

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Actes du Colloque



جامعة بجة
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaia

MOAD'2022



Méthodes et Outils d'Aide à la Décision

Béjaia, 15 - 17 Novembre 2022

Organisé par

Unité de Recherche LaMOS
Département de Recherche Opérationnelle
Faculté de Sciences Exactes - Université de Béjaia





***METHODES ET OUTILS
D'AIDE A LA DECISION***

$$\mathbf{W}(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \mathbf{max}$$

Méthodes et Outils d'Aide à la Décision

Editeurs : Unité de Recherche LaMOS Béjaia

Adresse : Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Université de Béjaia, Targa Ouzamour, Béjaia, 06000 (Algérie)

Tél : 213 34 81 37 08

Tél/Fax : 213 34 81 37 09

E-Mail : lamos_bejaia@hotmail.com

<http://www.lamos.org>

© Publication de l'Unité de Recherche LaMOS, 2022
Tous droits de traduction, de reproduction et
d'adaptation réservés pour tous les Pays

ISBN : 978-9931-884-15-6

Présentation

Trente ans après son lancement en décembre 1992 [voir compte rendu publié par la revue *MATAPLI* de la *SMAI* (*Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles*), n°35, juillet 1993, pp. 71 – 72], le Colloque International *MOAD* revient sur le devant de la scène. Sidi Bel Abbes (2000), Saïda (2003) et Béjaïa (2007) avaient pris le relais. Cette cinquième édition reprend la formule initiale, fortement liée à la science de l'ingénieur.

Organisation

Le *MOAD'2022* est organisé par l'Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes) et le département de Recherche Opérationnelle, Faculté des Sciences Exactes, Université de Béjaïa en collaboration avec :

- Le Réseau National *Gerafa* (Files d'Attente et Applications)
- Les Comités Nationaux *M.F.S.I* (Modèles de Fiabilité et Sciences de l'Ingénieur)
- L'*A2T2* (Association Algérienne de Transfert de Technologie)

Problématique

Ce colloque couvre tous les aspects (mathématiques, techniques, économiques, opérationnels) des Méthodes et Outils d'Aide à la Décision. Son principal objectif est de confronter différentes disciplines s'occupant de la décision, notamment des domaines où s'est manifesté ces dernières années un effort d'analyse scientifique et/ou des espérances de synthèse théorique (ou de réalisations pratiques et spécialisées) assez important.

Thèmes

Les 136 communications retenues par le Comité de Programme seront présentées en 07 sessions :

1. Statistiques non paramétrique
2. Equations différentielles
3. Théorie des jeux et applications
4. Systèmes intelligents
5. Programmation linéaire et quadratique
6. Modèles stochastiques et applications
7. Maintenance et sûreté de fonctionnement
8. Files d'attente
9. Finances
10. Application à l'ingénierie

11. Séries chronologiques
12. Optimisation
13. Intelligence artificielle et santé
14. Gestion des stocks
15. Apprentissage automatique
16. Méthodologie d'aide à la décision
17. Contrôle optimal
18. Distribution à queue et statistiques empirique

Comités

Présidents d'honneur

Pr Abdelkrim Beniaïche, Recteur de l'Université de Bejaia
Dr Sofiane Aoudia, Doyen de la Faculté des Sciences Exactes

Président du Colloque

Pr Djamil Aissani, Directeur de l'Unité de Recherche LaMOS

Comité d'Organisation

Président du Comité d'Organisation

Pr Mohamed Boualem, Chef de l'équipe de Recherche SR2

Vice-Présidente du Comité d'Organisation

Pr Karima Adel-Aïssanou, Chef de l'équipe de Recherche PA2

Membres du Comité d'Organisation

Leila Abbaci Epse Younsi, El hassene Ait Mokhtar, Sonia Amroun, Aicha Anzi, Zohra Aoudia, Fazia Aoudia, Larbi Asli, Mouloud Atmani, Fatiha Barache, Halima Berri, Karima Bouibed, Belkacem Brahmi, Bachir Cherfaoui, Nassima Dairi, Yasmina Djabali, Fouzia Ghellab, Naouel Halimi, Safia Hocine, Lahna Idres, Kamal Kaby, Ouiza Lekadir, Nouredine Khimoum (Chef de département de Recherche Opérationnelle), Samia Madi (Ingénieur de l'Unité de Recherche LaMOS), Kamel Meziani, Mohand Moktefi, Razika Sait, Nacim Nait Mohand, Massinissa Soufit, Sofiane Touati, Nassim Touche, Samira Yessad, Sofiane Ziani, Nabil Zougab, Club Scientifique SCOR.

Comité de Programme

Président du Comité de Programme

Pr Mohammed Said Radjef, Chef de la Division ADRO

Vice-Président du Comité de Programme

Dr Naouel Halimi-Yousfi

Membres du Comité de Programme

Karim Abbas, Université de Bejaia	Emilio Bastidas-Arteaga, Université de Rochelle
Moncef Abbas, USTHB, Alger	Rachid Bebbouchi, SMA, Alger
Farida Achemine, Université de Tizi Ouzou	Abdelhamid Becheur, Université de Bejaia
Achour Achroufene, Université de Bejaia	Mustapha Benaouicha, SEGULA Technologies, Nantes
Karima Adel-Aissanou, Université de Bejaia	Nadjette Benhamida, Université de Guelma
Smail, Adjabi, Université de Bejaia	Mohand Bentobache, Université de Laghouat
Mohamed, Aïdene, Université de Tizi Ouzou	Louiza Berdjoudj, Université de Bejaia
Meziane, Aïder, USTHB, Alger	Mohand Ouamer Bibi, Université de Bejaia
Amina Aissani, EURIMA, Bruxelles	Alexander Bochkov, JSC NIIAS, Mosco
Djamil Aissani, Université de Bejaia	Mohamed Boualem, Université de Bejaia
Sofiane Aissani, Université de Bejaia	Louiza Bouallouche, Université de Bejaia
El Hassene Aït Mokhtar, Université de Bejaia	Ahmed Boubakeur, ENP El Harrach, Alger
Daoud Ait-Kadi, Université Laval, Québec	Isma Bouchemakh, USTHB, Alger
Ahmed Alioua, Université de Jijel	Amina Angelika Bouchentouf, Université de Sidi-Bel-Abbès
Hassan Alla, INPG, Grenoble	Mourad Boudhar, USTHB, Alger
Kada Allab, ENS Kouba	Tassedda Boukherroub, Ecole de Technologie Supérieure, Montréal
Mourad Amad, Université de Bouira	Kamel Boukhetala, USTHB, Alger
Kamal Amroun, Université de Bejaia	Djamila Boukreda-Boulahrouz, Université de Bejaia
Lynda Atil, Université de Tizi Ouzou	Rachid Boukoucha, Université de Bejaia
Mouloud Atmani, Université de Bejaia	Samra Boulfekhar, Université de Bejaia
Aïcha Anzi, Université de Bejaia	
Abderrahmane Baadache, Université d'Alger 3	
Mourad Baiou, LIMOS, Université de Clermont Auvergne	
Aïcha Bareche, Université de Bejaia	
Kamel Barkaoui, CNAM Paris	
	Abdellah Kouzou, Université de Djelfa

Belkacem Brahmi, Université de Bejaia
 Noureddine Chaib, IEEE
 Mouloud Cherfaoui, Université de Biskra
 Mohamed El-Amine Chergui, USTHB, Alger
 Djamel Eddine Cheriet, SMA, Alger
 Madjid Dahmane, Chef de Division, CERIST, Alger
 Ahmed Damou, A2T2, Alger
 Marouane Debane, Technology Innovation Institute, Abu Dhabi
 Amar Debbouche, Université de Guelma
 Chaabane Djamel
 Boualem Djehiche, Royal Institute of Technology, Stockholm
 Natalia Djellab, Université de Annaba
 A-Madjid Djenane, Université de Sétif
 Lamia Djerroud, Université de Bejaia
 Houda El Bouhissi, Université de Bejaia
 Hocine Fellag, Université de Tizi Ouzou
 Nadir Ferhi, IFSTTAR, Marne la Vallée
 Koole Ger, Vrije Université Amsterdam
 Reiner Gerald, Welthandelsplatz, Vienne
 Latefa Ghomri, Université de Tlemcen
 Zohra Guessoum, USTHB, Alger
 Djamel Hamadouche, Université de Tizi Ouzou
 Abdelghani Hamaz, Université de Tizi Ouzou
 Abdelhakim Hammoudi, INRAE, Paris-Saclay
 Lamia Hamza, Université de Bejaia
 Bernd Heidergott, Vrije Université Amsterdam
 Malika Ioualalen, USTHB, Alger
 Badredine Issaadi, Université de Bejaia
 Kamal Kaby, Université de Bejaia
 Beghdad-Bey Kadda, EMP, Bordj El Bahri
 Abdeldjebbar Kandouci, Université de Saida
 Tewfik Kernane, USTHB, Alger
 Khaled Khaldi, Université de Boumerdes
 Karim Labadi, Naval Academy Research Institute
 Radouane Laggoune, Université de Bejaia
 Karima Lagha, Université de Bejaia
 Fodil Laib, Data Management Cevital, Alger
 Moundir Lassassi, CREAD, Alger
 Ouiza Lekadir, Université de Bejaia
 Cati Lladó, Palma (Illes Balears)
 Mohammed Salah M'hamdi, Université de Bejaia
 Rabah Medjoudj, Université de Bejaia
 Kader Merakeb, INP-IRIT, Toulouse
 Zahir Mohdeb, Université de Constantine
 Zahir Mouhoubi, Département de Mathématiques, Longueuil, Québec
 Mustapha Moulaï, USTHB, Alger
 Hassina Nacer, USTHB, Alger
 Saralees Nadarajah, University of Manchester
 Abdelhakim Necir, Université de Biskra
 Lhouari Nourine, LIMOS Université Clermont Auvergne
 Mawloud Omar, Université Gustave Eiffel, Marne la Vallée
 Brahim Oukacha, Université de Tizi Ouzou
 Nadia Oukid, Université de Blida 1
 Maria Angela Perito, Università di Teramo
 Boualem Rabta, Vienna University of Economics and Business
 Sonia Radjef-Douar, Université d'Oran
 Samir Rahmani, Université de Bejaia
 Fazia Rahmoune, Université de Bejaia
 Mohamed Riad Remita, Ecole Supérieure en Intelligence Artificielle, Sidi Abdellah
 Lamia Rouached, ISG, Tunis
 Nora Saadi, LaMOS, Université de Bejaia
 Bachir Sadi, Université de Tizi Ouzou
 Ourida Sadki, USTHB, Alger
 Nassim Touche, Université de Bejaia

Lakhdar Sais, CRIL, Université d'Artois,
Lens
Lamri Sayad, Université de M'sila
Hachem Slimani, Université de Bejaia
Abdelnacer Smati, PEGAZ Engineering,
Alger
Alice E. Smith, Université d'Auburn
János Sztrik, Université de Debrecen
Baya Takhedmit, LaMOS, Université de
Bejaia
Abdelkader Tatachak, USTHB, Alger
Tarik Tazdaït, CIRED, Marne la Vallée
Karima Timeridjine Belaïde, Université de
Bejaia
Mohamed Tounsi, Université de Bejaia
Idris Yahiaoui, Université de Bejaia
Mohand Yazid, Université de Bejaia
Abderrahmane Yousfate, Université de
Sidi Bel Abbès
Naouel Yousfi-Halimi, Université de
Bejaia
Seghir Zerguini, EGIS Mobility, Paris
Yasmina Ziane, Université de Bejaia
Iskander Zouaghi, ENP El Harrach, Alger
Nabil Zougab, Université de Bejaia

Préface

Ce volume regroupe les actes du Colloque International sur les Méthodes et Outils d'Aide à la Décision (MOAD), qui revient à Béjaia du 15 au 17 Novembre 2022, où il avait pris naissance en 1992, après avoir voyagé dans d'autres villes d'Algérie : Sidi Bel Abbès (2000), Saïda (2003) et Béjaia (2007). L'objectif assigné à ce retour du MOAD n'est pas de « boucler la boucle », mais de permettre une continuité par un passage du flambeau à la nouvelle génération de jeunes chercheurs formés à Béjaia et dans les autres universités du pays, qui sont restés dans le pays ou qui sont partis ailleurs, mais qui ont maintenu des liens scientifiques avec les universités algériennes. Ce colloque a inscrit dans ses objectifs la mise en relief des avancées scientifiques fondamentales et appliquées des méthodes d'aide à la décision et d'en tracer de nouvelles perspectives.

Ainsi, cette présente session poursuit les mêmes objectifs que s'était assigné le MOAD à sa naissance, à savoir de favoriser la conjonction entre, d'une part, les différentes théories fondamentales à la base des méthodes d'aide à la décision et, d'autre part, leurs applications dans les différents domaines allant des sciences technologiques, l'organisation industrielle, aux réseaux informatiques et de communication, en passant par les sciences des données, la biologie, la mécanique, la robotique,....

Le programme scientifique de MOAD-2022 contient la présentation de 136 communications sélectionnées (95 sous forme orale et 41 en posters), ainsi que 6 conférences plénières qui couvrent des thématiques de recherche d'actualité autour des statistiques (30), Optimisation (38), informatique (17), Processus stochastiques (29) et Applications (22).

Outre les communications acceptées, le programme scientifique de MOAD-2022 prévoit également six conférences plénières animées par d'éminents chercheurs :

1. **Pr Mokhtar SELLAMI**, Directeur en charge de l'innovation et des technologies au CNRST (Conseil National de Recherche Scientifique et des Technologies), Alger.
Analyse sur la recherche scientifique et son impact : La difficile transition SNR – SNRI.
2. **Pr Boualem DJEHICHE**, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm. **Basics of mean field theory on networks from a management science perspective.**
3. **Pr Kamel BARKAOUI**, Beït el-Hikma –Tunis
Evaluation des performances des systèmes informatiques et des réseaux de communications : Rétrospectives et tendances actuelles
4. **Pr Meziane AIDER**, LaROMaD, Fac. Maths., USTHB, Alger
Combinatorial optimization and current research trends
5. **Pr Moundir LASSASSI**, Directeur du Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement – CREAD, Alger.
Socio-economic management of Covid-19 in Algeria: which lessons to learn?
6. **Dr Mustapha BENAOUICHA**, Responsable du Département Recherche et Innovation chez SEGULA Technologie France, Nantes.
Sur quelques problèmes d'aide à la décision dans les domaines naval et de l'énergie

L'organisation du colloque MOAD permettra aux chercheurs (jeunes et confirmés) de prendre connaissance des derniers développements dans cette discipline, mais également favorisera les échanges directs, les confrontations entre les différentes approches et enfin définir de nouvelles perspectives de recherche. L'organisation d'une « Table Ronde » et d'une session « posters » lors du colloque est une occasion offerte pour les industriels de soumettre des problématiques de leurs entreprises, qui pourraient déboucher à des perspectives de collaboration entre l'université et le secteur socio-économique.

Mohammed Said RADJEF
Professeur, Directeur de Recherche
LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle
Faculté des Sciences Exactes
Université de Béjaia

Table des matières

Préface	viii
I CONFÉRENCES PLÉNIÈRES	1
I.1 Analyse sur la Recherche Scientifique et son Impact : La Difficile Transition SNR – SNRI	2
<i>Mokhtar Sellami</i>	
I.2 Basics of Mean Field Theory on Networks from a Management Science Perspective	4
<i>Boualem Djehiche</i>	
I.3 Socio-Economic Management of Covid-19 in Algeria: which Lessons to Learn?	5
<i>Moundir Lassassi</i>	
I.4 Combinatorial Optimization and Current Research Trends	6
<i>Meziane Aider</i>	
I.5 Sur Quelques Problèmes d’Aide à la Décision dans les Domaines Naval et de l’Energie	7
<i>Mustapha Benaouicha</i>	
I.6 Evaluation des Performances des Systèmes Informatiques et ces Réseaux de Communications: Rétrospectives et Tendances Actuelles	8
<i>Kamel Barkaoui</i>	
II MODÈLES STOCHASTIQUES ET APPLICATIONS	9
II.1 Estimators of the Retrial Rate in M/G/1 Queues with Linear Retrial Policy	10
<i>Houssam Hamache and Louiza Berdjoudj</i>	
II.2 M/G/1 Retial Queue, Batch Arrival, Unreliable Server and Impatient Customers with Two Phases of Service	16
<i>Djamila Zirem, Tassadi Lachemot, Mohamed Boualem and Djamil Aïssani</i>	
II.3 Optimum Cost Analysis of A Multi-Server Queue in a Multi-Phase Random Environment with Customers’ Impatience under Synchronous Working Vacation	22
<i>Meriem Houalef, Amina Angelika Bouchentouf and Lahcene Yahiaoui</i>	

II.4	Impatient Customers in Markovian Bernoulli Feedback Queue with Waiting Server under Variant Working Vacation Policy . . .	28
	<i>Amina Angelika Bouchentouf, Lahcene Yahiaoui, Mokhtar Kadi and Majid Shakir</i>	
II.5	Sensitive Analysis in the (R; s; InQ) Inventory Model	34
	<i>Nedjma Aiane, Fazia Rahmoune and Djamil Aïssani</i>	
II.6	Stochastic Integral for Non-Adapted Processes Related To the Rosenblatt Process	41
	<i>Sakina Benkaddour, Abdeldjebbar Kandouci and Omar Kebiri</i>	
II.7	On The Solution of Stochastic Differential Equation in One Dimensional Case with Lipschitz Coefficients	47
	<i>Elias Taki Eddine Mohammed Chikouche and Fatima Benziadi</i>	
II.8	Estimating Implied Volatility Using Mann-Type Iterative Algorithm	53
	<i>Baya Takhedmit, Bahia Barache and Massinissa Soufit</i>	
II.9	Automobile Insurance Ratemaking in Algerian Market Using Machine Learning Methods	56
	<i>Walid Oucherif and Nassim Touche</i>	
II.10	Intelligent Traffic Light Using Non-Exhaustive Polling System . .	62
	<i>Sabiha Larbi, Fazia Rahmoune and Mohammed Said Radjef</i>	
II.11	Quasi-Stationary Probability Distribution for the SIR Epidemic Model	68
	<i>Fahima Ouicher and Tewfik Kernane</i>	
II.12	A Stochastic Differential Equation SIR Epidemic Model	76
	<i>Khelifa Berkane and Abdeldjebbar Kandouci</i>	
II.13	Étude de la File M/G/1 avec Rappel Général et Politique de Rappel Constante dans le cadre d'un PDMP	82
	<i>Sara Meziani and Tewfik Kernane</i>	
II.14	Modélisation et Analyse d'un Réseau de Files d'Attente Fermé via les RdPSG	89
	<i>Sedda Hakmi, Lyes Ikhlef and Ouiza Lekadir</i>	
II.15	Analyse des Performances d'un Système de Gestion de Stocks à Produits Périssables Via les RdPSG	95
	<i>Lyes Ikhlef and Ouiza Lekadir</i>	
II.16	Construction de Plans d'Expériences Numériques à partir de Processus Stochastique Ponctuel	101
	<i>Ahmed Ait Ameer, Hichem Elmossaoui and Nadia Oukid</i>	
II.17	Estimation des Paramètres des Equations Différentielles Stochastiques - Généralisation de la Méthode des Temps de Passage . . .	108
	<i>Samia Meddahi and Khaled Khaldi</i>	

II.18	Estimation du Risque de Liquidité Bancaire : Approche par la Théorie de Ruine	114
	<i>Randa Brick Chaouche, Sarah Yasmine Sekkak, Atik Touazi and Djamil Aïssani</i>	
III	OPTIMISATION	120
III.1	A New Local Search Heuristic Based on the Gradient Method For a Binary Knapsack Problem	122
	<i>Chahrazad Adiche</i>	
III.2	Quadratic Programming Problems with a Diagonally Dominant M-matrix	128
	<i>Katia Hassaini and Mohand Ouamer Bibi</i>	
III.3	Cubical Dimension of New Classes of Balanced Binary Trees . . .	135
	<i>Kamal Kabyl</i>	
III.4	A Dynamic Model of the Firm with Time Delay in Investment . . .	141
	<i>Mourad Azi, Mohand-Ouamer Bibi, Rim Belaidi and Soumia Laib</i>	
III.5	Risk-Sensitive Necessary Optimality Condition for a BSDE Driven by Fractional Brownian Motion	148
	<i>Tayeb Bouaziz and Adel Chala</i>	
III.6	Numerical Techniques for Solving Optimal Control of Pests by Predators	154
	<i>Nacima Moussouni, Mohamed Aliane and Louiza Dehbi</i>	
III.7	A New Metaheuristic for Optimizing Over the Integer Efficient Set	160
	<i>Ali Zaidi and Djamel Chaabane</i>	
III.8	Solving the Multi-Objective Spanning Tree Problem Using a Hybrid Strategy	167
	<i>Asma Boumesbah and Mohamed El-Amine Chergui</i>	
III.9	Multi-objective Tunicate Swarm Algorithm	173
	<i>Amal Derrech, Djaafar Zouache and Boualem Brahmi</i>	
III.10	Metagame Model for Urban Traffic Control	179
	<i>Hichem Mahiout, Mohammed Said Radjef and Nadir Farhi</i>	
III.11	A Case study of Hypotheses and Model Construction: Financial Strategy, Accounting Quality and Organizational Performance in Developing Countries	184
	<i>Baizid Touazi</i>	
III.12	Mean-Field-Type Games with Hierarchical Structures	189
	<i>Z. Frihi, J. Barreiro-Gomez, S. Choutri and H. Tembine</i>	
III.13	Presolving pour un Problème de Minimisation Quadratique Convexe	196
	<i>Samia Djemai and Mohaned Ouamer Bibi</i>	

III.14	Méthode Adaptée pour la Résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire à Variables Bornées	203
	<i>Nassima Lazari and Mohand Ouamer Bibi</i>	
III.15	Méthode Adaptée pour la Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire en Nombres Entiers et Mixtes	210
	<i>Houria Boussouira and Mohand Ouamer Bibi</i>	
III.16	Nouvelle Méthode pour la Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire Fractionnaire	216
	<i>Mohammed Amin Hakmi, Mohand Bentobache and Mohand Ouamer Bibi</i>	
III.17	Nouvelle Technique sans Variables Artificielles pour l'Initialisation de l'Algorithme du Simplexe	223
	<i>Khalil Djeloud, Mohand Bentobache and Mohand Ouamer Bibi</i>	
III.18	Amélioration de la Méthode Adaptée à Direction Hybride pour les Problèmes de Programmation Quadratique Convexe à Variables Bornées	230
	<i>Chafiâ Hadjout and Mohand Ouamer Bibi</i>	
III.19	Procédure de Presolving en Programmation Linéaire en Nombres Binaires	236
	<i>Abdelkrim Rezzag and Mohand Ouamer Bibi</i>	
III.20	Méthode Directe de Support pour l'Optimisation Paramétrique du Modèle Moyenne-Variance	243
	<i>Souhaib Boudjelda and Belkacem Brahmi</i>	
III.21	Ordonnancement d'Atelier Job-Shop par Métaheuristique des Colonies d'Abeilles- Etude de Sensibilité	250
	<i>Amaria Ouis Khedim and Mehdi Souier</i>	
III.22	Optimisation des Dimensions de l'AS/RS a Racks Glissant en Utilisant l'Algorithme Génétique	259
	<i>Wahiba Fandi, Sihem Kouloughli and Latefa Ghomri</i>	
III.23	Variabilité de la Rente et Incitations à la Réforme dans un Cadre Non-Démocratique : une Analyse Théorique	265
	<i>Abdelhakim Lounaci and Said Souam</i>	
III.24	Perception de la Qualité et Création de Valeur via l'Indication Géographique	273
	<i>Nacim Nait Mohand, Abdelhakim Hammoudi and Mohammed Said Radjef</i>	
III.25	Secteur Informel et Impact de la Crise Covid 19 sur la Filière Datte en Algérie. Une Approche d'Economie Industrielle	281
	<i>Walid Aziez, Abdelhakim Hammoudi and Mohammed Said Radjef</i>	
III.26	La Veille Stratégique, un Outil de Gestion d'Aide à la Prise de Décision	287
	<i>Chafiaa Benabdeslam and Souad Boudache</i>	

III.27	Approche Méthodologique d'Aide à la Décision Spatiale en Groupe	299
	<i>Abdellah Mebrek, Abdelkader Mendas and Zohra Makranfar</i>	
III.28	Qualité Nutritionnelle des Aliments et Risque Sanitaire, Inter- vention Publique et Stratégie des Acteurs : une Approche de l'Economie Industrielle	305
	<i>Manel Zahra Boutouis and Abdelhakim Hammoudi</i>	
III.29	Émergence de Coopérations de Firmes Hétérogènes en RD : Règle d'Adhésion Exclusive Versus Règle d'Adhésion Ouverte	316
	<i>Razika Sait, Abdelhakim Hammoudi and Mohammed Said Radjef</i>	
IV	STATISTIQUES	319
IV.1	Asymmetric Kernel Density Estimation for Dependent Data . . .	320
	<i>Mohamed Khemici, Nabil Zougab and Smail Adjabi</i>	
IV.2	Nonparametric Estimation of Performability for Homogeneous Continuous-Time Semi-Markov Models	326
	<i>Tayeb Hamlat and Fatiha Mokhtari</i>	
IV.3	Asymptotic Normality of the Kernel Regression Estimator for Truncated and Associated Data	332
	<i>Farida Hamrani and Zohra Guessoum</i>	
IV.4	Inference in Weakly Dependent Data Models	339
	<i>Soumia Rih and Abdelkader Tatachak</i>	
IV.5	Non Parametric Robust Regression : Automatic Bandwidth Selec- tion	344
	<i>Hassiba Benseradj and Zohra Guessoum</i>	
IV.6	Theoretical Choice of the Optimal Bandwidth of the Robust Re- gression in the Incomplete and Dependent Data	350
	<i>Asma Gheliem and Zohra Guessoum</i>	
IV.7	A Family of Asymmetric Kernels Based on Log-Symmetric Dis- tributions	355
	<i>Sylia Makhloufi, Nabil Zougab, Yasmina Ziane and Smail Adjabi</i>	
IV.8	Asymptotic Normality for Regression Function Estimate under Right Censored Data and Association	361
	<i>Nassira Menni</i>	
IV.9	On the Asymptotic Properties of Kernel Estimators for Continuous- Time Semi-Markov Processes	367
	<i>Chafiâa Ayhar, Vlad Stefan Barbu, Fatiha Mokhtari and Saâdia Rahmani</i>	
IV.10	Quantile Quadratic Credibility Premium	373
	<i>Ahmed Sadoun, Farouk Metiri and Mouhamed Riad Remita</i>	

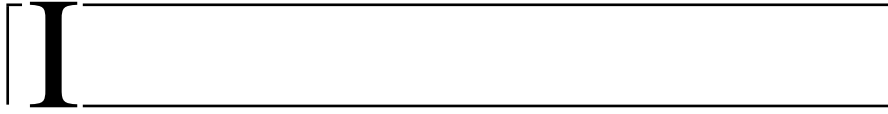
IV.11	Heavy Tailed Distribution in a Random Stopping Time for Super-critical Branching Processes	377
	<i>Akila Hedjam and Djamel Hamadouche</i>	
IV.12	Bais Reduction in Tail Index Estimation for Randomly Truncated Data	384
	<i>Abdelhakim Necir, Saida Mancer and Souad Benchaira</i>	
IV.13	On the Estimation of Signed Periodic INAR Models	389
	<i>Fares Ouzzani and Nawel Aries</i>	
IV.14	The Markov Switching Periodic INARCH Models	393
	<i>Billel Aliat and Fares Ouzzani</i>	
IV.15	Spectral Estimation of Unevenly Spaced Tome Series	398
	<i>Charef Eddine Mansouri</i>	
IV.16	Nonlinear Least Squares Estimation of the Unrestricted Periodic EXPAR(1) Model	403
	<i>Sabah Becila and Mouna Merzougui</i>	
IV.17	Central Limit Theorem of the Maximum Likelihood Estimates of 2D-RCAR Models	409
	<i>Ouerdia Arezki and Abdelghani Hamaz</i>	
IV.18	A Novel Class of Count Time Series Models	416
	<i>Nassim Touche</i>	
IV.19	Détection des Valeurs Aberrantes avec le Bayésien Empirique	420
	<i>Kamilia Haddadou, Lynda Atil and Hocine Fellag</i>	
IV.20	Un Algorithme pour le Block Clustering des Séries Temporelles	428
	<i>Yamina Khemal-Bencheikh and Walid Grimes</i>	
V	INFORMATIQUE	433
V.1	A Reputation, Vehicles and Messages Types Trust Management System in Intelligent Transportation System	434
	<i>Sid Ali Belhocine, Sofiane Aissani, Abdelkader Chettab and Yasmine Chettab</i>	
V.2	Intelligent Cloud Computing Resource Allocation Framework	440
	<i>Djamila Boukredera, Karima Adel-Aissanou, Lydia Bechroune and Zidane Aghouïles</i>	
V.3	Towards an Effective Utilization of Resource Units in Multi-User OFDMA Communications	446
	<i>Saloua Brahmi and Yazid Mohand</i>	
V.4	A Study on the Factors Affecting the Quality of Learning Content in the Context of e-learning	452
	<i>Youssouf Abda, Zohra Mehenaoui, Rochdi Boudjehem and Yacine Lafifi</i>	
V.5	Averaging Ensemble Models for Blood Glucose Level Prediction in Type 1 Diabetes	459
	<i>Abdelaziz Mansour, Kamal Amroun, Zineb Habbas and Fayçal Ykhlef</i>	

V.6	Machine Learning with CBC Test for Early Response Prediction to Neoadjuvant Chemotherapy	466
	<i>Abdelhakim Ziani and Oualid Yakoubi</i>	
V.7	Optimisation du Placement des Fonctions Réseaux Virtuelles dans un Environnement Cloud	474
	<i>Imadeddine Said, Lamri Sayad and Djamil Aïssani</i>	
V.8	Classification des Styles d'Apprentissage à base des Machines à Vecteurs de Supports	481
	<i>Zohra Mehenaoui, Houda Tadjer, Safia Bendjebar and Yacine Lafifi</i>	
V.9	Système Efficace de Filtrage des Spomments Maghrébins basé sur l'Apprentissage Profond Récurrent	489
	<i>Marouane Kihal and Lamia Hamza</i>	
V.10	Proposition d'une Architecture GAN pour le Prétraitement et la Classification des Images de la Rétinopathie Diabétique	496
	<i>Samira Ait Kaci Azzou, Djamil Boukredera and Imene Benadjaoud</i>	
VI	MAINTENANCE ET SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT	503
VI.1	Étude Paramétrique du Modèle de Maintenance Préventive selon l'Âge	504
	<i>Lamia May, Radouane Laggoune and Youcef Khelfaoui</i>	
VI.2	Evaluation Quantitative de la Disponibilité Opérationnelle de la Pomperie Anti-incendie dans les Unités Pétrolières et Gazières	510
	<i>Karim Younsi and Abdelnacer Smati</i>	
VI.3	Optimisation de la Configuration des Dispositifs de Dépressurisations des Gazoducs par Analyse RAMS	516
	<i>Mohamed Chérif Abdelfettah Touabti and Abdelnacer Smati</i>	
VII	APPLICATIONS À L'INGÉNIERIE	522
VII.1	Influence of Space Charge on Electric Field Distribution in Point-Barrier-Plane Air Gaps using Comsol Multiphysics Based on Finite Element Method	523
	<i>Mohamed Abdelghani Benziada, Ahmed Boubakeur and Abdelouahab Mekhaldi</i>	
VII.2	Optimization of the Flow Rack AS/RS Configuration under a Specific Random Retrieving	531
	<i>Khadidja Bakdi, Thiziri Boumezirene and Latefa Ghomri</i>	
VII.3	Using GIS in Seismic Hazard Analysis and Data Combination for Disaster Risk Management	538
	<i>Mouloud Hamidatou, Nassim Hallal and Saad Lebdioui</i>	
VII.4	Estimation d'Erreur à Postérieur et Optimisation de Maillages pour Modèles Mécaniques à Comportements Endommageables	544
	<i>Abdelhamid Becheur</i>	

VII.5	Optimisation des Dimensions des Coursiers en Marches d'Escalier <i>Fatiha Lebdiri and Abdelghani Seghir</i>	552
VII.6	Modélisation et Optimisation d'une Station d'Elaboration du Sable Concassé en utilisant la Méthode des Plans d'Expériences <i>Djamel Benyessad, Hamid Arkoub and Abdelghani Seghir</i>	558
VII.7	Modélisation et Simulation du Flux des Patients au Service des Urgences de Tlemcen <i>Afaf Zerrouk, Imane Laribi and Latefa Ghomri</i>	566
VIII	POSTERS	572
VIII.1	A Cooperative Game Theory Model for a Banking Network <i>Karima Bouibed, Mohammed Hefaia and Abdelkader Sbai</i>	574
VIII.2	CVaR-GARCH-Copula Models in Forecasting the Market Risk : Evidence from the Exchange Rate Market <i>Fayçal Boumizez, Mohammed Bouznit and Ali Zatout</i>	579
VIII.3	On Nonparametric Kernel Regression Estimation for Functional Stationary Ergodic Data: a Short Overview <i>Abd Elbasset Djeniah</i>	587
VIII.4	Performance Evaluation of a Production Line via Petri Nets: Case of the AMIMER ENERGIE Company <i>Sedda Hakmi, Halima Keddouh, Fahima Djouadi and Djamil Aïssani</i>	593
VIII.5	Outlier Detection Methods for Exponential Samples <i>Lyasmine Harrouche, Hocine Fellag and Lynda Atil</i>	599
VIII.6	A Knowledge-based Decision Support System for Loan Assess- ment: An Integrated Case-Based Reasoning and AHP Method <i>Abdelkader Adla, Bakhta Nachet and Djamil Bouhalouan</i>	605
VIII.7	Implementation of IoT-Smart Irrigation system using Blynk App <i>Ibtissem Adoui and Mohammed Titaouine</i>	612
VIII.8	Single Retrial Service with Batch Arrivals, Recurrent Customers, Breakdown, Delaying Repair and Bernoulli Vacation <i>Tassadit Lachemot</i>	622
VIII.9	Power Contamination and Domination on the Grid <i>Amina Ainouche and Sadek Bouroubi</i>	630
VIII.10	Total Flowtime Minimization in Flow Shop with Resources con- straints by using Meta-Heuristic <i>Imane Laribi</i>	636
VIII.11	Optmisation of Batch Stochastic (s,Q) Continuous Review Inven- tory System with Retrial Demands <i>Lydia Bazizi, Ouiza Lekadir and Fazia Rahmoune</i>	642

VIII.12 Automatic Classification of Sleep Apnea-Hypopnea Events Using EWT-based Frequency Characteristics of EEG Signals and Neural Networks Trained by Hybrid PSO & GSA	648
<i>Hadj Abdelkader Benghenia and Zine Eddine Hadj Slimane</i>	
VIII.13 Classification of Obstructive Sleep Apnea based on Entropy and Bispectral Entropy Features	659
<i>Hadj Abdelkader Benghenia and Zine-Eddine Hadj Slimane</i>	
VIII.14 On The Property of Solution of Stochastic Differential Equation With Respect to Initial Data	668
<i>Moussa Souar and Fatima Benziadi</i>	
VIII.15 On a Multi-Server Queueing System with Differentiated Working Vacation Policy, Vacation Interruption, Balking and Reneging . . .	671
<i>Aimen Dehimi, Louiza Berdjoudj, Mohamed Boualem and Amina Angelika Bouchentouf</i>	
VIII.16 Quadratic Parametric Approach for Constrained Bi-Matrix Game with Payoffs and Constraints Represented by IFN	676
<i>Sabiha Djebara and Farida Achemine</i>	
VIII.17 Convergence Rate of Lynden-Bell Estimator for Randomly Left Truncated and Widely Orthant Dependent Data	682
<i>Mohamed Kaber El Alem, Zohra Guessoum and Abdelkader Tatachak</i>	
VIII.18 Multivariate Probability Density Estimator using Inverse Gamma and Beta Prime Kernels	690
<i>Lynda Harfouche, Nabil Zougab and Smail Adjabi</i>	
VIII.19 Nonparametric Mode Estimation	696
<i>Adlane Mellah, Nora Saadi and Nabil Zougab</i>	
VIII.20 On M/M/1 Retrial Queue with Orbital Search.	702
<i>Zina Boussaha, Nadia Oukid and Halim Zeghdoudi</i>	
VIII.21 On Estimation in Periodic Threshold ARCH(Q) Models: Gaussian QMLE Approach	708
<i>Walid Slimani, Ines Lescheb and Mouloud Cherfaoui</i>	
VIII.22 New Form of Driver Authentication based on His Behavior and Habits	715
<i>T. Chenache, K. Zizi, S. Aissani, F. Kacimi, Z. Farah and M. Omar</i>	
VIII.23 Analysis of an M/G/1 Retrial Queue with Persistent and Impatient Customers	721
<i>Nasreddine Dehamnia, Mohammed Boualem and Djamil Aïssani</i>	
VIII.24 Matrix Geometric Method for the Analysis of Unreliable Server Queueing System subjected to Vacation Policy	727
<i>Anis Chettouf, Mohamed Boualem and Amina Angelika Bouchentouf</i>	
VIII.25 Towards Automatic Reinforcement of Mobile Codes Security Based on Algebraic Approach	733
<i>Djamila Zamouche, Sofiane Aissani and Mawloud Omar</i>	

VIII.26 Minimisation de la Rogne dans la Production du Carton Ondulé au Niveau de l'Entreprise Générale Emballage	739
<i>Saida Belhoul, Nassima Berrane, Ouiza Lekadir and Djamil Aïssani</i>	
VIII.27 Flow Shop Robotisé Réentrant à Deux Machines	745
<i>Ali Khebouche and Mourad Boudhar</i>	
VIII.28 Application de la Programmation de But Linéaire dans la Planification de la Production au sein de l'ALFADITEX	751
<i>Lhadi Boughani, Ouiza Lekadir and Djamil Aïssani</i>	
VIII.29 Comparaison des Approches PERT et PERT Stochastique. Application à un Projet de la RTC-Sonatrach de Béjaïa	757
<i>Fouzia Ghellab and Djamil Aïssani</i>	
VIII.30 Optimisation de la Maintenance Préventive des Equipements Informatiques au niveau de l'Entreprise NAFTAL Béjaïa	764
<i>Akila Tahir, Nassima Rahmi, Salima Kendi and Djamil Aïssani</i>	
VIII.31 Analyse des Performances du Système Ma/M/1//N via les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG)	770
<i>Sedda Hakmi, Hamza Belkacemi and Ouiza Lekadir</i>	
VIII.32 Une Approche de Sélection d'Attributs et Classification pour le Trafic du Réseau Internet	776
<i>Amira Bouchama, Marya Bouazabia and Dalila Boughaci</i>	
VIII.33 Modélisation et Prévision de la Pluviométrie. Tranfert des Eaux Barrage Béni Haroun	782
<i>Fatima Zoghbi, Sarra Amira, Yasmina Ziane and Djamil Aïssani</i>	
VIII.34 Problèmes autour de la Localisation dans les Supply Chains: Transport, Routage, Clustering, Jeux et Métaheuristiques	788
<i>Salima Kendi, Kahina Bouchama and Mohammed Said Radjef</i>	
VIII.35 Utilité Décisionnelle de l'Information Comptable Financière : Autres Mesures à partir du cas Algérien	795
<i>Baizid Touazi and Tayeb Chabi</i>	
VIII.36 Entreposage des Conteneurs au niveau du Centre de Transit des Marchandises Dangereuses du port de Béjaïa	799
<i>Lina Bounia, Nesrine Ladjemil and Ouiza Lekadir</i>	
VIII.37 Réapprovisionnement En Matières Premières: Cas De La SARL Ramdy	807
<i>Djabali Yasmina, Sabrina Oubraham, Sabrina Toufouti and Djamil Aïssani</i>	



CONFÉRENCES PLÉNIÈRES

Sommaire

I.1	Analyse sur la Recherche Scientifique et son Impact : La Difficile Transition SNR – SNRI	2
I.2	Basics of Mean Field Theory on Networks from a Management Science Per- spective	4
I.3	Socio-Economic Management of Covid-19 in Algeria: which Lessons to Learn?	5
I.4	Combinatorial Optimization and Current Research Trends	6
I.5	Sur Quelques Problèmes d’Aide à la Décision dans les Domaines Naval et de l’Energie	7
I.6	Evaluation des Performances des Systèmes Informatiques et ces Réseaux de Communications: Rétrospectives et Tendances Actuelles	8

Analyse sur la Recherche Scientifique et son Impact : La Difficile Transition SNR – SNRI

Mokhtar Sellami 

Directeur en charge de l'innovation et des technologies au CNRST (Conseil National de Recherche Scientifique et des Technologies), Alger

Résumé

Les universités algériennes et les centres de recherche font l'objet d'une pression croissante pour relever les défis sociétaux. L'objectif recherché n'est plus « l'excellence scientifique », et la création de nouvelles connaissances, mais de contribuer à réduire les coûts de la facture alimentaire, à lutter contre les effets du covid-19 et ses conséquences, à substituer l'importation des biens et services par des produits locaux et enfin à atténuer les effets des changements climatiques. En fait cette préoccupation n'est pas nouvelle, elle est partagée par bien des gouvernants, qui insistent sur un retour sur investissement en privilégiant la troisième dimension de l'université qui est l'innovation, à travers l'encouragement à l'entrepreneuriat. Il ne s'agit pas d'un changement de paradigme, mais d'une mutation d'un Système National de Recherche (SNR) hérité de la période coloniale vers un Système National de Recherche et d'Innovation (SNRI) centré sur la commercialisation des produits issus de la recherche et la création de richesses. Le SNRI constitue le flux de technologie et d'information entre les personnes, les entreprises et les institutions qui est la clé du processus d'innovation au niveau national. Une définition plus illustrative mentionne le SNI comme « l'ensemble d'institutions distinctes qui contribuent conjointement et individuellement au développement et à la diffusion de nouvelles technologies et qui fournissent le cadre dans lequel les gouvernements élaborent et mettent en œuvre des politiques pour influencer le processus d'innovation. En tant que tel, il s'agit d'un système d'institutions interconnectées pour créer, stocker et transférer les connaissances, les compétences et les artefacts qui définissent les nouvelles technologies ». Une telle évolution SNR-SNRI est parsemée d'obstacles liés à la faiblesse du potentiel humain et à l'intransigeance de la certification. L'impulsion de l'Etat qui a décrété la recherche comme une priorité nationale a permis au pays de se doter d'énormes infrastructures et de moyens pour permettre une recherche d'excellence (centres de recherche, laboratoires de recherche, plateformes technologiques, centres de calcul intensif, plateaux techniques, SNDL, programmes nationaux de recherche, incubateurs, etc.). S'il y a une visibilité à parfaire au niveau des publications scientifiques, le développement technologique reste embryonnaire (niveau TRL et Vallée de la mort), et le SNRI peine à voir le jour.

