

Dans la 1ère partie de ce livre, est proposé un modèle *GSPN* (Generalised Stochastic Petri Nets) pour le réseau de files d'attente à capacité limitée  $[M/M/1/k1 + 1 \rightarrow M/M/1/k2 + 1]$ . A partir de ce *GSPN*, est obtenu le générateur infinitésimal de la *CTMC* sous-jacente et les indices de performances.

La 2ème partie de ce livre est consacrée à l'étude des systèmes semimarkoviens avec rappels et source finie *M/G/1/N/N* et *M/G/1/N/N* avec recherche orbitale à l'aide des *MRSPN* (Markov Regenerative Stochastic Petri Nets). L'approche proposée a donné une représentation graphique détaillée et a permis d'obtenir les matrices de transitions des *EMC* (Embedded Markov Chain) sous-jacentes et les indices de performances.

Dans la 3ème partie, pour la 1ère fois est prouvée l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux *SPN*. Comme première tentative, est considéré le *IGSPN* (Infinite Generalised Stochastic Petri Nets) associé au système d'attente classique *M/M/1*. Des algorithmes « implémentés sous Matlab » sont établis pour le calcul numérique de la distribution stationnaire de la *CTMC* et l'*EMC* et pour le calcul des indices de performances avec des exemples numériques illustratifs.



**IKHLEF Lyes** a obtenu un doctorat en mathématiques appliquées de Université de Bejaia. Il est Maître de conférences B en mathématiques au département de mathématiques et d'informatique de Université Alger 1. Ses intérêts de recherche comprennent l'analyse des performances de systèmes de files d'attente, les RdP stochastiques et chaînes de Markov.



IKHLEF Lyes  
LEKADIR Ouiza  
AISSANI Djamil

# MODELISATION, ANALYSE DE PERFORMANCES ET STABILITE FORTE DE SYSTEME D'ATTENTE VIA L'OUTIL DES RESEAUX DE PETRI STOCHASTIQUES

**IKHLEF Lyes  
LEKADIR Ouiza  
AÏSSANI Djamil**

**MODELISATION, ANALYSE DE PERFORMANCES ET STABILITE  
FORTE DE SYSTEME D'ATTENTE VIA L'OUTIL DES RESEAUX DE  
PETRI STOCHASTIQUES**

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

**IKHLEF Lyes  
LEKADIR Ouiza  
AÏSSANI Djamil**

**MODELISATION, ANALYSE DE  
PERFORMANCES ET STABILITE  
FORTE DE SYSTEME D'ATTENTE VIA  
L'OUTIL DES RESEAUX DE PETRI  
STOCHASTIQUES**

FOR AUTHOR USE ONLY

**Éditions universitaires européennes**

**Imprint**

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: [www.ingimage.com](http://www.ingimage.com)

Publisher:

Éditions universitaires européennes

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

**ISBN: 978-620-2-54870-0**

Copyright © IKHLEF Lyes, LEKADIR Ouiza, AÏSSANI Djamil

Copyright © 2021 International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

FOR AUTHOR USE ONLY

---

# Table des matières

---

Liste des abréviations	4
Liste des tables	5
Table des figures	8
Introduction générale	9
<b>1 Files et réseaux de files d'attente</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction	15
1.2 Systèmes de files d'attente	16
1.3 Quelques systèmes de files d'attente classiques	17
1.3.1 Système M/M/1	17
1.3.2 Système M/G/1	18
1.4 Systèmes de files d'attente avec rappels	20
1.4.1 Système M/G/1//N avec rappels	22
1.4.2 Système M/G/1//N avec rappels et recherche orbitale	23
1.5 Réseaux de files d'attente	25
1.5.1 Réseaux de files d'attente à forme produit	26
1.5.2 Réseaux de files d'attente à capacités limitées	28
1.6 Conclusion	30
<b>2 Réseaux de Petri (PN) : Définition et concepts de base</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction	31

2.2	Concepts de base	32
2.3	Pouvoir de modélisation des PN	37
2.4	Propriétés des PN	39
2.4.1	Propriétés dynamiques	39
2.4.2	Propriétés structurelles	41
2.5	Méthodes d'analyses des PN	42
2.5.1	Analyse par énumération des marquages	42
2.5.2	Méthode d'algèbre linéaire	43
2.5.3	Analyse par réduction	43
2.6	Extensions des PN	44
2.7	Conclusion	46
<b>3</b>	<b>Réseaux de Petri stochastiques (SPN)</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction	47
3.2	Sémantique stochastique des SPN	48
3.3	Quelques modèles de SPN	50
3.4	Réseaux de Petri stochastiques généralisés (GSPN)	52
3.5	Réseaux de Petri stochastiques markoviens régénératifs (MRSPN)	56
3.6	Indices de performance	61
3.7	Conclusion	62
<b>4</b>	<b>Méthode de stabilité forte</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction	63
4.2	Stabilité Forte	64
4.3	Préliminaires et notations	64
4.4	Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov	67
4.5	$v$ -stabilité forte d'une chaîne de Markov	68
4.6	Inégalités de stabilité forte	69
4.7	Conclusion	70
<b>5</b>	<b>Analyse du réseau <math>[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]</math> via les GSPN</b>	<b>71</b>
5.1	Introduction	71

5.2	$[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec BBS	72
5.2.1	GSPN associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec BBS	72
5.2.2	CTMC du GSPN associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec BBS	74
5.2.3	Indices de performance	79
5.3	$[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec BAS	80
5.4	Résultats numériques	82
5.5	Conclusion	88
<b>6</b>	<b>Analyse du système <math>M/G/1//N</math> avec rappels à l'aide des MRSPN</b>	<b>89</b>
6.1	Introduction	89
6.2	Système $M/G/1//N$ avec rappels classiques	90
6.2.1	Analyse du système $M/G/1//2$ avec rappels classiques	92
6.2.2	Analyse du système $M/G/1//N$ avec rappels classiques	95
6.2.3	Indices de performance	97
6.3	Système $M/G/1//N$ avec rappels classiques et recherche orbitale	99
6.4	Résultats numériques	102
6.5	Conclusion	111
<b>7</b>	<b>Stabilité forte du modèle IMRSPN-<math>M/G/1</math></b>	<b>112</b>
7.1	Introduction	112
7.2	IGSPN associé à $M/M/1$	113
7.3	IMRSPN associé à $M/G/1$	115
7.4	$v$ -stabilité forte du modèle IGSPN- $M/M/1$	118
7.5	Déviations de la matrice de transition	120
7.6	Inégalités de stabilité	121
7.7	Mesure de performance de la méthode de stabilité forte	122
7.8	Conclusion	128
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>



---

## Liste des abréviations

---

QN Queueing Networks  
CTMC Continuons Time Markov Chain  
EMC Embedded Markov Chain  
MRP Markov Regenerative Process  
BBS Blocking Before Service  
BAS Blocking After Service  
RSB Repetitive Service Blocking  
PRD Preemptive Repeat Different  
PRS Preemptive Resume  
MVA Mean Value Analysis  
PN Petri Nets  
SPN Stochastic Petri Nets  
Ex-SPN Exponential Stochastic Petri Nets  
GSPN Generalized Stochastic Petri Nets  
IGSPN Infinite Generalized Stochastic Petri Nets  
DSPN Deterministic and Stochastic Petri Nets  
DDPN Discret Deterministic Petri Nets  
ESPN Extended Stochastic Petri Nets  
SRN Stochastic Reward Petri Nets  
PH-SPN Phase Type Stochastic Petri Nets  
MRSPN Markov Regenerative Stochastic Petri Nets  
IMRSPN Infinite Markov Regenerative Stochastic Petri Nets  
CGPN Concurrent Generalized Petri Nets.

---

## Liste des tableaux

---

5.1	Comparaison des distributions stationnaires du <i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$ avec <i>BBS</i> avec celles de la simulation, " $\lambda = 0.5, \mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 2$ ". . . . .	83
5.2	Comparaison de quelques mesures de performance du <i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/7 \rightarrow M/M/1/5]$ avec <i>BBS</i> avec celles de la simulation, " $\lambda = 1, \mu_1 = 2.5$ et $\mu_2 = 1.5$ ". . . . .	84
6.1	Comparaison des distributions stationnaires du modèle $M/H_2/1//N$ avec rappels classiques donnés dans [16] avec celles de notre modèle <i>I</i> . . . . .	103
6.2	Comparaison de quelques caractéristiques du système $M/M/1//N$ avec rappels classiques et recherche orbitale donnés dans [167] avec celle de notre modèle <i>II</i> . . . . .	104
6.3	Quelques mesures de performance pour un service Hypo-exponentiel. . . . .	104
6.4	Quelques mesures de performance pour un service Hyper-exponentiel. . . . .	105
6.5	Quelques mesures de performance pour un service Erlang. . . . .	105
7.1	Erreur $ESP^e$ en fonction du paramètre $\beta$ , pour " $\lambda = 0.18, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ". . . . .	125
7.2	Quelques mesures de performance des deux modèles étudiés pour " $\lambda = 0.18, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ". . . . .	125
7.3	Comparaison des erreurs $ESP^e$ et $ESS^e$ , pour " $\beta = 1.9, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ". . . . .	126
7.4	Comparaison des résultats : L'erreur algorithmique ( $ESP^e, ESQ$ ), pour " $Cox_2(2.53, 0.0034, 11.385)$ ". . . . .	127

---

# Table des figures

---

1.1	File d'attente classique. . . . .	16
1.2	<i>CTMC</i> du système $M/M/1$ . . . . .	17
1.3	Système $M/G/1//N$ avec rappels classiques. . . . .	22
1.4	Système $M/G/1//N$ avec rappels est recherche orbitale. . . . .	24
2.1	Représentation graphique d'un $PN$ marqué. . . . .	33
2.2	Marquages possibles du $PN$ donné dans la figure 2.1. . . . .	35
2.3	a) Arbre des marquages accessibles du $PN$ donné dans la figure 2.1; b) Graphe des marquages accessibles du $PN$ donné dans la figure 2.1. . . . .	36
2.4	Quelques structures modélisées par les $PN$ . . . . .	37
2.5	Arc inhibiteur. . . . .	44
4.1	Travaux effectués sur la stabilité forte au niveau du LaMOS. . . . .	65
5.1	$[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec <i>BBS</i> . . . . .	73
5.2	<i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec <i>BBS</i> . . . . .	73
5.3	Arbre des marquages du <i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$ avec <i>BBS</i> . . . . .	75
5.4	<i>CTMC</i> du <i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$ avec <i>BBS</i> . . . . .	76
5.5	<i>CTMC</i> du <i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec <i>BBS</i> . . . . .	77
5.6	$[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec <i>BAS</i> . . . . .	81
5.7	<i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec <i>BAS</i> . . . . .	81
5.8	<i>CTMC</i> du <i>GSPN</i> associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec <i>BAS</i> . . . . .	82

5.9	Temps moyen de réponse de la première station ( $\varpi_{s1}$ ), de la deuxième station ( $\varpi_{s2}$ ) et du $QN$ ( $\varpi_s$ ) en fonction du taux des arrivées ( $\lambda$ ), " $\lambda = 1, \dots, 10, \mu_1 = 5, \mu_2 = 4, k_1 = 8, k_2 = 6$ ". . . . .	84
5.10	Nombre moyen de clients dans la première file ( $n_{q1}$ ), dans la deuxième file ( $n_{q2}$ ) et dans le $QN$ ( $n_s$ ) en fonction du taux de service du deuxième serveur ( $\mu_2$ ), " $\mu_2 = 1, \dots, 10, \lambda = 3, \mu_1 = 3.5, k_1 = 8, k_2 = 6$ ". . . . .	85
5.11	Temps moyen de réponse de la première station ( $\varpi_{s1}$ ), de la deuxième station ( $\varpi_{s2}$ ) et du $QN$ ( $\varpi_s$ ) en fonction du taux de service du deuxième serveur ( $\mu_2$ ), " $\mu_2 = 1, \dots, 10, \lambda = 3, \mu_1 = 3.5, k_1 = 8, k_2 = 6$ ". . . . .	85
5.12	Utilisation du premier serveur ( $U_{s1}$ ) et du deuxième serveur ( $U_{s2}$ ) en fonction de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ), " $k_2 = 1, \dots, 20, \lambda = 3, \mu_1 = 3, \mu_2 = 3.5, k_1 = 8$ ". . . . .	86
5.13	Probabilité de blocage ( $p_b$ ) en fonction du taux de service du deuxième serveur ( $\mu_2$ ) et de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ). . . . .	87
5.14	Probabilité de perte ( $p_l$ ) en fonction du taux des arrivées ( $\lambda$ ) et de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ). . . . .	87
6.1	$MRSPN$ associé à $M/G/1//N$ avec rappels classiques (modèle I). . . . .	90
6.2	Arbre des marquages accessibles du $MRSPN$ associé à $M/G/1//2$ avec rappels classiques. . . . .	92
6.3	$CTMC$ subordonnée du $MRSPN$ associé à $M/G/1//2$ avec rappels classiques. . . . .	93
6.4	$CTMC$ subordonnée du $MRSPN$ associé à $M/G/1//N$ avec rappels classiques. . . . .	95
6.5	$MRSPN$ associé à $M/G/1//N$ avec rappels classiques et recherche orbitale (modèle II). . . . .	99
6.6	$CTMC$ subordonnée du $MRSPN$ associé à $M/G/1//N$ avec rappels classiques et recherche orbitale. . . . .	100
6.7	Effet du taux des arrivées sur le temps moyen de réponse du modèle I; " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5)$ ". . . . .	106

6.8	Effet du taux des arrivées sur l'utilisation du serveur du modèle $I$ ; " $N = 4, \lambda = 10^{-1}, \dots, 20, Hypo_2(7; 5), \gamma = 0.25$ ".	106
6.9	Effet du taux des rappels sur le temps moyen de réponse du modèle $I$ ; " $N = 4, \lambda = 0.2, Hypo_2(7; 5), \gamma = 10^{-2}, \dots, 2$ ".	107
6.10	Effet du taux des rappels sur le nombre moyen des clients dans l'orbite; " $N = 4, \lambda = 0.2, Hypo_2(7; 5), \gamma = 10^{-1}, \dots, 20$ ".	108
6.11	Effet du taux des arrivées sur le temps moyen de réponse du modèle $II$ ; " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5), \gamma = 0.1$ ".	108
6.12	Effet du taux des arrivées sur le temps moyen de réponse du modèle $II$ ; " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5), p = 0.2$ ".	109
6.13	Effet du taux des arrivées sur l'utilisation du premier serveur du modèle $II$ ; " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5), \gamma = 0.25$ ".	110
6.14	Effet du taux des rappels sur le nombre moyen de clients dans l'orbite; " $N = 4, \lambda = 0.2, Hypo_2(7; 5), \gamma = 10^{-1}, \dots, 20$ ".	110
7.1	Modèle $IGSPN-M/M/1$ .	113
7.2	a) Graphe des marquages réduit du modèle $IGSPN-M/M/1$ ; b) $CTMC$ du modèle $IGSPN-M/M/1$ .	114
7.3	Modèle $IMRSPN-M/G/1$ .	115
7.4	a) Graphe des marquages réduit du modèle $IMRSPN-M/M/1$ ; b) $CTMC$ subordonnée du modèle $IMRSPN-M/G/1$ .	116
7.5	Évolution de l'erreur $ESP^e$ en fonction du paramètre $\beta$ , pour " $\lambda = 0.18, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ".	123
7.6	Évolution des erreurs $ESP^e$ et $ESS^e$ en fonction du paramètre $\beta$ , pour " $\lambda = 0.18, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ".	126
7.7	Évolution de l'erreur $ESP^e$ et $ESQ$ en fonction du paramètre $\beta$ , pour " $\lambda = 0.2, Cox_2(2.53, 0.0034, 11.385)$ ".	127

---

# Introduction générale

---

L'évolution technologique de ces dernières années a induit de nouvelles classes de systèmes très sophistiqués et doués de compétences multiples comme : les systèmes de production, les systèmes de transport, les systèmes informatiques, etc. Ces systèmes ont une dynamique régie par différents phénomènes dont la synchronisation, le parallélisme, la concurrence et le partage de ressources, etc [21, 117]. La diversité de ces phénomènes rend l'étude de ces systèmes plus difficile. Ainsi, depuis de nombreuses années, l'analyse de ces systèmes a suscité l'intérêt des chercheurs. L'objectif principal de ces derniers était de construire des systèmes corrects, fiables, répondant aux exigences initialement tracées et d'éviter des pertes importantes ou encore quelquefois la survenue de catastrophes. L'analyse d'un système revêt deux aspects :

- L'aspect qualitatif qui consiste à rechercher les propriétés du système considéré, comme : l'existence d'une situation de blocage, l'accessibilité à un certain état, l'existence de conflits, etc.
- L'aspect quantitatif, où sont calculées les valeurs d'un ensemble d'indices de performance, qui rendent compte des performances du système [111]. Nous pouvons citer, par exemple : le temps de réponse moyen à une requête, le nombre moyen d'utilisateurs connectés à un site Internet, le débit moyen des transactions dans un système bancaire, le taux de perte des messages dans un réseau de communication, etc.

Dans cette thèse, il sera question d'étude de systèmes à événements discrets. En effet, la modélisation et l'évaluation de performance de ces systèmes reste une préoccupation principale des différentes communautés scientifiques. Historiquement, les recherches en modélisation et en évaluation de performance de ces systèmes ont toujours été deux

sujets très liés. Bien que, dans la pratique, nous pouvons clairement identifier une association de méthodes d'évaluation de performance à certains formalismes de modélisation. A ce jour, il n'existe pas de cadre théorique ou une méthodologie standard pour permettre une résolution exhaustive des différents problèmes posés par ces systèmes. En effet, il n'existe aucune réponse toute faite pour choisir le modèle le mieux adapté. Plusieurs modèles formels sont développés : les modèles formels de bas niveau tels que les processus stochastiques et plus particulièrement les chaînes de Markov et les modèles formels de haut niveau comme : les systèmes de files d'attente et réseaux de files d'attente (Queueing Networks, " $QN$ "), les algèbres de processus stochastiques, les réseaux de Petri stochastiques (Stochastic Petri Nets, " $SPN$ "), etc. Une description et une comparaison des différents outils de modélisation utilisés pour l'évaluation de performance des systèmes à événements discrets est présentée dans [46, 36, 164].

Les origines du formalisme des files d'attente datent du début du XX<sup>ème</sup> siècle et principalement des travaux de deux mathématiciens : le mathématicien danois A. K. Erlang avec ses travaux sur les réseaux téléphoniques et le mathématicien russe A. A. Markov avec la création des modèles markoviens. Les modèles de files d'attente classiques présentent certaines limitations pour modéliser les systèmes réels, pour cela des systèmes spécifiques ont été introduits comme : les systèmes de files d'attente avec rappels, avec priorités, avec impatience, avec arrivées par groupes, avec arrivées négatives, etc.

Ainsi, par exemple le modèle de file d'attente classique et le modèle d'Erlang avec perte étaient inadéquats pour expliquer les comportements stochastiques des systèmes téléphoniques, dans lesquels les abonnés répètent leurs appels dès la réception du signal occupé. Pour modéliser ces systèmes téléphoniques, le modèle des files d'attente avec rappels (systèmes avec appels répétés) a vu le jour [113, 166, 57].

Dans un système réel, un client a besoin de recevoir plusieurs traitements consécutifs et de différentes natures avant de le quitter. Pour modéliser ce type de situations, il faut relier plusieurs files d'attente entre elles d'où la notion des  $QN$ . La grande percée dans le domaine des  $QN$  est venue avec la découverte en 1957, par J. R. Jackson [100], d'une classe appelée  $QN$  à forme produit. Les différentes stations d'un  $QN$  peuvent avoir

---

des capacités limitées. Lorsqu'une file est pleine, aucun client ne peut y entrer. Cela introduit des blocages dans les autres stations en amont et éventuellement des pertes de clients à l'entrée du  $QN$  si celui-ci est ouvert. Cependant, la prise en compte du phénomène de blocage a engendré beaucoup de problèmes théoriques. Cette classe appelée  $QN$  à capacités limitées [77, 143] est utilisée pour représenter des systèmes réels tels que les systèmes informatiques, les systèmes de communication, les systèmes de production, etc.

Un autre outil de modélisation de haut niveau est les réseaux de Petri (Petri Nets, "PN"). Cet outil constitue un important modèle graphique et mathématique qui permet de modéliser finement divers phénomènes, notamment : la synchronisation, le parallélisme, le partage de ressources ou encore des situations de conflits et de décrire les relations existantes entre des conditions et des événements [62, 133]. Historiquement, le concept de  $PN$  a été développé pour la première fois par le mathématicien allemand C. A. Petri dans sa thèse de doctorat intitulée "Kommunikation mit Automaten" au début des années soixante [148]. La théorie des  $PN$  est devenue aujourd'hui une branche importante de l'informatique. En janvier 2012, la base de données des publications sur les  $PN$  "The Petri Nets Bibliography 1" contient plus de 8500 entrées. Les nombreux résultats théoriques accumulés par l'étude des  $PN$ , en font aujourd'hui un outil puissant de description et d'analyse dans de nombreux domaines d'application. Ainsi, la littérature sur les  $PN$  est riche et comprend de nombreux résultats théoriques et pratiques. Cependant, les  $PN$  ne modélisent les problèmes que qualitativement, d'où l'apparition durant ces dernières années des extensions des  $PN$  qui intègrent à la fois des éléments qualitatifs et des éléments quantitatifs. Ces extensions ont permis de lier les  $PN$  aux techniques d'évaluation de performance. Parmi les extensions les plus connues, on peut citer : les  $SPN$ , les  $PN$  temporisés et temporels ( $A$ -temporels,  $P$ -temporels,  $T$ -temporels), les  $SPN$  colorés, les  $SPN$  fluide [92], les  $SPN$  temporisés, etc. Ces extensions sont définies par des hypothèses supplémentaires sur la structure ou la sémantique d'exécution des  $PN$ . Les  $SPN$ , par exemple, sont des  $PN$  dans lesquels une variable aléatoire est associée à chaque transition. Cette variable spécifie la durée qui sépare l'instant de sensibilisation de la transition et l'instant de tir

---



de cette transition.

L'analyse exacte des performances d'un  $SPN$  est basée sur le calcul de sa distribution stationnaire. Cette dernière permet l'obtention des différentes mesures de performance de ce  $SPN$ . Le calcul de cette distribution est quasi-impossible si le système a un espace d'états de taille conséquente, voire infinie. Cependant, des efforts sont réalisés par la communauté des chercheurs sur les  $SPN$  pour l'obtention de solutions exactes des distributions stationnaires de certains modèles vérifiant des conditions restrictives. Parmi ces travaux, on peut citer ceux relatifs aux  $SPN$  non bornés [76, 88, 108] et ceux relatifs aux  $SPN$  à forme produit [124, 25]. Une façon de contourner la difficulté du calcul de cette distribution consiste à chercher des solutions approximatives. L'application d'une méthode d'approximation pour le calcul des probabilités stationnaires (ou toutes autres caractéristiques) induit des erreurs dont les estimations sont nécessaires. Dans la littérature, il existent plusieurs méthodes d'approximation, la méthode de stabilité forte "méthode des opérateurs de la théorie de stabilité" est l'une d'elles. Cette dernière méthode a été élaborée au début des années 1980 par D. Aïssani et N. V. Kartashov [5]. Elle est applicable à tous les modèles stochastiques de recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov. Elle permet à la fois de réaliser une analyse qualitative et une analyse quantitative de certains systèmes complexes. Elle a été principalement appliquée aux systèmes d'attente (files d'attente [40] et  $QN$  [118]), aux modèles de risques [34], aux modèles de gestion des stocks [150], etc.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation, l'évaluation de performance et la stabilité forte des  $SPN$  associés aux systèmes d'attente. Particulièrement, ce travail propose d'enrichir la modélisation et l'analyse des performances des systèmes d'attente à l'aide des deux outils  $GSPN$  (Generalized Stochastic Petri Nets) et  $MRSPN$  (Markov Regenerative Stochastic Petri Nets). Cette thèse résume trois apports essentiels de notre travail :

- Le premier apport réside dans l'extension des travaux [78, 139] ayant défini une approche d'analyse des performances des files d'attente à l'aide des  $GSPN$ , pour être exploitable dans le contexte des  $QN$  à capacités limitées.
  - Le second apport consiste à développer une méthode générique d'analyse des
-

performances des systèmes d'attente avec rappels et source finie à l'aide des *MRSPN*. Cette méthode part de la modélisation des composants de ces systèmes pour aboutir au calcul de leurs indices de performance.

- Le troisième apport est d'élargir le champs d'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux *SPN* associés aux systèmes d'attente.

C'est dans ce contexte que se situent les contributions de notre travail dont le but principal est la proposition de modèles pour des systèmes et réseaux de files d'attente, basés sur les formalismes *GSPN* et *MRSPN*. Ces formalismes permettent d'une part d'exprimer, sans restriction, les contraintes de nos systèmes, telles que : la synchronisation, le blocage, l'aspect stochastique, etc. D'autres part, ils nous offrent un cadre unique pour effectuer, à la fois, des analyses qualitatives et des analyses quantitatives. Ainsi, ces formalismes nous ont permis de générer automatiquement les graphes des états des systèmes qu'on a modélisé et nous ont offert un riche moyen pour le calcul des indices de performance.

Cette thèse s'articulera autour de sept chapitres :

- Le **premier chapitre** donne des rappels sur les systèmes d'attente. En effet, nous exposerons les principaux résultats obtenus pour les deux systèmes  $M/M/1$  et  $M/G/1$ , puis ceux obtenus pour les systèmes avec rappels, et enfin ceux obtenus pour les  $QN$  à capacités limitées.
  - Le **deuxième chapitre** est consacré à des rappels de définitions sur les  $PN$ , leurs règles de fonctionnement, leurs propriétés qualitatives ainsi que leurs différentes extensions.
  - Dans le **troisième chapitre** sont données les définitions des différents formalismes des  $SPN$ . Nous nous sommes intéressés particulièrement à la modélisation et à l'analyse des performances à l'aide de ces deux formalismes : *GSPN* et *MRSPN*.
  - Dans le **quatrième chapitre**, nous présentons les définitions et les notions essentielles concernant la théorie de stabilité forte.
  - Le **cinquième chapitre** propose une analyse d'un  $QN$  ouvert à deux stations en tandem avec blocage  $[M/M/1/k_1+1 \rightarrow M/M/1/k_2+1]$ . Cette analyse est basée sur
-

le formalisme  $GSPN$ . L'approche qu'on a proposée a donné une représentation graphique détaillée et a permis de générer la  $CTMC$  sous-jacente. Des résultats numériques exacts pour ce  $QN$  sont obtenus en utilisant la génération et la solution numérique de la  $CTMC$  associée au  $GSPN$  à l'aide d'un algorithme que nous avons construit sous Matlab.

- Dans le **sixième chapitre** est établie la modélisation et l'analyse des performances des deux systèmes d'attente  $M/G/1//N$  avec rappels et  $M/G/1//N$  avec rappels et recherche orbitale. En effet, nous utilisons l'approche introduite par H. Choi basée sur la théorie des processus semi-régénératifs (Markov régénérative process, "MRP"). Nous avons mis en évidence les deux chaînes de Markov induites (Embedded Markov Chain, "EMC") associées. Les indices de performance des deux  $MRSPN$  proposés pour ces deux systèmes avec rappels sont calculés par un algorithme que nous avons élaboré sous Matlab.
- Dans le **septième chapitre**, nous établissons la stabilité forte du modèle  $IMRSPN$  (Infinite Markov Regenerative Stochastic Petri Nets) associé au système  $M/G/1$  après perturbation de la durée de franchissement de la transition qui modélise le service. Nous montrons que sous certaines hypothèses les caractéristiques correspondantes au modèle  $IMRSPN$  associé au système  $M/G/1$  peuvent être approximées par celles du modèle  $IGSPN$  associé au système  $M/M/1$ . Ainsi, un algorithme est établi. Ce dernier, permet de vérifier les conditions de stabilité et d'estimer l'erreur induite par l'approximation réalisée.

Cette thèse se termine par une conclusion générale, une présentation des perspectives à court et à long terme et enfin une bibliographie.

# Chapitre 1

---

## Files et réseaux de files d'attente

---

### 1.1 Introduction

Les systèmes d'attente (files d'attente et  $QN$ ) ont une très grande importance car ils servent à modéliser des systèmes physiques ; ils permettent d'évaluer leurs performances et mieux comprendre leur comportement [71, 61]. Les systèmes d'attente ont été largement utilisés pour l'évaluation de performance des systèmes à événements discrets tels que : les systèmes informatiques, les réseaux de communication, les systèmes de production, etc. Dans ce chapitre, nous allons présenter le formalisme des files et réseaux de files d'attente. En effet, en premier lieu, nous allons présenter les éléments essentiels de quelques systèmes classiques de files d'attente dont l'étude nous sera nécessaire pour la compréhension des prochains chapitres. En second lieu, nous donnerons quelques principaux résultats des files d'attente avec rappels sur lesquels se basent une partie de notre travail, puis, quelques sections seront dédiées aux  $QN$  et plus particulièrement aux  $QN$  à forme produit. Enfin, ce chapitre sera clôturé par la présentation des  $QN$  à capacités limitées.

## 1.2 Systèmes de files d'attente

Les origines de la théorie des file d'attente remontent à 1909 à l'époque où l'ingénieur électricien danois A. K. Erlang [71] a posé les bases de ses recherches sur la gestion des réseaux téléphoniques de Copenhague. Ses recherches ont par la suite été intégrées à la recherche opérationnelle mais les publications sur la théorie des files d'attente ont adapté un langage de plus en plus mathématique, ce qui a freiné son utilisation. Toutefois, la situation a changé quand les gens ont commencé à appliquer la théorie des files d'attente à l'évaluation de performance. Les files d'attente se rencontre en permanence dans la vie courante : à un guichet, dans un atelier de fabrication, dans une central téléphonique, etc.

Le modèle d'un système d'attente classique peut être tout simplement résumé comme suit : " les clients arrivent à un endroit et réclament un certain service". Les instants d'arrivées et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires. Si le serveur est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers le service, sinon il prend sa place dans une file d'attente (voir la FIGURE 1.1).

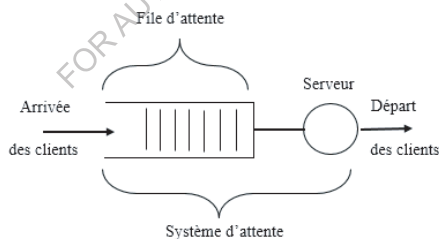


FIGURE 1.1: File d'attente classique.

Pour la classification des systèmes de file d'attente, on fait recours à une notation symbolique "notation de Kendall [106]" comprenant six symboles rangés dans l'ordre :

$$A/B/S/N/K/D,$$

où :

- $A$  : indique la distribution des temps des inters-arrivées ;
- $B$  : dénote la distribution des temps de service ;
- $S$  : est le nombre de serveurs ;
- $N$  : est la capacité du système ;
- $K$  : est la taille de la population ;
- $D$  : est la discipline de service (*FIFO*, *LIFO*, ...).

Les symboles les plus utilisés pour  $A$  et  $B$  sont :  $M$  (loi sans mémoire),  $G$  (loi générale),  $D$  (loi constante),  $E_k$  (loi Erlang à  $k$  étages),  $H_k$  (loi hyper-exponentielle d'ordre  $k$ ), etc.

### 1.3 Quelques systèmes de files d'attente classiques

Dans cette section, nous allons nous limiter à la présentation des principaux résultats des deux systèmes classiques  $M/M/1$  et  $M/G/1$  dont on aura besoin dans la suite de ce manuscrit.

#### 1.3.1 Système $M/M/1$

Une file d'attente  $M/M/1$  est un système formé d'une file à capacité infinie et d'un serveur unique. Les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  (i.e. le temps d'inter-arrivées est une variable aléatoire de distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ ). Le temps de service est distribué selon une loi exponentielle de paramètre  $\mu$  du fonction de répartition " $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ,  $x \geq 0$ ". La *CTMC* associé à la file d'attente  $M/M/1$  est donné dans la FIGURE 1.2 suivante.

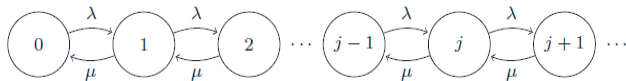


FIGURE 1.2: *CTMC* du système  $M/M/1$ .

Le générateur infinitésimal  $Q = [q_{ij}]$  associé à cette CTMC est donné par :

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & \text{si } i = 0, j = 0; \\ \mu, & \text{si } i \geq 1, j = i - 1; \\ -(\lambda + \mu), & \text{si } i \geq 1, i = j; \\ \lambda, & \text{si } i \geq 0, j = i + 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La distribution stationnaire du système  $M/M/1$  existe si  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ . Par la résolution du système d'équations linéaires :  $\pi Q = 0$  et  $\pi \mathbf{1} = 1$ , on obtient :

$$\pi_j = (1 - \rho)\rho^j, j \geq 0.$$

### 1.3.2 Système M/G/1

Dans le système  $M/G/1$ , la durée des inter-arrivées est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et les durées de service des clients sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de probabilité de fonction de répartition  $H$  et de moyenne  $1/\mu$ . Plusieurs méthodes ont été proposées pour étudier un tel système (méthode des étapes d'Erlang, méthode de l'EMC, méthode des variables supplémentaires, méthode des événements fictifs, méthode d'approximation, simulation, etc.) [109].

#### ► EMC du système M/G/1

Nous introduisons le processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  qui représente le nombre de client dans le système  $M/G/1$  à l'instant  $t$ . Le processus  $M/G/1$  n'est pas markovien. Pour le rendre markovien, nous utiliserons la méthode de l'EMC. Soit le processus à temps discret  $X_n = X(t_n)$  où  $t_n$  est l'instant où le  $n^{\text{ième}}$  client a terminé son service et quitte le système. Soient les  $A_n$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que  $A_n$  est le nombre de clients arrivants pendant le  $n^{\text{ième}}$  service avec la distribution :

$$P(A_n = k) = a_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} dH(t).$$

L'équation fondamentale de l'*EMC* est donné par :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + A_{n+1} - 1, & \text{si } X_n \geq 1; \\ A_{n+1}, & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

La variable  $X_{n+1}$  ne dépend que de  $X_n$  et de  $A_{n+1}$  et non des valeurs de  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0$ .

La variable  $\{X_n, n \geq 0\}$  ainsi définie est une *EMC* du processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ . Les probabilités de transition  $P_{ij} = P\{X_{n+1} = j / X_n = i\}$  de l'*EMC*  $\{X_n, n \geq 0\}$ , sont données par :

$$P_{ij} = \begin{cases} a_j, & \text{si } j \geq 0, i = 0; \\ a_{j-i+1}, & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisqu'on peut passer de chaque état à n'importe quel autre état, il s'agit par conséquent d'une *EMC* irréductible dont on peut montrer la convergence vers une distribution limite si la condition  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  est vérifiée.

Supposant que  $\rho < 1$  et soit  $\nu$  la distribution stationnaire de l'*EMC*  $\{X_n, n \geq 0\}$ , il ne sera généralement pas possible de calculer  $\nu$  analytiquement mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante,  $\nu(z)$  :

$$\nu(z) = \tilde{h}(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(z - 1)}{z - \tilde{h}(\lambda - \lambda z)}; \quad (1.1)$$

où,  $\tilde{h}$  est la transformée de Laplace-Stieltjes de la densité de probabilité du temps de service, et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . La formule (1.1) est connue sous le nom de la formule de Pollaczek-Khinchine.

Les modèles de files d'attente classiques présentent certaines limitations pour modéliser les systèmes réels, pour cela des systèmes spécifiques ont été introduits comme : les systèmes de files d'attente avec rappels, avec priorités, avec impatience, avec rappels et recherche orbitale, avec arrivées par groupes, avec arrivées négatives, etc. Puisque dans cette thèse il sera question d'étudier les systèmes avec rappels, nous présenterons alors ces systèmes dans la section suivante.



