ACTES
DU
PREMIER COLLOQUE MAGHREBIN SUR LES MODELES NUMERIQUES DE L'INGENIEUR

ORGANISÉ A ALGER
DU 22 AU 24 NOVEMBRE 1987
PAR L'USTHB

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiene - Alger

AVEC LE CONCOURS DE :

EMI Ecole Mohammedia d'Ingénieurs RABAT, MAROC
ENIT Ecole Nationale d'Ingénieurs de TUNIS, TUNISIE

Volume 1

APPLICATION DE LA METHODE OPERATIONNELLE POUR L'OBTENTION DES INEGALITES DE STABILITE DANS UN SYSTEME M/G/1.

D. AISSANI*

Laboratoire de Modélisation Stochastique

I.N.E.S de Béjaïa .

Abstract: In this communication, we obtain quantitative estimates of the stability of the stationary distribution of the queue's size in the M/G/1 system after a small perturbation of the demands'arrivals. For this, we suppose that the distribution of arrivals of the G/G/1 system is "sufficiently close" to the poisson and the distribution of service time coïncide. An exact computation of the constants has been done.

1. Introduction: L'un des problèmes qui apparait lors de la conception et de l'exploitation des systèmes complexes est précisement l'analyse de stabilité de leur fonctionnement [3] . Pour cela, les spécialistes ont à leur disposition des paquets de programmes appliqués (ex: GPSS), permettant de modéliser certaines classes de systèmes [2] . Ce sont néanmoins des solutions onéreuses qui, de plus, doivent être appréciées avec un certain intervalle de confiance [9].

En régle générale, les valeurs des paramètres de départ des systèmes ne sont connues qu'approximativement (elles sont définies sur la base de méthodes statistiques), ce qui conduit à des erreurs pour le calcul des caractéristiques recherchées. C'est pourquoi les inégalités de stabilité obtenues (ici, pour le système M/G/1), pourront être utilisées pour estimer numériquement l'erreur de définition des caractéristiques en question, pour de petites perturbations des paramètres de ces systèmes.

Dans le §.3, on obtient l'estimation de l'équivalence des normes $\|.\|_v$ (par rapport à laquelle la chaine de Markov incluse du système M/G/1 est fortement v-stable [1]) et $\|.\|_\rho$ (pour laquelle a été obtenue l'estimation des opérateurs de transition [4]). Le principal résultat de la communication est exposé dans le §.4 . Dans la suite, toute intégrale sans précision du domaine d'intégration signifie que l'on intègre dans $\mathbb{R}^+$.

---

* Adresse: BP N° 324 , Béjaïa-Liberté (Algérie).

2. Préliminaires et position du problème:

2.1. Considérons un système de files d'attente G/G/1 (FIFØ, ∞), de distribution de la durée de service F et de distribution des inter-arrivées G. Notons par $\bar{\theta}_n$ -le moment de sortie de la n-ième demande, $\bar{\gamma}_n$ -le temps jusqu'à l'arrivée de la demande suivante aprés $\bar{\theta}_n$ et $\bar{\nu}_n$-le nombre de demandes dans le système aprés $\bar{\theta}_n$. Il est aisé de voir que la suite double $\bar{X}_n = (\bar{\nu}_n , \bar{\gamma}_n)$ forme une chaine de Markov, d'opérateur de transition $\bar{Q} = \| \bar{Q}_{ij}(x,dy) \|_{i,j=0}^{\infty}$ (voir [8]).

On considère en même temps un système de files d'attente M/G/1, de flot poissonien des arrivées d'intensité λ, et ayant les mêmes durées de service que le système G/G/1. On notera par $\bar{E}$ la distribution exponentielle d'intensité λ. L'opérateur de transition de la chaine de Markov correspondante $X_n = (\nu_n , \gamma_n)$ sera noté Q.