Dans cette communication nous mettrons en exergue les importants investissements réalisés dans les infrastructures et les équipements de recherche et nous tenterons d'identifier les chaînons manquants pour faire du système national de recherche, un instrument de compétitivité des entreprises et de progrès social. Nous nous interrogerons également sur les classements internationaux défavorables à l'Algérie. En guise de conclusion, nous illustrerons nos propos par quelques exemples d'efforts consentis par la communauté des chercheurs de l'Université de Bejaia et leur contribution à l'édification du système national de recherche.



Basics of Mean Field Theory on Networks from a Management Science Perspective

Boualem Djehiche 

KTH Royal Institute of Technology, Stockholm

Abstract :

I will review some basics of mean field theory on networks with a perspective towards management science. I will show how the mean field approximation can help incorporate dynamic network information to enhance some investment decisions such as credit allocation etc.



Socio-Economic Management of Covid-19 in Algeria: which Lessons to Learn?

Moundir Lassassi 

Directeur du Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement – CREAD, Alger

Abstract :

The first documented pandemic in the history is that of Athens' Plague (- 430, - 426 BC). This pandemic spread over Greece, Libya, Egypt, and Ethiopia causing over 75 000 deaths. The typhus or the typhoid are suspected to be at its origin, but the real disease that had caused it stays unknown up to now. Other pandemics emerged among the different centuries, however as for the Athene Plague, their specific information, such as the number of deaths, the origin or the type of the disease, etc, are not always available. Collecting and analyzing data during a pandemic is essential to understand its impact on all life's aspects, and then be able to elaborate plans to better face the forthcoming pandemics. In this regard, the Research Center in Applied Economics for Development lunched a series of 9 research projects, executed by multidisciplinary teams to study the different impacts of the Covid-19 outbreak in Algeria. First, the data was collected through online surveys during the early stage of the outbreak. The use of different mathematical techniques to analyze the obtained data gave a first overview on the evaluation of the authorities' policies in several sectors, such as high education, tourism, and food safety. Moreover, some insights about the Algerians' perception of the Covid-19 outbreak and its related danger were given. Then, it is shown that their mobility is not affected by their danger perception. In this direction, the authorities were advised to develop more efficient communication strategies to increase the awareness of the population regarding the relation between mobility and the virus spread. At a steady state of the health situation, we conducted a household survey among 1500 houses. To this end, sampling techniques were used to select the households in order to respect the dispersion of the population according to the territorial programming space and the stratum of residence. Statistical models combined to operational research techniques were also used to characterize the population's use of safety measures on one hand, and to identify the most efficient communication strategies in the other hand. At the end of the study, we deduce that to make the messages more impactful the government must focus on messages that contain real images, or famous people having good credibility, especially to target youth and urban people. Furthermore, the design of posters must focus mostly on schemes than writing.



Combinatorial Optimization and Current Research Trends

Meziane Aider 

LaROMaD, Fac. Maths., USTHB, BP 32 El Alia, 16111, Alger

Abstract :

Combinatorial optimization is a scientific field at the meeting point of discrete mathematics, applied mathematics, operations research and computer science. Its goal is to provide mathematical models and methods for finding good quality solutions to problems defined on discrete structures, whose solution space is subject to combinatorial explosion. Its applications are innumerable in many areas of everyday life. In the last decades, this field has undergone tremendous evolutions that have allowed the development of efficient solution approaches for complex and high dimensional problems. Traditionally, classical solution methods repeatedly decompose the problem to be solved into sub-problems of lesser dimensions, until their treatment can be done efficiently. Paradoxically, current trends are not systematically aligned with this idea, quite the contrary, especially those related to mathematical programming. In this talk, we will describe in detail the vast and rich field of mathematical research that is "combinatorial optimization", discuss how to classify its problems, and the nuances that this obscures. We will also point out some general limitations in the solution of most of these problems, and discuss some current trends in the research of methods for their solution.



Sur Quelques Problèmes d'Aide à la Décision dans les Domaines Naval et de l'Énergie

Mustapha Benaouicha 

Responsable du Département Recherche et Innovation chez SEGULA Technologie France, Nantes.

Résumé

L'aide à la décision est très présente dans les métiers de l'ingénieur. L'objectif est d'apporter des solutions à divers problèmes rencontrés, afin de favoriser une meilleure prise de décision. Cependant, le développement d'outils d'aide à la décision spécifiques, nécessite des compétences transverses, des expertises pluridisciplinaires, ainsi qu'une connaissance des métiers mis en jeu. Dans cette intervention, la dimension de développement d'outil d'aide à la décision est présentée à travers quelques projets de recherche et développement réalisés au sein de Segula Technologies, dans les domaines de la construction navale et de l'énergie (gestion, production ou stockage de l'énergie). Au-delà du problème mathématique, les problèmes de mise en œuvre sont mis en avant et discutés.



Evaluation des Performances des Systèmes Informatiques et ces Réseaux de Communications: Rétrospectives et Tendances Actuelles

Kamel Barkaoui 

Beït el-Hikma –Tunis

Résumé

Dans cet exposé, on présentera un Panorama des méthodologies et des techniques permettant de dimensionner une infrastructure informatique et d'anticiper ses performances, en passant en revue les méthodes de modélisation et les problématiques de dimensionnement et de Qualité de Service.(QoS) .

II

MODÈLES STOCHASTIQUES ET APPLICATIONS

Sommaire

II.1	Estimators of the Retrial Rate in M/G/1 Queues with Linear Retrial Policy . . .	10
II.2	M/G/1 Retial Queue, Batch Arrival, Unreliable Server and Impatient Customers with Two Phases of Service	16
II.3	Optimum Cost Analysis of A Multi-Server Queue in a Multi-Phase Random Environment with Customers' Impatience under Synchronous Working Vacation	22
II.4	Impatient Customers in Markovian Bernoulli Feedback Queue with Waiting Server under Variant Working Vacation Policy	28
II.5	Sensitive Analysis in the (R; s; InQ) Inventory Model	34
II.6	Stochastic Integral for Non-Adapted Processes Related To the Rosenblatt Process	41
II.7	On The Solution of Stochastic Differential Equation in One Dimensional Case with Lipschitz Coefficients	47
II.8	Estimating Implied Volatility Using Mann-Type Iterative Algorithm	53
II.9	Automobile Insurance Ratemaking in Algerian Market Using Machine Learning Methods	56
II.10	Intelligent Traffic Light Using Non-Exhaustive Polling System	62
II.11	Quasi-Stationary Probability Distribution for the SIR Epidemic Model	68
II.12	A Stochastic Differential Equation SIR Epidemic Model	76
II.13	Étude de la File M/G/1 avec Rappel Général et Politique de Rappel Constante dans le cadre d'un PDMP	82
II.14	Modélisation et Analyse d'un Réseau de Files d'Attente Fermé via les RdPSG .	89
II.15	Analyse des Performances d'un Système de Gestion de Stocks à Produits Périssables Via les RdPSG	95
II.16	Construction de Plans d'Expériences Numériques à partir de Processus Stochastique Ponctuel	101
II.17	Estimation des Paramètres des Equations Différentielles Stochastiques - Généralisation de la Méthode des Temps de Passage	108
II.18	Estimation du Risque de Liquidité Bancaire : Approche par la Théorie de Ruine	114



Estimators of the retrial rate in M/G/1 queues with linear retrial policy

Houssam Eddine Hameche¹ and Louiza Berdjoudj²

¹Department of Mathematics, Applied Mathematics Laboratory, University of Bejaia, Algeria,
houssameddine.hameche@univ-bejaia.dz

²Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
louiza.berdjoudj@univ-bejaia.dz

Abstract : This work is aiming to the analysis of the M/G/1 retrial queue from a statistical point of view. More specifically, we are looking in estimating the retrial rate by generalizing Rodrigo's work (1998 and 2006) in ergodic cases. Suppose that retrial are distributed exponential, and the recall policy is linear. The rate estimator retrials and its variance were obtained. We test numerically the accuracy of the proposed estimators.

Keywords : Retrial queues ; statistical inference ; Linear retrial policy

1 Introduction

Queueing systems with retrials have been largely used to model many issues telephone systems, computer networks, local area networks and daily life. A full description of situations where queueing systems with retrial can be found in the monograph of Falin and Templeton (1997), monograph of Artalejo (2008) and the survey of Kim and Kim (2016). A bibliographic classification is given in the articles by Artalejo (1999) and Artalejo (2010) as well as the review by Shekhar et al. (2016).

The analysis of queueing systems from a statistical point of view, first showed in 1957 with the works of Clarke (1957), who used the classical method of maximum likelihood to estimate the parameters of a simple system.

The number of publications on the statistical analysis of retrial queue models is very short compared to the number of publications available in the stochastic analysis literature of these models. Hoffman and Harris (1986) developed an algorithm to estimate the arrival rate using actual telephone data. Falin (1995) and Rodrigo et al. (1998) proposed recall rate estimators for M/M/1 and M/G/1. with classic retrials. Rodrigo and Vazquez (1999) did a statistical analysis of the model G/G/1 with distribution of general reminders. Rodrigo (2006) proposed rate estimators recalls for M/G/1 with constant reminders and this in the ergodic and non ergodic case. In this work, we propose estimators of the retrial rate of the model M/G/1 with linear

repeated requests, generalizing the works of Rodrigo et al. (1998) and Rodrigo (2006) and extend their analysis to linear retrial policy in the ergodic case.

We assume a single-server M/G/1 system where primary customers arrive according to a poisson process with rate λ , if a customer arrives into the system and finds the channel busy he left the service zone and applies again for service after a random period . We say that these customers are (in orbit). On the other side, if an arriving customer finds the channel free he occupies it and leaves the system after his service termination (these customers are identified as primary calls). A system under this description is called a Retrial Queue. We consider linear retrial policies, customers arrive from outside according to a rate λ Poisson process, These customers are identified as primary customers. If the server is free at the moment of arrival of a primary customer , this customer gets his service immediately and leaves the system after the end of his service. On the other hand, if a primary customer arrives and finds the busy server he then joins the orbit. Each customer in orbit generates a Poisson process from rate μ of attempts to join the server until it finds the free server for take service and leave the system. Primary customers and those from of the orbit have the same distribution of the service time. we will see later that the condition "natural" stability of this system is the same as the conventional M/G/1 system (without retrials).

The M/G/1 retrial queues has been studied by using the processus $(C(t);N(t))$, where $N(t)$ represents the number of customers in orbit is generally unobservable. Rodrigo2006 use the process $(M(t))$ representing the total arrivals since the last departure before t with no distinction between primary and repeated customers, to obtain estimators of the retrial parameter in both constant and classical case. We prove here for the ergodic case that, by eliminating from $(M(t))$ the arrival that is being served at t . We get the best estimators for linear retrial rate in both observable and unobservable cases and we give asymptotic variances of the estimators for M/G/1 ergodic linear retrial queue.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we describe the mathematical model M/G/1 with linear retrial policy.

The estimate of the linear retrial rate is given in section 3, in both observable and unobservable cases.

2 The mathematical model

We assume an M/G/1 queueing system in which customers arrive according to a Poisson process with rate λ , any customer who finds the server busy upon arrival leaves the service area and join a pool of unsatisfied customers. The discipline of accessing the server from the orbit is controlled by an exponential law with a mixed intensity given by $\alpha(1 - \delta_{N(t),0}) + N(t)\mu$, where $N(t)$ is number of customers in orbit and $\delta_{N(t),0}$ is the function of Kronecker, the service times are random variables independent of an arbitrary distribution function law $B(x)(x)$. Also let $B^*(s)$ be the corresponding of Laplace-Stieltjes transform and moments $\beta_k = (-1)^k B^{(k)}(0)$. The system is ergodic if $\rho < 1 - \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}$ with $\rho = \lambda\beta_1$. For detailed analysis of M/G/1 with linear retrial the reader may refer to Artalejo and Gomez (1997).

In addition, the input stream of primary arrivals, service times and intervals between successive repeat requests are assumed to be jointly independent.

3 Estimation of retrial rate

3.1 Observable case

We consider an ergodic M/G/1 retrial queueing system with exponential retrial rate $\alpha(1 - \delta_{N(t),0}) + N(t)\mu$. We suppose that we can observe the process $N(t) \in (0, T]$, and we can distinguish between primary and secondary arrivals. Let $r(T)$ be the number of repeated attempts over the time interval $(0, T]$. We can use likelihood theory to get an estimator for retrial rate. Indeed, under the ergodicity condition $\rho < 1 - \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \delta_0 \mu$

$$(\hat{\alpha} + \hat{\mu})_C = r(T) \left(\int_0^T N(t) dt \right)^{-1} + \frac{r(T)}{T - T_0}, \quad (1)$$

where T_0 is the time the orbit remains empty, is a consistent estimator of the parameter $(\alpha + \mu)$.

An explicit expression of the asymptotic variance $\mathbf{Var}((\hat{\alpha} + \hat{\mu})_C)$ is given by the following formula :

$$\mathbf{Var}((\hat{\alpha} + \hat{\mu})_C) = \frac{\mu}{\mathbf{E}(N)} + \frac{\alpha^2 B^*(\lambda)}{(\lambda \rho + \alpha(\rho - 1 + B^*(\lambda)))T}, \quad (2)$$

Where N is the number of customers in orbit in steady state,

$$\mathbf{E}(N) = \frac{\lambda^2}{1 - \rho} \left(\frac{\beta_1}{\mu} + \frac{\beta_2}{2} \right),$$

and

$$\beta^*(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dB(t).$$

3.2 Unobservable case

We consider an M/G/1 system with linear retrials and global rate of recalls $\alpha(1 - \delta_{N(t),0}) + N(t)\mu$. When the process $\{N(t), t \geq 0\}$, representing the number of customers in the orbit at t is not observable, the estimate of the retrial rate becomes more difficult. Consider then the process $\{M(t), t \geq 0\}$, representing the total number of recalls during current service at the moment t such as

$$M(t) = \begin{cases} M_1(t), & \text{in the classical case;} \\ M_2(t), & \text{in the constant case,} \end{cases}$$

The stochastic analysis of the process $(M_2(t), N(t), \zeta(t))$, where the additional variable $\zeta(t)$ representing the elapsed time of the customer being served at time t with $\zeta(t) = 0$ when $M_2(t) = 0$, has been considered in Rodrigo(2006).

Suppose that we can observe the process $\{M(t), t \geq 0\}$ in $(0, T]$ and $\{M(t), t \geq 0\}$ is ergodic, our estimator will be based on the integral estimator $\hat{\xi}_T$ given by the formula :

$$\hat{\xi}_T = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T M_1(t) dt, & \text{in the classical case;} \\ \frac{1}{T} \int_0^T M_2(t) dt, & \text{in the constant case.} \end{cases}$$

$\hat{\xi}_T$ converges almost surely to the stationary average of $M_1(t)$ and of $M_2(t)$ and we have :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\xi}_T = \begin{cases} \mathbf{E}(M_1), & \text{in the classical case;} \\ \mathbf{E}(M_2), & \text{in the constant case,} \end{cases}$$

With

$$\mathbf{E}(M_1) = \rho + (\lambda^2 + \lambda \mu \mathbf{E}(N)) \beta_2 / 2 + \lambda^2 \mu \beta_3 / 6,$$

and

$$\mathbf{E}(M_2) = \frac{1 - \rho - B^*(\lambda)}{\lambda B^*(\lambda)} (\alpha - \rho(\alpha + \lambda)) + \frac{\lambda \beta_2}{2} (\alpha + \lambda) + \rho.$$

Thus,

$$(\hat{\alpha} + \hat{\mu})_M = (A_\alpha + a) \hat{\xi}_T - (B_\alpha + b), \quad (3)$$

with

$$A_\alpha = \frac{2\lambda B^*(\lambda)}{\lambda^2 \beta_2 B^*(\lambda) + 2(1 - \rho)(1 - \rho - B^*(\lambda))},$$

$$B_\alpha = \frac{\lambda B^*(\lambda)(4\rho + \lambda^2 \beta_2) - 2\lambda \rho(1 - \rho)}{\lambda^2 \beta_2 B^*(\lambda) + 2(1 - \rho)(1 - \rho - B^*(\lambda))},$$

$$a = \frac{12(1 - \rho)}{3\lambda^3 \beta_2^2 + 2\lambda^2(1 - \rho)\beta_3},$$

$$b = \frac{6\lambda^2 \beta_2 + 12\rho(1 - \rho)}{3\lambda^3 \beta_2^2 + 2\lambda^2(1 - \rho)\beta_3},$$

is a consistent estimator for $(\hat{\alpha} + \hat{\mu})$ and $\mathbf{Var}(\hat{\alpha} + \hat{\mu}) = (A_\alpha + A)^2 \mathbf{Var}(\hat{\xi}_T)$.

The explicit formula of the asymptotic variance $\mathbf{Var}(\hat{\xi}_T)$ is given by the following formula :

$$\mathbf{Var}(\hat{\xi}_T) \simeq \frac{2}{T} \left[(\beta_1 + \frac{\lambda + \alpha}{2} \beta_2) V(0) - (\lambda + \alpha) (\mathbf{E}(M) F^3(0, 0) - F^3(1, 0)) - A - (\mathbf{E}(M) - 1) F^2(1, 0) + F^2(2, 0) \right],$$

where

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}(M_1) + \mathbf{E}(M_2),$$

$$V(0) = -\mathbf{E}(M) P'_0(1) - \mathbf{E}(M) F^1(0, 1) + F^1(1, 1),$$

with $P_0'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{0n}$ and $P_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M(t) = 0, N(t) = n)$

$$A = \frac{1 - \rho - B^*(\lambda)}{\lambda^2 B^*(\lambda)} (\alpha C + \frac{\lambda \alpha (1 - \mathbf{E}(M))}{B^*(\lambda)} P_{00}) + \frac{\alpha (1 - \mathbf{E}(M))}{\lambda B^*(\lambda)} (\frac{1 - B^*(\lambda)}{\lambda} + \frac{dB^*(\lambda)}{d\lambda}) P_{00},$$

$$\text{with } P_{00} = \frac{\alpha - \rho(\alpha + \lambda)}{\alpha}$$

$$C = \frac{1}{B^*(\lambda)} (\mathbf{E}(M)) P_{00} + \lambda V_{00} + \frac{\lambda (1 - \mathbf{E}(M))}{B^*(\lambda)} \frac{dB^*(\lambda)}{d\lambda} P_{00},$$

$$V_{00} = \frac{1}{\alpha} ((\lambda + \alpha) (\mathbf{E}(M) F^2(0, 0) - F^2(1, 0)) - (1 + (\lambda + \alpha) \beta_1) V(0)),$$

and, $F^k(m, n)$ is the factorial moment of order k , for more details see Rodrigo (2006).

4 Conclusion

In this study, we obtained the estimators of the retrial rate in the ergodic M/G/1 retrial queue, allowing for linear retrial policy, in both observable and unobservable cases. Explicit expressions of asymptotic variances are also obtained. The numerical computation of the variances of the estimators is the focus of this work.

References

- [1] Artalejo, J. R. (1999). Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and Computer Modelling* 30, 1-6.
- [2] Artalejo, J.R. (2010). Accessible bibliography on retrial queues. *Accessible bibliography on retrial queues*, 1071-1081.
- [3] Artalejo, J. R. and A. Gomez-Corral (1997). Steady state solution of a single-server queue with linear repeated requests. *Journal of Applied Probability* 34, 223-233.
- [4] Artalejo, J. R. and A. Gomez-Corral (2008). *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer.
- [5] Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue. *The Annals of Mathematical Statistics* 28, 1036-1040.
- [6] Falin, G. (1995). Estimation of retrial rate in retrial queue. *Queueing Systems* 19, 231-246.
- [7] Falin, G. and J.G.C. Templeton (1997). *Retrial Queues*. London : Chapman and Hall.
- [8] Hoffman, K. L. and C. Harris (1986). Estimation of a caller retrial rate for a telephone information system. *European Journal of Operational Research* 15, 215-228.
- [9] Kim, J. and B. Kim (2016). A survey of retrial queueing systems. *Annals of Operations Research*, 1-34.

-
- [10] Rodrigo, A.M, Vazquez M. and G.I. Falin (1998). A new markovian description of the M/G/1 retrial queue. *European Journal of Operational Research*, 104, 231-240.
- [11] Rodrigo, A. and M. Vazquez (1999). Large sample inference in retrial queues. *Mathematical and Computer Modelling* 30, 197-206.
- [12] Rodrigo, A. (2006). Estimators of the retrial rate in M/G/1 retrial queues. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 23, 193-213.

$M^X/G/1$ retrial queue, batch arrival, unreliable server and impatient customers with two phases of service

Djamila Zirem^{*1}, Sabrina Lachmot², Mohamed Boualem , and Djamil Aïssani 

¹Research Unit LaMOS, Faculty of Economic Sciences, University of Algiers 3, Algeria, ziremdjamila@yahoo.fr

²Faculty of Sciences, University of Mouloud Mammeri Tizi-ouzou, Algeria, tassadit.lachemot@ummto.dz

³Research Unit LaMOS, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria, mohammed.boualem@univ-bejaia.dz

⁴Research Unit LaMOS, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, lamos_bejaia@hotmail.com

Abstract : In this paper, we present the performance analysis of an $M/G/1$ retrial queue, batch arrival, unreliable server and with impatient customers and breakdowns by incorporating the features of two phases of service (essential and optional service). The probabilities of the system states and performance measures are determined by using the supplementary variable method and probability generation function.

Keywords : Retrial queue ; Unreliable service ; Optional service ; Supplementary variable.

1 Introduction

The discouragement behavior in many queueing situations is quite common and affects the performance and quality of the concerned service facility. Several queueing problems can be noticed in daily routine and commercial scenarios wherein the customers who are visiting to take the service may be discouraged by noticing the longer queue or after waiting some time become impatient and depart from the queue without receiving the service. The impatient case known as reneging arises when the customer in queue loses its tolerance level and leaves the queue without bothering about the service. The balking situation occurs when the customer by estimating the longer queue, becomes reluctant from joining the queue. In the retrial queue, if the customer finds that the server is either busy at service counter or unable to operate, he may depart from the service area and moves to a virtual place called orbit and repeats his request for the service after a random length of time.

*Corresponding Author

In recent years, in the queuing literature, there has been work on queueing systems characterized by the presence of two types of service. The first says mandatory for all arriving customers and the second optional for each customer. This paper focuses on the analysis of single server batch arrival retrial queue subject to active breakdowns (with repair) impatient customers and two phases of service. Some of these aspects have been discussed separately in the literature of queueing systems [1, 2, 3, 4]. This model arising in many practical application encountered in various fields, such us in cognitive radio network operation, manufacturing company and can in hospital emergency services.

This paper is organized as follows. In section 2, we introduce the mathematical description of the model. By using the supplementary variable method and probability generation function to find out the queue size distribution and some performance measure of this model are developed in Section 3. In Section 4, some performance indices are derived in terms of the probabilities at stationary level.

2 Description of the model

In this section, we develop an model $M/G/1$ retrial queue, batch arrival with impatient customers, breakdowns and repairs, and two phases of service. The mathematic model is given as follows :

- **Arrival process** : The customers arrive in batches according to compound poisson process with rate λ . Let X be the random variable denoting the batch size, with a common distribution $P[X = n] = g_n, n \geq 1$ and general function $g(z) = \sum_{n \geq 1} g_n z^n$.
- **Retrial process** :When the arriving customers find The server busy or breakdown, then all arriving customers join the orbit with probability p or leave the system with probability $1 - p$. If the primary customer arrives first, the retrial customer may cancel its attempt for service and either returns to its position in the retrial queue with probability q or leave the system with probability $1 - q$. The inter-retrial time of customers are independently and identically distributed with a probability distribution function $A(s)$, a density function $L_A(s)$ and n^{th} moments α_n .
- **The service process** : If the server is busy or down, in this case the group of customers enters in orbit with a probability p , otherwise it leaves the system with a probability $1 - p$.The successive customer service times are independent and identically distributed with distribution function $B(x)$, density $b_i(x)$, Laplace-Stieldjes transform $L_{B_i}(s)$ and n^{th} moments defined by $\beta_n^i, i = 1, 2$.
- **Optional service process** Two phases of service are considered, the first essential phase FES which is mandatory for all customers. After completing the FES, the customer can request the second phase of SOS service , which is optional with probability b or leave the system with probability $1 - b$.
- **The repair process** : The server is subject to active breakdown, at the moment of service (FES or SOS) after a random time following an exponential law of averages $\frac{1}{\theta_1}, \frac{1}{\theta_2}$ respectively.
The time required for its repair is a random variable with distribution $C(x)$, density $c(x)$, Laplace-Stieldjes transform $L_{C_i}(s)$ and moments of order n are defined by $\gamma_n^i, i = 1, 2$.
- **The reserved process** : The server does not accept other customer until the customer in service leave the system. In this case the server is said reserved, we suppose

it generally distributed with distribution function $D_i(x)$, density $d_i(x)$, Laplace-Stieltjes transform $L_{D_i}(s)$ and moments of order n defined by $\eta_n^i, i = 1, 2$. The reservation durations are independent and identically distributed.

Customer whose service is interrupted decide to stay in front of the server with probability r_i , or to join the service orbit with probability $1 - r_i (i = 1, 2)$.

We consider the state of the system at time t which is described by the following Markov process.

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{(J(t), J^*(t), N(t), \xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \xi_4(t), \xi_5(t), \xi_6(t))\},$$

where

- $J(t)$: denotes the server state at time t ,

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{if the server is idle at time } t ; \\ 1, & \text{if the sever is busy at time } t \text{ in rendering essential service ;} \\ 2, & \text{if the sever is busy at time } t \text{ in rendering optional service ;} \\ 3, & \text{if the server is down at time } t \text{ in rendering essential service ;} \\ 4, & \text{if the server is down at time } t \text{ in rendering optional service ;} \\ 5, & \text{if the server is reserved at time } t \text{ in rendering essential service ;} \\ 6, & \text{if the server is reserved at time } t \text{ in rendering optional service ;} \end{cases}$$

- $J^*(t)$: denotes the customer state at time t ,

$$J^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{if the customers in service remain in service position after server failure at time } t ; \\ 2, & \text{if the customers in service enters a retrial queue orbit after server failure at time } t . \end{cases}$$

- $N(t)$: denotes the number of customer in the retrial state at time t .
 - If $J(t) = 0$ et $N(t) > 0$, then $\xi_0(t)$ represent the elapsed retrial at time t .
 - If $J(t) = 1 (J(t) = 2)$ then $\xi_1(t)$ (respectively $\xi_2(t)$) represents the elapsed service time during the essential service (respectively during the optional service time)at time t .
 - If $j(t) = 3 (j(t) = 4)$ then $\xi_3(t)$ (respectively $\xi_4(t)$) represents the elapsed repair times during the essential service (respectively during the optional service time)at time t .
 - If $j(t) = 5 (j(t) = 6)$, then $\xi_5(t)$ (respectively $\xi_6(t)$) represents the elapsed reserved times during the essential service (respectively during the optional service time)at time t .

The conditional completion rates for customer call back, customer service, repair time and reservation are respectively :

$$\alpha(\omega) = \frac{a(\omega)}{1-A(\omega)}, \beta_i(x) = \frac{b_i(x)}{1-B_i(x)}, \gamma_i(y) = \frac{c_i(y)}{1-C_i(y)} \text{ et } \eta_i(\tau) = \frac{d_i(\tau)}{1-D_i(\tau)} \text{ where } i = 1, 2.$$

Proposition 2.1. *The necessary condition for the system to be stable is :*

$$\rho = \frac{\frac{K'(1)}{pg'(1)}[1 - q + (q - pg'(1))L_A(\lambda) + L_A(\lambda) + g'(1)L_A(\lambda) - pg'(1)] + (1 - L_A(\lambda))(1 - g'(1))}{(1 - q + (q - pg'(1))L_A)(1 + \frac{K'(1)}{pg'(1)}) + L_A(\lambda)(pg'(1) - K'(1)(\frac{1}{pg'(1)} + \frac{1}{p}))} \quad (1)$$

With $K'(1)$ defined by the 1st derived from $K(x)$ applied for $x = 1$ and given by :

$$K_i(z) = L_{B_i}(G_i(p\lambda(1-g(z)))) \quad i = 1, 2,$$

where

$$G_i(\lambda p(1-g(z))) = \lambda p(1-g(z)) + \theta_i - \theta_i L_{C_i}(\lambda p(1-g(z)))[r_i + (1-r_i)L_{D_i}(\lambda p(1-g(z)))]], \quad i = 1, 2.$$

3 Stationary analysis of the system

We study in this section the distribution of the system in steady state. For the process $\{X(t), N(t), \xi_i(t), t \geq 0\}$, we define the following probability densities :

$$\begin{aligned} P_{0,0}(t) &= P(J(t) = 0, N(t) = 0), \\ P_{0,n}(t, \omega) d\omega &= P(J(t) = 0, N(t) = n, \omega \leq \xi_0(t) < \omega + d\omega), \quad n \geq 1, \\ P_{1,n}(t, x) dx &= P(J(t) = 1, N(t) = n, x \leq \xi_1(t) < x + dx), \quad n \geq 0, \\ P_{2,n}(t, x) dx &= P(J(t) = 2, N(t) = n, x \leq \xi_2(t) < x + dx), \quad n \geq 0, \\ P_{3,0,n}(t, x, y) dx dy &= P(J(t) = 3, J^*(t) = 0, N(t) = n, x \leq \xi_1(t) < x + dx, y \leq \xi_3(t) < y + dy), \quad n \geq 0, \\ P_{3,1,n}(t, x, y) dx dy &= P(J(t) = 3, J^*(t) = 1, N(t) = n, x \leq \xi_1(t) < x + dx, y \leq \xi_3(t) < y + dy), \quad n \geq 0, \\ P_{4,0,n}(t, x, y) dx dy &= P(J(t) = 4, J^*(t) = 0, N(t) = n, x \leq \xi_2(t) < x + dx, y \leq \xi_4(t) < y + dy), \quad n \geq 0, \\ P_{4,1,n}(t, x, y) dx dy &= P(J(t) = 4, J^*(t) = 1, N(t) = n, x \leq \xi_2(t) < x + dx, y \leq \xi_4(t) < y + dy), \quad n \geq 0, \\ P_{5,n}(t, x, \tau) dx d\tau &= P(J(t) = 5, N(t) = n, x \leq \xi_1(t) < x + dx, \tau \leq \xi_5(t) < \tau + d\tau), \quad n \geq 0, \\ P_{6,n}(t, x, \tau) dx d\tau &= P(J(t) = 6, N(t) = n, x \leq \xi_2(t) < x + dx, \tau \leq \xi_6(t) < \tau + d\tau), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

We assume that the stability condition is verified, in this case we can write :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_{0,0}(t) &= P_{0,0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{0,n}(t, \omega) = P_{(0,n)}(\omega), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{1,n}(t, x) = P_{1,n}(x), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{2,n}(t, x) = P_{2,n}(x), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P_{3,0,n}(t, x, y) &= P_{3,0,n}(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{3,1,n}(t, x, y) = P_{3,1,n}(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{4,0,n}(t, x, y) = P_{4,0,n}(x, y), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P_{4,1,n}(t, x, y) &= P_{4,1,n}(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{5,n}(t, x, \tau) = P_{5,n}(x, \tau), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{6,n}(t, x, \tau) = P_{6,n}(x, \tau). \end{aligned}$$

Remarque 3.1. By using the method of supplementary variable technique, The Kolmogorov forward we obtain the system of equation that govern the dynamics of the system behavior.

Théorème 3.1. Under the stability condition, the FGPs are given below

$$\begin{aligned} P_0(z, w) &= \frac{\lambda z[z - g(z)K_1(z)(1 - b + bK_2(z))] \exp(-\lambda \omega)(1 - A(\omega))P_{(0,0)}}{D(z)}, \\ P_1(z, x) &= \frac{\lambda [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))]P_{(0,0)}}{D(z)} \\ &\quad \times \exp(-G_1(p\lambda(1-g(z))x)(1 - B_1(x)), \end{aligned}$$

$$P_2(z, x) = \frac{\lambda b K_1(z) [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))] P_{(0,0)}}{D(z)} \\ \times \exp(-G_2(p\lambda(1 - g(z))x)(1 - B_2(x)),$$

$$P_{30}(z, x, y) = \frac{r_1 \theta_1 \lambda [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))] P_{(0,0)}}{D(z)} \\ \times \exp(-G_1(p\lambda(1 - g(z))x - p\lambda(1 - g(z))y)(1 - B_1(x))(1 - C_1(y)),$$

$$P_{31}(z, x, y) = \frac{(1 - r_1) \theta_1 \lambda [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))] P_{(0,0)}}{D(z)} \\ \times \exp(-G_1(p\lambda(1 - g(z))x - p\lambda(1 - g(z))y)(1 - B_1(x))(1 - C_1(y)),$$

$$P_{40}(z, x, y) = \frac{r_2 \theta_2 \lambda b K_1(z) [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))] P_{(0,0)}}{D(z)} \\ \times \exp(-G_2(p\lambda(1 - g(z))x - p\lambda(1 - g(z))y)(1 - B_2(x))(1 - C_2(y)),$$

$$P_{41}(z, x, y) = \frac{(1 - r_2) \theta_2 \lambda b K_1(z) [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))] P_{(0,0)}}{D(z)} \\ \times \exp(-G_2(p\lambda(1 - g(z))x - p\lambda(1 - g(z))y)(1 - B_2(x))(1 - C_2(y)),$$

$$P_5(z, x, \tau) = \frac{(1 - r_1) \theta_1 \lambda [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))] P_{(0,0)}}{D(z)} \\ \times \exp(-G_1(p\lambda(1 - g(z))x - p\lambda(1 - g(z))\tau)(1 - B_1(x))(1 - D_1(\tau))L_{C_1}(p\lambda(1 - g(z))),$$

$$P_6(z, x, \tau) = \frac{b(1 - r_2) \theta_2 \lambda K_1(z) [(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)g(z) + L_A(\lambda)(z - g(z))] P_{(0,0)}}{D(z)} \\ \times \exp(-G_2(p\lambda(1 - g(z))x - p\lambda(1 - g(z))\tau)(1 - B_2(x))(1 - D_2(\tau))L_{C_2}(p\lambda(1 - g(z))),$$

where

$$D(z) = (1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)K_1(z)g(z)(1 - b + bK_2(z)) - z(z - K_1(z)g(z)(1 - b + bK_2(z)) \\ + K_1(z)L_A(\lambda)(z - g(z))(1 - b + bK_2(z)).$$

4 Performance Measure

In this section, we give the explicit expressions of some performance measures of the studied system. The results are summarized in the following Corollary, which gives the generating functions of the number of customers in the system and in orbit respectively

Corollaire 4.1. *The generating function of the number of customers in the orbit is given by :*

$$P_q(z) = \left[\lambda K_1(z)(1-b+bK_2(z)) \left\{ N(z)[p(1-g(z))-1] + p(1-g(z))zg(z)L_A(\lambda) \right\} - \lambda p(1-g(z))z^2L_A(\lambda) + \lambda N(z) \right] \times \frac{P_{00}}{D(z)\lambda p(1-g(z))}.$$

The generating function of the number of customers in the system is given by :

$$P(z) = \left[\lambda K_1(z)N(z)(1-b+bK_2(z))[\lambda p(1-g(z)) - \lambda z] + \lambda pz(1-g(z)) \left\{ z + K_1(z)(1-b+bK_2(z))g(z)L_A(\lambda) \right\} \right] \times \frac{P_{00}}{D(z)\lambda p(1-g(z))}.$$

Where

$$N(z) = (1-q+qL_A(\lambda))(1-z)g(z) + L_A(\lambda)(z-g(z)).$$

5 Conclusion



In this work, we performed a detailed study of the queue model $M/G/1$ batch arrival with general law callbacks, repair and impatient customers with two service phases. By using the supplementary variable method, we obtained explicit and exploitable formulas. We also calculated some performance measures of the considered model.

References

- [1] J. R. Artalejo, I. Atencia (2004). On the single server retrial queue with batch arrivals. *Indian Journal of Statistics*, 66, 140–158.
- [2] G. Choudhury, L. Tadj (2009). An $M/G/1$ queue with two phases of service subject to the server breakdown and delayed repair. *Applied Mathematical Modelling*, 33, 2699–2709.
- [3] G.I. Falin (1990). A survey of retrial queues. *Queueing Systems* 7, 127–168.
- [4] D. Zirem, M. Boualem, K. Adel-Aissanou, and D. Aïssani (2018). Analysis of a single server batch arrival unreliable queue with balking and general retrial time. *Quality Technology & Quantitative Management*, 16(6), 672–695.



Optimum cost analysis of A multi-server queue in a multi-phase random environment with customers' impatience under synchronous working vacation.

Meriem Houalef¹, Amina Angelika Bouchentouf ², and Lahcene Yahiaoui ^{*3}

¹Mathematics Laboratory, University of Sidi Bel Abbas, Higher School of Applied Sciences, Tlemcen 13000, Algeria.,
houalef8o@gmail.com

²Mathematics Laboratory, Djillali Liabes University of Sidi Bel Abbas, Sidi Bel Abbas 22000, Algeria.,
bouchentouf_amina@yahoo.fr

³Laboratoire LMSSA-Univ-Saida., Faculty of Sciences, University of Saida, Algeria,
lahceneya8@gmail.com

Abstract : This work deals with a $M/M/c$ queueing system in a Markovian environment with waiting servers, balking and reneging, under both synchronous single and multiple working vacation policies. When the system is in operative phase j , $j = \overline{1, K}$, customers are served one by one. Once the system is empty, the servers have to wait a random period of time before leaving, causing the system to move to vacation phase 0 at which new arrivals can be served at lower rate. Using the method of the probability generating functions, we establish the steady state analysis of the system. In addition, a cost model is constructed to define the optimal values of service rates, simultaneously, to minimize the total expected cost per unit time via a quadratic fit search method (QFSM).

MSC: 60K25 ; 68M20 ; 90B22

Keywords : Queueing models ; Random environment ; Working vacation policy ; Impatient customers ; Probability generating function ; Optimisation

1 Introduction

Over the past few decades, vacation queues have been widely studied. Previous research works can be divided into two categories : (i) the case of vacation, see [1, 2, 3] and (ii) the case of working vacation at which new arrivals may be served at lower rate. This policy has very important practical application context in system optimal design. In recent

*Corresponding Author

years, queueing models with balking, reneging, or both due to the unavailability of the server (in vacation) have attracted a lot of attention from many researchers. This research area has attracted much attention from numerous researchers. We cite the most recent theoretical results. Yue et al. [4] proposed an $M/M/1$ queueing model with working vacation policy and customers' impatience. A discrete-time queueing model with working vacation, balking, and reneging was investigated in Goswami [5]. In recent years, queueing models with vacation/working vacation with customers's impatience have been well investigated (e.g., [6]). This work presents an infinite capacity multi-server Markovian queueing system in random environment subjected to multiple and single working vacation policies with waiting servers, balking and reneging.