## 1.4 Systèmes de files d'attente avec rappels

Les systèmes de files d'attente avec rappels apparaissent dans beaucoup de domaines tels que : les réseaux téléphoniques, les réseaux informatiques et les télécommunications. Ces systèmes sont caractérisés par le fait que les clients qui trouvent tous les serveurs occupés ou non disponibles à leurs arrivées, doivent quitter immédiatement l'espace de service et rappeler ultérieurement. Entre deux rappels successifs le client est dit en orbite. Parmi les premières contributions sérieuses sur les modèles d'attente avec rappels, on trouve celles de : L. Kosten [113], R. I. Wilikinson [166], J. W. Cohen [57], A. Eldin [70] et O. Hashida & K. Kawashima [87]. Ces chercheurs ont découvert que le modèle de file d'attente classique et le modèle d'Erlang avec perte, étaient inadéquats pour expliquer les comportements stochastiques des systèmes téléphoniques dans lesquels les abonnés répètent leurs appels dès la réception du signal occupé. C'est ainsi, que le modèle des files d'attente avec rappels, qui occupe une situation intermédiaire entre le modèle d'Erlang et le modèle de file d'attente classique, a vu le jour. Les progrès récents sont résumés dans les articles de synthèse de : V. G. Kulkarni et H. M. Liang [116], J. G. C. Templeton [163] et dans les monographies de G. I. Falin et J. G. C. Templeton [74], J. R. Artalejo et A. Gómez-Corral [18] et dans les travaux bibliographiques de J. R. Artalejo [14, 15].

La difficulté majeure dans l'étude de ces systèmes est qu'on ne peut pas observer l'orbite et en particulier on n'arrive pas à faire la distinction entre un appel primaire (arrivée d'un client de l'extérieur) et un appel secondaire (arrivée d'un client de l'orbite). De plus, le processus des arrivées dépend à la fois des lois régissant les rappels ainsi que de la loi des arrivées primaires, ce qui prive le processus des arrivées de la propriété de l'indépendance. La principale caractéristique de ces systèmes est l'hétérogénéité spatiale (absence d'homogénéité) causée par les transitions associées aux appels répétés. C'est la raison pour laquelle il est très difficile, si ce n'est impossible, de déduire des formules analytiques exactes pour les probabilités stationnaires et les caractéristiques de performance. Ainsi les chercheurs se sont concentrés principalement sur le développement des algorithmes numériques, des méthodes d'approximation et de la simulation

[19, 14, 35, 82, 123, 159, 43]. En fait, les résultats analytiques détaillés existent pour certaines files d'attente avec rappels particulières, avec des hypothèses contraignantes sur certains paramètres, tels que : la taille de la population, le nombre de serveurs, la fiabilité des serveurs, l'homogénéité des clients, l'homogénéité des serveurs, etc.

La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi quelconque. Dans le cas d'une loi exponentielle, les temps d'inter-rappels peuvent être modélisés par différentes disciplines selon le type d'applications :

- Politique de rappel constant (constant retrial policy) : les intervalles entre deux rappels consécutifs sont indépendants et régies par une loi exponentielle avec un taux  $\alpha$ . Cette politique est introduite par G. Fayolle [75].
- Politique de rappel classique (classical retrial policy) [72, 172] : les intervalles entre les rappels successives sont distribués exponentiellement avec un taux  $i\gamma$  ( $i$  est le nombre de clients dans l'orbite).
- Politique de rappel linéaire (linear retrial policy) [17] : J. R. Artalejo et A. Gómez-Corral combinent les deux politiques précédentes en définissant la politique de rappel linéaire. Ils supposent que les délais entre des rappels successives sont distribués exponentiellement avec un taux  $\sigma_i = \alpha(1 - \delta_{0i}) + i\gamma$ , où,  $\delta_{0i}$  est la fonction de Kronecker.

La plupart des travaux considèrent des modèles avec source (population) infinie de clients et un flux des arrivées primaires poissonnien. Cependant, dans beaucoup de situations pratiques, il est important de prendre en compte le fait que le taux de génération des nouveaux appels primaires décroît quand le nombre de clients dans le système croît. Ceci peut se faire en considérant des modèles ayant une source finie de clients, ou bien des modèles à entrée quasi-aléatoire (quasi-random input models). Dans une telle description, la probabilité d'une nouvelle arrivée durant tout intervalle  $(t, t + dt)$  est donnée par  $\lambda(N - i - j)dt + o(dt)$  quand  $dt \rightarrow 0$ , si le client est libre à l'instant  $t$ , et zéro si le client est en orbite ou en cours de service à l'instant  $t$ , et ce indépendamment du comportement de tous les autres clients.

Les files d'attente classiques avec une population finie ont été étudiées en détail par H. Takagi [162]. Pour la première fois, les systèmes d'attente  $M/M/s//N$  avec rappels

a été traité par Y. N. Kornyshev [112]. Depuis ce premier article, d'autres chercheurs se sont intéressés au domaine vu son importance, voir : [13, 161, 101, 73]. Les modèles avec rappels et source finie apparaissent dans la modélisation et l'analyse des performances des systèmes à disque-mémoire magnétique, des réseaux mobiles cellulaires et des réseaux LAN (Local Area Network) avec le protocole CSMA/CD (Carrier Sense Multiple Access/Collision Detect) [101, 121].

### 1.4.1 Système $M/G/1//N$ avec rappels

On considère un système d'attente semi-markovien à source finie  $N$  (avec  $2 \leq N < +\infty$ ). Les clients (appels primaires) arrivent suivant un processus quasi-aléatoire de taux  $\lambda$ . Le service des clients est assuré par un seul serveur. La durée de service est une loi générale de fonction du répartition  $H(x)$  à transformée de Laplace-Stieltjes  $\tilde{h}(x)$ . A l'arrivée d'un client, si le serveur est occupé, le client entre en orbite. Sinon, le client sera pris en charge par le serveur. Les clients en orbite répètent leurs appels jusqu'à ce que le serveur soit libre et ceci avec un taux de rappel  $\gamma$  qui dépend du nombre de clients en orbite (politique de rappel classique). Ce système est schématisé dans la FIGURE 1.3 suivante.

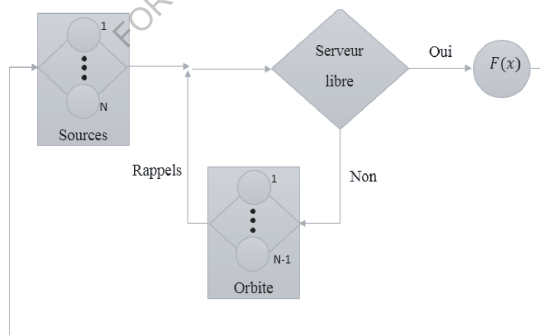


FIGURE 1.3: Système  $M/G/1//N$  avec rappels classiques.

Le système  $M/G/1//N$  avec rappels a été étudié par plusieurs auteurs. A. G. de Kok [63], à l'aide de la théorie des processus régénératifs, a obtenu un schéma récursif pour

calculer les distributions stationnaires. H. Ohmura et Y. Takahashi [138] ont obtenu des formules de récurrence pour calculer la distribution stationnaire de l'état du serveur et de la longueur de l'orbite à l'aide de la méthode des variables supplémentaires et des transformations discrètes. La distribution de nombre d'appels répétés d'un client a été étudiée par V. I. Dragieva [65]. Une approche d'entropie "maximum entropy approach" pour le système  $M/G/1//N$  avec rappels peut être trouvée dans J. R. Artalejo et A. Gómez-Corral [16]. D'autres variantes du modèle  $M/G/1//N$  avec rappels ont été traitées. En effet, H. Li et T. Yang ont considéré le système  $M/G/1//N$  avec rappels et vacances, ils ont construit un algorithme pour calculer la distribution stationnaire de l'état du serveur et de la longueur de l'orbite [121]. Le papier de W. Jinting et al concerne l'analyse du système  $M/G/1//N$  avec rappels dans lequel le serveur est sujet à des pannes et des réparations [102].

#### 1.4.2 Système $M/G/1//N$ avec rappels et recherche orbitale

Dans les systèmes avec rappels, il arrive que le serveur est suivie par un temps d'inactivité en raison de l'ignorance de son état. Nous sommes intéressés aux systèmes d'attente à source finie avec rappels qui réduit le temps d'inactivité du serveur, on introduisant le mécanisme de "recherche orbitale". La recherche orbitale consiste à la recherche de clients immédiatement après la fin de service. On parle alors de systèmes avec rappels et recherche orbitale.

On considère le système non-markovien à source finie et recherche orbitale. A la fin de service d'un client, le serveur recherche un client dans l'orbit avec une probabilité  $p$  "il sera occupé", sinon le serveur reste libre avec une probabilité  $(1 - p)$ , jusqu'à ce qu'un appel primaire où secondaire arrive. On suppose que le temps de recherche des clients est négligeable. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux  $i\gamma$ . La durée de service est de loi générale de distribution  $H(x)$ , de transformée de Laplace-Stieltjes  $\tilde{h}(x)$ , (voir la FIGURE 1.4).

La recherche des clients après chaque fin de service a été premièrement introduit par M. F. Neuts et M. F. Ramalhoto [137]. Les travaux qui prennent en considération le phénomène de recherche orbitale sont assez limités et dans la plupart des cas les

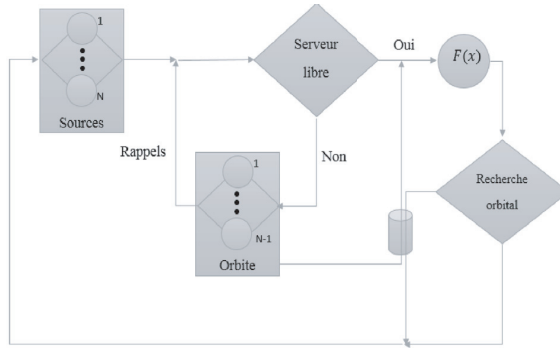


FIGURE 1.4: Système  $M/G/1//N$  avec rappels est recherche orbitale.

auteurs supposent que la source est infinie [19, 48, 67]. En ce qui concerne les modèles avec rappels, source finie et recherche orbitale, les travaux sont plus rares. Le modèle markovien  $M/M/1//N$  avec rappels et recherche orbitale à été étudié récemment par P. Wüchner [168]. A cause de la propriété d'absence de mémoire des distributions exponentielles des variables aléatoires de ce modèle, le processus  $(C(t), N(t))$ , où  $C(t)$  représente l'état du serveur à l'instant  $t$  et  $N(t)$  est le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ , est une CTMC à espace d'états finie. Les distributions stationnaires et les caractéristiques de ce modèle sont obtenues numériquement à l'aide de l'outil MOSEL-2 (Modeling, Specification and Evaluation of Language, version2). En particulier, dans [170], les auteurs discutent sur le temps de réponse moyen maximal qui apparaît dans le système  $M/M/s//N$  avec rappels et recherche orbitale. Pour des résultats relatifs au modèle  $M/M/s//N$  avec rappels et recherche orbitale voir les deux articles [48, 169]. Dernièrement, P. Wüchner et al se sont intéressés à l'analyse des modèles non-markoviens avec une source finie et recherche orbitale [171]. Les résultats sont obtenus par l'approximation de la distribution de temps de service de loi générale par une distribution de type-phase. Cette approximation est faite pour transformer le processus sous-jacent en une chaîne de Markov. Cependant, cette approximation au niveau de la fonction de distribution laisse beaucoup de questions sur l'exactitude des indices de performance obtenus.

Dans les deux sections précédentes, nous avons introduit les notations et les caractéristiques d'une file d'attente. Toutefois, la majorité des systèmes réels sont assez complexes pour qu'ils soient modélisés par une seule file d'attente, d'où la notion de  $QN$ .

## 1.5 Réseaux de files d'attente

Un  $QN$  est un ensemble de files d'attente interconnectées. Le séjour d'un client dans un  $QN$  consiste à parcourir une partie ou l'ensemble de toutes ces files d'attente. Le besoin des  $QN$  est apparu dans les années 70 pour étudier les performances des systèmes informatiques et télématiques. La définition d'un  $QN$  requiert d'une part la définition de toutes les files qui le constituent et d'autre part la définition du routage entre ses files. En effet, lorsqu'un client arrive dans le  $QN$  où termine son service à une station  $i$ , il faut préciser où ce client va se rendre : soit à une autre station  $j$ , soit à l'extérieur [45]. Plusieurs types de routage existent : Routage probabiliste, Routage dynamique et Routage cyclique.

Les  $QN$  sont classés en deux catégories principales  $QN$  mono-classes et  $QN$  multi-classes. Dans le cas de  $QN$  mono-classes, on fait également la distinction entre :  $QN$  ouverts et  $QN$  fermés.

- Dans un  $QN$  ouvert, les clients arrivent de l'extérieur, circulent à travers les noeuds et quittent le  $QN$ .
- Dans un  $QN$  fermé, il y a un nombre fixe de clients circulant à travers les noeuds sans qu'il n'y ait ni des arrivées ni des départs de clients du  $QN$ .

Dans le cas de  $QN$  multi-classes, il faut préciser pour chaque classe de clients s'il s'agit d'une classe ouverte ou d'une classe fermée. Si toutes les classes de clients sont des classes ouvertes, on parlera de  $QN$  purement ouverts et si toutes les classes de clients sont des classes fermées, on parlera de  $QN$  purement fermés. Un  $QN$  parcouru à la fois par des classes ouvertes et des classes fermées sera qualifié de  $QN$  mixte.

Peu de  $QN$  ont une solution simple. Ceci provient de la difficulté d'étudier les propriétés des flux, à l'intérieur du  $QN$ . Les mieux étudiés sont les  $QN$  à forme produit.

---

### 1.5.1 Réseaux de files d'attente à forme produit

Il existe une classe spécifique de  $QN$ , ayant une structure spéciale permettant d'obtenir la solution sans générer l'espace d'états sous-jacent. Cette classe est connue sous le nom de  $QN$  à forme produit ( $QN$  séparable). Un  $QN$  à forme produit est un  $QN$  dont la distribution stationnaire est le produit des distributions stationnaires des files d'attente en isolation. Cette classe contient plusieurs types, nous citons :

#### ► Réseaux mono-classe à forme produit

##### ★ Réseaux de Jackson

J. R. Jackson [100] a trouvé une solution à forme produit pour une classe des  $QN$ , appelée  $QN$  de Jackson. Il s'agit du premier développement significatif dans la théorie des  $QN$  à forme produit. Un  $QN$  de Jackson est un ensemble de  $M$  stations comportent :

- Une seule classe de clients ;
- Des processus d'arrivées externes des clients dans le système poissonniens ;
- Un seul serveur à chaque station ;
- Un temps de service exponentiel à chaque station ;
- Une capacité de stockage illimitée à toutes les stations ;
- Une discipline de service *FIFO* pour toutes les files ;
- Des routages probabilistes.

La condition de stabilité (ergodicité géométrique) est liée aux taux d'arrivée  $\lambda$  des clients dans le  $QN$ , aux taux de service  $\mu_i$  et au cheminement des clients. Pour cela, le taux d'arrivée des clients à la station  $i$  est  $\lambda_i = e_i \lambda$ . Les taux de visites  $e_i$  sont les solutions du système d'équations (équations du trafic) suivant :

$$e_i = r_{0i} + \sum_{j=1}^M e_j r_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Ainsi, la condition de stabilité du  $QN$  de Jackson est :  $\lambda_i < \mu_i, i = \overline{1, M}$ .

La solution de ce système d'équations est donnée par le théorème de J. R. Jackson suivant :

**Théorème 1** *Sous la condition de stabilité  $\lambda_i < \mu_i, i = \overline{1, M}$ , la probabilité stationnaire du*

$QN$  de Jackson possède la forme produit suivante :

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^M \pi_i(n_i) = \prod_{i=1}^M (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i};$$

où,  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$  et  $\pi_i(n_i)$  est la probabilité stationnaire d'une file  $M/M/1$ .

Le théorème de J. R. Jackson a été étendu au cas de stations multi-serveurs. Si on considère  $s_i$  le nombre de serveurs de la station  $i$ . Chacun de ces serveurs est exponentiel et de même taux  $\mu_i$ . La condition d'ergodicité géométrique du  $QN$  dans ce cas est  $\lambda_i < s_i \mu_i, i = \overline{1, M}$ . Sous cette condition, le  $QN$  est équivalent à un ensemble de files  $M/M/s$  et sa probabilité stationnaire  $\pi(n) = \prod_{i=1}^M \pi_i(n_i)$ , où  $\pi_i(n_i)$  est la probabilité stationnaire d'une file  $M/M/s$ . Pareillement, une autre extension au cas de stations à taux de service dépendant de l'état  $\mu_i(n_i)$  a été apportée aux  $QN$  de Jackson.

#### ★ Réseaux de Gordon Newell

W. J. Gordon et F. Newell ont montré que les  $QN$  fermés ( $QN$  de Gordon Newell) possèdent une distribution stationnaire [83]. Ils ont fait les mêmes prétentions que dans les  $QN$  ouverts, sauf que aucun client ne peut entrer ou quitter le système. Cette restriction signifie que le nombre de clients  $K$  présents dans le système est toujours constant,  $K = \sum_{i=1}^M n_i$  (contrainte de population), où  $n_i$  est le nombre de clients dans la file d'attente  $i$ . Le nombre d'états possibles est fini et il est égal au coefficient binomial suivant  $C_{M+K-1}^{M-1}$ . Dans ces  $QN$ , l'ergodicité géométrique est vérifiée et ce suite à la contrainte de population. Les équations d'états se déduisent plus simplement que dans le cas ouvert et la probabilité stationnaire est donnée par le théorème de W. J. Gordon et F. Newell suivant :

#### **Théorème 2 [83]**

La probabilité stationnaire d'un  $QN$  de Gordon Newell est sous la forme produit suivante :

$$\pi(n) = \frac{1}{G(M, K)} \prod_{i=1}^M f_i(n_i);$$

où,  $f_i(n_i) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$  et  $e_i = \sum_{j=1}^M e_j r_{ji}$  est le taux de visite de la station  $i$ .

$G(M, K) = \sum_{E(M, K)} \prod_{i=1}^M f_i(n_i)$ , avec  $E(M, K) = \{n = (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_M) / \sum_{i=1}^M n_i = K\}$ , est la constante de normalisation.



Comme dans le cas ouvert, le théorème de W. J. Gordon et F. Newell a été étendu au cas de stations multi-serveurs.

#### ► Réseaux à forme produit classiques

Les principaux  $QN$  à forme produit classiques sont ceux décrit dans F. Baskett et al [31], F. P. Kelly [105], K. M. Chandy et al [50], ils peuvent être ouverts, fermés ou mixtes. Au début des années soixante-dix, F. Baskett, K. M. Chandy, R. Muntz et F. Palacios ont introduit les  $QN$  portant leurs nom *BCMP* et qui gardent la solution à forme produit à l'état d'équilibre en introduisant différentes classes de clients et de nouvelles disciplines de service.

Malgré le nombre important de solutions pour les  $QN$  à forme produit, la plupart des systèmes en pratique ne peuvent pas être modélisés par des  $QN$  à forme produit. C'est pourquoi, de nombreuses méthodes approximatives d'évaluation de performance des  $QN$  non à forme produit ont été développées, telles que : la méthode de diffusion, la méthode de décomposition-agrégation, les méthodes itératives, la méthode d'isolation, les méthodes de décomposition, etc.

### 1.5.2 Réseaux de files d'attente à capacités limitées

Les différentes stations du  $QN$  peuvent avoir des capacités limitées. Ce type de  $QN$  est appelé  $QN$  à capacités limitées ( $QN$  avec blocage) [27]. Les  $QN$  à capacités limitées sont très utilisés pour représenter des systèmes informatiques, les systèmes de communication et les systèmes de production. Par exemple, l'aspect capacité limitée est important pour les systèmes de production où la taille des stocks est un paramètre essentiel à prendre en compte. Dans la littérature il y a deux principales configurations des  $QN$  ouverts à capacités limitées : configuration en tandem, configuration en arbre (Merge et Split).

Lorsqu'une file est pleine, plus aucun client ne peut y entrer. Cela introduit des blocages dans les autres stations en amont et éventuellement des pertes de clients à l'entrée du système si celui-ci est ouvert. Le mécanisme de blocage a un grand impact sur les mesures de performance des  $QN$ , ignorant ce mécanisme peut conduire à des erreurs significatives. Ainsi, il est important de prendre en compte le mécanisme de

blocage, lorsque nous analysons les  $QN$  à capacités limitées. Plusieurs mécanismes de blocage sont considérés dans la littérature. Ces différents mécanismes surviennent lors de différentes études de systèmes réels. Les plus couramment utilisés sont les suivants :

- Blocage avant service (Blocking Before Service, "BBS") [77] : dans un blocage avant service (ou blocage de type réseau de communication), un client voulant commencer son service à une station donnée doit tout d'abord s'assurer qu'il y a une place libre dans la station de destination. Si c'est le cas, son service commence. Dans le cas contraire, le serveur de la station est bloqué et le client doit attendre la libération d'une place en aval avant de commencer son service.
- Blocage après service (Blocking After Service, "BAS") [143] : dans un mécanisme de blocage après service (ou blocage de type système de production), un client commence son service dès l'instant où le serveur est disponible. Ce n'est qu'à la fin de son service qu'un blocage peut survenir. Si la station de destination est pleine, le client reste au niveau du serveur qui se trouve alors bloqué, jusqu'à ce qu'une place se libère en aval (dans la station suivante).
- Blocage répétitif (Repetitive Service Blocking, "RSB") [47] : dans un blocage répétitif, le client qui trouve la station suivante pleine recommence son service en entier, jusqu'à ce qu'il puisse entrer dans la station suivante.

D'autres mécanismes de blocage sont considérés dans la littérature (voir à titre d'exemple [91, 145]). Des comparaisons entre ces mécanismes de blocage peuvent être consultées dans [141]. Des synthèses détaillées sur l'étude de tels systèmes ont été données dans H. G. Perros [144], Y. Dallery et B. Gershwin [61], S. Balsamo et al [28, 30] et R. Onvural [140]. Les  $QN$  à capacités limitées sont difficiles à étudier. Le blocage engendre des interdépendances entre les stations. Des solutions exacts à forme produit étaient obtenues uniquement pour les  $QN$  fermés avec blocage et des topologies spécifiques [7, 8]. Les méthodes présentées dans la littérature pour l'analyse des  $QN$  à capacités limitées sont : les méthodes d'approximation [60, 165], les méthodes numériques et la simulation. Certaines méthodes d'approximation sont basées sur la notion de décomposition. Cette notion stipule que le  $QN$  va se décomposer en sous- $QN$  et chaque sous- $QN$  sera analysé séparément [89].

---

### ► Réseaux de files d'attente ouverts en tandem à capacités limitées

L'analyse des  $QN$  ouverts en tandem à capacités limitées est difficile. En particulier, les modèles ne sont généralement pas à forme produit. Il est très difficile, si ce n'est impossible, de déduire des formules analytiques exactes pour les probabilités stationnaires et les caractéristiques de tels  $QN$ . Vu la complexité pour résoudre le système d'équations de balance par une méthode analytique-exacte, on fait appel à des méthodes approximatives. L'une des approches d'analyse de ces  $QN$  est de trouver numériquement les probabilités stationnaires du processus associé à ces  $QN$ . Cependant, la complexité de cette approche numérique limite son application à de petits  $QN$ .

Un  $QN$  ouvert en tandem à capacités limitées a été étudié initialement par G. C. Hunt [93]. L'étude des  $QN$  ouverts à capacités limitées a été traité en 1965 par B. Avi-Itzhak et M. Yadin [22] et en 1993 par H. T. Papadopoulos et M. E. J. Ø'Kelly [142]. Dans leurs travaux, ils présentent l'analyse de deux files en tandem avec blocage, sans file intermédiaire. D'autres publications sur les  $QN$  ouverts à deux stations en tandem avec blocage ont été établies en utilisant différentes techniques d'analyse [27, 9, 110, 135]. Les différentes variantes de  $QN$  ouverts en tandem à capacités limitées ont été traitées, incluent :  $QN$  avec feed-back [156],  $QN$  avec rappels [68, 107, 23],  $QN$  avec priorité [119, 115],  $QN$  multi-servers [114], etc . Il existe une littérature abondante sur l'étude des  $QN$  avec blocage, le lecteur est référé aux travaux [81, 146, 145] et les références qu'ils contiennent.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé un bref rappel sur les systèmes et réseaux de files d'attente lié à la thématique de notre travail de recherche. Ainsi, en premier lieu, nous avons présenté les deux modèles  $M/M/1$  et  $M/G/1$ . En second lieu, une étude détaillée des deux modèles  $M/G/1//N$  avec rappels et  $M/G/1//N$  avec rappels et recherche orbitale est réalisée. Par la suite, une partie de ce chapitre est dédiée aux  $QN$ . Particulièrement, un accent est mis sur les  $QN$  à capacités limitées. Le chapitre qui suivra va porter sur l'outil  $PN$ .

## Chapitre 2

---

# Réseaux de Petri (PN) : Définition et concepts de base

---

### 2.1 Introduction

Les  $PN$  sont aujourd'hui largement utilisés pour la modélisation et l'analyse de systèmes à événements discrets (les systèmes manufacturiers, les systèmes de télécommunication, les réseaux de transport, etc). Le succès de cette utilisation est dû à de nombreux facteurs [148], parmi lesquels nous pouvons relever : leur simplicité de compréhension, leur nature graphique et la possibilité de disposer d'un arsenal de résultats mathématiques analytiques. Ces facteurs, permettent aux  $PN$  de modéliser le comportement de systèmes à événements discrets et de représenter divers phénomènes qui les caractérisent, à savoir, le parallélisme, la synchronisation, le partage de ressources, etc. Pour plus d'approfondissement sur les  $PN$ , nous orientons le lecteur à consulter l'ouvrage de H. Alla et R. David [62] et l'article de synthèse de T. Murata [133].

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les définitions et les concepts de base des  $PN$ . On commencera par la définition des  $PN$  et leurs principes d'évolution. On donnera, par la suite, certaines propriétés qualitatives des  $PN$  et leurs analyses. Enfin, nous conclurons par quelques extensions des  $PN$ .

## 2.2 Concepts de base

Un *PN* est un outil graphique et mathématique décrivant les relations entre des conditions et des événements d'un système étudié.

### Définition 1 [Réseau du Petri]

Un *PN* est un graphe bipartite orienté constitué de places, de transitions et d'arcs qui relient les transitions aux places et les places aux transitions. Formellement un *PN* est un 4-uplet,  $\aleph = (P, T, Pre, Post)$  [133], où :

- $P$  est l'ensemble fini des places  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ , avec  $m = |P|$ ;
- $T$  est l'ensemble fini des transitions  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , avec  $n = |T|$ ;
- $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application d'incidence avant.  $Pre(p_i, t_j)$  contient la valeur entière (valuation, poids, multiplicité) associée à l'arc allant de la place  $p_i$  à la transition  $t_j$ ;
- $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application d'incidence arrière;  $Post(p_i, t_j)$  contient la valeur entière associée à l'arc allant de la transition  $t_j$  à la place  $p_i$ .

### Définition 2 [Marquage]

Un marquage  $M_1$  d'un *PN* est une application,  $M_1 : P \rightarrow \mathbb{N}$ , qui associée à chaque place  $p_i \in P$  du *PN*  $M_1(p_i)$  jetons (marques). Le marquage initial, noté  $M_0$ , donne pour chaque place le nombre initial de jetons.

### Définition 3 [PN marqué]

Le couple  $(\aleph, M_0)$  est dit *PN marqué*.

Graphiquement, les places d'un *PN* sont représentées par des cercles, les transitions par des rectangles (ou des traits) et les arcs par des flèches. Les applications d'incidences avant  $Pre$  et arrière  $Post$  sont représentées par des arcs pondérés et orientés entre une place et une transition. Les arcs de valuation nulle ne sont pas représentés, les valuations qui sont égales à 1 sont omises, dans tous les autres cas la valuation est explicitement indiquée. Le marquage initial est donné par un nombre à l'intérieur de chaque place ou des points lorsque le nombre est suffisamment petit.

**Exemple 1** La FIGURE 2.1 illustre la représentation graphique d'un *PN marqué*. Ce *PN* défini par  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  i.e.  $|P| = 4$ ,  $T = \{t_1, t_2, t_3\}$  i.e.  $|T| = 3$ ,  $Post(t_1, p_2) = 1$ ,

$Post(t_1, p_3) = 1, Post(t_2, p_1) = 1, Post(t_3, p_1) = 1, Post(t_3, p_4) = 2, Pre(p_1, t_1) = 2,$   
 $Pre(p_2, t_2) = 1, Pre(p_3, t_3) = 1, Pre(p_4, t_2) = 2.$

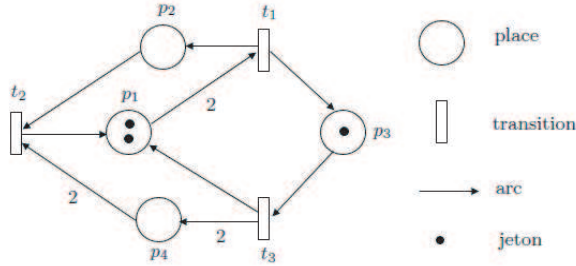


FIGURE 2.1: Représentation graphique d'un PN marqué.

**Remarque 1** L'application  $Pre$  (resp.  $Post$ ) peut être représentée par la matrice d'incidence avant  $C^-$  (resp. arrière  $C^+$ ). Le marquage  $M_l$  peut être représenté par un vecteur non-négatif de dimension égale au nombre de places de  $PN$ . Ce marquage :

$$M_l = (M_l(p_1), M_l(p_2), \dots, M_l(p_i), \dots, M_l(p_{|P|}));$$

est spécifié par un nombre entier  $M_l(p_i)$  positif fini ou nul de marques à l'intérieur de chaque place.

Dans la FIGURE 2.1 de l'exemple précédent on a :

$$M_0 = (2, 0, 1, 0), C^- = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Définition 4 [Sensibilisation d'une transition] [62]**

Une transition  $t_i$  est dite sensibilisée (franchissable, tirable, activée, validée) pour un marquage  $M_l$  si et seulement si :

$$\forall p_j \in P : M_l(p_j) \geq Pre(p_j, t_i);$$

cela sera noté  $M_l[t_i >$ ,

i.e.  $t_i$  est sensibilisée pour  $M_l$  si chaque place d'entrée  $p_j$  de  $t_i$  contient un nombre de jetons supérieur ou égal au poids  $Pre(p_j, t_i)$  de l'arc  $(p_j, t_i)$ .

**Définition 5 [Franchissement d'une transition]**

Le franchissement d'une transition sensibilisée  $t_i$  à partir d'un marquage  $M_l$  conduit au nouveau marquage  $M'_l$ . Le marquage  $M'_l$  est défini par :

$$\forall p_j \in P, M'_l(p_j) = M_l(p_j) + Pre(p_j, t_i) - Post(t_i, p_j),$$

on note  $M_l[t_i > M'_l$ ,

i.e. le franchissement d'une transition  $t_i$  consiste à détruire de chaque place d'entrée de  $t_i$   $Pre(p_j, t_i)$  jetons et à construire  $Post(t_i, p_j)$  jetons dans chaque place de sortie de  $t_i$ .

**Définition 6 [Séquence de franchissement]**

Une suite finie de transitions  $\sigma = t_1 t_2 \dots t_k$  est franchissable à partir du marquage  $M_1$  s'il existe des marquages  $M_2, M_3, \dots, M_k$ , tels que :  $M_1[t_1 > M_2[t_2 > M_3 > \dots > [t_{k-1} > M_k$ . On dit que  $\sigma$  est une séquence de franchissement menant de  $M_1$  à  $M_k$ . On note  $M_1[\sigma > M_k$ .

Une séquence de franchissement  $\sigma$  est décrite sous forme algébrique par un vecteur appelé vecteur caractéristique, noté  $\bar{\sigma}$ . Ce vecteur est de dimension égal à  $n (= |T|)$  et chaque composante  $\bar{\sigma}(t_i)$  donne le nombre d'occurrences de la transition  $t_i$  dans la séquence  $\sigma$ .

Dans l'exemple 1 ;

$M_1[t_1 > M_3[t_3 > M_4[t_1 > M_5$ ,  $\sigma_1 = t_1 t_3 t_1$ , on écrit :  $M_1[\sigma_1 > M_5$  et  $\bar{\sigma}_1 = (2, 0, 1)$ .

$M_3[t_3 > M_4[t_1 > M_5[t_3 > M_6[t_2 > M_4$ ,  $\sigma_2 = t_3 t_1 t_3 t_2$ , on écrit :  $M_3[\sigma_2 > M_4$  et  $\bar{\sigma}_2 = (1, 1, 2)$ .

**Définition 7 [Marquage accessible][173]**

Un marquage  $M_l$  est dit accessible (ou atteignable) depuis le marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissement  $\sigma$  telle que :  $M_0[\sigma > M_l$ .

**Définition 8 [Ensemble des marquages accessibles]**

L'ensemble des marquages accessibles, noté  $A(M_0)$ , est l'ensemble des marquages atteints à

partir du marquage initial  $M_0$  par une séquence de franchissement  $\sigma$ , i.e. :

$$A(M_0) = \{M_i, \exists \sigma \text{ telle que : } M_0[\sigma > M_i]\}.$$

La FIGURE 2.2 décrit tous les marquages du PN donné dans la FIGURE 2.1. L'ensemble des marquages accessibles du ce PN est :

$$A(M_0) = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}.$$

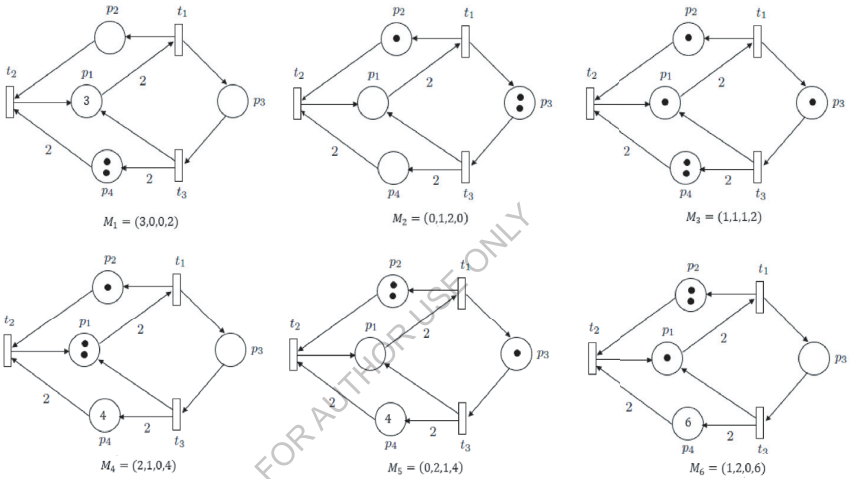


FIGURE 2.2: Marquages possibles du PN donné dans la figure 2.1.

Dans le cas où  $A(M_0)$  est fini, on peut le représenter sous la forme d'un graphe appelé graphe des marquages accessibles.

**Définition 9 [Graphe des marquages accessibles]**

Le graphe des marquages accessibles (graphe d'accessibilité) noté  $GM(M_0)$  est un graphe orienté qui a pour sommets l'ensemble des marquages accessibles  $A(M_0)$ . Un arc relie deux sommets  $M_i$  et  $M_j$  si et seulement si il existe une transition  $t_k \in T$  telle que  $M_i[t_k > M_j$ . Chaque arc est étiqueté par le nom de la transition correspondante.

L'arbre des marquages accessibles (resp. graphe des marquages accessibles) du PN du la FIGURE 2.1 est donné par la FIGURE 2.4.a (resp. la FIGURE 2.4.b).



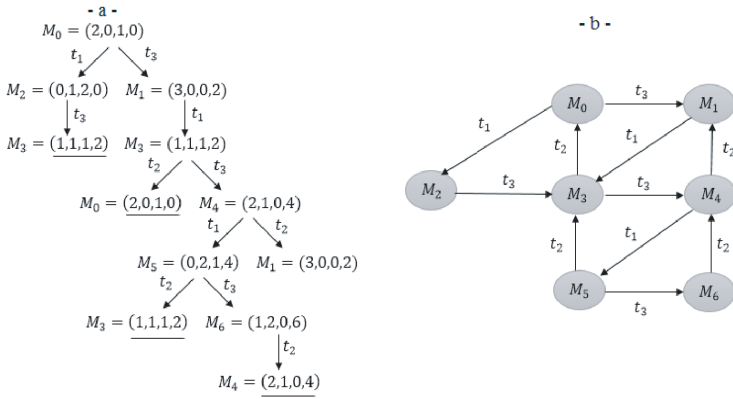


FIGURE 2.3: a) Arbre des marquages accessibles du PN donné dans la figure 2.1 ; b) Graphe des marquages accessibles du PN donné dans la figure 2.1.