Supposons que le flot des arrivées du système G/G/1 soit proche du flot poissonien. La mesure de cette proximité sera caractérisée à l'aide de la métrique

$$W^* = W^*(G,\bar{E}) = \int \varphi^*(t)\, |G - \bar{E}|(dt) ,$$

où $\varphi^*(t)$ est une fonction poids (voir [1]) et $|a|$ désigne la variation de la mesure a. Notons également par,

$$G^* = \int \varphi^*(t)\, G(dt)$$

$$E^* = \int \varphi^*(t)\, \bar{E}(dt)$$

et $$W_0 = W_0(G,\bar{E}) = \int |G - \bar{E}|\,(dt)$$

2.2. Soit $\mathcal{M} = \{ \mu_j(dy) \}$, l'espace des mesures finies sur $\mathbb{N}\times R^+$. L'opérateur de transition $Q_{kj}(x,dy)$ donne une application linéaire $Q_{kj} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, dont la valeur au point $\mu \in \mathcal{M}$ est égale à

$$(\mu Q)_k(dy) = \sum_{j\geq 0} \int \mu_j(dx) . Q_{jk}(x,dy)$$

Notons également $\mathcal{N}$, l'espace des fonctions mesurables, bornées sur $\mathbb{N}\times R^+$. Introduisons à présent dans $\mathcal{M}$, une classe spéciale de normes. Soit $V(n,t)$, une fonction finie (pas nécéssairement bornée), différente de zéro sur $\mathbb{N}\times R^+$. Définissons

$$\|\mu\|_v = \sum_{j\geq 0} \int V(j,y)\, |\mu_j|(dy)$$

Toutes les notions et notations non introduites dans ce travail, le sont dans le sens [1]. En particulier, la définition de la v-stabilité forte (p.102), l'expression des symboles Qf, μf pour $\mu \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{N}$, ainsi que les expressions des normes induites dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{B}$ (espace des opérateurs linéaires bornés).

2.3. Notons $\beta_0 = \sup(\beta : \hat{f}(\lambda\beta - \lambda) < \beta)$, où

$$\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) = \int e^{(\lambda\beta - \lambda)u} . dF(u) = E\, e^{(\lambda\beta - \lambda)\xi}$$

et introduisons la condition d'ergodicité géométrique suivante:

a) $\lambda E\xi < 1$ b) $\exists\ a>0\ :\ E\, e^{a\xi} = \int e^{au}\, dF(u) < \infty$ (1)

Dans [1] ,on a prouvé que si cette condition est vérifiée,alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, la chaine de Markov X_n du système M/G/1 est fortement v-stable,pour une fonction

$$V(n,t) = \beta^n(e^{-\alpha t} + c^{-1}.\varphi^*(t)) = V \tag{2}$$

où $c = \dfrac{\beta E^*}{1-\rho}$ et $\rho = \dfrac{\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) + \beta}{2\beta} < 1$ (3)

Dans [4] ,on a démontré que pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, $G^* < \infty$,et $W_0 \leq (\beta_0 - \beta)/\beta_0^2$,on a

$$\| \bar{Q} - Q \|_\beta \leq W^*(1+\beta) + W_0.G^*(1+\lambda\beta)\frac{\beta_0^4}{(\beta_0 - \beta)^2} \tag{4}$$

où $\|\ .\|_\beta$ est construite à partir de la fonction $\bar{V} = V(n,t) = \beta^n.\varphi^*(t)$ (5)

Ces résultats intermédiaires permettent de considérer le problème de l'obten--tion des inégalités de stabilité dans un système M/G/1 avec un calcul exact des constantes (et ce,en utilisant le critère de stabilité forte [5]).Pour cela, nous allons introduire $\bar{\pi} = \bar{\pi}_k(A)$ (respectivement $\pi = \pi_k(A)$),la mesure invariante de l'opérateur $\bar{Q}$ (resp. Q).

3. Equivalence des normes $\|.\|_v$ et $\|.\|_\beta$.

Il est aisé de voir que ces deux normes sont équivalentes.Nous allons obte--nir l'estimation de cette équivalence.

Lemme 1: Soit $\bar{Q}$ (resp. Q),l'opérateur de transition de la chaine de Markov incluse du système G/G/1 (resp. M/G/1).Alors,pour tout β tel que $1<\beta<\beta_0$, $E^* < \infty$, on a

$$\| \bar{Q} - Q \|_v \leq (1 + c)\, \| \bar{Q} - Q \|_\beta \ , \tag{6}$$

où c a été définie dans (3).

Démonstration: De (2) et (5) ,on constate que

$$c^{-1}.\bar{V} \leq V < (c^{-1} + 1).\bar{V}$$

D'autre part,pour tout opérateur $B \in \mathcal{B}$,

$$\|B\|_v = \sup(\|Bf\|_v\ ,\ \|f\|_v \leq 1) = \sup_f \frac{\|Bf\|_v}{\|f\|_v}$$

où $\|f\|_v$ est par exemple définie dans (9).