The proposed model has a particular application in banking call center which can be considered as a queueing system with arriving demands as customers and diverse agents with workstations as servers. The agents commutate between busy and vacation periods in groups. Once there are no requests in the queue, the agents wait for a period of time before they synchronously go for vacation as a group. During this time, the latter can be occupied with other tasks, if during this period, new enquiries enter the system, they will be served with lower rate. At the end of the vacation, the agents come back to the normal busy period. During both periods, an incoming customer who finds all the agents occupied several times may drop its call (balk). In addition, arrival and service parameters can change randomly during the system operation for various external reasons. The intensity of the requests treated in the call center can mainly depend on a season, a day, a time of day, expected moments of the changes in interest or exchange rates. If a currency's exchange rate mainly varies over the course of a day, then the demand rate on a current exchange rate has sharp peaks during periods adjusted to the scheduled times of possible price changes. Likewise, the service rate can be below the average one during these peak times due to customers complaints because of the long waiting time.

2 The model

We consider a $M/M/c$ queueing system. Arrivals join a system according to a Poisson process with rate λ_0 (λ_j , $j = \overline{1, K}$) when the servers are in working vacation (regular busy period). During regular busy period, the service time is exponentially distributed with rate μ_j , $j = \overline{1, K}$. It is worth pointing out that the system can not directly move from one service phase to another service phase. That is, if the system becomes empty, it first must move to phase 0. When the system becomes empty, the servers wait a random period of time before going on vacation, this period follows an exponential distribution with parameter ϖ . Once this period is ended, the servers take a vacation which is exponentially distributed with rate ϕ . Two policies are considered :

Multiple working vacation (MWV) : If the system is empty after the working vacation period, another working vacation begins. Otherwise, the system jumps from phase 0 to some service phase j with probability σ_j , $j = \overline{1, K}$, where $\sigma_j > 0$ and $\sum_{j=1}^K \sigma_j = 1$.

Single working vacation (SWV) : At the end of the working vacation, the servers switch to the busy period and stay idle waiting for a new arrival.

The Kronecker δ is given as : $\delta = \begin{cases} 1, & \text{for the single working vacation model,} \\ 0, & \text{for the multiple working vacation model.} \end{cases}$

During working vacation period (phase 0), the arrivals are served at a lower service which follows an exponential distribution with rate μ_0 , such that $\mu_0 < \mu_j, j = \overline{1, K}$. On arrival, if $n \geq c$, the customers may join the queue with probability θ or balk with complementary probability $1 - \theta$. The customer, during working vacation (WV), activates an impatience timer T , which is independent and exponentially distributed with parameter ξ . If the customer's service has not been completed before the customer's timer expires, the customer abandons the system to never return. The inter-arrival times, waiting servers times, service times, and working vacation periods are mutually independent.

A stochastic process $\{J(t), X(t)\}$ represents the state of the system at time t as follows : $J(t)$ denotes the phase in which the system operates at time t , whereas $X(t)$ designates the number of customers present in the system at that time :

$$J(t) = \begin{cases} j = \overline{1, K}, & \text{when the servers are in regular busy period;} \\ 0, & \text{when the servers are in working vacation period.} \end{cases}$$

The system is said to be in state (j, n) if it is in phase j , and there are n customers in the system. Clearly, the process $\{(J(t), X(t)); t \geq 0\}$ is a continuous-time Markov process with state space $\Omega = \{(j, n) : j = \overline{0, K}, n = 0, 1, \dots\}$.

Accordingly, let $\pi_{j,n}$ be the steady-state probability of the system in state (j, n) :

$$\pi_{j,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{J(t) = j, X(t) = n\}, \quad j = \overline{1, K}, \quad n = 0, 1, \dots, (j, n) \in \Omega.$$

2.1 Steady-state probabilities

Théorème 2.1. [7]. *If $\theta \lambda_j < c \mu_j, j = \overline{1, K}$, the steady-state probability $\pi_{j, \cdot}, j = \overline{1, K}$, of the system presented as :*

$$\pi_{0, \cdot} = \frac{\varpi \rho_0 + \phi(1 - \delta)}{\phi} \pi_{0,0}$$

$$\pi_{j, \cdot} = \frac{\sigma_j \phi G'_0(1) + \lambda_j \bar{\theta} \Psi_1(1) - \mu_j \Psi_2(1)}{c \mu_j - \theta \lambda_j},$$

such that

$$\pi_{0,0} = \left(\frac{\varpi \rho_0 + \phi(1 - \delta)}{\phi} + \sum_{j=1}^K \sigma_j N_j \right)^{-1},$$

where

$$\rho_0 = \left[\frac{\lambda_0 \bar{\theta} K_4(1) - \phi(1 - \delta) K_1(1) - \mu_0 K_6(1)}{\varpi K_1(1) + \mu_0 K_7(1) - \lambda_0 \bar{\theta} K_5(1)} \right].$$

$$G'_0(1) = \frac{(\theta \lambda_0 - c \mu_0)(\varpi \rho_0 + \phi(1 - \delta)) - \phi \mu_0 H_2(1) + \lambda_0 \bar{\theta} \phi H_1(1)}{\phi(\xi + \phi)} \pi_{0,0},$$

$$N_j = \frac{1}{(c\mu_j - \theta\lambda_j)(\xi + \phi)} \left\{ (\xi + \phi)(\lambda_j \bar{\theta} M_1(1) - \mu_j M_2(1)) + \phi(\lambda_0 \bar{\theta} H_1(1) - \mu_0 H_2(1)) \right. \\ \left. + (\varpi\rho_0 + \phi(1 - \delta))(\theta\lambda_0 - c\mu_0) \right\}.$$

With

$$K_1(z) = \frac{1}{\xi} \int_0^z e^{-\frac{\lambda_0 \theta}{\xi} s} (1-s)^{\frac{\phi}{\xi}-1} s^{\frac{c\mu_0}{\xi}} ds, \quad K_4(z) = \frac{1}{\xi} \int_0^z e^{-\frac{\lambda_0 \theta}{\xi} s} (1-s)^{\frac{\phi}{\xi}} s^{\frac{c\mu_0}{\xi}} L_1(s) ds,$$

$$K_5(z) = \frac{1}{\xi} \int_0^z e^{-\frac{\lambda_0 \theta}{\xi} s} (1-s)^{\frac{\phi}{\xi}} s^{\frac{c\mu_0}{\xi}} L_2(s) ds, \quad K_6(z) = \frac{1}{\xi} \int_0^z e^{-\frac{\lambda_0 \theta}{\xi} s} (1-s)^{\frac{\phi}{\xi}} s^{\frac{c\mu_0}{\xi}-1} R_1(s) ds,$$

$$K_7(z) = \frac{1}{\xi} \int_0^z e^{-\frac{\lambda_0 \theta}{\xi} s} (1-s)^{\frac{\phi}{\xi}} s^{\frac{c\mu_0}{\xi}-1} R_2(s) ds,$$

$$L_1(z) = \sum_{n=0}^{c-1} \gamma_n z^n, \quad L_2(z) = \sum_{n=0}^{c-1} \eta_n z^n, \quad R_1(z) = \sum_{n=0}^{c-1} (n-c) \gamma_n z^n, \quad R_2(z) = \sum_{n=0}^{c-1} (n-c) \eta_n z^n,$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{c-1} \sigma_j \vartheta_n \pi_{0,0} z^n, \quad \Psi_2(z) = \sum_{n=0}^{c-1} (n-c) \sigma_j \vartheta_n \pi_{0,0} z^n, \quad H_1(z) = \sum_{n=0}^{c-1} (\gamma_n + \eta_n \rho_0) z^n,$$

$$H_2(z) = \sum_{n=0}^{c-1} (n-c) (\gamma_n + \eta_n \rho_0) z^n, \quad M_1(z) = \sum_{n=0}^{c-1} \vartheta_n z^n, \quad M_2(z) = \sum_{n=0}^{c-1} (n-c) \vartheta_n z^n$$

$$\gamma_n = \begin{cases} 1, & n=0; \\ \frac{\lambda_0 + \delta\phi}{\mu_0 + \xi}, & n=1; \\ \omega_{n-1} \gamma_{n-1} - \frac{A}{n} \gamma_{n-2}, & 2 \leq n \leq c-1, \end{cases}, \quad \eta_n = \begin{cases} 0, & n=0; \\ \frac{-\varpi}{\mu_0 + \xi}, & n=1; \\ \omega_{n-1} \eta_{n-1} - \frac{A}{n} \eta_{n-2}, & 2 \leq n \leq c-1, \end{cases}$$

$$\omega_n = \frac{\lambda_0 + \phi + n(\mu_0 + \xi)}{(n+1)(\mu_0 + \xi)}, \quad A = \frac{\lambda_0}{\mu_0 + \xi},$$

$$\vartheta_n = \begin{cases} \rho_0, & n=0; \\ \frac{(\lambda_j + \varpi) \vartheta_0 - \delta\phi}{\mu_j}, & n=1; \\ \frac{(\lambda_j + (n-1)\mu_j) \vartheta_{n-1} - \lambda_j \vartheta_{n-2} - \phi(\gamma_{n-1} + \eta_{n-1} \rho_0)}{n\mu_j}, & 2 \leq n < c-1. \end{cases}$$

3 Cost analysis

We develop an expected cost function per unit time for the suggested queueing model. The cost elements involved are as :

- C_s : Cost per unit time when the servers are working during regular busy period.
- C_{wv} : Cost per unit time when the servers are on working vacation period.
- C_{id} : Cost per unit time when the servers are idle during busy period.
- C_q : Cost per unit time when a customer joins the queue and waits for service.
- C_{Rb} : Cost per unit time when a customer balks.

- C_{si} : Cost per service per unit time when the servers are in regular busy/working vacation period.
- C_{ren} : Cost per unit time when a customer reneges.
- C_a : Fixed server purchase cost per unit. mer.

Using the above cost parameters, the total expected cost per unit time of the system, is given as :

$$\Gamma(\mu_j) = C_s P_s + C_{wv} P_{wv} + C_Q \mathbb{E}(Q) + C_{Rb} B_r + C_r R_{ren} + C_{id} P_{id} + c \sum_{j=0}^K \mu_j C_{si} + c C_a,$$

where $\mathbb{E}(Q)$ is the mean number of customers in the queue, P_{wv} is the probability that the servers are on working vacation period, P_{id} is the probability that the servers are idle during busy period, P_s is the probability that the servers are serving customers during regular busy period, B_r is the average rate of balking, R_{ren} is the average rate of renegeing.

The performance measures for the considered model are given in [7]. Then, the cost function will be optimized using quadratic fit search method (QFSM)(see [8]). The main aim is to find the optimal service rates during phase j , μ_j^* , $j = \overline{0, K}$, in order to minimize the expected cost function Γ . The unique optimum x^q of the quadratic function agreeing with $\Gamma(x)$ at 3-point operation (x^l, x^m, x^u) (see [9]) is given as

$$x^q \simeq \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma(x^l)((x^m)^2 - (x^u)^2) + \Gamma(x^m)((x^u)^2 - (x^l)^2) + \Gamma(x^u)((x^l)^2 - (x^m)^2)}{\Gamma(x^l)(x^m - x^u) + \Gamma(x^m)(x^u - x^l) + \Gamma(x^u)(x^l - x^m)} \right].$$

The cost minimization problem can be given as : $\min_{\mu_j} \Gamma(\mu_j)$, $j = \overline{0, K}$.

4 Optimisation analysis

Here, we perform a numerical analysis on the parameter optimisation for the suggested queueing system, we consider the following parameters : $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$; $\phi = 1.7$; $\eta = 1.4$; $\xi = 1$; $K = 2$; $\theta = 0.6$; $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.6$. The cost elements are taken as $C_s = 100$, $C_{wv} = 10$, $C_{id} = 10$, $C_q = 200$, $C_{Br} = 100$, $C_{si} = 2$, $C_{ren} = 100$, $C_a = 10$. We display Table 1 to illustrate the optimal service values of μ_j , $j = 0, 1, 2$, the optimum expected cost $\Gamma(\mu_j^*)$, as well as to show the convexity of the curves $\Gamma(\mu_j)$ for different values of c .

c	SWV				MWV			
	μ_0^*	μ_1^*	μ_2^*	Γ	μ_0^*	μ_1^*	μ_2^*	Γ
2	2.2699	6.4950	7.2846	155.246	5.2680	5.6471	6.2494	149.0362
3	0.6169	4.2252	4.5973	165.696	1.9476	4.0132	4.3482	165.6547

TABLE 1 – Optimal values μ_j^* and Γ^* , for different values of c , under SWV and MWV policies.

5 Conclusion

This work treated an infinite-space multi-server queueing model in random environment with impatient customers (balking and reneging) and waiting servers at which the servers are subjected to single and multiple working vacation policies. The steady-state probabilities of the system size for the proposed model are derived using the probability generation functions. Then, we developed cost model and provided an appropriate optimization via a quadratic fit search method (QFSM) to get the optimum values of the service rates during the both vacation and operative phases.

References

- [1] Doshi, B. T. : Queueing systems with vacations—a survey, *Queueing syst.* 1, 29-66(1986).
- [2] Takagi, H. : *Queueing Analysis : A Foundation of Performance Evaluation*, Volume 1 : Vacation and Priority Systems. Part 1. Amsterdam : Elsevier Science Publishers (1991).
- [3] Tian, N., Zhang, Z. G. : *Vacation Queueing Models : Theory and Applications*. Springer Science & Business Media (2006).
- [4] Yue, D., Yue, W., Xu, G. : Analysis of customers' impatience in an $M/M/1$ queue with working vacations. *Journal of Industrial & Management Optimization.* 8(4), 895-908(2012).
- [5] Goswami, V. : A discrete-time queue with balking, reneging, and working vacations. *International Journal of Stochastic Analysis*. Volume 2014, Article ID 358529, 8 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/358529>.
- [6] Bouchentouf, A. A., Guendouzi, A., Kandouci, A. : Performance and economic study of heterogeneous $M/M/2/N$ feedback queue with working vacation and impatient customers. *ProbStat Forum.* 12(1), 15–35(2019).
- [7] Houalef, M., Bouchentouf, A.A. and Yahiaoui, L. : A Multi-server Queue in a Multi-phase Random Environment with Waiting Servers and Customers' Impatience Under Synchronous Working Vacation Policy. *J. Oper. Res. Soc. China* (2022). <https://doi.org/10.1007/s40305-021-00384-3>
- [8] Rardin, R.L. : *Optimization in Operations Research*. Prentice-Hall, Upper Saddle River (1997).
- [9] Vijaya Laxmi, P., Goswami, V., Jyothsna, K. : Optimization of balking and reneging queue with vacation interruption under N-policy. *Journal of Optimization*. Volume 2013, Article ID 683708, 9 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/683708>



Impatient customers in a Markovian Bernoulli feedback queue with waiting server under variant working vacation policy

Amina Angelika Bouchentouf^{*1}, Lahcene Yahiaoui², Mokhtar Kadi³, and Shakir Majid⁴

¹Laboratory of Mathematics, Djillali Liabes University of Sidi Bel Abbas, Sidi Bel Abbas 22000, Algeria ,
bouchentouf_amina@yahoo.fr

²Laboratoire LMSSA-Univ-Saida., Faculty of Sciences, University of Saida, Algeria,
lahceneya8@gmail.com

³Laboratoire LMSSA-Univ-Saida., Faculty of Sciences, University of Saida, Algeria ,
kadi1969@yahoo.fr

⁴Department of Mathematics, Government Degree College Mendhar, Jammu and Kashmir, 185111, India,
Shakirkul6754@gmail.com

Abstract : The present work concerns the analysis of the customers's impatience behavior for a single server Markovian queueing system under K-variant working vacation policy, waiting server, Bernoulli feedback, balking, reneging and retention of reneged customers. We obtain the steady-state solution of the system by using probability generating function (PGF) technique. Then, the performance measures of the considered queueing system are derived. Finally, numerical examples are provided in order visualize the analytical results.

Keywords : Queueing models, Variant of a multiple vacation, Balking, Reneging, Retention of reneged customers, Bernoulli feedback, Discrete-event simulation.

1 Introduction

In queueing theory, working vacation queues have long been the subject of intensive research due to their important applications in many areas, particularly in the areas of mailing service, file transfer and network service.

In the literature, extensive analyses have been given on two types of working vacation policies including, single and multiple working vacations. In single working vacation, after coming back from vacation, if there are some customers in the system, the server immediately starts the service, otherwise, he remains idle in the system waiting for a new arrival, [6]. In multiple working vacation, the server resumes several working vacation each time the system leads to the empty state ,Majid and Manoharan [6].

*Corresponding Author

The impatience in queueing theory, is a prominent feature. Over last decades, an increasing attention can be seen in working vacation queues with impatient customers. These have been widely studied due to their large applicability for modeling purpose of call centers, computer and telecommunication systems as well as production and manufacturing system. Yue et al. [9] dealt with a single server Markovian queue with working vacation and impatient customers. Laxmi and Rajesh [5] analyzed a variant working vacations queue with customers' impatience. Bouchentouf and Yahiaoui [4] obtained the steady-state probabilities of a queueing model with multiple working vacation, vacation interruption, renegeing and Bernoulli feedback. For some recent papers on working vacation queues with customers impatience, we cite Sudhesh and Azhagappan [7], Yahiaoui et al. [8], Bouchentouf and Guendouzi [1], Bouchentouf et al. [2].

Bouchentouf et al.[3] In this work we give the analysis of Markovian impatient customers in Markovian queue with bernoulli feedback and waiting server under variant working vacation policy.

We present steady-state probabilities and performance measures of the considered queueing model.

2 The model

We develop a model for an $M/M/1$ queue with K -variant working vacation, waiting server, Bernoulli feedback and impatient customers.

- The customers arrive at the system according to a Poisson process of rate λ .
- The service time during regular busy period is denoted by the random variable exponentially distributed with parameter μ .
- Once the regular busy period is finished, the server waits a random period before taking a working vacation, this waiting time is supposed to be exponentially distributed with parameter η . When the duration of the waiting server expires, the server leaves for working vacation which follows a exponentially distribution with parameter ϕ . During this period, the server provides service at lower rate if any customers arrive. The service times are exponentially distributed with parameter ν , where $\nu \leq \mu$. At the working vacation completion instant, if some customers are found in the system, the server switches to the regular busy period, otherwise, he takes a finite number, namely K , of successive working vacations. When the K consecutive working vacations are complete, the server comes back to regular busy period, and depending on the arriving of new customers, he stays idle or busy.
- During working vacation period, each new arrival starts up an impatience timer independently of the other customers in the queue, which is assumed to be exponentially distributed with parameter ξ . The impatient customers may leave the system with probability α . This latter, can be retained in the system with probability $\alpha' = 1 - \alpha$.
- A customer who on arrival finds at least one customer in the system, either decides to enter the queue with probability θ or balk with probability $\bar{\theta} = 1 - \theta$.
- If after completion of service, a customer is not satisfied with its quality, he can come back to the system, with some probability β' , for another service or decide to leave the system with probability β , where β' , where $\beta + \beta' = 1$.
- The inter-arrival times, waiting server times, working vacation times, service times and impatience times are independent of each other.

Suppose that $\{L(t) \geq 0\}$ denote the number of customers in the system at time t and $S(t)$ be the status of the server at time t , where

$$S(t) = \begin{cases} j, & \text{when the server is taking the } (j+1)^{th} \\ & \text{working vacation at time } t, j = \overline{0, K-1}; \\ K, & \text{the server is in busy period at time } t. \end{cases}$$

Then $\{(S(t), L(t)); t \geq 0\}$ is a continuous time Markov chain on the state space $\Omega = \{(j; n) : n \geq 0, j = \overline{0, K}\}$.

Let $P_{j,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = j, L(t) = n\}$, $n \geq 0, j = \overline{0, K}$ denote the system state probabilities of the process $\{(S(t), L(t)), t \geq 0\}$.

Consider the probability generating functions (PGFs) as follows :

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{j,n} z^n, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (1)$$

3 Steady-state probabilities.

Théorème 3.1. [3]. If $\rho = \frac{\lambda\theta}{\beta\mu} < 1$, the steady state probabilities of the model are given by :

$$G_j(1) = C^{j-1} P_{0,0}, \quad 0 \leq j \leq K-1, \quad (2)$$

$$G_K(1) = H_K P_{0,0}, \quad (3)$$

$$P_{K,0} = \frac{A}{\eta} P_{0,0}, \quad P_{j,0} = C P_{j-1,0} = C^j P_{0,0}, \quad j = 1, \dots, K-1,$$

and

$$P_{0,0} = (H + H_K)^{-1}$$

With

$$H_K = \frac{\phi [(\lambda\theta - \beta\nu)C^{-1} + \beta\nu + \lambda\bar{\theta}] (1 - C^K)}{(\beta\mu - \lambda\theta)(\alpha\xi + \phi)(1 - C)} - \frac{(\lambda\bar{\theta} + \beta\mu)A}{(\lambda\theta - \beta\mu)\eta}, \quad (4)$$

$$H = \frac{1 - C^K}{(1 - C) \times C}, \quad (5)$$

$$A = -\frac{\beta\nu K_1(1) + \lambda\bar{\theta} K_2(1)}{K_0(1)}, \text{ and } C = \frac{\phi}{A}, \text{ where}$$

$$K_0(z) = \int_0^z \exp\left(-\frac{\lambda\theta t}{\alpha\xi}\right) t^{\frac{\beta\nu}{\alpha\xi}} (1-t)^{\frac{\phi}{\alpha\xi}-1} dt, \quad K_1(z) = \int_0^z \exp\left(-\frac{\lambda\theta t}{\alpha\xi}\right) t^{\frac{\beta\nu}{\alpha\xi}-1} (1-t)^{\frac{\phi}{\alpha\xi}} dt,$$

$$K_2(z) = \int_0^z \exp\left(-\frac{\lambda\theta t}{\alpha\xi}\right) t^{\frac{\beta\nu}{\alpha\xi}} (1-t)^{\frac{\phi}{\alpha\xi}} dt.$$

4 Cost model

We develop a model for the costs incurred in the suggested queueing model under multiple vacation policy. The following cost elements are needed :

- C_1 - cost per unit time when the server is serving customers during regular busy period,
- C_2 - cost per unit time when the server is on working vacation,
- C_3 - cost per unit time when the server is idle during regular busy period,
- C_4 - cost per unit time when a customer joins the system,
- C_5 - cost per unit time when a customer balks,
- C_6 - cost per service per unit time,
- C_7 - cost per unit time when a customer reneges,
- C_8 - cost per unit time when a customer is retained, either during busy or vacation period,
- C_9 - cost per unit time when a customer returns to the system as a feedback customer.

The total expected cost per unit time of the system is given as :

$$\Gamma = C_1 P_b + C_2 P_w v + C_3 P_{id} + C_4 E(L_s) + C_5 R_b + C_7 R_{ren} + C_8 R_{ret} + (\mu + v)(C_6 + \bar{\beta} C_9)$$

Where

- Mean number of customers in system ($E(L_s)$).
- Mean number of customers in queue ($E(L_q)$).
- Probability that the server is on vacation (P_{wv}).
- Probability that the server is busy (P_b).
- Probability that the server is idle during busy period (P_{id}).
- Mean number of customers served (S_r).
- Average reneging rate (R_{ren}).
- Average retention rate (R_{ret}).
- Average balking rate (R_b).
- Average rate of loss customers (L_r).

Th above performances mesures are given in [3]

5 Cost optimisation

We consider the cost optimization problem under a given cost structure via quadratic fit search method (QFSM). We draw attention to the optimization of the service rates μ and v in order to minimize the cost function Γ . In the previous section, a total expected cost function has been developed in order to determine an optimum regular service rates (μ^* , v^*) and the optimum expected cost $\Gamma(\mu^*, v^*) = \Gamma^*$. Suppose that all system parameters have fixed values, only controlled parameters are μ and v . The cost minimization problem can be given as

$$\min_{\mu, v} \Gamma(\mu, v).$$

For computational examples, we take the cost elements as follows : $C_1 = 3, C_2 = 1, C_3 = 1, C_4 = 3, C_5 = 1, C_7 = 1, C_8 = 1, C_6 = 1,$ and $C_9 = 1$. The expected total cost function is plotted, using QFSM, in Figures 2 by varying values of $K, \xi, \phi,$ and $\eta,$ respectively.

1. Figures 2 present the minimum values of μ and ν along with $\Gamma(\mu^*, \nu^*)$ for $K = 11$. The other parameters are chosen as $\lambda = 11, \beta = 0.8, \alpha = 0.8, \xi = 1, \phi = 3, \eta = 1, \theta = 0.6$.

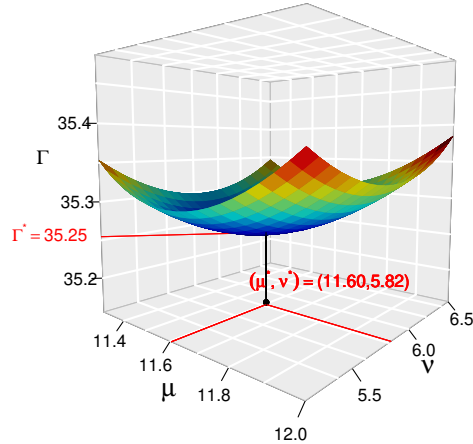


FIGURE 1 – The optimal values $\mu^*, \nu^*,$ and Γ^* for $K = 11$

From Figure 1 we clearly see the convexity of the curve, which show that there exist a certain values of the service rates μ and ν that minimize the total expected cost function for the chosen set of model parameters for different values of $K, \xi, \phi,$ and η . It is worth being pointed out that we had to choose the values for the parameters in such a way that the stability condition $\theta\lambda < \beta\mu$ is verified.

6 Conclusion

In this investigation, we analyzed a single server Markovian queueing model with Bernoulli feedback, K-variant working vacation policy, balking, reneging and retention of reneged customers. The probability generating functions for the numbers of customers in the system are obtained. Then, explicit expressions for useful system performance measures are derived. Finally, the analytical results are validated using some numerical examples which may be useful in diverse real-life situations to design the outputs.

References

- [1] Bouchentouf, A. A. and Guendouzi, A. *The $M^X/M/c$ Bernoulli feedback queue with variant multiple working vacations and impatient customers : Performance and economic analysis*, Arabian journal of mathematics, doi : 10.1007/s40065-019-0260-x, 1-19. (2019b).

- [2] Bouchentouf, A. A., Guendouzi, A. and Kandouci, A. *Performance and economic study of heterogeneous M/M/2/N feedback queue with working vacation and impatient customers*, ProbStat Forum, 12(1), 15-35. (2019).
- [3] Bouchentouf, A. A.,Yahiaoui, L.,Kadi, M. and Shakir, M. *Impatient customers in Markovian queue with bernoulli feedback and waiting server under variant working vacation policy*, Operations research and decisions, 30(4), 5-28. doi : 10.37190/ord200401. (2020).
- [4] Bouchentouf, A. A. and Yahiaoui, L. *On feedback queueing system with renegeing and retention of renegeed customers, multiple working vacations and Bernoulli schedule vacation interruption*, Arab. J. Math., 6(1), 1-11. (2017).
- [5] Laxmi, V. P., Rajesh, P. *Analysis of variant working vacations queue with customer impatience*. International Journal of Management Science and Engineering Management. 12, 186–195.(2016).
- [6] Shakir, M., Manoharan, P. *Analysis of the M/M/1 queue with single working vacation and vacation interruption (IJMTT)*, International Journal of Mathematics Trends and Technology, 47(1), 32-40.(2017).
- [7] Sudhesh, R., Azhagappan, A. *Transient analysis of an M/M/1 queue with variant impatient behavior and working vacations*, OPSEARCH, 55(3-4) :787-806. (2018).
- [8] Yahiaoui, L., Bouchentouf ,A. A. and Kadi, M. *Optimum cost analysis for an Geo/Geo/c/N feedback queue under synchronous working vacations and impatient customers*, Croatian Operational Research Review, 10, 211-226. (2019).
- [9] Yue, D., Yue, W., Xu, G. *Analysis of a queueing system with impatient customers and working vacations*, In : Proceedings of the 6th international conference on queueing theory and network applications, pp. 208-211. (2011).
- [10] Varalakshmi, M., Saravananarajan, M.C, and Chandrasekaran, V.M. *A study on M/G/1 retrial G-queue with two phase of service, immediate feedback and working vacation*, IOP Conference Series :Materials Science and Engineering, 263, 042156. (2017).



Sensitive Analysis in the $(R, s, l_n Q)$ Inventory Model

Nedjma Aiane ¹, Fazia Rahmoune ², and Djamil Aïssani ³

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, nedjma.aiane@univ-bejaia.dz

²LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, fazia.rahmoune@univ-bejaia.dz

³LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, djamil.aissani@univ-bejaia.dz

Abstract : In this work, we apply two approximation methods (absolute stability in terms of the group inverse and we recall the results obtained when we applied the strong stability method) to study the sensitivity of the inventory control model $(R, s, l_n Q)$. Approximation bounds for the stationary distribution representing the inventory level will be established after perturbation of the demand in two different ways (the demand rate and the demand distribution). We also study the effect of this perturbation on some performance measures of the model. Numerical examples will be established to illustrate the obtained theoretical results. Finally, we proceed to a comparison of the results obtained via the two methods, in order to draw the most efficient one.

MSC: 60J05 ; 15A51 ; 60J10 ; 65F35 ; 65F20 ; 12X34 ; 56Y78

Keywords : $(R, s, l_n Q)$ Inventory Control ; Strong Stability ; Absolute Stability (Group Inverse) ; Performances Measures ; Perturbation Bounds

1 Introduction

Stochastic models are mathematical models in which random influences are taken into account. This consideration of the uncertain behavior of certain stochastic parameters makes them more realistic. However, their study is very difficult and the analysis of their performance can only be done in an approximate way (using one of the approximation methods).

The study of the sensitivity of stochastic models is very important, as it gives us a certain guarantee on the constructed mathematical model which can be seen as a good representation of the real model and quantify the approximation errors. For example, in the case of stochastic inventory control models, when constructing these models, the input parameters (customer demand, replenishment lead times, quantities, etc.) are in most cases unknown

*Corresponding Author

and estimated from empirical data using statistical methods. Thus, they are subject to potential collection or computation errors which in turn lead to errors in the output parameters and also in the performance measures of the studied model (inventory level, mean stock, total inventory cost, ...) that in reality translate into investment errors leading to loss of money. There are several works in the literature on the study of the sensitivity of stochastic models using different approximation methods based on the theory of perturbation. We can cite, among others, the strong stability [1, 3, 11, 12, 13, 16, 17] and the absolute stability [14, 15, 2]. The method of absolute stability in terms of the group inverse was developed by Meyer and his co-authors in his various papers [5, 6, 8, 9, 10]. This method can be seen as matrix norms, for qualitative and quantitative estimation of stochastic systems. To know the evolution of this theory, readers are referred to the following references : [18, 8, 7, 19, 20]. In this work, we analyse the model $(R, s, l_n Q)$ via the absolute stability method in terms of the inverse group. We explore the effect of two types of perturbations (perturbation of the demand rate, perturbation of the demand distribution) on the performance measures of the model in question (the stationary distribution representing the inventory level, the mean stock as well as the total inventory cost). Several numerical examples have been developed to valorise the results obtained. These will be compared to those established via the strong stability method in [1], in order to derive the best performing method in terms of minimisation of the approximation error.

2 Model Description

Consider the periodic inventory control model for a non-perishable item managed under the control policy $(R, s, l_n Q)$ with instant replenishment. The manager inspects the inventory level every R units of time and issues a batch order if the inventory position X_n at date $t_n (t_n = nR, n \geq 1)$ is less than or equal to s , so as to bring the inventory level X_n to a level higher than the order point s . Therefore, at the beginning of period $n + 1$, the order size is equal to the smallest multiple of Q and differs from one inspection period to another. Otherwise, it does not issue any orders until the next inspection period. We assume that the orders arrive immediately and that the initial inventory level X_0 is strictly greater than s . We assume that the random variables $\xi_n, n \geq 1$ representing the demand, are independent and identically distributed, such as : $a_k = P(\xi_n = k)$, where a_k represents the probability of having a demand for k items during the period n and ξ_n represents the total demand during the period $n, n \geq 1$. The available inventory level X_{n+1} at the end of the period $(n + 1)$ is given by :

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - \xi_{n+1})^+ & \text{if } X_n > s; \\ (X_n + l_n Q - \xi_{n+1})^+ & \text{if } X_n \leq s; \end{cases}$$

where X_n is the inventory level at the end of period n , $(A)^+ = \max(A, 0)$ and $l_n \in N^*$ is the first integer verifying $X_n + l_n Q > s$, such that $l_n = \lceil \frac{s - X_n}{Q} \rceil + 1$.

It is clear that $\{X_n, n \geq 0\}$ is a homogeneous Markov chain with a finite state space $E =$

$\{0, 1, \dots, s, s+1, \dots, s+Q\}$, transition kernel given by :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=i+l_n Q}^{\infty} a_k & \text{If } i \leq s \text{ and } j = 0; \\ a_{i-j+l_n Q} & \text{If } 0 < i \leq s \text{ and } 0 < j \leq s; \\ b_{ij} & \text{If } 0 < i \leq s \text{ and } j > s; \\ \sum_{k=i}^{\infty} a_k & \text{If } i > s \text{ and } j = 0; \\ a_{i-j} & \text{If } s+1 \leq i \leq s+Q \text{ and } 0 < j \leq i; \\ 0 & \text{If } s+1 \leq i \leq s+Q \text{ and } j > i; \end{cases}$$

where

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{i-j+l_n Q} & \text{If } 0 < i \leq s, j > s \text{ and } i-j+l_n Q \geq 0; \\ 0 & \text{If } 0 < i \leq s, j > s \text{ and } i-j+l_n Q < 0; \end{cases}$$

3 Absolute Stability of the Model $(R, s, l_n Q)$ Via the Group Inverse A^\sharp

In this subsection, we apply the absolute stability method using the group inverse A^\sharp ($A = I - P$) where I is the identity matrix and P represents the transition matrix of the Markov chain describing the inventory control system of type $(R, s, l_n Q)$, in order to study the sensitivity of this model to perturbations in the demand distribution. The following theorem gives us the expression for the absolute error on the stationary distributions π and π' of Markov chains X_n and X'_n respectively, based on the theorem given in [10].

Théorème 3.1.

$$\|\pi' - \pi\| \leq \|A^\sharp\| \left(\sum_{k=s+Q}^{\infty} a_k - \sum_{k=i}^{\infty} a'_k + \sum_{k=0}^{s+Q-1} |a_k - a'_k| \right) \quad (1)$$

Where

$$A^\sharp = (I - P + e\pi^T)^{-1} - e\pi^T = Z - e\pi^T \quad (2)$$

- $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ is a column vector;

- $(I - P + e\pi^T)^{-1}$ is the inverse of the matrix $(I - P + e\pi^T)$.

4 Approximation Bounds for Some Performance Measures of the Model $(R, s, l_n Q)$

Now, using the results of the theorem (3.1), we can give the expression of the corresponding error on the mean stock stated by the theorem (4.1).

Théorème 4.1.

$$|\bar{X} - \bar{X}'| \leq \|\pi' - \pi\| \frac{s+Q}{2}. \quad (3)$$

Where

$$\bar{X} = \sum_{i=0}^{s+Q} i\pi_i; \quad \bar{X}' = \sum_{i=0}^{s+Q} i\pi'_i. \quad (4)$$

- These results will allow us to evaluate the total inventory cost C_T (before and after perturbation of the demand distribution), given by the formula (5).

$$C_T = \sum_{i=0}^s \pi_i(C_1(i + l_n Q) + C_2 \sum_{k=i+l_n Q+1}^{\infty} (k - (i + l_n Q))a_k C_3 + C_4 \times l_n Q) + \sum_{i=s+1}^{s+Q} \pi_i(C_1 \times i + C_2 \sum_{k=i+1}^{\infty} (k - i)a_k). \quad (5)$$

5 Numerical Application

In this section, we test the effect of the perturbation of the demand distribution on some performance measures of the inventory model $(R, s, l_n Q)$. This last one was done in two main parts, depending on the perturbed parameter : the parameter of the demand distribution and the demand distribution). The considered costs are : holding cost $C1 = 5$ (per unit in stock and per period) ; shortage cost $C2 = 10$ (per lost sales unit) ; the cost of placing an order $C3 = 10$ (per order) ; ordering cost $C4 = 5$ (per ordered unit). In this paper we only present the results found when perturbing the law of demand. To do this, we assume that the demand law follows a binomial distribution with parameters n and p . We perturb the parameter n by taking $n = \lceil \frac{\lambda + \varepsilon}{p} \rceil$.

5.1 Part 1 : The model's input parameters are fixed at : $R = 1, s = 5$ and $Q = 2$ (quite small)

Table 1 : Variation of the performance measures via strong stability method

ε	n	$n \times p$	$\ \pi' - \pi\ $	$ \bar{X} - \bar{X}' $	C_T	\bar{C}_T
-2	160	16	0.0861	0.3012	190.0021	170.0061
-1	170	17	0.0144	0.0504	190.0021	180.0028
1	190	19	0.0342	0.1197	190.0021	200.0006
2	200	20	0.0417	0.1458	190.0021	210.0002

Table 2 : Variation of the performance measures via absolute stability (group invers A^\sharp)

ε	n	$\ A^\sharp\ $	$\ \pi' - \pi\ $	$ \bar{X} - X' $	C_T	\bar{C}_T
-2	160	1.0004	0.0035	0.0141	190.0021	170.0061
-1	170	1.0004	6.7613×10^{-4}	0.0027	190.0021	180.0028
1	190	1.0004	0.0015	0.0058	190.0021	200.0006
2	200	1.0004	0.0018	0.0072	190.0021	210.0002

Table 3 : Variation of the performance measures via strong stability method

ε	n	$n \times p$	$\ \pi' - \pi\ $	$ \bar{X} - X' $	C_T	\bar{C}_T
-2	160	16	3.93035×10^{-9}	3.83207×10^{-7}	753.2007	924.0500
-1	170	17	3.93032×10^{-9}	3.83201×10^{-7}	753.2007	817.4269
1	190	19	3.930335×10^{-9}	3.83205×10^{-7}	753.2007	913.7226
2	200	20	3.93034×10^{-9}	3.83204×10^{-7}	753.2007	866.6287

Table 4 : Variation of the performance measures via absolute stability (group invers A^\sharp)

ε	n	$\ A^\sharp\ $	$\ \pi' - \pi\ $	$ \bar{X} - X' $	C_T	\bar{C}_T
-2	160	1	0.3917	38.3833	753.2007	924.0500
-1	170	1	0.1954	19.1524	753.2007	817.4269
1	190	1	0.1990	19.5007	753.2007	913.7226
2	200	1	0.3797	37.2058	753.2007	866.6287

5.2 Part 2 : The model’s input parameters are fixed at : $R = 1$, $s = 100$ and $Q = 95$ (quite large)

6 Comparison, Interpretation of Results and Conclusion

The numerical results summarised in the various tables show that the approximation error is proportional to the perturbation. We also note that when the controllable parameters are small, the results obtained via the absolute stability method in terms of the group inverse are better than those obtained via the strong stability method. This encourages us to adapt this method for expensive items that constitute 20% the company’s inventory levels. However, when the controllable parameters are sufficiently large, the results obtained using the strong stability method are better, which shows the efficiency of the latter (as the inventories built up by companies are in fact quite large). As a perspective for further research, the results obtained in this work can be used to study the sensitivity of other stochastic models. We can also consider the study of other inventory control models or / and the perturbation of other input parameters as well as the applicability of other approximation methods.

Remarque 6.1. *It is important to note that the approximation error is much closer to 0 when the perturbation concerns the demand rate than the demand law (we have also obtained results when perturbing the demand parameter that are not presented in this paper) and this in both cases considered (part 1, part 2). This shows that the demand law is much more influenced by the perturbation of the distribution than the parameter.*

References

- [1] Aiane, N., Rahmoune, F., Aïssani, D. : Modeling and Performance Evaluation in the $(R, s, l_n Q)$ Inventory System. IJMOR, **22**, 3, 363-402 (2021).
- [2] Aiane, N., Rahmoune, F., Aïssani, D. : Stability Bounds Comparison in the $(R, s, l_n Q)$ Inventory Model. 1st International Conference on Mathematics and Applications, Africa21. Blida, Algeria, Nov 15-16 (2021).
- [3] Benouaret, Z., Aïssani, D. : Strong Stability in a Two-dimensional Classical Risk Model with Independent Claims. Scandinavian Actuarial Journal, **2**, 83-92 (2010).
- [4] Campbell, S. L., Meyer, C.D. : Generalized Inverses of Linear Transformations. New York, Dover Publications Inc (1991).
- [5] Funderlic, R. E., Meyer, C. D. : Sensitivity of the Stationary Distribution Vector for an Ergodic Markov Chain. Linear Algebra Appl, **76**, 1-17 (1986).
- [6] Golub, G. H., Meyer, C. D. : Using the QR Factorization and Group Inversion to Compute, Differentiate, and Estimate the Sensitivity of Stationary Probabilities for Markov Chains. SIAM J. Algebraic Discrete Meth, **7**, 273-281 (1986).
- [7] Hunter, J.J. : Stationary Distributions of Perturbed Markov Chains. Linear Algebra and its Applications, **82**, 201-214 (1986).
- [8] Meyer, C.D. : The Condition of a Finite Markov Chain and Perturbation Bounds for the Limiting Probabilities. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, **1**, 3, 273-283 (1980).
- [9] Meyer, C.D., Stewart, G. W. : Derivatives and Perturbations of Eigenvectors. SIAM J. Numer. Anal, **25**, 679-691 (1988).
- [10] Meyer, C.D. : Sensitivity of the Stationary Distribution of a Markov Chain. SIAM J. Matrix Anal. Appl, **15**, 3, 715-728 (1994).
- [11] Mouhoubi, Z., Aïssani, D. : Stability of the Inventory-Backorder Process in the (R, S) Inventory Production Model. Pliska. Stud. Math. Bulgar, **18**, 1, 255-270 (2007).
- [12] Mouhoubi, Z., Aïssani, D. : Strong Stability and Uniform Ergodicity Estimates for the Waiting Process in Queuing Models with Impatient Customers. Markov Processes Relat. Fields, **25**, 1, 329-358 (2019).
- [13] Rabta, B., Aïssani, D. : Estimate of the Strong Stability in an (R, s, S) Inventory Model. Journal of Mathematical Sciences, **131**, 3, 5669-5673 (2005).
- [14] Rabta, B. : Sensitivity Analysis in Inventory Models by Means of Ergodicity Coefficients. International Journal of Production Economics, doi, (2017).
- [15] Rabta, B. : Stationary Distribution and Perturbation Bounds for a Stochastics Inventory Model, Journal of Mathematical Sciences, **237**, 5, 722–729 (2019).