**Définition 10 [Matrice d'incidence]**

La matrice d'incidence d'un PN de  $m$  places et  $n$  transitions est une matrice de dimension  $m \times n$ , ces éléments sont donnés par :

$$C(p_i, t_j) = C^+(t_j, p_i) - C^-(t_j, p_i);$$

i.e. l'élément  $C(p_i, t_j)$  représente le changement dans les jetons de la place  $p_i$  dû au franchissement de la transition  $t_j$ .

**Définition 11 [Equation fondamentale][64]**

La relation entre le marquage  $M_i$  et un marquage  $M_j$  atteint depuis  $M_i$  par la séquence de franchissement  $\sigma$ , s'exprime au moyen de l'équation fondamentale des PN :

$$M_j^t = M_i^t + C\sigma,$$

et elle correspond à :  $M_i[\sigma > M_j$ .

Dans l'exemple 1 précédent on a :

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, M_5^t = M_1^t + C \cdot \bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

### 2.3 Pouvoir de modélisation des PN

L'avantage des *PN* réside dans leur capacité à modéliser un grand nombre de comportements dans les systèmes complexes [44, 117]. Parmi ces comportements, nous trouvons le parallélisme, la synchronisation, le partage de ressources, conflit, etc.

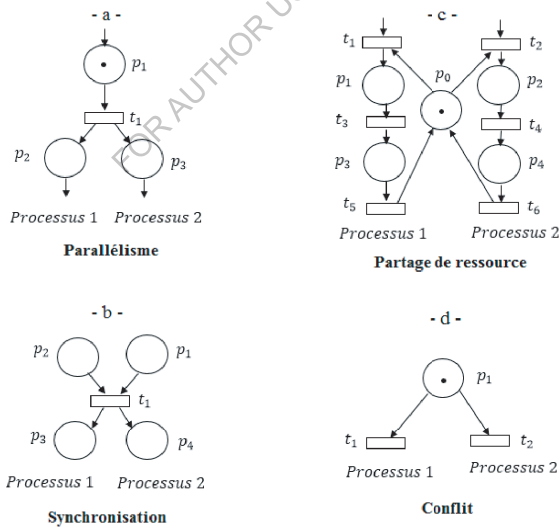


FIGURE 2.4: Quelques structures modélisées par les *PN*.

### ► Parallélisme

Le parallélisme est défini comme l'évolution simultanée de plusieurs processus dans un même système. Dans un  $PN$ , le parallélisme est déclenché avec une transition ayant plusieurs places de sortie, comme présenté dans la (FIGURE 2.4, a). Le franchissement de la transition  $t_1$  consiste à construire un jeton dans les deux places  $p_2$  et  $p_3$ , ce qui produit le déclenchement du processus 1 et du processus 2 en parallèle.

### ► Synchronisation

Elle permet de synchroniser les opérations de deux processus comme le montre la (FIGURE 2.4, b). Pour que la transition  $t_1$  franchisse, il faut que la place  $p_1$  qui correspond au processus 1 et la place  $p_2$  qui correspond au processus 2 contiennent chacune au moins un jeton. Autrement, si par exemple la place  $p_1$  ne contient pas de jetons, le processus 2 est bloqué sur la place  $p_2$  ; il attend que le processus 1 réussisse à obtenir un jeton dans la place  $p_1$  au cours de son évolution.

### ► Partage de ressources

Il s'agit de modéliser le cas de plusieurs processus se partageant une même ressource dans un même système, en utilisant l'exclusion mutuelle. Dans la (FIGURE 2.4, c), le jeton dans la place  $p_0$  représente une ressource commune entre le processus 1 et le processus 2. Après le franchissement de la transition  $t_1$  lors de l'évolution du processus 1, le jeton de la place  $p_0$  est alors consommé. La ressource que constitue ce jeton n'est alors plus disponible pour l'évolution du processus 2. Lors du franchissement de la transition  $t_5$ , un jeton est placé dans la place  $p_0$  et la ressource est de nouveau disponible.

### ► Conflit

Le conflit correspond aux situations où un ensemble de transitions sont validées. La résolution d'un conflit peut se faire d'une manière déterministe ou d'une manière aléatoire. Il existe un conflit structurel et un conflit effectif :

- Conflit structurel : deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont en conflit structurel si et seulement si elles ont au moins une place d'entrée en commun, i.e. :

$$\exists p_i \text{ tel que, } Pre(p_i, t_1).Pre(p_i, t_2) \neq 0.$$

- Conflit effectif : deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont en conflit effectif pour un marquage

$M_l$  si et seulement si elles sont en conflit structurel et que :

$$M_l \geq \text{Pre}(\cdot, t_1) \text{ et } M_l \geq \text{Pre}(\cdot, t_2).$$

Dans la (FIGURE 2.4, d) les deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont en conflit effectif.

## 2.4 Propriétés des PN

Les PN permettent de modéliser des systèmes complexes. En effet, ces derniers doivent répondre à un certain nombre d'exigences (absence de blocage, préservation des fonctionnalités, existence d'un fonctionnement en régime permanent, etc). Un grand nombre de ces exigences peuvent être exprimées à l'aide des propriétés d'un PN. Nous allons définir un certain nombre de propriétés élémentaires des PN. Ces propriétés peuvent être classées en deux catégories : propriétés dynamiques et propriétés structurelles [147].

### 2.4.1 Propriétés dynamiques

Les propriétés dynamiques (bonnes propriétés, propriétés classiques, propriétés usuelles) dépendent du marquage initial et elles sont liées à l'évolution du PN [126]. Elles permettent d'apporter des réponses aux questions concernant l'accessibilité d'un marquage particulier, la bornitude, la vivacité, etc.

#### Définition 12 [Place k-bornée]

Une place  $p_i \in P$  est dite *k-bornée* pour un marquage initial  $M_0$  si et seulement si :

$$\forall M_l \in A(M_0), M_l(p_i) \leq k.$$

Si  $k=1$ , on dit que la place est binaire (sauf, sain).

#### Définition 13 [PN k-borné]

Un PN est dit *k-borné* (ou borné) pour un marquage initial  $M_0$ , si et seulement si toutes ses places sont *k-bornées* (ou bornées).

Le PN 1-borné est appelé PN binaire (sauf).

**Remarque 2** La caractéristique de bornitude d'un PN traduit la finitude du nombre d'états du système qu'il décrit. Lorsque le PN n'est pas borné, le nombre des différents états susceptibles d'être atteints est infini.

**Définition 14 [Transition vivante]**

Une transition  $t_i$  d'un PN est vivante si pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ , il existe une séquence de franchissement  $\sigma$  qui contient  $t_i$  et telle que :  $M_l[\sigma > .$  , c'est-à-dire :

$$\forall M_l \in A(M_0), \exists \sigma \text{ telle que : } M_l[\sigma, t_i > .$$

**Définition 15 [PN vivant]**

Un PN est vivant si et seulement si toutes ses transitions sont vivantes.

**Définition 16 [Absence de blocage]**

Un PN est sans blocage si à partir de tout marquage accessible, il existe au moins une transition franchissable, i.e. :

$$\forall M_l \in A(M_0), \exists t_i \in T, \text{ telle que : } M_l[t_i > .$$

**Définition 17 [Marquage puits]**

Un marquage  $M_l$  est dit marquage puits (mort) si aucune transition n'est franchissable depuis ce marquage.

**Définition 18 [PN sans blocage]**

Un PN est dit sans blocage si tout marquage accessible depuis  $M_0$ , n'est pas un marquage puits.

**Définition 19 [État d'accueil]**

Un PN admet un état d'accueil si seulement si il existe un marquage  $M_a$  vérifiant :

$$\forall M_l \in A(M_0), \exists \sigma \text{ telle que : } M_l[\sigma > M_a;$$

le marquage  $M_a$  est appelé état d'accueil. Autrement dit, un état d'accueil est un état accessible quel que soit l'évolution du PN.

**Définition 20 [PN réinitialisable]**

Un PN est réinitialisable (réversible, propre) pour un marquage initial  $M_0$  si  $M_0$  est un état d'accueil. C'est-à-dire :

$$\forall M_l \in A(M_0), \exists \sigma \text{ telle que : } M_l[\sigma > M_0.$$

### 2.4.2 Propriétés structurelles

Les propriétés structurelles (les invariants) d'un PN sont indépendantes du marquage initial. Elles découlent directement de sa structure (i.e. elles sont liées à sa topologie) [108]. Leur but est de bâtir une passerelle entre la structure du PN étudié et son comportement.

**Définition 21** [*P-invariant*][124]

Un vecteur  $Y$  non nul et non négatif de dimension  $m$  tel que  $Y = (y_1, y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{N}^m$  est appelé un *P-invariant* (invariant de place) si :

$$Y^T \times C = 0.$$

Un *P-invariant* est dit positif (resp. semi-positif) si toutes ses composantes sont strictement positives (resp. positives).

**Définition 22** [*Composante conservative*]

Un ensemble de places  $P' \subset P$  est une *composante conservative* si et seulement si ses places forment un *P-invariant*. C'est-à-dire, le *P-sous-PN* généré par le support de  $Y$  est une *composante conservative*.

**Proposition 1** [*Condition suffisante de bornitude*]

Tout PN admettant un *P-invariant* positif est borné.

**Proposition 2** Soit  $P'$  une *composante conservative* de  $Y$ , alors toutes les places  $p_i$  telles que  $p_i \in P'$  sont bornées.

**Définition 23** [*T-invariant*] [24]

Un vecteur  $X$  non nul et non négatif de dimension  $n$ , tel que  $X = (x_1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$  est appelé un *T-invariant* (invariant de transition) si :

$$C \times X = 0.$$

Un *T-invariant* est dit positif (resp. semi-positif) si toutes ses composantes sont strictement positives (resp. positives).

**Définition 24** [*Composante répétitive*]

Un ensemble de transitions  $T' \subset T$  forme une composante répétitive si et seulement si elles forment un  $T$ -invariant. C'est-à-dire, le  $T$ -sous-PN généré par le support de  $X$  est une composante répétitive.

## 2.5 Méthodes d'analyses des PN

L'un des principaux avantages des modèles fondés sur les PN est qu'ils permettent la mise en œuvre des techniques d'analyse utilisables à différents niveaux d'abstraction. Ces techniques d'analyse permettent de savoir si un système est capable de réaliser l'ensemble des fonctions pour lesquelles il a été conçu et ressortir ainsi toutes les propriétés de ce système. Les méthodes d'analyse peuvent être classées en trois groupes : l'énumération de tous les marquages accessibles, l'algèbre linéaire et la méthode de réduction.

### 2.5.1 Analyse par énumération des marquages

Cette méthode repose sur la génération du graphe des marquages accessibles à partir de son marquage initial  $M_0$ . Elle est très efficace dans la mesure où ce graphe peut être généré et que le nombre de sommets n'est pas trop important [133, 62]. Deux situations peuvent alors se présenter :

- Le graphe des marquages accessibles est fini : c'est la situation la plus favorable car dans ce cas toutes les propriétés du PN peuvent être déduites simplement par inspection de celui-ci.
- Le graphe des marquages accessibles est infini : dans ce cas, il faut donc avoir recours au graphe de couverture pour déduire certaines propriétés. Cependant, le passage au graphe de couverture s'accompagne d'une perte d'informations.

**Proposition 3** *Un PN est borné si et seulement si  $A(M_0)$  est fini.*

La théorie des graphes offre alors tous les outils nécessaires à l'analyse des autres propriétés. En effet, si le PN est borné alors on a les propositions suivantes :

**Proposition 4** *Un PN est réinitialisable si et seulement si son graphe de marquage  $GM(M_0)$  est fortement connexe.*

**Proposition 5** *Le PN est dit vivant si et seulement si toutes ses transitions apparaissent au moins une fois dans chacune des composantes fortement connexes.*

**Proposition 6** *Le PN est avec blocage si et seulement si le graphe des marquages contient un sommet sans successeur.*

## 2.5.2 Méthode d'algèbre linéaire

L'analyse par l'algèbre linéaire permet d'étudier les propriétés d'un PN (bornitude, vivacité, ...) indépendamment du marquage initial [124]. Cette méthode se base sur l'équation fondamentale qui est entièrement déterminée par la matrice d'incidence et par le vecteur caractéristique. Cette méthode est avérée très fructueuse car elle permet de s'affranchir de l'explosion combinatoire du nombre de marquages à laquelle se heurte la technique d'analyse par énumération des marquages. Cependant, la recherche des invariants engendre des problèmes algorithmique importants tels que avoir recours à la programmation linéaire en nombre entier.

## 2.5.3 Analyse par réduction

Lorsque le système à analyser est large, des difficultés peuvent apparaître dans l'utilisation du graphe des marquages accessibles. On s'aperçoit que la taille du modèle augmente très rapidement, donnant ainsi lieu à une infinité d'états. Ce phénomène est connu sous le nom d'explosion combinatoire. Plusieurs auteurs se sont intéressés à réduire le PN à étudié, en définissant une méthode d'analyse qui est basée sur des règles de réduction applicables aux nœuds (places, transitions) du PN [37].

Il existe, en littérature, trois grandes méthodes de réduction : les méthodes de G. Berthelot, les méthodes hiérarchiques au sens de G. Chehaibar et les méthodes basées sur la simplification du graphe des marquages accessibles. La simplicité du principe de la méthode de réduction et son efficacité à réduire le PN analysé ainsi que le graphe des



marquages accessibles correspondant ont fait d'elle un outil précieux d'analyse. Cependant, lors de la simplification d'un  $PN$ , dans certains cas particuliers, on remarque que les opérations de réduction ne conservent pas toutes les bonnes propriétés.

## 2.6 Extensions des PN

Malgré les facilités qu'il offre, le formalisme des  $PN$  classique souffre d'un certain manque de structuration et d'expressivité lorsqu'il s'agit de distinction entre les jetons, ou l'expression de dimension temporelle, etc. Pour y remédier et ainsi augmenter le niveau d'expressivité, les  $PN$  ont connu plusieurs extensions [51], on cite :

### ► PN étendus

Les  $PN$  étendus sont des  $PN$  pour lesquels on a pris en compte la possibilité de décrire ces deux types de comportements, l'arc inhibiteur et la priorité.

### ★ PN à arcs inhibiteurs

Un  $PN$  classique ne permet pas de tester si une place contient moins de  $K$  jetons. Il faut donc enrichir le modèle, on ajoute pour cela un nouveau type d'arc, avec une multiplicité  $K$ , allant d'une place vers une transition appelé arc inhibiteur [64]. Dans le cas  $K=1$ , l'arc inhibiteur permet de réaliser le test à zéro. L'ajout de cet arc apporte effectivement une puissance d'expression. Graphiquement, un arc inhibiteur est symbolisé avec un cercle à son extrémité à la place de la flèche classique (voir la FIGURE 2.5).

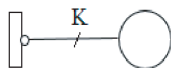


FIGURE 2.5: Arc inhibiteur.

### Définition 25 [Franchissement d'une transition dans un PN à arcs inhibiteurs]

Soit  $M_i$  un marquage d'un PN à arcs inhibiteurs et  $t_j$  une transition :

- La transition  $t_j$  est sensibilisée à partir du marquage  $M_l$  si et seulement si :

$$\forall p_i \in P, M_l(p_i) \geq Pre(p_i, t_j) \text{ et } M_l(p_i) < Inh(p_i, t_j).$$

- Le franchissement de la transition  $t_j$  à partir du marquage  $M_l$  conduit au marquage  $M'_l$  défini par :

$$\forall p_i \in P, M'_l(p_i) = M_l(p_i) - Pre(p_i, t_j) + Post(p_i, t_j).$$

### ★ PN avec priorité

Dans certains types de systèmes, il est nécessaire de pouvoir représenter des événements qui seront prioritaires à d'autres. Pour modéliser ce type de contrainte, on utilise dans les *PN* la notion de priorité. Le principe est d'associer à chaque transition une priorité qui permettra d'empêcher le franchissement de certains transition et de privilégier le franchissement d'autres transitions. Si  $S$  est l'ensemble des transitions franchissables lors d'un certain marquage de *PN* et si la transition avec la plus forte priorité est  $t_k \in S$ , alors toute transition de  $S$  avec une priorité inférieure à celle de la transition  $t_k$  ne pourra être franchie.

#### Définition 26 *PN étendu*

Un *PN étendu* est un tuple  $PNE \triangleq (\aleph, Inh, >, M_0)$ , où :

- $\aleph$  est un *PN* ;
- $Inh : P \times T \rightarrow \mathbb{N}^*$  est l'application d'inhibition qui associée à tout couple  $(p_i, t_j)$  le poids de l'arc inhibiteur reliant la place  $p_i$  à la transition  $t_j$  ;
- $>$  est une relation de priorité entre transitions ;
- $M_0$  est le marquage initial.

#### ► Réseaux de Petri colorés

Les *PN* colorés sont des *PN* dans lesquels les jetons portent des couleurs [10]. Une couleur est une information attachée à un jeton. Cette information permet de distinguer des jetons entre eux et peut être de type quelconque.

#### ► Réseaux de Petri temporisés

Les *PN* temporisés introduisent la notion du temps dans le parcours du *PN* qui permet de décrire un système dynamique dont le fonctionnement dépend du temps [154]. Les temporisations peuvent être associées aux transitions, aux places ou aux arcs.

**► Réseaux de Petri stochastiques**

Les *SPN* ont été introduits pour répondre à certains problèmes d'évaluation de performance faisant intervenir des phénomènes aléatoires [129]. Ainsi, les transitions d'un *SPN* comportent des temps de franchissements aléatoires.

**► Réseaux de Petri continus**

Les *PN* continus ont été introduits pour la modélisation des systèmes dont les flux sont continus [10]. Ils se composent de places et de transitions continus et leur fonctionnement est lié à la notion de vitesse pouvant être constantes ou variables.

**► Réseaux de Petri hybrides**

Les *PN* hybrides qui sont une combinaison de la sémantique des *PN* continus et les *PN* ordinaires [11]. Ils sont adaptés pour la modélisation des systèmes dynamiques hybrides.

## 2.7 Conclusion

Les *PN* constituent un support à la fois graphique et mathématique performant. Ils sont d'une aide précieuse pour le concepteur dans les différentes phases d'analyse d'un système. Une immense démarche de recherche et de développement de cet outil est en cours d'amélioration dans les différents instituts et laboratoires de recherches du monde. Ainsi, dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à cet outil *PN* d'une manière générale en donnant ses définitions, ses propriétés, ses différents formalismes. Le chapitre suivant sera consacré à l'un des formalismes des *PN* qui est les *SPN*.

## Chapitre 3

---

# Réseaux de Petri stochastiques (SPN)

---

### 3.1 Introduction

L'introduction explicite du temps dans les  $PN$  est nécessaire pour modéliser des systèmes où le temps joue un rôle majeur. L'ajout de la notion de temps dans les  $PN$ , nous permet d'effectuer une analyse quantitative du système modélisé comme complément de l'analyse qualitative [117]. Cette question est en fait assez complexe, a reçue différentes réponses selon les applications visées et a donné lieu à la naissance d'un des formalismes les plus importants des  $PN$  qui est les  $SPN$  [55]. Ce dernier formalisme  $SPN$  a été introduit par Florin dès 1978 pour répondre à certains problèmes d'évaluation liés à la sûreté de fonctionnement de systèmes informatiques. Il existe plusieurs classes de  $SPN$ , selon le type de distributions et les politiques associées aux transitions, on distingue : les  $SPN$  à distributions exponentielles (Exponentials Stochastic Petri Nets, " $Ex-SPN$ ") [129, 134], les  $SPN$  à distributions discrètes (Discret Deterministic Petri Nets, " $DDPN$ ") [54], les  $SPN$  généralisés (Generalized Stochastic Petri Nets, " $GSPN$ ") [128], les  $SPN$  et déterministes (Deterministic and Stochastic Petri Nets, " $DSPN$ ") [127], les  $SPN$  étendus (Extended Stochastic Petri Nets, " $ESPN$ ") [69], les  $SPN$  à taux de récompense (Stochastic Reward Petri Nets, " $SRN$ ") [56], les  $SPN$  à distributions de type phase (Phase-type Stochastic Petri Nets, " $PH-SPN$ ") [85], les  $SPN$  markoviens régénératifs (Markov Regenerative Stochastic Petri

Nets, "MRSPN") [53], les *SPN* concurrentiel généralisés (Concurrent Generalized Petri Nets, "CGPN") [149], etc. Une synthèse permettant de caractériser les processus stochastiques sous-jacents aux *SPN* a été présentée dans [55]. Dans ce chapitre, nous présenterons les concepts de base liés aux *SPN*, puis nous détaillerons les modèles que nous avons retenu pour nos études *GSPN* et *MRSPN*. Après une présentation des notions de base des *SPN*, pour chacun des modèles précédent nous insisterons sur la résolution du processus stochastique associé et nous donnerons leurs techniques d'analyse.

## 3.2 Sémantique stochastique des SPN

Une sémantique stochastique (la politique d'exécution, fonctionnement) des *SPN* est définie [125]. Cette politique comprend trois volets : la politique de sélection, la politique de mémoire et la politique de service.

### ► Politique de sélection

Pour un marquage donné, plusieurs transitions d'un *SPN* peuvent être sensibilisées. On distingue deux types différents de politiques de sélection (de choix) de la transition à tirer :

- La politique de compétition "modèle concurrentiel, race policy" : elle autorise le tir de la transition dont la variable aléatoire associée a la valeur la plus petite. Cette politique n'est pas déterministe dans le choix de la transition à tirer si deux transitions sensibilisées par le même marquage ont des variables aléatoires qui ont la même valeur.
- La politique de présélection "preselection policy" : elle permet de définir, de manière statique, des priorités de tir entre les transitions [55]. On peut définir ces priorités soit au niveau du *PN* (poids associés aux transitions), soit au niveau du graphe d'accessibilité (table de switch). La politique de présélection a plusieurs inconvénients : elle est statique (pas de variation avec l'évolution du comportement), lourde à gérer dans le cas des tables de switch et peut souffrir d'erreurs de spécification.

### ► Politique de la mémoire temporelle

La politique de mémoire temporelle spécifie comment le processus de marquage associé au *SPN* est conditionné par rapport à son passé (i.e. elle indique ce que devient le travail déjà réalisé ou bien le temps de tir associé à une transition à chaque changement d'état). Trois politiques de mémoire temporelle ont été introduites pour caractériser les durées de sensibilisation en fonction de l'histoire passée de l'évolution du *SPN*.

- La politique de réinitialisation "resampling" : cette politique ne prend pas en compte le passé du *SPN* ; chaque variable aléatoire est réinitialisée après le tir d'une transition, i.e. il n'y a pas de mémorisation de la durée de sensibilisation, ou se qui est équivalent il y a une remise à zéro à chaque changement d'état du *SPN*.
- La politique de la mémoire de la dernière sensibilisation "enabling memory policy, Preemptive repeat different, *PRD*" : dans cette politique, seule la dernière période de sensibilisation (qui débute au dernier instant de sensibilisation de la transition) est prise en compte, i.e. la durée totale de sensibilisation mémorisée est remise à zéro à chaque désensibilisation de la transition.
- La politique de la mémoire de toutes les sensibilisations "age memory policy, Preemptive Resume, *PRS*" : dans cette politique, toutes les périodes de sensibilisation de la transition sont prises en compte, i.e. elle consiste à mémoriser pour chaque transition la durée totale pendant laquelle elle a été sensibilisée, ceci jusqu'à son tir.

### ► Politique de service

La politique de service (dépendance de marquage) spécifie combien de clients peuvent être servis en parallèle par une transition. Elle est définie autour des concepts de degré de franchissement "e" de  $t_k$  en  $M_i$ , ce qui donne le nombre de fois que la transition  $t_k$  peut être franchie consécutivement à partir de  $M_i$  [126]. Alors, elle indique comment la transition multi-sensibilisées (*e*-validée) se comporte lorsque son degré de franchissabilité "e" est supérieur à 1, où :

$$e = \text{Max}\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } : \forall p \in P, n.Pre(p, t_k) \leq M_i(p)\}.$$

Ainsi, pour toute transition  $t_k$   $e$ -validée par un marquage  $M_i$ , il faudrait non pas considérer une seule variable donnant la date de tir possible de  $t_k$ , mais "  $e$ " variables pour chacune des façons de prélever  $Pre(\cdot, t_k)$  jetons dans les places amont de  $t_k$ .

Les politiques d'exécution des  $SPN$  sont importantes à préciser à chaque modèle développé. En plus de leur signification pratique pour la modélisation d'un système réel, ces politiques ont un impact direct sur la dynamique, l'analyse et la simulation des  $SPN$ .

### 3.3 Quelques modèles de SPN

Les  $SPN$  décrivent plusieurs types de processus stochastiques [55]. La nature de ces processus stochastiques dépend des différentes politiques d'exécution et des distributions que l'on peut associer aux transitions d'un  $SPN$ . En revanche, si des hypothèses sont faites sur la nature des distributions, il est possible d'évaluer par calcul analytique le processus stochastique associé à un  $SPN$ . Plusieurs modèles de  $SPN$  ont été proposées, nous citons :

- $DDPN$  : ce modèle a été proposé par W. M. Zuberek [173], R. R. Razouk et C. V. Phelps et Phelps [155], M. K. Molloy [130] (distribution géométrique) et M. A. Holiday et M. K. Vernon [90]. L'étude de ce type de  $SPN$  est obtenue généralement par la transformation du processus du  $DDPN$  à une chaîne de Markov à temps discret.
- $Ex-SPN$  : ce modèle considère uniquement des distributions exponentielles. Il a été suggéré par M. K. Molloy [129] et S. Natkin [134]. L'analyse de ce modèle passe par l'étude d'une  $CTMC$ .
- $GSPN$  : M. A. Marsan et al ont défini le modèle  $GSPN$ , dans lequel la durée de franchissement associée aux transitions est soit distribuée suivant une loi exponentielle, soit nulle [128]. D'autre part, il a été montré que le processus stochastique engendré par le modèle  $GSPN$  est aussi une  $CTMC$ .
- $SRN$  : G. Ciardo, J. K. Muppala et K. S. Trivedi [56] ont introduit les  $SRN$  dans le but de pouvoir combiner l'évaluation de performance avec la fiabilité et la sûreté de fonctionnement des systèmes tolérants aux fautes. Le processus stochastique

engendré par le modèle  $SRN$  est un processus markovien à taux de récompense (i.e.  $CTMC$  avec une structure de taux de récompense).

- $PH-SPN$  et  $Cox-SPN$  : S. Haddad et al [85] ont introduit des durées de tir à distributions de type phase où de Cox dans le modèle  $GSPN$ . Le processus de marquage non-markovien original d'un  $PH-SPN$  et d'un  $Cox-SPN$  est transformé à une  $CTMC$  par la méthode d'expansion de la chaîne de Markov.
- $ESPN$  : ce modèle permet de prendre en compte des durées de franchissement distribuées suivant une loi générale, sous les deux restrictions suivantes : les durées de franchissement de loi générale sont associées uniquement aux transitions exclusives et/ou compétitives et la politique de compétition et la politique  $PRD$  sont considérées [69]. L'analyse de ce type de modèle passe par l'étude d'un processus semi-markovien.
- $DSPN$  : ce modèle considère des durées exponentielles, des durées nulles et des durées déterministes, avec les restriction dans un marquage au plus une transition déterministe qui est sensibilisée et la politique de compétition et la politique  $PRD$  sont considérées [127]. Ce modèle est développée et analysée par de nombreux auteurs, le processus sous-jacent est un processus semi-régénératif (Markov Regenerative Process, "MRP").
- $MRSPN$  : ce modèle est une généralisation du modèle  $DSPN$ , dans lequel les distributions déterministes sont remplacées par des distributions de loi générale [53]. Bobbio et al ont introduit la classe  $Age-MRSPN$ , dans laquelle une transition générale peut être lui associée la politique  $PRS$ . Une procédure analytique pour la dérivation du régime transitoire et stationnaire est obtenue [38].
- $CGPN$  : ce modèle est une généralisation du modèle  $MRSPN$ , sous les hypothèses suivantes, dans le cas où les transitions à distributions générales sont toutes sensibilisées au même instant et avec la condition que cette distribution ne dépend pas du marquage et la politique de compétition et la politique  $PRD$  sont considérées [149]. Il à été montré que le processus stochastique engendré par le modèle  $CGPN$  est un  $MRP$ .



### 3.4 Réseaux de Petri stochastiques généralisés (GSPN)

Le modèle *GSPN* est introduit par M. A. Marsan et al [128]. Un *GSPN* se compose de transitions avec une temporisation nulle dites transitions immédiates et de transitions avec une temporisation aléatoire distribuée exponentiellement dites transitions exponentielles (transitions *EXP*) [52]. La durée de tir nulle modélise des cas où certaines activités sont urgentes et s'exécutent dès leur occurrence.

**Définition 27 Réseaux de Petri stochastiques généralisés**

Un *GSPN* est un cinq-uplets :

$$GSPN = (\aleph, Inh, \omega, >, M_0),$$

où :

- $\aleph$  est un PN ;
- $Inh$  est l'application d'inhibition ;
- $\omega : T \rightarrow \mathbb{R}^+ :$ 
  - si  $t_i$  est temporisée,  $w_{t_i}(M_j)$  est la vitesse de tir de  $t_i$  en  $M_j$ , c'est-à-dire le paramètre de sa loi exponentielle ;
  - si  $t_i$  est immédiate  $w_{t_i}(M_j)$  est le poids de  $t_i$  en  $M_j$ .
- $> : T \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application de priorité qui assigne à chaque transition un niveau de priorité (i.e. à chaque transition temporisée la valeur 0 et à chaque transition immédiate une valeur  $\geq 1$ ) ;
- $M_0$  est le marquage initial.

Les transitions à distributions exponentielles n'ont pas de mémoire temporelle. Il n'est donc pas nécessaire de préciser la politique de mémoire temporelle pour ce type de transitions (i.e. les trois politiques de mémoire sont équivalentes). La dépendance de taux de franchissement  $\lambda_{t_i}(M_j)$  par rapport aux marquages a en particulier pour but de permettre de modéliser diverses politiques de service :

- Serveur unique (single-server, mono-server) : à chaque instant un client est servi à la fois. Le taux de franchissement d'une transition  $t_i$  de loi exponentielle est  $\lambda_{t_i}(M_i) = \lambda_{t_i}$ . C'est la sémantique par défaut des *GSPN*.

- $k$ -serveurs multiples (multiple servers) : au plus  $k$  clients peuvent être servi simultanément. Le taux de franchissement est  $\lambda_{t_i}(M_i) = \text{Min}(k, e)\lambda_{t_i}$ .
- Infinité de serveurs (infinite servers) : autant de clients que possible, peuvent être servis en même temps. Le taux de franchissement est  $\lambda_{t_i}(M_i) = e\lambda_{t_i}$ .

Par conséquent, le taux de franchissement d'une transition exponentielle  $t_k$  en  $M_i$  est en général donné par  $\text{Min}(j, e)\lambda_{t_i}$ , où,  $j = 1$  pour la politique de server unique,  $j = k$  pour  $k$ -serveurs multiples et  $j = +\infty$  pour le cas de servers infinis.

#### ► Analyse qualitative et quantitative d'un GSPN

Les méthodes d'analyse des propriétés (vivacité, bornitude, invariants,...) utilisées par les  $PN$  classiques peuvent être appliquées. Cependant, comme les transitions immédiates ont une priorité sur les transitions temporisées, le modèle non-temporisé sous-jacent à un  $GSPN$  est un  $PN$  avec priorité et non pas un  $PN$  classique.

**Propriété 1** *Le graphe des marquages accessibles d'un GSPN est identique à celui du PN non temporisé avec priorité correspondant.*

Le graphe des marquages d'un  $GSPN$ , contient deux types de marquages : des marquages évanescents et des marquages tangibles [32].

#### Définition 28 [Marquage évanescents (vanishing marking)]

Un marquage  $M_j$  est dit évanescents (fugitif, instable, virtuel) si est seulement s'il existe une transition immédiate franchissable à partir de  $M_i$  (i.e. au moins une transition immédiate est sensibilisée).

#### Définition 29 [Marquage tangible (tangible marking)]

Un marquage  $M_i$  est dit tangible si est seulement s'il n'est pas évanescents (i.e. seules les transitions temporisées sont sensibilisées).

Les marquages évanescents d'un  $GSPN$  correspondent à des états à temps de séjour nul. Ils ne peuvent donc être pris en compte lors du calcul du vecteur de probabilités stationnaires. Seuls les marquages tangibles intéressent l'analyse, les marquages évanescents sont alors éliminés [32]. Plusieurs techniques d'élimination existent : préservation des états évanescents (résolution de l'EMC, puis retour aux états tangibles),

l'élimination des états évanescents directement à partir du graphe des marquages accessibles et l'élimination des états évanescents par transformation du *GSPN* en un *SPN*.

La politique de sélection de la transition à tirer dans un marquage tangible est la politique de compétition. Si dans un marquage  $M_i$ , l'ensemble  $\psi(M_i)$  contient une seule transition immédiate, du fait de son franchissement instantané, cette transition sera franchie avant toutes les autres transitions temporisées, tandis que dans le cas où l'ensemble  $\psi(M_i)$  contient plusieurs transitions immédiates, alors la transition immédiate à franchir sera définie en utilisant la politique de présélection [126]. L'expression générale définissant la probabilité pour que dans un marquage quelconque  $M_i$ , une transition franchissable  $t_j \in \psi(M_i)$  soit tirée est donnée par :

$$p_j(M_i) = \frac{w_{t_j}(M_i)}{\sum_{t_k \in \psi(M_i)} w_{t_k}(M_i)}.$$

**Propriété 2** *Le graphe des marquages accessibles réduit d'un GSPN est isomorphe à une CTMC. En particulier, le graphe des marquages accessibles réduit d'un GSPN borné est isomorphe à une CTMC finie.*

Ces résultats sont tout à fait significatifs car ils permettent d'utiliser le pouvoir de modélisation des *PN* pour décrire la logique d'évolution d'un système complexe tout en restant compatible avec le calcul markovien. Le temps de séjour dans chaque marquage tangible  $M_i$  est distribué suivant une loi exponentielle de taux  $q_{M_i}$  :

$$q_{M_i} = \sum_{t_k \in \psi(M_i)} \lambda_k(M_i).$$

Ainsi, le temps moyen de séjour dans le marquage tangible  $M_i$  est égal à :

$$\frac{1}{q_{M_i}} = \frac{1}{\sum_{t_k \in \psi(M_i)} \lambda_k(M_i)}.$$

Par conséquent, l'analyse quantitative d'un *GSPN* s'inspire de la technique d'analyse des *CTMC*. Cette partie d'analyse consiste à calculer les probabilités stationnaires et les indices de performance. Cette *CTMC* est obtenue en appliquant les règles suivantes :

- L'espace d'états de la *CTMC* correspond à l'ensemble des marquages accessibles à partir de  $M_0$  (i.e.  $GM(M_0)$ ) du *PN*.
- Le taux pour passer de l'état  $M_i$  à l'état  $M_j$  est obtenu en sommant tous les taux de franchissement des transitions qui permettent de passer de  $M_i$  à  $M_j$ .

Le générateur infinitésimal  $Q = [q_{M_i M_j}]$  de cette *CTMC* qui est une matrice carrée de dimension  $(r \times r)$  ( $r = |GM(M_0)|$ ) est obtenue comme suit :

$$q_{M_i M_j} = \begin{cases} \sum_{t_k \in \psi_{M_i M_j}} \lambda_k(M_i), & \text{si } M_i \neq M_j ; \\ -q_{M_i}, & \text{si } M_i = M_j ; \end{cases}$$

$$\text{où, } q_{M_i} = \sum_{t_k \in \psi_{M_i M_j}} \lambda_k ;$$

$\psi_{M_i M_j}$  est l'ensemble des transitions sensibilisées par le marquage  $M_i$  et dont le franchissement conduit au marquage  $M_j$ .

**Théorème 3** [129] *Un GSPN borné et tel que son graphe des marquages accessibles est fortement connexe est ergodique.*

**Théorème 4** [129] *Un GSPN borné est ergodique s'il admet le marquage initial  $M_0$  comme état d'accueil.*

La distribution de probabilité des états d'un *GSPN* en régime stationnaire est représentée par un vecteur  $\pi = (\pi_{M_1}, \pi_{M_2}, \dots, \pi_{M_r})$  de dimension  $r$ , où  $r$  correspond au nombre de marquages tangibles du *GSPN*. Si le *GSPN* est ergodique,  $\pi$  est obtenu en résolvant le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \pi Q = 0 ; \\ \pi \mathbf{1} = 1 ; \end{cases} \quad (3.1)$$

où,  $\mathbf{1}$  est un vecteur colonne de composantes égales à 1.