De même, il est aisé de voir que pour tout $f \in \eta$,

$$\|f\|_\beta \leqslant (c^{-1} + 1)\|f\|_v \qquad \text{et} \qquad \|f\|_v \leqslant c\,\|f\|_\beta$$

c'est pourquoi,

$$\frac{c}{c+1}\|f\|_\beta \leqslant \|f\|_v \leqslant c\,\|f\|_\beta$$

Par conséquent,

$$\|B\|_v \leqslant \sup_f \frac{c\,\|Bf\|_\beta}{\dfrac{c}{c+1}.\|f\|_\beta}$$

ce qui achève la démonstration. ■

4. Estimation de la stabilité forte.

Pour pouvoir utiliser le théorème 3, §4 [5] , estimons $\|\pi\|_v$ et $\|1\|_v$, où $1 \in \eta$ est la fonction identiquement égale à l'unité.

Lemme 2: Soit $\bar{\pi}$ (resp. π) la distribution stationnaire de la chaine de Markov incluse du système GI/G/1 (resp. M/G/1). Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, on a

$$\|\pi\|_v \leqslant c_2 ,$$

où $c_2 = \dfrac{(1-\lambda m)(\beta - 1)(2-\rho)}{2(1-\rho)\beta}$ et $m = E\xi$ (7)

Démonstration: Par définition, $\pi_k(A) = \lim_{n\to\infty} P(\nu_n = k\,,\ \gamma_n \in A)$

$$= \int \sum_{i\geq 0} \pi_i(dy).Q_{ik}(y,A)\,,\ \forall\,(k,A) \qquad (8)$$

De la condition (1), il découle que le système (8) admet une solution unique dans la classe des distributions de probabilité (voir la formule de Pollatchek-Khintchine [8], [1]). Cette solution est de la forme $\pi_k(A) = \pi_k.\bar{E}(A)$, $k \geq 0$ où la suite π_k est donnée par la fonction génératrice (5) [1].

Remarquons que ,

$$\|\pi\|_v = \sum_{k\geq 0} \beta^k.\pi_k \int \left[e^{-\alpha x} + c^{-1}\varphi^*(x)\right] \bar{E}(dx)$$

$$\leqslant \Pi(\beta)\left[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha} + c^{-1}.E^*\right] ,$$

où $\Pi(\beta)$ est la fonction génératrice de π_k.

De (5) [1] et de l'égalité $\beta - \hat{f}(\lambda\beta - \lambda) = 2\beta(1-\rho)$ (voir (3)) , découlent que

$$\Pi(\beta) \leqslant \frac{\beta(\beta-1)(1-\lambda m)}{2\beta(1-\rho)}$$

La démonstration du lemme s'achève en utilisant l'égalité $\lambda/(\lambda+\alpha) = 1/\beta$. ∎

A présent, posons $\quad c'_o = 1 + \|1\|_v \cdot \|\pi\|_v$

De la définition de $\|\cdot\|_v$ dans η,

$$\|1\|_v = \sup_{k\geq o}\sup_{x\geq o} \frac{1}{\beta^k\left[e^{-\alpha x} + c^{-1}\varphi^*(x)\right]} \leq c \tag{9}$$

D'autre part, de (8) [5], on déduit que,

$$c'_o \leq c_o \qquad \text{où} \quad c'_o = 1 + \frac{(1-\lambda m)(\beta-1)(2-\rho)\,E^*}{2(1-\rho)^2} \tag{10}$$

Dans le corollaire 2 du théorème 3 [5], il est obtenu l'estimation $\|\pi - \bar{\pi}\|_v$, à la condition que la norme de l'opérateur perturbé $\bar{Q}$ vérifie l'inégalité

$$\|\bar{Q} - Q\|_v < \frac{1-\rho}{c'_o}$$

Imposons la condition,

$$\|\bar{Q} - Q\|_v < (1-\rho)/2c_o \tag{11}$$

Pour que cette inégalité soit vérifiée, de (4), il est suffisant que

$$\left[W^*(1+\beta) + W_o G^*(1+\lambda\beta)\frac{\beta^4_o}{(\beta_o-\beta)^2}\right]\left[1 + \frac{\beta E^*}{1-\rho}\right] \leq (1-\rho)/2c_o$$

et $\quad W_o \leq (\beta_o - \beta)/\beta^2_o$.