- [16] Rahmoune, F., Aïssani, D. : Strong Stability of Queues with Multiple Vacation of the Server. *Stochastic Analysis and Applications*, **26**, 3, 1-14 (2008).
- [17] Rahmoune, F., Aïssani, D. : Quantitative Stability Estimates in Queues with Server Vacation. *Journal of Mathematical Sciences*, **200**, 4, 480-485 (2014).
- [18] Schweitzer, P. J. : Perturbation Theory and Finite Markov Chains. *J. Appl. Prob.*, **5**, 401-413 (1968).
- [19] Seneta, E. : Explicit Forms for Ergodicity Coefficients and Spectrum Localization. *Linear Algebra and its Applications*, **60**, 187-197 (1984).
- [20] Seneta, E. : Perturbation of the Stationary Distribution Measured by Ergodicity Coefficients. *Adv. Appl. Prob.*, **20**, 228–230 (1988).



Stochastic Integral for Non-Adapted Processes Related to the Rosenblatt Process

Sakina Benkaddour^{*1}, Abdeldjebbar Kandouci², and Omar Kebiri³

¹Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University of Saïda -Doctor Moulay Taher,
Saïda, Algeria ,
sakinabek2018@gmail.com

²Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University of Saïda -Doctor Moulay Taher,
Saïda, Algeria ,
kandouci1974@yahoo.fr

³university of cottBus Allemagne ,
o-kebiri@yahoo.fr

Abstract : In this paper, we define the stochastic integral of an anticipating integrand, which is a product of instantly independent process and adapted process, with respect to rosenblatt process based on Ayed and Kuo's approach. This provides a new concept of stochastic integration of non-adapted process.

Keywords : Rosenblatt process, Non adapted process , Stochastic integration,Instantly independent

1 Introduction

Self-similar stochastic processes can be used as mathematical models of various phenomena (hydrology, biophysics, geophysics, telecommunication, turbulence, cognition, and finance.)

The family of fractional Brownian motions is among the most studied self-similar stochastic processes because it has many properties like : self similarity, stationarity of increments and long range dependence, and it is a gaussian process so the calculus for it is easier but In concrete situations when the gaussianity is not plausible for the model, we use for example **the Rosenblatt process.**

The Rosenblatt process is important because it is one of the so-called "Hermite processes", which are limits of normalized sums of long-range dependent random variables. The simplest Hermite process is the Gaussian fractional Brownian motion. The Rosenblatt process is the simplest non-Gaussian Hermite process. It has continuous non-differentiable paths and is self-similar with stationary increments. It is Murray Rosenblatt who first conceived of it.

The rosenblatt process is not a semimartingale, this fact is considered as a limitation for

*Corresponding Author

applying classical stochastic calculus developed by Itô ; i.e, to give a sense for $\int_0^t u_s dX_s$, the integrator X must be a semimartingale which is not the case for the Rosenblatt process so we use the two principal methods to develop a stochastic integration theory : the pathwise type calculus and the Malliavin calculus/Skorohod integration. The first approach (that includes essentially the rough paths analysis, (see [6]), and the stochastic calculus via regularization, (see [7]) can be directly applied to the Rosenblatt process because of its regular paths and of the nice covariance structure.

The Malliavin calculus and the Skorohod integration are in general connected in a deeper way to the Gaussian structure of the integrator process see [3].

Other limitation of classical Ito integral is the adaptedness of the integrand to the natural filtration of integrator i.e, $\int_0^t u_s dX_s$, is well defined if and only if u_t is adapted to the filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, t \geq 0\}$. Then, the integral is defined like Riemann sums at which the evaluation points are the left endpoints of subintervals. The problem of non-adaptedness of the integrand has been discussed the first time by Itô [8], where he raised the question how to define

$$\int_0^t B(1)dB(s), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

since $B(1)$ is not F_t -adapted. Itô proposed to enlarge the filtration by letting \mathcal{G}_t be the field generated by \mathcal{F}_t and $B(1)$, i.e $\mathcal{G}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t, B(1)\}$, $B(1)$ is adapted to \mathcal{G}_t and B_t is a \mathcal{G}_t -quasimartingale. Therefore, the integral (1) may be defined as a stochastic integral with respect to quasi-martingale.

There have been several extensions in the literature on anticipating stochastic integration. Let's cite for instance Hitsuda [9], Skorokhod [10]. For more details on the anticipating integrals and their applications, see Buckdahn [11], Leon and Protter [12], Pardoux and Protter [13], and the reference therein. Ayed and Kuo [1] proposed a new viewpoint for defining this kind of integrals by decomposing the anticipating stochastic integrand into a linear combination of the products of instantly independent and adapted stochastic processes. Then, authors defined a stochastic integral of the product of an adapted process and instantly independent process as a Riemann sum thanks to the classical definition of stochastic integral proved in Kuo [14]. Notice that the evaluation points are the left endpoints of subintervals for the first process and the right endpoints for the second. Motivated by this new approach, many studies have been developed. Itô formula of anticipating integral proved in Kuo and Ayed [1], was generalized to different cases in Kuo et al.

Motivated by Ayed and Kuo's [1] idea of integrand decomposition, we define the stochastic integral of an anticipating process which is a product of an instantly independent process and an adapted process with respect to the Rosenblatt process, to be the limit of the corresponding Riemann sum.

This paper is arranged as follows : in Section 2, we present some preliminaries about the rosenblatt process , pathwise integral with respect to Rosenblatt process and integrand's decomposition approach proposed by Kuo and Ayed of anticipating integral. In section 3, we give our result using the above approach by replacing the standard Brownian motion by the Rosenblatt process. In the last section we do numerical simulations to validate the results obtained.

2 The Rosenblatt process

Définition 2.1. The Rosenblatt process $\{R(t), t \geq 0\}$ is H -self-similar process with $(\frac{1}{2} < H < 1)$, has zero mean and has stationary increments whose covariance function is equal to :

$$E[R(t_1)R(t_2)] = \frac{\sigma^2}{2} (t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H})$$

2.1 Stochastic representations of the Rosenblatt process

2.1.1 Time representation of the Rosenblatt process

$$R_H(t) = c(H, 2) \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^t (s - y_1)_+^{\frac{H}{2}-1} (s - y_2)_+^{\frac{H}{2}-1} ds \right) dB(y_1) dB(y_2), \quad (2)$$

with $x_+ = \max(0, x)$ and $(B(y), y \in \mathbb{R})$ is a standard Brownian motion on \mathbb{R} .

The constant of normalizing $c(H, 2)$ is chosen to ensure that $\mathbb{E}(R_H(1)^2) = 1$, by

$$c(H, 2) = \left(\frac{\beta(\frac{H}{2}, H-1)^2}{2H(2H-1)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

2.2 Properties

- The Rosenblatt process $\{R(t), t \geq 0\}$ has an almost sure continuous path version since

$$E|R(t_1) - R(t_2)|^2 = |t_1 - t_2|^{2H}$$

- The Rosenblatt process is not differentiable in mean square since

$$\lim_{t \rightarrow 0} E \left(\frac{R(t)}{t} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} t^{2H-2} = \infty$$

- Its increments have long-range dependence, that is

$$\sum_{k=0}^{\infty} E[(\Delta R(0)\Delta R(k))] = \infty$$

- Not a semimartingale.
- Zero quadratic variation.
- $H - \delta$ -Hölder continuous $\delta > 0$,

3 Stochastic calculus with respect to the Rosenblatt process

3.1 Pathwise calculus : Russo-Vallois regularization

Définition 3.1. 1. Let $(R_t)_{t \geq 0}$ and $(Y_t)_{t \geq 0}$ be continuous processes. We introduce, for every t we have :

$$\int_0^t f'(Y)d^+R = ucp - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^t Y_s \frac{R_s - R_{(s-\varepsilon)^+}}{\varepsilon} ds, \quad (4)$$

2. For every $f \in C^2(\mathbb{R})$, the integrals

$$\int_0^t f'(R)d^-R, \int_0^t f'(R)d^+R, \int_0^t f'(R)d^0R. \quad (5)$$

exist and they are equal and we have the Ito formula

$$f(R_t) = f(R_0) + \int_0^t f'(R)d^0R. \quad (6)$$

Next, present Ayed and Kuo's idea in order to explain anticipating stochastic integral. From Ayed and Kuo [1], the anticipating integrand $B(1)$ is presented as

$$B(1) = (B(1) - B(t)) + B(t) \quad (7)$$

Let us consider the following anticipating integrand

$$B(1)^2 = [(B(1) - B(t))]^2 + 2B(t)[B(1) - B(t)] + B(t)^2 \quad (8)$$

Then, we have to decompose the integrands as $B(1)^n$, $e^{B(1)}$ to get the common property given in the following definition.

Définition 3.2. (Ayed and Kuo ([1], Definition 2.1)) A stochastic process $g(t)$ is said to be instantly independent with respect to a filtration \mathcal{F}_t if $g(t)$ and \mathcal{F}_t are independent for each t .

Via the above definition, $B(1) - B(t)$, $[B(1) - B(t)]^2$, $[B(1) - B(t)]^n$ and $e^{B(1)-B(t)}$ are all instantly independent for $0 \leq t \leq 1$.

Exemple 1 : Let \mathcal{F}_t be the underlying filtration of Brownian motion $B(t)$, thus $g(B(1) - B(t))$ is instantly independent of \mathcal{F}_t , $t \in [0, 1]$ for any real measurable function $g(x)$. Nevertheless, $g(B(1) - B(t))$ is adapted to \mathcal{F}_t ; $t \geq 1$

(Ayed and Kuo) If a stochastic process $X(t)$ is both adapted and instantly independent with respect to a filtration \mathcal{F}_t , then $X(t)$ is a deterministic function.

From this Lemma, we conclude that instantly independent processes are independent of the past and present contrarily to the adapted processes. Thus, we can consider the collection of instantly independent processes as a counterpart of Ito's theory. In addition, we can deduce that many anticipating stochastic processes can be decomposed into sums of the products of an Ito part and a counterpart.

Further, Itô integral measures the integrand using left endpoint for each subinterval. For instantly independent part, if we also use the left endpoint to approximate, we lose its important properties as it has been seen in Example 1. However, if we measure the instantly independent part using right endpoint, its properties will be conserved. This lead to Ayed and Kuo's definition of the new integral.

Définition 3.3. (Ayed and Kuo [1], Definition 2.2) Let $B(t)$ be a Brownian motion, for an adapted stochastic process $f(t)$ with respect to the filtration \mathcal{F}_t and an instantly independent stochastic process $g(t)$ with respect to the same filtration, we define the stochastic integral of $f(t)g(t)$ to be the limit :

$$\int_0^T f(t)g(t)dB_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})g(t_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})) \quad (9)$$

provided that the limit in probability exists, where $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ is the partition of interval $[0, T]$

Many examples are given in Ayed and Kuo [1].

4 New Anticipating Integral

Based on the concept presented above, we give a definition of stochastic integral of the product $f(t)g(t)$ as in Definition 3.3 by taking the Rosenblatt process $R(t)$ as integrator. Formally, we have :

Proposition 4.1. Let $R(t)$ a rosenblatt process and \mathcal{F}_t the σ -field generated by $R(t), t \geq 0$ for an adapted stochastic process $f(t)$ with respect to the filtration \mathcal{F}_t and an instantly independent stochastic process $g(t)$ with respect to the same filtration. We define the stochastic integral of $f(t)g(t)$ to be the limit :

$$\int_0^T f(t)g(t)dR_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})g(t_i)(R(t_i) - R(t_{i-1})) \quad (10)$$

provided that the limit in probability exists.

5 Main results

Since the rosenblatt process is not Gaussian, according to the non-central limit theorem we will approach the rosenblatt process by a limit of fractional brownien motion to use the properties of the fractional brownien motion, and we discuss the near-martingale property of our anticipating integral.

we will also do numerical simulations to validate the results obtained concerning the stochastic integral for non adapted process with respect to the rosenblatt process.

References

- [1] W. Ayed and H. H. Kuo, *An extension of the Itô integral*, Communications on Stochastic Analysis, 92 (2008),323-333.
- [2] A.Belhadj , A.KANDOUCI , AND A.BOUCHENTOUF . *Stochastic integral for non-adapted processes related to sub-fractional brownian motion when $H > \frac{1}{2}$* . Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series).

- [3] Tudor, Ciprian A. *Analysis of the Rosenblatt process*. ESAIM : Probability and statistics 12, 230-257 ,(2008).
- [4] Coupek, Petr, Tyrone E. Duncan, and Bozenna Pasik-Duncan. *A stochastic calculus for Rosenblatt processes*. STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS (2020).
- [5] Murad S. Taqqu. *The Rosenblatt Process*.
- [6] Z. Qian and T. Lyons, *System control and rough paths*. Clarendon Press, Oxford (2002)
- [7] F. Russo and P. Vallois. *Forward backward and symmetric stochastic integration*. Probab. Theor. Relat. Fields 97 (1993) 403-421.
- [8] K. Ito, *Extension of stochastic integrals*, Proc. Internat. Symp. Stoch. Diff. Equations, Res. Inst. Mathemat. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1978.
- [9] M. Hitsuda, *Formula for brownian partial derivatives*, Second Japan USSR Symposium on Probability Theory, Kyoto, 111-114, 1972.
- [10] A. Skorokhod, *On a generalization of a stochastic integral*, *Theory of Probability and Its Applications*, 20 (1976), 219-233.
- [11] R. Buckdahn, *Anticipative girsanov transformations*, *Probability Theory and Related Fields*, 89 (1991), 211-238.
- [12] J. A. Leon and P. Protter, *Some formulas for anticipative Girsanov transformations*, CRC Press, 1994.
- [13] E. Pardoux and P. Protter, *A two-sided stochastic integral and its calculus*, *Probability Theory and Related Fields*, 76 (1987), 15-49.
- [14] H. H. Kuo, *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, New York, 2006.



On the solution of stochastic differential equation in one dimensional case with Lipschitz coefficients

Elias Taki Eddine Mohammed Chikouche ¹ and Fatima Benziadi ²

¹Department of Mathematics, Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, Tahar Moulay University PO.Box 138 En-Nasr, 20000 Saida, Algeria,
eliastakieddine.mohammedchikouche@univ-saida.dz

²Department of Mathematics, Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, Tahar Moulay University PO.Box 138 En-Nasr, 20000 Saida, Algeria,
fatima.benziadi@univ-saida.dz

Abstract : In this work we are primarily interested in the so-called one-default model. This model are extensively applied in modeling financial risk and in price valuation of financial products. In addition, this model is expressed by a stochastic differential equation, this equation plays an essential role in this work. More exactly, we will demonstrate the continuity of the trajectories of the solution in a one-dimensional case, based on the criterion of Kolmogorov.

MSC: Primary : 60G17 ; Secondary : 60H05

Keywords : Stochastic differential equation ; Kolmogorov's criterion ; Credit risk ; Properties of solutions of SDE.

1 Introduction

At first, we will give a description of the one-default model. Precisely, we define a filtered probability space $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, for any continuous increasing process Λ null at the origin, for any continuous non-negative local martingale N such that $0 < Z_t = N_t e^{-\Lambda_t}$ satisfies $Z_t \leq 1, t \geq 0$, for any continuous local martingale Y , for any Lipschitz function f on \mathbb{R} null at the origin, there exists a random variable τ such that the family of conditional expectations $X_t^u = \mathbb{Q}[\tau \leq u | \mathcal{F}_t]$, $u > 0, t < \infty$, verify the following stochastic differential equation :

$$\begin{cases} dX_t = X_t \left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1-Z_t} dN_t + f(X_t - (1-Z_t)) dY_t \right), t \in [u, \infty) \\ X_u = x, \end{cases} \quad (1)$$

*Corresponding Author

where the initial condition x can be any \mathcal{F}_u -measurable random variable. In this work, we want to show that the continuity of the process $X_t^u(x)$ such as :

$$X_t^u(x) = x + \int_u^t X_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1-Z_s} \right) dN_s + \int_u^t X_s f(X_s - (1-Z_s)) dY_s, u \leq s \leq t$$

is the solution of the equation (1).

The rest of the work is organized as follows : in the next section we present the theorem of Kolmogorov with the proof and Gronwall's lemma, and the last section presents the objective of this work.

2 The Kolmogorov's theorem and basic lemmas

In this section we will present a version of Kolmogorov's theorem and some lemmas that we need in our work.

Théorème 2.1. [6] *Let (E, d) be a complete metric space, and let X_t be an E -valued random variable for all x dyadic rationales in \mathbb{R}^n . Suppose that for all t, s , we have $d(X_t, X_s)$ is a random variable and that there exist strictly positive constants ε, C, β such that*

$$\mathbb{E} \{ d(X_t, X_s)^\varepsilon \} \leq C \|t - s\|^{n+\beta} \quad (2)$$

Then for almost all ω the function $x \mapsto X_t$ can be extended uniquely to a continuous function from \mathbb{R}^n to E .

Preuve. We prove the theorem for the unit cube $[0, 1]^n$. Before the statement of the theorem we establish some notations. Let Θ denote the dyadic rational points of the unit cube $[0, 1]^n$ in \mathbb{R}^n , and let Θ_m denote all $t \in \Theta$ whose coordinates are of the form $k2^{-m}$, $0 \leq k \leq 2^m$. Two points t and s in Θ_m are neighbors if $\sup_i |t^i s^i| = 2^{-m}$. We use Chebyshev's inequality on the inequality hypothesized to get

$$\mathbb{P} \{ d(X_t, X_s) \geq 2^{-\alpha m} \} \leq C 2^{\alpha \varepsilon m} 2^{-m(n+\beta)}.$$

Let

$$\Omega_m = \{ \omega : \exists \text{ neighbors } s, t \in \Theta_m \text{ with } d(X_t(\omega), X_s(\omega)) \geq 2^{-\alpha m} \}.$$

Since each $t \in \Theta_m$ has at most 3^n neighbors, and the cardinality of Θ_m is 2^{nm} , we have

$$\mathbb{P}(\Omega_m) \leq c 2^{m(\alpha \varepsilon - \beta)}.$$

Where the the constant $c = 3^n C$. Take α a sufficiently small so that $\alpha \varepsilon < \beta$. So

$$\mathbb{P}(\Omega_m) \leq c 2^{-m\delta}.$$

We now use the preceding to show that $x \mapsto X_t$ is uniformly continuous on Θ and hence extendable uniquely to a continuous function on $[0, 1]^n$. To this end, let $t, s \in \Theta$ be such that $\|t - s\| \leq 2^{-k-1}$. We will show that $d(X_t, X_s) \leq c 2^{-\alpha k}$ for a constant c , and this will

complete the proof. Without loss of generality assume $k \geq m_0$. Then $t = (t^1, \dots, t^n)$ and $s = (s^1, \dots, s^n)$ in Θ with $\|t - s\| \leq 2^{-k-1}$ have dyadic expansions of the form

$$t^i = u^i + \sum_{j>k} a_j^i 2^{-j},$$

$$s^i = v^i + \sum_{j>k} b_j^i 2^{-j}.$$

Where a_j^i, b_j^i are each 0 or 1 and u, v are points of Θ_k which are either equal or neighbors.

Next set $u_0 = u, u_1 = u_0 + a_{k+1} 2^{-k-1}, u_2 = u_1 + a_{k+2} 2^{-k-2}, \dots$. We also make analogous definitions for v_0, v_1, v_2, \dots . Then u_{i-1} and u_i are equal or neighbors in Θ_{k+i} each i , and analogously for v_{i-1} and v_i . Hence

$$d(X_t(\omega), X_u(\omega)) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\alpha j},$$

$$d(X_s(\omega), X_v(\omega)) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\alpha j}.$$

In addition

$$d(X_u(\omega), X_v(\omega)) \leq 2^{-\alpha k}.$$

The result now follows by the triangle inequality. □

We consider now the following lemmas, which plays essential role in our work

Lemma 2.1. [2](Gronwall's lemma) Let $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ with $a < b$, φ and $\psi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ non-negative continuous functions, such that $\exists \rho \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [a, b], \varphi(t) \leq \rho + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds$. Then

$$\forall t \in [a, b], \varphi(t) \leq \rho \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

Lemma 2.2. [7] Let $b(t)$ be a non-negative right-continuous increasing (extended real-valued) function on \mathbb{R}_+ . Set

$$T(t) = \inf\{s : b(s) > t\}, t \in \mathbb{R}_+.$$

Then $T(t)$ is a non-negative right-continuous increasing function on \mathbb{R}_+ , and is called the right-inverse function of $b(t)$. For $t \in \mathbb{R}_+, T(t) < +\infty$ if and only if $t < b(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} b(t)$. Set

$$b_-(t) = b(t-) = \lim_{s \uparrow t} b(s), t > 0 \text{ (such that } s \uparrow t \text{ means } s \rightarrow t, s < t),$$

$$T_-(t) = T(t-) = \lim_{s \uparrow t} T(s) = \inf\{s : b(s) \geq t\} = \sup\{s : b(s) < t\}, t > 0$$

$$b(0-) = b(0), T(0-) = T(0).$$

Then we have

$$b_-(T_-(t)) \leq b_-(T(t)) \leq t, t \in \mathbb{R}_+.$$

And

$$b(T(t)) \geq b(T_-(t)) \geq t, t < b(\infty).$$

3 The Continuity of the solution in one dimensional case

Now we are in a position to give the heart of our work, we need also the theorem of Kolmogorov presented in the previous section and lemma of Gronwall such that we take $\varepsilon = p$ and $\beta = p - n$ with $p > 0$. We have for $u \leq s \leq t$:

$$X_t^u(x) = x + \int_u^t X_s \left(-\frac{e^{-\Lambda_s}}{1 - Z_s} \right) dN_s + \int_u^t X_s f(X_s - (1 - Z_s)) dY_s.$$

We begin by introducing the following stopping time :

$$\tau_n = \inf\{t, 1 - Z_t < \frac{1}{n}\}.$$

Consequently, we assume the process \tilde{X} instead of X :

$$d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t \left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1 - Z_{t \wedge \tau_n}} dN_t + f(\tilde{X}_t - (1 - Z_t)) dY_t \right).$$

Such that $\tilde{X}_t = X_t$ and $\forall t \leq \tau_n, n \in \mathbb{N}$. We indicate $D_t = \tilde{X}_t^u(x) - \tilde{X}_t^u(y)$ and we apply the Itô's formula to the process $|D_t|^p$, we find :

$$\begin{aligned} d|D_t|^p &= p|D_t|^{p-1} dD_t + \frac{|D_t|^{p-2}}{2} p(p-1) \left[(\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y)^2 \left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1 - Z_{t \wedge \tau_n}} \right)^2 d\langle N, N \rangle_t + (\mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^y))^2 d\langle Y, Y \rangle_t \right. \\ &\quad \left. + 2(\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y) \left(-\frac{e^{-\Lambda_t}}{1 - Z_{t \wedge \tau_n}} \right) (\mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^y)) d\langle N, Y \rangle_t \right]. \end{aligned}$$

By Jacod lemma (see [4], page 128,129), there always exists a process G , such that : $C_{11}dG = d\langle N, N \rangle, C_{22}dG = d\langle Y, Y \rangle$ and $C_{12}dG = d\langle N, Y \rangle$ with

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Being a symmetric nonnegative matrix, and the choice of the latter is arbitrary, so

$$\begin{aligned} d|D_t|^p &= p|D_t|^{p-1} dD_t + \frac{|D_t|^{p-2}}{2} p(p-1) \left[((\tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y), \mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^y)) \right. \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\Lambda_t}}{1 - Z_{t \wedge \tau_n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{e^{-\Lambda_t}}{1 - Z_{t \wedge \tau_n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \left. \times \begin{pmatrix} \tilde{X}_t^x - \tilde{X}_t^y \\ \mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^x) - \mathcal{Q}_t(\tilde{X}_t^y) \end{pmatrix} \right] dG_t. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
 d|D_t|^p &= p|D_t|^{p-1} dD_t + \frac{D_t^{p-2}}{2} p(p-1) [W_t^T M W_t] dG_t \\
 |D_t|^p &= |x-y|^p + \left[\int_u^t p|D_s|^{p-1} dD_s + \int_u^t \frac{p(p-1)}{2} D_s^{p-2} W_s^T M W_s dG_s \right] \\
 \mathbb{E}[|D_t|^p] &= |x-y|^p + \mathbb{E} \left[\int_u^t p|D_s|^{p-1} dD_s \right] + \mathbb{E} \left[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2} D_s^{p-2} W_s^T M W_s dG_s \right] \\
 \mathbb{E}[|D_t|^p] &\leq |x-y|^p + \mathbb{E} \left[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2} D_s^{p-2} W_s^T M W_s dG_s \right] \\
 \mathbb{E}[|D_t|^p] &\leq |x-y|^p + \mathbb{E} \left[\int_u^t \frac{p(p-1)}{2} D_s^{p-2} m_s |W_s|^2 dG_s \right].
 \end{aligned}$$

After some calculations, We use the fact that the function f is lipschitz, so we have :

$$\mathbb{E}[|D_t|^p] \leq a + b \mathbb{E} \left[\int_u^t |D_s|^p m_s dG_s \right].$$

We introduce the following stopping time :

$$T(t) = \inf\{s, G(s) > t\}.$$

For $s, t, \alpha \in \mathbb{R}^+$ such that $s < \alpha$:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T(\alpha)} |D_t|^p \right] \leq a + b \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T(\alpha)} \int_u^{T(\alpha)} |D_s|^p m_s dG_s \right].$$

We denote

$$A_t = \sup_{t \leq T(\alpha)} |D_t|.$$

So

$$\mathbb{E} [A_t^p] \leq a + b \mathbb{E} \left[\int_u^{T(\alpha)} A_s^p m_s ds \right].$$

Finally, we apply the lemma of Gronwall we find :

$$\mathbb{E} [A_t^p] \leq a \exp \left(b \int_u^{T(\alpha)} m_s ds \right).$$

Ultimately, if $(\int_u^{T(\alpha)} m_s ds)$ is finite, there exist the constant C which satisfy the condition of Kolmogorov's lemma this means that $C = \exp \left(b \int_u^{T(\alpha)} m_s ds \right)$.

4 Conclusion

Based on Kolomogorov's theorem, this work contains a fresh methodological approach and may thus make a valuable contribution to the theory of stochastic differential equations. As prospects, we try to study another property of the stochastic differential equations solutions.

References

- [1] Barles.G., Solution de viscosite des equations de Hamilton-Jacobi. Math.Appl.Vol 17, Springer-Verlag, Paris, (1994).
- [2] Constantini, G. : Equations differentielles d'ordre 2 ,(http ://bacamaths.net/).
- [3] Ikeda-S.N. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, Second edition, New York (1989) .
- [4] Jacod,J. : Calcul Stochastique et Problmes de Martingales Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1979.
- [5] Oksendal.B., Stochastic differential equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985, 1989, 1992, 1995, 1998, 2003).
- [6] Philip, E. P. : Stochastic Integration and Differential Equations, Math.Appl, Second edition, Springer-Verlag 2004.
- [7] Sheng, W. H., Jia, G. W., and Jia, A. Y. : Semimartingale Theory and Stochastic Calculus, Science Press and CRC press INC, 1992.



Estimating implied volatility using Mann-type iterative algorithm

Baya Takhedmit ^{*1}, Bahia Bahia², and Massissa Soufit³

¹LaMOS Research Unit, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria,
baya.takhedmit@univ-bejaia.dz

²LAMA, University of Bejaia, Algeria,
bahia.barache@univ-bejaia.dz

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
massinissa.soufit

Abstract : A new fixed point method is suggested to estimate volatility in the Black-Scholes model. By using this fixed point method, we construct an iteration based on Mann's algorithm.

In this work, we consider a method to find the implied volatility. In an empirical study, we apply our results to market data from market-prices for a European call options.

MSC: 60H30 ; 68W25 ; 37C25

Keywords : Black-Scholes model ; Implied volatility ; Mann's algorithm

1 Introduction

The financial econometrics literature mainly focuses on the volatility on a fixed time horizon [3, 4]. Therefore, this work devoted to the estimation of this quantity.

The Black-Scholes model assumes that markets are perfectly liquid and it is possible to purchase or sell any amount of stock or options or their fractions at any given time.

We assume that the market satisfies the assumptions above. Suppose that we have an European call option. The option price is denoted by $C = C(S, t; K, T)$. Here, S is the value of the underlying at time t , K is the strike at expiration time T [4]. One of the most efficient algorithms to estimate the implied volatility from the market observed price and the theoretical Black-Scholes formula is fixed points. The construction of fixed points of nonlinear operators is an important and active research area. Iterative methods for finding fixed points. An important way for finding fixed points is Mann's algorithm [1].

Most of the approximate iterative methods perform some fixed points to the Black-Scholes formula and then analytically invert to obtain a formula for the implied volatility.

*Corresponding Author

2 Computation of the implied volatility

The Black-Scholes model assumes that the volatility is constant across strikes and maturity dates. However as we know, in the world of options, this is a very unrealistic assumption. Option prices for different maturities change drastically, and option prices for different strikes also experience significant variations. In this section we consider the numerical problem to compute the implied volatility. For European options under the Black-Scholes model, calculation of the implied volatility seems to be a straightforward exercise since a closed-form presentation exists for the price. However, this closed-form allows not an analytical computation of the implied volatility. Let us recall the Black-Scholes-formula [épey] for the price of an European call-option.

$$C(S, t, K, \tau, r, \sigma) := S\mathcal{N}(d_+(\sigma)) - K e^{-r\tau}\mathcal{N}(d_-(\sigma)), \quad (1)$$

where

$$d_{\pm}(\sigma) := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

and \mathcal{N} is the distribution function of the standard normal distribution. Notice that we have used the remaining time τ as a "new" variable. In the following we use the identity

$$d_-(\sigma) = d_+(\sigma) - \sigma\sqrt{\tau}.$$

One of the most efficient algorithms to estimate the implied volatility from the market observed price and the theoretical Black-Scholes formula is the fixed point method. Fixed point method is used to find the zeros of a real valued function. This means if there is a function then the root of the function would be such that $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

If $y = f(x)$ then let say we have some current approximation x_n that produces the zero of the function and we want to better that approximation to x_{n+1} which gives $f(x_{n+1}) = 0$. One way to obtain convergent iterative schemes for the approximation of fixed points is mainly due to Mann [1] instead of the proces works as an iterative method, an explicit averaged iteration of the form which generates a sequence x_n by the form

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f(x_n), n \geq 0,$$

where $\alpha_n \in (0, 1)$.

3 Algorithm

The above algorithm is an iterative algorithm. Our objective is to find where is the desired tolerance limit. We start with some initial value and run the iteration till the value converges.

We can apply the above to the implied volatility problem. Our objective is therefore to estimate that makes $f(\sigma) = 0$.

$$f(\sigma) = C(S, t, K, \tau, r, \sigma). \quad (2)$$

In the above equation for the function, is the market observed price of the option which is a constant and is the Black-Scholes theoretical (model) price.

Algorithm 1 Mann's algorithm



- Step 1 :** Given an initial value of the fixed point ;
- Step 2 :** Calculate $x_{n+1} = (\frac{\alpha}{n})f(x_n) + (1 - \frac{\alpha}{n})x_n$;
- Step 3 :** If $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ then
- Convergence reached
 - Write the fixed point x_{n+1}
 - Stop
- else return to **Step 2**
-

References

- [1] Berinde V. Mann Iterative Algorithm for Approximating Fixed Points of Enriched Nonexpansive Mappings, **14**, 123. 1-12 (2022).
- [2] Crépey, S. Calibration of the local volatility in a generalized Black-Scholes model using Tikhonov regularization. SIAM J. Math. Anal., 34 :1183–1206, (2003).
- [3] Fongler, M.R Semiparametric modelling of implied volatility. Lecture Notes. Springer, (2005).
- [4] Privault, N. Stochastic Finance : An Introduction with Market Examples, CRC Financial Mathematics Series (2014).



Automobile insurance ratemaking in Algerian market using machine learning methods

Walid Oucherif ¹ and Nassim Touche ²

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, woucherif@gmail.com

²LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, nassim.touche@univ-bejaia.dz

Abstract : In this paper, the authors propose a new ratemaking system that is built using data and statistics of drivers from the Algerian automobile insurance market in order to handle the lack of losses predictions. Since the current pricing system is not appropriate because it does not predict insurance losses, the authors use data of policyholders to model claims frequency using Generalized Linear Models (GLM) and machine learning based algorithms : Neural Networks (NN), boosting and stacking algorithms (LightGBM and XGBoost).

Keywords : Non-life insurance, auto insurance, GLM, statistical learning, Neural Nets, GBM, XGBoost, LightGBM.

1 Introduction

Automobile insurance is one of the most important segments of the insurance industry in any country. Automobile insurance is mandatory for all registered vehicles and covers third-party liability and physical damage from collisions with other vehicles or objects. To provide adequate financial coverage, insurers use different techniques for creating premium rates for individual consumers. For many decades, one of the popular methods for determining premiums for different risk factors are statistical tools like Generalized Linear Models (GLMs).

Renshaw (1994) [8] showed how useful GLMs are in this context, especially because predictions can be explained easily and be interpretable according to the rating variables. The primary basis for calculating automobile insurance premiums is the statistical concept of "frequency and severity" for which GLM regressions are adequate tools. For instance, the use of Poisson regression has been widely adopted for the estimation of the frequency in actuarial literature. Garrido (2016) [3] used GLMs to model claims frequency and size.

But what about using data science and artificial intelligence (AI) for insurance ? With the development of new technologies and AI, the choice whether to use machine learning based

*Corresponding Author

algorithms to make predictions at the expense of interpretability is more and more tempting as they often outperform classical statistical models. Wuthrich (2021) [11] gave a wide range of methods and data analysis techniques for non-life insurance pricing. Noll (2020) [6] and Ferrario (2020) [2] used the data set included in the R package *CASdatasets* (Charpentier (2015) [1]) to compare a wide range of machine learning algorithms and showed their superiority on GLMs. Schelldorfer (2019) [9] proposed a new approach for processing categorical features with models using neural networks. Pesantez-Narvaez (2019) [7] used the popular XGBoost framework for predicting the existence of accident claims using telematics data.

The problem in the Algerian market resides in the way insurers have built their auto insurance pricing. It is very basic and uses only the vehicle's value in the calculation of the premium, regardless of any other characteristic of the driver, nor the vehicle. For this reason, our goal was to elaborate a new ratemaking process based on drivers' statistics. We therefore used GLMs, Neural Networks (NN), boosting and stacking algorithms (LightGBM and XGBoost) as tools to estimate the claim frequency of policyholders.

2 Data and evaluation metric

The goal of this paper is to use actuarial techniques to model insurance losses of the portfolio from the largest car insurer in Algeria (*Société Nationale d'Assurance*). The data set contains 398 830 insurance policies of the All Risks guarantee. Within the data set, there are 113 961 policies with the claim's amount greater than zero. To model insurance losses, we have nine features : driver's age and his driving license seniority, vehicle's power, age and value, the exposure, vehicle's car brand, region of driving and lastly, the type of the vehicle. The latter three features are categorical variables, whereas the first six are continuous.

Before building any model, one should always consider an exploratory data analysis. The goal is to find if there exists any kind of pattern, relation, and anomalies in the data using some statistical graphs and other visualization techniques. Among these objectives, extracting important variables from the data set and detect outliers and anomalies were our main goals. In order to evaluate the performance of the *count* models, we will use the Poisson deviance, which is a measure that quantifies variations in the data that are not explained by the model under consideration. For a given estimator $\hat{\mu}$ of y , the Poisson deviance loss of a data set with n rows is equal to
$$D = 2 \sum_{i=1}^n \left[y_i \log \left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) - (y_i - \hat{\mu}_i) \right].$$

3 Estimation of claims frequency

Generalized linear models

The first tool we will be using to model insurance losses is the GLM which is a generalization of the ordinary linear regression. GLMs are state-of-the-art in automobile insurance pricing because it tends to be very clear about how a vector of features influence a response variable. This is important because actuaries often seek to give interpretation to their models. We refer to the corresponding literature for more details about GLMs in actuarial science.

The first model we will evaluate is the one using only the intercept. It uses the mean of y on our training set to predict the claims frequency. This model is denoted GLM1. Note that in-sample refers to the learning set and out-of-sample refers to the test set. The actual claim

frequency of the Learning/Test sample is respectively : 42.84% / 42.37%.

After that, we build a Poisson GLM model using only relevant features (cited previously) but ignoring any possible correlations between them. This model is denoted GLM2.

	In-Sample Loss	Out-of-Sample Loss	Predicted Average Frequency	Improvement GLM2 baseline
GLM1 (mean)	97.27	96.58	42.84%	/
GLM2	92.79	92.25	42.88%	100%
GLM3	92.37	91.84	42.87%	109.4%
GLM4	92.01	91.57	42.86%	115.7%

TABLE 1 – Performance comparison of various GLM models. Losses are in 10^{-2}

As we can see, the GLM2 model has substantially improved our predictions over the model GLM1. From now on, we will be using the deviance loss of the GLM2 as our reference for our upcoming model comparisons.

Next, we build the model GLM3 as demonstrated in Schelldorfer [9]. We will assume a suitable continuous functional form for some of the continuous variables (like driver’s age, vehicle’s value, ...).

$$\text{AgeDriver} \mapsto \beta_j \text{AgeDriver} + \beta_{j+1} \log(\text{AgeDriver}) + \sum_{k=2}^m \beta_{j+k} (\text{AgeDriver})^k.$$

The parameter m is deduced after training several models. It is chosen with the focus on capturing the polynomial effect of the considered variable without overfitting our training data. That is one of the reasons why it is important to split the data set before training/testing models. The last GLM model, on top of the polynomial effects of variables, also considers possible correlations among features. The latter model is denoted GLM4. From table 1, we can see that GLM4 is better at predicting in-sample and out-of-sample data.

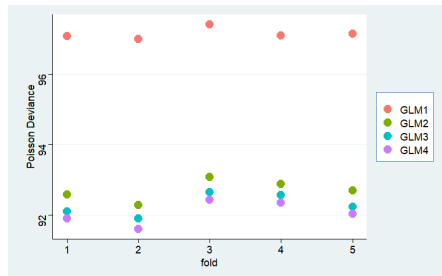


FIGURE 1 – K-Cross Validation GLM models.

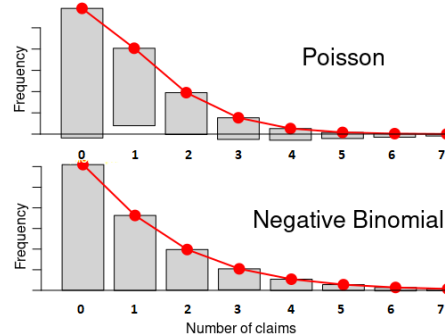


FIGURE 2 – NB2 vs Poisson on theoretical vs data set distribution of response y .

We now perform a cross validation procedure (Figure 1) to ensure that our models do not lead to overfitting. When we observe a high variance in evaluation metrics from one block to another, then our models don’t generalize predictions very well. Figure 1 gives us results of this procedure and we can conclude that our models do generalize relatively well.

However, the empirical frequency of the response variable y is relatively high and our data displays over-dispersion. This means that the variance of y is higher than the mean. The vcd library in R confirms this fact (Figure 2) when we try to compare theoretical distribution (line in

red) with the distribution of the count variable in our data set (gray histograms). When we build a Negative binomial model, predictions are the same as the Poisson models but variances are different and scale with predictions which then can help capture over-dispersion.

Combined Actuarial Neural Network

This part is a reproduction of the deep learning tutorial by Schelldorfer [9]. The focus on the latter article was not on tuning hyperparameters but rather on embedding layers, because it seems to provide a better use of categorical variables within neural networks than the classical dummy transformations.

The goal of the Combined Actuarial Neural Network is to improve the classical GLM regression models using neural networks. The idea is to nest the GLM into a network architecture by injecting it in a commonly named *skip connection* that directly links the input layer to the output layer, see figure 4. Note that categorical features in green have been embedded but not represented as is in figure 4. For the adaptation to our data set, we went through the same methodology and used the same pre-processing procedure on our features (see Ferrario [2], Noll [6], Schelldorfer [9] for processing features tutorial).