De nombreuses méthodes de résolution existent pour le système d'équations linéaires (3.1). Le livre de Stewart constitue un des ouvrages de référence décrivant un panorama de ces méthodes [160]. Trois grandes classes de méthodes sont distinguées :

- Les méthodes directes comme la méthode : de Gauss, de factorisation LU, d'itération inverse, etc.

- Les méthodes itératives telles que la méthode : de la puissance itérée, de Gauss Seidel, de Jacobi, de sur relaxation successives (*SOR*), etc.
- Les méthodes de projection comme la méthode : d'Arnoldi, Generalized Minimal Residual method (*GMRES*), etc.

En effet, la procédure générale pour l'évaluation de performance d'un *GSPN* est basée sur les étapes suivantes :

- Construire le graphe des marquages accessibles  $GM(M_0)$ .
- Éliminer les états évanescents, pour générer le graphe des marquages accessibles réduit.
- Convertir le graphe des marquages accessibles réduit à une *CTMC*, avec l'espace d'états  $\Omega$ .
- Construire le générateur infinitésimal  $Q = [q_{M_i, M_j}]$  associé à cette *CTMC*.
- Détermination de la distribution stationnaire des probabilités d'états du processus en résolvant le système d'équations linéaires (3.1).
- Évaluer les indices de performance du *GSPN* qui caractérisent le système modélisé (le nombre moyen de marques dans certaines places, la fréquence moyenne de franchissement de certaines transitions, la probabilité d'un événement, ...).

### 3.5 Réseaux de Petri stochastiques markoviens régénératifs (MRSPN)

Les *SPN* markoviens permettent un accès direct à l'étude probabiliste du processus de marquage [54, 59]. Cependant, la restriction de la description temporelle aux distributions exponentielles limite les domaines d'applications des *SPN* markoviens et laisse beaucoup de questions sur l'exactitude des valeurs des performances obtenues par l'approximation des fonctions de distributions de délais de toutes les activités d'un système par des distributions exponentielles. Pour remédier à cet handicap, les *SPN* non-markoviens ont été introduit. L'idée des *SPN* non-markoviens est d'autoriser trois types de transitions :

- Les transitions immédiates, qui sont prioritaires par rapport les autres types de

transitions.

- Les transitions temporisées à distributions exponentielles appelées transitions *EXP*.
- Les transitions temporisées à distributions générales appelées transitions *GEN*.

**Remarque 3** *Les transitions immédiates et les transitions EXP n'ont pas de mémoire temporelle. Il n'est donc pas nécessaire de préciser la politique de mémoire temporelle pour ces types de transitions. Par contre, les transitions GEN ont cette propriété.*

Différentes méthodes ont été explorées dans la littérature pour l'étude des *SPN* non-markoviens : la méthode de renouvellement [53], la méthode de la variable supplémentaire [58], la méthode d'expansion de la chaîne de Markov [59], la simulation [117], etc. Une classe, appelée *MRSPN*, est définie par H. Choi et al [53], sous certaines restrictions sur la structure de *SPN* non-markoviens (transitions à distributions générales), une analyse qualitative peut être effectuée. Nous allons présenter les principes de calcul utilisés pour établir des solutions analytiques pour les *MRSPN*.

**Définition 30** *Un SPN non-markovien est un MRSPN si :*

- *Au plus une seule transition GEN est sensibilisée dans chaque marquage ;*
- *La distribution de la durée de franchissement d'une transition GEN ne dépend pas du marquage.*

**Définition 31 [Réseaux de Petri stochastiques markoviens régénératifs]**

*Un MRSPN est un huit-uplets :*

$$MRSPN = (\aleph, Inh, \omega, \Lambda, F, C, >, M_0),$$

où :

- $\aleph$  est un *PN* ;
- *Inh* est l'application d'inhibition ;
- $\omega : T \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une application qui associée à chaque transition *EXP* un taux de franchissement ;
- $\Lambda : T \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une application qui associée à chaque transition immédiate un poids ;

- $F : T \rightarrow \mathbb{F}$ , spécifie la distribution des transitions  $GEN$ , ( $\mathbb{F}$  la famille des distributions générales).
- $C$ , les restrictions imposées à la structure d'un  $SPN$  non-markovien pour qu'il soit un  $MRSPN$  (définition 30);
- $> : T \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application de priorité qui assigne à chaque transition un niveau de priorité (à chaque transition temporisée la valeur 0 et à chaque transition immédiate une valeur  $\geq 1$ );
- $M_0$  est le marquage initial.

Sous les conditions de la définition 30, H. Choi et al ont montré que le processus stochastique sous-jacent à un  $MRSPN$  présente des propriétés essentielles et il permet de faire la jonction entre les  $SPN$  et la théorie des  $MRP$ .

**Théorème 5** [53] *Le processus de marquage  $\{M(t), t \geq 0\}$  d'un  $MRSPN$  est un  $MRP$ .*

Les  $MRP$  sont une extension naturelle des processus de Markov, dans le sens où nous assouplissons l'hypothèse de perte de mémoire du processus pour chaque instant  $t$ , pour ne conserver qu'une hypothèse d'existence d'instant aléatoires, à partir desquels le processus oublie son passé. Ces instants, appelés points de régénération du processus.

#### ► Analyse quantitative d'un MRSPN

Une approche analytique pour la dérivation d'expression pour l'état d'équilibre d'un  $MRSPN$  est prouvée [53]. Cette approche est basée sur l'observation que le processus stochastique sous-jacent  $\{M(t), t \geq 0\}$  bénéficie de l'absence de mémoire à certains instants  $(t_0, t_1, t_2, \dots)$ . Ces instants sont désignés comme points de régénération. Une  $EMC$   $\{Y_n, n \geq 0\}$  peut être définie en ces points de régénération. Le processus de marquage d'un  $MRSPN$  pendant une période de régénération (i.e. entre deux points de régénération consécutifs) est une  $CTMC$  appelée " $CTMC$  subordonnée" [122].

Les deux quantités décrivent l'évolution du  $MRSPN$  sont la matrice  $K(t) = [K_{ij}(t)]$  et la matrice  $E(t) = [E_{ij}(t)]$ , où :

- La famille de probabilités  $K_{ij}(t)$ , est appelée noyau global, est donnée par :

$$K_{ij}(t) = P\{Y_1 = j, t_1 \leq t / Y_0 = i\}; \quad i, j \in \Omega;$$

où,  $\Omega$  est l'ensemble des marquages tangibles.

- La famille de probabilités  $E_{ij}(t)$ , est appelée noyau local, est donnée par :

$$E_{ij}(t) = P\{M(t) = j, t_1 > t/Y_0 = i\}.$$

La matrice  $K(t)$  décrit le comportement transitoire du processus immédiatement après le prochain point de régénération tandis que la matrice  $E(t)$  décrit le comportement transitoire entre les deux points de régénération elles mêmes.

**Théorème 6 [53]** La matrice de probabilité de transition  $V(t) = [V_{ij}(t)] = P\{M(t) = j/M(0) = i\}$  d'un MRSPN satisfait l'équation de renouvellement markovienne suivante :

$$V_{ij} = E_{ij}(t) + \sum_{k \in \Omega} \int_0^t dK_{kj}(y)(t-y).$$

Cette équation peut s'écrire sous forme matricielle, comme suit :

$$V(t) = E(t) + (K * V)(t); \quad (3.2)$$

où  $K * V$  est le produit de convolution de  $K$  et  $V$ .

En introduisant les transformées de Laplace-Stieltjes " $\tilde{\cdot}(s)$ ", nous obtenons :

$$\tilde{V}(s) = [I - \tilde{K}(s)]^{-1} \tilde{E}(s). \quad (3.3)$$

Le comportement transitoire d'un MRSPN peut s'obtenir en intégrant numériquement l'équation (3.2) où par une méthode numérique d'inversion des transformées de Laplace-Stieltjes de l'équation (3.3). Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voir impossible, pour la plus part des modèles donnés.

La solution à l'état stationnaire ( $t \rightarrow \infty$ ) peut être évaluée par :

$$V(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{V}(s);$$

toutefois, les probabilités d'état stationnaires peuvent être dérivées directement de noyau local et de noyau global.

Pour l'analyse stationnaire d'un MRSPN les mesures suivantes sont nécessaires :

$$\alpha_{kj} = E\{\text{temps dans le marquage } j \text{ durant } [0, T_1] | Y_0 = k\}.$$



Les quantités  $\alpha_{kj}$ , peuvent être obtenues, par :

$$\alpha_{kj} = \int_0^{\infty} E_{kj}(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tilde{E}_{ij}(s)}{s}. \quad (3.4)$$

La matrice des probabilités de transition  $P = [P_{ij}]$  de l'EMC est définie par :

$$P_{ij} = P\{M(1) = j | M(0) = i\}.$$

Par passage à la limite, nous obtenons la matrice  $P$ , i.e. :

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{ij}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{K}_{ij}(s).$$

La distribution stationnaire  $v = (v_k)$  de l'EMC, si elle existe, est donnée par la résolution du système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} vP = v; \\ v\mathbf{1} = 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Si un MRSPN est ergodique, alors il admet une unique distribution stationnaire donné par le théorème suivant :

**Théorème 7 [53]** *La distribution stationnaire  $\pi = (\pi_j)$  en régime permanent d'un MRSPN est donnée par :*

$$\pi_j = \sum_{k \in \Omega} \beta_k \frac{\alpha_{kj}}{\mu_k}, \quad (3.6)$$

$$\text{où : } \mu_k = E\{T_1 | X_0 = k\} = \sum_{k \in \Omega} \alpha_{kj} \text{ et } \beta_k = \frac{v_k \mu_k}{\sum_{r \in \Omega} v_r \mu_r}.$$

L'équation (3.6) peut s'écrire sous la forme :

$$\pi_j = \frac{1}{v\alpha\mathbf{1}} v\alpha, \quad (3.7)$$

ou sous forme matricielle :

$$\pi = \beta C,$$

où,  $C$  est la matrice des facteurs de conversion (ses éléments  $c_{ij}$  représentent les temps inconditionnels de séjour entre deux points de régénération, ils sont donnés par :  $c_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\mu_i}$ ).

La procédure générale pour l'évaluation de performance d'un MRSPN est basée sur les étapes suivantes :

- Construire le graphe des marquages accessibles  $GM(M_0)$ .
- Éliminer les états évanescents, pour générer le graphe des marquages accessibles réduit.
- Calculer les deux quantités :  $K(t)$  et  $E(t)$ .
- Calculer les matrices :  $P, \alpha$ .
- Détermination de la distribution stationnaire des probabilités d'états de l'EMC en résolvant le système d'équations linéaires (3.5).
- Détermination de la distribution stationnaire des probabilités d'états du processus par la formule (3.7).
- Évaluer des indices de performance du MRSPN qui caractérisent le système modélisé à partir de ces distributions stationnaires.

### 3.6 Indices de performance

En utilisant le vecteur des probabilités stationnaires  $\pi=(\pi_{M_j})$  d'un SPN, il est possible de calculer plusieurs indices de performance [79]. Les formules des principaux paramètres s'expriment en fonction des éléments de base (places, transitions et marquages). Les principaux paramètres fréquemment recherchés sont :

- Le nombre moyen de marques ( $n_{p_i}$ ) dans une place  $p_i$  est calculé en appliquant la formule :

$$n_{p_i} = \sum_{j: M_j \in \Omega} M_j(p_i) \pi_{M_j};$$

où,  $\Omega$  est l'ensemble des marquages (tangibles) accessibles.

- La fréquence moyenne de franchissement ( $\bar{\lambda}_{t_i}$ ) d'une transition  $t_i$  : on appelle fréquence moyenne (débit moyen) de franchissement d'une transition  $t_i$ , le nombre moyen de tirs de  $t_i$  en une unité de temps. Elles est calculée par :

$$\bar{\lambda}_{t_i} = \sum_{M_j \in \Omega(t_i)} \lambda_{t_i}(M_j) \pi_{M_j};$$

où :  $\Omega(t_i)$  est l'ensemble des marquages où la transition  $t_i$  est franchissable ;

$\lambda_{t_i}(M_j)$  est le taux de franchissement de  $t_i$  en  $M_j$ .

- Le temps moyen de séjour ( $S_{p_i}$ ) d'une marque dans une place  $p_i$  à l'état stationnaire, peut être calculée en utilisant la formule de Little :

$$S_{p_i} = \frac{n_{p_i}}{\sum_{t_i \in P^o} \lambda_{t_i}};$$

tel que :  $P^o$  l'ensemble des sorties de  $p_i$ .

On peut élargir ces performances au calcul du temps moyen de séjour d'une marque dans une partie d'un  $PN$  (sous- $PN$ ).

- La probabilité d'un événement  $\gamma$ , ( $p_\gamma$ ) :

$$p_\gamma = \sum_{M_i \in A} \pi_{M_i};$$

où,  $A = \{M_i \in \Omega : \gamma(M_i) = true\}$ .

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un bref état de l'art sur les  $SPN$ . Une attention particulière est portée aux deux modèles des  $SPN$  ( $GSPN$  et  $MRSPN$ ). Un accent est mis sur la nature des processus associés à ces modèles. De ce chapitre, il nous paraît important de mettre en exergue les deux points suivants :

- le pouvoir d'expression des  $SPN$  ;
- l'intérêt du graphe des marquages accessibles au niveau de son exploitation.

L'exploitation des  $SPN$  tire profit du fait que ce formalisme offre de manière unifiée et complémentaire la possibilité de faire des analyses qualitatives et quantitatives. L'analyse qualitative permet la vérification des propriétés spécifiques et l'analyse quantitative permet d'obtenir les indices de performance. L'application des deux classes de modèles des  $SPN$  ( $GSPN$  et  $MRSPN$ ) à l'analyse de systèmes de files d'attente sera réalisée dans les deux chapitres cinq et six suivants.

## Chapitre 4

---

# Méthode de stabilité forte

---

### 4.1 Introduction

Lors de l'étude des systèmes concrets, on est souvent amené à remplacer le système réel, qui est généralement compliqué, par un système plus simple et pour lequel il existe des résultats analytiquement exploitables. Le modèle ainsi obtenu représente une "idéalisaton" du système réel, d'où l'apparition du problème de stabilité. L'étude de stabilité occupe une place remarquable dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques, ainsi que dans celle des systèmes stochastiques [5]. La stabilité se définit comme étant la capacité du système à résister aux perturbations. Un système est dit stable, si écarté de sa position d'équilibre (perturbé), il tend à y revenir. Si le système idéal est stable, le système réel est comparable au système idéal. Si de plus, la perturbation est petite, le système réel est proche du système idéal. En pratique, seuls les systèmes stables sont exploitables.

La plupart des modèles stochastiques peuvent être décrits par une chaîne de Markov d'une manière directe ou sous une certaine forme d'inclusion. On dit que le modèle est stable si la chaîne de Markov associée est stable. Dans ce chapitre, nous rappellerons les concepts de base de la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov.

## 4.2 Stabilité Forte

Cette méthode a été établie dans les années 1980 par D. Aissani et N. V. Kartashov [5]. Elle suppose que la perturbation de noyau de transition du processus aléatoire décrivant le système étudié est petite par rapport à une certaine norme. Cette condition est beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, elle permet d'obtenir de meilleures approximations pour les distributions stationnaires perturbées. Cette méthode s'applique pour tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov homogène. Les applications de cette méthode aux modèles stochastiques ont fait l'objet de plusieurs publications (voir la FIGURE 4.1) et d'autres travaux, sont en cours de réalisation.

## 4.3 Préliminaires et notations

Notre attention se focalisera sur la méthode de stabilité forte, qui permet d'étudier l'ergodicité et la stabilité des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des chaînes de Markov après avoir soumis leurs opérateurs de transition à de petites perturbations. Cette méthode donne la possibilité de clarifier les conditions pour lesquelles les caractéristiques du système complexe peuvent être approximées par celles du système simple. Nous présenterons notamment les concepts de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte, par rapport à des normes données dans des espaces de mesures et de noyaux de transitions.

Considérons une chaîne de Markov homogène  $X$  à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \xi)$ , (où,  $\xi$  est une  $\sigma$ -algèbre par une partie dénombrable de  $E$ ), donnée par un noyau de transition régulier  $P(x, A)$ ,  $x \in E$  et  $A \in \xi$ . On suppose que la chaîne de Markov  $X$  admet une unique mesure invariante  $\pi$ .

Notons par  $m\xi$  (resp.  $m\xi^+$ ) l'espace des mesures finies (resp. non négatives) sur  $\xi$  et  $f\xi$  (resp.  $f\xi^+$ ) l'espace des fonctions mesurables bornées (resp. non négatives) sur  $E$ . Nous associons à chaque noyau de transition  $P$ , les deux applications linéaires suivantes :

$$\mathcal{L}_p : m\xi \rightarrow m\xi \text{ et } \mathcal{L}_p^* : f\xi \rightarrow f\xi,$$



FIGURE 4.1: Travaux effectués sur la stabilité forte au niveau du LaMOS.

dont les valeurs aux points  $\mu \in m\xi$  et  $f \in f\xi$  sont respectivement données par :

$$\mu P(A) = \mathcal{L}_P(\mu)(A) = \int_E \mu(dx)P(x, A), \quad \forall A \in \xi;$$

$$Pf(x) = \mathcal{L}_P^*(f)(x) = \int_E P(x, dy)f(y), \quad \forall x \in E.$$

Le produit des deux noyaux de transitions  $P$  et  $Q$  est le noyau :

$$PQ(x, A) = \int_E P(x, dy)Q(y, A), \text{ pour } x \in E, A \in \xi.$$

Le produit d'une mesure  $\mu \in m\xi$  et d'une fonction  $f \in f\xi$ , notée  $\mu f$ , est défini par :

$$\mu f = \int_E \mu(dx)f(x).$$

Également,  $f \circ \mu$  désigne le produit direct d'une fonction mesurable  $f \in f\xi$  par une mesure  $\mu \in m\xi$  :

$$(f \circ \mu)(x, A) = f(x)\mu(A), x \in E, A \in \xi.$$

On considère, dans l'espace  $m\xi$ , l'espace de Banach  $\mathcal{M} = \{\mu \in m\xi : \|\mu\| < \infty\}$  de norme  $\|\cdot\|$  compatible avec l'ordre structurel dans  $m\xi$ , c'est-à-dire :

1.  $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\|$  pour  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$ ;
2.  $\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|$  pour  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$  et  $\mu_1 \perp \mu_2$ ;
3.  $|\mu|(E) \leq k\|\mu\|$  pour  $\mu \in \mathcal{M}$ , où  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$ ,  $k$  est une constante positive finie et  $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\xi^+)$ .

La norme induite sur  $f\xi$  est donnée par :

$$\|f\| = \sup(|\mu f|, \|\mu\| \leq 1).$$

La norme induite sur l'espace  $B$  des opérateurs bornés est donnée par :

$$\|P\| = \sup(|\mu P|, \|\mu\| \leq 1).$$

Supposons que l'opérateur  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  est borné, i.e. :

$$\mathcal{M}P \subset \mathcal{M}, \|\mathcal{M}P\| \leq \infty,$$

où :  $\mathcal{M}P = \{\mu : \mu = \mu_1 P, \mu_1 \in \mathcal{M}\}$ .

Notons par  $\Pi = I \circ \pi$  le projecteur stationnaire du noyau  $P$ , où  $I$  est la fonction identiquement égale à 1 et considérons la moyenne de Césaro définie par :

$$P^t = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} P^s, t \in N^*.$$

## 4.4 Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov

À présent, introduisons les notions d'ergodicité uniforme et de stabilité forte ainsi que les théorèmes fondamentaux.

**Définition 32** *La chaîne de Markov  $X$  est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si elle possède une unique mesure invariante  $\pi$  et :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P^t - \Pi\| = 0.$$

**Théorème 8** [104] *La chaîne de Markov  $X$  est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si :*

$$\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty,$$

où :  $I$  est l'opérateur identité.

**Définition 33** *La chaîne de Markov  $X$  est dite fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  si les assertions suivantes sont vérifiées :*

- $\|P\| < \infty$  ;
- Chaque noyau de transition  $Q$  dans un certain voisinage  $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$ , admet une unique distribution stationnaire  $\nu = \nu(Q)$  telle que  $\|\nu - \pi\| \rightarrow 0$ , lorsque  $\|Q - P\| \rightarrow 0$ .

Notons que la deuxième assertion de la définition 33 est équivalente à l'existence d'une constante  $c = c(P)$ , telle que :

$$\|\nu - \pi\| \leq c\|Q - P\|,$$

pour tout  $Q$  dans le voisinage  $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$ .

**Théorème 9** [104] *La chaîne de Markov  $X$  est fortement stable par rapport à la norme  $\|\cdot\|$ , si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.*

Une chaîne de Markov peut être fortement stable (uniformément ergodique) par rapport à une norme donnée et ne pas l'être pour une autre (si ces normes ne sont pas équivalentes).



**Théorème 10** [5] *La propriété d'ergodicité uniforme de la chaîne de Markov  $X$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  se conserve pour de petites perturbations du noyau  $P$ . Chaque noyau stochastique  $Q$  dans un certain voisinage du noyau de transition  $P$  de la chaîne de Markov  $X$ , uniformément ergodique (fortement stable) par rapport à une norme donnée  $\|\cdot\|$  (i.e.  $\|Q - P\| < \epsilon$ ), correspond à une chaîne de Markov uniformément ergodique (par rapport à la même norme).*

**Définition 34** *Une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  définie sur  $(E, \xi)$  et de noyau de transition  $P$  est récurrente au sens de Harris, s'il existe une mesure invariante  $\mu^*$   $\sigma$ -positive telle que  $\mu^*(A) > 0$ , alors :*

$$P_x \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} 1_A(X_n) = +\infty \right] = 1, \forall x \in E,$$

on dit alors que  $X$  ainsi que son noyau de transition sont de Harris.

### Propriété 3

- Une chaîne irréductible, discrète et récurrente est une chaîne de Harris.
- Une chaîne de Harris est une chaîne récurrente irréductible.

**Théorème 11** [5] *Une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris est uniformément ergodique par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  et apériodique si et seulement s'il existe un entier  $n \geq 1$ , une mesure positive  $\sigma \in \mathcal{M}^+$  et une fonction mesurable  $h \in f_{\xi^+}$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

- $\pi h > 0, \sigma \mathbb{1} = 1$  et  $\sigma h > 0$ ;
- le noyau  $T = P^n - h \circ \sigma$  est non négatif;
- $\|T^m\| \leq \psi$  pour un certain entier  $m \geq 1, \psi < 1$ .

L'ergodicité uniforme de la chaîne de Markov  $X$  entraîne que la dernière condition est satisfaite pour tout  $n, \sigma$  et  $h$  vérifiant les deux premières conditions.

## 4.5 $v$ -stabilité forte d'une chaîne de Markov

**Définition 35** *La chaîne de Markov  $X$  est fortement  $v$ -stable, si elle est fortement stable par rapport à une norme  $\|\cdot\|_v$  définie par :*

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x) |\mu|(dx), \quad (4.1)$$

où :  $v$  est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive, pas nécessairement finie sur  $E$ ,  $\mu \in m\xi$  et  $|\mu|$  est la variation de la mesure  $\mu$ .

Dans ce cas, les normes induites par  $\|\cdot\|_v$  dans les espaces  $f\xi$  et  $B$  sont respectivement :

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} |f(x)|, \forall f \in f\xi;$$

$$\|P\|_v = \sup\{|\mu P|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} \int v(y) |P(x, dy)|.$$

**Remarque 4** Pour la classe des normes  $\|\cdot\|_v$ , définies par la formule 4.1, la troisième condition du théorème 11 est équivalente à la condition suivante :

$$T^m v(x) \leq \psi v(x), \forall x \in E, \text{ pour un entier } m \geq 1 \text{ et } \psi < 1.$$

**Corollaire 1** Pour que la chaîne de Markov  $X$  récurrente au sens de Harris soit fortement  $v$ -stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- il existe une mesure  $\sigma \in \mathcal{M}^+$  et une fonction mesurable  $h \in f\xi^+$ , telles que :  
 $\pi h > 0, \sigma \mathbf{1} > 0$  et  $\sigma h > 0$ ;
- le noyau  $T = P - h \circ \sigma$  est non négatif;
- $\exists \psi < 1$  tel que,  $Tv(x) \leq \psi v(x), \forall x \in E$ .

Ce corollaire n'est qu'une condition suffisante du théorème 11 avec  $n=m=1$  et en tenant compte de la remarque 4.

## 4.6 Inégalités de stabilité forte

Dans les conditions du théorème 11, on peut obtenir les estimations quantitatives de stabilité d'une chaîne de Markov  $X$  ayant  $P$  comme opérateur de transition et  $\pi$  comme mesure de probabilité invariante. A cet effet, on présente la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $X$  en termes de la fonction mesurables  $h$ , de la fonction test  $v$  et de la mesure  $\sigma$ .

**Théorème 12** [104] *Soit une chaîne  $X$  fortement  $v$ -stable et vérifiant les conditions du théorème 11, de noyau de transition  $P$  et de mesure invariant  $\pi$ . Alors, pour un noyau stochastique  $Q$  de mesure stationnaire  $\nu$  appartenant à un certain voisinage de  $P$ , on a l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned}\nu &= \pi [I - \Delta R_0 (I - \Pi)]^{-1}; \\ \nu &= \pi + \sum_{t=1}^{\infty} \pi [\Delta R_0 (I - \Pi)]^{t-1};\end{aligned}$$

où :  $\Delta = Q - P$  et  $R_0 = (I - T)^{-1}$ .

**Conséquence 1** *Sous les mêmes conditions du théorème 11, on a :*

$$\nu = \pi + \pi \Delta R_0 (I - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2), \text{ pour } \|\Delta\|_v \rightarrow 0.$$

**Conséquence 2** *Sous les mêmes conditions du théorème 11 et pour  $\Delta$  vérifiant :*

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \psi}{c},$$

on a l'estimation :

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v c \|\pi\|_v (1 - \psi - c \|\Delta\|_v)^{-1},$$

avec

$$c = m \|P\|_v^{m-1} (1 + \|\mathbb{I}\|_v \|\pi\|_v);$$

et

$$\|\pi\|_v \leq (\sigma v)(1 - \psi)^{-1} (\pi h) m \|P\|_v^{m-1}.$$

Dans le cas où  $m=1$ , on a  $c = 1 + \|\mathbb{I}\|_v \|\pi\|_v$ .

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un bref état de l'art sur la méthode de stabilité forte. Comme notre objectif principal est d'élargir pour la première fois le champs d'applicabilité de cette méthode aux  $SPN$ , on a donné les définitions et les théorèmes fondamentaux nécessaires pour la bonne compréhension des chapitres à venir. En effet, dans le chapitre sept, nous allons appliquer la méthode de stabilité forte pour établir la stabilité du  $IMRSPN$  associé au système  $M/G/1$ .

## Chapitre 5

---

### Analyse du réseau

# $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ via les GSPN

---

#### 5.1 Introduction

Le formalisme *GSPN* a été exploité, avec succès, pour étudier différents systèmes de files d'attente. Dans ce contexte, nous pouvons mentionner le travail de C. I. Oliver et K. S. Trivedi où, un système  $M/M/1/k$  avec vacance a été étudié [139]. N. Gharbi et M. Ioualalen ont traité l'analyse des files d'attente à sources finies, markoviennes, multi-serveurs et avec rappels [78, 79]. G. Balbo et al ont montré que les  $QN$  multi-classes *BCMP* peuvent être représentés par les *GSPN* ayant une distribution stationnaire à forme produit [25, 29]. M. Gribaudo et M. Sereno ont proposé une approche qui donne la solution à forme produit pour les  $QN$  fermés avec blocage en utilisant les propriétés structurelles des  $PN$  [84]. Dans ce chapitre, nous proposerons une analyse d'un  $QN$  ouvert à deux stations en tandem avec blocage  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ . Ce phénomène de blocage dans ce  $QN$  influe sur la disponibilité du serveur, et d'une façon globale, sur les performances du  $QN$ . Le phénomène de blocage lié à la capacité limitée pose des problèmes de résolution puisqu'il complexifie fortement la chaîne de

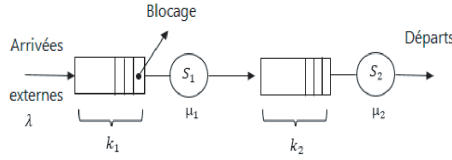
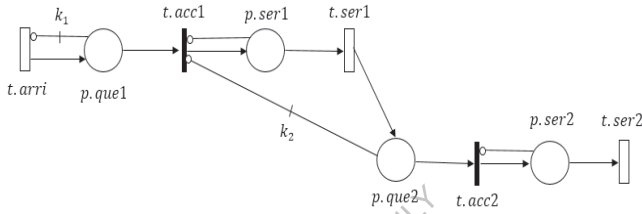
Markov du  $QN$  et il rend les approches de modélisation classiques difficiles à utiliser et évoque par conséquent l'adoption d'une approche descriptive de haut-niveau, telle que celle qu'on a proposée et qui est basée sur les  $GSPN$ . Cette approche nous donne une représentation graphique détaillée et nous permet d'obtenir le générateur infinitésimal de la  $CTMC$  sous-jacente [94]. En outre, elle exprime les principales caractéristiques du ce  $QN$  en fonction du taux des arrivées, du taux de service, de la capacité des files et des probabilités stationnaires indépendamment du graphe d'accessibilité. Des résultats numériques exacts pour ce  $QN$  sont obtenus en utilisant la génération et la solution numérique de la  $CTMC$  associée au  $GSPN$  obtenu.

## 5.2 $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec BBS

Dans cette section, nous considérons le  $QN$   $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec  $BBS$ . Chaque station de ce  $QN$  possède une file d'attente à capacité limitée  $k_1, k_2$  et un unique serveur. Le processus d'arrivée des clients dans le  $QN$  est poissonien de taux  $\lambda$ . Les temps de service sont supposés exponentiels de taux respectifs  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Chaque client reçoit une partie de son service à la première station et puis accède à la seconde station pour poursuivre son service. Le client qui arrive, rejoint la file d'attente de la première station si le nombre de clients dans cette première file est strictement inférieure à  $k_1$ , sinon le client est refusé. A la fin de son service à la première station, le client tente de rejoindre la file d'attente de la deuxième station. Si la deuxième file est pleine (contient  $k_2$  clients), le client est obligé d'attendre au niveau du premier serveur jusqu'à ce qu'il entre à la deuxième station, cela signifie que le premier serveur est bloqué. Après avoir servi dans la deuxième station, le client quitte le système définitivement. Le schéma décrivent le  $QN$   $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec  $BBS$  est représenté dans la FIGURE 5.1.

### 5.2.1 $GSPN$ associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec BBS

On peut modéliser le  $QN$  précédent à l'aide de  $GSPN$ , tel que c'est illustré dans la FIGURE 5.2 suivante.

FIGURE 5.1: [M/M/1/k<sub>1</sub> + 1 → M/M/1/k<sub>2</sub> + 1] avec BBS.FIGURE 5.2: GSPN associé à [M/M/1/k<sub>1</sub> + 1 → M/M/1/k<sub>2</sub> + 1] avec BBS.

Les marquages du GSPN sont décrits par les vecteurs :

$$M_i = (\#p.que1, \#p.ser1, \#p.que2, \#p.ser2),$$

où :  $\#p.que1$ ,  $\#p.ser1$ ,  $\#p.que2$  et  $\#p.ser2$  sont respectivement le nombre de jetons dans les places  $p.que1$ ,  $p.ser1$ ,  $p.que2$  et  $p.ser2$ . Initialement, les quatre places sont vides (i.e. les deux files sont vides et les deux serveurs sont libres). Ainsi, le marquage initial du GSPN peut être exprimé par le vecteur  $M_0 = (0, 0, 0, 0)$ .

- Le tir de la transition *EXP*  $t.arri$  indique l'arrivée d'un client de l'extérieur du GSPN, ainsi la place  $p.que1$  reçoit un jeton. Lorsque le nombre de jetons dans la place  $p.que1$  est égale à  $k_1$ , il n'y a pas d'accès au GSPN ce qui est modélisé par l'arc inhibiteur, reliant la place  $p.que1$  à la transition  $t.arri$ , avec une multiplicité  $k_1$ .
- La transition immédiate  $t.acc1$  est sensibilisée lorsque la place  $p.que1$  contient au moins un jeton, la place  $p.ser1$  est vide et la place  $p.que2$  contient moins de  $k_2$  jetons. Le tir instantané de la transition immédiate  $t.acc1$  consiste à détruire un

jeton dans la place  $p.que1$  et à construire un jeton dans la place  $p.ser1$ , cela signifie que le client a commencé son service et le premier serveur passe de l'état libre à l'état occupé.

- La transition  $EXP t.ser1$  est sensibilisée lorsque la place  $p.ser1$  contient un jeton. Le tir de la transition  $t.ser1$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.ser1$  et à construire un jeton dans la place  $p.que2$ , cela signifie que le client a terminé son service dans la première station et rejoint la file d'attente de la deuxième station.
- La transition immédiate  $t.acc2$  est sensibilisée lorsque la place  $p.que2$  contient au moins un jeton et la place  $p.ser2$  ne contient pas de jetons. Le tir instantané de la transition  $t.acc2$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.que2$  et à construire un jeton dans la place  $p.ser2$ , cela signifie que le client a commencé son service et le deuxième serveur est passé de l'état libre à l'état occupé.
- La transition  $EXP t.ser2$  est sensibilisé lorsque la place  $p.ser2$  contient un jeton. Le tir de la transition  $EXP t.ser2$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.ser2$ , cela signifie que le client quitte le système définitivement et le serveur passe de l'état occupé à l'état libre.
- La présence de  $k_2$  jetons dans la place  $p.que2$  signifie que le premier serveur est bloqué. Le tir de la transition  $t.acc1$  est impossible jusqu'à ce que la place  $p.que2$  contient moins de  $k_2$  jetons.

**Remarque 5** La sémantique de service des trois transitions  $EXP t.arri$ ,  $t.ser1$  et  $t.ser2$  est la sémantique à serveur unique.

## 5.2.2 CTMC du GSPN associé à $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$ avec BBS

Notre but dans cette section est d'obtenir la CTMC du GSPN qui modélise le  $QN [M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec BBS. Vue la complexité de l'analyse de ce dernier, on va prendre comme exemple  $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$  avec BBS pour généraliser par la suite à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec BBS. A partir du GSPN représenté dans la FIGURE 5.2, ( pour  $k_1=k_2=1$ ), nous obtenons l'arbre des marquages accessibles qui décrit tous ses marquages possibles (voir FIGURE 5.3).

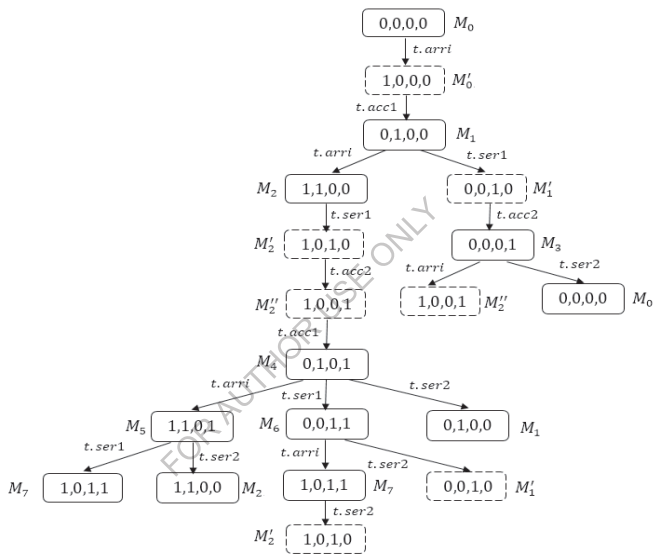


FIGURE 5.3: Arbre des marquages du *GSPN* associé à  $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$  avec *BBS*.



**Remarque 6** Dans la FIGURE 5.3, les boîtes avec des encadrements continus indiquent les marquages tangibles et les boîtes avec des encadrements discrets indiquent les marquages évanescents.

