.8) en

$$\begin{cases} u' = uv \\ v' = -1 + bv - (p+1)v^2 - h(u) + bvg(u) + uv^2f(u, u^{p+1}v) \end{cases} \quad (2.10)$$

Les points singuliers de (2.10) sont : un col $A = (0, \alpha_1)$ et un nœud instable $B = (0, \alpha_2)$.

Les solutions du système (2.10) ont le même comportement que celles du système (1.18). On peut se référer à la figure 1.7 pour un portrait de phase

du système (2.10). On peut aussi se référer à la preuve de la proposition 1.2.1 pour une interprétation du comportement des solutions du système (2.10) dans le plan (x, y) .

On en déduit ainsi que dans le plan (x, y) , les solutions de (2.8) issues de points (x_0, y_0) suffisamment proches de l'origine tels que $x_0 < 0$, coupent l'axe (ox) . Elles passent, dans le sens décroissant du temps, du quadrant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y > 0\}$$

au quadrant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}$$

Elles tendent vers $(0, 0)$ suivant le sens croissant du temps dans le quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y > 0\}$. Le même comportement se produit, en inversant le temps, dans la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$.

Les autres solutions de (2.8) ne coupent pas forcément l'axe (ox) .

L'éclatement quasi-homogène suivant la direction des y

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v^{p+1} \\ d\tau = v^p dt \end{cases} \quad (2.11)$$

transforme le système (2.8) en

$$\begin{cases} u' = 1 + \frac{u^{2p+2}}{p+1}(1 + h(uv)) - \frac{bu^{p+1}}{p+1}(1 + g(uv)) - \frac{uv}{p+1}f(uv, v^{p+1}) \\ v' = -\frac{u^{2p+1}v}{p+1}(1 + h(uv)) + \frac{bu^{p+1}v}{p+1}(1 + g(uv)) + \frac{v^2}{p+1}f(uv, v^{p+1}) \end{cases} \quad (2.12)$$

Le système (2.12) a deux nœuds $B_1 = (u_1, 0)$ et $B_2 = (u_2, 0)$ respectivement stable et instable et deux cols $B_3 = (u_3, 0)$ et $B_4 = (u_4, 0)$, où

$$u_1 = -u_2 = -\left(\frac{b + \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/(p+1)}$$

et

$$u_3 = -u_4 = -\left(\frac{b - \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/(p+1)}$$

Le portrait de phases du système (2.12) est similaire à celui sur la figure 1.8 du système (1.20).

Certaines solutions de (2.12) tendent vers les singularités B_1 , B_2 , B_3 et B_4 quand τ tend vers $+\infty$. On retrouve ainsi l'interprétation ci-dessus, dans le cas de l'éclatement (2.9); c'est-à-dire que les solutions de (2.8) correspondantes tendent de part et d'autre vers l'origine.

Les courbes $y = \alpha_1 x^2$ et $y = \alpha_2 x^2$ (solutions du paradigme) correspondent dans le plan (u, v) par l'éclatement (2.11) aux droites $u = u_1$, $u = u_2$, $u = u_3$ et $u = u_4$.

Par continuité par rapport aux conditions initiales et du fait que l'axe (ou) est invariant sous le système (2.12), les solutions de (2.12) issues de points d'un certain voisinage de B_1 et de B_2 , suffisamment proches des droites $u = u_3$ et $u = u_4$, longent l'axe (ou) et coupent l'axe (ov) en des points d'ordonnées proches de zéro.

Dans le plan (x, y) , ces solutions coupent l'axe (oy) au voisinage de l'origine, en passant près des courbes $y = \alpha_1 x^2$ et $y = \alpha_2 x^2$.

Le sens du champ de vecteurs (2.12) fait que les solutions tendant vers les points singuliers B_1 , B_2 , B_3 ou B_4 ne coupent pas l'axe (ov) .

Une solution de (2.12) ayant la composante v tendant vers l'infini est une solution ayant dans le plan (x, y) la composante y qui tend vers $+\infty$.

Les solutions du système (2.12) tendant vers B_1 et B_2 ont une des deux composantes u ou v qui tend vers l'infini. Dans le cas où v tend vers l'infini, ces solutions ne sont pas homoclines.

Comme au chapitre 1, puisque l'éclatement (2.11) ne permet pas d'étudier le système (2.8) dans le demi-plan inférieur, on considère l'éclatement

$$\begin{cases} x = uv \\ y = -v^{p+1} \\ d\tau = v^p dt \end{cases} \quad (2.13)$$

Le système (2.8) devient

$$\begin{cases} u' = -1 - \frac{u^{2p+2}}{p+1}(1 + h(uv)) - \frac{bu^{p+1}}{p+1}(1 + g(uv)) + \frac{uv}{p+1}f(uv, -v^{p+1}) \\ v' = \frac{u^{2p+1}v}{p+1}(1 + h(uv)) + \frac{bu^p v}{p+1}(1 + g(uv)) - \frac{v^2}{p+1}f(uv, -v^{p+1}). \end{cases} \quad (2.14)$$

Ce système ne possède aucun point singulier et l'axe (ou) est invariant. Lorsque $v = 0$, le système (2.14) devient

$$\begin{cases} u' = -1 - \frac{1}{p+1}u^{2p+2} - \frac{b}{p+1}u^{p+1} \\ v' = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Par continuité des solutions de (2.14) par rapport aux conditions initiales, pour u_0 limité, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout v_0 dans $] -\eta, \eta[$, la solution de (2.14) issue de (u_0, v_0) coupe l'axe (ov) en des points d'ordonnées très proches de zéro. Ceci signifie que dans le demi-plan inférieur, aucune solution du système (2.8) ne tend vers $(0, 0)$.

On déduit d'après ce qui précède que le système (2.8) possède un secteur elliptique qui localement, est similaire à celui de (8). ■

2.4 Secteur elliptique dans le discrétisé du système (2.8) et dans le discrétisé associé par difféomorphisme au système (2.8)

Comme au chapitre 1, on construit de la même manière un difféomorphisme $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ de la forme

$$\begin{cases} \chi_1(x, y) = \bar{f}(x, y) \\ \chi_2(x, y) = x \end{cases} \quad (2.16)$$

où \bar{f} est une fonction analytique dans \mathbb{R}^2 , telle que $\bar{f}(0, 0) = 0$. Pour des fonctions analytiques f et g telles que $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, le difféomorphisme χ a pour rôle de transformer le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(u_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + hg(u_n, v_n) \end{cases} \quad (2.17)$$

discrétisé de

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, v) \\ \dot{v} = g(u, v) \end{cases} \quad (2.18)$$

en le système discret

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h\tilde{G}(x_n, y_n) \end{cases} \quad (2.19)$$

où

$$\bar{G}(x, y) = -x^{2p+1}(1 + k(x)) + bx^{p+1}y(1 + g(x)) + y^2f(x, y) + hG(x, y)$$

On vérifie que G s'écrit pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 sous la forme

$$G(x, y) = x^p y G_1(x, y) + y^2 G_2(x, y)$$

où G_1 et G_2 sont des fonctions analytiques de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

On étudie dans cette section la préservation des solutions homoclines dans le système discret

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h \left(-x_n^{2p+1}(1 + k(x_n)) + bx_n^{p+1}y_n(1 + g(x_n)) + y_n^2 f(x_n, y_n) \right) \end{cases} \quad (2.20)$$

associé par Euler au système différentiel (2.8), où h est le pas de discrétisation. On étudie aussi cette préservation dans le système (2.19) obtenu par difféomorphisme à partir de (2.18).

On montre la préservation du secteur elliptique dans (2.20) et dans (2.19).

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 1.4.2 à $p > 1$:

Théorème 2.4.1 *Dans la partie limitée du plan :*

Pour tout secteur elliptique S_1 du système (2.8), il existe un secteur elliptique du système (2.20) dont l'ombre est S_1 .

Pour tout secteur elliptique S_2 du système (2.18), il existe un secteur elliptique du système (2.17) dont l'ombre est S_2 .

Dans le but d'alléger la rédaction, nous ne considérons que le système (2.19). Le système (2.20) s'obtient à partir de (2.19) en posant $G \equiv 0$. Tous les résultats qui seront prouvés dans la suite de cette section, restent valables pour le système (2.20), dès qu'on remplace la fonction G par zero.

Avant de donner la preuve du théorème 2.4.1, on énonce le lemme suivant explicitant une isocline verticale du système (2.8), dont la preuve est basée sur un calcul de développements limités.

Lemme 2.4.2 *La composante \dot{y} du champ de vecteurs (2.8) s'annule, au voisinage de $x = 0$, sur une courbe vérifiant*

$$y = \bar{\psi}(x) := \frac{1}{b}x^{p+1} + o(x^{p+1}).$$

Preuve du théorème 2.4.1 :

Soit (x_0, y_0) un point limité du plan dans le secteur elliptique du système (2.8), appréciablement distant de son bord. Pour fixer les idées, supposons que $x_0 > 0$ et $0 < y_0 < \bar{\psi}(x_0)$.

Désignons par $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ la solution du système (2.8) issue du point (x_0, y_0) et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (2.19) issue du même point.

Le lemme de stroboscopie suivi du lemme de permanence, appliqués aux solutions $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrent qu'il existe un entier naturel N pour lequel Nh est infiniment grand et tel que

$$(\bar{x}(Nh), \bar{y}(Nh)) \simeq (0, 0).$$

Le changement de variables

$$\begin{cases} x_n = \varepsilon X_n \\ y_n = \varepsilon^{p+1} Y_n \end{cases} \quad (2.21)$$

où $\varepsilon = -\bar{x}(Nh)$ et le changement $h\varepsilon^p = \bar{h}$ permettent d'écrire (2.19) sous la forme

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \bar{h} Y_n \\ Y_{n+1} = Y_n + \bar{h} \mathcal{G}(X_n, Y_n) \end{cases} \quad (2.22)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(X, Y) = & -X^{2p+1}(1 + k(\varepsilon X)) + bX^{p+1}Y(1 + g(\varepsilon X)) + \varepsilon Y^2 f(\varepsilon X, \varepsilon^{p+1}Y) + \\ & \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{3p+1}} G(\varepsilon X, \varepsilon^{p+1}Y) \end{aligned}$$

On choisira dans toute la suite ε^{3p+1} infiniment grand devant \bar{h} .

On montre que la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point limité (x_m, y_m) du plan tel que $x_m < 0$ et $0 < y_m < \bar{\psi}(x_m)$.

Si de plus (x_q, y_q) est un point limité de la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $x_q < 0$ et $y_q < \alpha_1 x_q^{p+1}$, alors son successeur (x_{q+1}, y_{q+1}) vérifie que $x_{q+1} < 0$.

La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint pour α fixé tel que $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$, un point infiniment proche de l'origine, de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, \bar{\psi}(x) < y < \alpha x^{p+1}\}$$

et y reste, d'après le lemme 2.4.3 ci-dessous.

Dans cette région, la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers le point stationnaire $(0, 0)$ de (2.20).

Le même raisonnement que ci-dessus, mais cette fois-ci en utilisant le lemme 2.4.4 (voir plus loin), permet de montrer que la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ dont on montrera l'existence comme au chapitre 1, converge vers $(0, 0)$ quand n tend vers $-\infty$. ■

Ci-après les lemmes 2.4.3 et 2.4.4 utilisés dans la preuve du théorème 2.4.1 et leurs preuves :

Lemme 2.4.3 *Soit $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$. Aucune solution $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (2.22) issue d'un point limité (X_0, Y_0) de la région*

$$\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; X < 0, 0 < Y < \alpha X^{p+1}\}$$

ne quitte celle-ci.