As for the performance of the CANN model (see table 2), it seems to outperform the best GLM we have managed to build which includes a few complex interactions between features. It is also possible to get better results from the CANN approach if we fine tune hyper parameters, but we will refrain from doing so because we only gain little improvement after several hours of optimization.

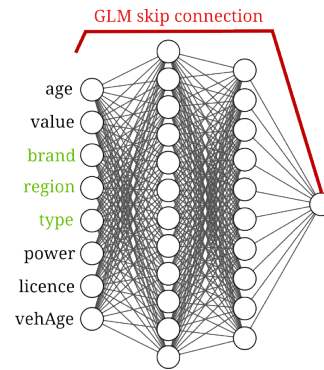


FIGURE 3 – CANN architecture with GLM skip connection, Schelldorfer [9].

LightGBM

LightGBM (Guolin [4]) is an open-source gradient boosting framework developed by Microsoft that uses tree based learning algorithms designed to process data faster and provide better accuracy. LightGBM can be used for regression, classification, ranking and many other machine learning applications. What we are interested in here is the Poisson regression. After tuning hyperparameters for a few hours, we managed to outperform the CANN approach as shown in the following table. Although LightGBM seems to predict out-of-sample data better than the neural networks (see table 2), the improvement is not that high. We will not pursue further optimization on hyper parameters because like the CANN model, gains obtained after tuning parameters are not worth the time considering results of the following boosting algorithm.

XGBoost

XGBoost (eXtreme Gradient Boosting, Tianqi [10]) is a model well-known for its high predictive performance. It is an optimized gradient boosting library designed to be highly efficient, flexible and portable. It also provides a parallel tree boosting that help train models more efficiently by utilizing all cores of a CPU for example. XGBoost also uses stacking to

make predictions. Stacking is an ensemble machine learning technique designed to train multiple models to solve similar problems and then combine them into one that makes more accurate predictions. However, there is an important downside to using XGBoost which is limited interpretability to how predictions are made. This is the reason why it's commonly characterized as a "black box" model. There still exists some tools that can give some insight on the features that are most correlated to the response variable y . We can also build SHAP plots (SHapley Additive exPlanations, Lundberg [5]). The goal of SHAP is to explain the prediction of an input vector x by computing the contribution of each feature to the prediction.

	In-Sample Loss	Out-of-Sample Loss	Predicted Average Frequency	Improvement GLM2 baseline
GLM1 (mean)	97.27	96.58	42.84%	/
GLM2	92.79	92.25	42.88%	100%
GLM4	92.01	91.57	42.86%	115.7%
CANN	91.62	91.35	42.86%	120.8%
LightGBM	90.62	91.25	41.19%	123.2%
XGBoost	89.33	90.81	42.81%	134.1%

TABLE 2 – Performance comparison of all models.

We can see that XGBoost outperforms all previous models on predicting both in-sample and out-of-sample data set. We can now visualize the most important features in our data set, as well as some SHAP plots that can show us how features correlate to the response variable y .

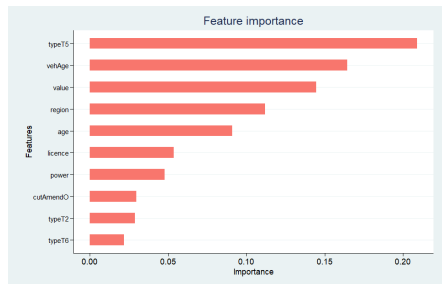


FIGURE 4 – Feature importance.

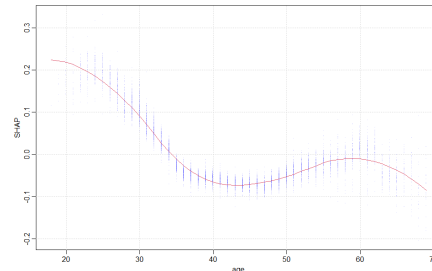


FIGURE 5 – SHAP with respect to age of driver.

Lastly, we again go through the K-cross validation procedure (figure 6) to make sure that all machine learning algorithms we have built generalize to data we did not use to train our models. Results are very clear. The variance of deviance losses between different folds is not high and we can assume that our models can predict out-of-sample data relatively well. XGBoost still shows best results.

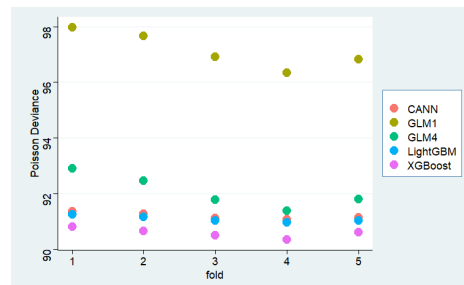


FIGURE 6 – K-cross validation all models.

4 Conclusion

Algerian automobile insurance market is suffering from the lack of losses estimations. The current ratemaking is clearly not suitable. Our goal was to use data of policyholders to model claims frequency using several statistical tools. We started with a classical GLM approach which showed good results and easy interpretations of the predictions. We then used neural networks in combination with results from the GLM model to make even better predictions but we started losing interpretability on predictions. Following neural networks, we used boosting algorithms (LightGBM and XGBoost) to model the same response variable and we found that XGBoost outperforms all models we trained.

References

- [1] Charpentier, A. : Computational Actuarial Science with R. CRC Press (2015).
- [2] Ferrario, A., Noll, A., Wuthrich, M. V. : Insights from Inside Neural Networks. "Actuarial Data Science" of the Swiss Association of Actuaries SAV (2020).
- [3] Garrido, J., Genest, C., Schulz, J. : Generalized linear models for dependent frequency and severity of insurance claims. Insurance : Mathematics and Economics (2016).
- [4] Guolin K., Qi M., Thomas F., Taifeng W., Wei C., Weidong M., Qiwei Y., Tie-Yan L. : LightGBM : A Highly Efficient Gradient Boosting Decision Tree. Advances in Neural Information Processing Systems 30 NIP 2017 (2017).
- [5] Lundberg, S. M., Lee, S. : A Unified Approach to Interpreting Model Predictions. Advances in Neural Information Processing Systems 30 NIP 2017, Curran Associates, Inc., (2017).
- [6] Noll, A., Salzmann, R., Wuthrich, M. V. : Case Study : French Motor Third-Party Liability Claims. "Actuarial Data Science" of the Swiss Association of Actuaries SAV (2020).
- [7] Pesantez-Narvaez, J., Guillen, M., Alcañiz, M. : Predicting Motor Insurance Claims Using Telematics Data—XGBoost versus Logistic Regression. Risks, 7, 70 (2019).
- [8] Renshaw, A.E. : Modelling the claims process in the presence of covariates. ASTIN Bull., 24 (2) (1994).
- [9] Schelldorfer, J., Wuthrich, M. V. : Nesting Classical Actuarial Models into Neural Networks. "Actuarial Data Science" of the Swiss Association of Actuaries SAV (2019).
- [10] Tianqi C., Carlos G. : XGBoost : A Scalable Tree Boosting System. CoRR, abs/1603.02754 (2016).
- [11] Wuthrich, M. V., Buser, C. : Data Analytics for Non-Life Insurance Pricing. Swiss Finance Institute Research Paper No. 16-68 (2021).

Intelligent traffic light using non-exhaustive polling system

Sabiha Larbi ¹, Fazia Rahmoune ^{*2}, and Mohammed Said RADJEF ^{†2}

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
sabiha.larbi@univ-bejaia.dz

²LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
fazia.rahmoune@univ-bejaia.dz

³LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
mohammedsaid.radjef@univ-bejaia.dz

Abstract :

Intelligent traffic lights is an advanced technology that gives road authorities the opportunity to manage traffic and adjust green phases based on the length of the queue. This intelligent control strategy aims to control wait times to increase the efficiency of traffic congestion. This paper presents a new use of non-exhaustive polling systems with two queues modeled by $M/M/1$ (Binomial Gated service, Multiple Vacation), in the intelligent control of traffic lights. The Number of vehicles to pass during a green phase is measured in the system through the relationship between the size of this group and the mean waiting time. Numerical results are presented as well as a comparison with $M/M/1$ (GS, SV) polling system.

Keywords : Polling System ; Queuing System ; Intelligent Traffic, Mean queue length, Mean sojourn time.

1 Introduction

A polling system consists of a number of queues attended by a single server who visits the queues in some order, typically incurring some switch-over time while moving from one queue to the next. Among the traditional service policies (exhaustive, gated, and limited), the limited service policy is the one to which the binomial-gated policy is most similar in nature. In comparison to the exhaustive and gated policies both the limited and binomial-gated policies attempt to limit the amount of resources dedicated to any queue in any service period [5], [6].

Polling systems have a wide range of applications in communication, production, transportation, and maintenance systems. Excellent surveys on polling systems and their applications are presented in [10], [3] [15]. Boon et al. [4] wrote their thesis on polling models,

*Corresponding Author

†Corresponding Author

with some applications for traffic intersections. Mainly, the influence of control policies and customer behavior on waiting times and queue lengths has been studied. For the traffic light case, they analyzed the performance of the polling system in Heavy Traffic and Light Traffic. Over the last four decades, the theory of traffic signals gave a lot of attention to the estimation of delays and queue lengths that result from the adoption of a signal control strategy at individual intersections. Fixed-cycle signaled intersection models of queuing systems focused on calculating the average queue length and the sojourn time in the system by $M/M/1$, $M/D/1$, $M/D^X/1$ and $M/G/1$, for example, [1], [8], [12]. Note that the models cited do not describe server deactivation.

Due to the alternating of the signal between green and red, signaled intersection queuing modeling basically belongs to the class of queuing models with server vacation, introduced by [7] with the particularity that the server remains inactive for a pre-timed duration. Pacheco et al. [9] modeled the signaled intersection regulated by pre-timed control in a network of urban traffic with a deterministic queue $M/D/1$ with a server vacation. Altman [2] introduces a process describing the characteristics of both the systems with server vacation and an individual queue with an exhaustive-service polling system. The study of the regulation of traffic lights is present in the literature, Wang et al. [14] studied the green extension of a two-phased vehicle-actuated signal at an isolated intersection. The green phase is extended by a preset time interval. The green phase switches if there is no arrival during this interval, from the time of a vehicle actuation at an advance detector. Wang et al. [13] presents an exhaustive service polling model in the intelligent traffic light control. This model adjusts the time of traffic light according to the arrival rate.

All the queuing models and polling system presented in the literature do not match reflect the real system of adaptive controlling in road traffic light intersection, most of the factors have not been taken into consideration : the deactivation of the server for random period the non-exhaustive service which is close to reality.

The objective of this paper is to model an intelligent traffic light that allows adjusting the duration of the green time according to the length of the two queues, taking into account the deactivation of a server. For modeling, we use a non-exhaustive polling model, which consists of two queues modeled by $M/M/1$ Binomial gated and multiple vacation services.

2 The polling model of traffic lights intelligent control system

2.1 Description of the system

Consider a two-phased vehicle actuated signal at an isolated intersection between two one-way streets. Let phase1 serves the S_1-S_3 flow and phase2 serves the S_2-S_4 flow, as illustrated in Fig. 1. The specific designs is the signaled intersection led with sensors and adaptive cameras, in all direction 100m away, collect data (number of vehicles, speeds), and transmit them to control boxes of traffic lights, in which implemented software can adjust the green phase intelligently according to the real state of intersection in order to reduce congestion. Each phase should take the maximum value of flow in it that is East west and west east

use the same phase and the same green time therefor, are considered as one group served and receive the right-of-way simultaneously. The traffic lights alternate between green and red, which corresponds to a vacation service policy. The green period is considered a service period, and the red period is the vacation period of the server for the processed queue, respecting the maximum and minimum values of the durations of the traffic lights.

2.2 Modeling an isolated controlled intersection by a polling system

In mathematics, we can model an intersection controlled as a polling system consisting of multiple queues and a single server visiting each of these queues in some order. We refer to the green period as visit time. Similarly, the red period as intervisit time. In our model, the duration of yellow is negligible, so we consider a system of polling with zero switch-over time. The multi-queue polling model system decompose into two queues Q_i $i = \overline{1,2}$ modeled by queueing system $M/M/1$ with non-exhaustive (Binomial Gated service) with multiple vacation service presented in Fig.2. The server is the light, the stop line is the service station. Service time for a user is the time taken to pass the stop line during the green light. Vehicles are served according to FIFO service policy. Let the arrival rate of vehicles and service rate of the each Q_i be λ_i and μ_i for $i = \overline{1,2}$. We assume that the service rate of each queue is the same, $\mu = \mu_1 = \mu_2$. The flow ratio of each Q_i is $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ $i = \overline{1,2}$. The server takes an exponential duration vacation R of parameter θ . We use a positive integer ($k = \mu * G_{max}$) as upper limit for the number of customers served during a service period. The number of customers served in a service period is Binomial random variable with parameter $p_i, p_i \in]0; 1]$ $i = \overline{1,2}$. At the polling moment each vehicle in the system will be served during the service period with probability p_i $i = \overline{1,2}$ and stay in the queue for the next service period with probability $(1 - p_i)$ $i = \overline{1,2}$. We define Q_{ib} $i = \overline{1,2}$ as the number of customers present in the Q_i $i = \overline{1,2}$ at the beginning of service period. The number of customers to be served during the service period, denoted by ϕ_i such as $\phi_i = \min \{Q_{ib}; k\}$ $i = \overline{1,2}$. The server, chooses to visit the longest queue, say Q_1 , and serves each customers of ϕ_1 present at its arrival with a probability p_1 . At the end of the visit period, if the length of the queue in service (green phase) still exceed the length of the second queue Q_2 (red phase), the controller extends the green period by an interval time of length $(G_{max} - \phi_1/\mu)$, else the server stops serving Q_1 and switches to Q_2 . When the server returns from a vacation serves only those customers present at that instant. If no customers are in the system the server starts an other vacation and keeps taking vacations until it the duration of green phases reach the maximum.

2.3 Calculate the system's performance

Related to the work presented by Tian et al. [11], we calculate the system's performance by using the stochastic decomposition. In most queueing system with vacation, the stationary queue length or the stationary waiting time can be decomposed into the sum of two independent random variable, one is the queue length of the classical system and the other is the delay due to the effect due to the vacation, $E[Q_i] = E[Q_i^{M/M/1}] + E[Q_i^V]$, with $\rho_i < 1$.

- Mean total number of customer in the Q_i $i = \overline{1,2}$.

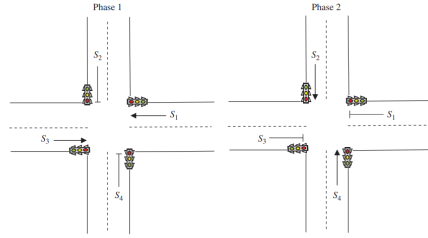


FIGURE 1 – A two-phase, intersection.

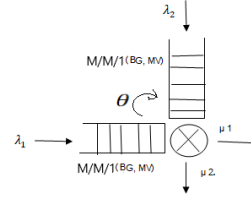


FIGURE 2 – Two Queues Polling System Model.

$$E[Q_i] = \frac{(1 - \rho_i) + (1 + p_i \rho_i)}{(1 + \rho_i)} \left(\frac{p_i \rho_i^2}{1 - p_i \rho_i} + \frac{\lambda_i}{\theta} + \frac{\lambda_i p_i \rho_i}{\theta(1 - p_i \rho_i)} \right)$$

- Mean waiting time of an arbitrary customer in the Q_i $i = \overline{1,2}$: $E[W_i] = \frac{E[Q_i]}{\lambda_i}$ $i = \overline{1,2}$.

2.4 Numerical results and comparison with an $M/M/1(G, SV)$ polling model

In this part we first present numerical results of $M/M/1(BG, MV)$ polling system's performance measures for a set of parameter values, tables 1-2. The results are then compared with those of $M/M/1$ gated service and single vacation polling system fig.3. We obtain $E[Q]$ and $E[W]$ by taking $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ and $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

Tab1. : Numerical results for $\theta = 5, \mu_1 = \mu_2 = 6; p_2 = 0.5, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5$.

ϕ_1	p_1	$E[Q]$	$E[W]$
500	0.002	2.5854	0.2872
50	0.02	2.665	0.2961
20	0.05	5.6352	0.6261
5	0.2	23.7070	2.6341
2	0.5	26.7019	2.9668

The choice of the values of λ_i and μ_i $i = \overline{1,2}$ approximates the real traffic situation, where $\rho_i < 1$ $i = \overline{1,2}$ represents the intensity of the traffic of each queue. In Table 1, we set that the maximum green time to $G_{max} = 80s$, so $k=500$ V. In other words, p_1 have more than 0.002. We vary the values of p_1 according to the number of customers to serve during a service period of a queue. We see that serving the longest queue for each service period i.e. set the longer green light time to keep the road open, decreases the average waiting time of customers in the queue also decreases the queue length of the system.

Tab2. : Numerical results for $\theta = 5, \mu_1 = \mu_2 = 6; p_1 = 0.02; p_2 = 0.1$ we take $\lambda_2 = \lambda_1$

$\lambda_1 = \lambda_2$	$E[Q_1]$	$E[W_1]$	$E[Q_2]$	$E[W_2]$
5	1.0261	0.2052	1.1426	0.22852
7	1.4445	0.2063	1.6525	0,2360
10	2.0769	0.20769	2.4625	0.24625
20	4.2161	0.2108	5.6154	0.2807

For the table 2, we fixe p_1 to 0.02 and p_2 to 0.1, then we get the mean queue length and mean waiting time for each queue Q_i $i = \overline{1,2}$ with different values of λ_i $i = \overline{1,2}$. The numerical results show that for values of ρ_i around 1, i.e. the case where the traffic is intense, the model achieves its goal of balancing mean queue length, there is a slight difference between the performance of the two queues,so the traffic stat stabilizes .

We compare our model performances with the $M/M/1$ Gated service with single vacation polling model performances, in which the server takes a single vacation after each service period. Let $E[Q_i]$ denote the mean number of customers in each Q_i $i = \overline{1,2}$, and $E[W_i]$ the mean waiting time of an arbitrary customer in each Q_i $i = \overline{1,2}$. The mean expected queue from the Little law : $E[Q_i] = E[W_i]\lambda_i$ $i = \overline{1,2}$. Considering the condition stability $\rho_i < 1$, $E[W_i]$ given by :
$$E[W_i] = \frac{p_i \rho_i}{\mu_i(1 - p_i \rho_i)} + \frac{\lambda_i}{\theta^2(\theta/(\lambda_i + \theta) + \lambda_i/\theta)} + \frac{\theta^2 + \theta \lambda_i + \lambda_i^2}{\mu_i(1 - p_i \rho_i)} \rho_i$$

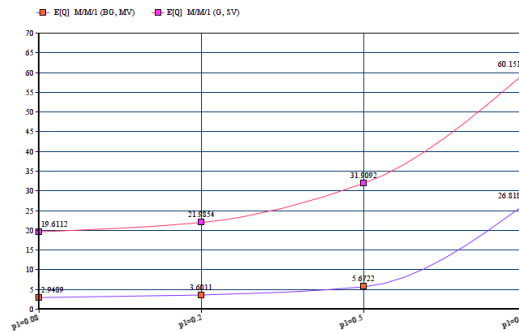


FIGURE 3 – $E[Q]$ for the $M/M/1$ (G, MV) and non-exhaustive $M/M/1$ (BG, MV) polling system $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5, \theta = 5, \mu_1 = \mu_2 = 7; p_2 = 0.5$.

Figure 3 shows both for the non-exhaustive service $M/M/1$ (BG, MV) and $M/M/1$ (G, SV) polling models, the values of the mean number of customers in the system $E[Q]$ as a function of p_1 . For different values of p_1 we can show that $E[Q]$ of $M/M/1$ (BG, MV) model is smaller than $E[Q]$ $M/M/1$ (G, SV) polling model with a significant value and keep the system stable including the mean waiting time of an arbitrary customer in the system. the graph also shows that the mean queue length decreases with a small value of p_1 which corresponds to serving the maximum customer of the longest queue.

3 Conclusion

In this paper we are presented a new use of non-exhaustive Binomial gated and multiple vacations service polling system in the intelligent traffic lights control, in order to improve the road capacity and reduce the delay of vehicles. We find the relationship that the the longer mean time delay because of the serving the maximum customer of the longest queue. So the longer mean time delay means should set longer green light time to keep the road open.

The results shows that our model can relieve the traffic congestion and improve the capacity of intersections.

References

- [1] Allsop, R. E. : Delay at a fixed time traffic signal—i : Theoretical analysis. *Transportation Science* 63, 260–285 (1972).
- [2] Altman, E. and S. Foss : Performance bounds and pathwise stability for generalized vacation and polling systems(1993).
- [3] Boon, M. A., R. D. van der Mei, and E. M. Winands : Applications of polling systems. *Surveys in Operations Research and Management Science* 16 (2), 67–82 (2011).
- [4] Boon, M. A. A. 2011. *Polling Models : From Theory to Traffic Intersections*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology(2011).
- [5] Boxma, O. J. and J. A. Weststrate : Waiting times in polling systems with markovian server routing. In *Messung, Modellierung und Bewertung von Rechensystemen und Netzen*, pp. 89–104. Springer(1989).
- [6] Dorsman, J.-P. L., S. C. Borst, O. J. Boxma, and M. Vasiou : Markovian polling systems with an application to wireless random-access networks. *Performance Evaluation* 85, 33–51(2015).
- [7] Doshi, B. T. : Queueing systems with vacations—a survey. *Queueing systems* 1 (1), 29–66(1986).
- [8] Fu, L. and B. Hellinga : Delay variability at signalized intersections. *Transportation Research Record* 1710 (1), 215–221(2000).
- [9] Pacheco, A., M. L. Simoes, and P. Milheiro-Oliveira Queues with server vacations as a model for pretimed signalized urban traffic. *Transportation Science* 51 (3), 841–851(2017).
- [10] Takagi, H. : Queuing analysis of polling models. *ACM Computing Surveys (CSUR)* 20 (1), 5–28(1988).
- [11] Tian, N. and Z. G. Zhang : *Vacation queueing models : theory and applications*, Volume 93. Springer Science and Business Media(2006).
- [12] Viti, F. and H. J. Van Zuylen : Probabilistic models for queues at fixed control signals. *Transportation Research Part B : Methodological* 44 (1), 120–135(2010).
- [13] Wang, M. Y., H. W. Ding, Y. F. Zhao, Z. G. Liang, and L. Z. Zhu : The application of the exhaustive polling theory in intelligent traffic system. In *MATEC Web of Conferences*, Volume 44, pp. 02013. EDP Sciences(2016).
- [14] Wang, X. B., K. Yin, and H. Liu : Vehicle actuated signal performance under general traffic at an isolated intersection. *Transportation research part C : emerging technologies* 95, 582–598 (2018).
- [15] Yang, Z., Z. Liu, Y. Sun, and H. : Ding Analysis of asymmetric polling control system in wireless sensor networks. *International Journal of Performability Engineering* 15 (10), 2783 (2019).



Quasi-stationary probability distribution for the SIR epidemic model

Fahima Ouicher*¹ and Tewfik Kernane²

¹Department of Probability and Statistics, Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology USTHB, Algeria.,
fouicher@usthb.dz

²Department of Probability and Statistics, University of Sciences and Technology USTHB, Algiers, Algeria,
tkernane@usthb.dz

Abstract : We propose two new approximations to the joint quasi-stationary distribution (QSD) of the number susceptible and infected individuals in the SIR (Susceptible-Infected-Recovered) stochastic epidemic model and we derive the marginal quasi-stationary distribution of the infected individuals. These two approximations depend on the basic reproduction number \mathcal{R}_0 and give a positive probability of the quasi-stationary distribution to all the transient states. Numerical comparisons are presented to check the accuracy of these approximations.

Keywords : SIR epidemic model ; Quasi-stationary distribution ; Basic reproduction number

1 Introduction

Le modèle épidémique stochastique SIR (Susceptible- Infecté-Rétablis), où la population totale est fermée et mélangée de manière homogène est divisée en trois classes la classe des susceptibles notée S (individus exposés mais sains), la classe des infectés notée I (individus infectés et infectieux) et la classe des éliminés notée R (infectés qui quittent l'état d'infection par immunisation, décès ou mis en quarantaine). Pour ce modèle, il y a trois types de paramètres d'intérêt, le taux d'infection λ , le taux de rétablissement μ et le taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 = \frac{\lambda}{\mu}$, qui s'interprète comme étant le nombre moyen d'individus à qui un individu infecté transmet la maladie, durant toute sa période d'infection, il permet de quantifier la virulence d'une maladie infectieuse grave et de prévoir l'évolution de l'épidémie dans le temps. Nous nous intéressons au modèle SIR modélisé par une chaîne de Markov bidimensionnelle en temps continu $X = \{I(t), S(t), t \geq 0\}$, avec un espace d'états $\mathbb{S} = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 0 \leq i \leq m+n, 0 \leq j \leq \min(n, m+n-i)\}$ et l'état initial $\{(I(0), S(0)) = (m, n)\}$ pour $m \geq 1$ et $m+n = N$. Il y a seulement trois transitions, les deux premières transitions sont correspondantes aux deux événements, une infection d'un

*Corresponding Author

susceptible et guérison d'un infecté et aucun changement d'état associé à la troisième transition. La matrice de générateur infinitésimal Q , est donné ci-dessous :

$$q_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{si } (i', j') = (i + 1, j - 1), \\ \mu_i, & \text{si } (i', j') = (i - 1, j), \\ -q_{(i,j)}, & \text{si } (i', j') = (i, j), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $q_{(i,j)} = \lambda_{ij} + \mu_i$ pour $(i, j) \in \mathbb{S}$, et $\lambda_{0j} = \lambda_{i0} = \mu_0 = 0$

D'autre part, le modèle SIR-CTMC a un espace d'état bidimensionnel \mathbb{S} où ce dernier peut être décomposé en l'ensemble d'états absorbants S_A et l'ensemble des états transitoires $S_T = \{(i, j); 1 \leq i \leq m+n, 0 \leq j \leq \min(n, m+n-i)\}$ peut être exprimé en termes de niveaux $S = \cup_{j=0}^n I(j)$, où le $j^{\text{ème}}$ niveau correspond aux états avec j susceptibles présents, c'est-à-dire $I(j) = \{(i, j); 1 \leq i \leq m+n-j\}$ pour $0 \leq j \leq n$ et Le cardinal de $I(j)$ est $|I(j)| = m+n-j$ pour $0 \leq j \leq n$. Pour une utilisation qui suit, nous donnons en détail la forme structurée du générateur infinitésimal Q de X :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{S_T, S_T} & Q_{S_T, S_A} \\ 0_{(n+1) \times J(m,n)} & 0_{(n+1) \times (n+1)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où $J(m, n) = 2^{-1}(n+1)(2m+n)$ est le cardinal de l'ensemble d'états transitoires S_T .

La matrice Q_{S_T, S_T} est défini comme suite :

$$Q_{S_T, S_T} = \begin{pmatrix} Q_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ Q_{10} & Q_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{n-1, n-2} & Q_{n-1, n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_{n, n-1} & Q_{nn} \end{pmatrix},$$

Les blocs $Q_{(j,j-1)}$ pour $1 \leq j \leq n$, correspondent aux transitions dues aux infections, sont donnés sous la forme suivante

$$Q_{(j,j-1)} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2,j} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{m+n-j-1, j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{m+n-j, j} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, les blocs Q_{jj} pour $0 \leq j \leq n$, sont associés aux transitions dues aux récupérations, sont définis comme suit

$$Q_{(j,j)} = \begin{pmatrix} -q_{1,j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -q_{2,j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{m+n-j-1} & -q_{m+n-j-1, j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_{m+n-j} & -q_{m+n-j, j} \end{pmatrix}.$$

2 La distribution quasi-stationnaire du modèle SIR

Nous définissons maintenant Ψ la distribution quasi-stationnaire du modèle épidémique SIR-CTMC, notée par $\Psi = \{\Psi_{(i,0)}, \Psi_{(i,1)}, \dots, \Psi_{(i,n)}\}$, $1 \leq i \leq m+n-j$. Tels que

$$\Psi_{(i,j)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{I(t) = i | S(t) = j, I(t) > 0\}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m+n-j.$$

Comme l'ensemble des états absorbants est donné par $S_A = \{(0, j); 0 \leq j \leq n\}$, alors nous avons la probabilité $P\{S(t) = j, I(t) > 0\} = 1 - \sum_{j=0}^n P_{(0,j)}(t)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Psi_{(i,j)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{I(t) = i | S(t) = j, I(t) > 0\}, \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P\{(I(t), S(t)) = (i, j)\}}{1 - \sum_{j=0}^n P_{(0,j)}(t)}, \end{aligned}$$

enfin nous avons

$$\Psi_{(i,j)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{(i,j)}(t)}{1 - \sum_{j=0}^n P_{(0,j)}(t)}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m+n-j. \quad (2)$$

Cette dernière vérifie l'équation non linéaire (3),

$$Q_{S_T, S_T} \Psi_{(i,j)} = -\Psi_{(i,j)} \mu_1 \sum_{j=0}^n \Psi_{(1,j)}. \quad (3)$$

3 Les approximations de la distribution quasi-stationnaire proposées

Dans cette section nous fournissons nos deux nouvelles approximations qui sont inspirées des techniques développées pour le modèle épidémique SIS utilisés dans [4],

3.1 La première approximation de la distribution quasi-stationnaire

Soit $\Psi^0 = \{\Psi_{(i,0)}^0, \Psi_{(i,1)}^0, \dots, \Psi_{(i,n)}^0\}$ pour $1 \leq i \leq m+n-j$, la première approximation de la distribution quasi-stationnaire. Dans ce cas, on a $\mu_1 = 0$ et $\lambda_{ij} = \frac{\lambda ij}{N}$ pour $0 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m+n-j$. Le système d'équations différentielles (3) est simplifié en, $Q_{S_T, S_T}^0 \Psi_{(i,j)}^0 = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \Psi_{(i,j)}^0 &= \prod_{k=0}^{j-1} (-1)^j (Q_{j-k, j-k}^0)^{-1} Q_{j-k, j-k-1}^0 \Psi_{(i,0)}^0, \\ &\text{pour } 1 \leq i \leq m+n-j \text{ et } 0 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (4)$$

D'après l'équation (1) du système précédent, on obtient :

$$(\Psi_{(i,0)}^0)^t = \Psi_{(1,0)}^0 \times e'_{(m+n)}, \quad (5)$$

où $e_{(m+n)}$ est un vecteur colonne de 1 à l'ordre $(m+n)$. Puis à l'aide de la propriété $\sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{m+n-j} \Psi_{(i,j)}^0 = 1$, nous avons :

$$\Psi_{(1,0)}^0 = \left((m+n) + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{m+n-j} \left[\prod_{k=0}^{j-1} (-1)^j \left(\mathcal{Q}_{j-k,j-k}^0 \right)^{-1} \mathcal{Q}_{j-k,j-k-1}^0 \right] \times e_{(m+n)} \right\} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Et après des calculs long, on obtient le produit matriciel $M_{(j-k,j-k-1)} = \left(\mathcal{Q}_{j-k,j-k}^0 \right)^{-1} \times \mathcal{Q}_{j-k,j-k-1}^0$

$$M_{s,s-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda_{1,s}}{q_{1,s}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2 \lambda_{1,s}}{q_{1,s} q_{2,s}} & -\frac{\lambda_{2,s}}{q_{2,s}} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_3 \mu_2 \lambda_{1,s}}{q_{1,s} q_{2,s} q_{3,s}} & -\frac{\mu_3 \lambda_{2,s}}{q_{2,s} q_{3,s}} & -\frac{\lambda_{3,s}}{q_{3,s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{\prod_{i=2}^{m+n-s-1} \mu_i \lambda_{1,s}}{\prod_{i=1}^{m+n-s-1} q_{i,s}} & -\frac{\prod_{i=3}^{m+n-s-1} \mu_i \lambda_{2,s}}{\prod_{i=2}^{m+n-s-1} q_{i,s}} & -\frac{\prod_{i=4}^{m+n-s-1} \mu_i \lambda_{3,s}}{\prod_{i=3}^{m+n-s-1} q_{i,s}} \\ 0 & -\frac{\prod_{i=2}^{m+n-s} \mu_i \lambda_{1,s}}{\prod_{i=1}^{m+n-s} q_{i,s}} & -\frac{\prod_{i=3}^{m+n-s} \mu_i \lambda_{2,s}}{\prod_{i=2}^{m+n-s} q_{i,s}} & -\frac{\prod_{i=4}^{m+n-s} \mu_i \lambda_{3,s}}{\prod_{i=3}^{m+n-s} q_{i,s}} \\ \dots & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & \\ \ddots & \vdots & \vdots & \\ \dots & -\frac{\lambda_{m+n-s-1,s}}{q_{m+n-s-1,s}} & 0 & \\ \dots & -\frac{\mu_{m+n-s} \lambda_{m+n-s-1,s}}{q_{m+n-s-1,s} q_{m+n-s,s}} & -\frac{\lambda_{m+n-s,s}}{q_{m+n-s,s}} & \end{pmatrix}.$$

$$M_{s,s-1} = \frac{s \mathcal{R}_0}{N} \times M'_{s,s-1}. \quad (7)$$

En substituant la relation (7) dans les relations (4) et (6), on obtient l'expression explicite pour la première approximation de la QSD conjointe

$$\Psi_{(1,0)}^0 = \left((m+n) + \sum_{j=1}^n j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^j \left\{ \sum_{i=1}^{m+n-j} \left[\prod_{k=0}^{j-1} M'_{(j-k,j-k-1)} \right] \times e_{(m+n)} \right\} \right)^{-1} \quad (8)$$

$$\left(\Psi_{(i,0)}^0 \right)^t = \Psi_{(1,0)}^0 \times e'_{(m+n)}, \quad 1 \leq i \leq m+n, \quad (9)$$

$$\Psi_{(i,j)}^0 = j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^{j-1} \prod_{k=0}^{j-1} M'_{(j-k,j-k-1)} \Psi_{(i,0)}^0, \quad 1 \leq i \leq m+n-j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (10)$$

La première approximation de la QSD marginale Ψ_i^0 pour $1 \leq i \leq m+n-j$ est donnée comme suit :

$$\Psi_i^0 = \left[\sum_{j=1}^n j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^j \prod_{k=0}^{j-1} M'_{(j-k, j-k-1)} e_{(m+n)} + e_{(m+n)} \right] \times \left((m+n) + \sum_{j=1}^n j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^j \left\{ \sum_{i=1}^{m+n-j} \left[\prod_{k=0}^{j-1} M'_{(j-k, j-k-1)} \right] \times e_{(m+n)} \right\} \right)^{-1}. \quad (11)$$

3.2 La deuxième approximation de la distribution quasi-stationnaire

Soit $\Psi^1 = \{\Psi^1_{(i,0)}, \Psi^1_{(i,1)}, \dots, \Psi^1_{(i,n)}\}$ pour $1 \leq i \leq m+n-j$, la deuxième approximation de la QSD. Pour trouver cette dernière, nous devons résoudre le système d'équations différentielles (3), mais cet fois ci en remplaçant $\mu_i = \mu i$ par $\mu_{i-1} = \mu(i-1)$. Donc,

$$\mathcal{Q}_{S_T, S_T}^1 \Psi^1_{(i,j)} = 0. \quad (12)$$

d'où la formule rcursive ci-dessous

$$\Psi^1_{(i,j)} = \prod_{k=0}^{j-1} (-1)^j (\mathcal{Q}^1_{j-k, j-k})^{-1} \mathcal{Q}^1_{j-k, j-k-1} \Psi^1_{(i,0)},$$

pour $1 \leq i \leq m+n-j$ et $1 \leq j \leq n$,

(13)

D'après l'équation (1) du système précédant, on a :

$$(\Psi^1_{(i,0)})' = \Psi^1_{(1,0)} \times e'_{(m+n)}, \quad (14)$$

où $e_{(m+n)}$ est un vecteur colonne de 1 à l'ordre $(m+n)$. D'après la propriété $\sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{m+n-j} \Psi^1_{(i,j)} = 1$, on a

$$\Psi^1_{(1,0)} = \left((m+n) + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{m+n-j} \left[\prod_{k=0}^{j-1} (-1)^j (\mathcal{Q}^1_{j-k, j-k})^{-1} \mathcal{Q}^1_{j-k, j-k-1} \right] \times e_{(m+n)} \right\} \right)^{-1}. \quad (15)$$

et le produit matriciel $P_{j-k, j-k-1} = (\mathcal{Q}^1_{j-k, j-k})^{-1} \mathcal{Q}^1_{j-k, j-k-1}$

$$P_{s, s-1} = \frac{s\mathcal{R}_0}{N} \times P'_{s, s-1}, \quad (16)$$

où,

$$P'_{s, s-1} = - \begin{pmatrix} 0_{(m+n-s)} & P''_{s, s} \end{pmatrix},$$

avec

$$P''_{s,s} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{N}{s\mathcal{R}_0}}{N} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{s\mathcal{R}_0 \left(1 + 2 \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right)}{2!N} & \frac{2}{\left(1 + 2 \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right)} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{s\mathcal{R}_0 \left(1 + 2 \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right) \left(2 + 3 \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right)}{2!2} & \frac{2!2}{\left(1 + 2 \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right) \left(2 + 3 \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right)} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{N(N-s-2)!}{\prod_{i=0}^{N-s-2} \left(\left(1 + \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right) i + \frac{s\mathcal{R}_0}{N} \right)} & \frac{2(N-s-2)!}{\prod_{i=1}^{N-s-2} \left(\left(1 + \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right) i + \frac{s\mathcal{R}_0}{N} \right)} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{N(N-s-1)!}{\prod_{i=0}^{N-s-1} \left(\left(1 + \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right) i + \frac{s\mathcal{R}_0}{N} \right)} & \frac{2(N-s-1)!}{\prod_{i=1}^{N-s-1} \left(\left(1 + \frac{s\mathcal{R}_0}{N}\right) i + \frac{s\mathcal{R}_0}{N} \right)} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(N-s-1)}{\left(N-s-2 + \frac{s\mathcal{R}_0(N-s-1)}{N}\right)} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(N-s-1)^2}{\left(N-s-2 + \frac{s\mathcal{R}_0(N-s-1)}{N}\right) \left(N-s-1 + \frac{s\mathcal{R}_0(N-s)}{N}\right)} & \frac{(N-s)}{\left(N-s-1 + \frac{s\mathcal{R}_0(N-s)}{N}\right)} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

En substituant la relation (16) dans les relations (13) et (15), nous avons l'expression explicite de la deuxième approximation pour la QSD conjointe

$$\Psi^1_{(1,0)} = \left((m+n) + \sum_{j=1}^n j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^j \left\{ \sum_{i=1}^{m+n-j} \left[\prod_{k=0}^{j-1} P'_{(j-k, j-k-1)} \right] \times e_{(m+n)} \right\} \right)^{-1} \quad (17)$$

$$(\Psi^1_{(i,0)})^t = \Psi^1_{(1,0)} \times e'_{(m+n)}, \quad 1 \leq i \leq m+n, \quad (18)$$

$$\Psi^1_{(i,j)} = j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^{j-1} \prod_{k=0}^{j-1} P'_{(j-k, j-k-1)} \Psi^1_{(i,0)}, \quad 1 \leq i \leq m+n-j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (19)$$

Alors, la distribution quasi-stationnaire marginale est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi_i^1 &= \left[\sum_{j=1}^n j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^{j-1} \prod_{k=0}^{j-1} P'_{(j-k, j-k-1)} e_{(m+n)} + e_{(m+n)} \right] \\ &\times \left((m+n) + \sum_{j=1}^n j! \left(-\frac{\mathcal{R}_0}{N} \right)^j \left\{ \sum_{i=1}^{m+n-j} \left[\prod_{k=0}^{j-1} P'_{(j-k, j-k-1)} \right] \times e_{(m+n)} \right\} \right)^{-1}. \quad (20) \end{aligned}$$

4 Simulation numérique

Maintenant, pour valider nos résultats, nous comparons les approximations APPROX 1 et APPROX2 qui sont données par les expressions (11) et (20) avec trois méthodes : la méthode REM, les probabilités simulées à l'aide de Gillespie qui sont obtenues à partir de 100000 itérations (PSIM) et aussi probabilités simulées par diffusion (PDIF) à partir de 10000 itérations. Et nous avons représenté ces résultats sous forme de graphiques :

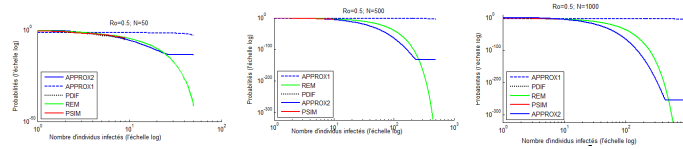


FIGURE 1 – $\mathcal{R}_0 = 0.5$ lorsque $N = 50, N = 500$ et $1000, \mu = 0, 1, S(0) = N - 1, R(0) = 0.$

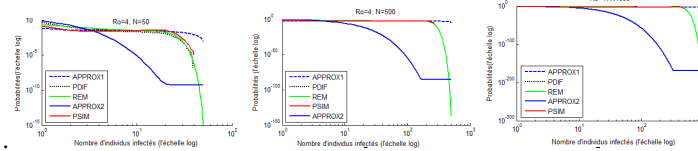


FIGURE 2 – $\mathcal{R}_0 = 4$ lorsque $N = 50, N = 500$ et $1000, \mu = 0, 1, S(0) = N - 1, R(0) = 0.$

5 Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons présenté une étude analytique et numérique basée sur la distribution quasi-stationnaire du modèle épidémique SIR, et notre attention s’est focalisé sur la création d’expressions explicites de cette dernière et de la calculer. Pour atteindre notre objectif nous avons proposé deux approximations qui nous ont permis de construire les expressions explicites de la distribution quasi-stationnaire conjointe et marginale . En suite, une comparaison numérique montre que la deuxième approximation (APPROX2) fournit une approximation satisfaisante lorsque $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et la première approximation (APPROX1) donne des résultats satisfaisants dans la région $\mathcal{R}_0 > 1.$

References

- [1] Allen. L.J.S. and Burgin. Amy M : Comparison of deterministic and stochastic SIS and SIR models in discrete time, Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, TX 79409-1042, USA, (Received 2 June 1998 ; received in revised form 16 August 1999 ; accepted 25 August 1999). *Mathematical Biosciences* 163 (2000) 1-33. DOI : 10.1016/S0025-5564(99)00047-4.
- [2] Artalejo .J.R ,Economou. A and Lopez-Herrero.M. J, Stochastic Epidemic Models With Random Environment : Quasi-Stationarity, Extinction and Final Size.*J Math Biol.* (2013 Oct) ;67(4) :799-831. DOI :10.1007/s00285-012-0570-5.
- [3] Artalejo .J.R and Lopez-Herrero. M.J, Quasi-stationary and ratio of expectations distributions : a comparative study. *Journal of Theoretical Biology,* (2010), 266 (2), pp.264-274. DOI : 10.1016/j.jtbi.2010.06.030.
- [4] Hernandez-Suarez. Carlos M, Castillo-Chavez. C, Montesinos Lopez. O and Hernandez-Cuevas. K. An application of queueing theory to SIS and SEIS epidemic models. *Mathematical Biosciences and Engineering* (October 2010) .Volume 7, Number 4. pp : 809-823. DOI :10.3934/mbe.2010.7.809.