Posons

$$c_1 = G^*(1+\lambda\beta)\cdot\frac{\beta^4_o}{(\beta_o-\beta)^2} \tag{12}$$

Ainsi, pour que (11) soit vérifiée, il est suffisant que,

$$\left[W^*(1+\beta) + W_o\cdot c_1\right](1+c) \leq W^*(1+\beta+c_1)(1+c) \leq (1-\rho)/2c_o$$

et

$$W_o \leq (\beta_o - \beta)/\beta^2_o \quad .$$

<u>Théorème</u>: Supposons que dans un système M/G/1, la condition d'ergodicité géométrique (1) soit vérifiée. Alors, dans un système G/G/1 et pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_o$, et G telle que

$$\begin{aligned} W^*(G,\bar{E}) &\leq \frac{1-\rho}{2\,c_o\,(1+c)}(1+\beta+c_1)^{-1} \\ W_o(G,\bar{E}) &\leq (\beta_o-\beta)/\beta^2_o \end{aligned} \tag{13}$$

on a $\|\pi - \bar{\pi}\|_v \leq 2\left[(1+\beta)W^* + c_1\cdot W_o\right] c_o\cdot c_2\cdot(1+c)$, où c_o , c_1 , c_2 et c ont été introduit dans (10),(12),(7) et (3).

Démonstration: De part le lemme 1, et d'aprés (4),

$$\| \bar{Q} - Q \|_v \leq (1 + c)\left[W^*(1 + \beta) + W_o . c_1\right]$$

Par ailleurs, de l'inégalité $c_o' \leq c_o$, on obtient

$$\| \pi - \bar{\pi} \|_v \leq 2c_2 . c_o . (1 + c)\left[W^*(1 + \beta) + W_o . c_1\right](1 - \rho - c_o \| \bar{Q} - Q \|_v)^{-1}$$

Comme nous l'avons prouvé précédement, lorsque (13) est vérifiée, on a bien l'estimation (11). Le théorème est démontré . ∎

Remarque 1: Des corollaires de ce théorème, pour des choix particuliers des normes poids, ont été exposés dans [6] , [7].

Remarque 2: Toutes les conditions utilisées dans ce travail (pour la démonstration des inégalités de stabilité), sont seulement imposées aux paramètres de départ du système, ce qui facilite leurs vérifications dans la pratique.

Remarque 3: Un cahier des charges a été proposé dans le cadre de [2] , pour illus--trer (sur des exemples de systèmes à fonctions de répartition concrètes), la qualité des estimations quantitatives obtenues, ainsi que la comparaison avec d'autres méthodes (par exemple [3]).

R E F E R E N C E S

[1]. Aïssani D., Sur les conditions d'approximation d'un système G/G/1 par un système M/G/1., Journal of Technology N°4, 1987, pp. 96 - 107.

[2]. Aïssani D., Modélisation et Simulation des systèmes industriels., Cours de Post-Graduation R.Ø, Inst. Informatique, Annaba , 1987.

[3]. Kalashnikov V.V, Analyse qualitative de comportement des systèmes complexes par la méthode des fonctions tests., Naouka, Moscou, 1978 (Russe)

[4]. Aïssani D., Estimation quantitative de la norme de déviation de l'opérateur de transition d'un système M/G/1., Cahiers Mathématiques N°4, 1987

[5]. Kartashov N.V., Stabilité forte des chaines de Markov., in "Problèmes de sta--bilité des modèles stochastiques" VNISSI, 1981, pp .54 - 59

[6]. Aïssani D., Quelques conséquences de la stabilité forte dans un système M/G/1 C.R. Séminaire du Laboratoire Statistique, Constantine, Mai 1987, 12p.

[7]. Aïssani D., Sur la v-stabilité forte dans un système M/G/1., C.R. Séminaire de Probabilité-Statistique, Inst. Mathématique, Annaba , Juin 1987 .

[8]. Saaty T., Elements of queueing theory and applications., Mc Graw Hill, N.Y, 1961

[9]. Gelenbe E. and Cie, RFA, Modélisation et traitement numérique, Ed. H et T, 1980