Preuve :

En utilisant le fait que

$$G(x, y) = x^p y G_1(x, y) + y^2 G_2(x, y)$$

où G_1 et G_2 sont des fonctions analytiques dans \mathbb{R}^2 , on aura

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^{p+1} &= Y_n - \bar{h}(1 + k(\varepsilon X_n))X_n^3 + \bar{h}b(1 + g(\varepsilon X_n))X_n Y_n + \\ &\quad \bar{h}\varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n) - \alpha \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k X_n^{p+1-k} \bar{h}^k Y_n^k + \\ &\quad \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^p} \left(X_n^p Y_n G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) + \varepsilon Y_n^2 G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) \right) \end{aligned}$$

En factorisant certains termes, on obtient

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^{p+1} &= (Y_n - \alpha X_n^{p+1}) \left(1 + \bar{h}(b(1 + g(\varepsilon X_n)) - \alpha(p+1))X_n^p \right) + \\
&\quad \bar{h} \left(-1 + \alpha b - \alpha^2(p+1) + \alpha b g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) \right) X_n^{2p+1} + \\
&\quad \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) - \bar{h}^3 \alpha C_{p+1}^3 Y_n^2 X_n^{p-2} \left(\frac{C_{p+1}^2}{h C_{p+1}^3} X_n + Y_n \right) - \\
&\quad \bar{h}^5 \alpha C_{p+1}^5 Y_n^4 X_n^{p-4} \left(\frac{C_{p+1}^4}{h C_{p+1}^5} X_n + Y_n \right) - \dots \\
&\quad - \bar{h}^p \alpha C_{p+1}^p Y_n^{p-1} X_n \left(\frac{C_{p+1}^{p-1}}{h C_{p+1}^p} X_n + Y_n \right) - \alpha \bar{h}^{p+1} Y_n^{p+1} \\
&\quad \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^p} \left(X_n^p Y_n G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) + \varepsilon Y_n^2 G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) \right)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^{p+1} &= (Y_n - \alpha X_n^{p+1}) \left(1 + \bar{h}(b(1 + g(\varepsilon X_n)) - \alpha(p+1))X_n^p + \right. \\
&\quad \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^{p-1}} \varepsilon Y_n^2 G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) + \alpha \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^{p-1}} X_n^{p+1} G_2(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) \\
&\quad \left. + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^p} X_n^p G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) \right) + \\
&\quad \bar{h} \left(-1 + \alpha b - \alpha^2(p+1) + \alpha b g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\bar{h}}{\varepsilon^p} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) \right) X_n^{2p+1} - \alpha \bar{h}^{p+1} Y_n^{p+1} + \\
&\quad \bar{h} \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) - \bar{h}^3 \alpha C_{p+1}^3 Y_n^2 X_n^{p-2} \left(\frac{C_{p+1}^2}{h C_{p+1}^3} X_n + Y_n \right) - \\
&\quad \bar{h}^5 \alpha C_{p+1}^5 Y_n^4 X_n^{p-4} \left(\frac{C_{p+1}^4}{h C_{p+1}^5} X_n + Y_n \right) - \dots - \\
&\quad \bar{h}^p \alpha C_{p+1}^p Y_n^{p-1} X_n \left(\frac{C_{p+1}^{p-1}}{h C_{p+1}^p} X_n + Y_n \right)
\end{aligned}$$

On sait déjà que $Y_n < -\frac{C_{p+1}^{p-1}}{h C_{p+1}^{p-1}}$, puisque $Y_n < \alpha X_n^{2p+1}$. Il reste à étudier le

signe de

$$\left(-1 + \alpha b - \alpha^2 (p + 1) + \alpha b g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^p} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) \right) X_n^{2p+1} + \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n)$$

Posons

$$\beta = -1 + \alpha b - \alpha^2 (p + 1) + \alpha b g(\varepsilon X_n) - k(\varepsilon X_n) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^p} G_1(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n)$$

Comme $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$, on a

$$I_\beta = -1 + \alpha b - \alpha^2 (p + 1) \lesssim 0.$$

Donc $\beta > 0$. On montre ainsi, comme dans le cas où $p = 1$, que

$$\beta + \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^{p+1} Y_n) < 0$$

Il en résulte que $Y_{n+1} - \alpha X_{n+1}^2 < 0$. ■

Le système (2.19) est S-inversible. Soit donc maintenant $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des prédécesseurs du système (2.19) issue de (x_0, y_0) et soit $(X_{-n}, Y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des prédécesseurs du système (2.22) correspondante. On a le lemme suivant :

Lemme 2.4.4 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_2$ et (X_0, Y_0) un point limité du plan tel que $0 < Y_0 < \alpha X_0^{p+1}$ et $X_0 > 0$. La solution $(X_{-n}, Y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ du système (2.22) issue de (X_0, Y_0) , ne quitte pas la région du plan définie par*

$$\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; X > 0, 0 < Y < \alpha X^{p+1}\}$$

Preuve :

On a

$$Y_0 - \alpha X_0^{p+1} \leq 0$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
Y_0 - \alpha X_0^{p+1} &= Y_{-1} - hX_{-1}^{p+1} - hX_{-1}^{p+1}k(\varepsilon X_{-1}) + hbX_{-1}^p Y_{-1} + \\
& b\bar{h}g(\varepsilon X_{-1})Y_{-1}X_{-1}^p + \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2 f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) - \\
& \alpha \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k X_{-1}^{p+1-k} \bar{h}^k Y_{-1}^k + \\
& \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^p} \left(X_{-1}^p Y_{-1} G_1(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) + \right. \\
& \left. \varepsilon Y_{-1}^2 G_2(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) \right)
\end{aligned}$$

On obtient après factorisation,

$$\begin{aligned}
0 \geq & \left(1 + \bar{h} \left(b(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - (p+1)\alpha + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^p} G_1(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) \right) X_{-1}^p \right) Y_{-1} - \\
& \left(\alpha \bar{h}^2 \left(\frac{1 - X_{-1}^p}{1 - X_{-1}} \right) - \bar{h}\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) - \frac{\bar{h}^2}{\varepsilon^{p-1}} G_2(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) \right) Y_{-1}^2 - \\
& \bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1})) X_{-1}^{2p+1} - \alpha X_{-1}^{p+1}
\end{aligned}$$

où c est un nombre réel vérifiant $C_{p+1}^k \leq c$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq p+1$.
On a $\varepsilon G_1(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) = O(\varepsilon)$; ceci signifie que $\varepsilon G_1(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) > -1$.
D'autre part, si

$$\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{p-1}} G_2(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) \geq 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
0 > & \left(1 + \bar{h} \left(b(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - (p+1)\alpha - \frac{\bar{h}}{\varepsilon^p} \right) X_{-1}^p \right) Y_{-1} - \\
& \alpha \bar{h}^2 \left(\frac{1 - X_{-1}^p}{1 - X_{-1}} \right) Y_{-1}^2 - \bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1})) X_{-1}^{2p+1} - \alpha X_{-1}^{p+1} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Si maintenant

$$\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{p-1}} G_2(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) \leq 0,$$

on aura

$$\varepsilon f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) + \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{p-1}} G_2(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^{p+1}Y_{-1}) \geq -2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 > & \left(1 + \bar{h} \left(b(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - (p+1)\alpha - \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{p+1}}\right) X_{-1}^p\right) Y_{-1} - \\
& \left(2\bar{h} + \alpha c \bar{h}^2 \left(\frac{1 - X_{-1}^p}{1 - X_{-1}}\right)\right) Y_{-1}^2 - \bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1})) X_{-1}^{2p+1} - \\
& \alpha X_{-1}^{p+1}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Pour le deuxième cas, le discriminant Δ du polynôme de second degré en Y_{-1}

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \bar{h} \left(b(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - (p+1)\alpha - \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{p+1}}\right) X_{-1}^p\right) Y_{-1} - \\
& \left(2\bar{h} + \alpha \beta \bar{h}^2 \left(\frac{1 - X_{-1}^p}{1 - X_{-1}}\right)\right) Y_{-1}^2 - \bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1})) X_{-1}^{2p+1} - \alpha X_{-1}^{p+1}
\end{aligned}$$

est strictement positif. Ce dernier admet deux racines

$$\bar{Y}_{-1} = \frac{\left(1 + \bar{h} \left(b(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - (p+1)\alpha - \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{p+1}}\right) X_{-1}^p\right) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha\beta\bar{h}^2 \left(\frac{1 - X_{-1}^p}{1 - X_{-1}}\right)} > 0$$

et

$$\bar{\bar{Y}}_{-1} = \frac{\left(1 + \bar{h} \left(b(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - (p+1)\alpha - \frac{\bar{h}}{\varepsilon^{p+1}}\right) X_{-1}^p\right) - \sqrt{\Delta}}{2\left(\bar{h}\varepsilon + \alpha\beta\bar{h}^2 \left(\frac{1 - X_{-1}^p}{1 - X_{-1}}\right)\right)} > 0$$

La racine $\bar{\bar{Y}}_{-1}$ est infiniment grande. Ainsi, l'inégalité (2.24) est vérifiée si et seulement si

$$Y_{-1} \leq \bar{\bar{Y}}_{-1}$$

On montre comme au lemme 2.2.7 par un simple calcul (développement limité) que

$$\bar{\bar{Y}}_{-1} \leq \alpha X_{-1}^{p+1}$$

lorsque $(p+1)\alpha^2 + b\alpha + 1 \lesssim 0$ (c'est à dire $\alpha_2 \lesssim \alpha \lesssim \alpha_1$).

Le cas de l'inégalité (2.23) se traite d'une manière analogue.

Il en résulte que $Y_{-1} \leq \alpha X_{-1}^2$. ■

Chapitre 3

Secteur elliptique dans le système différentiel sous forme canonique (5) et dans son discrétisé, pour $p = m$ et $\lambda = 0$

On considère dans tout ce chapitre pour $r = 2p + 1$, la forme canonique (5)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^{2p+1}(1+k(x)) + bx^p y(1+g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases}$$

avec $\lambda = b^2 + 4(p+1)a = 0$.

Comme au chapitre 1, on suppose par un changement de variables linéaire que $b > 0$.

Dans un premier temps on ne considère dans la famille (5) que le cas $f \equiv k \equiv g \equiv 0$. On aura donc à étudier le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^{2p+1} + bx^p y \end{cases} \quad (3.1)$$

On décrit dans ce chapitre d'une façon précise, le comportement des solutions de (3.1) et on montre la persistance de solutions homoclines, plus précisément la persistance du secteur elliptique pour le discrétisé

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h(ax_n^{2p+1} + bx_n^p y_n) \end{cases} \quad (3.2)$$

associé par Euler au système (3.1), où h infiniment petit strictement positif, est le pas de discrétisation.

3.1 Comportement des solutions du système (3.1)

Considérons le système différentiel (3.1) et notons $\bar{\varphi}(x) = (-a/b)x^{p+1}$, où $y = \bar{\varphi}(x)$ est une partie de l'isocline $\dot{y} = 0$ (Fig. 3.1).

Notons aussi les régions

$$R'_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, 0 < y < \bar{\varphi}(x)\}, R'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}, \\ R'_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\} \text{ et } R'_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, 0 < y < \bar{\varphi}(x)\}.$$

On va montrer dans la proposition qui suit que le système (3.1) possède un secteur hyperbolique et un autre elliptique et que la courbe d'équation $y = \bar{\alpha}x^{p+1}$ solution du système (3.1) où $\bar{\alpha} = b/(2(p+1))$, sépare les deux secteurs.

Puisque le champ de vecteurs (3.1) est symétrique par rapport à l'axe (oy) , on ne s'intéressera qu'au demi-plan $x > 0$. Soient alors $x_0 > 0$ et $\gamma = (x(t), y(t))$ la solution du système (3.1) issue du point (x_0, y_0) .

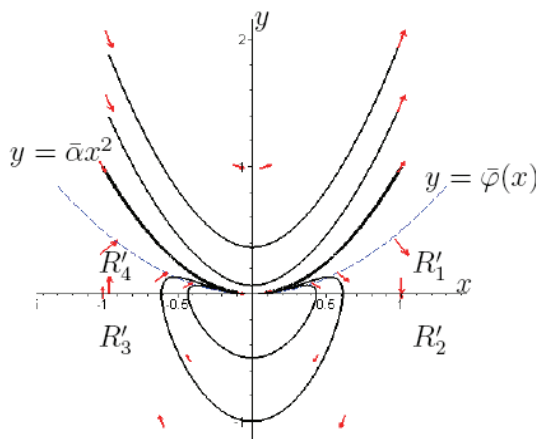


FIGURE 3.1 – Portrait de phases du système (3.1), pour $a = -2$, $b = 4$ et $p = 1$.