- [5] Ouicher. F and Kernane.T. Quasi-stationary probability distribution for the SIR epidemic model (2021). International Journal of Biomathematics 2150084 (23 pages.)©World Scientific Publishing Company.doi :10.1142/S1793524521500844.



A Stochastic Differential Equation SIR Epidemic Model

Berkane Khelifa^{*1} and Abdeldjebbar Kandouci²

¹Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University of Saïda -Doctor Moulay Taher, Saïda, Algeria ,
khelifa.berkane@univ-saida.dz

²Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University of Saïda -Doctor Moulay Taher, Saïda, Algeria ,
kandouci1974@yahoo.fr

Abstract : The spread of Covid-19 behavior worldwide has a nonlocal ways of acting that resemble power law, fading memory of the Immune system, and crossover. Additionally, the uncertainty that come from the fact that the governments have no exact date because of the unknown behavior of some citizens will produce dynamics with noise. All these will model the spread of Covid-19 dynamic worldwide as fractional stochastic differential equations. In addition to the presence of the memory that produced a dynamic with fractional type, fractional stochastic differential equations have been shown that it represent the real-world behavior in a good way.

Keywords : SIR model ; Fractional Brownian motion ; Stochastic differential equations ; Basic reproduction number ; Hurst index.

1 Introduction

In this study we will look at a different stochastic perturbation. Instead of a standard Brownian motion we will use a fractional Brownian motion (fBm) B^H with Hurst parameters $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Has a long memory property, which roughly implies that the decay of stochastic dependence relative to the past is slow, This makes FBM a good choice as a model for long memory problems in the application.

The study of epidemic dynamics is crucial for understanding both the qualitative and quantitative aspects of the spread of infectious diseases. To build mathematical models reflecting the dynamic qualities of infectious illnesses, to study the dynamical behavior, and to do various simulations, it is based on the special property of population growth, the spread rules of infectious diseases, and the relevant social elements, etc. The study's findings may be used to forecast an infectious disease's propensity to spread, identify the major components that contribute to its spread, and find the best methods for stopping and containing its

*Corresponding Author

transmission. In contrast to traditional biometrics, dynamical approaches may demonstrate the infectious disease transmission rules from the illness's mode of transmission, allowing individuals to understand some generalized dynamic behavior of the transmission process. The modeling and original analysis might be made more realistic and trustworthy by combining statistical approaches, computer simulations, and dynamic methods. This would also improve our understanding of the transmission of infectious illnesses.

Epidemiological models are built around the Susceptible-Infected Recovered (SIR) model, which was first presented by Kermack and McKendrick [1] in 1927. They add the three compartments, S, I, and R, to the original Bernoulli [2] (1760) smallpox epidemiology model. It is still widely used in practice and has been expanded in a variety of ways, usually by adding more states, such as the possibility of death, the states associated with medical treatment [Djogbenou et al. (2020)], the states associated with multiple infectious diseases [Anderson, May (1991)], or the states associated with vital dynamics, such as exogenous birth and death processes, temporary immunity [Xu, Li (2018)].

In the widely studied SIR epidemic models (which is a special case of the Kermack and McKendrick model), the population is split into three epidemiological classes :

- **Susceptible** People who are susceptible but have not yet contracted the disease yet are at risk of doing so.
- **Infectious** Infected people who are contagious and can spread the virus to other (vulnerable) people while they are contagious. Individuals who are infected remain contagious for a period of time (randomly or fixed), after which they gradually recover from the virus.
- **Recovered/Removed** People who have recovered from or been removed from the sickness and are no longer disseminating it. Because they are entirely immune and no longer contagious, recovered persons are unable to get or spread the virus (or dead).

2 Deterministic Models

The deterministic compartmental model will be the first class of model that we look at. The term "deterministic" denotes that the initial conditions, underlying set of equations, and input parameter values are all that determine the predictions of these models. In this instance, we use a set of ordinary differential equations to simulate the spread of disease. The trajectories of these equations depend on variables like the initial infection rate, probability of infection per sexual act, average duration of a sexual partnership, etc.

3 SIR Models

One of the simplest models of the spread of infectious disease is the Susceptible, Infected, Recovered (sometimes Removed), or "SIR," model. In it, we have three "compartments" for the three different disease status classes, denoted S, I, and R, and the equations relate

to the flows among these compartments. The equations are :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta I \frac{S}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}$$

1. The disease spread in a closed environment, no emigration and immigration, and is no birth and death in population, so the total population remains a constant N , i.e. $S(t) + I(t) + R(t) = N$.
2. The infective rate of an infected individual is proportional to the number of susceptible, the coefficient of the proportion is a constant β , so that the total number of new infected at time t is $\beta S(t)I(t)$.
3. The recovered rate is proportional to the number of infected, and the coefficient of proportion is a constant γ . So that the recovered rate at time t is $\gamma I(t)$.

4 The Basic Reproduction Number and Disease Free Equilibrium

Basic reproduction number, denoted by \mathcal{R}_0 , represents the average number of secondary infectious infected by an individual of infectives during whose whole course of disease in the case that all the members of the population are susceptible. According to this meaning, it is easy to understand that if $\mathcal{R}_0 < 1$ then the infectives will decrease so that the disease will go to extinction; if $\mathcal{R}_0 > 1$ then the infectives will increase so that the disease can not be eliminated and usually develop into an endemic.

From the mathematical point of view, usually when $\mathcal{R}_0 < 1$, the model has only disease free equilibrium $E_0(S_0, 0)$ in the SI plane, and E_0 is globally asymptotically stable; when $\mathcal{R}_0 > 1$, the equilibrium becomes unstable and usually a positive equilibrium $E^*(S^*, I^*)$ appears. E^* is called an endemic equilibrium and in this case it is stable. Hence, if all the members of a population are susceptible in the beginning, then $\mathcal{R}_0 = 1$ is usually a threshold whether the disease go to extinction or go to an endemic.

5 A stochastic SIR model

We consider a closed population of individuals who belong to one of three classes, susceptible, infected or recovered (S,I,R). We want to define this in such a way that in the limit $N \rightarrow \infty$ this becomes the deterministic model defined in Section 3. Birth and death rates are set equal to μ , and these events are linked, so that the total population $N = S + I + R$ remains constant, then the differential equations which describe the spread of the disease

are :

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \mu N - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -\mu R(t) + \gamma I(t).\end{aligned}\tag{1}$$

with initial values $S_0 + I_0 = N$. N is the total size of the population amongst whom the disease is spreading.

- Here μ is the per capita death rate, and γ is the rate at which infected individuals become cured, so $1/\gamma$ is the average infectious period.

This is one of the simplest possible epidemic models and because it is so simple it and its variants are commonly studied.

The basic reproduction number \mathcal{R}_0 . This is the expected number of secondary cases produced by a single newly infected individual entering a disease-free population at equilibrium. In such a situation each newly infected individual remains infectious for time $1/(\mu + \gamma)$ and during this period infects βN of the N susceptibles present. Hence

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\mu + \gamma}.\tag{2}$$

6 Fractional Brownian motion

The fractional Brownian motion (fBm) is a suitable generalization of standard Brownian motion, it is the most known process which is not a semi-martingale. It is the only Gaussian self similar stationary process with long-range dependence property. Due to these interesting properties it enjoyed success as a modeling tool in many field of applications including telecommunications, turbulence and finance, the demand to stochastic calculus with respect to fBm are raised. This process was introduced by Kolmogorov [4] and studied later by Mandelbrot and Van Ness [5] who provided an integral representation of fBm with respect to a standard Brownian motion over a real line time interval.

Définition 6.1. *The fractional Brownian motion $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ with Hurst index $H \in (0, 1)$ defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is a continuous centered Gaussian process, starting from zero, with covariance*

$$R^H(s, t) = \frac{1}{2}[t^{2H} + s^{2H} + |t - s|^{2H}], \quad s, t \geq 0,$$

verifying :

- $B_0^H = 0$, a.s,
- $E(B_t^H)^2 = t^{2H}$,
- B^H has a stationary increments.

Remarque 6.1. *We have :*

- For $H = \frac{1}{2}$, $R^{\frac{1}{2}}(s, t) = t \wedge s$, then B^H restricts to a standard Brownian motion.
- For $H = 1$, B_t^H and ηt have the same probability distribution, where $\eta \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

7 Long and short range dependence

Définition 7.1. A stationary sequence $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ exhibits long-range dependence or short range dependence if $\rho(n) = \text{Cov}(X_1, X_n)$ satisfies :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty \quad \text{or} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) < \infty,$$

respectively.

Remarque 7.1. If a stationary sequence $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ is long-range dependence, then the covariance function slowly decays as a power law when n tends to infinity in the sense that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} = 1,$$

where c is a constant and $\alpha \in (0, 1)$.

Proposition 7.1. (Tudor[3]).

A fractional Brownian motion is long range dependence if $H > \frac{1}{2}$ and short range dependence if $H < \frac{1}{2}$.

8 Stochastic Differential Equation SIR Model

We let $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ be a complete probability space with a filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ satisfying the usual conditions and we let B_t^H be a scalar fractional Brownian motion (fBM) defined on the probability space.

Let us now consider the second equation of (1). To establish the stochastic differential equation (SDE) model, we naturally re-write this equation in the differential form

$$dI(t) = [\beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t)]dt. \quad (3)$$

Here $[t, t + dt)$ is a small time interval and we use the notation $d\cdot$ for the small change in any quantity over this time interval when we intend to consider it as an infinitesimal change. Now suppose that some stochastic environmental factor acts simultaneously on each individual in the population.

In this case β changes to a random variable $\tilde{\beta}$. More precisely each infected individual makes

$$\tilde{\beta}dt = \beta dt + \sigma dB^H(t).$$

We replace βdt in equation (3) by $\tilde{\beta}dt = \beta dt + \sigma dB^H(t)$ to get

$$dI(t) = S(t)I(t)(\beta dt + \sigma dB^H(t)) - (\mu + \gamma)I(t)dt. \quad (4)$$

Note that βdt now denotes the mean of the stochastic number of potentially infectious contacts that an infected individual makes with another individual in the infinitesimally small time interval $[t, t + dt)$. Similarly, the first equation of (1) becomes another SDE.

That is, the deterministic SIR model (1) becomes the Itô SDE

$$\begin{aligned} dS(t) &= [\mu N - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t)]dt - \sigma S(t)I(t)dB^H(t), \\ dI(t) &= [\beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t)]dt + \sigma S(t)I(t)dB^H(t). \end{aligned}$$

This SDE is called an SDE SIR model.

Given that $S(t) + I(t) = N$, it is sufficient to study the SDE for $I(t)$

$$dI(t) = I(t) \left([\beta N - \mu - \gamma - \beta I(t)]dt + \sigma(N - I(t))dB^H(t) \right). \quad (5)$$

With initial value $I(0) = I_0 \in (0, N)$. In the following sections we will concentrate on this SDE only.

References

- [1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. Contributions to the mathematical theory of epidemics. Part I. Proceedings of the Royal Society Series A, 115, 700-721, 1927.
- [2] D. Bernoulli, Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. Mém., Math. Phys. Acad. Roy. Sci. Paris, pp. 1 45, 1760.
- [3] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the theory of the brownian motion. Physical review, 36(5) :823, 1930.
- [4] A. N. Kolmogorov. Wiener'sche spiralen und einige andere interessante kurven in hilbertschen raum, cr (doklady). Acad. Sci. URSS (NS), 26 :115–118, 1940.
- [5] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. SIAM review, 10(4) :422–437, 1968.
- [6] Leonardo dos Santos Lima .Fractional Stochastic Differential Equation Approach for Spreading of Diseases. Entropy 2022, 24, 719. <https://doi.org/10.3390/e24050719>.
- [7] Tom´as Caraballo, Sami Keraani . Analysis of a stochastic SIR model with fractional Brownian motion. Stochastic Analysis and Applications, vol.36, 2018 issue 5
- [8] D.G. Kendall, Deterministic and stochastic epidemics in closed populations, Proc. Thirs. Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 4 (1956) 149
- [9] Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, and T. Zhang. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications. Springer Science Business Media, 2008.



Étude de la File M/G/1 avec Rappel Général et Politique de Rappel Constante dans le cadre d'un PDMP

Sara Meziani¹ and Tewfik Kernane^{1,2}

¹Department of Probability and Statistics, Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology USTHB, Algeria

Email adress: smeziani@usthb.dz

²Laboratory of Research in Intelligent Informatics and Applied Mathematics (RIIMA), University of Sciences and Technology USTHB, Algeria

Email adress: tkernane@usthb.dz

Résumé Dans ce travail, nous traitons la file d'attente M/G/1 avec rappel général et politique de rappel constante comme étant un processus de Markov déterministe par morceaux. En utilisant cette approche, nous déterminons les générateurs et les martingales associés au PDMP modélisant le modèle considéré.

MSC: 60K25 ; 68M20 ; 90B22

Mots clés : Mots Clés File d'Attente avec Rappel ; Processus de Markov Déterministe par Morceaux ; Générateur Infinitésimal ; Martingale

1 Introduction

Les processus de Markov déterministes par morceaux, dits en anglais *piecewise deterministic Markov processes (PDMP)*, ont été introduits par Davis [3] comme étant une famille générale des modèles stochastiques de non-diffusion. Ces processus de Markov consistent en un mix de mouvement déterministe et des sauts aléatoires. La classe des PDMPs fournit un cadre pour l'étude des problèmes d'optimisation, notamment dans les systèmes de files d'attente [1, 4]. Comme l'a montré Davis [3], puis détaillé dans Davis [4], un PDMP peut être déterminé explicitement à l'aide de trois paramètres \mathfrak{X}, λ, Q . Soit $X(t)$ un PDMP défini sur un espace des états \mathbb{E} qui est structuré comme suit. Soit K un ensemble dénombrable et $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction donnée. Pour chaque $v \in K$, M_v est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Alors, $\mathbb{E} = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \xi) : v \in K, \xi \in M_v\}$. On dénote par \mathcal{E} la σ -algèbre générée par les sous-ensembles de Borel de \mathbb{E} . L'état du processus sera noté $X(t) = (v(t), \xi(t))$ et les caractéristiques \mathfrak{X}, λ et Q sont définies comme suit :

- $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{X}_v, v \in K\}$ est un champ de vecteurs de Lipschitz continu localement dans \mathbb{E} avec des fonctions de flux $\phi_v(t, \xi)$ pour chaque $\xi \in M_v$.
- $\lambda : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est le taux de sauts. On suppose que cette fonction est mesurable et pour tout $x = (v, \xi) \in \mathbb{E}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_0^\varepsilon \lambda(\phi_v(t, \xi)) dt$ existe.

-
- $Q : (\mathbb{E} \cup \partial^* \mathbb{E}) \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$, avec $\partial^* \mathbb{E} = \cup_{v \in K} \partial^* M_v$ où $\partial^* M_v = \{\xi' \in \partial M_v : \phi_v(t, \xi) = \xi', \text{ pour tout } (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}$, une mesure de transition spécifiant les localisations post-saut avec $Q(x; \{x\}) = 0$. Notons que ∂M_v est la limite de M_v et $\partial^* M_v$ représente les points limites pour lesquels le flux sort de M_v .

Avec un choix commode de l'espace des états \mathbb{E} et des paramètres \mathcal{X} , λ et Q il est possible de modéliser presque tous les processus de non-diffusion trouvés dans la littérature. Plusieurs applications importantes ont été présentées dans les travaux de Davis [3, 4].

Dans ce travail, nous modélisons la file M/G/1 avec rappel général et politique de rappel constante par un PDMP au lieu de l'étudier en utilisant les méthodes traditionnelles telles que la chaîne de Markov incluse et la méthode de la variable supplémentaire. En effet, la modélisation par les PDMPs a été introduite pour analyser plusieurs modèles dans la littérature notamment les systèmes de files d'attente et les modèles épidémiologiques [1, 2, 5]. La première tentative pour étudier les files d'attente avec rappel général dans le contexte d'un PDMP a été faite par Meziani et Kernane [6] en étudiant la file M/G/1 avec la politique de rappel classique. En suivant cette nouvelle approche, les auteurs ont pu déterminer les quantités de performances en régime transitoire d'un modèle aussi complexe à travers les martingales associées. La fluidité de l'analyse du régime transitoire à travers la modélisation par les PDMPs de la file avec rappel classique considérée nous a incité à l'étudier également dans le cas de la politique de rappel constante.

La suite de ce travail est organisée comme suit. Dans la section 2, nous décrivons la file M/G/1 avec rappel général et politique de rappel constante, puis nous la modélisons par un PDMP. Le générateur infinitésimal associé est introduit dans la section 3. La section 4 présente les martingales associées. Enfin, nous finissons par une conclusion.

2 La File M/G/1 avec rappel constant en tant que PDMP

À première vue, on peut dire que l'étude de la politique constante à travers un PDMP est un cas particulier de l'étude de la politique classique. Cependant, le traitement de la dynamique des deux modèles a montré que l'étude de la politique constante est plus minutieuse.

Le modèle considéré est la file M/G/1 avec rappel général. Les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux λ . Chaque client entrant qui trouve le serveur occupé rejoint l'orbite. Les durées de service sont i.i.d. et ont la même fonction de distribution générale F . Après une période de temps aléatoire dans l'orbite, le client bloqué qui est en tête de l'orbite répète sa tentative d'obtenir le service. De ce fait, les clients bloqués rappellent pour le service suivant leur ordre d'entrée dans l'orbite. Les temps de rappel sont i.i.d. et ont la même fonction de distribution générale G . Les inter-arrivées, les durées de service et les temps de rappel sont supposés être mutuellement indépendants. Le modèle ainsi décrit est modélisé par le PDMP $(X(t) = (C(t), N(t)), (Y(t), R(t)); t \in \mathbb{R}^+)$ défini sur $\mathbb{E} = (e_0 \cup \mathbb{E}_0 \cup \partial^* \mathbb{E}_0) \cup (e_1 \cup \mathbb{E}_1 \cup \partial^* \mathbb{E}_1)$ tel que $e_0 = (0, 0, 0, 0)$, $\mathbb{E}_0 = \{(0, n, 0, r), n \in \mathbb{N}^*, r > 0\}$, $\partial^* \mathbb{E}_0 = \{(0, n, 0, 0), n \in \mathbb{N}^*\}$, $e_1 = \{(1, 0, y, 0), y > 0\}$, $\mathbb{E}_1 = \{(1, n, y, r), n \in \mathbb{N}^*, y > 0, r > 0\}$ et $\partial^* \mathbb{E}_1 = \{(1, n, 0, r), n \in \mathbb{N}^*, r > 0\}$.

Définissons la fonction de flux ϕ :

$$\phi(t, x) = \begin{cases} (0, n, 0, r - t) & \text{pour } x \in \mathbb{E}_0; \\ (1, 0, y - t, 0) & \text{pour } x = e_1; \\ (1, n, y - t, r - t) & \text{pour } x \in \mathbb{E}_1. \end{cases}$$

Nous donnons en outre quelques notations pour une utilisation ultérieure. Soit \mathcal{B} la σ -algèbre des ensembles de Borel \mathbb{R}_+^* . Nous définissons également la fonction suivante pour $A \in \mathcal{B}$

$$\mathbf{1}_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le même esprit que Meziani et Kernane [6], les trois mesures de transitions Q_1, Q_2 et Q_3 qui décrivent les sauts du PDMP $X(t)$ sont données comme suit.

Pour les états e_0 et $x \in \mathbb{E}_0$, la mesure de transition Q_1 associée à l'arrivée d'un nouveau client dans le système est donnée par

$$\begin{aligned} Q_1(e_0; \{1\} \times \{0\} \times A \times \{0\}) &= F(A); \\ Q_1(x; \{1\} \times \{n\} \times A \times B) &= F(A)\mathbf{1}_B(r). \end{aligned}$$

Où $A, B \in \mathcal{B}$.

Pour les états $x \in \partial^*\mathbb{E}_0$ et $A, B \in \mathcal{B}$, la mesure de transition Q_3 relative à un client bloqué qui rejoint le service est donnée par

$$Q_3(x; \{1\} \times \{n-1\} \times A \times B) = F(A)G(B).$$

Dans ce cas, lorsque un client quitte l'orbite pour accéder au service, un autre client bloqué sera en tête de l'orbite et un nouveau temps de rappel résiduel $r > 0$ ainsi que un nouveau temps service résiduel $y > 0$ seront générés à partir de G et F , respectivement, de sorte que la transition $(0, n, 0, 0) \rightarrow (1, n-1, y, r)$ se produise.

Pour les états e_1 et $x \in \mathbb{E}_1$ avec $A, B \in \mathcal{B}$, la mesure de transition Q_1 est déterminée comme suit.

$$\begin{aligned} Q_1(e_1; \{1\} \times 1 \times A \times B) &= \mathbf{1}_A(y)G(B); \\ Q_1(x; \{1\} \times n+1 \times A \times B) &= \mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_B(r). \end{aligned}$$

La transition $(1, 0, y, 0) \rightarrow (1, 1, y, r)$ correspond au client entrant de l'extérieur qui trouve le serveur occupé et l'orbite vide. Ainsi, il devient un client bloqué et un temps de rappel résiduel est généré immédiatement à partir de G . Le cas d'un serveur occupé et un orbite non vide est capturé par la transition $(1, n, y, r) \rightarrow (1, n+1, y, r)$.

Enfin, la mesure Q_2 pour les états $x \in \partial\mathbb{E}_1$ qui correspond à la transition $(1, n, y, r) \rightarrow (0, n, 0, r)$, lorsque le serveur devient inactif, est donnée par

$$Q_2(x; \{0\} \times \{n\} \times \{0\} \times A) = \mathbf{1}_A(r);$$

Où $A \in \mathcal{B}$.

Notons que, pour notre processus, le taux des sauts est exactement le taux d'arrivée λ .

Par conséquent, nous avons $\Lambda(t, x) = \int_0^t \lambda(\phi(s, x)) ds = \lambda t$.

3 Le Générateur Associé

Le générateur infinitésimal du PDMP décrivant le modèle de file d'attente considérée peut être déterminé comme suit. Partant d'un point initial $(0, 0, 0, 0, t)$ et après un temps infinitésimal h , le processus $X(t)$ passe vers l'état $(0, 0, 0, 0, t+h)$ avec la probabilité $1 - \lambda h$ et avec la probabilité λh il passe vers l'état $(1, 0, Y, 0, t+h)$ où Y est une variable aléatoire possédant la même distribution que F .

Ainsi,

$$E[f(X_t) - f(0, 0, 0, 0, t)] = (1 - \lambda h)f(0, 0, 0, 0, t+h) + \lambda h \int_0^\infty f(1, 0, y, 0, t+h) dF(y) - f(0, 0, 0, 0, t) + o(h).$$

En divisant par h nous trouvons

$$\frac{1}{h} E[f(X_t) - f(0, 0, 0, 0, t)] = \frac{1}{h} [f(0, 0, 0, 0, t+h) - f(0, 0, 0, 0, t)] + \lambda \left[\int_0^\infty f(1, 0, y, 0, t+h) dF(y) - f(0, 0, 0, 0, t+h) \right] + o(1)$$

Et comme $h \rightarrow 0$ nous obtenons

$$\mathcal{G}f(0, 0, 0, 0, t) = \lambda \int_0^\infty [f(1, 0, y, 0, t) - f(0, 0, 0, 0, t)] dF(y) + \frac{\partial}{\partial t} f(0, 0, 0, 0, t). \quad (1)$$

De la même façon, en partant des points de départ $(0, n, 0, r, t)$, $(1, 0, y, 0, t)$ et $(1, n, y, r, t)$, nous obtenons

$$\mathcal{G}f(0, n, 0, r, t) = \lambda \int_0^\infty [f(1, n, y, r, t) - f(0, n, 0, r, t)] dF(y) - \frac{\partial}{\partial r} f(0, n, 0, r, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(0, n, 0, r, t); \quad (2)$$

$$\mathcal{G}f(1, 0, y, 0, t) = \lambda \int_0^\infty [f(1, 1, y, r, t) - f(1, 0, y, 0, t)] dG(r) - \frac{\partial}{\partial y} f(1, 0, y, 0, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(1, 0, y, 0, t); \quad (3)$$

$$\mathcal{G}f(1, n, y, r, t) = \lambda [f(1, n+1, y, r, t) - f(1, n, y, r, t)] - \frac{\partial}{\partial y} f(1, n, y, r, t) - \frac{\partial}{\partial r} f(1, n, y, r, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(1, n, y, r, t). \quad (4)$$

Le générateur infinitésimal du processus $X(t)$ agit sur les fonctions $f(i, n, y, r, t) \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ qui sont différentiables par rapport à y, r et t pour tout i, n, y, r et t , qui satisfont les conditions limites

$$f(0, n, 0, 0, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(1, n-1, y, r) dF(y) dG(r); \quad (5)$$

$$f(1, n, 0, r) = f(0, n, 0, r); \quad (6)$$

et qui vérifient les conditions d'intégrabilité

$$E \left\{ \left| \int_0^\infty f(1, 0, y, 0, t) dF(y) - f(0, 0, 0, 0, t) \right| \right\} < \infty; \quad (7)$$

$$E \left\{ \left| \int_0^\infty f(1, n, y, r, t) dF(y) - f(0, n, 0, r, t) \right| \right\} < \infty; \quad (8)$$

$$E \left\{ \left| \int_0^\infty f(1, 1, y, r, t) dG(r) - f(1, 0, y, 0, t) \right| \right\} < \infty. \quad (9)$$

4 Les Martingales Associées

Les martingales associées au PDMP modélisant le modèle de file d'attente avec rappel général et politique de rappel constante sont présentées dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.1. Pour $0 \leq z_1 \leq 1, 0 \leq z_2 \leq 1, \gamma > 0$ et $\delta > 0$ la fonction

$$z_1^{C(t)} z_2^{N(t)} e^{-\gamma Y(t)} e^{-\delta R(t)} e^{\theta_{X(t)}(t)} \quad (10)$$

avec

$$\theta_{X(t)}(t) = \begin{cases} \lambda t + \ln(\omega_1) & \text{si } X(t) = e_0; \\ (\lambda - \delta)t + \ln(\omega_2) & \text{si } X(t) \in \mathbb{E}_0; \\ (\lambda - \gamma)t + \ln(\omega_3) & \text{si } X(t) = e_1; \\ (\lambda - \lambda z_2 - \gamma - \delta)t & \text{si } X(t) \in \mathbb{E}_0. \end{cases} \quad (11)$$

Où

$$\omega_1 = \frac{\gamma - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 + \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-\gamma}}{\gamma};$$

$$\omega_2 = \frac{\lambda z_2 + \gamma - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) + \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) e^{-(\lambda z_2 + \gamma)t}}{\lambda z_2 + \gamma};$$

$$\omega_3 = \frac{\lambda z_2 + \delta - \lambda z_2 \hat{\varphi}_R(\delta) + \lambda z_2 \hat{\varphi}_R(\delta) e^{-(\lambda z_2 + \delta)t}}{\lambda z_2 + \delta}.$$

est une martingale pour les états $x \in \mathbb{E}$, où

$$\varphi_S(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma y} dF(y); \gamma > 0 \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}_R(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta r} dG(r); \delta > 0.$$

Preuve. En définissant la fonction

$$f(i, n, y, r; t) = z_1^i z_2^n e^{-\gamma y} e^{-\delta r} e^{\theta_x(t)}, \quad (12)$$

où $\theta_x(t)$ est donnée par Eq.11, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f(0,0,0,0,t) &= \lambda \int_0^\infty \left[z_1 e^{-\gamma y} e^{\theta_{1,0,y,0}(t)} - e^{\theta_{(0,0,0,0)}(t)} \right] df(y) + \theta'_{(0,0,0,0)}(t) e^{\theta_{(0,0,0,0)}(t)} \\ &= \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-(\gamma-\lambda)t} - \lambda \frac{e^{\lambda t}}{\gamma} \left\{ \gamma - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 + \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-\gamma} \right\} \\ &\quad + \left[\lambda - \frac{\lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 \gamma e^{-\gamma}}{\gamma - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 + \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-\gamma}} \right] \times \frac{e^{\lambda t}}{\gamma} \left\{ \gamma - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 + \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-\gamma} \right\} \\ &= \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-(\gamma-\lambda)t} - \lambda \frac{e^{\lambda t}}{\gamma} \left\{ \gamma - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 + \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-\gamma} \right\} + \lambda \frac{e^{\lambda t}}{\gamma} \left\{ \gamma - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 + \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-\gamma} \right\} - \lambda z_1 \varphi_S(\gamma) \omega_3 e^{-(\gamma-\lambda)t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f(0,n,0,r,t) &= \lambda \int_0^\infty \left[z_1 z_2^n e^{-\gamma y} e^{-\delta r} e^{\theta_{(1,n,y,r)}(t)} - z_2^n e^{-\delta r} e^{\theta_{(0,n,0,r)}(t)} \right] dF(y) + \delta z_2^n e^{-\delta r} e^{\theta_{(0,n,0,r)}(t)} + z_2^n e^{-\delta r} \theta'_{(0,n,0,r)}(t) e^{\theta_{(0,n,0,r)}(t)} \\ &= \lambda z_1 z_2^n \varphi_S(\gamma) e^{-\delta r} e^{(\lambda-\lambda z_2^n-\gamma-\delta)t} + (\delta-\lambda) z_2^n e^{-\delta r} \omega_2 e^{(\lambda-\delta)t} + z_2^n e^{-\delta r} \left\{ (\lambda-\delta) - \frac{\lambda z_1 \varphi_S(\gamma) e^{-(\lambda z_2+\gamma)t}}{\omega_2} \right\} \times e^{(\lambda-\delta)t} \omega_2 \\ &= \lambda z_1 z_2^n \varphi_S(\gamma) e^{-\delta r} e^{(\lambda-\lambda z_2^n-\gamma-\delta)t} + (\delta-\lambda) z_2^n e^{-\delta r} \omega_2 e^{(\lambda-\delta)t} + z_2^n e^{-\delta r} (\lambda-\delta) e^{(\lambda-\delta)t} \omega_2 - z_2^n e^{-\delta r} \lambda z_1 \hat{\varphi}_S(\gamma) e^{-(\lambda z_2+\gamma)t} e^{(\lambda-\delta)t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f(1,0,y,0,t) &= \lambda \int_0^\infty \left[z_1 z_2 e^{-\gamma y} e^{-\delta r} e^{\theta_{(1,n,y,r)}(t)} - z_1 e^{-\gamma y} e^{\theta_{(1,0,y,0)}(t)} \right] dG(r) + \gamma z_1 e^{-\gamma y} e^{\theta_{(1,0,y,0)}(t)} + z_1 e^{-\gamma y} \theta'_{(1,0,y,0)}(t) e^{\theta_{(1,0,y,0)}(t)} \\ &= \lambda z_1 z_2 e^{-\gamma y} \hat{\varphi}_R(\delta) e^{(\lambda-\lambda z_2-\gamma-\delta)t} + (\gamma-\lambda) z_1 e^{-\gamma y} e^{(\lambda-\gamma)t} \omega_3 + z_1 e^{-\gamma y} \left\{ (\lambda-\gamma) - \frac{\lambda z_2 \hat{\varphi}_R(\delta) e^{-(\lambda z_2+\delta)t}}{\omega_3} \right\} e^{(\lambda-\gamma)t} \omega_3 \\ &= \lambda z_1 z_2 e^{-\gamma y} \hat{\varphi}_R(\delta) e^{(\lambda-\lambda z_2-\gamma-\delta)t} + (\gamma-\lambda) z_1 e^{-\gamma y} e^{(\lambda-\gamma)t} \omega_3 + z_1 e^{-\gamma y} (\lambda-\gamma) e^{-(\lambda z_2+\delta)t} \omega_3 - z_1 e^{-\gamma y} \lambda z_2 \hat{\varphi}_R(\delta) e^{(\lambda-\gamma)t} \omega_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f(1,n,y,n,t) &= \lambda \left[z_2 e^{\theta_{(1,n,y,r)}(t)} - e^{\theta_{(1,n,y,r)}(t)} \right] + \gamma e^{\theta_{(1,n,y,r)}(t)} + \delta e^{\theta_{(1,n,y,r)}(t)} + \theta'_{(1,n,y,r)}(t) e^{\theta_{(1,n,y,r)}(t)} \\ &= (\lambda z_2 - \lambda + \gamma + \delta) e^{(\lambda-\lambda z_2-\gamma-\delta)t} + (\lambda-\lambda z_2-\gamma-\delta) e^{(\lambda-\lambda z_2-\gamma-\delta)t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la propriété du générateur infinitésimal, Eq. (10) est une martingale pour le processus $X(t)$. \square

Afin d'énoncer le théorème suivant, nous définissons les variables aléatoires τ_0 et τ_1 comme étant les temps d'arrêt qui mettent fin à la période d'inactivité du serveur (lorsque $X(t) \in e_0 \cup \mathbb{E}_0$) et à la fin de la période d'occupation (lorsque $X(t) \in e_1 \cup \mathbb{E}_1$), respectivement.

Théorème 4.2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$, les processus

$$f(C(t), N(t), Y(t), R(t), t) - f(0, N(0), 0, R(0), 0) - \int_0^t \mathcal{G}f(0, N(s), 0, R(s), s) ds \quad \text{pour } t \in [0, \tau_0]; \quad (13)$$

et

$$f(C(t), N(t), Y(t), R(t), t) - f(1, N(0), Y(0), R(0), 0) - \int_0^t \mathcal{G}f(1, N(s), Y(s), R(s), s) ds \quad \text{pour } t \in [0, \tau_1] \quad (14)$$

sont des martingales.

preuve. Le résultat est obtenu en utilisant le résultat sur les martingales présenté dans la section 2.3 du chapitre 2 et le générateur infinitésimal donné par Eq.(1)-Eq.(4). Notons que, pour $X(t) \in e_0 \cup e_1$, $R(t) = 0$ lorsque $N(t) = 0$. \square

D'après le traitement du processus $X(t)$ dans le cadre d'un PDMP, les temps d'arrêt τ_0 et τ_1 sont donnés par les variables aléatoires $\min(A(t), R(t))$ et $Y(t)$, respectivement. La composante $A(t)$ correspond au temps d'inter-arrivée qui suit une distribution exponentielle de paramètre λ .

5 Conclusion

Un PDMP a été utilisé afin de décrire la dynamique du système de file d'attente M/G/1 avec rappel général et politique de rappel constante. Les martingales associées au modèle considéré ont été déterminées en utilisant le générateur infinitésimal. Ces résultats peuvent être exploités par la suite pour calculer le nombre moyen de clients dans l'orbite en régime transitoire. Une éventuelle étude pratique est également évoquée afin de mettre en évidence les résultats obtenus.

Références

- [1] BREUER, L. Continuity of the M/G/c queue. *Queueing Systems* 58, 4 (2008), 321–331.
- [2] CLANCY, D. SIR epidemic models with general infectious period distribution. *Statistics & Probability Letters* 85 (2014), 1–5.
- [3] DAVIS, M. H. Piecewise-deterministic Markov processes : A general class of non-diffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)* 46, 3 (1984), 353–376.
- [4] DAVIS, M. H. *Markov models & optimization*. Chapman & Hall, 1993.
- [5] GÓMEZ-CORRAL, A., AND LÓPEZ-GARCÍA, M. On SIR epidemic models with generally distributed infectious periods : Number of secondary cases and probability of infection. *International Journal of Biomathematics* 10, 02 (2017), 1750024.
- [6] MEZIANI, S., AND KERNANE, T. Extended generator and associated martingales for M/G/1 retrial queue with classical retrial policy and general retrial times. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* (2022), 1–8.



Modélisation et analyse d'un réseau de files d'attente fermé via les RdPSG

Sedda Hakmi¹, Lyes Ikhlef², and Ouiza Lekadir ^{*3}

¹LaMos Research Unit, Economic sciences Faculty, University of Bejaia, Algeria,
Sedda.hakmi@univ-bejaia.dz

²LaMos Research Unit, Faculty of Sciences, University of Algiers, Algeria,
l.ikhlef@univ-alger.dz

³LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
ouiza.lekadir@univ-bejaia.dz

Résumé Dans ce travail, nous montrons comment utiliser les réseaux de Petri (*RdP*) pour modéliser et évaluer les performances d'un réseau de Jackson fermé $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$. Pour les réseaux de Jackson fermés il y'a des résultats analytiques exactes, mais ils sont en fonction du nombre de stations que contient le réseau à étudier et du nombre de clients qui peuvent circuler dans ces stations donc ces résultats se compliquent en fur et à mesure que le nombre des stations et/ou le nombre de clients dans ces stations augmente. Ainsi, après une modélisation appropriée en utilisant le formalisme des *RdPSG* (Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés) qui s'adapte à la structure de ces réseaux de files d'attente, nous avons pu construire le graphe de marquage du modèle qui nous a permis de construire la chaîne de Markov qui lui est associée. A partir de cette chaîne de Markov la distribution stationnaire est calculée et elle nous a permis d'obtenir les indices de performances.

Mots clés : Réseaux de files d'attente ; Réseaux de Jackson fermés, Réseaux de Petri généralisés ; Chaînes de Markov à temps continu ; Mesures de performances.

1 Introduction

Dans la réalité des phénomènes d'attente se manifestent souvent sous différentes formes, on peut citer comme exemple : l'arrivée des voitures à une station de service, la vente de billets auprès d'un guichet, l'exécution des tâches dans un centre de calcul, ... etc. Pour étudier ou modéliser ces phénomènes on fait appel à la théorie des files d'attente. Cette théorie utilise des outils probabilistes pour étudier et modéliser le comportement des systèmes réels où l'attente intervient [9].

*Corresponding Author

La théorie des files d'attente, qui est relativement ancienne, connaît actuellement un regain d'intérêt dû à l'extraordinaire développement des réseaux de communication. Cette théorie est un domaine de la Recherche Opérationnelle qui permet de modéliser un système d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions.

Les premiers travaux sur la théorie des files d'attente ont été initiés par l'ingénieur danois A. A. Erlang dans le but de modéliser les réseaux téléphoniques. De nos jours, cette théorie intervient dans de nombreux autres domaines d'application et particulier dans les domaines industriels, économiques, systèmes informatiques, etc. Toutefois, la majorité des systèmes réels sont trop complexes pour qu'ils soient modélisés par une seule file d'attente, dans ce cas on fait appel aux RFA (réseaux de files d'attente)[1].