A partir de cet arbre, nous avons obtenu le diagramme de transition de la CTMC donnée dans la FIGURE 5.4.

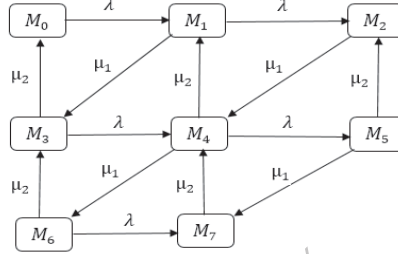


FIGURE 5.4: CTMC du GSPN associé à  $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$  avec BBS.

Dans la FIGURE 5.4, les deux marquages  $M_6=(0, 0, 1, 1)$  et  $M_7=(1, 0, 1, 1)$  représentent les marquages de blocage du premier serveur. Le GSPN modélise  $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$  avec BBS est borné et admet  $M_0$  comme état d'accueil donc il est ergodique. Par conséquent, la distribution stationnaire  $\pi$  existe et elle est unique.

Le générateur infinitésimal  $Q = [q_{M_i M_j}]$  du GSPN proposé est donné par :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) & \lambda & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\mu_1 + \mu_2) & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des marquages du GSPN associé à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec BBS est donné par :

$$\Omega = \left\{ \{(0, 0, 0, 0)\} \cup \{(i, 1, 0, 0), 0 \leq i \leq k_1\} \cup \{(i, 0, k_2, 1), 0 \leq i \leq k_1\} \right\}$$

$$\cup \{(0, 0, j, 1), 0 \leq j \leq k_2 - 1\} \cup \{(i, 1, j, 1), 0 \leq i \leq k_1, 0 \leq j \leq k_2 - 1\}$$

Le nombre des marquages du *GSPN* proposé est  $|\Omega| = (k_1 + 1)(k_2 + 2) + (k_2 + 1)$  et le nombre des marquages qui représentent le blocage du premier serveur est  $(k_1 + 1)$ .

La *CTMC* du *GSPN* associé à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec *BBS* est donnée dans la FIGURE 5.5.

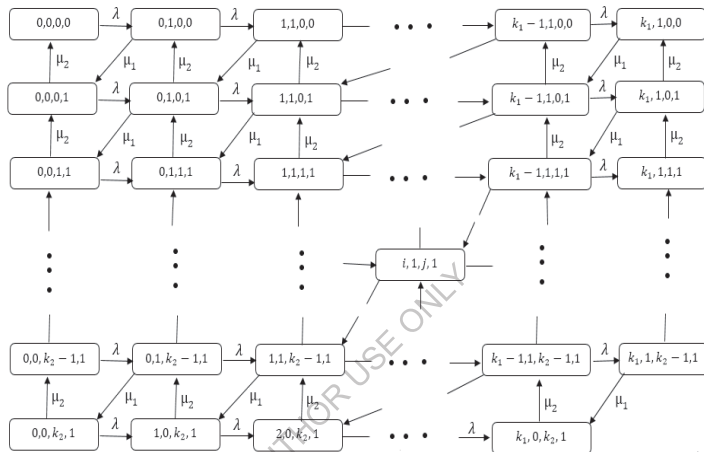


FIGURE 5.5: *CTMC* du *GSPN* associé à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec *BBS*.

Le générateur infinitésimal  $Q = [q_{M,M^*}]$ , où  $M, M^* \in \Omega$ , de la CTMC est donn e par :

$$q_{M,M^*} = \left\{ \begin{array}{l} -\lambda, \quad \text{si } M = (0, 0, 0, 0) \text{ et } M^* = (0, 0, 0, 0); \\ \lambda, \quad \text{si } M = (0, 0, 0, 0) \text{ et } M^* = (0, 1, 0, 0); \\ \mu_2, \quad \text{si } M = (0, 0, 0, 1) \text{ et } M^* = (0, 0, 0, 0); \\ -(\lambda + \mu_1), \quad \text{si } M = (i, 1, 0, 0) \text{ et } M^* = (i, 1, 0, 0), 0 \leq i \leq k_1 - 1; \\ -\mu_1, \quad \text{si } M = (k_1, 1, 0, 0) \text{ et } M^* = (k_1, 1, 0, 0); \\ \lambda, \quad \text{si } M = (i, 1, 0, 0) \text{ et } M^* = (i + 1, 1, 0, 0), 0 \leq i \leq k_1 - 1; \\ \mu_1, \quad \text{si } M = (0, 1, 0, 0) \text{ et } M^* = (0, 0, 0, 1); \\ \mu_1, \quad \text{si } M = (i, 1, 0, 0) \text{ et } M^* = (i - 1, 1, 0, 1), 0 < i \leq k_1; \\ \mu_2, \quad \text{si } M = (i, 1, 0, 1) \text{ et } M^* = (i, 1, 0, 0), 0 \leq i \leq k_1; \\ -(\lambda + \mu_2), \quad \text{si } M = (0, 0, j, 1) \text{ et } M^* = (0, 0, j, 1), 0 \leq j \leq k_2 - 1; \\ \lambda, \quad \text{si } M = (0, 0, j, 1) \text{ et } M^* = (0, 1, j, 1), 0 \leq j \leq k_2 - 1; \\ \mu_2, \quad \text{si } M = (0, 0, j + 1, 1) \text{ et } M^* = (0, 0, j, 1), 0 \leq j \leq k_2 - 2; \\ \mu_1, \quad \text{si } M = (0, 1, j, 1) \text{ et } M^* = (0, 0, j + 1, 1), 0 \leq j \leq k_2 - 2; \\ \mu_2, \quad \text{si } M = (0, 0, k_2, 1) \text{ et } M^* = (0, 0, k_2 - 1, 1); \\ -(\lambda + \mu_2), \quad \text{si } M = (i, 0, k_2, 1) \text{ et } M^* = (i, 0, k_2, 1), 0 \leq i \leq k_1 - 1; \\ -\mu_2, \quad \text{si } M = (k_1, 0, k_2, 1) \text{ et } M^* = (k_1, 0, k_2, 1); \\ \lambda, \quad \text{si } M = (i, 0, k_2, 1) \text{ et } M^* = (i + 1, 0, k_2, 1), 0 \leq i \leq k_1 - 1; \\ \mu_2, \quad \text{si } M = (i, 0, k_2, 1) \text{ et } M^* = (i - 1, 1, k_2 - 1, 1), 1 \leq i \leq k_1; \\ \mu_1, \quad \text{si } M = (i, 1, k_2 - 1, 1) \text{ et } M^* = (i, 0, k_2, 1), 0 \leq i \leq k_1; \\ -(\lambda + \mu_1 + \mu_2), \quad \text{si } M = (i, 1, j, 1) \text{ et } M^* = (i, 1, j, 1), 0 \leq i \leq k_1 - 1, 0 \leq j \leq k_2 - 1; \\ -(\mu_1 + \mu_2), \quad \text{si } M = (k_1, 1, j, 1) \text{ et } M^* = (k_1, 1, j, 1), 0 \leq j \leq k_2 - 1; \\ \lambda, \quad \text{si } M = (i, 1, j, 1) \text{ et } M^* = (i + 1, 1, j, 1), 0 \leq i \leq k_1 - 1, 0 \leq j \leq k_2 - 1; \\ \mu_2, \quad \text{si } M = (i, 1, j, 1) \text{ et } M^* = (i, 1, j - 1, 1), 0 \leq i \leq k_1, 1 \leq j \leq k_2 - 1; \\ \mu_1, \quad \text{si } M = (i, 1, j, 1) \text{ et } M^* = (i - 1, 1, j + 1, 1), 1 \leq i \leq k_1, 0 \leq j \leq k_2 - 2; \\ 0, \quad \text{sinon.} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

### 5.2.3 Indices de performance

Ayant le vecteur de probabilités stationnaires  $\pi$ , divers indices de performance peuvent être calculés :

- Le taux moyen de génération des arrivées ( $\bar{\lambda}$ ), du premier serveur ( $\bar{\mu}_1$ ) et du deuxième serveur ( $\bar{\mu}_2$ ) :

$$\bar{\lambda} = \lambda \left\{ \pi_{(0,0,0,0)} + \sum_{i=0}^{k_1-1} [\pi_{(i,1,0,0)} + \pi_{(i,0,k_2,1)}] + \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(0,0,j,1)} + \sum_{i=0}^{k_1-1} \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(i,1,j,1)} \right\}; \quad (5.2)$$

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 \left\{ \sum_{i=0}^{k_1} \pi_{(i,1,0,0)} + \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(i,1,j,1)} \right\}; \quad (5.3)$$

$$\bar{\mu}_2 = \mu_2 \left\{ \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(0,0,j,1)} + \sum_{i=0}^{k_1} \pi_{(i,0,k_2,1)} + \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(i,1,j,1)} \right\}. \quad (5.4)$$

- L'utilisation du premier serveur ( $U_{s1}$ ) et du deuxième serveur ( $U_{s2}$ ) :

$$U_{s1} = \sum_{i=0}^{k_1} \pi_{(i,1,0,0)} + \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(i,1,j,1)}; \quad (5.5)$$

$$U_{s2} = \sum_{i=0}^{k_1} \pi_{(i,0,k_2,1)} + \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(0,0,j,1)} + \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(i,1,j,1)}. \quad (5.6)$$

- Le nombre moyen de clients dans la première file d'attente ( $n_{q1}$ ), la seconde file d'attente ( $n_{q2}$ ), la première station ( $n_{s1}$ ), la deuxième station ( $n_{s2}$ ) et le  $QN$  ( $n_s$ ) :

$$n_{q1} = \sum_{i=1}^{k_1} i \pi_{(i,1,0,0)} + \sum_{i=1}^{k_1} i \pi_{(i,0,k_2,1)} + \sum_{i=1}^{k_1} i \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(i,1,j,1)}; \quad (5.7)$$

$$n_{q2} = k_2 \sum_{i=0}^{k_1} \pi_{(i,0,k_2,1)} + \sum_{j=1}^{k_2-1} j \pi_{(0,0,j,1)} + \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2-1} j \pi_{(i,1,j,1)}; \quad (5.8)$$

$$n_{s1} = \sum_{i=1}^{k_1} i \pi_{(i,0,k_2,1)} + \sum_{i=0}^{k_1} (i+1) \pi_{(i,1,0,0)} + \sum_{i=0}^{k_1} (i+1) \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(i,1,j,1)}; \quad (5.9)$$

$$n_{s2} = \sum_{j=1}^{k_2-1} (j+1) \pi_{(0,0,j,1)} + (k_2+1) \sum_{i=0}^{k_1} \pi_{(i,0,k_2,1)} + \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2-1} (j+1) \pi_{(i,1,j,1)}; \quad (5.10)$$

$$n_s = n_{s1} + n_{s2}. \quad (5.11)$$

- La probabilité de blocage du premier serveur, ( $p_b$ ) :

$$p_b = \sum_{i=0}^{k_1} \pi_{(i,0,k_2,1)}. \quad (5.12)$$

- La probabilité de perte, ( $p_l$ ) :

$$p_l = \pi_{(k_1,1,0,0)} + \pi_{(k_1,0,k_2,1)} + \sum_{j=0}^{k_2-1} \pi_{(k_1,1,j,1)}. \quad (5.13)$$

- Le temps moyen d'attente dans la première station ( $w_{s1}$ ), la deuxième station ( $w_{s2}$ ) et le  $QN$  ( $w_s$ ) :

$$\omega_{s1} = \frac{n_{q1}}{\lambda}; \quad (5.14)$$

$$\omega_{s2} = \frac{n_{q2}}{\lambda}; \quad (5.15)$$

$$\omega_s = \frac{n_{q1} + n_{q2}}{\lambda}. \quad (5.16)$$

- Le temps moyen de réponse dans la première station ( $\varpi_{s1}$ ), la deuxième station ( $\varpi_{s2}$ ) et le  $QN$  ( $\varpi_s$ ) :

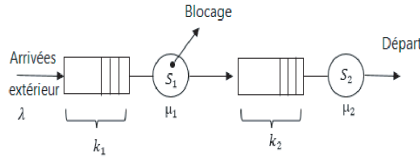
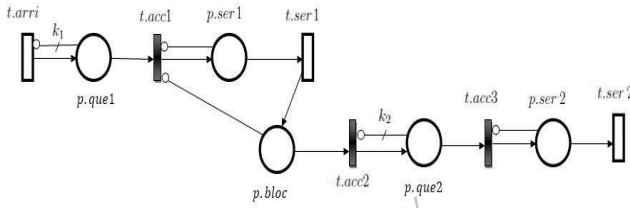
$$\varpi_{s1} = \frac{n_{s1}}{\lambda}; \quad (5.17)$$

$$\varpi_{s2} = \frac{n_{s1}}{\lambda}; \quad (5.18)$$

$$\varpi_s = \frac{n_s}{\lambda}. \quad (5.19)$$

### 5.3 [M/M/1/k<sub>1</sub> + 1 → M/M/1/k<sub>2</sub> + 1] avec BAS

Dans ce qui suit, nous présentons le modèle *GSPN* décrivant le  $QN$  constitué d'une séquence de deux stations de service avec *BAS*. Les clients arrivent à la première station selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . Le temps de service d'un client dans la station  $i$  est exponentiel de taux  $\mu_i$ ,  $i=1,2$ . La capacité de la première file (resp. la deuxième file) est  $k_1$  (resp.  $k_2$ ). Le client qui arrive, rejoint la première file d'attente si il y a moins de  $k_1$  clients, sinon le client sera rejeté. Un client dont le service dans la première station est accompli ne peut accéder à la file de la deuxième station si cette dernière est pleine (contient  $k_2$  clients). Le schéma et le modèle *GSPN* décrivent [M/M/1/k<sub>1</sub> + 1 → M/M/1/k<sub>2</sub> + 1] avec *BAS* sont respectivement représentés dans les deux FIGURES 5.6 et 5.7.

FIGURE 5.6: [M/M/1/k<sub>1</sub> + 1 → M/M/1/k<sub>2</sub> + 1] avec BAS.FIGURE 5.7: GSPN associé à [M/M/1/k<sub>1</sub> + 1 → M/M/1/k<sub>2</sub> + 1] avec BAS.

La différence par rapport au GSPN donné dans la FIGURE 5.3 est la présence du sous-PN qui modélise le mécanisme BAS. Ce sous-PN contient la transition immédiate  $t.acc3$  et la place  $p.bloc$ . La présence d'un jeton dans les deux places  $p.bloc$ ,  $p.ser2$  et  $k_2$  jetons de la place  $p.que2$  signifie que le premier serveur est bloqué. Le tir de la transition immédiate  $t.acc2$  est impossible tant que la place  $p.que2$  contient  $k_2$  jetons.

Les marquages du GSPN qui modélise le QN [M/M/1/k<sub>1</sub> + 1 → M/M/1/k<sub>2</sub> + 1] avec BAS sont décrits par les vecteurs :

$$M_i = (\#p.que1, \#p.ser1, \#p.bloc, \#p.que2, \#p.ser2).$$

Le marquage initial du GSPN est  $M_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$  signifie que les deux files d'attente et les deux serveurs sont vides. Pour ce GSPN, l'ensemble des marquages est donné par :

$$\Omega = \left\{ \{(0, 0, 0, 0, 0)\} \cup \{(i, 1, 0, j, 1), 0 \leq i \leq k_1, 0 \leq j \leq k_2\} \right. \\ \left. \cup \{(i, 1, 0, 0, 0), 0 \leq i \leq k_1\} \cup \{(0, 0, 0, j, 1), 0 \leq j \leq k_2\} \cup \{(i, 0, 1, k_2, 1), 0 \leq i \leq k_1\} \right\}.$$

Le nombre des marquages du GSPN est  $|\Omega| = (k_1 + 1)(k_2 + 3) + (k_2 + 2)$  et le nombre des marquages décrivent le blocage du premier serveur est  $(k_1 + 1)$ . La CTMC du GSPN

associé à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec *BAS* est donnée dans la FIGURE 5.8.

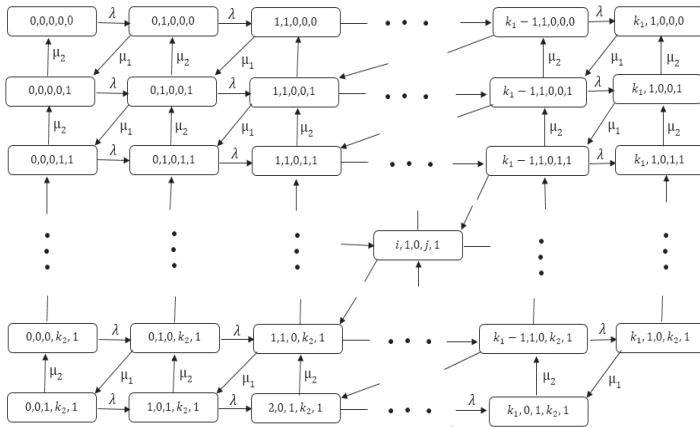


FIGURE 5.8: CTMC du GSPN associé à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec *BAS*.

**Remarque 7** Nous constatons que, le GSPN associés à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec *BBS* et le GSPN associé à  $[M/M/1/k_1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec *BAS* ont la même CTMC sous-jacente, donc les deux mécanisme de blocage *BBS* et *BAS* sont équivalents pour ces deux GSPN.

## 5.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous exploitons l’algorithme **Algo-GSPN-QN** d’analyse du GSPN associé à  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  avec *BBS* que nous avons programmé sous Matlab. Cette algorithme est basé sur la construction de générateur infinitésimal du GSPN qui modélise le QN  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  et le calcul de ses principaux indices de performance (voir l’algorithme 1).

Par ailleurs, une simulation à événements discrets du QN  $[M/M/1/k_1+1 \rightarrow M/M/1/k_2+1]$  avec *BBS* est réalisée et permet l’obtention des caractéristiques simulées. Par la suite, une comparaison des résultats des deux approches GSPN et simulation sera donnée. Enfin, nous donnons quelques résultats numériques pour illustrer la manière

**Algorithme 1: Algo-GSPN-QN****Debut****étape 1 :** Générer le générateur infinitésimal  $Q$  en utilisant la formule (5.1).**étape 2 :** Calculer les distributions stationnaires en résolvant le système (3.1) par la méthode de Gauss.**étape 3 :** Calculer les indices de performance en utilisant les formules (5.2)-(5.19).**Fin.**

dont les caractéristiques du modèle  $GSPN$  (temps moyen de réponse, utilisation du serveur, ...) sont affectés par la variation des paramètres du système (le taux des arrivées, la capacité des deux files d'attente,...).

$GSPN$		$Simulation$	
$\pi_{M_0} =$	0.4332252	$\pi_{M_0} =$	0.4262333
$\pi_{M_1} =$	0.2233818	$\pi_{M_1} =$	0.2210333
$\pi_{M_2} =$	0.1314342	$\pi_{M_2} =$	0.1411000
$\pi_{M_3} =$	0.1083063	$\pi_{M_3} =$	0.1053333
$\pi_{M_4} =$	0.0592300	$\pi_{M_4} =$	0.0615000
$\pi_{M_5} =$	0.0098717	$\pi_{M_5} =$	0.0103667
$\pi_{M_6} =$	0.0236920	$\pi_{M_6} =$	0.0236333
$\pi_{M_7} =$	0.0108588	$\pi_{M_7} =$	0.0108000

TABLE 5.1: Comparaison des distributions stationnaires du  $GSPN$  associé à  $[M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/2]$  avec  $BBS$  avec celles de la simulation, " $\lambda = 0.5, \mu_1 = 1$  et  $\mu_2 = 2$ ."

A partir des résultats des deux TABLES 5.1 et 5.2, on constate bien que les résultats (distributions stationnaires et les caractéristiques du  $QN [M/M/1/k_1+1 \rightarrow M/M/1/k_2+1]$  avec  $BBS$ ) obtenus par les deux approches ( $GSPN$  et simulation) sont similaires.

Dans la FIGURES 5.9, nous constatons que le temps de réponse moyen dans la première station ( $\varpi_{s_1}$ ), la deuxième station ( $\varpi_{s_2}$ ) et le  $QN$  ( $\varpi_s$ ), croient lorsque le taux des arrivées ( $\lambda$ ) augmente.



Measures	GSPN	Simulation	Measures	GSPN	Simulation
$\bar{\lambda}$	0.9927368	0.9916333	$\omega_{s1}$	0.5160325	0.5212612
$n_{q1}$	0.5122844	0.5169000	$\omega_{s2}$	0.9703337	0.9349558
$n_{q2}$	0.9632860	0.9271333	$\omega_s$	1.4863662	1.4562170
$n_s$	2.5344895	2.4869000	$\varpi_{s1}$	0.9160325	0.9156946
$U_{s1}$	0.3970947	0.3911333	$\varpi_{s2}$	1.6370004	1.5921880
$U_{s1}$	0.6618245	0.6517333	$\varpi_s$	2.5530328	2.5078826
$p_l$	0.0072632	0.0083666	$p_b$	0.0821837	0.0791333

TABLE 5.2: Comparaison de quelques mesures de performance du GSPN associé à  $[M/M/1/7 \rightarrow M/M/1/5]$  avec BBS avec celles de la simulation, " $\lambda = 1, \mu_1 = 2.5$  et  $\mu_2 = 1.5$ ".

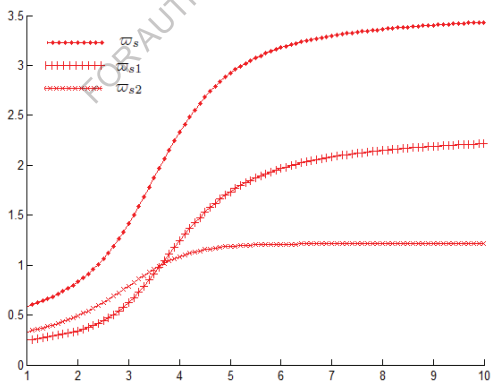


FIGURE 5.9: Temps moyen de réponse de la première station ( $\varpi_{s1}$ ), de la deuxième station ( $\varpi_{s2}$ ) et du  $QN$  ( $\varpi_s$ ) en fonction du taux des arrivées ( $\lambda$ ), " $\lambda = 1, \dots, 10, \mu_1 = 5, \mu_2 = 4, k_1 = 8, k_2 = 6$ ".

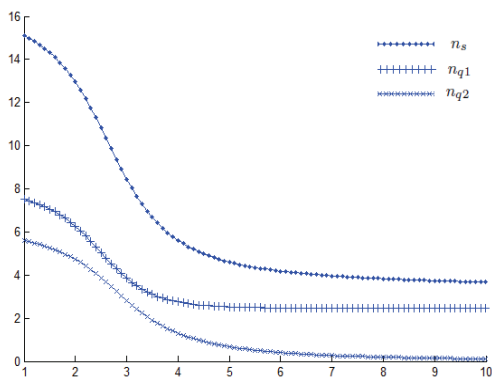


FIGURE 5.10: Nombre moyen de clients dans la première file ( $n_{q1}$ ), dans la deuxième file ( $n_{q2}$ ) et dans le  $QN$  ( $n_s$ ) en fonction du taux de service du deuxième serveur ( $\mu_2$ ), " $\mu_2 = 1, \dots, 10, \lambda = 3, \mu_1 = 3.5, k_1 = 8, k_2 = 6$ ".

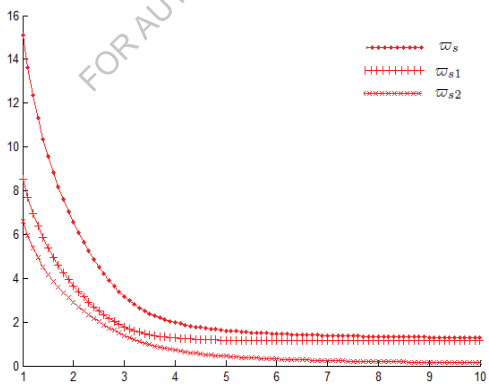


FIGURE 5.11: Temps moyen de réponse de la première station ( $\varpi_{s1}$ ), de la deuxième station ( $\varpi_{s2}$ ) et du  $QN$  ( $\varpi_s$ ) en fonction du taux de service du deuxième serveur ( $\mu_2$ ), " $\mu_2 = 1, \dots, 10, \lambda = 3, \mu_1 = 3.5, k_1 = 8, k_2 = 6$ ".

Dans les deux FIGURES 5.10 et 5.11, nous constatons que le nombre moyen de clients dans la première file d'attente ( $n_{q1}$ ), la deuxième file d'attente ( $n_{q2}$ ), le  $QN$  ( $n_s$ ) et le temps moyen de réponse dans la première station ( $\varpi_{s1}$ ), la deuxième station ( $\varpi_{s2}$ ) et le  $QN$  ( $\varpi_s$ ), diminuent lorsque le taux de premier serveur ( $\mu_2$ ) augmente. L'augmentation de taux de serveur ( $\mu_2$ ) a un impact lourd sur le temps de réponse moyen.

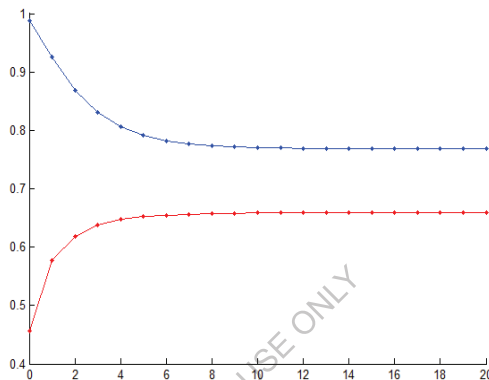


FIGURE 5.12: Utilisation du premier serveur ( $U_{s1}$ ) et du deuxième serveur ( $U_{s2}$ ) en fonction de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ), " $k_2 = 1, \dots, 20$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 3.5$ ,  $k_1 = 8$ ".

Dans la FIGURE 5.12, nous observons que l'utilisation du premier serveur ( $U_{s1}$ ) augmente avec l'augmentation de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ), tandis que l'utilisation du second serveur ( $U_{s2}$ ) diminue. Il est intéressant de noter que l'utilisation du serveur de la première station diminue si la capacité ( $k_2$ ) de la seconde station augmente.

Dans la FIGURE 5.13, on observe que la probabilité de blocage du premier serveur ( $p_b$ ) augmente avec l'augmentation de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ) et le taux de service du deuxième serveur ( $\mu_2$ ). Les petits temps moyen de service dans la première station, dans la deuxième station et/ou les valeurs décroissantes de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ) sont la cause des valeurs plus élevées de la probabilité de blocage.

Dans la FIGURE 5.14, nous constatons que la probabilité de perte de la première sta-

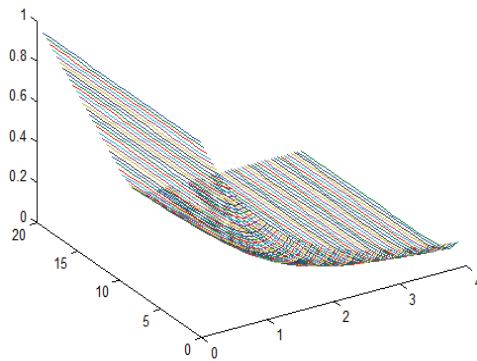


FIGURE 5.13: Probabilité de blocage ( $p_b$ ) en fonction du taux de service du deuxième serveur ( $\mu_2$ ) et de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ).

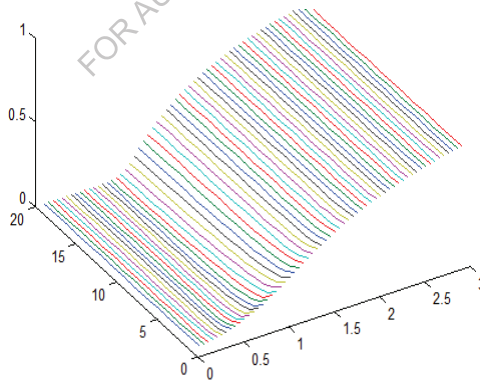


FIGURE 5.14: Probabilité de perte ( $p_l$ ) en fonction du taux des arrivées ( $\lambda$ ) et de la capacité de la deuxième file ( $k_2$ ).

tion ( $p_l$ ), augmente avec l'augmentation de la capacité de la première file ( $k_1$ ) et le taux des arrivées ( $\lambda$ ).

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une approche numérique exacte pour la modélisation et l'analyse du  $QN$  en tandem avec blocage " $M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1$ " en utilisant le formalisme  $GSPN$ . Le  $GSPN$  proposé, nous a permis de représenter facilement l'interaction entre les deux files d'attente de ce  $QN$  et de mieux comprendre le comportement de ce dernier. Pour l'obtention des indices de performance de notre  $QN$ , nous avons établie un algorithme qui nous a permis de générer automatiquement le générateur infinitésimal et de calculer efficacement ces mesures de performance sans générer le graphe d'accessibilité et la  $CTMC$  sous-jacente. En outre, nous avons étudié l'effet des paramètres de notre  $QN$  sur ses indices de performance.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à l'analyse des systèmes de files d'attente non-markoviens avec rappels à l'aide des  $MRSPN$ .

## Chapitre 6

---

# Analyse du système $M/G/1//N$ avec rappels à l'aide des MRSPN

---

### 6.1 Introduction

Au cours de la dernière décennie, une attention considérable a été accordée à l'analyse des systèmes de files d'attente en utilisant l'outil *MRSPN*. H. Choi et al ont effectué l'analyse stationnaire et transitoire des *MRSPN*, en particulier, ils ont étudié en détail le système non markovien  $M/G/1/2/2$  [53]. En outre, l'analyse des performances du système de files d'attente  $M/G/1//N$  avec différentes politiques de vacances a été réalisée par K. Ramanath et P. Lakshmi à l'aide de ce formalisme [153]. Nos travaux via les *MRSPN*, nous les avons entamés avec l'étude du système  $M/G/1//2$  avec rappels [97].

Dans ce chapitre, nous allons généralisé notre étude précédente à la modélisation et à l'analyse des performances des deux files d'attente complexes  $M/G/1//N$  avec rappels et  $M/G/1//N$  avec rappels et recherche orbitale. Cette généralisation, nous l'avons réalisée en utilisant l'approche introduite par H. Choi basée sur la théorie des *MRP*. La structure des deux matrices de transition des *EMC* associées respectivement aux deux systèmes étudiés sont non homogènes, ce qui est dû aux appels répétés et aux appels quasi-aléatoires primaires. De plus, ces deux matrices ne sont pas de  $M/G/1$ -type

[136]. Le phénomène des rappels, la limitation de la source et l'aspect non-markovien des deux systèmes étudiés rend leurs structure assez complexe à étudier. En effet, l'étude analytique est en générale difficile, voire impossible, à réaliser. Pour remédier à ce problème, nous avons proposé dans ce chapitre une approche d'étude, basée sur les *MRSPN*, capable de décrire finement les caractéristiques essentielles de ces deux systèmes étudiés et permet l'obtention de résultats exacts des indices de performance [94]. Cette approche proposée est analytique-numérique meilleur qu'une approche approximative ou une approche par simulation. D'ailleurs, notre approche nous a donné une représentation graphique détaillée de nos deux systèmes et nous a permis de générer les matrices de transition des *EMC* sous-jacentes et de calculer les indices de performance. Ces derniers sont calculés par un algorithme élaboré sous Matlab.

## 6.2 Système M/G/1//N avec rappels classiques

La FIGURE 6.1 montre le modèle *MRSPN* décrivant la file d'attente M/G/1//N avec rappels classiques.

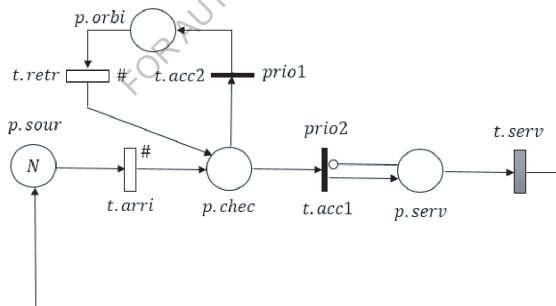


FIGURE 6.1: *MRSPN* associé à M/G/1//N avec rappels classiques (modèle I).

Dans la FIGURE 6.1, le rectangle noir représente la transition *GEN*, les rectangles blancs représentent des transitions *EXP*, les barres noires minces représentent des transitions immédiates. Les vecteurs

$$(\#p.sour, \#p.chec, \#p.serv, \#p.orbi),$$

décrivent tous les marquages possibles du modèle  $MRSPN$  donné, où :  $\#p.sour$ ,  $\#p.chec$ ,  $\#p.serv$  et  $\#p.orbi$  sont respectivement le nombre de jetons dans les places  $p.sour$ ,  $p.chec$ ,  $p.serv$  et  $p.orbi$ . Le vecteur  $M_0^I = (N, 0, 0, 0)$  est son marquage initiale  $M_0^I$  signifie que le système est vide et il y a  $N$  clients dans la source.

- La transition temporisée  $EXP t.arri$  est sensibilisée lorsque la place  $p.sour$  contient au moins un jeton. Le tir de la transition  $EXP t.arri$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.sour$  et à construire un jeton dans la place  $p.chec$  (i.e. un appel primaire est arrivé). La politique de service de la transition  $EXP t.arri$  est une politique à " $(\#p.sour)$  serveurs", ceci signifie que le taux de tir de la transition  $EXP t.arri$  est égal à " $(\#p.sour)\lambda$ ".
- La transition immédiate  $t.acc1$  est sensibilisée lorsque la place  $p.chec$  contient un jeton et la place  $p.serv$  ne contient pas de jeton. Le tir de la transition immédiate  $t.acc1$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.chec$  et à construire un jeton dans la place  $p.serv$  (i.e. le client a commencé son service et le serveur est passé de l'état libre à l'état occupé).
- La transition temporisée  $GEN t.serv$  est sensibilisée lorsque la place  $p.serv$  contient un jeton. Le tir de la transition temporisée  $GEN t.serv$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.serv$  et à construire un jeton dans la place  $p.sour$  (i.e. le client a terminé son service et il rejoint la source). Les politiques associées à la transition  $GEN t.serv$  sont : la politique de compétition pour la politique de sélection, la politique de la mémoire de la dernière sensibilisation pour la politique de mémoire temporelle et serveur unique pour la politique de service [125].
- La transition immédiate  $t.acc2$  est sensibilisée lorsque chacune des deux places  $p.chec$  et  $p.serv$  contient un jeton. Le tir instantané de la transition immédiate  $t.acc1$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.chec$  et à construire un jeton dans la place  $p.orbi$  (i.e. le client rejoint l'orbite). La transition immédiate  $t.acc1$  a la priorité plus élevée que la transition immédiate  $t.acc2$ .
- La transition temporisée  $EXP t.retr$  est sensibilisée lorsque la place  $p.orbi$  contient au moins un jeton. Le tir de la transition  $EXP t.retr$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.orbi$  et à construire un jeton dans la place  $p.chec$ . La politique de



service de la transition  $EXP t.retr$  est une politique à " $(\#p.orbi)$ -serveurs", ceci signifie que le taux de tir de la transition  $EXP t.ret$  est égal à " $(\#p.orbi)\gamma$ ".

### 6.2.1 Analyse du système M/G/1//2 avec rappels classiques

Lorsque la place  $p.sour$  contient deux jetons ( $N=2$ ), l'arbre des marquages accessibles qui décrit tous les états possibles du  $MRSPN$  à partir du marquage initial  $M_0^I = (2, 0, 0, 0)$  est donnée dans la FIGURE 6.2.

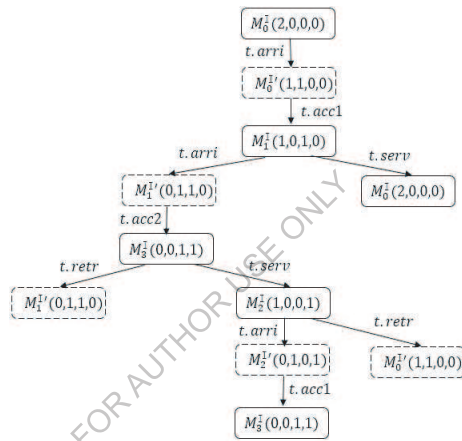


FIGURE 6.2: Arbre des marquages accessibles du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//2$  avec rappels classiques.

Les boîtes avec des encadrements continus sont des marquages tangibles et les boîtes avec des encadrements discrets sont des marquages évanescents. Cet arbre contient trois marquages évanescents et quatre marquages tangibles. En fusionnant les marquages évanescents avec leurs successeurs marquages tangibles, nous obtenons le diagramme de transition du modèle  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//2$  avec rappels classiques représenté par la FIGURE 6.3.