Proposition 3.1.1 *On a :*

- 1) Si $y_0 < \bar{\alpha}x^{p+1}$, alors l'orbite correspondante à γ est homocline.
- 2) Si $\bar{\alpha}x^{p+1} < y_0$, alors l'orbite correspondante à γ coupe la droite $x = 0$ en

un point d'ordonnée positive. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty$$

Preuve de 1) :

Le même éclatement qu'au chapitre 1

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^{p+1}v \\ d\tau = u^p dt \end{cases}$$

permet de transformer (3.1) au système

$$\begin{cases} u' = uv \\ v' = a + bv - (p+1)v^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

où (\cdot) désigne $d/d\tau$. Le système (3.3) possède une unique singularité $A = (0, \bar{\alpha})$ de nature nœud-col [50, 38] (Fig. 3.2).

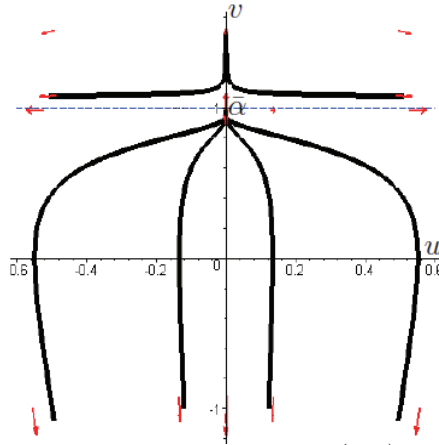


FIGURE 3.2 – Portrait de phases du système (3.3), pour $a = -2$, $b = 4$ et $p = 1$.

La courbe d'équation $y = \bar{\alpha}x^{p+1}$ correspond dans le plan (u, v) à la droite $v = \bar{\alpha}$.

Toute solution de (3.3) issue entre les deux droites $v = \bar{\alpha}$ et $v = 0$, coupe l'axe (ou) . En effet, soit $\gamma_1(u(\tau), v(\tau))$ une solution de (3.3) issue de (u_0, v_0) tel que $0 < v_0 < \bar{\alpha}$. On suppose par symétrie que $u_0 > 0$. On a

$$\forall t \geq 0, v(t) \leq v_0$$

et

$$v(t) \leq (a + bv_0 - (p+1)v_0^2)t + v_0,$$

puisque la fonction donnée par $a + bv - (p+1)v^2$ est croissante sur l'intervalle $] -\infty, \bar{\alpha}]$. Si

$$\forall t \in [0, t_{\max}[, 0 < v(t) < \bar{\alpha}$$

on aurait

$$\forall t \in [0, t_{\max}[, u(t) \leq u_0 \exp(v_0 t)$$

Ainsi, $v(t_{\max}) < 0$ du fait que $t_{\max} = +\infty$ d'après le théorème de sortie de tout compact. Par conséquent la solution γ coupe la droite $y = 0$. Elle atteint un point (x_1, y_1) de R'_2 .

On montre comme au chapitre 1 que la trajectoire γ atteint un point de R'_3 . Ainsi, par symétrie, elle atteint la région R'_4 , puis un point $(x(t_1), y(t_1))$ de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \bar{\varphi}(x), x < 0, y > 0\}$$

et enfin tend vers l'unique point singulier $(0, 0)$ du système (3.1) quand t tend vers $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe (oy) , la solution γ tend vers $(0, 0)$ quand t tend vers $-\infty$.

Preuve de 2) :

Après application de l'éclatement

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v^{p+1} \\ d\tau = v^p dt, \end{cases}$$

le système (3.1) devient

$$\begin{cases} u' = 1 - \frac{a}{p+1}u^{2p+2} - \frac{b}{p+1}u^{p+1} \\ v' = \frac{a}{p+1}u^{2p+1}v + \frac{b}{p+1}u^p v. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le système (3.4) possède deux points singuliers (Fig. 3.3) : $A_1 = (u_1, 0)$ et $A_2 = (u_2, 0)$, où $u_1 = (-b/(2a))^{1/(p+1)}$ et $u_2 = (b/(2a))^{1/(p+1)}$; ils sont tous les deux des nœud-cols [50, 38].

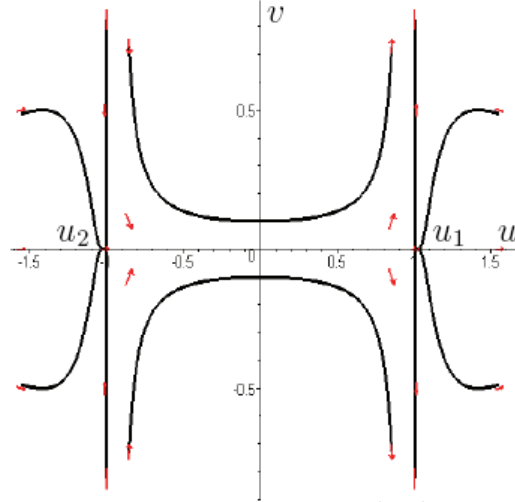


FIGURE 3.3 – Portrait de phases du système (3.4), pour $a = -2$, $b = 4$ et $p = 1$.

La parabole $y = \bar{\alpha}x^{p+1}$ correspond dans le plan (u, v) à la réunion des deux droites $u = u_1$ et $u = u_2$.

Toute solution issue de la région $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u_2 < u < u_1\}$ du plan (u, v) coupe l'axe (ov) (l'axe (ou) est invariant pour le système (3.4)). Ceci signifie que si (x_0, y_0) est un point du plan tel que $\bar{\alpha}x_0^{p+1} < y_0$, alors la solution γ issue de ce point coupe l'axe (oy) .

Lorsque $0 > u_0 > u_2$, on a

$$\forall \tau < 0, u(\tau) < 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} u(\tau) \neq 0 \text{ et } \lim_{\tau \rightarrow -\infty} v(\tau) = +\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = - \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty. \blacksquare$$

Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'existence d'un secteur elliptique dans le discrétisé (3.2) du système (3.1).

Pour plus de clarté et pour faire ressortir les techniques de calculs utilisées pour montrer que le secteur elliptique est préservé dans le cas du système discret associé à (3.1), on va se concentrer dans le système discret (3.2) sur le cas où $p = 1$. Le cas $p > 1$ sera traité par la suite.

3.2 Orbites homoclines dans le système discret (3.2), pour $p = 1$

Lorsque $p = 1$, le système (3.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^3 + bxy \end{cases} \quad (3.5)$$

En tenant compte du fait que $\lambda = 0$, le changement de variables linéaire

$$(x, y) \mapsto \left(\sqrt{-\frac{a}{2}}x, \sqrt{-\frac{a}{2}}y \right)$$

permet de supposer que $a = -2$ et $b = 4$. Ainsi, le système (3.5) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x^3 + 4xy \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans ce cas on a $\bar{\varphi}(x) = (1/2)x^2$, $\bar{\alpha} = 1$ et la parabole d'équation $y = x^2$ est une solution de (3.6).

Nous considérons dans cette partie le système

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h(-2x_n^3 + 4x_ny_n) \end{cases} \quad (3.7)$$

associé par Euler au système (3.6). Le paramètre h est le pas de discrétisation ; il est supposé strictement positif et infiniment petit.

Le théorème 3.2.1 suivant montre que dans une certaine partie limitée du plan les solutions homoclines du système (3.5) sont préservées après discrétisation par Euler.

Théorème 3.2.1 *Dans la partie limitée du plan, pour tout secteur elliptique S du système (3.6), il existe un secteur elliptique du système (3.7) dont l'ombre est S .*

La difficulté dans le cas où $\lambda = 0$ apparaît, contrairement au cas où $\lambda > 0$, dans le fait que la pente de la courbe d'équation $y = \alpha x^2$, $\alpha > 0$, dans le premier quadrant du plan, est plus grande que celle du champ de vecteurs (3.6) au point $(x, \alpha x^2)$. Par cocéquent, cette courbe ne peut pas servir de

barrière supérieure pour les itérés inverses de (3.7).

Le principe de la démonstration est de piéger, si possible, une plus grande zone possible des itérés inverses de (3.7). Par ailleur, on construira une courbe infiniment proche de la solution $y = \bar{\alpha}x^2$, qui sera la barrière recherchée.

Dans la preuve du théorème 3.2.1, on utilisera une série de lemmes qu'on énoncera et démontrera ci-après.

Preuve du théorème 3.2.1 :

Soit (x_0, y_0) un point limité de R'_1 , tel que x_0 soit appréciable. On a le lemme suivant, dont la preuve est similaire à celles des lemmes 1.1.4 et 1.1.5, respectivement :

Lemme 3.2.2 1) La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point limité (x_q, y_q) de la région R'_4 .

2) Le point (x_{q+1}, y_{q+1}) est tel que $x_{q+1} < 0$.

3) Il existe n_2 dans \mathbb{N}^* tel que $y_{n_2} > \bar{\varphi}(x_{n_2})$.

La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point de R'_4 , puis de la région $R'_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, \bar{\varphi}(x_{n_2}) < y < x^2\}$ d'après le lemme 3.2.2 et ne la quitte pas d'après le lemme 3.2.3 suivant qu'on démontrera un peu plus bas :

Lemme 3.2.3

Toute solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (3.7) issue d'un point limité (x_0, y_0) de la région R'_5 reste dans celle ci.

Dans la région R'_5 , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Ainsi la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est $(0, 0)$.

Grâce au lemme 3.2.4 suivant dont la preuve est analogue à celle du lemme 1.1.7, on définit la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ comme étant la solution du système

$$\begin{cases} x_{-n} = x_{-n-1} + hy_{-n-1} \\ y_{-n} = y_{-n-1} + h(-2x_{-n-1}^3 + 4x_{-n-1}y_{-n-1}) \end{cases}$$

vérifiant

$$(x_{-1}, y_{-1}) \simeq (x_0, y_0).$$

De plus, tant que (x_{-n}, y_{-n}) est limité,

$$(x_{-n-1}, y_{-n-1}) \simeq (x_{-n}, y_{-n}).$$

Lemme 3.2.4 *Tout point limité du plan admet un prédécesseur limité par le système (3.7).*

Comme il a été dit précédemment et contrairement au chapitre 1, les courbes d'équations $y = \alpha x^2$ où $\alpha > 0$, ne peuvent pas constituer des barrières supérieures des itérés inverses du système (3.7), dans le premier quadrant du plan. Cependant, on a le lemme suivant qu'on prouvera plus bas :

Lemme 3.2.5 *Soit (x_0, y_0) un point limité de la région du plan*

$$R'_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 0 < y < x^2 - 2hx^3\}$$

Alors, la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^}$ du système (3.7) issue de (x_0, y_0) ne quitte pas R'_6 .*

Supposons maintenant que $0 < (x_0, y_0)$ est telle que $y_0 < x_0^2 - 2hx_0^3$. D'après le même lemme 3.2.5 et le lemme 3.2.6 ci-dessous, qu'on montre d'une façon analogue que le lemme 1.1.9, et aussi du fait que la suite $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante dans le premier quadrant du plan, la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans le lemme 3.2.4, ne quitte pas la partie du plan délimitée par la parabole $y = (1/2)x^2$ et par la courbe $y = x^2 - 2hx^3$.