Un réseau de files d'attente est un ensemble de file d'attentes interconnecter. Le séjour d'un client dans ces réseaux consiste à parcourir une partie ou l'ensemble de toutes ces files d'attente. En effet, le besoin de l'outil des réseaux de files d'attente est apparu dans les années 70 pour étudier les performances des systèmes informatiques. Les réseaux de files d'attente sont classés en deux catégories principales : réseaux de files d'attente mono-classes et réseaux de files d'attente multi classes. Dans le cas de réseaux de files d'attente mono-classes, on fait également la distinction entre : réseaux de files d'attente ouverts et réseaux de files d'attente fermés [6]. Des solutions exactes existent pour une classe bien particulière de RFA connus sous le nom de réseaux séparables où à forme produit, cette classe de réseaux à forme produit est très restreinte mais des extensions lui sont établies depuis r16. Néanmoins, des difficultés sont rencontrées pour élargissement de ces extensions et cela suite à la difficulté de la nature des flux inter-stations de ces réseaux [2]. Bien sûr de nombreuses méthodes approximatives d'évaluation des performances des *RFA* non à forme produit ou ayant une forme produit difficile à exploiter ont été développées, cependant la complexité algorithmique de ces méthodes se complique au fur et à mesure que le nombre de stations ou le nombre de clients dans ces réseaux s'agrandissent.

Pour pallier à toutes ces difficultés d'analyse des RFA, dans ce travail on va proposer une approche de modélisation, d'analyse et d'évaluation de performances des RFA fermés basée sur l'un des formalismes des réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG).

Les réseaux de Petri (RdP) [4] constituent un outil mathématique de modélisation développés au début des années soixante par l'ingénieur allemand Carl Adam Petri dans sa thèse "Communication avec des automates" [8].

Dans ce travail nous allons analysé un réseau de files d'attente fermé $M/M/1//N \rightarrow M/M/1//N$ en utilisant le formalisme RdPSG (Réseaux de Petri stochastique généralisés) [5, 7]. En effet, cette approche proposée, va nous permettre de calculer facilement la chaîne de Markov à partir du graphe d'accessibilité par conséquent de calculer efficacement les mesures de performances. En outre, nous allons étudier l'effet des paramètres du réseau sur les indices de performance à travers quelques exemples numériques et ce en faisant appel au simulateur GRIF et les résultats seront qui seront obtenus seront interprétés.

2 Description du réseau fermé $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$

Considérons un réseau de files d'attente fermé à deux stations comme est illustré dans la FIGURE 1 suivante :

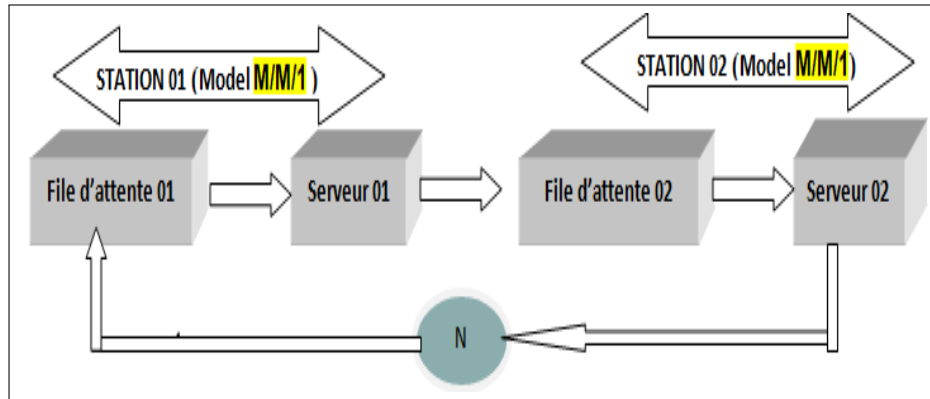


FIGURE 1 – Présentation d'un réseau de files d'attente fermé à deux stations.

Les clients arrivent à la File 1 selon un processus poissonnien de paramètre λ , si le serveur est libre le client est servi avec un taux μ_1 sinon il rejoint la file d'attente. Chaque client reçoit une partie de son service à la première station, puis accède à la seconde station pour continuer son service. A la fin du service du client dans la première station il rejoint la file d'attente de la deuxième station avec un processus poissonnien de paramètre λ . Si le serveur de la File 2 est libre, ce dernier sera servi sinon il patiente jusqu'à ce que le serveur 2 se libère. Lorsque les transitions immédiates ($t.service1$ et $t.service2$) sont sensibilisées en même temps on tire la transition ($t.service1$).

2.1 Modélisation du système $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$ via les RdPSG

Dans cette section nous modélisons le système $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$ par les RdPSG voir la figure 2 :

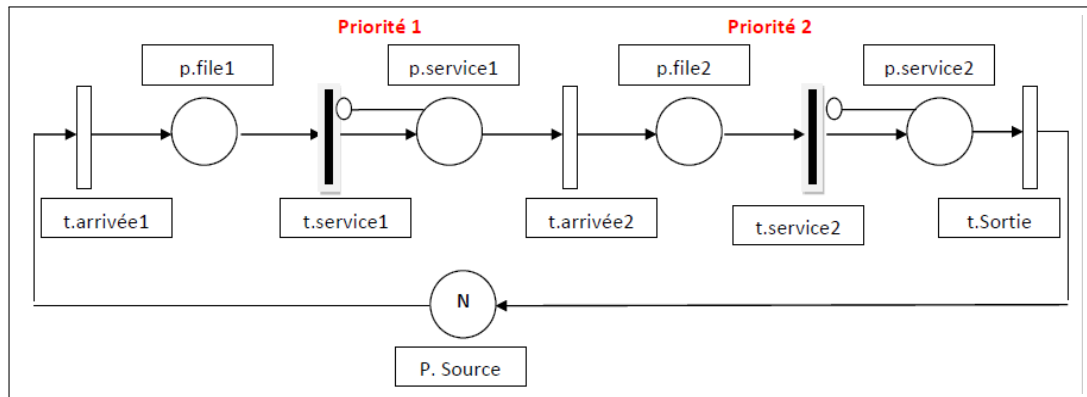


FIGURE 2 – Modélisation du réseau fermé $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$ via les RdPSG.

- $p.file1$: Représente la file d'attente 01 (sera abrégées en graphe de marquage par $PF1$;

- $p.file2$: Représente la file d'attente 02 (sera abrégées en graphe de marquage par $PF2$);
- $p.service1$: Représente le service du client émanant la file d'attente 01 (sera abrégées en graphe de marquage par $PS1$);
- $p.service2$: Représente le service du client émanant la file d'attente 02 (sera abrégées en graphe de marquage par $PS2$);
- $t.arrivée1$: Représente la transition temporisée dans la file d'attente 01 (sera abrégées en graphe de marquage par $t.arr1$);
- $t.arrivée2$: Représente la transition temporisée dans la file d'attente 02 (sera abrégées en graphe de marquage par $t.arr2$);
- $t.service1$: Représente la transition immédiates indiquant le début de service du client émanant de la file d'attente 01 (sera abrégées en graphe de marquage par $t.ser1$);
- $t.service2$: Représente la transition immédiates indiquant le début de service du client émanant de la file d'attente 02 (sera abrégées en graphe de marquage par $t.ser2$);
- $P.Source$: Contient les clients de la source (sera abrégées en graphe de marquage par PS);
- $t.Sortie$: Représente la transition temporisée indiquant la fin de service du client dans la station 2.

Pour l'accès des clients qui se trouvent dans la place $P.Source$ la transition temporisée $t.arrivée1$ doit être franchie, donc à son franchissement un jeton est retiré dans la place $P.Source$ et puis déposé dans la place $p.file1$, suite à la non disponibilité d'un jeton au niveau de la place $P.service1$ qui est contrôlé par l'arc inhibiteur; la transition immédiate $t.service1$ peut-être franchie. Au franchissement de cette dernière un jeton est retiré de la place $p.file1$ et puis déposé dans la place $p.service1$.

Pour l'accès à la file 2, la transition temporisée $t.arrivée2$ doit être franchie. Au franchissement de la transition $t.arrivée2$ un jeton est retiré de la place $p.service1$ et puis déposé dans la place $p.file2$, et du fait qu'il y a la non disponibilité de jeton dans la place $p.service2$ qui est aussi contrôlé par l'arc inhibiteur la transition immédiate $t.service2$ est franchie et à son franchissement un jeton est retiré de la place $P.file2$ est puis sera déposé dans la place $P.service2$ et à la fin, la transition temporisée $t.Sortie$ sera franchie avec le retrait d'un jeton depuis la place $p.service2$ et puis le déposé dans la place $P.source$ ainsi que le processus sera répété par le même déroulement.

2.2 Analyse des performances de notre réseau

Les indices de performances de notre modèle sont donnés comme suit :

- **Le taux moyen effectif des arrivées des clients à la file 1 :**

$$\bar{\lambda} = \sum_{j \in (SM_j)} \lambda(M_j) \pi_j; \quad (1)$$

- ▶ SM_j est l'ensemble des marquages où la transition $t.arr1$ est franchissable;
- ▶ $\lambda(M_j)$ est le taux de franchissement associé à la transition $t.arr1$ dans M_j .

- **Taux moyen effectif des arrivées des clients à la file 2 :**

$$\bar{\mu}_1 = \sum_{j \in (SM_j)} \mu_1(M_j) \pi_j; \quad (2)$$

- ▶ SM_j est l'ensemble des marquages où la transition $t.arr2$ est franchissable ;
- ▶ $\mu_1(M_j)$ est le taux de franchissement associé à la transition $t.arr2$ dans M_j .

- **Nombre moyen de clients dans la file 1 :**

$$\bar{\eta}_{file1} = \sum_j M_j(P_{file1}) \pi_j; \quad (3)$$

- ▶ $M_j(P_{file1})$ est le nombre de jetons dans la place P_{file1} dans le marquage ;
- ▶ M_j La somme dans cette formule se fait sur tous les marquages accessibles.

- **Nombre moyen de clients dans la file 2 :**

$$\bar{\eta}_{file2} = \sum_j M_j(P_{file2}) \pi_j; \quad (4)$$

$M_j(P_{file2})$ est le nombre de jetons dans la place P_{file2} dans le marquage M_j . La somme dans cette formule se fait sur tous les marquages accessibles.

- **Nombre moyen de clients dans le service 2 :**

$$\bar{\eta}_{service2} = \sum_j M_j(P_{service2}) \pi_j; \quad (5)$$

$M_j(P_{service2})$ est le nombre de jetons dans la place $P_{service2}$ dans le marquage M_j . La somme dans cette formule se fait sur tous les marquages accessibles.

- **Temps moyen d'attente dans la file 1 :** On application de la formule de little on aura le résultat suivant :

$$\bar{Q}_{file1} = \frac{\bar{\eta}_{file1}}{\lambda}; \quad (6)$$

- **Temps moyen d'attente dans la file 2 :** On application de la formule de little on aura le résultat suivant :

$$\bar{Q}_{service1} = \bar{Q}_{file2} = \frac{\bar{\eta}_{file2}}{\bar{\mu}_1}. \quad (7)$$

- **Nombre moyen de clients dans le système :**

$$\bar{\eta}_{système} = \bar{\eta}_{file1} + \bar{\eta}_{file2} + \bar{\eta}_{service1} + \bar{\eta}_{service2}. \quad (8)$$

- **Temps moyen d'attente dans le service 2 :** On application de la formule de little on aura le résultat suivant :

$$\bar{Q}_{service2} = \frac{\bar{\eta}_{service2}}{\bar{\mu}_2} \quad (9)$$

- **Nombre moyen d'attente dans le système :**

$$\bar{Q}_{système} = \bar{Q}_{file1} + \bar{Q}_{file2} + \bar{Q}_{service1} + \bar{Q}_{service2}. \quad (10)$$

Après l'obtention de ces indices de performances, nous avons étudié et évalué l'effet des paramètres du réseau sur ces indices de performance à travers des exemples numériques sur le réseau fermé $M/M/1 \rightarrow M/M/1$ de population de taille N quelconque et ce en variant les différents paramètres (taux d'arrivées, les taux des services des différentes files du réseaux (λ, μ_1, μ_2)) et en faisant appel au simulateur GRIF.

3 Conclusion

Dans ce travail, nous avons modélisé un réseau de files d'attente (RFA) fermé de deux stations en tandem $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$ via les RdPSG. Après l'obtention du modèle, nous avons construit sa chaîne de Markov à partir du graphe des marquages et nous avons calculé ses indices de performances. Nous avons par la suite évalué ces principaux indices de performances pour une taille quelconque N de la population du réseau et ce en variant les valeurs des différents paramètres.

Références

- [1] B. Baynat. Réseaux de Files d'Attente : Des chaînes de Markov aux Réseaux a Forme Produit. Eyrolles Edition, 2000.
- [2] A. Bouillard, A Buic, and C. Rovetta. Clones : CLOsed queueing Networks Exact Sampling. Performance Evaluation, 2015.
- [3] S. Bruel and G. Balbo. Computational Algorithms for Closed Networks. Operating and Programming Systems Series, New York, Oxford : North-Holland, 1980.
- [4] A.C. Geniet. Les réseaux de Petri. Un outil de modélisation, Spriger-Verlag Berlin, Edition 2, 2006.
- [5] S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani, Analysis of Priority Queue with repeated attempts using Generalized Stochastic Petri Nets. Miskolc Mathematical Notes : Vol. 20, No. 2, pp. 925-939 DOI : 10.18514/MMN.2019.2620, 2019.
- [6] J. R. Jackson, Networks of Waiting Lines, Operational Research, 5, 1957, 518–521.
- [7] J. Marsan, A. M. Balbo. G and G. Conte. A class of Generalized Stochastic Petri Nets for the Performances of multiprocessor Systems, In ACM TOCS, vol.2, May 1984.
- [8] C. A. Petri. Kommunikation mit automaten, Phd dissertatio, Institut für Instrumentelle Mathematik, University of Bonn, West Germany, 65-377, 1962.
- [9] A. Willing, A short introduction to queueing theory. Technical University Berlin, Telecommunication Networks Group, 1999.



Analyse des performances d'un système de gestion de stocks à produit périssable via les *RdPSG*

Lyes Ikhlef*¹ and Ouiza Lekadir²

¹Research Unit LaMOS, Faculty of Sciences, University of Algiers ,
l.ikhlef@univ-alger.dz

²Research Unit LaMOS, Exact sciences faculty, Bejaia University,
ouiza.lekadir@univ-bejaia.dz

Résumé Nous avons présenté une approche alternative pour la modélisation et l'analyse des systèmes de gestion de stocks à source finie, avec rappels et produit périssable basée sur les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (*RdPSG*). Une analyse qualitative et quantitative du système de gestion de stock étudié est obtenue. Après la modélisation de notre système on a construit le graphe des marquages qui nous a permis d'avoir la chaîne de Markov associé à notre modèle. Cette dernière elle nous a permis de calculer la distribution stationnaire, les indices de performances et le coût total de notre modèle. Finalement, des exemples numériques sont présentés pour illustrer l'efficacité de modèle proposé.

Mots clés : Gestion de stocks ; Produits périssables ; Réseaux de Petri généralisés ; Modélisation ; Politique (s, S)

1 Introduction

Les modèles stochastiques de gestion de stocks développés ces dernières années tentent de tenir compte des phénomènes de répétition d'appels qui exercent une influence non négligeable sur les indices de performances de certains systèmes réels. Ces systèmes sont appelés "systèmes de gestion de stocks avec rappels". Les systèmes de gestion des stocks avec rappels se caractérisent par la particularité qu'un client trouvant le niveau de stock égale à zéro ou le service est occupé est obligé de rejoindre l'orbite et de répéter sa demande après une période de temps aléatoire. Ce système a été introduit par J.R. Artalejo [1].

La difficulté majeure dans l'étude de ces systèmes est qu'on ne peut pas observer l'orbite et en particulier on n'arrive pas à faire la distinction entre un appel primaire (arrivée d'un client

*Corresponding Author

de l'extérieur) et un appel secondaire (arrivée d'un client de l'orbite). De plus, le processus des arrivées dépend à la fois des lois régissant les rappels ainsi que de la loi des arrivées primaires, ce qui prive le processus des arrivées de la propriété d'indépendance. C'est la raison pour laquelle il est très difficile, si ce n'est impossible, de déduire des formules analytiques exactes pour les distributions stationnaires et les caractéristiques de performance. Pour remédier à ce problème, des solutions sont obtenues par des méthodes d'approximation et des modèles tronqués.

La plupart des travaux considèrent des modèles avec source (population) infinie de clients et un flux des arrivées primaires poissonnien. Cependant, dans beaucoup de situations pratiques, il est important de prendre en compte le fait que le taux de génération des nouveaux appels primaires décroît quand le nombre de clients dans le système croît. Ceci peut se faire en considérant des modèles ayant une source finie de clients [2].

De nombreux produits sont sujets à la périssabilité, en raison d'une durée de stockage excessive où ils deviennent obsolètes. La périssabilité des produits a un grand impact sur l'étude des systèmes de gestion des stocks, ignorant ce caractère peut conduire à des erreurs significatives. Les systèmes de gestion des stocks à produit périssable ont introduit dans des nombreux articles et par plusieurs chercheurs, en raison de ces applications nombreuses et potentielles dans des domaines et des secteurs différents comme : l'alimentation, la chimie, les produits pharmaceutiques, la photographie, etc.

Les réseaux de Petri (*RdP*) constituent un outil mathématique de modélisation développés au début des années soixante par l'ingénieur Carl Adam Petri dans sa thèse. Par la suite, plusieurs extensions ont été portées à la définition initiale de *RdP* tels que : les réseaux de Petri stochastiques (*RdPS*) [3], les réseaux de petri stochastiques généralisés (*RdPSG*), les réseaux de petri temporels, etc. Le succès des (*RdPS*) est dû en particulier à leurs caractéristiques performantes dans l'analyse et l'évaluation analytique et pour la simulation du système étudié.

Les travaux sur les systèmes de gestion des stocks avec rappel et produit périssables restent assez limités [4, 5, 6]. Le travail de Sivakumar [6] qui consiste à analyser les performance d'un système de gestion des stocks avec rappel, à source finie et produit périssable, en utilisant les chaînes de Markov. Cet article s'inscrit dans le cadre de la modélisation et l'évaluation des performances des *RdPSG* associés aux systèmes de gestion de stocks à source finie, avec rappel et produit périssable. Le formalisme *RdPS* a été exploité, avec succès, pour étudier quelques systèmes de gestion des stocks. Dans ce contexte, nous pouvons mentionner les deux travaux :

- Le travail de Chen et al (2005). où, un système de gestion des stocks à source finie, politique (s, S) , demande stochastique, délais de réapprovisionnement constant a été étudié via les réseaux de Petri lots déterministes et stochastiques [7] ;
- Wang et al. (2017) traitent l'analyse d'un système de gestion des stock avec priorité par les *RdPSG* [8].

2 Description du modèle

On considère le système de gestion des stocks à produit périssable, à source finie et avec rappels que nous allons étudier et dont les hypothèses sont les suivantes (voir la figure 1) :

1. Le stock est géré par la politique (s, S) ;
2. La demande est stochastique telle que son processus d'arrivée est poissonnien de taux λ ;
3. Si une demande arrive alors que le stock n'est pas vide elle rejoint le service suivant une loi exponentielle de paramètre μ ;
4. Si une demande arrive alors que le stock est vide ou le service est occupé, elle rejoint l'orbite pour rappeler ultérieurement suivant une loi exponentielle de paramètre σ . La politique de rappel est classique.
5. La durée de vie des produits de ce système est exponentielle de paramètre γ ;
6. Lorsque le niveau du stock est inférieur strictement au seuil s , une commande de réapprovisionnement de quantité $Q = (S - s)$ sera lancée pour ramener le niveau de stock à S . Le délai d'approvisionnement du stock est exponentiel de paramètre β .

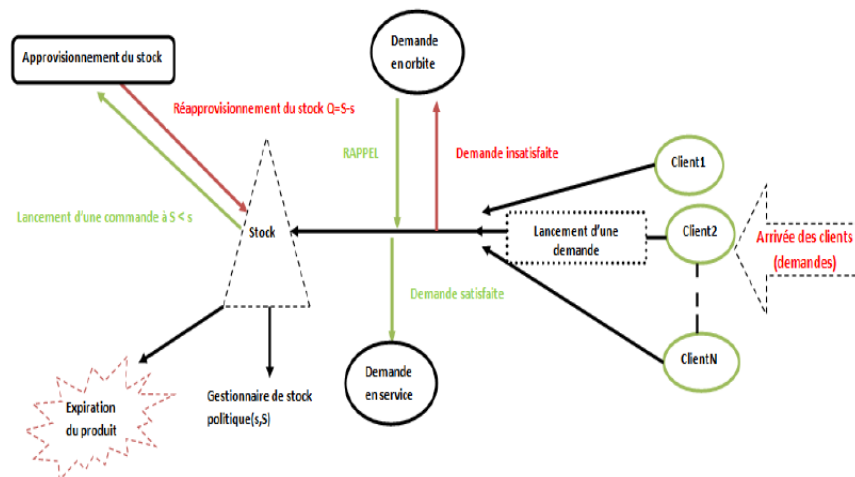


FIGURE 1 – Système de gestion des stocks à produits périssables, à source finie et avec rappels

3 Modèle *RdPSG* associé au système étudié

Dans cette section, on a modélisé notre système à l'aide des *RdPSG*, tel qu'il est illustré dans la figure suivante (voir la figure 2) :

Tel que :

- *Psource* : représente les demandes de capacité maximum N ;
- *Pchoix* : c'est la place où, le choix entre rejoindre l'orbite ou le service ;
- *Porbit* : est une place qui représente les demandes non satisfaites ;
- *Pservice* : Cette place représente les demandes satisfaites ;

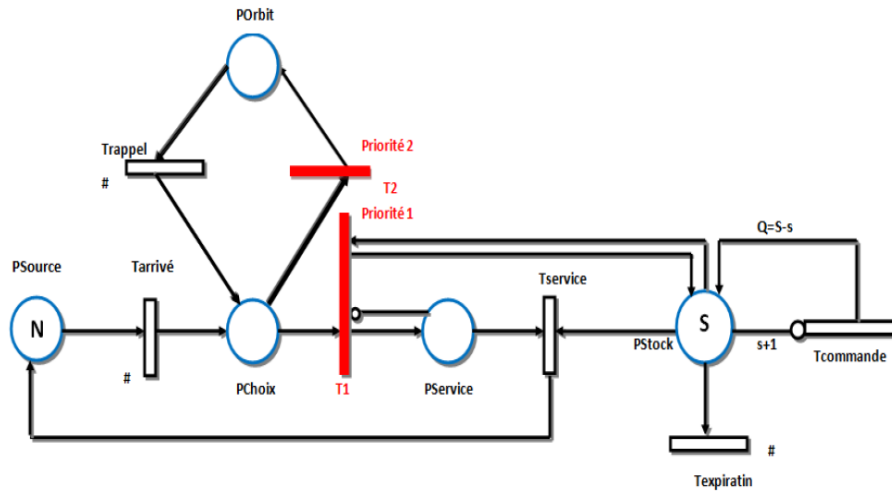


FIGURE 2 – Modèle *RdPSG* associé au système de gestion des stocks à produits périssables, à source finie et rappels

- *Pstock* : Cette place représente le stock des produits de notre système de capacité maximum S ;
- Les transitions temporisées *Tarrive*, *Trappel*, *Tservice*, *Texpiratin* et *Tcommande* représentent respectivement : l'arrivée d'une demande, le rappel de la demande, satisfaire une demande, l'expiration d'un produit et enfin le lancement d'une commande d'un produit ;
- Les deux transitions *T1*(priorité 1), *T2*(priorité 2) sont des transitions immédiates qui représentent respectivement l'accès immédiat au service et à l'orbite.

4 Analyse qualitative et quantitative du *RdPSG*

Après avoir le vecteur de probabilité stationnaire π , par la résolution du système linéaire : $\pi Q = 0$ et $\pi \mathbf{1} = 1$, divers indices de performance intéressants peuvent être calculés. Parmi les caractéristiques les plus importantes, que l'on souhaite évaluer sont : le taux moyen de génération de l'arrivée $\bar{\lambda}$, le taux moyen d'expiration $\bar{\gamma}$, Le taux moyen de service $\bar{\mu}$, le taux moyen de rappel $\bar{\sigma}$, le nombre moyen de clients dans l'orbite n_o , La probabilité que le service est occupé n_B , le temps moyen d'attente ω , le temps moyen de réponse \bar{w} , niveau moyen de stock prévu n_l , niveau moyen de réapprovisionnement n_r , etc.

Le taux de coût total TC de notre système en régime permanent est donné par la formule suivante :

$$TC = C_H \bar{\gamma} + C_s n_R + C_p n_p + C_w n_o.$$

Telle que : C_H le coût de possession des stocks, C_s le coût de commande, C_p le coût des produits périssables, C_w le coût d'attente d'une demande en orbite.

Dans le simulateur GRIF, on a introduit notre modèle *RdPSG*. On a fait varier, le taux des

arrivées λ et on a fixé le taux de service μ , le taux d'expiration γ , le taux de rappel σ et le taux de la commande β . Pour le nombre de clients dans la source N et la quantité du stock S vont prendre différentes valeurs à chaque variation du taux λ (voir le tableau 1).

TABLE 1 – Quelques mesures de performance

S	N	λ	σ	γ	β	μ	$\bar{\lambda}$	n_o	n_B	\bar{w}
3	2	1	0.5	3	2	1	315.9	1.1632	0.4604	0.0051
3	2	1.5	0.5	3	2	1	334.3	1.2882	0.4766	0.0053
3	2	2	0.5	3	2	1	337.3	1.3411	0.4790	0.0054
3	4	1	0.5	3	2	1	325.7	3.1363	0.4661	0.0111
3	4	1.5	0.5	3	2	1	337.8	3.2671	0.4816	0.0111
3	4	2	0.5	3	2	1	337.8	3.3466	0.4697	0.0113
3	6	1	0.5	3	2	1	328.4	5.1150	0.4751	0.0170
3	6	1.5	0.5	3	2	1	338.8	5.2724	0.4745	0.0170
3	6	2	0.5	3	2	1	339.1	5.3322	0.4766	0.0171
3	10	1	0.5	3	2	1	331	9.0799	0.4731	0.0289
3	10	1.5	0.5	3	2	1	344	9.2163	0.4880	0.0282
3	10	2	0.5	3	2	1	336.7	9.3195	0.4704	0.0291

5 Conclusion

On a présenté une approche numérique exacte pour la modélisation et l'analyse du système de gestion de stock à source finie, avec rappel, et produit périssable en utilisant le formalisme *RdPSG*. Les *RdPSG* constituent un important modèle graphique et mathématique, qui offre une grande puissance descriptive, ce qui nous a permis la modélisation et l'analyse des systèmes de gestion de stocks incluant diverses caractéristiques (source finie, rappel et produit périssable). L'approche proposée nous a donné une représentation graphique détaillée et nous a permis d'obtenir le générateur infinitésimal et la *CTMC* sous-jacente. En outre, nous avons donné les principales caractéristiques en fonction paramètre de système indépendamment du graphe d'accessibilité. Des résultats numériques exacts pour notre système sont obtenus en utilisant le simulateur *GRIF*. Finalement, nous avons étudié l'effet des paramètres de notre système sur ses indices de performance.

Différentes perspectives sont envisagées pour le travail présenté dans ce mémoire, à savoir :

- Appliquer cette approche pour l'analyse des systèmes de gestion de stocks avec (vacance, panne, ...);
- Etendre l'utilisation des *RdPS* à l'analyse des systèmes de gestion des stocks non markoviens;
- établir la stabilité forte des *RdPS* associés aux systèmes de gestion des stocks;
- Appliquer la méthode de noyau pour générer le processus des arrivées ou le processus de la demande.

Références

- [1] Artalejo.J.R, Krishnamoorthy.A, and Lopezherrero.M.J, Numerical analysis of (s, s) inventory systems with repeated attempts, *Annals of Operations Research*, 141, pages 64-83.
- [2] Gomathi.D, Periyasamy.C, and Sagayaraj, 2015, A finite population discrete time inventory system with retrial demands, *Modern Engineering Research(IJMER)*.
- [3] Molloy.M.K, 1982, Performance analysis using stochastique petri nets, *IEEE Transactions on Computers*, pages 913-917.
- [4] Arivarignan.G, Manuel.P, and Sivakumar.B, 2008, A perishable inventory system with service facilities and retrial customers. *Computers and Industrial Engineering*, 543, pages 484-501.
- [5] Baron.O, Berman.O, and Perry.D, 2010, Continuous review inventory models for perishable items ordered in batches, *Annals of Operations Research*, 72, pages 217-247.
- [6] Sivakumar.B, 2009, A perishable inventory system with retrial demands and a finite population, *Computational and Applied Mathematics* 224, pages 29-38.
- [7] Chen.H, Amodeo.L, Chu.F, and Labadi.K, 2005, Modeling and performance evaluation of supply chains using batch deterministic and stochastic petri nets, *IEEE Transactions On Automation Science And Engineering*, 2 :132-144.
- [8] Wang.F, Bhagat.A, and Chang.T, 2017, Analysis of priority multiserver retrial queueing inventory systems with map arrivals and exponential services, *OPSEARCH*, 54 :44-66.



Construction de Plans d'expériences numériques à partir de processus stochastique ponctuel

Ahmed Ait ameur¹, Hichem Elmossaoui², and Nadia Oukid³

¹Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Blida 1, Algérie,
ahmedaitameur95@gmail.com

²Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Blida 1, Algérie,
elmossaoui.hichem@yahoo.com

³Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Blida 1, Algérie,
oukidnad@yahoo.fr

Résumé Cet article propose une méthode de construction de plans d'expériences numériques. Cette méthode est basée sur la théorie des processus stochastiques, particulièrement les processus ponctuels marqués à deux types. Ces plans obtenus à partir de la méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov (MCMC) et l'algorithme de Metropolis Hastings sont facilement modulables et peuvent ainsi répondre à divers objectifs. Une étude détaillée sur la convergence de la chaîne de Markov a été réalisée.

Mots clés : Plans d'expériences, plans d'expériences numériques, processus ponctuels, chaîne de Markov par la méthode de Monte Carlo, algorithme de Metropolis-Hasting.

1 Introduction

Dans le contexte de la simulation numérique, les expériences simulées sont coûteuses en calcul, il est donc important d'utiliser des méthodes de conception expérimentales pour optimiser ces expériences. De nombreux phénomènes sont modélisés par des codes de simulation numérique comme outils d'optimisation et de prédiction. Ces codes sont constitués de modèles numériques qui relient des variables descriptives de l'état du système à un certain nombre de paramètres. Le simulateur prend ses paramètres en entrée et génère des réponses aux variables d'état du système. Bien que l'informatique progresse, le code de ces calculs est complexe et prend souvent beaucoup de temps à s'exécuter. Pour résoudre ce problème, l'idée est de remplacer le simulateur par une ou plusieurs fonctions d'approximation construites à l'aide de méthodes d'approximation ou d'interpolation et à partir de plans d'expériences numériques.

Afin de bien remplir au mieux l'espace des paramètres et d'obtenir des informations dans tout le domaine expérimental, nous proposons une méthode de construction de plans d'expériences numériques dont les points sont le plus uniformément répartis dans l'hypercube unité. Pour cela, nous utilisons le Processus de Markov à deux types (Two-Type Markov Point Process)

qui est un processus de Strauss marqué avec deux marques pour simuler les n expériences numériques qui constituent le plan d'expériences numériques. Un processus qui est markovien au sens de Ripley-Kelly [1]. Franco [2] a publié pour la première fois un plan d'expérience numérique basé sur le processus ponctuel de Strauss, qui intègre le concept d'interaction entre des paires de points. El mossouli et al [3, 4] ont proposé une conception numérique d'expériences basée sur l'utilisation du processus de Strauss marqué. Ces méthodes de planification peuvent atteindre deux objectifs, un sur la distribution des points et un autre sur la caractérisation des marques de ces points.

2 Plan d'expériences numériques par un processus ponctuel markovien

L'idée principale est de considérer chaque expérience x_i comme un point ou une particule définie dans $[0, 1]^p$ et chaque configuration x comme une matrice d'expériences. Chaque point de cette configuration est caractérisé par deux marques m_i et m'_i définie sur l'espace des marques M . Le point et ses marques forment un objet défini par (x_i, m_i, m'_i) . Par conséquent, nous assimilons l'objet à la réalisation du processus ponctuel marqué à deux types par X . Le processus de Strauss marqué implique la possibilité d'interaction. Ces interactions correspondent aux propriétés de voisinage définies dans le champ de Markov au sens de Ripley - Kelly. Le potentiel d'interaction le plus utilisé est l'interaction entre paires d'objets. Ces processus objets sont importants pour la modélisation des phénomènes répulsifs. La densité de probabilité d'un processus ponctuel marqué de Strauss à deux types pour une configuration x de points est donnée par [5] :

$$\pi(x) = \alpha \beta_1^{m_1(x)} \beta_2^{m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(x)} \quad (1)$$

Avec, α est la constante de normalisation, $0 < \gamma_{kl} \leq 1$, $k \in \{1, 2\}$ et $l \in \{1, 2\}$ sont des coefficients d'interaction, β_k , $k \in \{1, 2\}$ est l'intensité du processus, $m_k(x)$ est le nombre de points de type k dans x (de marque k) et $m_{kl}(x)$ est le nombre de paires de \sim_x -voisins de type $(k, 1)$ ou $(1, k)$ dans x (de marque k et l au même temps).

2.1 Choix des marques

Dans cette étude, pour une configuration x nous caractérisons les points par deux marques, la première marque $m_1(x)$ représente le nombre de points x_i dont la valeur de l'erreur de prédiction \hat{y}_{x_i} au point x_i est inférieure à une précision fixée ϵ . Cette erreur est définie par : $\text{var}(\hat{y}_{x_i}) = {}^t f(x_i) ({}^t X X)^{-1} f(x_i)$. Avec, $X = {}^t [f(x_1), f(x_1), \dots, f(x_1)]$ est la matrice de calcul, qui dépend des points expérimentaux choisis et du modèle postulé, $({}^t X X)^{-1}$ la matrice de dispersion et $f(x_i)$ est le vecteur modélisé du point x_i . Dans ce cas on définit $m_1(x)$ pour une configuration x par : $m_1(x) = \sum_{i=1}^n 1_{\text{var}(\hat{y}_{x_i}) \leq \epsilon}$. Pour la deuxième marque $m_2(x)$, on considère la moyenne des distances à densité normale entre le point x_i et les autres points de la configuration x . Cette marque est définie par : $m_2(x) = \sum_{i=1}^n 1_{\mu(x_i) \geq R}$. La moyenne des

distances donnée par : $\mu(x_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \delta(x_i, x_j)$ Avec : $\delta(x_i, x_j) = \int_0^l \varphi(t) dt$, tel que l est

la distance usuel entre les points x_i et x_j . Et φ la densité de la loi normale. Où R est une valeur fixée.

3 Simulation des processus ponctuels par la méthode MCMC et l'algorithme de Metropolis-Hasting

Cette méthode consiste à construire une chaîne $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$ qui converge vers la distribution π souhaitée. En fait, l'algorithme de Metropolis-Hasting [6, 7] peut faire cette construction en utilisant le noyau de transition π -réversible P_{MH} . Cet algorithme passe par deux étapes.

- Nous proposons un changement d'état de x à y selon la loi de probabilité $Q(x, \cdot)$
- On accepte y avec la probabilité $a(x, y)$, si non on reste dans l'état x (où $a : \Omega \times \Omega \mapsto [0, 1]$) Notons $q(x, y)$ la densité de $Q(x, \cdot)$, la transition P de Metropolis-Hasting s'écrit :

$$P_{MH}(x, y) = a(x, y)q(x, y) + \left[1 - \int_{\Omega} a(x, z)q(x, z) dz \right] \delta_x(y)$$

Avec $\delta_x(\cdot)$ et la masse du point en x . Pour simplifier les calculs, on utilise la mesure de Dirac en x ($\delta_x(y) = 1$ si $x = y$ et 0 sinon).

Le choix de (Q, a) assurera la π -réversibilité de P_{MH} si l'équation d'équilibre suivante est satisfaite : $\forall x, y \in \Omega : \pi(x) \times q(x, y) \times a(x, y) = \pi(y) \times q(y, x) \times a(y, x)$

Le choix de la probabilité d'acceptation a est plus limité : il est dicté essentiellement par l'objectif de simuler (asymptotiquement) une loi de probabilité π donnée. C'est le cas du choix usuel, où :

$$a(x, y) = \frac{\pi(y) \times q(y, x)}{\pi(x) \times q(x, y)}$$

Deux points importants à noter. Premièrement, le calcul de $a(x, y)$ ne nécessite aucune connaissance de la constante de normalisation de (1). Deuxièmement, dans ce travail, nous considérons le cas où deux configurations x et y diffèrent exactement en un point. On parle alors de dynamique de renversement de spin (spin flop Dynamics en anglais), donc la densité q est symétrique : $q(y, x) = q(x, y)$. Dans ce cas, la probabilité d'acceptation se réduit à :

$$a(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{\beta_1^{m_1(y)} \beta_2^{m_2(y)} \gamma_{11}^{m_{11}(y)} \gamma_{12}^{m_{12}(y)} \gamma_{22}^{m_{22}(y)}}{\beta_1^{m_1(x)} \beta_2^{m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(x)}}$$

3.1 Algorithme de construction du plan proposé

Le plan d'expériences numérique proposé dans ce travail est généré à l'aide de l'algorithme suivant (en fait une version de l'algorithme de Metropolis-Hasting).

Algorithme

[label=()]**Étape d'initialisation :**

Choisir une configuration initiale (plan d'expériences)

($X_0 = x$, où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $x \in [0, 1]^p$) selon une loi de probabilité donnée par exemple la loi uniforme. **Étape d'itérations :** Pour $N = 1, 2, \dots, N_{MCMC}$

2. • Étape 1 :

- Pour chaque état x échantillonner y par l'utilisation de dynamique de renversement de spin
- Choisir un pin s au hasard uniformément sur $\{1, \dots, n\}$
- Simuler une expérience y_j selon la loi uniforme sur $[0, 1]^p$. On prend alors comme nouvelle configuration : $y = (x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, y_j, x_{s+1}, \dots, x_n)$

• Étape 2 :

- Calculer la probabilité d'acceptation :

$$a(x, y) = \min \left(1; \beta_1^{m_1(y) - m_1(x)} \beta_2^{m_2(y) - m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(y) - m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(y) - m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(y) - m_{22}(x)} \right)$$

avec et $\beta_k > 0$ et $0 < \gamma_{kl} \leq 1$

- Prendre $x = \begin{cases} y & \text{avec une probabilité : } a \\ x & \text{avec une probabilité : } 1 - a \end{cases}$

Répéter ces deux dernières étapes n fois pour chaque itération N .

Prendre $X_N = x$.

4 Étude de convergence

Pour chaque itération N de l'algorithme de construction décrit précédemment, nous effectuons n transformations de base. D'où, la chaîne des plans d'expériences $(X_N)_{N \geq 0}$ ainsi générée est la réalisation d'une chaîne de Markov de noyau de transition : $P(x, y) = P_{MH}^n(x, y)$

A ce niveau, la question fondamentale qui se pose est de savoir si la chaîne converge vers la distribution $\pi(x)$ définie en (1). La chaîne converge vers la distribution invariante π si : $P^t(x, A) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi(A)$. Où A un borélien de \mathcal{B} et $K^t(x, A) = p(X_t = A / X_0 = x)$ est un noyau de transition de pas t . Énonçons le résultat principal qui nous intéresse ici :

Théorème 4.1. *Si le noyau de transition $P = P_{MH}^n$ sur un espace fini a une distribution invariante unique π et P est positif récurrent, alors la chaîne de Markov $(X_N)_{N \geq 0}$ obtenue à partir de l'algorithme de construction est uniformément ergodique et ce noyau réalise la simulation d'un processus ponctuel marqué de Strauss de densité $\pi(x) = \alpha \beta_1^{m_1(x)} \beta_2^{m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(x)}$ (i.e. νP^m tend vers π quand m tend vers l'infini avec ν est la distribution initiale).*

Preuve. Premièrement, nous montrons trois propriétés importantes pour le noyau P_{MH} : π -réversibilité, π -stationnarité et π -irréductibilité.

