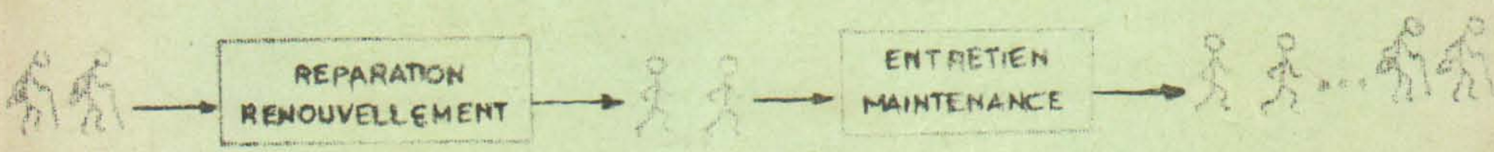
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
Instituts Nationaux d'Enseignement Supérieur
BEJAIA

MODELES DE FIABILITE ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

ACTES
de la Conférence Nationale
M.F.S.I

Organisée par
Le Laboratoire de Recherche LAMOS



Amar Aissani et Djamil Aissani
Editeurs

Béjaia - Mars 1988

[illegible] de Fiabilité et Sciences de l'Ingénieurs
[illegible] - mars 1988.

QUELQUES RESULTATS SUR LA STABILITE FORTE D'UN MODELE DE REFUS (Défaillance avec ingérence)

Djamil AISSANI
LAMOS
Laboratoire de Modélisation Stochastique
I.N.E.S de Béjaia (Algérie)

1. Introduction

Pour les fiabilistes, la sécurité (safety) est la probabilité qu'aucun accident ne survienne. Il est vrai qu'à l'heure actuelle, les défaillances des systèmes complexes (notamment ceux qui assurent le contrôle des centrales nucléaires ou des processus chimiques, pilotage d'avion,...) peuvent avoir des conséquences catastrophiques [3].

Le modèle présenté dans ce travail peut être considéré comme un modèle de refus pour lequel la réparation de l'élément défaillant peut être reporté jusqu'au moment de la fin de service de la demande sur l'appareil.

2. Stabilité Forte d'un Modèle de Refus

2.1. Considérons un système de files d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité relative, de fonction de répartition de la durée de service du flot prioritaire B_1 et non prioritaire B_2. On suppose que la capacité de la file est infinie, alors que le service se fait par ordre d'arrivée (dans chaque flot). Par ailleurs, on notera par λ l'intensité du flot non prioritaire et $\lambda\theta$ celle du flot prioritaire.

Supposons que le paramètre θ est petit (c'est-à-dire que les pannes prioritaires se produisent rarement dans le système). Notons X_n^i, $i = 1, 2$, le nombre de demandes de la i^{ème} priorité au moment de la fin de service de la n^{ième} demande. Il est aisé de voir que la suite double $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ forme une chaîne de Markov de noyau de transition $P_\theta = \|P_{k\epsilon}(i, j, \theta)\|_{i,j=0}^{\infty}$ (voir [2]).

Considérons en même temps un système de files d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité relative quand θ tend vers zéro et ayant les mêmes durées de service que le premier système. Le noyau de transition de la chaîne de Markov correspondante sera noté

$$P_0 = \|P_{k\epsilon}(i, j, 0)\|_{i,j=0}^{\infty}$$

2.2. Soit $\mathcal{M} = \{\mu(i, j)\}$ l'espace des mesures finies sur $I\!N \times I\!N$. Le noyau de transition

$P = \|P_{ke}(i,j)\|$ donne une application linéaire $P_{k\ell} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. Notons également η l'espace des fonctions mesurables, bornées sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Le symbôle Pf pour $f \in \eta$ désignera la fonction

$$(Pf)(k,\ell) = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} f(i,j).P_{k\ell}(i,j)$$

Introduisons à présent, dans $\mathcal{M}$, une classe spéciale de normes. Soit $V(n,m)$ une fonction finie (pas nécessairement bornée), différente de zéro sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Définissons $\|\mu\|_v = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} V(i,j)|\mu(i,j)|$, où $|\mu|$ désigne la variation de la mesure μ.