Lemme 3.2.6 *La suite des prédécesseurs $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ d'un point limité (x_0, y_0) de la région R'_1 vérifie :*

1)

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, y_{-k} > \frac{1}{2}x_{-k}^2$$

2)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > k \implies y_{-n} > \frac{1}{2}x_{-n}^2$$

En utilisant les propriétés de monotonie des deux suites $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, ainsi que le lemme 3.2.6, on déduit que la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $(0, 0)$ quand n tend vers $-\infty$. ■

On montre dans ce qui suit, les lemmes 3.2.3 et 3.2.5 utilisés dans la preuve du théorème 3.2.1 :

Preuve du lemme 3.2.3 :

On va montrer le lemme 3.2.3 en deux étapes :

Première étape : On a

$$y_{n+1} - x_{n+1}^2 = y_n + h(-2x_n^3 + 4x_n y_n) - (x_n + h y_n)^2.$$

C'est-à-dire

$$y_{n+1} - x_{n+1}^2 = (y_n - x_n^2) + 2hx_n(y_n - x_n^2) - h^2 y_n^2$$

Il s'ensuit que

$$y_{n+1} - x_{n+1}^2 = (y_n - x_n^2)(1 + 2hx_n) - h^2 y_n^2$$

On sait d'après le lemme 3.2.2 que si (x_0, y_0) est un point de R'_4 , alors la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point limité de la région R'_5 et ne la quitte pas d'après le lemme 3.2.3. Or dans R'_5 , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ; ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reste limitée. Il en résulte par récurrence que

$$y_{n+1} - x_{n+1}^2 < 0$$

dès que

$$y_0 - x_0^2 < 0$$

Deuxième étape : On a

$$y_{n+1} - \frac{1}{2}x_{n+1}^2 = y_n + 4hx_n \left(y_n - \frac{1}{2}x_n^2 \right) - \frac{1}{2}x_{n+1}^2$$

Comme $x_n < x_{n+1} < 0$, on obtient

$$y_{n+1} - \frac{1}{2}x_{n+1}^2 > \left(y_n - \frac{1}{2}x_n^2 \right) + 4hx_n \left(y_n - \frac{1}{2}x_n^2 \right) = \left(y_n - \frac{1}{2}x_n^2 \right) (1 + 4hx_n)$$

On conclut par récurrence que

$$y_{n+1} - \frac{1}{2}x_{n+1}^2 > 0,$$

quand $y_0 - (1/2)x_0^2 > 0$. ■

Preuve du lemme 3.2.5 :

On cherche d'abord l'existence d'une courbe continue d'équation $y = f(x)$ dont la pente aux points $(x, f(x))$ pour tout $x > 0$, est inférieure à celle du champ de vecteurs (3.6).

Il s'agit en fait de trouver des solutions $f(x)$ éventuelles de l'inégalité

$$f(x)f'(x) - 4xf(x) + 2x^3 < 0. \quad (3.8)$$

Le principe est de trouver si possible, une courbe la plus proche possible de la courbe $y = \bar{\alpha}x^2$ qui vérifie (3.8). Soit alors

$$f(x) = x^2 + \beta x^3$$

où β est un nombre réel infiniment petit, strictement négatif. On vérifie que la courbe d'équation $y = f(x)$ vérifie bien l'inégalité (3.8).

Montrons maintenant que la courbe $y = x^2 + \beta x^3$ pour un β bien choisi, constitue une barrière supérieure pour les itérés inverses du système (3.7).

On a

$$\begin{aligned} y_0 - x_0^2 - \beta x_0^3 &= y_{-1} - x_{-1}^2 - \beta x_{-1}^3 - 2hx_{-1}^3 - 2hx_{-1}y_{-1} - h^2y_{-1}^2 - \\ &\quad 3\beta hx_{-1}^2y_{-1} - 3\beta h^2x_{-1}y_{-1}^2 - \beta h^3y_{-1}^3 + 4hx_{-1}y_{-1} \end{aligned}$$

Comme

$$y_0 - x_0^2 + \beta x_0^3 < 0,$$

$$-\beta h^3 y_{-1}^3 \geq 0$$

et

$$4hx_{-1}y_{-1} \geq 0,$$

on aura

$$(1 - 2hx_{-1} - 3\beta hx_{-1}^2)y_{-1} - (3\beta h^2x_{-1} + h^2)y_{-1}^2 - x_{-1}^2 - (2h + \beta)x_{-1}^3 < 0 \quad (3.9)$$

Notons Δ le discriminant du polynôme de degré deux en y_{-1} du premier terme de l'inégalité (3.9). Il est clair que Δ est strictement positif. Ainsi, l'inégalité (3.9) entraîne que

$$y_{-1} < \bar{y}_{-1} \text{ ou } y_{-1} > \bar{y}_{-1}$$

où

$$\bar{y}_{-1} = \frac{1 - h(2 + 3\beta x_{-1})x_{-1} + \sqrt{\Delta}}{2(3\beta x_{-1} + 1)h^2} > 0$$

et

$$\underline{\bar{y}}_{-1} = \frac{1 - h(2 + 3\beta x_{-1})x_{-1} - \sqrt{\Delta}}{2(3\beta x_{-1} + 1)h^2} > 0$$

Le réel \bar{y}_{-1} est infiniment grand. D'autre part, on vérifie par des calculs que lorsque $\beta = -2h$, on a $\bar{y}_{-1} < x_{-1}^2 + \beta x_{-1}^3$. Il en résulte que $y_{-1} < x_{-1}^2 + \beta x_{-1}^3$. ■

3.3 Secteur elliptique dans le discrétisé du système (3.1) lorsque $p > 1$

Comme à la section précédente, on montre via le théorème suivant que les solutions homoclines du système (3.1) sont préservées dans le système (3.2).

Théorème 3.3.1 *Dans la partie limitée du plan, pour tout secteur elliptique S du système (3.1), il existe un secteur elliptique du système (3.2) ayant pour ombre le secteur S .*

Pour montrer le théorème 3.3.1 on cherchera une courbe qui constitue une barrière supérieure pour les itérés inverses du système (3.2). On répétera le même raisonnement que dans le théorème 3.2.1.

Preuve du théorème 3.3.1 :

Les lemmes 3.3.2 et 3.3.3 suivants permettent de montrer que la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (3.2) issue du point limité (x_0, y_0) de R'_1 , atteint un point de R'_4 , puis un point de la région

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, \bar{\varphi}(x) < y < \bar{\alpha}x^{p+1}\},$$

pour ne plus jamais la quitter.

Lemme 3.3.2 *Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (3.2) issue de (x_0, y_0) de R'_1 . On a :*

1) La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point limité de la région définie par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, 0 < y < \bar{\varphi}(x)\}$$

2) Si (x_q, y_q) est un point limité de la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $x_q < 0$ et $y_q < \bar{\alpha}x_q^2$, alors son successeur (x_{q+1}, y_{q+1}) vérifie $x_{q+1} < 0$.

Dans la région S , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers l'unique limite $(0, 0)$.

On définit la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ issue du point (x_0, y_0) à travers le lemme suivant :

Lemme 3.3.3 *Tout point limité du plan, admet un prédécesseur limité par le système (3.2).*

D'après le lemme 3.3.5 ci-dessous et du fait que la suite $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante dans le premier quadrant du plan, la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ bien définie d'après le lemme 3.3.3 ci-dessus, ne quitte pas la partie du plan

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 0 < y < \bar{\alpha}x^{p+1} + ahx^{2p+1}\}$$

En utilisant les propriétés de monotonie des deux suites $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, on déduit que la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $(0, 0)$ quand n tend vers $-\infty$. ■

On omet ici la preuve des lemmes 3.3.2 et 3.3.3 du fait qu'ils se démontrent de la même manière que les lemmes 1.1.4 et 1.1.7. Ci-après les lemmes 3.3.4 et 3.3.5 et leurs preuves :

Lemme 3.3.4 *Toute solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (3.2) issue d'un point limité (x_0, y_0) de la région*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, \bar{\varphi}(x) < y < \bar{\alpha}x^{p+1}\}$$

reste dans celle ci.

Preuve :

On a

$$y_{n+1} - \bar{\alpha}x_{n+1}^{p+1} = y_n + ahx_n^{2p+1} + hb x_n^p y_n - \bar{\alpha} \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k x_n^{p+1-k} h^k y_n^k$$

En mettant $y_n - \bar{\alpha}x_n^{p+1}$ en facteur, on obtient

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - \bar{\alpha}x_{n+1}^{p+1} &= (y_n - \bar{\alpha}x_n^{p+1}) (1 + h(b - \bar{\alpha}(p+1))x_n^p) + \\
&h(a - \bar{\alpha}b + \bar{\alpha}^2(p+1))x_n^{2p+1} - \bar{\alpha}h^{p+1}y_n^{p+1} - \\
&h^3\bar{\alpha}C_{p+1}^3y_n^2x_n^{p-2} \left(\frac{C_{p+1}^2}{hC_{p+1}^3}x_n + y_n \right) - \\
&h^5\bar{\alpha}C_{p+1}^5y_n^4x_n^{p-4} \left(\frac{C_{p+1}^4}{hC_{p+1}^5}x_n + y_n \right) - \dots - \\
&h^p\bar{\alpha}C_{p+1}^py_n^{p-1}x_n \left(\frac{C_{p+1}^{p-1}}{hC_{p+1}^p}x_n + y_n \right).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\bar{\alpha}x_n^{p+1} < -\frac{C_{p+1}^{p-1}}{hC_{p+1}^p}x_n, \quad \forall p \geq 3$$

et comme $y_n < \bar{\alpha}x_n^{p+1}$, il s'ensuit que

$$y_n < -\frac{C_{p+1}^{p-1}}{hC_{p+1}^p}x_n, \quad \forall p \geq 3.$$

Or, $\lambda = b^2 + 4a(p+1) = 0$; ainsi $a - \bar{\alpha}b - \bar{\alpha}^2(p+1) = 0$. Il en résulte que $y_{n+1} - \bar{\alpha}x_{n+1}^{p+1} < 0$.

De même, on a

$$y_{n+1} + \frac{a}{b}x_{n+1} = y_n + ahx_n^{2p+1} + hb x_n^p y_n + \frac{a}{b}x_{n+1}^{p+1}.$$

Comme $0 < x_n < x_{n+1} < 0$, on aura

$$y_{n+1} + \frac{a}{b}x_{n+1} \geq (y_n + \frac{a}{b}x_n^{p+1})(1 + hb x_n^p).$$

D'où

$$y_{n+1} + \frac{a}{b}\bar{\varphi}x_{n+1} > 0$$

tant que $y_0 + \frac{a}{b}x_0^{p+1} > 0$. ■

Soit $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des prédécesseurs du système (3.2) issue d'un point limité (x_0, y_0) . On a le lemme suivant :

Lemme 3.3.5 Soit (x_0, y_0) un point limité du plan tel que

$$0 < y_0 < \bar{\alpha}x_0^{p+1} + ahx_0^{2p+1} \text{ et } x_0 > 0$$

La solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ du système (3.2) issue de (x_0, y_0) , ne quitte pas la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < y < \bar{\alpha}x^{p+1} + ahx^{2p+1}, x > 0\}$$

Preuve :

Le principe est le même que dans la preuve du lemme 3.2.5. On vérifie que pour un réel ε infiniment petit et strictement négatif, la pente de la courbe

$$y = g(x) := \bar{\alpha}x^{p+1} + \varepsilon x^{2p+1}$$

est pour tout $x > 0$, inférieure à celle du champ de vecteur (3.1) pris aux points $(x, g(x))$.