Dans cette figure, les arcs continus indiquent les tirs des deux transitions  $EXP t.arri$  et  $t.serv$ , les arcs discrets indiquent les tirs de la transition  $GEN t.serv$ .

L'espace des états  $\Omega^I$  du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//2$  avec rappels classiques est

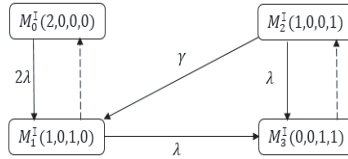


FIGURE 6.3: *CTMC* subordonnée du *MRSPN* associé à  $M/G/1//2$  avec rappels classiques.

donné par :

$$\Omega^I = \{M_0^I(2, 0, 0, 0), M_1^I(1, 0, 1, 0), M_2^I(1, 0, 0, 1), M_3^I(0, 0, 1, 1)\}.$$

Le générateur infinitésimal  $Q^I = [q_{M_i^I M_j^I}^I]$ , avec  $M_i^I, M_j^I \in \Omega^I, i = \overline{0:3}, j = \overline{0:3}$ , de la *CTMC* subordonnée à la transition *GEN t.serv* est donné par :

$$Q^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau local,  $E^I(t) = [E_{M_i^I M_j^I}^I(t)]$ , est donné par :

$$E^I(t) = \begin{pmatrix} e^{-2\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t}(1 - H(t)) & 0 & (1 - e^{-\lambda t})(1 - H(t)) \\ 0 & 0 & e^{-(\gamma+\lambda)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - H(t) \end{pmatrix}.$$

Le noyau global,  $K^I(t) = [K_{M_i^I M_j^I}^I(t)]$ , est donné par :

$$K^I(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - e^{-2\lambda t} & 0 & 0 \\ \int_0^t e^{-\lambda x} dH(x) & 0 & \int_0^t [1 - e^{-\lambda x}] dH(x) & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} [1 - e^{-(\gamma+\lambda)t}] & 0 & \frac{\lambda}{\gamma + \lambda} [1 - e^{-(\gamma+\lambda)t}] \\ 0 & 0 & \int_0^t dH(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous supposons que le temps de tir de la transition *GEN t.serv* est de densité  $h(\cdot)$  de loi Hypo-exponentielle à deux phases "*Hypo* $_2(\mu, \frac{\mu}{2})$ ".

La matrice de transition,  $P^I = [P_{M_i^I M_j^I}^I]$ , est donnée par :

$$P^I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\mu^2}{(2\lambda + \mu)(\lambda + \mu)} & 0 & \frac{3\lambda\mu + 2\lambda^2}{(2\lambda + \mu)(\lambda + \mu)} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\gamma + \lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\gamma + \lambda} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le modèle *MRSPN* associé à *M/G/1//2* avec rappels classiques est borné et admet  $M_0^I = (2, 0, 0, 0)$  comme état d'accueil, donc ce modèle est ergodique. Nous calculons les probabilités stationnaires de l'*EMC* en résolvant le système d'équations linéaires 3.5, on obtient :

$$\begin{aligned} v_{(2,0,0,0)}^I &= \frac{1}{2} \frac{\gamma\mu^2}{2\gamma\lambda^2 + 3\gamma\lambda\mu + \gamma\mu^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2\mu}; \\ v_{(1,0,1,0)}^I &= \frac{1}{2} \frac{\gamma(2\lambda + \mu)(\lambda + \mu)}{2\gamma\lambda^2 + 3\gamma\lambda\mu + \gamma\mu^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2\mu}; \\ v_{(1,0,0,1)}^I &= \frac{1}{2} \frac{\lambda(\gamma + \lambda)(3\mu + 2\lambda)}{2\gamma\lambda^2 + 3\gamma\lambda\mu + \gamma\mu^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2\mu}; \\ v_{(0,0,1,1)}^I &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2(3\mu + 2\lambda)}{2\gamma\lambda^2 + 3\gamma\lambda\mu + \gamma\mu^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2\mu}. \end{aligned}$$

Les éléments  $c_{M_i^I M_j^I}^I$  sont donnés par la matrice de conversion  $C^I$  :

$$C^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \frac{3\mu^2 + 2\lambda\mu}{(2\lambda + \mu)(\lambda + \mu)} & 0 & \frac{1}{3} \frac{6\lambda^2 + 7\lambda\mu}{(2\lambda + \mu)(\lambda + \mu)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les probabilités stationnaires du modèle *MRSPN* associé à *M/G/1//2* avec rappels classiques  $\pi^I = (\pi_{(2,0,0,0)}^I, \pi_{(1,0,1,0)}^I, \pi_{(1,0,0,1)}^I, \pi_{(0,0,1,1)}^I)$  sont données par :

$$\begin{aligned} \pi_{(2,0,0,0)}^I &= \frac{\gamma\mu^3}{\gamma\mu^3 + 12\gamma\lambda^3 + 18\gamma\lambda^2\mu + 6\gamma\lambda\mu^2 + 22\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 12\lambda^4}; \\ \pi_{(1,0,1,0)}^I &= \frac{2\gamma\mu\lambda(3\mu + 2\lambda)}{\gamma\mu^3 + 12\gamma\lambda^3 + 18\gamma\lambda^2\mu + 6\gamma\lambda\mu^2 + 22\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 12\lambda^4}; \\ \pi_{(1,0,0,1)}^I &= \frac{2\lambda^2\mu(3\mu + 2\lambda)}{\gamma\mu^3 + 12\gamma\lambda^3 + 18\gamma\lambda^2\mu + 6\gamma\lambda\mu^2 + 22\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 12\lambda^4}; \\ \pi_{(0,0,1,1)}^I &= \frac{2\lambda^2(6\lambda^2 + 9\lambda\mu + 6\gamma\lambda + 7\gamma\mu)}{\gamma\mu^3 + 12\gamma\lambda^3 + 18\gamma\lambda^2\mu + 6\gamma\lambda\mu^2 + 22\lambda^3\mu + 6\lambda^2\mu^2 + 12\lambda^4}. \end{aligned}$$

### 6.2.2 Analyse du système M/G/1//N avec rappels classiques

Dans cette sous section, nous étudierons le système  $M/G/1//N$  avec rappels classiques. Pour tous  $N$ , nous obtenons le diagramme de transition du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//N$  avec rappels classiques (voir FIGURE 6.4).

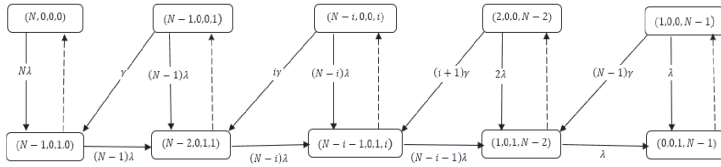


FIGURE 6.4:  $CTMC$  subordonnée du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//N$  avec rappels classiques.

L'espace d'état  $\Omega^I$  du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//N$  avec rappels classiques est donné par :

$$\Omega^I = \{M_{2i}^I = (N-i, 0, 0, i), M_{2i+1}^I = (N-i-1, 0, 1, i) : 0 \leq i \leq N-1\} \text{ et } |\Omega^I| = 2N.$$

Le générateur infinitésimal  $Q^I = [q_{M_i^I M_j^I}^I]$ , avec  $M_i^I, M_j^I \in \Omega^I$ , de la  $CTMC$  subordonnée à la transition  $GEN$   $t.serv$  est donné par :

$$q_{M_i^I M_j^I}^I = \begin{cases} -\left(\frac{2N-i-1}{2}\right)\lambda, & \text{si } 1 \leq i \leq 2N-3, i \text{ impair et } j = i; \\ \left(\frac{2N-i-1}{2}\right)\lambda, & \text{si } 1 \leq i \leq 2N-3, i \text{ impair et } j = i+2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau local  $E^I(t) = [E^I_{M_i^I M_j^I}(t)]$  est donné par :

$$E^I_{M_i^I M_j^I}(t) = \begin{cases} e^{-N\lambda t}, & \text{si } i \text{ et } j = 0; \\ C_{N-\frac{i+1}{2}}^{\frac{j-i}{2}} (1 - e^{-\lambda t})^{\frac{j-i}{2}} (e^{-\lambda t})^{N-\frac{j+1}{2}} (1 - H(t)), & \text{si } 1 \leq i \leq 2N-1, i \text{ impair et } i \leq j \leq 2N-1, j \text{ impair}; \\ e^{-[\frac{i}{2}\gamma + (N-\frac{i}{2})\lambda]t}, & \text{si } 2 \leq i \leq 2N-2, i \text{ pair et } j = i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau global  $K^I(t) = [K^I_{M_i^I M_j^I}(t)]$  est donné par :

$$K^I_{M_i^I M_j^I}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-N\lambda t}, & \text{si } i = 0 \text{ et } j = \Gamma; \\ \int_0^t C_{N-\frac{i+1}{2}}^{\frac{j-i+1}{2}} (1 - e^{-\lambda x})^{\frac{j-i+1}{2}} (e^{-\lambda x})^{N-\frac{i+2}{2}} dH(x), & \text{si } 1 \leq i \leq 2N-1, i \text{ impair et } i-1 \leq j \leq 2N-2, j \text{ pair}; \\ \frac{\frac{i}{2}\gamma}{\frac{i}{2}\gamma + (N-\frac{i}{2})\lambda} (1 - e^{-[\frac{i}{2}\gamma + (N-\frac{i}{2})\lambda]t}), & \text{si } 2 \leq i \leq 2N-2, i \text{ pair et } j = i-1; \\ \frac{(N-\frac{i}{2})\lambda}{\frac{i}{2}\gamma + (N-\frac{i}{2})\lambda} (1 - e^{-[\frac{i}{2}\gamma + (N-\frac{i}{2})\lambda]t}), & \text{si } 2 \leq i \leq 2N-2, i \text{ pair et } j = i+1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice de transition  $P^I = [P_{M_i^I M_j^I}^I]$  est donnée par :

$$P_{M_i^I M_j^I}^I = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1; \\ \int_0^\infty C_{N-\frac{i+1}{2}}^{\frac{i-i+1}{2}} (1 - e^{-\lambda x})^{\frac{i-i+1}{2}} (e^{-\lambda x})^{N-\frac{i+2}{2}} dH(x), & \text{si } 1 \leq i \leq 2N-1, i \text{ impair et } i-1 \leq j \leq 2N-2, j \text{ pair}; \\ \frac{\frac{i}{2}\gamma}{\frac{i}{2}\gamma + (N-\frac{i}{2})\lambda}, & \text{si } 2 \leq i \leq 2N-2, i \text{ pair et } j = i-1; \\ \frac{(N-\frac{i}{2})\lambda}{\frac{i}{2}\gamma + (N-\frac{i}{2})\lambda}, & \text{si } 2 \leq i \leq 2N-2, i \text{ pair et } j = i+1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.1)$$

La matrice de conversion  $C^I = [c_{M_i^I M_j^I}^I]$  est donnée par :

$$c_{M_i^I M_j^I}^I = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 0; \\ \frac{1}{\int_0^\infty (1-H(t))dt} \int_0^\infty C_{N-\frac{i+1}{2}}^{\frac{j-i}{2}} (1 - e^{-\lambda t})^{\frac{j-i}{2}} (e^{-\lambda t})^{N-\frac{i+1}{2}} (1-H(t))dt, & \text{si } 1 \leq i \leq 2N-1, i \text{ impair et } i \leq j \leq 2N-1, j \text{ impair}; \\ 1, & \text{si } 2 \leq i \leq 2N-2, i \text{ pair et } j = i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2)$$

### 6.2.3 Indices de performance

Après le calcul des probabilités stationnaires :

$$\pi^I = (\pi_{(N,0,0,0)}^I, \pi_{(N-1,0,1,0)}^I, \dots, \pi_{(N-i,0,0,i)}^I, \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I, \dots, \pi_{(1,0,0,N-1)}^I, \pi_{(0,0,1,N-1)}^I);$$

diverses caractéristiques de performance du système M/G/1//N avec rappels classiques peuvent être dérivées, telles que :

- Le nombre moyen de clients dans l'orbite ( $n_o$ ) :

$$n_o^I = \sum_{i=1}^{N-1} i \left[ \pi_{(N-i,0,0,i)}^I + \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I \right]. \quad (6.3)$$

- Le nombre moyen de clients dans le service ou dans l'orbite ( $n_s$ ) :

$$n_s^I = \sum_{i=1}^{N-1} i \left[ \pi_{(N-i,0,0,i)}^I + \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I \right] + \sum_{i=0}^{N-1} \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I. \quad (6.4)$$

- Le nombre moyen de sources actives ( $a_s$ ) :

$$a_s^I = N - n_s^I. \quad (6.5)$$

- Le taux moyen de génération des appels primaires ( $\bar{\lambda}$ ) :

$$\bar{\lambda}^I = \lambda \left[ \sum_{i=0}^{N-1} (N-i) \pi_{(N-i,0,0,i)}^I + \sum_{i=0}^{N-2} (N-i-1) \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I \right]. \quad (6.6)$$

- Le taux moyen de génération des appels répétés ( $\bar{\gamma}$ ) :

$$\bar{\gamma}^I = \gamma \sum_{i=1}^{N-1} i \left[ \pi_{(N-i,0,0,i)}^I + \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I \right]. \quad (6.7)$$

- La probabilité d'occupation du serveur ( $B_s$ ) :

$$B_s^I = \sum_{i=0}^{N-1} \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I. \quad (6.8)$$

- La probabilité de blocage des appels primaires ( $B_p$ ) :

$$B_p^I = \frac{\lambda \sum_{i=0}^{N-2} (N-i-1) \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I}{\bar{\lambda}^I}. \quad (6.9)$$

- La probabilité de blocage des appels répétés ( $B_r$ ) :

$$B_r^I = \frac{\gamma \sum_{i=1}^{N-1} i \pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I}{\bar{\gamma}^I}. \quad (6.10)$$

- Le temps moyen d'attente ( $\bar{w}$ ), à partir de la loi de Little, est obtenu comme suit :

$$\bar{w}^I = \frac{n_o^I}{\bar{\lambda}^I}. \quad (6.11)$$

- Le temps moyen de réponse ( $\varpi$ ), à partir de la loi de Little, est obtenu comme suit :

$$\varpi^I = \frac{n_s^I}{\bar{\lambda}^I}. \quad (6.12)$$

### 6.3 Système M/G/1//N avec rappels classiques et recherche orbitale

La FIGURE 6.5 montre le modèle *MRSPN* décrivant le système *M/G/1//N* avec rappels classiques et recherche orbitale. Les vecteurs :

$$(\#p.sour, \#p.chec, \#p.serv, \#p.orbi, \#p.sear);$$

décrivent tous les marquages possibles du modèle *MRSPN* associé à *M/G/1//N* avec rappels classiques et recherche orbitale. Le vecteur  $M_0^{II} = (N, 0, 0, 0, 0)$  est son marquage initial.

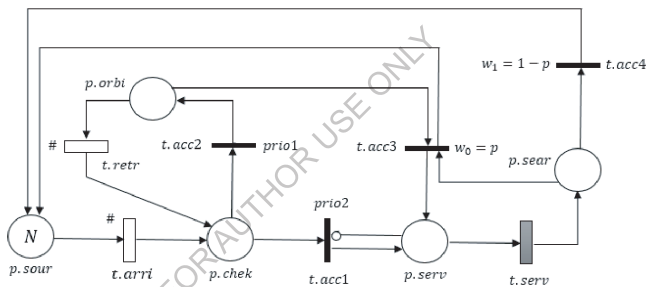


FIGURE 6.5: *MRSPN* associé à *M/G/1//N* avec rappels classiques et recherche orbitale (modèle *II*).

A la différence du modèle *I* de la FIGURE 6.1, ce modèle considère le mécanisme de recherche orbitale. Donc, nous gardons la même interprétation que celle du modèle *I* pour laquelle nous ajoutons les modifications apportées par ce mécanisme. Ainsi, le sous-*PN* qui modélise ce mécanisme contient deux transitions immédiates  $t.acc3$ ,  $t.acc4$  et une place  $p.sear$ .

- Le tir de la transition temporisée *GEN*  $t.serv$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.serv$  et à construire un jeton dans la place  $p.sear$ . La présence d'un jeton dans la place  $p.sear$  signifie que le client a terminé son service et il est prêt à rejoindre la source (i.e la place  $p.sour$ ).



- La transition immédiate  $t_{acc3}$  est sensibilisée lorsque la place  $p_{sear}$  contient un jeton et la place  $p_{orbi}$  contient au moins un jeton. Le tir instantané de la transition immédiate  $t_{acc3}$ , avec un poids  $p$ , consiste à détruire un jeton dans chacune des deux places  $p_{sear}$  et  $p_{orbi}$  puis à construire un jeton dans chacune des deux places  $p_{serv}$  et  $p_{sour}$ . Cela signifie que le serveur recherche un client dans l'orbite et le client, qui a terminé son service, rejoint la source.
- La transition immédiate  $t_{acc4}$  est sensibilisée lorsque la place  $p_{sear}$  contient un jeton. Le tir instantané de la transition immédiate  $t_{acc4}$ , avec un poids  $(1 - p)$ , consiste à détruire un jeton dans la place  $p_{sear}$  et à construire un jeton dans la place  $p_{sour}$ . Cela signifie que le client rejoint la source et le serveur sera libre.

Nous obtenons le diagramme de transition du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale ( voir la FIGURE 6.6), son espace d'état :

$$\Omega^{II} = \{M_{2i}^{II} = (N - i, 0, i, 1, 0), M_{2i+1}^{II} = (N - i - 1, 0, 1, i, 0) : 0 \leq i \leq N - 1\} \text{ et } |\Omega^{II}| = 2N.$$

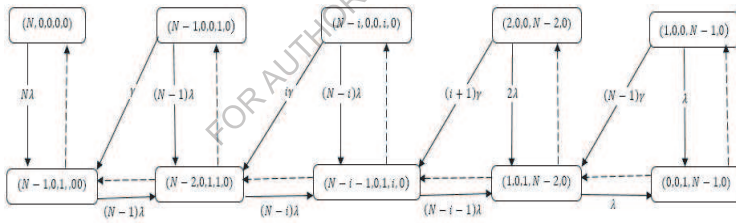


FIGURE 6.6:  $CTMC$  subordinée du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale.

Le noyau global  $K^{II}(t) = [K_{M_i^{II} M_j^{II}}^{II}(t)]$  du  $MRSPN$  associé à  $M/G/1//N$  avec rap-

pels classiques et recherche orbitale est donné par :

$$K_{M_i^{II}, M_j^{II}}^{II}(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - e^{-N\lambda t}, \text{ si } i = 0 \text{ et } j = 1; \\ \\ \int_0^t e^{-\lambda(N-1)x} dH(x), \text{ si } i = 1 \text{ et } j = 0; \\ \\ \int_0^t C_{N-1}^{\frac{j+1}{2}} (1 - e^{-\lambda x})^{\frac{j+1}{2}} (e^{-\lambda x})^{\frac{2N-j-3}{2}} dH(x)p, \\ \text{si } i = 1 \text{ et } 1 \leq j \leq 2N - 3, j \text{ impair}; \\ \\ \int_0^t C_{N-1}^{\frac{j}{2}} (1 - e^{-\lambda x})^{\frac{j}{2}} (e^{-\lambda x})^{\frac{2N-j-2}{2}} dH(x)(1-p), \\ \text{si } i = 1, 2 \leq j \leq 2N - 2 \text{ et } j \text{ pair}; \\ \\ \frac{\frac{i}{2}\gamma}{\frac{i}{2}\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda} (1 - e^{-[\frac{i}{2}\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda]t}), \\ \text{si } 2 \leq i \leq 2N - 2, i \text{ pair et } j = i - 1; \\ \\ \frac{(N - \frac{i}{2})\lambda}{\frac{i}{2}\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda} (1 - e^{-[\frac{i}{2}\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda]t}), \\ \text{si } 2 \leq i \leq 2N - 2, i \text{ pair et } j = i + 1; \\ \\ \int_0^t C_{\frac{2N-i-1}{2}}^{\frac{j-i+2}{2}} (1 - e^{-\lambda x})^{\frac{j-i+2}{2}} (e^{-\lambda x})^{\frac{2N-j-3}{2}} dH(x)p, \\ \text{si } 3 \leq i \leq 2N - 1, i \text{ impair et } i - 2 \leq j \leq 2N - 3, j \text{ impair}; \\ \\ \int_0^t C_{\frac{2N-i-1}{2}}^{\frac{j-i+1}{2}} (1 - e^{-\lambda x})^{\frac{j-i+1}{2}} (e^{-\lambda x})^{\frac{2N-j-2}{2}} dH(x)(1-p), \\ \text{si } 3 \leq i \leq 2N - 1, i \text{ impair et } i - 1 \leq j \leq 2N - 2, j \text{ pair}; \\ \\ 0, \quad \text{sinon.} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Le modèle II a le même noyau local que le modèle I et sa matrice de transition  $P^{II} = [P_{M_i^{II}, M_j^{II}}^{II}]$  est donnée par  $P^{II} = K^{II}(\infty)$ . Les caractéristiques du modèle II peuvent être obtenues en remplaçant, dans les formules (6.3)-(6.12), le vecteur des distributions stationnaires  $\pi^I$  par  $\pi^{II}$ .

**Remarque 8** Les deux modèles I et II peuvent être étendu facilement aux systèmes de files d'attente avec la politique des rappels constants tout en omettant dans le modèle I (FIGURE 6.1)

et dans le modèle II (FIGURE 6.5) le symbole # pour la transition temporisée EXP "t.retr" et la modification de certains éléments dans le noyau global  $K(t)$  et dans le noyau local  $E(t)$  comme suit :

$$K_{M_i M_j}(t) = \frac{\gamma (1 - e^{-[\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda]t})}{\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda}, \text{ si } 2 \leq i \leq 2N - 2, i \text{ pair et } j = i - 1;$$

$$K_{M_i M_j}(t) = \frac{(N - \frac{i}{2})\lambda (1 - e^{-[\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda]t})}{\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda}, \text{ si } 2 \leq i \leq 2N - 2, i \text{ pair et } j = i + 1;$$

$$E_{M_i M_j}(t) = e^{-[\gamma + (N - \frac{i}{2})\lambda]t}, \text{ si } 2 \leq i \leq 2N - 2, i \text{ pair et } j = i.$$

## 6.4 Résultats numériques

Nous montrons comment les deux modèles MRSPN donnés dans les sections précédentes peuvent être utilisés pour obtenir les mesures de performance des deux systèmes  $M/G/1//N$  avec rappels classiques (modèle I) et  $M/G/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale (modèle II). Les résultats numériques sont établis en utilisant l'algorithme "Algo-MRSPN-M/G/1//N" qu'on a élaboré sous Matlab. Le principe de cet algorithme est donné comme suit (voir l'algorithme 2) :

---

### Algorithme 2: Algo-MRSPN-M/G/1//N

---

#### Debut

**étape 1 :** Générer les matrices  $P$  et  $\alpha$  du modèle I (resp. du modèle II) en utilisant les équations (6.1)-(6.2).

**étape 2 :** Calculer les distributions stationnaires de l'EMC du modèle I (resp. du modèle II) en résolvant le système (3.6) par la méthode de Gauss.

**étape 3 :** Calculer les distributions stationnaires du modèle I (resp. du modèle II) en utilisant la formule (3.7).

**étape 4 :** Calculer les indices de performance du modèle I (resp. du modèle II) en utilisant les formules (6.3)-(6.12).

#### Fin.

---

Des résultats graphiques sont représentés pour étudier l'influence du taux des arrivées, le taux des rappels et la probabilité de recherche orbitale sur le temps de moyen

---

réponse, sur le nombre moyen de clients dans l'orbite et sur l'utilisation du serveur.

Dans la TABLE 6.1, le modèle  $I$  proposé pour la file d'attente  $M/G/1//N$  avec rappels classiques est validé par les résultats numériques exacts donnés dans [16] pour les paramètres " $N = 8, \lambda = 0.5, \gamma = 7.2, q = 0.35, \mu_1 = 12, \mu_2 = 9$ ". On constate que les indices de performance correspondant au  $MRSPN$  associé au système  $M/G/1//N$  avec rappels classiques sont similaires à ceux obtenus dans [16].

$i$	$P_{(N-i,0,0,i)}$	$P_{(N-i-1,0,1,i)}$	$\pi_{(N-i,0,0,i)}^I$	$\pi_{(N-i-1,0,1,i)}^I$
0	0,50585	0,20421	0,5058559	0,2042149
1	0,09927	0,10799	0,0992711	0,1079912
2	0,02249	0,04007	0,0224982	0,0400719
3	0,00463	0,01151	0,0046380	0,0115193
4	0,00079	0,00255	0,0008000	0,0025573
5	0,00010	0,00041	0,0001066	0,0004180
6	$0,96 \times 10^{-5}$	0,00004	$0,97 \times 10^{-5}$	0,0000451
7	$0,44 \times 10^{-6}$	$0,24 \times 10^{-5}$	$0,44 \times 10^{-6}$	$0,24 \times 10^{-5}$

TABLE 6.1: Comparaison des distributions stationnaires du modèle  $M/H_2/1//N$  avec rappels classiques données dans [16] avec celles de notre modèle  $I$ .

Dans la TABLE 6.2, le modèle  $II$  proposé ( $M/G/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale) est validé par les résultats numériques exactes données dans [167] pour les paramètres " $N = 3, \lambda = 0.1, \gamma = 0.0025, \mu = 1, p = 0.5$ ". Nous constatons que les indices de performance correspondant au  $MRSPN$  associé au système  $M/G/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale sont similaires à ceux obtenus dans [167].

Dans les trois TABLES 6.3, 6.4 et 6.5, nous présentons les résultats numériques pour des différents distributions à deux phases (Hypo-exponential " $Hypo_2 : h(x) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (e^{-\mu_2 x} - e^{-\mu_1 x})$ " avec les paramètres " $\lambda = 0.8, N = 7, \gamma = 5, \mu_1 = 21, \mu_2 = 14, p = 0.5$ ", Hyper-exponential " $H_2 : h(x) = q\mu_1 e^{-\mu_1 x} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 x}$ " avec les paramètres " $\lambda = 2.3, N = 8, \gamma = 5.2, q = 0.35, \mu_1 = 30, \mu_2 = 25, p = 0.2$ " et Erlang " $E_2 : h(x) = 4\mu^2 x e^{-2\mu x}$ " avec les paramètres " $\lambda = 1.5, N = 9, \gamma = 2.1, \mu = 10, p = 0.85$ ") pour les deux modèles  $I$  et  $II$ .

Mesures	M/M/1/3/3	$MRSPN(\text{Modèle } II)$
$n_o^{II}$	0.3648981538	0.3648981
$n_s^{II}$	0.6044528670	0.6044528
$a_s^{II}$	2.395547133	2.3955472
$\bar{\lambda}^{II}$	0.2395547133	0.2395547
$\bar{w}^{II}$	1.523235126	1.5232351
$\varpi^{II}$	2.523235126	2.5232351

TABLE 6.2: Comparaison de quelques caractéristiques du système  $M/M/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale donnés dans [167] avec celle de notre modèle  $II$ .

Mesures	Modèle $I$	Modèle $II$	Mesures	Modèle $I$	Modèle $II$
$n_o$	1.0060990	0.6493675	$B_s$	0.5212088	0.5522289
$n_s$	1.5273077	1.2015964	$B_p$	0.4614151	0.4893249
$a_s$	5.4726925	5.7984037	$B_r$	0.5984199	0.7331295
$\bar{\lambda}$	4.3781538	4.6387229	$\bar{w}$	0.2297998	0.1399884
$\bar{\gamma}$	5.0304947	3.2468374	$\varpi$	0.3488474	0.2590360

TABLE 6.3: Quelques mesures de performance pour un service Hypo-exponentiel.

Mesures	Modèle I	Modèle II	Mesures	Modèle I	Modèle II
$n_o$	2.0397968	1.6502372	$B_s$	0.4751854	0.5062435
$n_s$	2.5149822	2.1564808	$B_p$	0.4205691	0.4509442
$a_s$	5.4850178	5.8435192	$B_r$	0.4997894	0.5505898
$\bar{\lambda}$	12.6155405	13.4400940	$\bar{w}$	0.1616892	0.1227847
$\bar{\gamma}$	10.6069441	8.5812340	$\varpi$	0.1993559	0.1604513

TABLE 6.4: Quelques mesures de performance pour un service Hyper-exponentiel.

Mesures	Modèle I	Modèle II	Mesures	Modèle I	Modèle II
$n_o$	4.2721696	2.3794110	$B_s$	0.6166735	0.8635551
$n_s$	4.8888431	3.2429662	$B_p$	0.5629232	0.8254101
$a_s$	4.1111569	5.7570338	$B_r$	0.6130662	0.9063280
$\bar{\lambda}$	6.1667352	8.6355505	$\bar{w}$	0.6927766	0.2755367
$\bar{\gamma}$	8.9715557	4.9967632	$\varpi$	0.7927765	0.3755367

TABLE 6.5: Quelques mesures de performance pour un service Erlang.

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques résultats numériques dans le but d'illustrer graphiquement l'impact de la variation des différents paramètres des modèles étudiés sur leurs principales caractéristiques.

Dans la FIGURE 6.7, on voit que le temps moyen de réponse de la file d'attente  $M/G/1//N$  avec rappels classiques possède un maximum. L'emplacement et l'amplitude de ce maximum dépend du taux des rappels  $\gamma$ . Nous constatons que le taux des arrivées  $\lambda$  a une influence significative sur le temps de réponse moyen lorsque le taux des rappels  $\gamma$  est faible. En outre, pour des valeurs élevées du taux des rappels, cette influence est non significative. On constate également que toutes les courbes se rapprochent les unes des autres pour les grandes valeurs du taux des arrivées  $\lambda$ .

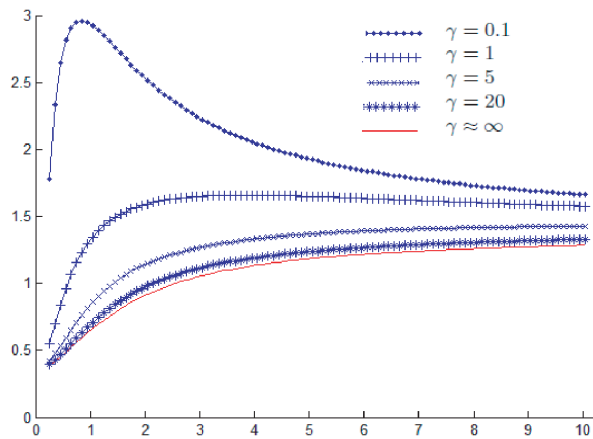


FIGURE 6.7: Effet du taux des arrivées sur le temps moyen de réponse du modèle  $I$ ; " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5)$ ".

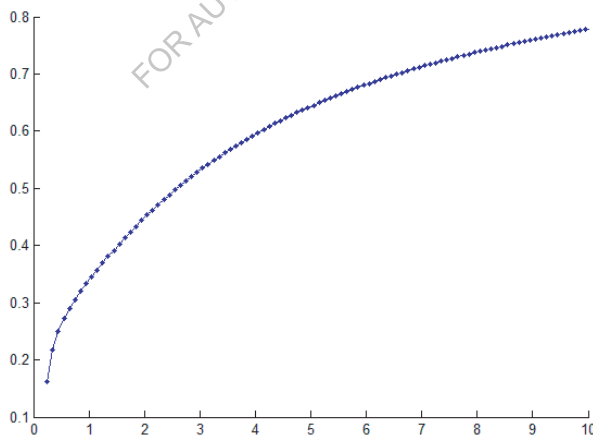


FIGURE 6.8: Effet du taux des arrivées sur l'utilisation du serveur du modèle  $I$ ; " $N = 4, \lambda = 10^{-1}, \dots, 20, Hypo_2(7; 5), \gamma = 0.25$ ".

Dans la FIGURE 6.8, nous remarquons que l'augmentation du taux des arrivées  $\lambda$  induit une augmentation de l'utilisation du serveur.

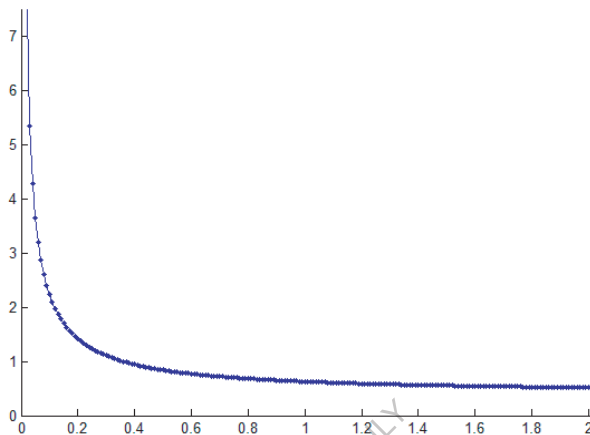


FIGURE 6.9: Effet du taux des rappels sur le temps moyen de réponse du modèle  $I$ ; " $N = 4, \lambda = 0.2, Hypo_2(7; 5), \gamma = 10^{-2}, r = 2$ ".

Dans la FIGURE 6.9, on observe que le temps moyen de réponse diminue lorsque le taux des rappels  $\gamma$  augmente. Ce taux des rappels a un effet significatif sur le temps de réponse moyen quand il est faible.

De la FIGURE 6.10, nous constatons que le nombre moyen de clients dans l'orbite diminue avec l'augmentation du taux des rappels  $\gamma$ . Cette diminution devient lente avec l'intensification des appels répétés.

Finalement, à partir des graphes du modèle  $I$ , nous constatons que lorsque le taux des rappels tend à  $(+\infty)$  toutes les caractéristiques considérées (le temps moyen de réponse, le nombre moyen de clients dans l'orbite et l'utilisation du serveur) se rapprochent des caractéristiques du système classique  $M/G/1//N$ .

Dans la FIGURE 6.11 et la FIGURE 6.12, on remarque que le temps moyen de réponse de la file d'attente  $M/G/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale possède un maximum. L'emplacement et l'amplitude de ce maximum dépend du taux des rappels  $\gamma$  et de la probabilité de recherche orbitale  $p$ . Pour des valeurs élevées de la probabilité de recherche orbitale  $p$  ou des valeurs plus faibles du taux des rappels  $\gamma$ ,



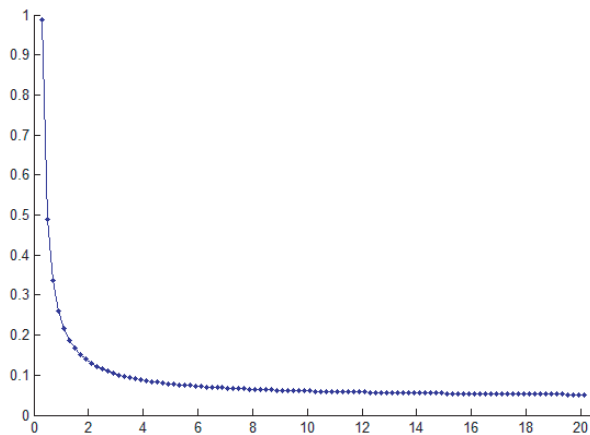


FIGURE 6.10: Effet du taux des rappels sur le nombre moyen des clients dans l'orbite ;  
 " $N = 4, \lambda = 0.2, Hypo_2(7; 5), \gamma = 10^{-1}, \dots, 20$ ".

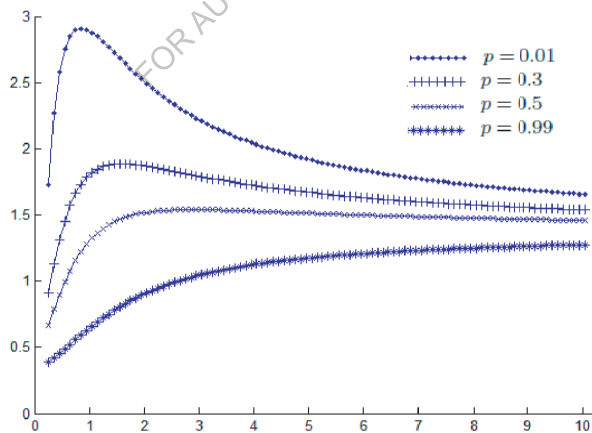


FIGURE 6.11: Effet du taux des arrivées sur le temps moyen de réponse du modèle II ;  
 " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5), \gamma = 0.1$ ".