Cette norme met en évidence dans la classe de tous les opérateurs linéaires, l'espace $\mathcal{B}$ des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k\geq 0}\sup_{l\geq 0} \frac{1}{V(k,\epsilon)} \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} V(i,j) P_{k\epsilon}(i,j)$$

Toutes les notions et notations non définies dans ce travail peuvent être consultées dans [2]. En particulier, la définition de la stabilité forte, l'expression des symbôles $\mu P, \mu f$ pour $\mu \in \mathcal{M}$, ainsi que l'expression de la norme induite dans η.

2.3. D'après le critère de stabilité forte (voir par exemple [2]), pour vérifier la stabilité forte de la chaîne X_n, il est suffisant de trouver une mesure μ et une fonction h sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, telles que:

A) le noyau $T_{ke}(i,j) = P_{ke}(i,j) - \mu(i,j).h(k,e)$ soit non négatif.
B_1) il existe $\rho < 1$ tel que $(TV)(k,\ell) \leq \rho.V(k,\ell)$ pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
D) $\|P\|_v < \infty$.

Dans [2], nous avons démontré le critère de stabilité forte pour la fonction indicatrice $h(k,e) = 1_{k=0,\ell=0}$ et $\mu(i,j) = P_{00}(i,j)$.

Posons

$$\hat{f}_i(\lambda\beta - \lambda) = Ee^{\lambda(\beta-1)\xi_i} = \int_0^\infty dB_i(u)e^{\lambda(\beta-1)u} \tag{1}$$

et supposons que dans le système $M/G/1$ la condition suivante soit vérifiée

1) $\lambda E\xi_2 < 1$

2) $\exists a > 0$ telle que $Ee^{a\xi_2} = \int_0^\infty dB_2(u)e^{au} < \infty \qquad (*)$

Théorème 1: [2]

Supposons que dans un système $M_2/G_2/1$ avec priorité relative, la condition d'ergodicité géométrique $(*)$ soit vérifiée.

Alors $\forall\beta, 1 < \beta < \beta_0$, la chaîne de Markov incluse $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ est fortement v-stable pour une fonction

$V(n,m) = \alpha^n\beta^m$, où

$$\alpha = \hat{f}_1(\lambda\beta - \lambda)/\rho \quad , \quad \rho = \hat{f}_2(\lambda\beta - \lambda)/\beta < 1 \tag{2}$$

et $\delta_0 = \sup\left(\beta : \hat{f}_2(\lambda\beta - \lambda) < \beta\right)$.

Pour pouvoir obtenir les inégalités de stabilité, il est nécessaire de démontrer un certain nombre de résultats intermédiaires. L'objet de cette communication est justement d'obtenir l'estimation de la norme de déviation de l'opérateur P_θ par rapport à l'opérateur P_o.

Théorème 2 :

Dans les conditions du théorème 1, si $\forall \alpha > 1$, et tous les θ tels que $0 \leq \theta \leq \beta - 1$, $0 \leq \theta \leq \alpha - 1$, nous avons l'inégalité

$$\|\Delta_\theta\|_v = \|P_\theta - P_0\|_v \leq \theta D \tag{3}$$

où

$$D = \left\{\lambda\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) + \alpha\lambda\hat{f}'a) + \hat{f}(a)\right\}$$

$$a = \lambda\beta + \alpha\lambda\theta - \lambda\theta - \lambda$$

et $\hat{f}(a) = \hat{f}_1(a) + \hat{f}_2(a)$, $\hat{f}_i(a)$ ayant été définis dans (1).

Références

[1] Aissani (A.) et Aissani (D.). – Fiabilité des systèmes et systèmes de files d'attente non fiables. *U.E.R de Mathématiques-Informatiques, E.N.I.T.A, Bordj-el-Bahri*, 1986, pp. 01–90.

[2] Aissani (D.). – Stabilité forte de la chaine de markov incluse dans un système $m_2/g_2/1$ avec priorité relative. *Proceedings du colloque micro-ordinateur et systèmes*, 1988, pp. 01–06.

[3] Deswarte (Y.). – Sécurité informatique. *BLRIA*, 1987.