Montrons maintenant que la courbe d'équation

$$y = \bar{\alpha}x^{p+1} + \varepsilon x^{2p+1}$$

constitue pour un ε bien choisi, une barrière supérieure pour les itérés du système (3.2). Pour celà, supposons que

$$y_0 < \bar{\alpha}x_0^{p+1} + \varepsilon x_0^{2p+1}.$$

On a

$$\begin{aligned} y_0 - \bar{\alpha}x_0^{p+1} - \varepsilon x_0^{2p+1} &= y_{-1} + ahx_{-1}^{p+1} + bhx_{-1}^p y_{-1} - \\ &\quad \bar{\alpha} \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^{kh_{-1}^{p+1-k}} x_{-1}^k y_{-1}^{p+1-k} - \\ &\quad \varepsilon \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k h_{-1}^{2p+1-k} x_{-1}^k y_{-1}^{2p+1-k}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
y_0 - \bar{\alpha}x_0^{p+1} - \varepsilon x_0^{2p+1} &= (1 + bhx_{-1}^p - \bar{\alpha}hx_{-1}^p - \varepsilon hx_{-1}^{2p}) y_{-1} + \\
&\quad (ahx_{-1}^{p+1} - \bar{\alpha}x_{-1}^{p+1} - \varepsilon x_{-1}^{2p+1}) - \\
&\quad \bar{\alpha} \sum_{k=0}^{p-1} C_{p+1}^k x_{-1}^k h_{-1}^{p+1-k} y_{-1}^{p+1-k} - \\
&\quad \varepsilon \sum_{k=0}^{2p-1} C_{2p+1}^k x_{-1}^k h_{-1}^{2p+1-k} y_{-1}^{2p+1-k}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$y_0 < \bar{\alpha}x_0^{p+1} + \varepsilon x_0^{2p+1},$$

$$-\varepsilon \sum_{k=0}^{2p-1} C_{2p+1}^k x_{-1}^k h_{-1}^{2p+1-k} y_{-1}^{2p+1-k} \geq 0$$

et

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, h_{-1}^{p+1-k} y_{-1}^{p+1-k} \leq h_{-1}^2 y_{-1}^2$$

on obtient

$$\begin{aligned}
0 &\geq (1 + bhx_{-1}^p - \bar{\alpha}hx_{-1}^p - \varepsilon hx_{-1}^{2p}) y_{-1} + \\
&\quad (ahx_{-1}^{2p+1} - \bar{\alpha}x_{-1}^{p+1} - \varepsilon x_{-1}^{2p+1}) - \\
&\quad h^2 \bar{\alpha} c \left(\frac{1 - x_{-1}^p}{1 - x_{-1}} \right) y_{-1}^2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où c est un nombre réel vérifiant $C_{p+1}^k \leq c$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq p-2$. Le discriminant Δ du polynôme de second degré en y_{-1} dans (3.10) est strictement positif. Celui-ci admet deux racines

$$\bar{y}_{-1} = \frac{1 + bhx_{-1}^p - \bar{\alpha}hx_{-1}^p - \varepsilon hx_{-1}^{2p} + \sqrt{\Delta}}{2h^2 \bar{\alpha} c \left(\frac{1 - x_{-1}^p}{1 - x_{-1}} \right)} > 0$$

et

$$\underline{\bar{y}}_{-1} = \frac{1 + bhx_{-1}^p - \bar{\alpha}hx_{-1}^p - \varepsilon hx_{-1}^{2p} - \sqrt{\Delta}}{2h^2 \bar{\alpha} c \left(\frac{1 - x_{-1}^p}{1 - x_{-1}} \right)} > 0$$

La racine \bar{y}_{-1} est infiniment grande. Ainsi, l'inégalité (3.10) est vérifiée si et seulement si

$$y_{-1} \leq \bar{y}_{-1}$$

On vérifie que lorsque $\varepsilon = ah$, on a

$$\bar{y}_{-1} \leq \bar{\alpha}x_{-1}^{p+1} + ahx_{-1}^{2p+1}$$

Il en résulte que $y_{-1} \leq \bar{\alpha}x_{-1}^{p+1} + \varepsilon x_{-1}^{2p+1}$. ■

3.4 Etude du comportement du système (5) avec $p = 1$

On s'intéresse dans cette section pour $p = 1$, au comportement des solutions du système différentiel (5)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^{2p+1}(1+k(x)) + bx^p y(1+g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases}$$

où k , f et g sont des fonctions analytiques, telles que $k(0) = g(0) = 0$ et $\lambda = b^2 + 8a = 0$.

L'origine est un point singulier dégénéré du système (5).

Dans le cas où $p = 1$, le système (5) se ramène par un changement de variables linéaire au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x^3(1+h(x)) + 4xy(1+g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases} \quad (3.11)$$

Dans ce cas, $\bar{\alpha} = 1$. On a la proposition suivante :

Proposition 3.4.1 *Le système (3.11) possède un secteur elliptique.*

Preuve :

On procède sur le système (3.11) comme précédemment, par une série d'éclatements quasi-homogène suivant les deux directions x et y :

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 v \\ d\tau = u dt \end{cases} \quad (3.12)$$

puis

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v^2 \\ d\tau = v dt \end{cases} \quad (3.13)$$

et enfin

$$\begin{cases} x = uv \\ y = -v^2 \\ d\tau = v dt \end{cases} \quad (3.14)$$

On peut voir dans la première section de ce chapitre la nécessité et l'utilité de chacun de ces trois éclatements.

L'éclatement (3.12) appliqué à (3.11) donne le système

$$\begin{cases} u' = uv \\ v' = -2 + 4v - 2v^2 - h(u) + 4vg(u) + uv^2 f(u, u^2v) \end{cases} \quad (3.15)$$

Le système (3.15) possède un unique point singulier $A = (0, 1)$ qui est un nœud-col [50, 38] (Fig. 3.4).

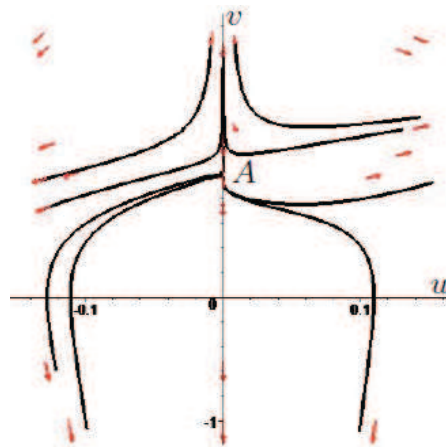


FIGURE 3.4 – Portrait de phases du système (3.15) au voisinage de A , avec $f(x, y) = g(x) = k(x) = x$.

Le même raisonnement que dans le chapitre 1, mène à montrer que dans le plan (x, y) , certaines solutions coupent l'axe (ox) : ces solutions passent, lorsque le temps est décroissant, du quadrant du plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y > 0\}$ au quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}$ et lorsque le

temps est croissant, elle passent de la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$. tendent vers $(0, 0)$ quand $t \rightarrow +\infty$ dans le sens croissant du temps dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$ et quand $t \rightarrow -\infty$ dans la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

Passons maintenant à l'éclatement (3.13). Cet éclatement transforme le système (3.11) en

$$\begin{cases} u' = 1 + u^4(1 + h(uv)) - 2u^2(1 + g(uv)) - \frac{uv}{2}f(uv, v^2) \\ v' = -u^3v(1 + h(uv)) + 2uv(1 + g(uv)) + \frac{v^2}{2}f(uv, v^2) \end{cases} \quad (3.16)$$

Le système (3.16) possède deux points singuliers (Fig. 3.5) : deux nœud-cols $A_1 = (-1, 0)$ et $A_2 = (1, 0)$ [50, 38].

Certaines solutions de (3.16) tendent vers A_1 et A_2 quand τ tend vers $+\infty$. Les solutions de (3.11) correspondantes tendent lorsque $y > 0$, vers $(0, 0)$, dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$ quand $t \rightarrow +\infty$ et dans l'autre partie du plan quand $t \rightarrow -\infty$.

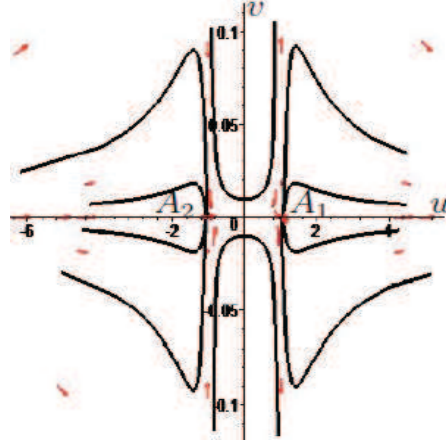


FIGURE 3.5 – Portrait de phases du système (3.15) au voisinage de A_1 et de A_2 , avec $f(x, y) = g(x) = k(x) = x$.

Les solutions de (3.16) séparant le mouvement, ayant aux voisinages de A_1 et A_2 pour tangentes $u = -1$ ou $u = 1$, correspondent dans le plan (x, y) , aux solutions du système (3.11) dont les tangentes au voisinage de $(0, 0)$ sont la parabole d'équation $y = x^2$.

On montre comme dans le chapitre 1 que dans le plan (x, y) , au voisinage de l'origine, certaines solutions passent suffisamment proches de la courbe

$y = x^2$, puis coupent l'axe (oy) .

Une solution de (3.16) dont la composante v tend vers l'infini, correspond dans le plan (x, y) , à une solution dont la composante y tend vers $+\infty$.

Les solutions tendant vers A_1 et A_2 ont une des deux composantes u ou v qui tend vers l'infini. Si v tend vers l'infini, ces solutions ne sont pas homoclines.

Nous terminons l'étude par l'éclatement (3.14) suivant la direction des y donnant le demi-plan inférieur. Cet éclatement transforme le système (3.11) en

$$\begin{cases} u' = -1 - u^4(1 + h(uv)) - 2u^2(1 + g(uv)) + \frac{uv}{2}f(uv, -v^2) \\ v' = u^3v(1 + h(uv)) + 2uv(1 + g(uv)) - \frac{v^2}{2}f(uv, -v^2) \end{cases} \quad (3.17)$$

L'utilité de l'éclatement (3.14) est de regarder ce qui se passe de plus près dans le demi-plan inférieur, chose qui n'est pas donnée par l'éclatement (3.13). Le système (3.17) ne possède aucun point singulier et l'axe (ou) est invariant dans ce système.

Sur l'axe (ou) , la composante v' du système (3.17) est nulle.

Par continuité des solutions de (3.17) par rapport aux conditions initiales, il existe un voisinage de l'axe (ou) dans lequel toutes les solutions issues près de cet axe, coupent l'axe (ov) en des points proches de l'origine.

On en déduit que dans le demi-plan inférieur, aucune solution du système (3.11) ne tend vers $(0, 0)$.

l'existence d'un secteur elliptique dans le système (3.11) découle de l'interprétation des trois éclatements (3.12), (3.13) et (3.14) qui lui ont été appliqués.

■

3.5 Secteur elliptique dans le discrétisé du système (5) lorsque $p = 1$

On sait d'après la proposition 3.4.1 que le système (3.11) possède un secteur elliptique. On étudie dans cette partie la préservation des solutions homoclines dans le système discret

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hy_n \\ y_{n+1} = y_n + h \left(-2x_n^3(1 + k(x_n)) + 4x_ny_n(1 + g(x_n)) + y_n^2f(x_n, y_n) \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

associé par Euler au système différentiel (3.11), où h est le pas de discrétisation, supposé infiniment petit dans toute la suite.

Le théorème suivant montre que dans la zone limitée du plan située à l'intérieur du secteur elliptique du système (3.11), appréciablement distant de son bord, les solutions homoclines sont préservées après discrétisation par Euler.

Théorème 3.5.1 *Dans la partie limitée du plan, pour tout secteur elliptique S_1 du système (3.11), il existe un secteur elliptique du système (3.18) dont l'ombre est S_1 .*

Soit (x_0, y_0) un point limité du plan appréciablement dans le secteur elliptique du système (3.11). Pour fixer les idées, considérons le cas $x_0 > 0$ et $0 < y_0 < \bar{\psi}(x_0)$, où $y = \bar{\psi}(x) := \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ est l'isocline nulle du système (3.18). On étudie les autres cas d'une manière analogue.

Notons $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ la solution du système (3.11) issue du point (x_0, y_0) et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (3.18) issue du même point.

La preuve du théorème 3.5.1 se base essentiellement sur les propriétés qualitatives des solutions du système (3.6).

Preuve du théorème 3.5.1 :

Par stroboscopie puis par permanence, on peut exhiber un N dans \mathbb{N} pour lequel Nh est infiniment grand et

$$(\bar{x}(Nh), \bar{y}(Nh)) \simeq (0, 0).$$

Posons alors $\varepsilon = -\bar{x}(Nh)$, $h\varepsilon = \bar{h}$ et

$$\begin{cases} x_n = \varepsilon X_n \\ y_n = \varepsilon^2 Y_n. \end{cases} \quad (3.19)$$

Le système (3.18) devient

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \bar{h}Y_n \\ Y_{n+1} = Y_n + \bar{h}(-2X_n^3(1 + k(\varepsilon X_n)) + 4X_n Y_n(1 + g(\varepsilon X_n)) + \varepsilon Y_n^2 f(\varepsilon X_n, \varepsilon^2 Y_n)) \end{cases} \quad (3.20)$$

Le lemme 3.5.2 suivant montre que la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point de la région

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, 0 < y < \bar{\psi}(x)\}.$$

Lemme 3.5.2 1) Il existe p dans \mathbb{N}^* pour lequel $x_p < 0$ et $0 < y_p < \bar{\psi}(x_p)$.
 2) Le successeur (x_{q+1}, y_{q+1}) d'un point limité (x_q, y_q) de la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $x_q < 0$ et $y_q < x_q^2$, vérifie que $x_{q+1} < 0$.