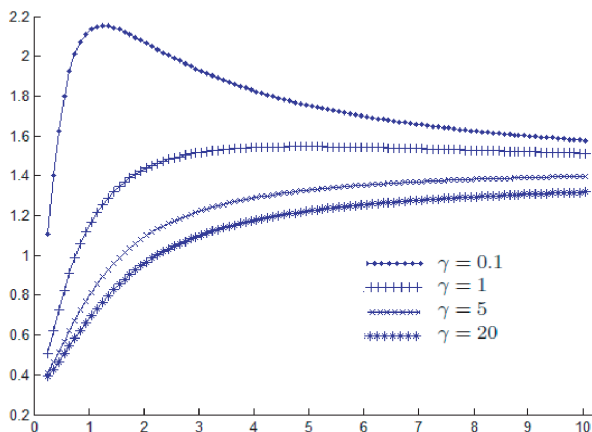


FIGURE 6.12: Effet du taux des arrivées sur le temps moyen de réponse du modèle II ; " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5), p = 0.2$ ".

le maximum devient moins dominant. Le taux des arrivées  $\lambda$  a une influence significative sur le temps de réponse moyen lorsque le taux des rappels  $\gamma$  est faible et/ou ( $p \in \{0.01, 0.3, 0.5\}$ ). En outre, nous avons constaté que toutes les courbes se rapprochent les unes des autres pour des grandes valeurs du taux des arrivées  $\lambda$ .

Dans la FIGURE 6.13, on observe que l'augmentation du taux des arrivées  $\lambda$  induit une augmentation de l'utilisation du serveur. Pour des valeurs élevées de la probabilité de recherche orbitale  $p$  l'utilisation du serveur se rapproche de 1.

De la FIGURE 6.14, nous constatons que le nombre moyen de clients dans l'orbite diminue avec l'augmentation du taux des rappels  $\gamma$ . Cette diminution n'est pas considérable pour les valeurs du taux des rappels. Pour des valeurs élevées de  $\gamma$  le comportement de système d'attente à source finie avec rappels classiques et recherche orbitale tend vers le comportement du système classique  $M/G/1//N$ . Enfin, notre étude confirme que l'utilisation du serveur augmente avec l'augmentation de la probabilité de recherche orbitale  $p$ . Cela signifie que le temps d'inactivité du serveur réduit en utilisant la politique de recherche orbitale.

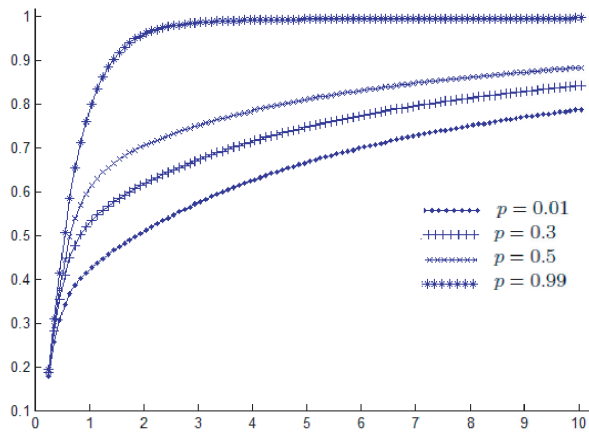


FIGURE 6.13: Effet du taux des arrivées sur l'utilisation du premier serveur du modèle  $II$ ; " $N = 4, \lambda = 0.15, \dots, 10, Hypo_2(7; 5), \gamma = 0.25$ ".

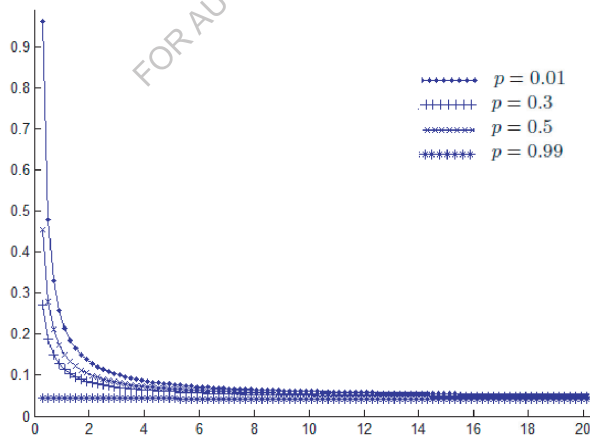


FIGURE 6.14: Effet du taux des rappels sur le nombre moyen de clients dans l'orbite; " $N = 4, \lambda = 0.2, Hypo_2(7; 5), \gamma = 10^{-1}, \dots, 20$ ".

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche alternative pour la modélisation et l'analyse des systèmes de files d'attente semi-markoviennes avec rappels est présentée. En effet, une analyse qualitative et quantitative du système  $M/G/1//N$  avec rappels classiques est obtenue par le formalisme  $MRSPN$  basée sur la théorie des  $MRP$ , à titre d'exemple, nous avons détaillé l'analyse de la file d'attente avec rappels classiques  $M/Hypo_2/1//2$ . De plus, nous avons étendu cette étude au  $MRSPN$  associé au système  $M/G/1//N$  avec rappels classiques et recherche orbitale. Les caractéristiques des deux systèmes étudiés sont obtenus et des résultats numériques sont établis par un algorithme élaboré sous Matlab. Le dernier chapitre qui suivra portera sur l'application, pour la première fois, de la méthode de stabilité forte à un modèle  $SPN$ .

FOR AUTHOR USE ONLY

## Chapitre 7

---

# Stabilité forte du modèle

## IMRSPN-M/G/1

---

### 7.1 Introduction

Peu de travaux sont réalisés dans le domaine de l'analyse de stabilité des  $PN$ , puisque la majorité des travaux qui se font actuellement sur les  $PN$  sont plus de type applicatif que théorique. Néanmoins, il a été démontré qu'il existe une similitude entre la stabilité des systèmes dynamiques et la bornitude des  $PN$  [12]. En effet, la théorie de la stabilité de Lyapunov fournit les outils nécessaires pour aborder le problème de stabilité pour les systèmes à événements discrets modélisés par les  $PN$  temporisés, dont le modèle mathématique est donné en termes d'équations différentielles [157]. La condition de bornitude pour obtenir cette stabilité est nécessaire et suffisante dans le cas de  $PN$  continus et elle est une condition nécessaire pour les  $PN$  discrets. L'application de la méthode de Lyapunov pour l'étude de la stabilité des  $PN$  a été établie. Les premiers travaux sur la stabilité des systèmes d'attente modélisés par des  $PN$  en utilisant l'approche de stabilité de Lyapunov peuvent être trouvés dans [158]. Cependant, cette méthode de stabilité est qualitative elle ne permet que d'affirmer ou pas la stabilité du modèle étudié sous certaines conditions nécessaires et/ou suffisantes. Alors, on a pensé à appliquer la méthode de stabilité forte qui est une méthode quantitative,

comme on l'a déjà signalé, i.e. qui permet en plus d'affirmer la stabilité du modèle, d'estimer la déviation des distributions stationnaires des deux modèles : perturbé et réel. Ainsi, dans ce chapitre, nous allons appliquer pour la première fois la méthode de stabilité forte aux *SPN* [120, 96]. En effet, comme première tentative, nous avons approximé les caractéristiques du modèle réel *IMRSPN-M/G/1* (i.e. le *MRSPN* infini qui modélise le système semi-markovien *M/G/1*) par celles du modèle approximatif *IGSPN-M/M/1* (i.e. le *GSPN* infini qui modélise le système *M/M/1*) une fois avoir établi la stabilité forte du modèle réel après la perturbation du taux de franchissement de la transition *GEN* qui modélisent le service [120].

## 7.2 IGSPN associé à M/M/1

La FIGURE 7.1 montre le modèle *IGSPN* associé au système *M/M/1* (i.e. *IGSPN-M/M/1*).

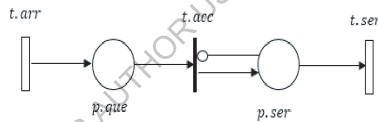


FIGURE 7.1: Modèle *IGSPN-M/M/1*.

Ce *IGSPN* contient deux places *p.que* et *p.ser* qui représentent respectivement la file d'attente et le serveur. Ce modèle contient trois transitions *t.arr*, *t.acc* et *t.ser*. Les taux de tir des transitions temporisées *EXP* *t.arr* et *t.ser* sont respectivement  $\lambda$  et  $\mu$ . Dans la FIGURE 7.1, les boîtes rectangulaires blanches représentent les transitions *EXP* et la barre noire mince représente la transition immédiate.

- Le tir de la transition *EXP* *t.arr* indique l'arrivée d'un client dans le système. Dans ce cas, la place non bornée *p.que* reçoit un jeton.
- La transition immédiate *t.acc* est sensibilisée lorsque la place *p.que* contient au moins un jeton et *p.ser* ne contient pas un jeton, ceci est représenté graphiquement par l'arc inhibiteur qui relie la place *p.ser* avec la transition *t.acc*. Le tir

instantané de la transition immédiate  $t.acc$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.que$  et à construire un jeton dans la place  $p.ser$ , cela signifie que le client commence son service et le serveur se déplace de l'état libre à l'état occupé.

- La transition  $EXP t.ser$  est sensibilisée lorsque la place  $p.ser$  contient un jeton. Le tir de la transition  $EXP t.ser$  consiste à détruire un jeton dans la place  $p.ser$ , cela signifie que le client quitte le système et le serveur passe de l'état occupé à l'état libre.

La FIGURE 7.2 montre le graphe d'accessibilité réduit et la CTMC du modèle IGSPN-M/M/1.  $M_0 = (0, 0)$  est le marquage initiale du IGSPN-M/M/1 et  $\Omega = \{M_0 = (0, 0), M_{i+1} = (i, 1), i \geq 0\}$  est l'ensemble de ses états.

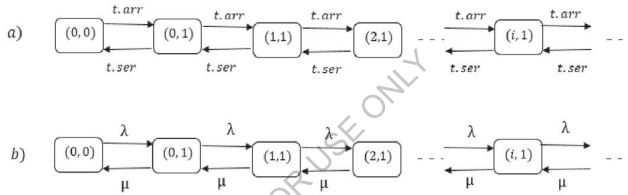


FIGURE 7.2: a) Graphe des marquages réduit du modèle IGSPN-M/M/1; b) CTMC du modèle IGSPN-M/M/1.

A partir de cette CTMC on construit le générateur infinitésimal  $Q = [q_{M_i M_j}]$ , avec  $M_i, M_j \in \Omega$ :

$$q_{M_i M_j} = \begin{cases} -\lambda, & \text{si } i = 0, j = 0; \\ \lambda, & \text{si } i \geq 0, j = i + 1; \\ \mu, & \text{si } i \geq 1, j = i - 1; \\ -(\lambda + \mu), & \text{si } i \geq 0, i = j; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le vecteur de probabilités stationnaires  $\pi = (\pi_{(0,0)}, \pi_{(0,1)}, \pi_{(1,1)}, \dots, \pi_{(i,1)}, \dots)$  existe lorsque  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ . En résolvant le système d'équations linéaires  $\pi Q = 0$  avec de la condition

de normalisation  $\pi \mathbb{1} = 1$ , on obtient :

$$\begin{cases} \pi_{(0,0)} = 1 - \rho; \\ \pi_{(i,1)} = (1 - \rho)\rho^{i+1}, \text{ pour } i \geq 0. \end{cases}$$

### 7.3 IMRSPN associé à M/G/1

Nous considérons la file d'attente M/G/1. Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et demandent un temps de service distribué suivant une loi générale de fonction de répartition  $H(\cdot)$ . La FIGURE 7.3 montre le modèle IMRSPN associé au système M/G/1 (i.e IMRSPN-M/G/1).

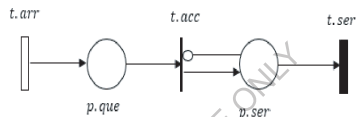


FIGURE 7.3: Modèle IMRSPN-M/G/1.

La transition *GEN t.ser* est indiquée par la boîte noire rectangulaire. Les politiques de la transition *GEN t.ser* sont : la politique de compétition pour la politique de sélection, la politique de la mémoire de la dernière sensibilisation pour la politique de mémoire temporelle et serveur unique pour la politique de service [125].

La FIGURE 7.4 montre le graphe d'accessibilité réduit et la CTMC subordonnée associée au modèle IMRSPN-M/G/1.

Les instants de régénérations du IMRSPN-M/G/1 correspondent au franchissement de la transition *EXP t.arr* dans l'état  $M_0 = (0, 0)$  et au franchissement de la transition *GEN t.ser* dans les états  $M_{i+1} = (i, 1)$ ,  $i \geq 0$ .

Le générateur infinitésimal  $Q = [q_{M_i, M_j}]$ , avec  $M_i, M_j \in \Omega$ , de la CTMC subordonnée à



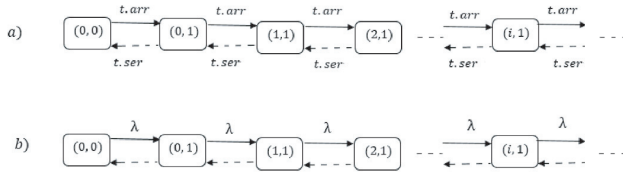


FIGURE 7.4: a) Graphe des marquages réduit du modèle *IMRSPN-M/M/1*; b) *CTMC* subordonnée du modèle *IMRSPN-M/G/1*.

la transition *GEN*  $t.ser$  est donné par :

$$q_{M_i M_j} = \begin{cases} -\lambda, & \text{si } i = j; \\ \lambda, & \text{si } i \geq 0, j = i + 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau local  $E(t) = [E_{M_i M_j}(t)]$  est donné par :

$$E_{M_i M_j}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & \text{si } i = j = 0; \\ \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} [1 - H(t)], & \text{si } i \geq 1, j \geq i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau global  $K(t) = [K_{M_i M_j}(t)]$  est donné par :

$$K_{M_i M_j}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } i = 0, j = 1; \\ \int_0^t \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda x} dH(x), & \text{si } i \geq 1, j \geq i-1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

A partir du noyau global, nous obtenons la matrice de transition  $P = [P_{M_i M_j}]$ , où :

$$P_{M_i M_j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0, j = 1; \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda x} dH(x), & \text{si } i \geq 1, j \geq i-1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De la formule (3.4), nous obtenons la matrice  $\alpha = [\alpha_{M_i M_j}]$ , où :

$$\alpha_{M_i M_j} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{si } i = j = 0; \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} [1 - H(t)] dt, & \text{si } i \geq 1, j \geq i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque le temps de tir de la transition *GEN t.ser* est distribué de façon exponentielle avec la fonction de répartition  $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ , aux mêmes instants de régénération du modèle *IMRSPN-M/G/1*, nous obtenons le noyau local  $\tilde{E}(t)$ , le noyau global  $\tilde{K}(t)$ , la matrice de transition  $\tilde{P} = [\tilde{P}_{M_i M_j}]$  et la matrice  $\tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha}_{M_i M_j}]$  du *IGSPN-M/M/1* :

$$\tilde{E}_{M_i M_j}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & \text{si } i = j = 0; \\ \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-(\lambda+\mu)t}, & \text{si } i \geq 1, j \geq i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{K}_{M_i M_j}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } i = 0, j = 1; \\ \int_0^t \frac{\mu(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-(\lambda+\mu)x} dx, & \text{si } i \geq 1, j \geq i-1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{P}_{M_i M_j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0, j = 1; \\ a_j = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{j-i+1}, & \text{si } i \geq 1, j \geq i-1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}_{M_i M_j} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{si } i = j = 0; \\ \frac{1}{\lambda + \mu} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{j-i}, & \text{si } i \geq 1, j \geq i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations linéaires  $\tilde{\pi}^e P = \tilde{\pi}^e$  et  $\tilde{\pi}^e \mathbf{1} = 1$ , les probabilités stationnaires  $\tilde{\pi}^e = (\tilde{\pi}_{(0,0)}^e, \tilde{\pi}_{(0,1)}^e, \dots, \tilde{\pi}_{(1,1)}^e, \dots)$  de l'*EMC* associée au *IGSPN-M/M/1* sont donnés explicitement par :

$$\begin{cases} \tilde{\pi}_{(0,0)}^e = \frac{1-\rho}{2-\rho}; \\ \tilde{\pi}_{(0,1)}^e = (1+\rho)\tilde{\pi}_{(0,0)}^e; \\ \tilde{\pi}_{(i,1)}^e = \rho^{i+1}\tilde{\pi}_{(0,0)}^e, \text{ pour } i \geq 1. \end{cases}$$

et les distributions stationnaires du modèle IGSPN-M/M/1 données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\pi}_{(0,0)} = 1 - \rho; \\ \tilde{\pi}_{(i,1)} = (1 - \rho)\rho^{i+1} \text{ pour } i \geq 0; \end{cases}$$

sont obtenues à partir de la formule 3.7.

## 7.4 $v$ -stabilité forte du modèle IGSPN-M/M/1

Dans cette section, nous étudions la  $v$ -stabilité forte de  $Y_n$  l'EMC du modèle IGSPN-M/M/1. L'adaptation du théorème 11 à notre modèle nous permet d'énoncer le théorème suivant :

### **Théorème 13** [Ikhlef et al]

Supposons que  $\rho < 1$ ,  $Y_n$  l'EMC du modèle IGSPN-M/M/1 est fortement  $v$ -stable pour une fonction  $v(l) = \beta^l$ , tel que :  $1 < \beta < \frac{1}{\rho}$ .

**Preuve 1** Pour prouver la  $v$ -stabilité de  $Y_n$  l'EMC du modèle IGSPN-M/M/1, on choisit la fonction test  $v$ , la fonction mesurable  $h$  et la mesure  $\sigma$ , telle que :

$$\begin{aligned} v(l) &= \beta^l; \\ h(i) &= \begin{cases} 1, & \text{si } i=0; \\ a_1 = \frac{\rho}{(1+\rho)^2}, & \text{si } i=1; \\ a_0 = \frac{1}{1+\rho}, & \text{si } i=2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \\ \sigma(j) &= \begin{cases} 1, & \text{si } j=1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Vérifions la première condition du corollaire 1 :

- $\sigma \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} \sigma(j) = 1;$
- $\pi^e h = \pi_{(0,0)}^e + \sum_{j \geq 1} \pi_{(j-1,1)}^e h(j) = \pi_{0,0}^e + a_1 \pi_{0,1}^e + a_0 \pi_{1,1}^e = \frac{(1-\rho)(3\rho+1)}{(2-\rho)(1+\rho)} > 0;$
- $\sigma h = \sum_{j \geq 0} \sigma(j) h(j) = a_1 = \frac{\rho}{(1+\rho)^2} > 0.$

2. On vérifie la deuxième condition du corollaire 1, le noyau  $T$  est non négative ( $T \geq 0$ )

car :

$$T = P - h \circ \sigma = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1; \\ 0, & \text{si } i = 1 \text{ et } j = 1; \\ 0, & \text{si } i = 2 \text{ et } j = 1; \\ P_{ij}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. On vérifie la troisième condition du corollaire 1 :

$$Tv(l) = \sum_{l \geq 0} Tv(l) = \sum_{l \geq 0} \beta^l T.$$

On distingue trois cas :

cas : ( $l = 0$ )

$$Tv(l) = Tv(0) = \sum_{l \geq 0} \beta^l T = 0.$$

cas : ( $l = 1$ )

$$Tv(1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu}\right)} - a_1\beta = v(1)\psi_1 \quad \text{si } \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} < 1;$$

où :

$$\psi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[ \frac{1}{\beta\left(1 - \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu}\right)} - a_1 \right].$$

cas : ( $l = 2$ )

$$Tv(l) = \beta \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu}\right)} - a_0 \right) = v(2)\psi_2 \quad \text{si } \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} < 1;$$

où :

$$\psi_2 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\beta\left(1 - \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu}\right)} - \frac{a_0}{\beta}.$$

cas : ( $l \geq 3$ )

$$Tv(l) = \beta^{l-1} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu}\right)} = v(l)\psi_3 \quad \text{si } \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} < 1;$$

où :

$$\psi_3 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\beta \left(1 - \frac{\beta \lambda}{\lambda + \mu}\right)}.$$

Pour vérifier la troisième condition du corollaire 1, on choisit :

$$\psi = \max \{ \psi_1, \psi_2, \psi_3 \} = \psi_3;$$

où :

$$\psi_3 = \frac{1}{\beta + \beta \rho - \beta^2 \rho} < 1 \quad \text{si } \beta < \frac{1}{\rho}.$$

4. Finalement, on vérifie la quatrième condition du corollaire 1 :

$$T = P - h \circ \sigma \Rightarrow P = T + h \circ \sigma \Rightarrow \|P\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\sigma\|_v.$$

On a :

$$\|T\|_v = \sup \{ \psi_1, \psi_2, \psi_3 \} = \psi_3 < 1;$$

$$\|h\|_v = \sup \left\{ 1, \frac{a_1}{\beta}, \frac{a_0}{\beta^2} \right\} = 1;$$

$$\|\sigma\|_v = \beta < \frac{1}{\rho}.$$

Donc :

$$\|P\|_v < 1 + \frac{1}{\rho} < +\infty.$$

## 7.5 Déviation de la matrice de transition

Nous estimons la déviation des opérateurs de transition  $\tilde{P}$  et  $P$  des deux modèles  $IGSPN-M/M/1$  et  $IMRSPN-M/G/1$ .

**Lemme 1** [40]

Supposons que  $\int x |F - H|(dx) < \frac{w}{\lambda}$  où  $w = w(F, H) = \int |F - H|(dx)$  ( $F$  et  $H$  sont respectivement les lois des deux distributions des arrivées et de service et  $w$  est la mesure de la proximité). Alors, il existe  $\beta > 1$  tel que :  $\frac{1}{\beta} \int e^{(\lambda\beta - \lambda)x} |F - H|(dx) < w$ .

**Théorème 14** [Ikhlef et al]

Soit  $\beta_0 = \sup \left\{ \beta : \frac{1}{\beta} \int e^{(\lambda\beta - \lambda)x} |F - H|(dx) < w \right\}$  et  $\tilde{P}$  (resp.  $P$ ) le noyau de transition de

l'EMC du modèle IGSPN-M/M/1 (resp. du modèle IMRSPN-M/G/1). Alors, pour tout  $\beta$  tel que,  $1 < \beta < \beta_0$ , on a :

$$\|\tilde{P} - P\|_v < w, \text{ pour } v(l) = \beta^l.$$

**Preuve 2** Nous estimons la norme de déviation entre les matrices de transition  $\|\Delta\|_v = \|\tilde{P} - P\|_v$  donnée par :

$$\|\Delta\|_v = \sup_{l \geq 0} \frac{1}{\beta^l} \sum_{i \geq 0} \beta^i |\Delta_{l,i}|;$$

où :

$$|\Delta_{l,i}| = \left| \tilde{P}_{l,i} - P_{l,i} \right|.$$

On distingue les deux cas suivants :

cas 1 : ( $l = 0$ )

On a :

$$\|\tilde{P} - P\|_w = 0.$$

cas 2 : ( $l \geq 1$ )

On a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{P} - P\|_v &= \sup_{l \geq 1} \left\{ \frac{1}{\beta^l} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left| \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^{j-l+1} e^{-\lambda x}}{(j-l+1)!} dF(x) - \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^{j-l+1} e^{-\lambda x}}{(j-l+1)!} dH(x) \right| \right\}; \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta \lambda x)^j e^{-\lambda x}}{j!} |F - H|(dx); \\ &\leq \frac{1}{\beta} \int e^{(\lambda \beta - \lambda)x} |F - H|(dx). \end{aligned}$$

Sous la condition du lemme 1, on obtient :

$$\|\tilde{P} - P\|_v \leq \frac{1}{\beta} \int e^{(\lambda \beta - \lambda)x} |F - H|(dx) < w.$$

## 7.6 Inégalités de stabilité

Nous estimons la déviation entre les distributions stationnaires  $\tilde{\pi}^e$  et  $\pi^e$  des deux modèles IGSPN-M/M/1 et IMRSPN-M/G/1.

**Théorème 15 [Ikhlef et al]**

Soit  $\tilde{\pi}^e$  (resp.  $\pi^e$ ) la distribution stationnaire de l'EMC du modèle IGSPN-M/M/1 (resp. du

IMRSPN-M/G/1). Pour tout  $1 < \beta < \beta_0$  et sous la condition :

$$w < \frac{1 - \frac{1}{\beta + \beta\rho - \beta^2\rho}}{1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}}$$

on a l'estimateur :

$$\|\tilde{\pi}^e - \pi^e\|_v \leq \frac{w(1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}) \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}}{1 - \frac{1}{\beta + \beta\rho - \beta^2\rho} - w(1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)})} = ESP^e.$$

**Preuve 3** D'après la conséquence 2, nous avons :

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v c (1 - \psi - c \|\Delta\|_v)^{-1}.$$

avec :

$$c = 1 + \|\mathbf{I}\|_v \|\pi^e\|_v = 1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)};$$

et :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I}\|_v &= 1; \\ \|\tilde{\pi}^e\|_v &= \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}; \end{aligned}$$

on a aussi :

$$\|\Delta\|_v \leq w;$$

sous la condition :

$$w < \frac{1-\psi}{c} = \frac{1 - \frac{1}{\beta + \beta\rho - \beta^2\rho}}{1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}}.$$

et  $\psi = \frac{1}{\beta + \beta\rho - \beta^2\rho} < 1$ , l'estimateur précédent est obtenu.

## 7.7 Mesure de performance de la méthode de stabilité forte

Dans cette section, nous mesurons la performance de la méthode de stabilité forte en SPN par l'élaboration d'un algorithme **Algo-Stab-IMRSPN** dans l'environnement

Matlab. Cet algorithme basé sur les résultats théoriques donnés dans les sections précédentes. Il donne l'erreur  $ESP^e$  entre le vecteur des probabilités stationnaires des deux  $EMC$  du  $IMRSPN-M/G/1$  et  $IGSPN-M/M/1$ . L'idée principale de cet algorithme est de calculer les valeurs optimales pour le paramètre  $\beta$  qui minimise la borne  $\|\tilde{\pi}^e - \pi^e\|_v$  (voir l'algorithme 3).

Comme exemple illustratif, nous considérons l'approximation du modèle  $IMRSPN-M/H_2/1$  par le modèle  $IGSPN-M/M/1$ , et nous choisissons les paramètres,  $\lambda = 0.18$  et  $h(x) = H_2(1.4, 2, 0.3)$ .

Nous calculons l'erreur commise par l'approximation de  $IMRSPN-M/H_2/1$  par  $IGSPN-M/M/1$ . L'algorithme **Algo-Stab-IMRSPN**, nous donne :

- La variation  $w$  des deux distributions  $F$  et  $H$  est :  $w = 0.0171499$ .
- Le domaine de stabilité est :  $1 < \beta < 9.8452883$ .
- Le domaine de l'approximation est :  $1.0412544 \leq \beta \leq 6.5369363$ .

L'erreur entre les distributions stationnaires des deux  $EMC$  associées aux deux modèles  $IMRSPN-M/H_2/1$  et  $IGSPN-M/M/1$  pour des valeurs différentes du paramètre  $\beta$  est donnée dans la TABLE 7.1 et la FIGURE 7.5.

Dans la FIGURE 7.5, on constate que le graphe obtenu a un minimum pour  $\beta = 1.9312544$  et l'erreur minimale est  $ESP_{min}^e = 0.1674421$ .

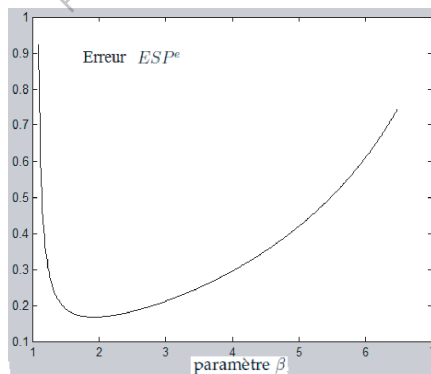


FIGURE 7.5: Évolution de l'erreur  $ESP^e$  en fonction du paramètre  $\beta$ , pour " $\lambda = 0.18$ ,  $H_2(1.4, 2, 0.3)$ ".



**Algorithme 3: Algo-Stab-IMRSPN****Debut****étape 1** : Donner les paramètres d'entrées : $\lambda$  : le taux de franchissement de la transition *EXP t.arr* ; $H(x)$  : la distribution de la transition *GEN t.ser*.**étape 2** : Calculer le paramètre  $\mu$ , le taux de franchissement de la transition *GEN t.ser*

$$\mu = \frac{1}{\int_0^{\infty} x dH(x)}.$$

**étape 3** : Vérifier la condition d'ergodicité géométriquesi  $(\rho = \frac{\lambda}{\mu} \geq 1)$  alors"Le model *IGSPN-M/M/1* est instable." **quitter l'Algo.**

sinon

"Le système est stable et le domaine de  $v$ -stabilité forte est :  $1 < \beta < \frac{1}{\rho}$ ." **aller à étape 4**

fin

**étape 4** : Determiner  $w$  la variation de  $H(x)$  et  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  :  $w = w(F, H) = \int_0^{\infty} |F - H|(dx)$ .**étape 5** : Vérification des coditions d'approximation du modèle *IMRSPN-M/G/1* par le modèle *IGSPN-M/M/1* :si  $\int_0^{\infty} x |F - H|(dx) \geq \frac{w}{\lambda}$  alors"L'approximation ne peut être validée." **quitter l'Algo.**

sinon

"L'approximation est validée." **aller à étape 6**

fin

**étape 6** : Calculer  $\beta_0$  :  $\beta_0 = \sup \left\{ \beta : \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{(\lambda\beta - \lambda)x} |F - H|(dx) < w \right\}$ .**étape 7** : Determiner le domaine d'approximation  $\beta_{min} \leq \beta \leq \beta_{max}$  :

$$\beta_{min} = \min \left\{ \beta : 1 < \beta < \rho \text{ et } w < \frac{1 - \frac{1}{\beta + \beta\rho - \beta^2\rho}}{1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}} \right\};$$

$$\beta_{max} = \max \left\{ \beta : 1 < \beta < \rho \text{ et } w < \frac{1 - \frac{1}{\beta + \beta\rho - \beta^2\rho}}{1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}} \right\}.$$

**étape 8** : Calculer l'erreur minimale  $ESP_{min}^e$  dans le domaine  $[\beta_{min}; \beta_{max}]$ 

$$ESP^e = \frac{w(1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}) \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)}}{1 - \frac{1}{\beta + \beta\rho - \beta^2\rho} - w(1 + \frac{(1-\rho)(1+\beta-\rho\beta^2)}{(2-\rho)(1-\rho\beta)})}$$

**Fin.**

$\beta$	$ESP^e$	$\beta$	$ESP^e$
1.0412544	39.2958260	2.5	0.1830332
1.042	23.4551010	3.5	0.2487331
1.043	15.2405767	4.5	0.3511052
1.045	8.9822741	5.5	0.5037507
1.05	4.4599972	6	0.6106308
1.06	2.2518084	6.2	0.6620240
1.08	1.1611383	6.3	0.6900589
1.09	0.9442658	6.5	0.7516435
1.1	0.8000103	6.53	0.7615918
1.8	0.1687095	6.5369363	0.7639207

TABLE 7.1: Erreur  $ESP^e$  en fonction du paramètre  $\beta$ , pour " $\lambda = 0.18, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ".

Dans la TABLE 7.2, nous constatons que les caractéristiques du modèle  $IMRSPN-M/H_2/1$  sont très proches des caractéristiques du modèle  $IGSPN-M/M/1$ . Ce qui donne une idée de la précision de l'approximation. En effet, il est possible d'approximer les caractéristiques du modèle  $IMRSPN-M/H_2/1$  par celles correspondantes au modèle  $IGSPN-M/M/1$ .

Measure	$IGSPN-M/M/1$	$IMRSPN-M/H_2/1$
$\tilde{n}_{p,que}^e$	0.0060487	0.0062319
$\tilde{n}_{p,ser}^e$	0.5328002	0.5267515
$\tilde{n}_s^e$	0.5388489	0.5329834
$\tilde{\omega}^e$	0.0336041	0.0346218
$\tilde{\omega}^e$	2.9936051	2.9610188

TABLE 7.2: Quelques mesures de performance des deux modèles étudiés pour " $\lambda = 0.18, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ".

Nous comparons l'erreur  $ESP^e$  obtenue par l'algorithme **Algo-Stab-IMRSPN** avec

l'erreur  $ESS^e$  obtenue par la simulation à événements discrets basée sur les deux étapes suivantes :

- Tout d'abord, nous simulons le vecteurs des probabilités stationnaires  $\tilde{\pi}^e$  (resp.  $\pi^e$ ) de l'EMC du modèle  $IGSPN-M/M/1$  (resp.  $IMRSPN-M/G/1$ ).
- Ensuite, nous calculons l'erreur  $ESS^e = \sum_{i \geq 0} \beta^i |\pi^e - \tilde{\pi}^e|$ .

$\lambda$	$ESP^e$	$ESS^e$
0.08	0.1509237	0.0986356
0.18	0.1674441	0.1436678
0.29	0.1948036	0.1779603
0.4	0.2421508	0.2276776

TABLE 7.3: Comparaison des erreurs  $ESP^e$  et  $ESS^e$ , pour " $\beta = 1.9, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ".

Dans la TABLE 7.3 et la FIGURE 7.6, nous constatons que l'erreur  $ESS^e$  sur les probabilités stationnaires obtenues à partir de la simulation est plus petite que celle obtenue via la méthode de la stabilité forte  $ESP^e$ .

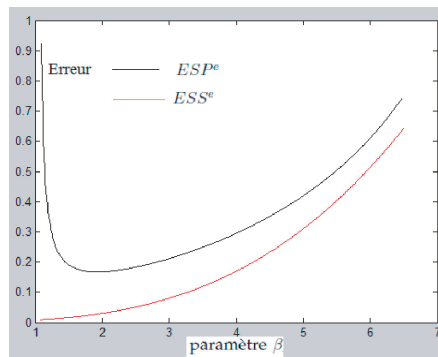


FIGURE 7.6: Évolution des erreurs  $ESP^e$  et  $ESS^e$  en fonction du paramètre  $\beta$ , pour " $\lambda = 0.18, H_2(1.4, 2, 0.3)$ ".

Maintenant, nous comparons l'erreur obtenue  $ESP^e$  par l'erreur  $ESQ$  donnée dans le travail [40] où les auteurs approximent le système  $M/G/1$  par le système  $M/M/1$ , comme exemple, ils prennent le modèle  $M/Cox_2/1$ .

	$ESP^e$	$ESQ^e$ [40]
$\lambda = 1.2$ , $\beta = 1.3$	0.0234327	0.0455404
$\lambda = 0.2$ , $\beta = 3$	0.0079070	0.0399613

TABLE 7.4: Comparaison des résultats : L'erreur algorithmique ( $ESP^e$ ,  $ESQ$ ), pour " $Cox_2(2.53, 0.0034, 11.385)$ ".

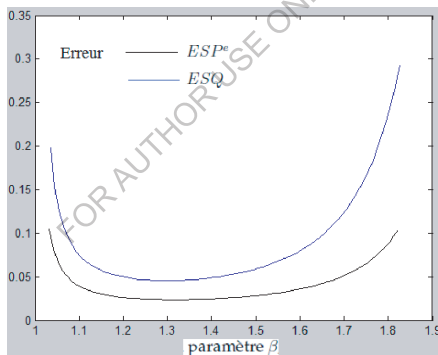


FIGURE 7.7: Évolution de l'erreur  $ESP^e$  et  $ESQ$  en fonction du paramètre  $\beta$ , pour " $\lambda = 0.2, Cox_2(2.53, 0.0034, 11.385)$ ".

Dans la TABLE 7.4 et la FIGURE 7.7, nous constatons que l'erreur  $ESP^e$  obtenue par notre algorithme est plus petite que l'erreur  $ESQ$  donnée dans [40]. L'erreur minimale  $ESP_{min}^e = 0.0233999$  est atteinte pour  $\beta = 1.3228731$  et l'erreur minimale  $ESQ_{min} = 0.0455393$  est atteinte pour  $\beta = 1.3053678$ .

Notez que l'erreur calculée par la méthode de stabilité forte en utilisant la théorie  $SPN$  et l'erreur simulée sont significativement inférieures à celle calculée par la méthode de

la stabilité en utilisant la théorie des files d'attente. Cela signifie que l'erreur estimée par la méthode de stabilité forte en utilisant la théorie des files d'attente est en fait le seuil (borne supérieure) de l'erreur peut être fait lorsque nous remplaçons le système  $M/G/1$  par le système  $M/M/1$ .