La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ atteint un point (x_r, y_r) infiniment proche de l'origine, tel que

$$x_r < 0 \text{ et } 0 < y_r < x_r^2 + \beta x_r^3$$

pour un bon choix du réel $\beta > 0$ infiniment petit (le choix de ce β sera donné dans la preuve du lemme 3.5.3), ne quitte pas la bande

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, 0 < y < x^2 + \beta x^3\},$$

d'après le lemme 3.5.3 suivant, dont la preuve est donnée plus bas.

Lemme 3.5.3 Toute solution $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (3.18) issue d'un point limité (x_0, y_0) de la région définie par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0, 0 < y < x^2 + \beta x^3\}$$

où β est infiniment petit strictement positif, bien choisi, reste dans celle-ci.

Grâce à la monotonie des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la partie R du plan, la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est $(0, 0)$ de (3.18).

Le lemme 3.5.4 suivant met en évidence une suite de prédécesseurs, partie de la solution du système (3.18) issue du point (x_0, y_0) .

Lemme 3.5.4 Tout point limité du plan, admet un unique prédécesseur limité par le système (3.18).

Soient donc $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des prédécesseurs du système (3.18).

En s'appuyant sur le lemme 3.5.5 ci-après et en procédant de même que pour la partie directe $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la solution, on montre que la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(0, 0)$ quand n tend vers $-\infty$. ■

Lemme 3.5.5 Soit (x_0, y_0) un point limité de la région du plan

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, 0 < y < x^2 + (h + \sqrt{\varepsilon})x^3\}$$

Alors, la solution $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ du système (3.18) issue de (x_0, y_0) , ne quitte pas S .

La preuve de la première propriété du lemme 3.5.2 découle directement du lemme 1.1.3, en remplaçant X_n par (x_n, y_n) pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, T par \bar{t} et F par (f_1, g_1) avec $f_1(x, y) = y$ et $g_1(x, y) = -2x_n^3(1 + k(x_n)) + 4x_n y_n(1 + g(x_n)) + y_n^2 f(x_n, y_n)$, où \bar{t} est l'instant standard auquel la solution de (3.11) issue de (x_0, y_0) atteint la partie \bar{R}_4 du plan.

Par contre la deuxième propriété du lemme 3.5.2 est évidente, du moment qu'on a

$$x_{q+1} < x_q + hx_q^2 = x_q(1 + hx_q) < 0.$$

La preuve du lemme 3.5.4 est similaire à celle du lemme (1.1.7).

Ci-après les preuves des lemmes 3.5.3 et 3.5.5 :

Preuve du lemme 3.5.3 :

Pour $x < 0$, la courbe d'équation $y = x^2 + \beta x^3$ où β est strictement positif et infiniment petit, est une barrière supérieure pour le champ de vecteurs (3.6). On montre que pour un choix convenable de β , elle est aussi une barrière supérieure pour les itérés du système discret (3.18).

En effet, Soit (X_p, Y_p) un point tel que $X_p < 0$ et $Y_p < X_p^2 + \beta X_p^3$ de la solution $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (3.20). On a

$$\begin{aligned} Y_{p+1} - X_{p+1}^2 - \beta X_{p+1}^3 &= Y_p - X_p^2 + 4\bar{h}(1 + g(\varepsilon X_p))X_p Y_p - 2\bar{h}X_p Y_p - \\ &\quad 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_p))X_p^3 - \bar{h}^2 Y_p^2 + \bar{h}\varepsilon Y_p^2 f(\varepsilon X_p, \varepsilon^2 Y_p) \\ &\quad - \beta(X_p + hY_p)^3 \end{aligned}$$

On raisonne par l'absurde. Supposons donc que $Y_{p+1} - X_{p+1}^2 - \beta X_{p+1}^3 > 0$. On distingue deux cas suivant le signe de $f(\varepsilon X_p, \varepsilon^2 Y_p)$:

Dans le cas où $f(\varepsilon X_p, \varepsilon^2 Y_p) \leq 0$, on aura

$$\begin{aligned} Y_{p+1} - aX_{p+1}^2 - \beta X_{p+1}^3 &\leq \left(1 + 4\bar{h}X_p(1 + g(\varepsilon X_p)) - 2\bar{h}X_p - 3\bar{h}\beta X_p^2\right)Y_p - \\ &\quad (\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2 X_p)Y_p^2 - 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_p))X_p^3 - \\ &\quad X_p^2 - \beta X_p^3 \end{aligned}$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand $f(\varepsilon X_p, \varepsilon^2 Y_p) > 0$, on sait que $f(\varepsilon X_p, \varepsilon^2 Y_p) = O(\varepsilon) \leq 1$. On aura

$$\begin{aligned} Y_{p+1} - aX_{p+1}^2 - \beta X_{p+1}^3 &\leq \left(1 + 4\bar{h}X_p(1 + g(\varepsilon X_p)) - 2hX_p - 3h\beta X_p^2\right)Y_p - \\ &\quad (\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2 X_p - \bar{h}\varepsilon)Y_p^2 - 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_p))X_p^3 - \\ &\quad X_p^2 - \beta X_p^3 \end{aligned}$$

On se contente de ne traiter que le premier cas ; le deuxième cas se traite d'une façon analogue. Puisque $Y_{n+1} - aX_{n+1}^2 - \beta X_{n+1}^3 > 0$, on aura

$$0 \leq \left(1 + 4\bar{h}X_p(1 + g(\varepsilon X_p)) - 2\bar{h}X_p - 3\bar{h}\beta X_p^2\right)Y_p + (-\bar{h}^2 - 3\beta h^2 X_p)Y_p^2 - 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_p))X_p^3 - X_p^2 - \beta X_p^3 \quad (3.21)$$

Le discriminant Δ du polynôme en Y_p dans le deuxième terme de l'inégalité (3.21) est strictement positif. Ainsi, ce polynôme admet deux racines réelles

$$\bar{Y}_p = \frac{1 + 4\bar{h}X_p(1 + g(\varepsilon X_p)) - 2\bar{h}X_p - 3\bar{h}\beta X_p^2 + \sqrt{\Delta}}{2(\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2 X_p)}$$

et

$$\bar{\bar{Y}}_p = \frac{1 + 4\bar{h}X_p(1 + g(\varepsilon X_p)) - 2\bar{h}X_p - 3\bar{h}\beta X_p^2 - \sqrt{\Delta}}{2(\bar{h}^2 + 3\beta h^2 X_p)}.$$

Pour que l'inégalité (3.21) soit vérifiée, il faut que

$$\bar{\bar{Y}}_p < Y_p < \bar{Y}_p.$$

On montre que pour un bon choix de β (par exemple $\beta = \sqrt{\varepsilon}$), on a $\bar{\bar{Y}}_p > X_p^2 + \beta X_p^3$. Ceci contredit le fait que $Y_p - X_p^2 - \beta X_p^3 < 0$. ■

Preuve du lemme 3.5.5 :

On a

$$Y_0 - X_0^2 - \beta X_0^3 = \left(1 + 2\bar{h}X_{-1} + 4\bar{h}X_{-1}g(\varepsilon X_{-1}) - 3\bar{h}\beta X_{-1}^2\right)Y_{-1} - (\bar{h}^2 + 3\beta h^2 X_{-1})Y_{-1}^2 - 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}^3 - X_{-1}^2 - \beta X_{-1}^3 - \beta\bar{h}^3 Y_{-1}^3 + \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2 f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1})$$

Si $f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) \geq 0$, on a

$$Y_0 - X_0^2 - \beta X_0^3 \geq \left(1 + 2\bar{h}X_{-1} + 4\bar{h}X_{-1}g(\varepsilon X_{-1}) - 3\bar{h}\beta X_{-1}^2\right)Y_{-1} - (\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2 X_{-1})Y_{-1}^2 - 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}^3 - X_{-1}^2 - \beta X_{-1}^3$$

Si $f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) < 0$, on a $f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) = O(\varepsilon) > -1$ et

$$Y_0 - X_0^2 - \beta X_0^3 \geq \left(1 + 2\bar{h}X_{-1} + 4\bar{h}X_{-1}g(\varepsilon X_{-1}) - 3\bar{h}\beta X_{-1}^2\right)Y_{-1} - (\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2 X_{-1})Y_{-1}^2 - 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}^3 - X_{-1}^2 - \beta X_{-1}^3 - \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2$$

Puisque $Y_0 - X_0^2 - \beta X_0^3$ est supposé négatif, on aura dans la deuxième situation

$$0 \geq \left(1 + 2\bar{h}X_{-1} + 4\bar{h}X_{-1}g(\varepsilon X_{-1}) - 3\bar{h}\beta X_{-1}^2\right)Y_{-1} - \quad (3.22)$$

$$\left(\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2X_{-1} + \bar{h}\varepsilon\right)Y_{-1}^2 - 2\bar{h}(1 + k(\varepsilon X_{-1}))X_{-1}^3 -$$

$$X_{-1}^2 - \beta X_{-1}^3 - \bar{h}\varepsilon Y_{-1}^2$$

Le polynôme de deuxième degré en Y_{-1} défini dans (3.22) admet deux racines réelles

$$Y'_{-1} = \frac{1 + 4\bar{h}X_{-1}(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - 2\bar{h}X_{-1} - 3\bar{h}\beta X_{-1}^2 + \sqrt{\Delta}}{2(\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2X_{-1} + \bar{h}\varepsilon)} > 0$$

et

$$Y''_{-1} = \frac{1 + 4\bar{h}X_{-1}(1 + g(\varepsilon X_{-1})) - 2\bar{h}X_{-1} - 3\bar{h}\beta X_{-1}^2 - \sqrt{\Delta}}{2(\bar{h}^2 + 3\beta\bar{h}^2X_{-1} + \bar{h}\varepsilon)} > 0$$

L'inégalité (3.22) est vérifiée lorsque

$$Y_{-1} < Y''_{-1} \text{ ou } Y_{-1} > Y'_{-1}$$

Comme Y'_{-1} est infiniment grand, on aura $Y_{-1} < Y''_{-1}$. On montre que pour $\beta = -\bar{h} - \sqrt{\varepsilon}$, on a $Y''_{-1} < X_{-1}^2 + \beta X_{-1}^3$.

Le cas $f(\varepsilon X_{-1}, \varepsilon^2 Y_{-1}) \geq 0$ se traite d'une façon similaire. ■

Chapitre 4

Solutions homoclines dans un système différentiel quadratique à partie linéaire nulle et dans son discrétisé

On s'intéresse dans ce chapitre au système différentiel correspondant à l'itération du polynôme complexe $z^2 + c$. On montre que ce système admet un secteur elliptique qui se préserve dans le système discret obtenu par la méthode d'Euler.

L'équation quadratique discrète de \mathbb{C} à un paramètre $z_{n+1} = z_n^2 + c$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{C}$, s'écrit dans \mathbb{R}^2 sous la forme

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + a' \\ Y_{n+1} = 2X_n Y_n + b' \end{cases} \quad (4.1)$$

où $z_n = X_n + iY_n$ et $c = a' + ib'$.

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{X} = X^2 - Y^2 - X + a' \\ \dot{Y} = \varepsilon(2XY - Y + b') \end{cases} \quad (4.2)$$

où ε est un paramètre réel strictement positif.

Le système (4.1) est une discrétisation de (4.2) par la méthode d'Euler de pas 1 pour $\varepsilon = 1$. En posant $x = X - 1/2$ et $y = Y$, le système (4.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 + a \\ \dot{y} = \varepsilon(2xy + b) \end{cases} \quad (4.3)$$

où $a = a' - 1/4$ et $b = b'$.

Quand $b = 0$, l'axe (ox) est invariant et le champ de vecteurs (4.3) est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. Ainsi, quand $b = 0$, l'étude du système (4.3) se réduit au demi-plan $y \geq 0$. Pour $a = b = 0$, l'origine est l'unique point singulier. Il est nonhyperbolique car les deux valeurs propres de la matrice de la partie linéaire de (4.3) sont nulles. Excepté celles qui sont issues de l'axe (ox) , on établit ci-dessous que dans ce cas toutes les trajectoires sont homoclines à l'origine.

On montre aussi que les solutions homoclines du système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2\varepsilon xy \end{cases} \quad (4.4)$$

se préservent après discrétisation par Euler quand le pas de discrétisation est infiniment petit.

4.1 Orbites homoclines dans le système (4.4)

Dans cette section, on montre l'existence de solutions homoclines pour le systèmes (4.4). On a la proposition suivante :

Proposition 4.1.1 *Les orbites du système (4.4) issues de points (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$, sont homoclines.*

Preuve :

Lorsque $x \neq 0$ et $y \neq 0$, le système (4.4) se réduit à l'équation de Bernoulli

$$2x \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{x^2}{y} - y \right) \quad (4.5)$$

dont la solution générale est donnée par

$$\begin{cases} x^2 - c_1 y^{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{y^2}{2\varepsilon - 1} = 0 & \text{si } \varepsilon \neq \frac{1}{2} \\ x^2 + 2y^2 \log |y| - c_2 y^2 = 0 & \text{si } \varepsilon = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.6)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

Après analyse du système (4.6), il apparait que les trajectoires tendent vers l'origine à gauche quand $t \rightarrow +\infty$ et proviennent de celui-ci à droite quand $t \rightarrow -\infty$ (Fig. 4.1). ■

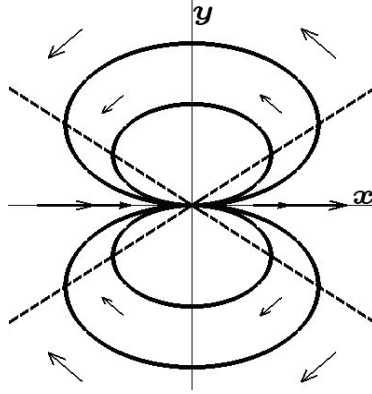


FIGURE 4.1 – Orbites homoclines du système (4.4).

4.2 Orbites homoclines dans le système discret associé à (4.4)

La discrétisation par la méthode d'Euler à un pas $h > 0$ du système (4.4) donne

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(x_n^2 - y_n^2) \\ y_{n+1} = y_n + 2h\varepsilon x_n y_n \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solutions homoclines dans le système (4.7). Pour simplifier les écritures, on suppose que $\varepsilon = 1$.

Supposons dans toute la suite que le point (x_0, y_0) est limité, avec $y_0 > 0$.

Pour montrer le résultat essentiel de ce chapitre, on va d'abord établir une succession de lemmes :

Lemme 4.2.1 *Le demi-plan ($y > 0$) et l'axe (ox) sont invariants dans le système (4.7).*

Preuve :

Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (4.7) issue d'un point (x_0, y_0) . Par récurrence, on a pour $y_0 > 0$,

$$y_{n+1} = y_n(1 + 2hx_n) > 0$$

et $y_{n+1} = 0$ lorsque $y_0 = 0$. Ainsi, la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne quitte pas le demi-plan $y \geq 0$ et aucune solution issue de l'axe (ox) ne quitte celui-ci. ■

Lemme 4.2.2 *L'ensemble $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y < -x\}$ est invariant dans le système (4.7).*

Preuve :

Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (4.7) issue du point (x_0, y_0) tel que $y_0 < -x_0$. On obtient par récurrence pour $y_0 > 0$ que

$$x_{n+1} = x_n(1 + hx_n) - y_n^2$$

et par conséquent,

$$y_{n+1} + x_{n+1} = (y_n + x_n)(1 + h(x_n - y_n)) + 2\epsilon hx_n y_n < 0. \blacksquare$$

Lemme 4.2.3 *Soit (x_0, y_0) un point du premier quadrant du plan vérifiant $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$. La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (4.7) issue de ce point atteint la partie limitée du quadrant $y > 0$ et $x < 0$.*

Pour la démonstration de ce lemme, il suffit d'appliquer le lemme de stroboscopie 1.1.3.

Remarque. Dans le lemme 4.2.3, si (x_0, y_0) est dans le halo de $(0, 0)$, il suffit d'introduire le changement de variables

$$\begin{cases} u_n = \frac{x_n}{\alpha} \\ v_n = \frac{y_n}{\alpha} \end{cases}$$

avec α infiniment petit strictement positif. Ceci donne le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \alpha h(u_n^2 - v_n^2) \\ v_{n+1} = v_n + 2\alpha \epsilon h u_n v_n \end{cases}$$

qui est sous la forme du système (4.7).

Lemme 4.2.4 *La solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système (4.7), issue du point (x_0, y_0) , avec $y_0 > -x_0$ et $x_0 < 0$, entre dans la région S_1 et ne la quitte plus.*

Preuve :

Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont décroissantes dans la région $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > -x > 0\}$. Supposons que la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne quitte

pas cette zone. En utilisant le lemme 4.2.1, il s'ensuit que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont minorées, donc convergentes. D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 0)$$

Ceci, contredit le fait que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. ■

Lemme 4.2.5 *Tout point limité (x_0, y_0) avec $y_0 > 0$ admet un unique prédécesseur dans le système (4.7).*

Preuve :

Notons F_h l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$F_h(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

On montre que pour tout point limité (z, t) , il existe un unique point limité (u, v) tel que

$$F_h(u, v) = (z, t) \tag{4.8}$$

On a

$$v = \frac{t}{1 + 2\varepsilon hu}$$

Ainsi,

$$z = u + h \left(u^2 - \left(\frac{t}{1 + 2\varepsilon hu} \right)^2 \right)$$

Notons,

$$g(u, v) = u^2 - v^2$$

On va montrer qu'il existe un unique $u \in]z - 1, z + 1[$ tel que

$$z = u + hg \left(u, \frac{t}{1 + 2\varepsilon hu} \right)$$

On note pour (z, t) fixé,

$$G(u) = u + hg \left(u, \frac{t}{1 + 2\varepsilon hu} \right) - z$$

On a

$$G(z + 1) > 0$$

et

$$G(z - 1) < 0$$

On a aussi pour u limité

$$G'(u) > 0$$

L'application G étant continue, il s'ensuit que l'équation

$$G(u) = 0$$

admet une unique solution limitée u dans l'intervalle $]z - 1, z + 1[$. ■

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 4.2.6 *Les orbites du système (4.7) issues du demi-plan supérieur sont homoclines.*

Preuve :

Soient (x_0, y_0) tel que $y_0 > x_0 > 0$ et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la solution du système (4.7) issues du point (x_0, y_0) ; les autres situations concernant la position du point (x_0, y_0) se traitent de la même manière. En utilisant le lemme 4.2.1, la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne quitte pas le demi-plan $y \geq 0$. D'après les lemmes 4.2.3 et 4.2.4, cette solution atteint le quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y > 0\}$, puis la région S_1 et y reste d'après le lemme 4.2.2. Dans l'ensemble S_1 , la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Ainsi, la solution $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(0, 0)$. On peut montrer de même que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x\}$ est invariant pour la suite $(x_{-n}, y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$; cette suite est bien définie par le lemme 4.2.5. En utilisant les mêmes arguments sur l'ensemble $\{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, x_0 > 0, y_0 > 0\}$, on montre que cette suite de prédécesseurs tend vers $(0, 0)$ quand $n \rightarrow +\infty$. ■

Annexe A

Rappels d'analyse non standard

A.1 L'axiomatique IST

La théorie IST (Internal Set Theory) est une extension des mathématiques classiques. Elle est due à E. Nelson [48]. Le point de départ en est l'axiomatique classique de la théorie des ensembles ZFC (Zermelo- Fraenkel et l'axiome du choix). Un nouveau prédicat "st" a été ajouté et manipulé à l'aide de trois nouveaux axiomes ajoutés à ZFC : Transfert, Idéalisation et Standardisation [4, 17, 40, 52] présentés ci-dessous. Tous les théorèmes de ZFC restent vrais dans IST. Ce qui est nouveau dans IST c'est un ajout et non un changement. Une formule de IST est dite interne si elle ne fait pas intervenir le nouveau prédicat "st". Dans le cas contraire, elle est dite externe. Les notations suivantes sont adoptées :

$(\forall^{st}x)$ pour $(\forall x, x \text{ standard})$

$(\forall^{fini}x)$ pour $(\forall x, x \text{ fini})$

$(\forall^{stfini}x)$ pour $(\forall^{st}x, x \text{ fini})$

A.1.1 Principe de Transfert

Pour toute formule interne $F(x, v_1, \dots, v_n)$ sans autres variables libres que x, v_1, \dots et v_n on a :

$$\forall^{st} v_1, \dots, \forall^{st} v_n, \left(\forall^{st} x, F(x, v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \forall x, F(x, v_1, \dots, v_n) \right)$$

Le principe de transfert dit que si la formule interne $F(x, v_1, \dots, v_n)$ est vraie pour tout standard x , elle reste vraie pour tous les x , pourvu que les autres variables soient standard. Par contraposée, s'il existe un x pour lequel la formule F n'est pas vraie, il en existera un standard pour lequel F n'est pas vérifiée. En particulier, si un tel x est unique, il sera nécessairement standard.

Il découle du fait que tout objet spécifique des mathématiques classiques comme $0, 1, 2, \pi, \dots$, la fonction \sin et \ln , etc. est standard, parce qu'il est défini de manière unique.

A.1.2 Idéalisation

Pour toute formule interne $B(x, y)$ où x et y sont des variables libres, on a :

$$\forall^{st\text{fini}} Z, \exists x, \forall y \in Z, B(x, y) \Leftrightarrow \exists x, \forall^{st} y, B(x, y)$$

Ce principe dit que la relation interne $B(x, y)$ est vérifiée pour tout standard y si et seulement si, elle est vérifiée dans tout ensemble fini standard. Parmi les conséquences importantes de cet axiome, l'existence d'un ensemble fini A contenant tous les objets standard et l'existence de nombres plus grands que tous les entiers standard, appelés infiniment grands.

Un nombre réel x est dit :
infinésimal (ou infiniment petit) si $|x| < a$ pour tout réel a strictement positif standard,

limité (non infiniment grand) si $|x| \leq a$ pour un certain nombre standard a , appréciable s'il est limité et non infinésimal.

Nous notons $x \simeq 0$ pour x infiniment petit, $x \simeq y$ pour $x - y \simeq 0$ et $x \gg y$ (respectivement $x \ll y$) pour $x > y$ (respectivement $x < y$) et $x - y \approx 0$.

A.1.3 Standardisation

Pour toute formule $F(z)$, interne ou externe, on a :

$$\forall^{st} X, \exists^{st} Y, \forall^{st} z, (z \in Y \Leftrightarrow z \in X \text{ et } F(z))$$

Le principe de standardisation assure que pour tout ensemble standard X , il existe un sous-ensemble standard Y dont les éléments standard sont ceux qui vérifient F . L'ensemble Y est unique ; il est dit standardisé de $E = \{z \in X, F(z)\}$ et est noté ${}^s E$.

Il assure aussi l'existence, pour tout réel limité x , d'un réel standard appelé partie standard de x noté ${}^\circ x$ et vérifiant $x \simeq {}^\circ x$.

La théorie IST est une extension conservative de ZFC : tout théorème interne de IST est un théorème de ZFC. Certains théorèmes prouvés dans IST sont externes et peuvent être reformulés de manière à les rendre internes.

A.2 Halos et galaxies

Définition A.2.1 Un sous-ensemble \mathcal{H} de \mathbb{R} est appelé *halo* s'il est externe et s'il existe une suite interne $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties de \mathbb{R} telle que $\mathcal{H} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}, st(k)} A_k$.

Définition A.2.2 Un sous-ensemble \mathcal{G} de \mathbb{R} est appelé *galaxie* s'il est externe et s'il existe une suite interne $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties de \mathbb{R} telle que $\mathcal{G} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, st(k)} A_k$.

Exemples

- 1) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} / x \simeq 0\}$ est un halo.
- 2) L'ensemble des réels appréciables est une galaxie.

Annexe B

Les éclatements et le polygone de Newton

Considérons le système différentiel polynomial

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $P(x, y) = \sum_{i+j \geq 1} a_{ij} x^i y^j$ et $Q(x, y) = \sum_{i+j \geq 1} b_{ij} x^i y^j$.