## 7.8 Conclusion

La principale contribution de ce chapitre a été de combiner la théorie de stabilité forte avec l'outil  $SPN$  pour donner une solution complète et précise sur le problème de la stabilité du modèle  $IMRSPN-M/G/1$ . Cette méthode permet d'approximer les caractéristiques du modèle  $IMRSPN-M/G/1$  par celles du modèle  $IGSPN-M/M/1$ . Le dernier modèle est plus simple et plus exploitable. La borne explicite pour l'erreur de l'approximation est obtenue. A partir de ces résultats théoriques, nous avons élaboré un algorithme sous Matlab permettant de vérifier les conditions d'approximation et d'évaluer l'erreur induite de cette approximation. Finalement, des exemples numériques et des études de simulation sont présentés pour illustrer l'efficacité de l'algorithme proposé.

FOR AUTHOR USE ONLY

---

## Conclusion et perspectives

---

L'objectif initial de notre travail était relatif à l'élargissement du champs d'applicabilité des  $SPN$  pour l'évaluation de performance des systèmes d'attente. Ceci nous a conduit à réaliser les trois travaux suivants :

- La modélisation et l'analyse de performances du  $QN$ ,  $[M/M/1/k_1+1 \rightarrow M/M/1/k_2+1]$  à l'aide des  $GSPN$ .
- La modélisation et l'analyse de performances des systèmes d'attentes semi-markoviens avec rappels et source finie à l'aide des  $MRSPN$ .
- L'approximation des caractéristiques du modèle  $IMRSPN$  associé à  $M/G/1$  par celles du modèle  $IGSPN$  associé à  $M/M/1$  par la méthode de stabilité forte.

En effet, on a entamé notre travail par l'analyse de performances du  $QN$ ,  $[M/M/1/k_1+1 \rightarrow M/M/1/k_2+1]$  avec  $BBS$ . Nous avons modélisé ce  $QN$  par un  $GSPN$ . Cette modélisation nous a permis : de représenter le phénomène de blocage (représenter l'interaction entre les deux stations), de générer la  $CTMC$  et de calculer les indices de performance de ce  $QN$ . Ainsi, la flexibilité du  $GSPN$  nous a permis d'étendre notre modélisation à un  $QN$  avec  $BAS$ . Nous avons pu avoir des résultats numériques à l'aide d'un algorithme que nous avons implémenté sous Matlab (voir [98]). Comme seconde travail, il était question de la modélisation et l'analyse des performances des deux systèmes d'attente  $M/G/1//N$  avec rappels classiques et  $M/G/1//N$  avec avec rappels classiques et recherche orbitale en utilisant le formalisme  $MRSPN$ . Les  $MRSPN$  obtenus nous ont permis : de modéliser aisément les caractéristiques de ces deux systèmes (rappels, blocage, source finie et l'aspect non markovien), de générer le noyau local  $E(t)$ , le noyau global  $K(t)$  et la matrice  $P$  de l' $EMC$ , et de calculer les différents indices de performance. Nous avons obtenus les résultats numériques à

l'aide d'un algorithme élaboré sous Matlab pour ces deux systèmes avec rappels étudiés (voir [95, 97]). Après la modélisation de systèmes d'attente via les  $SPN$ , on s'est orienté vers l'approximation de modèles  $SPN$  associés aux systèmes d'attente après avoir établi leurs stabilité. L'approche de stabilité qu'on a adoptée est la stabilité forte. Ainsi, nous avons approximé les caractéristiques du modèle  $IMRSPN-M/G/1$  par celles du modèle  $IGSPN-M/M/1$  après une perturbation du taux de franchissement de la transition  $GEN$  qui modélise le service. Nous avons déterminé les conditions d'application de cette approximation et nous avons obtenu la borne de l'erreur induite avec un calcul exact des paramètres. Nous avons développé un algorithme, sous Matlab, qui nous a permis d'obtenir des résultats numériques sur les erreurs induites par l'approximation effectuée (voir [99]).

### Perspectives du travail

Différentes perspectives sont envisagées pour les travaux présentés dans cette thèse, à savoir :

- Étendre l'utilisation des  $MRSPN$  à l'analyse des  $QN$  non-markoviens à capacités limitées ;
  - L'étude stationnaire et transitoire des  $MRSPN$ ,  $Age-MRSPN$  et  $CGPN$  associés aux systèmes de files d'attente complexes avec rappels et pannes (pannes avec perte définitive du client, pannes conservatrices, ...);
  - L'étude de la sensibilité des  $MRSPN$  associés aux systèmes d'attente ;
  - Appliquer l'approche basée sur les  $MRSPN$  pour l'analyse des systèmes de gestion de stocks avec rappels ;
  - Établir la stabilité forte des  $MRSPN$  non bornés associés aux systèmes d'attente (files d'attente et  $QN$ ) ;
  - Comparer l'outil  $SPN$  avec d'autres outils de modélisation et d'évaluation de performance comme les algèbres de processus stochastiques ;
  - De plus, nous visons à réaliser des applications à des systèmes réels.
-

---

## Bibliographie

---

- [1] K. Abbas and D. Aïssani. Approximation of performance measures in an  $M/G/1$  queue with breakdowns. *Quality Technology & Quantitative Management*, 7 :353–363, 2010.
- [2] K. Abbas and D. Aïssani. Strong stability of the embedded Markov chain in an  $GI/M/1$  queue with negative customers. *Applied Mathematical Modelling*, 10 :2806–2810, 2010.
- [3] K. Adel, K. Abbas, and D. Aïssani. Strong truncation approximation in a tandem queues with blocking. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012 :1–18, 2012.
- [4] D. Aïssani. Ergodicité uniforme et stabilité des chaînes de Markov : Application aux systèmes de files d’attente. *Séminaire Mathématique de Rouen, N° 167, C.N.R.S.*, pages 115–121, 1990.
- [5] D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Doklady Akademii Nauk Ukrainsskoi SSR, seriya A*, 11 :3–5, 1983.
- [6] D. Aïssani and N. V. Kartashov. Strong stability of the imbedded Markov chain in an  $M/G/1$  system. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 29 :1–5, 1984.
- [7] I. F. Akyildiz. Exact product form solution for queueing networks with blocking. *IEEE Transaction on Computers*, 36 :122–125, 1987.
- [8] I. F. Akyildiz. Mean value analysis for blocking queueing networks. *IEEE Transaction on Software Engineering*, 14 :418–428, 1988.
-



- [9] I. F. Akyildiz and H. G. Perros. Special issue on queueing networks with finite capacity queues : Introduction. *Performance Evaluation*, 10(3) :197–210, 1989.
- [10] H. Alla. *Réseaux de Petri colorés et réseaux de Petri continus : Application à l'étude des systèmes à événements discrets*. PhD thesis, INPG Grenoble, France, 1987.
- [11] H. Alla and R. David. A modeling and analysis tool for discrete events systems : Continuous Petri nets. *Performance Evaluation*, 33(3) :175–199, 1998.
- [12] C. Amer-Yahia, N. Zerhouni, A. El Moudni, and M. Ferney. Some subclasses of Petri nets and the analysis of their structural properties : A new approach. *IEEE Trans. On System, Man, and Cybernetics*, 29 :164–172, 1999.
- [13] J. R. Artalejo. Retrial queue with a finite number of sources. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 35 :503–525, 1998.
- [14] J. R. Artalejo. Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and Computer Modelling*, 30 :1–6, 1999.
- [15] J. R. Artalejo. Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 :1071–1081, 2010.
- [16] J. R. Artalejo and A. Gómez Corral. Information theoretic analysis for queueing systems with quasi random input. *Mathematical and Computer Modelling*, 22 :65–76, 1995.
- [17] J. R. Artalejo and A. Gomez-Corral. Steady state solution of a single server queue with linear repeated request. *Journal of Applied Probability*, 34 :223–233, 1997.
- [18] J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral. *Retrial queueing systems : A computational approach*. Springer, Berlin, 2008.
- [19] J. R. Artalejo, V. C. Joshua, and A. Krishnamoorthy. An  $M/G/1$  retrial queue with orbital search by the server. in *Advances in Stochastic Modelling*, J.R. Artalejo and A. Krishnamoorthy, Eds. NJ : Notable Publications Inc., pages 41–54, 2002.
-

- [20] J. R. Artalejo and M. J. Lopez-Herrero. A simulation study of a discrete-time multiserver retrial queue with finite population. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137 :2536–2542, 2007.
- [21] Y. Atamna. *Réseaux de Petri temporisés stochastiques classiques et bien formés, définition, analyse et application aux systèmes distribué temps réel*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1994.
- [22] B. Avi-Itzhak and M. Yadin. A sequence of two servers with no intermediate queue. *Management Sciences*, 11 :553–564, 1965.
- [23] K. Avrachenkov and U. Yechiali. On tandem blocking queues with a common retrial queue. *Computers et Operations Research*, 37 :1174–1180, 2010.
- [24] G. Balbo, S. C. Bruell, and M. Sereno. Product form solution for generalized stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 28(10) :915–932, 2002.
- [25] G. Balbo, S. C. Bruell, and M. Sereno. On the relations between BCMP queueing networks and product form solution stochastic Petri nets. *Proceedings of 10 th International Workshop on Petri Nets and Performance Models*, pages 103–112, 2003.
- [26] S. Balsamo and M. C. Cló. A convolution algorithm for product form queueing networks with blocking. *Annals of Operations Research*, 79 :97–117, 1998.
- [27] S. Balsamo, V. de Nito Personé, and R. Onvural. *Analysis of Queueing Networks with Blocking*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [28] S. Balsamo and V. de Nitto Personé. A survey of product form queueing networks with blocking and their equivalences. *Annals of Operations Research*, 48 :31–61, 1994.
- [29] S. Balsamo and A. Marin. On representing multiclass  $M/M/k$  queues by generalized stochastic Petri nets. *Proceedings of ECMS/ASMTA Conference, Prague, Czech Republic*, pages 121–128, 2007.
-

- [30] S. Balsamo, V. De Nitto-Personé, and P. Inverardi. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance predication. *Performance Evaluation*, 51 :269–288, 2003.
- [31] F. Baskett, K. M. Chandy, R. Muntz, and G. F. Palacios. Open, closed, and mixed networks of queueing with different classes of customers. *Journal of the ACM*, 22 :248–260, 1975.
- [32] A. Belkimore. The cost of eliminating vanishing markings from generalized stochastic Petri nets. *University of Maryland, College Park and Software Productivity Consortium 2214 Rock Hill Road Herndon, VA 22070, USA*, 1991.
- [33] M. Benaouicha and D. Aïssani. Strong stability in  $G/M/1$  queueing system. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 71 :22–32, 2004.
- [34] Z. Benouaret and D. Aïssani. Modèles de risque et files d’attente : La méthode de stabilité forte. *Journal Afrika Statistika*, 5(3) :210–218, 2010.
- [35] L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong stability in retrial queues. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 68 :11–17, 2003.
- [36] M. Bernardo. *Formal Methods for Performance Evaluation*. Jane Hillston, 2007.
- [37] G. Berthelot. Checking properties of nets using transformations. *Advances in Petri Nets 1985*, 222 :19–40, 1986.
- [38] A. Bobbio, A. Puliafito, and M. Telek. New primitives for interlaced memory policies in Markov regenerative stochastic Petri nets. In *Proceedings 7th International Workshop PNPMP’97, Saint Malo, France, IEEE Comp. Soc. Press.*, pages 70–79, 1997.
- [39] L. Bouallouche and D. Aïssani. Measurement and performance of the strong stability method. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 72 :1–9, 2005.
- [40] L. Bouallouche and D. Aïssani. Performance analysis approximation in a queueing system of type  $M/G/1$ . *Mathematical Methods of Operation Research*, 63 :341–356, 2006.
-

- [41] L. Bouallouche and D. Aïssani. Quantitative estimates in an  $M_2/G_2/1$  priority queue with non-preemptive priority : The method of strong stability. *Stochastic Models*, 24 :1–21, 2008.
- [42] L. Boukir, L. Bouallouche, and D. Aïssani. Strong stability of the batch arrival queueing systems. *Stochastic Analysis and Applications*, 28 :8–25, 2010.
- [43] M. Boulem, N. Djellab, and D. Aïssani. Stochastic bounds for a single server queue with general retrial times. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 40(1) :183–198, 2014.
- [44] G. Brams. *Réseau de Petri, théorie et pratique ; Tome 1 : Théorie et analyse ; Tome 2 : Modélisation et applications*. Masson, 1983.
- [45] B. Bruno. *Théorie des files d'attente*. Hermès sciences, 2000.
- [46] P. Buchholz. *Equivalence relations for stochastic automata networks. Computations with Markov Chains*. W.J. Stewart, Ed., Kluwer International Publishers, Boston, 1995.
- [47] P. Caseau and G. Pujolle. Throughput capacity of a sequence of queues with blocking due to finite waiting room. *IEEE Transactions Software Engineering*, 5 :313–319, 1979.
- [48] S. R. Chakravarthy, A. Krishnamoorthy, and V. Joshua. Analysis of a multiserver retrial queue with search of customers from the orbit. *Performance Evaluation*, 63 :776–798, 2006.
- [49] S. R. Chakravarthy, A. Krishnamoorthy, and V. C. Joshua. Analysis of a multi-server retrial queue with search of customers from the orbit. *Performance Evaluation*, 63 :776–798, 2006.
- [50] K. M. Chandy, J. H. Howard, and D. Towsley. Product form and local balance in queueing networks. *Journal of the ACM*, 24(2) :250–263, 1977.
-

- [51] H. Chen, L. Amodeo, F. Chu, and K. Labadi. Performance evaluation and optimization of supply chains modelled by batch deterministic and stochastic Petri. *IEEE transactions on Automation Science and Engineering*, 2(2) :132–144, 2005.
- [52] G. Chiola, S. Donatelli, and G. Franceschinis. GSPNs versus SPNs : What is the actual role of immediate transitions? *Proceedings of 4th international Workshop on Petri Nets and Performance models, Melbourne, Australia*, 1991.
- [53] H. Choi, V. G. Kulkarni, and K. S. Trivedi. Markov regenerative stochastic Petri nets. *Performance Evaluation*, 20 :335–357, 1994.
- [54] G. Ciardo. Discrete time markovian stochastic Petri nets. In W. J. Stewart, editor, *Computation with Markov Chains, Raleigh, NC, USA*, pages 339–358, 1955.
- [55] G. Ciardo, R. German, and C. Lindemann. A characterization of the stochastic process underlying a stochastic Petri net. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 20 :506–515, 1994.
- [56] G. Ciardo, J. K. Muppala, and K. S. Trivedi. On the solution of GSPN reward models. *Performance Evaluation*, 12(4) :237–254, 1991.
- [57] J. W. Cohen. Basic problems of telephone traffic theory and influence of repeated calls. *Philips Telecommunication Review*, 18 :49–100, 1957.
- [58] D. R. Cox. The analysis of non-markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(9) :433–441, 1955.
- [59] A. Cumani. Esp-a package for the evaluation of stochastic Petri nets with phase-type distributed transition times. In *International Workshop on Timed Petri Nets. IEEE Computer Society, Washington*, pages 144–151, 1985.
- [60] Y. Dallery, R. David, and X. Xie. Approximate analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *IEEE Transactiona on Automatic Control*, 34 :943–953, 1989.
-

- [61] Y. Dallery and B. Gershwin. Manufacturing flow line systems : A review of models and analytical results. *Queueing Systems*, 12 :3–94, 1992.
- [62] R. David and H. Alla. *Du Grafset aux réseaux de Petri*. Editions Hermès, Paris, 1992.
- [63] A. G. de Kok. Algorithmic methods for single server systems with repeated attempts. *Statistica Neerlandica*, 38(1) :23–32, 1984.
- [64] M. Diaz. *Les réseaux de Petri : Modèles fondamentaux*. Hermès Science, Paris, 2001.
- [65] V. I. Dragieva. Single ligne queue with finite source and repeated calls. *Problems of Information Transmission*, 30 :283–289, 1994.
- [66] V. I. Dragieva. A finite source retrial queue : Number of retrials. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(5) :812–829, 2013.
- [67] A. N. Dudin, A. Krishnamoorthy, V. Joshua, and G.V. Tsarenkov. Analysis of the *BMAP/G/1* retrial system with search of customers from the orbit. *European Journal of Operational Research*, 157 :169–179, 2004.
- [68] O. Dudina, A. Puliafito, C. Kim, and S. Dudin. Retrial queuing system with Markovian arrival flow and phase-type service time distribution. *Computers et Industrial Engineering*, 66 :360–373, 2013.
- [69] J. B. Dugan, K. S. Trivedi, R. M. Geist, and V. F. Nicola. Extended stochastic Petri nets : Application and analysis. *Proceeding Performance'84, Paris-France*, pages 507–519, 1984.
- [70] A. Eldin. Approach of theoretical description of repeated call attempts. *Erricson Thecnics*, 23 :346–407, 1967.
- [71] A. K. Erlang. Solution of some problemes in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *Post Office Electrical Engineer's*, 10 :189–197, 1917.
- [72] G. I. Falin. A survey of retrial queues. *Queueing Systems*, 7 :127–168, 1990.
-

- [73] G. I. Falin. A multiserver retrial queue with a finite number of sources of primary calls. *Mathematical and Computer Modelling*, 30 :33–49, 1999.
- [74] G. I. Falin and J. G. C. Templeton. *Retrial Queues*. Chapman and Hall, 1997.
- [75] G. Fayolle. A simple telephone exchange with delayed feedbacks. *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*, 7 :245–253, 1986.
- [76] G. Florin and S. Natkin. Necessary and ergodicity condition for open synchronized queueing networks. *IEEE Transaction on Software Engineering*, 15 :367–380, 1989.
- [77] S. B. Gershwin. An efficient evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking. *Queueing Systems*, 35 :291–305, 1987.
- [78] N. Gharbi and M. Ioualalen. GSPN analysis of retrial systems with servers breakdowns and repairs. *Applied Mathematics and Computation*, 174 :1151–1168, 2006.
- [79] N. Gharbi and M. Ioualalen. Numerical investigation of finite source multi-server systems with different vacation policies. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234 :625–635, 2010.
- [80] A. Gomez-Corral. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts. *Operations Research Letters*, 30 :360–374, 2002.
- [81] A. Gomez-Corral. A tandem queue with blocking and markovian arrival process. *Queueing Systems*, 41 :343–370, 2002.
- [82] A. Gomez-Corral. A bibliographical guide to the analysis of retrial queues through matrix analytic techniques. *Annals of Operations Research*, 141 :163–191, 2006.
- [83] W. J. Gordon and F. Newell. Closed queueing systems with exponential servers. *Operational Research*, 15 :254–265, 1967.
-

- [84] M. Gribaudo and M. Sereno. On the use of structural Petri net analysis for studying product form equilibrium distributions of queueing networks with blocking. *J. Desel, M. Silva (Eds.) : ICATPN, LNCS 1420*, pages 246–264, 1998.
- [85] S. Haddad, P. Moreaux, and G. Chiola. Distributions de cox et phase type dans les réseaux de Petri stochastiques : Une méthode efficace de résolution. *Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle*, 32(3) :289–323, 1998.
- [86] N. Hamadouche and D. Aïssani. Approximation strong in the  $M_2/G_2/1$  queue with preemptive priority. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 13 :563–581, 2011.
- [87] O. Hashida and K. Kawashima. Buffer behavior with repeated calls. *Electronics and Communication in Japan*, 62 :27–35, 1979.
- [88] B. R. Haverkort. Matrix geometric of infinite stochastic Petri nets. *IEEE*, 1995.
- [89] A. Heindl. Decomposition of general tandem queueing networks with *MMPP* input. *Performance Evaluation*, 44 :86–100, 2001.
- [90] M. A. Holiday and M. K. Vernon. A generalized timed Petri net model for performance analysis. *IEEE Transaction on Software Engineering*, 13(12) :1297–1310, 1987.
- [91] A. Hordijk and N. Van Dijk. *Networks of Queues with Blocking*. in : Kylstra, Ed., Performance '81', North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [92] G. Horton, G. Kulkarni D. M. Nicol, and K. S. Trivedi. Fluid stochastic Petri nets : Theory, applications, and solution techniques. *European Journal of Operational Research*, 105 :184–201, 1998.
- [93] G. C. Hunt. Sequential arrays of waiting lines. *Operations Research*, 4 :672–683, 1956.
-



- [94] L. Ikhlef, O. Lekadir, and D. Aïssani. Evaluation de performances de réseaux de files d'attente via les GSPN. *Actes de l'Atelier international AMS 2013 (Approximations dans les modèles stochastiques)*, 07 Mai, LaMOS, Université de Béjaïa, 2013.
- [95] L. Ikhlef, O. Lekadir, and D. Aïssani. Performance analysis of  $M/G/1$  retrial queue using Markov regenerative stochastic Petri nets. *Proceedings of the International Workshop on Petri Nets and Software Engineering (PNSE 2014), Tunis, Tunisia, June 23-24*, 1160 :221–231, 2014.
- [96] L. Ikhlef, O. Lekadir, and D. Aïssani. Stabilité forte du modèle MMPP/M/1. *Actes de l'Atelier international AMS 2014 (Approximations dans les modèles stochastiques)*, 28 Septembre, LaMOS, Université de Béjaïa, 2014.
- [97] L. Ikhlef, O. Lekadir, and D. Aïssani.  $MRSPN$  analysis of semi-markovian finite source retrial queues. *Annals of Operations Research*, ISSN0254- 5330. DOI 10.1007/s10479- 015-1883-8, 2015.
- [98] L. Ikhlef, O. Lekadir, and D. Aïssani. Numerical analysis of queueing network  $[M/M/1/k_1 + 1 \rightarrow M/M/1/k_2 + 1]$  using generalized stochastic Petri nets. *Article soumis pour publication au journal Computers & operations research*, 2015.
- [99] L. Ikhlef, O. Lekadir, and D. Aïssani. Strong stability approximation of  $M/G/1$  queueing system by using the IMRSPN formalism. *Article soumis pour publication au journal Applied Mathematical Modelling*, 2015.
- [100] J. R. Jackson. Networks of waiting lines. *Operational Research*, 5 :518–521, 1957.
- [101] G. K. Janssens. The quasi-random input queueing system with repeated attempts as a model for collision-avoidance star local area network. *IEEE Transactions on Communications*, 45 :360–364, 1997.
- [102] W. Jinting, Z. Linfeihao, and Z. Feng. Analysis of the finite source retrial queues with server breakdowns and repairs. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 7 :655–676, 2011.
-

- [103] R. M. Karp and R. E. Miller. Parallel program schemata. *Journal of Computer and System Sciences*, 3(2) :147–195, 1969.
- [104] N. V. Kartashov. Criteria for uniform ergodicity and strong stability of Markov chains with a common phase space. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 30 :71–89, 1985.
- [105] F. P. Kelly. Network of queueing. *Advances in Applied Probability*, 8 :416–432, 1976.
- [106] D. G. Kendall. Some problems in the theory of queues. *J. Roy. Sta. Soc.*, 13 :151–185, 1951.
- [107] C. S. Kim, S. H. Park, A. Dudin, V. Klimenok, and G. Tsarenkov. Investigation of the  $BMAP/G/1 \rightarrow ./PH/1/M$  tandem queue with retrials and losses. *Applied Mathematical Modelling*, 34 :2926–2940, 2010.
- [108] D. S. Kim, H. J. Moon, J. H. Bahk, W. H. Kwon, and Z. J. Hass. Efficient computation for evaluating extended stochastic Petri nets using algebraic operations. *International Journal of control, Automation, and Systems*, 1 :431–443, 2003.
- [109] L. Kleinrock. *Queueing Systems : Theory*, volume 2. John Wiley and Sons Edition, 1975.
- [110] V. Klimenok, C. Kim, O. Dudina, and A. Dudin. A tandem  $GI/PH/1 \rightarrow ./PH/1/0$  queue with blocking. *Applied Mathematical Modelling*, 37 :6809–6820, 2013.
- [111] H. Kobayashi. *Modeling and Analysis : An introduction to system performance evaluation methodology*. Adison-Wesley, 1978.
- [112] Y. N. Kornyshev. Design of a fully accessible switching system with repeated calls. *Telecommunications*, 23 :46–52, 1969.
- [113] L. Kosten. On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking. *De Ingenieur*, 59 :1–25, 1947.
-

- [114] D. Kouvatso and N. P. Xenios. *MEM* for arbitrary queueing networks with multiple general servers and repetitive service blocking. *Performance Evaluation*, 10 :169–195, 1989.
- [115] D. Kouvtso and A. Irfan. Entropy maximization and open queueing networks with priorities and blocking. *Performance Evaluation*, 51 :91–227, 2003.
- [116] V. G. Kulkarni and H. M. Liang. Retrial queues revisited. *Frontiers in Queueing*, J.H. Dshalov, ed., CRC Press Boca Raton, pages 19–34, 1997.
- [117] K. Labadi, H. Chen, and L. Amodeo. Application des *BDSPN* à la modélisation et à l'évaluation de performance des chaînes logistiques. *Journal Europeen des Systemes Automatisés*, 39(7) :863–886, 2005.
- [118] O. Lekadir and D. Aïssani. Strong stability in a Jackson network. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 77 :86–98, 2007.
- [119] O. Lekadir and D. Aïssani. Error bounds on practical approximation for two tandem queue with blocking and non-preemptive priority. *Computers and Mathematics with Applications*, 61 :1810–1822, 2011.
- [120] O. Lekadir, L. Ikhlef, and D. Aïssani. GSPNs modeling and strong stability analysis for the M/M/1 queueing system. *Actes du Colloque International Modélisation Stochastique et Statistique, MSS'2014, USTHB, 23-25 Novembre*, pages 73–76, 2014.
- [121] H. Li and T. Yang. A single server retrial queue with server vacations and a finite number of input sources. *European Journal of Operational Research*, 85 :149–160, 1995.
- [122] C. Lindemann. An improved numerical algorithm for calculating steady-state solutions of deterministic and stochastic Petri nets models. *Proceedings of the 4th International Workshop on Petri Nets and Performance models, Melbourne, Australia*, pages 176–185, 1991.
- [123] M. Lopez-Herrero. A maximum entropy approach for the busy period of the M/G/1 retrial queue. *Annals of Operations Research*, 141(11) :271–281, 2006.
-

- [124] J. Mairesse and H. T. Nguyen. Deficiency zero Petri nets and product form. *Fundamenta Informaticae*, 105 :237–261, 2010.
- [125] M. A. Marsan, G. Balbo, A. Bobbio, G. Chiola, G. Conte, and A. Cumani. The effect of execution policies on the semantics and analysis of stochastic Petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 15 :832–846, 1989.
- [126] M. A. Marsan, G. Balbo, G. Conte, S. Donatelli, and G. Franceschinis. *Modelling with generalized stochastic Petri nets*. John Wiley & Sons, 1995.
- [127] M. A. Marsan and G. Chiola. On Petri nets with deterministic and exponentially distributed firing times. *Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag*, 266 :132–145, 1987.
- [128] M. A. Marsan, G. Conte, and G. Balbo. A class of generalized stochastic Petri nets for the performance evaluation of multi-processor systems. *ACM Transactions on Computer Systems*, 2(2) :93–122, 1984.
- [129] M. K. Molloy. Performance analysis using stochastic Petri nets. *IEEE Transaction on Computers*, 31(9) :913–917, 1982.
- [130] M. K. Molloy. Discrete time stochastic Petri nets. *IEEE Transaction on Software Engineering*, 11(4) :417–423, 1985.
- [131] Z. Mouhoubi and D. Aïssani. Stability of the inventory-backorder process in the  $(R, S)$  inventory production model. *Pliska stud. Math. Bulgar*, 18 :255–270, 2007.
- [132] Z. Mouhoubi and D. Aïssani. New perturbation bounds for denumerable Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, 280 :255–270, 2010.
- [133] T. Murata. Petri nets : Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4) :541–580, 1989.
- [134] S. Natkin. *Les réseaux de Petri stochastiques*. PhD thesis, CNAM, Paris, 1980.
- [135] M. F. Neuts. Two queues in series with finite intermediate waiting room. *Journal of Applied Probability*, 5 :123–142, 1968.
-

- [136] M. F. Neuts. *Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications*. Marcel Dekker, New York, 1989.
- [137] M. F. Neuts and M. F. Ramalhoto. A service model in which the server is required to search for customers. *Journal of Applied Probability*, 21 :157–166, 1984.
- [138] H. Ohmura and Y. Takahashi. An analysis of repeated call model with finite number of sources. *Electronics and Communication in Japan*, 68(6) :112–121, 1985.
- [139] C. I. Oliver and K. S. Trivedi. Stochastic Petri net analysis of finite population vacation queueing systems. *Queueing Systems*, 8 :111–128, 1990.
- [140] R. O. Onvural. A survey of closed queueing networks with blocking. *ACM Computing Surveys*, 22 :83–121, 1990.
- [141] R. O. Onvural and H. G. Perros. On equivalencies of blocking mechanisms in queueing networks with blocking. *Operations Research Letters*, 5 :293–297, 1986.
- [142] H. T. Papadopoulos and M. E. J. O’Kelly. Exact analysis of production lines with no intermediate buffers. *European Journal of Operational Research*, 65 :118–137, 1993.
- [143] H. G. Perros. A symmetrical exponential open queue network with blocking and feedback. *IEEE Transactions Software Engineering*, 7 :395–402, 1981.
- [144] H. G. Perros. A bibliography of papers on queueing networks with finite capacity queues. *Performance Evaluation*, 10 :255–260, 1989.
- [145] H. G. Perros. *Queueing networks with blocking : Exact and approximate solutions*. Oxford University Press, 1994.
- [146] H. G. Perros and T. Altioik. Approximate analysis of open networks of queues with blocking : Tandem configurations. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 12 :450–461, 1986.
- [147] J. L. Peterson. *Petri net theory and the modeling of systems*. Prentice Hall PTR, 1981.
-

- [148] C. A. Petri. *Kommunikation mit automaten*. PhD thesis, University of Bonn, 1962.
- [149] A. Puliafito, M. Scarpa, and K. S. Trivedi. Petri nets with  $k$  simultaneously enabled generally distributed timed transitions. *Performance Evaluation*, 32 :1–34, 1998.
- [150] B. Rabta and D. Aïssani. Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes*, 26 :129–135, 2004.
- [151] B. Rabta and D. Aïssani. Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, 428 :1921–1927, 2008.
- [152] F. Rahmoune and D. Aïssani. Strong stability of queues with multiple vacation of the server. *Stochastic Analysis and Applications*, 26 :1–14, 2008.
- [153] K. Ramanath and P. Lakshmi. Modelling  $M/G/1$  queueing systems with server vacations using stochastic Petri nets. *ORiON*, 22 :131–154, 2006.
- [154] C. Ramchandani. *Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1974.
- [155] R. R. Razouk and C. V. Phelps. Performance analysis using timed Petri nets. *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing and Performance Models*, pages 126–129, 1984.
- [156] C. C. S. Reddy, K. R. Prasad, and Mamatha. The study state analysis of tandem queue with blocking and feedback. *Journal Of Advanced Networking and Applications*, 1 :45–50, 2009.
- [157] Z. Retchkiman. Stability theory for a class of dynamical systems modeled with petri nets. *International Journal of Hybrid Systems*, 4(1), 2005.
- [158] Z. Retchkiman. Modeling and stability analysis for a class of queueing systems by means of timed Petri nets, Lyapunov methods and Max-plus algebra. *International Mathematical Forum*, 6 :1457–1476, 2011.
-

- [159] S. N. Stepanov. *Numerical methods of calculation for systems with repeated calls*. Nauka, Moscow, In Russian, 1983.
- [160] W. J. Stewart. *Introduction to the numerical solution of Markov chains*. Princeton, University Press, USA, 1994.
- [161] J. Sztrik, B. Almási, and J. Roszik. Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs. *Journal of Mathematical Sciences*, 132 :677–685, 2006.
- [162] H. Takagi. *Queueing analysis : A foundation of performance evaluation*. Finite Systems, North-Holland, 1993.
- [163] J. G. C. Templeton. Retrial queues revisited. *Top*, 7 :351–363, 1999.
- [164] N. Thomas and J. Hillston. Using markovian process algebra to specify interactions in queueing systems. *The University of Edinburgh*, 1997.
- [165] M. I. Vidalis and H. T. Papadopoulos. A recursive algorithm for generating the transition matrices of multistation multiserver exponential reliable queueing networks. *Computers et Operations Research*, 28 :853–883, 2001.
- [166] R. I. Wilkinson. Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*, 35 :421–514, 1956.
- [167] P. Wüchner, J. Sztrik, and H. de Meer. Investigating the mean response time in finite source retrial queues using the algorithm by Gaver, Jacobs and Latouche. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 36 :173–160, 2009.
- [168] P. Wüchner, J. Sztrik, and H. Meer. Homogeneous finite source retrial queues with search of customers from the orbit. *Proceedings of 14th GI/ITG Conference on Measurement, Modelling and Evaluation of Computer and Communication Systems, Dortmund, Germany*, 2008.
- [169] P. Wüchner, J. Sztrik, and H. Meer. Finite-source  $M/M/S$  retrial queue with search for balking and impatient customers from the orbit. *Computer Networks*, 53 :1264–1273, 2009.
-

- 
- [170] P. Wüchner, J. Sztrik, and H. Meer. Homogeneous finite-source retrieval queues with search of customers from the orbit. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 36 :143–160, 2009.
- [171] P. Wüchner, J. Sztrik, and H. Meer. Finite source retrieval queues with applications. *Proceedings of the gth International Conference on Applied Informatics Eger, Hungary*, 2 :275–285, January 2010.
- [172] T. Yang and J. G. C. Templeton. A survey on retrieval queue. *Queueing Systems*, 2 :201–233, 1987.
- [173] W. M. Zuberek. Timed Petri nets and preliminary performance evaluation. *Proceedings of the 7th annual Symposium on Computer Architecture of Quarterly Publication of ACM Special Interest Group on Computer Architecture*, 8(3) :62–82, 1980.
- FOR AUTHOR USE ONLY
-





**IKHLEF Lyes** a obtenu un doctorat en mathématiques appliquées de Université de Bejaia. Il est Maître de conférences B en mathématiques au département de mathématiques et d'informatique de Université Alger 1. Ses intérêts de recherche comprennent l'analyse des performances de systèmes de files d'attente, les RdP stochastiques et chaînes de Markov.



**LEKADIR Ouiza** est maître de conférences A au Département de Recherche Opérationnelle de Université Bejaia. Elle a reçu un doctorat en mathématiques appliquées de cette université. Elle est membre de l'unité de recherche LaMOS. Ses principaux intérêts de recherche comprennent la perturbation, analyse des chaînes de Markov, Analyse des réseaux & files d'attente et Analyse des RdP.



**AÏSSANI Djamil** est professeur de mathématiques au département de la recherche opérationnelle à Université Bejaia. Il a commencé sa carrière à l'université de Constantine en 1978. Il a obtenu son doctorat en 1983 à l'U. d'État de Kiev. Il est à l'Université Bejaia depuis 1983/1984. Directeur de la recherche, chef de la faculté des sciences et de l'ingénierie Science (1999 - 2000), directeur de l'Unité de recherche LaMOS, responsable scientifique de l'ordinateur Ecole doctorale scientifique, il a enseigné à USTHB, Annaba, Rouen, Dijon, ENITA. Ses principaux intérêts de recherche sont : les chaînes de Markov, les systèmes de file d'attente, la théorie de la fiabilité et l'évaluation des performances.

FOR AUTHOR USE ONLY

FOR AUTHOR USE ONLY

**More  
Books!**



yes  
**I want morebooks!**

Buy your books fast and straightforward online - at one of world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at  
**[www.morebooks.shop](http://www.morebooks.shop)**

Achetez vos livres en ligne, vite et bien, sur l'une des librairies en ligne les plus performantes au monde!

En protégeant nos ressources et notre environnement grâce à l'impression à la demande.

La librairie en ligne pour acheter plus vite

**[www.morebooks.shop](http://www.morebooks.shop)**

KS OmniScriptum Publishing  
Brivibas gatve 197  
LV-1039 Riga, Latvia  
Telefax: +371 686 20455

[info@omniscryptum.com](mailto:info@omniscryptum.com)  
[www.omniscryptum.com](http://www.omniscryptum.com)



FOR AUTHOR USE ONLY