Supposons que l'origine est un point singulier isolé non élémentaire du système (B.1). Pour étudier le comportement des solutions de (B.1) au voisinage de ce point, on effectue une série d'éclatements directionnels quasi-homogènes. On rappelle qu'un éclatement quasi-homogène de degrés (α, β) est un changement de variables ayant une des formes suivantes :

– Suivant la direction des x :

$$(x, y) \mapsto (x^\alpha, x^\beta y)$$

et

$$(x, y) \mapsto (-x^\alpha, x^\beta y).$$

– Suivant la direction des y :

$$(x, y) \mapsto (xy^\alpha, y^\beta)$$

et

$$(x, y) \mapsto (xy^\alpha, -y^\beta).$$

On choisit les poids dans ces éclatements à l'aide du polygone de Newton. M. Pelletier [49] a présenté un algorithme à base d'éclatements quasi-homogènes permettant la désingularisation des champs de vecteurs au voisinage des singularités non élémentaires. On peut voir aussi [15, 23, 39]. Rappelons d'abord ce qu'est un polygone de Newton. Posons

$$S = \{(i-1, j), a_{ij} \neq 0\} \cup \{(i, j-1), b_{ij} \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Le polygone de Newton associé à (B.1) est l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$N = \bigcup_{(r,s) \in S} \{(r', s') \in \mathbb{Z}^2 : r' \geq r, s' \geq s\}.$$

Notons γ_i les côtés du polygone de Newton associé à (B.1), énumérés de la gauche vers la droite : s'il existe un côté γ_k qui est situé complètement dans le demi-plan $\{r \leq 0\}$, alors on commence la numérotation des côtés du polygone par γ_0 , sinon on commencera par γ_1 .

Supposons que γ_1 a pour équation $\alpha r + \beta s = d$, avec α et β premiers entre eux.

On décrit ici l'algorithme permettant de choisir convenablement les poids α et β en utilisant le polygone de Newton :

Notons

$$P(x, y) = \sum_{j \geq d} P_j(x, y)$$

et

$$Q(x, y) = \sum_{j \geq d} Q_j(x, y),$$

où

$$P_j(r^\alpha x, r^\beta y) = r^{j+\alpha} P_j(x, y)$$

et

$$Q_j(r^\alpha x, r^\beta y) = r^{j+\beta} Q_j(x, y).$$

Ici on décrit seulement l'éclatement suivant la direction des x . L'éclatement suivant la direction des y est similaire.

Après division par x^d/α , le système (B.1) devient

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{x}^{\delta+1-d} P_\delta(1, \bar{y}) \\ \dot{\bar{y}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{x}^{\delta-d} (\alpha Q_\delta(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_\delta(1, \bar{y})) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où $\bar{x} = x^\alpha$ et $\bar{y} = x^\beta y$. On détermine les singularités sur l'axe (oy) :

1) Si

$$\alpha Q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_d(1, \bar{y}) \neq 0$$

les points $(0, \bar{y}_0)$ vérifiant l'équation

$$\alpha Q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_d(1, \bar{y}) = 0$$

sont des singularités de (B.2). Soit

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

la matrice associée au linéarisé de (B.2) en $(0, \bar{y}_0)$. On a

$$A = P_d(1, \bar{y}_0)$$

$$D = \alpha \frac{\partial Q_d}{\partial \bar{y}}(1, \bar{y}_0) - \beta \left(P_d(1, \bar{y}_0) - \bar{y}_0 \frac{\partial P_d}{\partial \bar{y}}(1, \bar{y}_0) \right)$$

et

$$B = 0.$$

La matrice N possède ainsi deux valeurs propres $\lambda_1 = A$ et $\lambda_2 = D$.

Si la singularité $(0, \bar{y}_0)$ est hyperbolique ou semi-hyperbolique, le comportement au voisinage du point singulier est connu.

Si la singularité $(0, \bar{y}_0)$ est non élémentaire, on translate le point singulier $(0, \bar{y}_0)$ à l'origine et on refait sur (B.2) le même procédé que ci-dessus, suivant les directions de \bar{x} et de \bar{y} .

2) Si

$$\alpha Q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_d(1, \bar{y}) = 0$$

,le système (B.2) possède une ligne de singularités et dans ce cas $\lambda_1 = P_d(1, \bar{y}_0)$ et $\lambda_2 = 0$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors la singularité est semi-hyperbolique.

Si $\lambda_1 = 0$, alors la singularité est non élémentaire. Dans ce cas, un autre éclatement est nécessaire.

Remarque B.0.1 *Cet algorithme aboutit toujours à une désingularisation [49].*

Bibliographie

- [1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Maier, *Qualitative theory of second order dynamic systems*, John Wiley et Sons, New York.Toronto, 1973.
- [2] D. V. Anosov, V. I. Arnold, Dynamical Systems III (Encyclopaedia of Mathematical Sciences), 1987.
- [3] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, 1988.
- [4] I. Van Den Berg, V. Neves, *The strength of nonstandard analysis*, Springer WienNewYork, 2007.
- [5] W. J. Beyn, The effect of discretization on homoclinic orbits, in : T. Küpper, et al. (Eds.), *Bifurcation, Analysis, Algorithms, Applications*, Birkhäuser, Basel, pp 1-8, 1987.
- [6] W. J. Beyn, J. Lorenz, Center manifolds of dynamical systems under discretization, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, 9 (3&4), 381-414, 1987.
- [7] W. J. Beyn, On the numerical approximation on phase portraits near stationary points, *SIAM J. Numer. Anal*, Vol 24, N° 5, pp 1095-1113, 1987.
- [8] W. J. Beyn, On invariant closed curves for one-step methods, *Numer. Math* 51, 103-122, 1987.
- [9] W. J. Beyn, The numerical computation of connecting orbits in dynamical systems, *Journal of Numerical Analysis* 9, 379-405, 1990.
- [10] W. J. Beyn, Numerical analysis of homoclinic orbits emanating from a Takens-Bogdanov point, *Journal of Numerical Analysis* 14, 381-410, 1994.
- [11] W. J. Beyn, J.-M. Kleinhauf, The numerical computation of homoclinic orbits of maps, *SIAM J. Numer. Anal*, 34 : 1207-1236, 1997.

- [12] W. J. Beyn, M. Stiefenhofer, A direct approach to homoclinic orbits in the fast dynamics of singularly perturbed systems, *Journal of Dynamics and Differential equations*, Vol 11, N°4, 671-709, 1999.
- [13] W. J. Beyn, J. Schropp, Runge-Kutta discretizations of singularly perturbed gradient equations, *BIT*, Vol 40, N° 3, pp 415-433, 2000.
- [14] W. J. Beyn, B. M. Garay, Estimates of variable stepsize Runge-Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data, *Applied Numerical Mathematics* 41, 369-400, 2002.
- [15] M. Brunella, M. Miari, Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra, *JDE* 85, pp 338-366, 1990.
- [16] H. Dang-Vu, C. Delcarte, *Bifurcations et chaos, Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Ellipses, 2000.
- [17] F. Diener, G. Reeb, *Analyse non standard*, Hermann, 1989.
- [18] E. J. Doedel, M. J. Friedman, Numerical computation of heteroclinic orbit, *J. Comput. Appl. Math.* 26, 159-170, 1989.
- [19] E. J. Doedel, Numerical computation of heteroclinic orbits, *Journal of computational and Applied Mathematics* 26, 155-170, 1989.
- [20] E. J. Doedel, M. J. Friedman, A. C. Monteiro, On locating connecting orbits, *Applied Mathematics and Computation* 239, 231-239, 1994.
- [21] E. J. Doedel, M. J. Friedman, B. I. Kunin, Successive continuation for locating connecting orbits, *Numerical algorithms* 14, 103-124, 1997.
- [22] A. Douady, Systèmes dynamiques holomorphes, *Séminaire Bourbaki* 35^e année, n° 599, pp 39-63, 1982.
- [23] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer, 2006.
- [24] F. Dumortier, R. Roussarie, J. Sotomayor, Generic 3-parameter families of planar vector fields, unfoldings of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts, *Lecture Notes in Mathematics* 1480, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp 1-164, 1991.
- [25] T. Eirola, Aspects of backward error analysis of numerical ODE's, *J. of Comp. and Applied Mathematics* 45, 65-73, 1993.
- [26] T. Eirola, Numerical Taylor expansions for invariant manifolds, Helsinki University of Technology Institute of Mathematics Research Reports, 2003.

- [27] M. Feckan, Asymptotic behavior of stable manifolds, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol. 111 N° 2, pp 585-593, 1991.
- [28] M. Feckan, Discretization in the method of averaging, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol. 113 N° 4, 1105-1113, 1991.
- [29] M. Feckan, The relation between a flow and its discretization, Math. Slovaca 42, 123-127, 1992.
- [30] B. Fiedler, J. Scheurle, Discretization of homoclinic orbits, rapid forcing and "invisible" chaos, Memoirs of the AMS 119 (570), pp 1-79, 1996.
- [31] M. J. Friedman, E. J. Doedel, Numerical computation and continuation of invariant manifolds connecting fixed points, SIAM Jour. Num. Anal. 28 (3), 789-808, 1991.
- [32] M. J. Friedman, E. J. Doedel, Computational methods for global analysis of homoclinic and heteroclinic orbits : A case study, Journal of dynamics and differential equations, Vol. 5, 231-239, 1993.
- [33] B. M. Garay, Discretisation of semilinear differential equations with an exponential dichotomy, Computers Math. Applc. Vol. 28 N° 1-3, 23-35, 1994.
- [34] B. M. Garay, Discretisation and some qualitative properties of ordinary differential equations about equilibria, Acta Math. univ. Comenianae, vol. LXIII, 249-275, 1994.
- [35] B. M. Garay, Various closeness concepts in numerical ODE's, Computers Math. Applc. Vol. 31 N° 4/5, 113-119, 1996.
- [36] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser Boston, 1982.
- [37] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Intersciences, 1969.
- [38] J. Hubbard, B. West, *Differential equations : A dynamical systems approach*. Higher dimensional systems, Springer-Verlag, 1995.
- [39] E. Jankowska Sahraoui, Diagrammes de Newton et leur application dans la désingularisation des champs vectoriels, Universitatis iagellonicae acta mathematica, Fasciculus XXXIII, 1996.
- [40] V. Kanovei, M. Reeken, *Nonstandard analysis axiomatically*, Springer, 2004.
- [41] M. R. S. Kulenović, O. Merino, *Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica*, Chapman and Hall/CRC, 2002.

- [42] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, third edition, Springer Verlag, 2004.
- [43] S. Lefschetz, *Differential equations : geometric theory*, Interscience publishers, 1957.
- [44] M. C. Li, Structural stability of flows under numerics, *J. Differential Equations* 141, 1-12, 1997.
- [45] M. C. Li, Structural stability of Morse-Smale gradient like flows under discretizations, *SIAM J. Math. Anal.* 28, 381-388, 1997.
- [46] M. C. Li, Structural stability for the Euler methods, *SIAM J. math. Anal.* 30, 747-755, 1999.
- [47] M. C. Li, Structural stability on bassins for numerical methods, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127, 289-295, 1999.
- [48] E. Nelson, Internal Set Theory : a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Volume 83, N°6, pp 1165-1198, 1977.
- [49] M. Pelletier, Éclatements quasi homogènes, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 4, N°4*, pp 879-937, 1995.
- [50] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [51] T. Sari, Stroboscopy and averaging, *Colloque trajectorien à la mémoire de G. Reeb et J. L. Callot*, Strasbourg-Obernai, 1995.
- [52] M. Väth, *Nonstandard Analysis*, *Birkhäuser Verlag*, 2007.
- [53] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer Verlag, 2003.
- [54] Y. K. Zou and W. J. Beyn, Invariant manifolds for nonautonomous systems with application to one-step methods, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol 10, N° 3, pp 379-407, 1997.
- [55] Y. K. Zou and W.-J. Beyn, On manifolds of connecting orbits in discretizations of dynamical systems, *Nonlinear Analysis* 52, pp 1499-1520, 2003.