• **La π -réversibilité**

Par définition, la transition P_{MH} est π -réversible si :

$$\forall x, y \in \Omega : \pi(x) P_{MH}(x, y) = \pi(y) P_{MH}(y, x)$$

Soit $x \in \Omega$ et $B \in \mathcal{A}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) P_{MH}(x, y) dx &= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x, y) q(x, y) dx + \\ & \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) \left[1 - \int_{\Omega} a(x, z) q(x, z) dz \right] \delta_x(y) dx \\ &= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x, y) q(x, y) dx + \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \pi(x) \left[1 - \int_{\Omega} a(x, z) q(x, z) dz \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Et puisque : } \pi(x) a(x, y) q(x, y) = \alpha \beta_1^{m_1(x)} \beta_2^{m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(x)} \times \\
 & \min \left(1; \beta_1^{m_1(y)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(y)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(y)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(y)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(y)-m_{22}(x)} \right) q(x, y) \\
 & = \alpha \min \left(\beta_1^{m_1(x)} \beta_2^{m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(x)}, \beta_1^{m_1(y)} \beta_2^{m_2(y)} \gamma_{11}^{m_{11}(y)} \gamma_{12}^{m_{12}(y)} \gamma_{22}^{m_{22}(y)} \right) q(x, y) \\
 & = \alpha \beta_1^{m_1(y)} \beta_2^{m_2(y)} \gamma_{11}^{m_{11}(y)} \gamma_{12}^{m_{12}(y)} \gamma_{22}^{m_{22}(y)} \times \\
 & \min \left(\beta_1^{m_1(x)-m_1(y)} \beta_2^{m_2(x)-m_2(y)} \gamma_{11}^{m_{11}(x)-m_{11}(y)} \gamma_{12}^{m_{12}(x)-m_{12}(y)} \gamma_{22}^{m_{22}(x)-m_{22}(y)}; 1 \right) q(x, y) \\
 & = \pi(y) \min \left(1; \beta_1^{m_1(x)-m_1(y)} \beta_2^{m_2(x)-m_2(y)} \gamma_{11}^{m_{11}(x)-m_{11}(y)} \gamma_{12}^{m_{12}(x)-m_{12}(y)} \gamma_{22}^{m_{22}(x)-m_{22}(y)} \right) q(x, y) \\
 & = \pi(y) a(y, x) q(x, y)
 \end{aligned}$$

et comme $q(x, y) = q(y, x)$, alors $\pi(x) a(x, y) q(x, y) = \pi(y) a(y, x) q(y, x)$, on obtient

$\int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) P_{MH}(x, y) dx = \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(y) P_{MH}(y, x) dy$ Donc $\pi(x) P_{MH}(x, y) = \pi(y) P_{MH}(y, x)$,
alors la chaine est π -réversible donc π -invariante.

• **La π -stationnarité**

La transition P_{MH} est π -stationnaire si $\pi P_{MH} = \pi$.

Soit $x \in \Omega$ et $B \in \mathcal{A}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) P_{MH}(x, y) dx = \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) \left[\int_{\Omega} a(x, y) q(x, y) dy \right] dx + \\
 & \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) \left[\int_{\Omega} 1 - a(x, z) q(x, z) dz \right] \delta_x(y) dx = \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) \left[\int_{\Omega} a(x, y) q(x, y) dy \right] dx \\
 & + \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \pi(x) \left[\int_{\Omega} 1 - a(x, z) q(x, z) dz \right] dx = \int_{\Omega} \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x, y) q(x, y) dy dx + \\
 & \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \pi(x) dx - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \pi(x) a(x, z) q(x, z) dz dx = \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \pi(x) dx
 \end{aligned}$$

Donc la chaine admet π comme distribution stationnaire

• **La π -irréductibilité**

La transition P_{MH} est π -irréductible si : $\forall A \in \mathcal{B}, \pi(A) > 0 \Rightarrow \exists t, P_{MH}^t(x, A) > 0$

Soit A un borélien $\forall A \in \mathcal{B}, \pi(A) > 0 \Rightarrow \exists t, P_{MH}^t(x, A) > 0$ et pour $t = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x, A) dx = \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} a(x, A) q(x, A) dx + \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} \left[1 - \int_{\Omega} a(x, z) q(x, z) dz \right] \delta_x(A) dx \\
 & = \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} a(x, A) q(x, A) dx + 1 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} a(x, z) q(x, z) dz dx
 \end{aligned}$$

Puisque $a(x, A) = \min \left(1; \beta_1^{m_1(A)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(A)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(A)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(A)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(A)-m_{12}(x)} \right)$ et

$a(x, z) = \min \left(1; \beta_1^{m_1(z)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(z)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(z)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(z)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(z)-m_{12}(x)} \right)$, alors

on distingue quatre cas possibles :

- Si $a(x, A) = 1$ et $a(x, z) = \beta_1^{m_1(z)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(z)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(z)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(z)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(z)-m_{12}(x)}$

alors :

$$\int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x, A) dx = \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx + 1 -$$

$$\beta_1^{m_1(z)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(z)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(z)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(z)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(z)-m_{12}(x)} > 0$$

- Si $a(x, z) = \beta_1^{m_1(A)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(A)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(A)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(A)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(A)-m_{12}(x)}$ et $a(x, z) = 1$ alors :

$$\int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x,A) dx =$$

$$\beta_1^{m_1(A)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(A)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(A)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(A)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(A)-m_{12}(x)} \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x,A) dx > 0$$

- Si $a(x,z) = \beta_1^{m_1(A)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(A)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(A)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(A)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(A)-m_{12}(x)}$ et $a(x,z) = \beta_1^{m_1(z)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(z)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(z)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(z)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(z)-m_{12}(x)}$ alors :

$$\int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x,A) dx$$

$$= \beta_1^{m_1(A)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(A)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(A)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(A)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(A)-m_{12}(x)} \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x,A) dx +$$

$$1 - \beta_1^{m_1(z)-m_1(x)} \beta_2^{m_2(z)-m_2(x)} \gamma_{11}^{m_{11}(z)-m_{11}(x)} \gamma_{12}^{m_{12}(z)-m_{12}(x)} \gamma_{22}^{m_{22}(z)-m_{12}(x)} > 0$$

donc $\int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}^t(x,A) dx > 0 \quad \forall t \geq 0$, alors P_{MH} est π -irréductible.

Puisque, π est la loi invariante de P_{MH} alors elle est aussi loi invariante pour $P = P_{MH}$.
En effet, $\pi P_{MH} = \pi$ et par récurrence sur l'entier n ; $\pi P_{MH}^n = \pi$, on obtient :

$$\pi P_{MH} = \pi P_{MH}^2 = \pi P_{MH}^3 = \dots = \pi P_{MH}^n = \pi$$

Donc $\pi P = \pi$. Par construction de $P = P_{MH}^n$, la π -irréductibilité de P_{MH} entraîne la π -irréductibilité de P . Si P est π -irréductible et possède une distribution π -invariante. Alors P est récurrent positif et π est l'unique distribution invariante de P [8].

Soit ν une distribution initiale, pour tout entier m et $\forall x \in N^f$ nous avons :

$$\nu P^m(x, \cdot) - \pi = \nu P^m - \pi P^m \leq 2C(P^m) \leq 2(C(P))^m$$

Avec $0 \leq C(P) < 1$ est le coefficient de contraction [9]. Donc la chaîne est uniformément ergodique. Et, $\|\nu P^m - \pi\|$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini. Donc, la chaîne converge vers la distribution marquée de Strauss multiple. \square

5 Conclusion

La méthode des plans d'expériences est un ensemble de méthodes et d'idées de raisonnement à la disposition de tous les expérimentateurs qui souhaitent planifier leurs expériences. Dans ce contexte, l'utilisation des processus ponctuels marqués à deux types et la méthode MCMC permet de construire de nouveaux plans numériques spécifiés à partir de la loi pour un modèle à interaction entre paire d'objets. Cette approche offre une grande souplesse dans la mesure où l'on peut facilement jouer sur cette loi via sa représentation pour imposer des propriétés comme par exemple le remplissage. Par ailleurs, la méthodologie MCMC constitue une alternative intéressante à l'approche statistique classique qui consiste à travailler sur des réalisations indépendantes d'une même loi.

Références

- [1] Ripley, B.D. ET Kelly, F.P., Markov point processes. J. London Math. Soc., 1977, 15, 188-192,(1977).

- [2] Franco, J., Planification d'Expériences Numériques en Phase Exploratoire pour des Codes de Calculs Simulant des Phénomènes Complexes. Doctoral thesis, l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, France, (2008).
- [3] Elmoosaoui, H., Oukid, N. and Hananne, F., Construction of computer experiment designs using marked point processes, *Afrika Matematika*, Doi.org /10.1007/ s13370-020-00770-9, Springer, (2020).
- [4] Elmoosaoui, H., contribution a la mthodologie de la recherche experimentale , thèse de doctorat, Université Blida 1 (2020).
- [5] Baddeley, A.J. ET J.Moller, J., Nearest-neighbour Markov point processes and random sets, *Int. Stat. Rev.*, 57, 90-121.
- [6] Chib, S. and E. Greenberg. (1995), Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, 1995, 49 : 327-335,(1989).
- [7] Hastings, W.K., Monte Carlo sampling methods using markov chains and their applications, *Biometrika* 57, 97109, (1970).
- [8] Dobrushin, R.L., Central limite theorem for no stationary markov chains, *Th. Proba. Appl.*, 1, 329-383,(1956).
- [9] Winkler,G. *Image Analysis Random fields and Dynamic Monte Carlo Methods*, Springer, Berlin, (1995).



Estimation des Paramètres des Equations Différentielles Stochastiques - Généralisation de la Méthode des Temps de Passage.

Samia Meddahi¹ and Khaled Khaldi²

¹Université M'hamed Bougara Boumerdes, Département Mathématiques, Boumerdes 35000 Algeria,
s.meddahi@univ-boumerdes.dz

²Université M'hamed Bougara Boumerdes, Département Mathématiques, Boumerdes 35000 Algeria,
kkhaldi4@yahoo.fr

Résumé Nous considérons l'estimation des paramètres des équations différentielles stochastiques utilisant le modèle d'évaluation d'options de Black- Scholes. Nous présentons deux méthodes : la méthode via le temps du premier passage et la généralisation des temps de passage. Nous illustrons cette méthode par l'application sur des données réelles cours de l'action de l'or de Londres.

Mots clés : Brownien géométrique ; Processus de diffusion ; trajectoires ; Premier temps de passage ; Volatilité.

1 Introduction

L'étude la plus reconnue dans le monde de la finance mathématique est certainement le modèle d'évaluation des options de Black et Scholes (1973), qui a connu un succès immédiat auprès des chercheurs et des professionnels de la finance. Le modèle de Black et Scholes est, sans aucun doute, le premier modèle théorique d'évaluation à avoir été utilisé de manière aussi intensive par les professionnels à des fins d'évaluation. Les variations de la variance des rendements de l'actif sous jacent ne puissent être que partiellement expliquées, par les mouvements de son prix, la volatilité des rendements de l'actif sous jacent pourrait être elle – même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spécifique.

L'objectif de cet article, est d'estimer les paramètres des équations différentielles stochastiques (EDS) avec deux méthodes. On commence par la méthode via le temps du premier passage que nous améliorons par la généralisation des temps de passage, la première méthode permet d'estimer les paramètres, à partir des premiers temps de passage alors que la deuxième méthode permet de les estimer, à partir de tous les points de passage [10].

2 Modèle de Black et Scholes

Nous supposons que le comportement du prix de l'action est déterminé par l'EDS [1, 6, 11] :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, B = (B(t), t \geq 0)$$

un mouvement brownien standard, μ et σ sont des paramètres réels. Pour résoudre cette équation, On pose $Y_t = \log(X_t)$ et $m = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ et en appliquant le lemme d'Itô, on trouve donc : $X_t = x_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\}$. La solution X_t est appelée brownien géométrique. Ce processus est aussi dit processus "log- normale". Il résulte que $Y = (Y(t), t \geq 0)$ est un processus de Wiener généralisé de drift m et de variance σ^2 .

$$\forall s, 0 \leq s \leq t, B_x(t) - B_x(s) \sim N(m(t-s), \sigma^2(t-s)), \text{ donc} \\ Y(t) - Y(0) = \log((X(t)/X(0)))$$

3 Méthodes d'estimation des paramètres des EDS

3.1 Méthode 1 : Méthode via le temps du premier passage

Cette méthode propose l'estimation des paramètres du processus de diffusion log normale, via l'observation de l'instant de premier passage du processus à travers une borne constante notée S [4]. T est le premier temps de passage du processus $X(t) = \exp(Y(t))$ par le point $S = \exp(a)$, $T = \inf\{t/X(t) = S\}, t > 0$ et $X(t_0) = x_0$.

T suit une loi gaussienne inverse, sa fonction de densité, s'écrit donc sous la forme [2] :

$$f(S, t/x_0, t) = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)^{\frac{3}{2}}}} \exp\left\{-\frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-t_0)\right]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right\} \quad (1)$$

La résolution des équations de vraisemblance nous donne les estimateurs suivants :

$$\hat{\mu} = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\bar{t}} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \text{ et } \hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right)\right]^2}{b} \sum_{i=1}^b \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{\bar{t}}\right) \text{ où } \bar{t} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b t_i$$

Pour appliquer cette méthode, nous considérons b trajectoires indépendantes ayant chacune n_i observations ($i = 1, \dots, b$). Nous supposons qu'elles partent toutes du même point initial c'est-à-dire que $P\{X_i(t_0) = x_0\} = 1, (i = 1, \dots, b)$. Les variables aléatoires T sont les instants du premier passage par la borne S dans les b trajectoires, avec les valeurs observées $t_i : i = 1, \dots, b$.

3.2 Méthode 2 : Généralisation de la méthode des temps de passage (GTP)

C'est le même principe que la méthode 1, mais on utilise tous les temps de passage par la borne S , telle que cette borne est bien atteinte par toutes les trajectoires éventuelles. La résolution des équations de vraisemblance nous donne les estimateurs suivants :

$$\hat{\mu} = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\bar{t}} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right)\right]^2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{\bar{t}}\right) \quad (3)$$

où $t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$, avec n : nombre des temps de passage.

4 Application

On dispose de 191 observations journalières de cours de l'action OR pour la période du 29 Mars 2007 au 31 Décembre 2007.

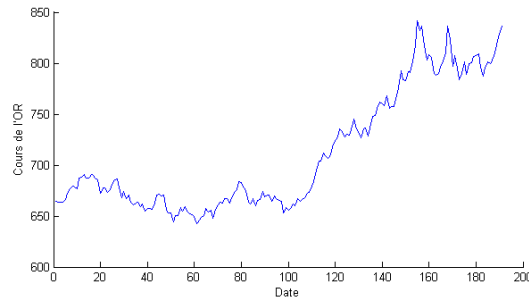


FIGURE 1 – Evolution de cours de l'action de l'or.

En se basant sur certains critères pour choisirai meilleur méthode, notamment le critère qui minimise les RMSE (root mean squared error loss function) , %RMSE (relative root mean squared error loss function) et l'erreur moyenne relative (ERM). $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2(\Theta)}$ et $\%RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i(\Theta)}{x_i}\right)^2}$ où $e_i = x_i - x_i(\Theta)$ sont les termes d'erreur.

4.1 Estimation des paramètres

4.1.1 Méthode 1

Dans notre série, la valeur initiale $x_0 = 663.50$ qui partage la série en deux trajectoires ($b = 2$) et aléatoirement on a trouvé une borne constante $S = 684$, tel que tous les trajectoires sont atteintes par cette borne. Les résultats numériques : $\hat{\mu} = 0.0016$ et $\hat{\sigma}^2 = 1.1139 \times 10^{-5}$.

4.1.2 Méthode 2 : G.T.P

$x_0 = 663.50$, $S = 684$; tel que tous les trajectoires sont atteintes par cette borne. On prend tous les points des temps de passage, on trouve : $\hat{\mu} = 6.746 \times 10^{-4}$ et $\hat{\sigma}^2 = 1.666 \times 10^{-5}$.

4.1.3 Simulation

En prend les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ estimées par les deux méthodes pour faire la simulation.

Les graphes des simulations et vraies valeurs pour le cours de l'OR est représenté dans la figure suivante

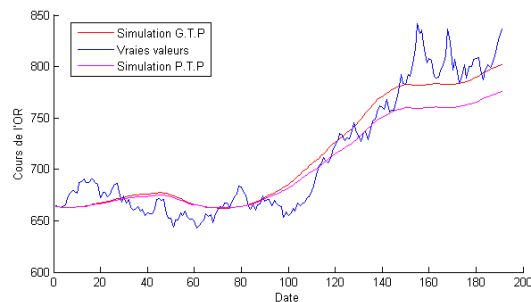


FIGURE 2 – Comparaison des simulations pour les deux méthodes avec les vraies valeurs.

Les résultats numériques des deux méthodes sont illustrés dans le tableau suivant :

	RMSE	%RMSE	ERM(%)
Méthode 1 : P.T.P	24.3242	0.0315	2.4407
Méthode 2 : G.T.P	17.8870	0.0246	2.0030

Tableau 1 : Les valeurs des erreurs de la simulation pour les 2 méthodes.

D'après les résultats obtenus, nous constatons que la méthode 2 donne meilleurs résultats par rapport à la méthode 1.

4.1.4 Prévision

La période de prévision est de 15 jours, l'analyse des prévisions de la deuxième méthode, nous indique, des résultats meilleurs que l'autre méthode (voir les graphes des erreurs de la prévision pour chaque méthode).

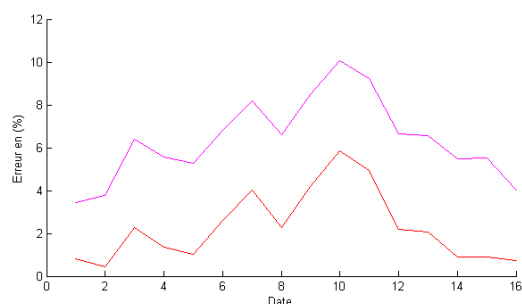


FIGURE 3 – Erreur de prévision en fonction du temps.

	ERM(%)	Errors max(%)
Méthode 1	6.3772	10.0670
Méthode 2	2.2812	5.8378

Tableau 2 : Les valeurs des erreurs de la prévision pour les 4 méthodes.

Les graphes des erreurs relatives de la prévision nous révèlent que cette erreur ne dépasse pas 10.07% et l'erreur moyenne relative (ERM) égale à 6.3772% dans la méthode 1, pour la méthode 2, Emax ne dépasse pas 6% et l'erreur moyenne relative égale à 2.2812%.

5 Conclusion

Notre travail a montré que la méthode GTP donne de meilleur résultat par rapport à la méthode P.T.P.

Références

- [1] Black ,F., Scholes ,M. : The pricing of Options and Corporate liabilities. Journal of Political Economy **81**N°3,pp.637-654 (1973).
- [2] Chhikara, R.S., Folks ,J.L. : The inverse gaussian distribution. Theory, Methodology and Applications, Statistics **95**, Marcel Dekker Inc, p.232 (1988).

- [3] Gross,P. : Parameter estimation for Black-Scholes equation. Final report URA- Spring, p.42 (2006).
- [4] Janssen ,J., Saib, M., Khamis, T. : Techniques of estimation for Black-Scholes model. http://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Nuernberg/Janssen_Saib_Taous.pdf (1996).
- [5] Jarque ,C.M., Bera, A. K. : A test for normality of Observations and Regression residuals, International Statistical Review, vol.55,no.2,pp.163-172 (1987).
- [6] Jeanblanc, M. : Cours de Calcul Stochastique, DESS IM EVERY Option Finance (2002).
- [7] Jerbi, Y. : Evaluation of options and stochastic volatility models. Thesis University Paris 1,Sorbonne. <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/30/86/23/pdf/JerbiTH.pdf>. (2006).
- [8] Karatzas,I., Shreve ,S. :Brownian motion and Stochastic calculus. SpringerVerlag.NewYork (1988).
- [9] Khaldi, K.,Djeddour,K.,Meddahi,S. : First passage time method generalization for the estimation of stochastic differentialequation parameters. EuropeanJournal of Scientific Research.119, 3,489-496. ISSN 1450-216X (2014).
- [10] Khaldi, K.,Djeddour, K., Meddahi, S. :Comparison of jump-diffusion parameters using passage times estimation.Journal of Applied Mathematics.Volume 2014 ; Article ID975418,5 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/975418> (2014).
- [11] Lamberton, D.,Lapeyre ,B. : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Mathématiques et Applications 9, Ellipses(1991).
- [12] Steele, J.M. : Stochastic Calculus and Financial Applications. Springer, New York(2001).

Estimation du risque de liquidité bancaire : Approche par la théorie de ruine

Randa Brick Chaouche¹, Sarah Yasmine Sekkak¹, Atik Touazi ^{1,2}, and Djamil Aïssani 

¹Département Mathématiques, Faculté des Sciences, Université d'Alger1, Algérie,
touazi_atik@hotmail.fr

²Unité de Recherche LaMOS, Université de Béjaia, Algérie,
lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé L'objectif de ce travail consiste à utiliser la théorie du risque pour modéliser l'évolution du niveau de liquidité bancaire. Cette modélisation nous permettra de quantifier certaines caractéristiques qui sont liées au risque de liquidité dit « de financement », c'est-à-dire la possibilité que, sur une période donnée, la banque soit incapable d'honorer ses engagements immédiats, et de ne plus pouvoir trouver la liquidité nécessaire sur les marchés.

Mots clés : Risque de liquidité ; Modélisation ; Modèle de risque ; Simulation

1 Introduction

La banque, possède la capacité de transformer des ressources à court terme en crédits à moyen et long terme, elle est de ce fait exposée à un risque de liquidité majeur, elle peut devenir ainsi incapable de faire face à ses obligations vis-à-vis de toute réglementation bancaire, mais aussi vis-à-vis de ses clients. Le grand économiste Charles Goodhart [3, 4] a écrit, « liquidité et solvabilité sont les deux piliers de l'activité bancaire souvent impossibles à distinguer l'un de l'autre. Une banque illiquide peut rapidement devenir insolvable, et inversement ».

Les modèles de ruine sont des modèles dynamiques en général à temps continu qui décrivent l'évolution d'un « stock » avec entrées et sorties et sont donc de ce point de vue très proches des modèles de files d'attente [7]. Les applications de la théorie de risque sont nombreuses et présentes dans de nombreux domaines tels que les assurances [1, 8, 9], le risque alimentaire [2], le trafic routier[5] ou encore l'hydrologie [10].

La théorie du risque, également appelée théorie de la ruine, concerne de façon générale l'évaluation de probabilités de réalisation d'événements défavorables ou de dépassement de seuil. En assurance, le but est de modéliser l'évolution des réserves d'une compagnie

*Corresponding Author

d'assurance en fonction d'hypothèses sur sa réserve initiale u , sur la loi d'apparition des sinistres, la distribution de leurs montants Z_i et sur le taux de rentrée des primes d'assurance noté c . Le modèle le plus simple en assurance avec des hypothèses d'indépendance et des lois spécifiques est celui introduit par Lundberg (1903) et Cramér (1930), appelé modèle de Cramér-Lundberg. La ruine survient lorsque les réserves deviennent négatives (ou atteignent des valeurs trop basses sur une trop longue période).

Dans ce travail, il s'agit d'observer l'évolution de la réserve de liquidité dans le temps, partant d'un niveau de liquidité initial. L'idée est de construire un modèle permettant de décrire l'activité bancaire ayant une relation avec l'augmentation ou la baisse du stock de liquidité.

2 Modélisation

Dans le cadre de l'évolution du niveau de liquidité bancaire, le principe est identique à celui des assurances; En effet, on cherche à observer le processus de réserve au fil du temps, en partant d'un niveau initial de liquidité. La réserve en liquidité ne doit en aucun cas devenir inférieure à 2 pour cent du capital, qui représente la réserve obligatoire, une somme que toute banque algérienne doit constituer chaque mois.

2.1 Modèle de risque en assurance

En utilisant les processus suivants :

- $\{N(t), t \geq 0\}$ où $N(t)$ est le nombre total de réclamations dans l'intervalle $[0, t]$.
- $\{Z(t), t \geq 0\}$ avec $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ représente le montant cumulé des réclamations.
- $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées où Z_i est le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre.
- $\{X(t), t > 0\}$ où $X(t)$ représente la fortune de la compagnie d'assurance à l'instant t ,

Le processus de réserve est défini comme suit :

$$X(t) = u + ct - Z(t). \quad (1)$$

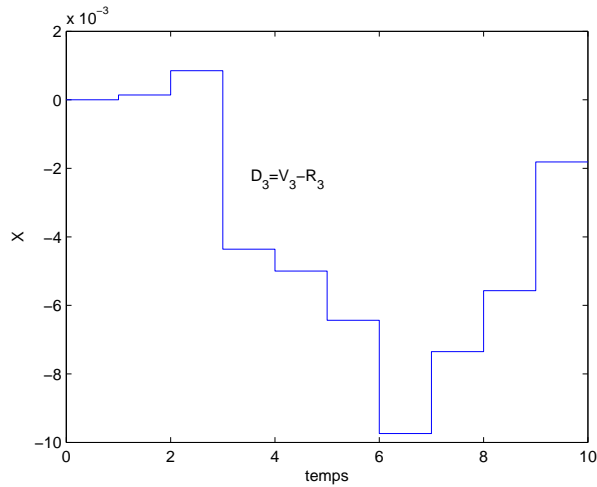
2.2 Modèle proposé en finance

En considérant les éléments suivants :

- La réserve initiale u , qui est en fait le niveau initial de liquidité.
- $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées où V_i est le montant du $i^{\text{ème}}$ versement.
- $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées où R_i est le montant du $i^{\text{ème}}$ retrait.
- $\{X(t), t > 0\}$ où $X(t)$ représente le niveau de liquidité à l'instant t ,

Le processus du niveau de liquidité est défini comme suit :

$$X(t) = u + \sum_{i=1}^t (V_i - R_i). \quad (2)$$

FIGURE 1 – Evolution de $X(t)$.

3 Simulation

Dans cette section, nous présentons l'algorithme(1) qui permet de simuler un scénario possible de l'évolution de $X(t)$. Pour estimer la probabilité que le niveau de liquidité soit au-dessous d'une certaine barrière, il faut simuler n (n très grand) répétitions indépendantes du processus $X(t)$ jusqu'à ce que la ruine se produise. Dans chaque répétition nous arrêtons le test à T . Dans le cas où la ruine se produit avant T , nous arrêtons le test à l'instant de la ruine. Soit p l'estimateur de cette probabilité. Nous prenons le rapport $p = \frac{n'}{n}$ où n' est le nombre de fois où la ruine s'est produite avant l'instant T , par rapport au nombre total n .

Algorithm 1 Simulation du processus $X(t)$

1. Introduire les paramètres gouvernant le modèle :

- Le niveau initial de liquidité u ;
- La loi de probabilité du montant des versements et du montant des retraits journaliers ;
- Le temps de simulation.

2. Initialiser le temps à zéro ;

3. Vérifier si le temps de simulation est atteint :

- Si oui, arrêter ;
- Sinon, Incrémenter le temps d'une unité (journée) et aller à 4 ;

4. Générer une valeur du montant des versements V_i et une valeur du montant des retraits R_i ;

5. Calculer $D_i = V_i - R_i$;

6. Calculer le niveau de liquidité à la date t ;

7. Retour à 3.

Exemple 3.1. Afin de pouvoir appliquer l'algorithme (1), nous considérons les paramètres suivants :

- La loi exponentielle du montant des versements (resp. des retraits) de paramètre $\lambda = 1$ (resp. $\mu = 1$).
- Le niveau de liquidité initiale $u = 500$.
- Le temps de simulation $t = 10000$.

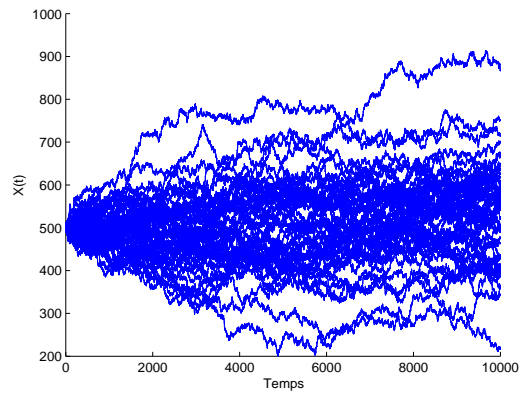


FIGURE 2 – Différents scénarios possibles de $X(t)$ lorsque $\lambda = \mu$.

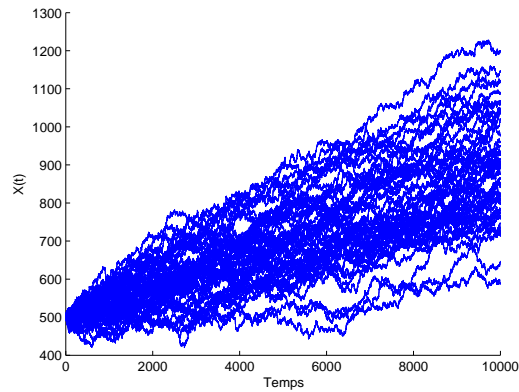


FIGURE 3 – Différents scénarios possibles de $X(t)$ lorsque $\lambda < \mu$

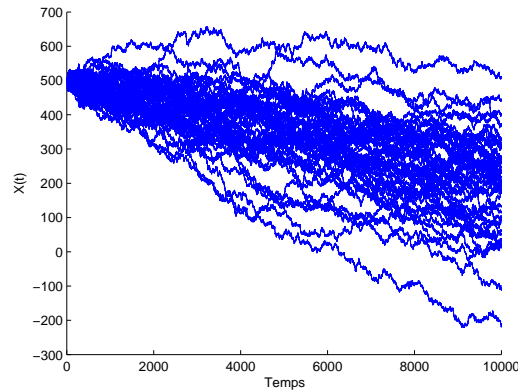


FIGURE 4 – Différents scénarios possibles de $X(t)$ lorsque $\lambda > \mu$

4 Conclusion

Ce travail repose sur la thématique de l'évaluation quantitative du risque de liquidité dans le système bancaire. Nous avons montré que le modèle utilisé rappelle ceux employés en assurance mais que les problématiques et les outils diffèrent.

Références

- [1] Asmussen, S. , Albrecher, H. : Ruin probabilities, Advanced Series on Statistical Science Applied Probability. World Scientific, New Jersey (2010).
- [2] Bertail, P. , Cléménçon, S. , Tressou, J. : Statistical analysis of a dynamic model for food contaminant exposure with applications to dietary methylmercury contamination. *Journal of Biological Dynamics*, **4**, 212-234 (2010).
- [3] Goodhart, C. : The background to the 2007 financial crises. *International Economics and Economic Policy*, **4**(4),331–346 (2008a).
- [4] Goodhart, C. : La gestion du risque de liquidité. *Revue de la stabilité financière, Banque de France, Numéro spécial liquidité*, (11),41–46(2008b).
- [5] Mouhous, F. , Aissani, D. and Farhi, N. : A stochastic risk model for incident occurrences and duration in road networks. *Journal of Transportmetrica A : Transport Science*, 1-33 (2022).
- [6] Tlilane, L., Allaoua, H., Benouaret, Z. et Aissani, D. : Calcul de la probabilité de ruine : cas de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 Béjaia. Actes du "CIGI'2015 –Proceedings du Congrès International de Génie Industriel", Université de Laval Ed., Quebec, 2015.

- [7] Touazi, A., Benouaret, Z. , Aissani, D. and Adjabi, S. : Sur l'équivalence entre la théorie de risque et la théorie de files d'attente , Actes du 11ème congrès international QUALITA'2015, Nancy, France, 188-192 (2015).
- [8] Touazi, A., Benouaret, Z. , Aissani, D. and Adjabi, S. : Méthode du noyau et stabilité forte dans l'approximation de la probabilité de ruine, 11ème conférence internationale MOSIM 2016, Montréal, Québec, Canada. Aout 2016.
- [9] Touazi, A., Benouaret, Z. , Aissani, D. and Adjabi, S. : Nonparametric estimation of the claim amount in the strong stability analysis of the classical risk model, Insurance : Mathematics and Economics **74**, 78-83 (2017).
- [10] Touazi, A., Aissani, D. : Ruin model and risk of freshwater shortage, 6th International Congress on Water, Waste and Energy Management (WaterWaste-22), Università degli Studi Niccolò Cusano, Rome, Italy. July 2022.

III

OPTIMISATION

Sommaire

III.1	A New Local Search Heuristic Based on the Gradient Method For a Binary Knapsack Problem	122
III.2	Quadratic Programming Problems with a Diagonally Dominant M-matrix	128
III.3	Cubical Dimension of New Classes of Balanced Binary Trees	135
III.4	A Dynamic Model of the Firm with Time Delay in Investment	141
III.5	Risk-Sensitive Necessary Optimality Condition for a BSDE Driven by Fractional Brownian Motion	148
III.6	Numerical Techniques for Solving Optimal Control of Pests by Predators	154
III.7	A New Metaheuristic for Optimizing Over the Integer Efficient Set	160
III.8	Solving the Multi-Objective Spanning Tree Problem Using a Hybrid Strategy	167
III.9	Multi-objective Tunicate Swarm Algorithm	173
III.10	Metagame Model for Urban Traffic Control	179
III.11	A Case study of Hypotheses and Model Construction: Financial Strategy, Accounting Quality and Organizational Performance in Developing Countries	184
III.12	Mean-Field-Type Games with Hierarchical Structures	189
III.13	Presolving pour un Problème de Minimisation Quadratique Convexe	196
III.14	Méthode Adaptée pour la Résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire à Variables Bornées	203
III.15	Méthode Adaptée pour la Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire en Nombres Entiers et Mixtes	210
III.16	Nouvelle Méthode pour la Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire Fractionnaire	216
III.17	Nouvelle Technique sans Variables Artificielles pour l'Initialisation de l'Algorithme du Simplexe	223
III.18	Amélioration de la Méthode Adaptée à Direction Hybride pour les Problèmes de Programmation Quadratique Convexe à Variables Bornées	230
III.19	Procédure de Presolving en Programmation Linéaire en Nombres Binaires	236
III.20	Méthode Directe de Support pour l'Optimisation Paramétrique du Modèle Moyenne-Variance	243
III.21	Ordonnancement d'Atelier Job-Shop par Métaheuristique des Colonies d'Abeilles- Etude de Sensibilité	250
III.22	Optimisation des Dimensions de l'AS/RS a Racks Glissant en Utilisant l'Algorithme Génétique	259

III.23	Variabilité de la Rente et Incitations à la Réforme dans un Cadre Non-Démocratique : une Analyse Théorique	265
III.24	Perception de la Qualité et Création de Valeur via l'Indication Géographique	273
III.25	Secteur Informel et Impact de la Crise Covid 19 sur la Filière Datte en Algérie. Une Approche d'Economie Industrielle	281
III.26	La Veille Stratégique, un Outil de Gestion d'Aide à la Prise de Décision	287
III.27	Approche Méthodologique d'Aide à la Décision Spatiale en Groupe	299
III.28	Qualité Nutritionnelle des Aliments et Risque Sanitaire, Intervention Publique et Stratégie des Acteurs : une Approche de l'Economie Industrielle	305
III.29	Émergence de Coopérations de Firmes Hétérogènes en RD : Règle d'Adhésion Exclusive Versus Règle d'Adhésion Ouverte	316

A New Local Search Heuristic Based on the Gradient Method For a Binary Knapsack Problem

Chahrazad Adiche

LaROMaD (USTHB), Faculty of Technology - Université M'hamed Bougara of Boumerdes, Algeria
c.adiche@univ-boumerdes.dz

Abstract : In this paper, we propose a new local search heuristic based on the gradient method for solving the 0-1 Knapsack Problem (KP). First, the KP problem is reformulated, by a polynomial transformation, into an equivalent Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) problem. The local optimal solution is then obtained by re-computing, after each optimization stage, the local gradient of the QUBO model, at the new extreme point encountered. Finally, a didactic example is presented to show the performance of our approach.

Keywords : QUBO model ; Knapsack problem ; local search ; gradient method.

1 Introduction

Let us consider a Knapsack of capacity W and a set $N = \{1, \dots, n\}$ of items, such that each item j ($j = 1, \dots, n$) has a weight w_j and profit c_j . The Knapsack Problem consists then to determine a subset $M \subset N$ of items that make the total weight no more than the capacity of the knapsack ($\sum_{i \in M} w_i \leq W$), and get the maximum total of the profit $\sum_{i \in M} c_i$. More formally we define 0 – 1 Knapsack Problem by the following mathematical programming :

$$Z = \max_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n w_j \cdot x_j \leq W. \quad (2)$$

all the parameters are assumed to be non negative integers and $x = (x_1, \dots, x_n)$ is a binary vector of the decision variables ($x_j = 1$ if the item j is selected and $x_j = 0$ otherwise). Without loss of generality, we may assume that $w_j \leq W$ for $j = 1, \dots, n$ (each considered item fits into the knapsack) and that $\sum_{j=1}^n w_j > W$ (to avoid trivial solutions). The problem is pseudo-polynomial in the weak sense, i.e., it may be solved in pseudo-polynomial time $O(nW)$, through Dynamic Programming. Others approaches to solve a knapsack model, based on quantum computing, was investigated [5]. Recent studies [1, 9, 10, 11] show that a mathematical formulation known as QUBO, an acronym for Quadratic Unconstrained Binary

Optimization models, offers a new promising direction of research. It allows the integration of classical and quantum computing and the application of these models in the combinatorial optimization field as a novel and effective alternative to traditional modeling and solution methodologies. In this paper, we propose to solve the 0-1 Knapsack Problem as an instance of a QUBO model. The remainder of this paper is organized as follows : Section 2 presents a QUBO formulation associated to the Knapsack Problem. In Section 3, a local search heuristic based on a gradient method for the relaxed QUBO model is described. A didactic example to illustrate the efficiency of the proposed approach is presented in Section 4, and Section 5 concludes the paper and gives some perspectives.

2 QUBO formulation

Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO) models belong to a class of NP-hard problems [7]. When several combinatorial optimization problems can naturally be formulated and solved as an instance of the QUBO model, many others that don't appear to be related to QUBO problems can be formulated as QUBO model [8]. In this section, we describe how the 0-1 Knapsack Problem (KP), can be reformulated as a QUBO model. Let us consider a 0-1 KP problem (1)-(2). Without loss of generality, we suppose that the capacity constraint (formula (2)) is an equality constraint. Indeed, any inequality constraint can always be put on equality constraint form by including the binary expansion of the corresponding integer slack variable. By observing that $x_j^2 = x_j$ when x_j is a 0-1 ($j = 1, \dots, n$), an augmented quadratic objective function (formula (3)) based on a quadratic penalty is then defined.

$$g(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^2 - P \left[\sum_{j=1}^n w_j x_j - W \right]^2. \quad (3)$$

Contrary to the Lagrangian relaxation approach, where penalties are dual variables determined by an optimization process, penalties P in the QUBO model are parameters set a priori to encourage the search process to avoid infeasible candidate solutions. Moreover, except in the special case of concave optimization, the Lagrangian relaxation approach doesn't assure to yield of a feasible solution. Indeed, in the general case, it only yields an upper bound instead of an optimum value. It is then necessary to recourse to an additional type of optimization called subgradient optimization, which QUBO models don't depend on. After expanding and simplifying the formula (3), we get :

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n (2c_j + 4PWw_j - 2Pw_j^2) x_j^2 - 4P \sum_i \sum_{j>i} w_i w_j x_i x_j \right] - PW^2, \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} x^T Q x - PW^2. \quad (5)$$

Dropping the additive constant $-PW^2$, the initial 0-1 KP problem is then reduced in polynomial time ($O(n)^2$) to the equivalent QUBO reformulation given by the problem (6).

$$\varphi = \max_{x \in \{0,1\}^n} \frac{1}{2} x^T Q x, \quad (6)$$

The additive constant $-PW^2$ does not impact the optimization. Once the QUBO model has been solved, the constant $-PW^2$ can be used to recover the original objective function value. Alternatively, the original objective value can always be determined by using optimal solution found when QUBO is solved. In addition, the matrix Q may have negative entries and is assumed to be symmetric or in upper triangular form. The continuous relaxation of the QUBO problem (6), is given by problem (7).

$$\varphi^{Re} = \max_{x \in [0,1]^n} \frac{1}{2} x^T Q x. \quad (7)$$

Let's set :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x. \quad (8)$$

One important characterization of local maxima for a binary multi-linear polynomial function is done in [6]. It is stated, for a particular case of a QUBO problem (6), by a proposition (2.1).

Proposition 2.1. *A binary vector \bar{x} is a local maximum for a QUBO problem (6), if and only if for every index $1 \leq j \leq n$ we have :*

$$\text{either } \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} > 0 \text{ and } x_j = 1 \right), \text{ or } \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} < 0 \text{ and } x_j = 0 \right) \quad (9)$$

if moreover $f(x)$ (formula (8)) is concave, then \bar{x} is a global maximum.

The relation between the QUBO problem (6) and its relaxed problem (7), is given by proposition (2.2).

Proposition 2.2. *Let us consider the QUBO reformulation problem (6) of the 0-1 KP problem (1)-(2) (defined with equality capacity constraint) and the QUBO continuous relaxed problem (7). Then, the values at the optimum of the two problems (6) and (7) are equal (i.e. $\varphi = \varphi^{Re}$) and the optimal solution of the QUBO continuous relaxed problem (7) is reached for a binary vector.*

The corollary (2.1) is a direct consequence of the above propositions.

Corollaire 2.1. *A binary vector x^* is an optimal solution for the 0-1 KP problem (1)-(2), if and only if x^* is an optimal solution for the both problems (6) and (7). Furthermore,*

$$Z = \varphi - PW^2 = \varphi^{Re} - PW^2 \quad (10)$$

Several exact methods are available for solving the QUBO problem. They are essentially based on continuous quadratic optimization methods. However, heuristics seem to be more efficient approaches to approximately solving intractable NP-hard problems [3].

3 Gradient Method

The proposed local search heuristic for the 0-1 KP problem is an iterative method based on the compute of the gradient of the QUBO model at each iteration. The main components of the method are :

- Initialization of search space.
- Structure of neighborhood.
- Intensification and diversification scheme.
- Stopping criteria.

(a) Initialization of search space. For generating an initial solution we use the Random Key encoding introduced by Bean in 1994 [2]. We generate a sequence r of n random real numbers between 0 and 1, where n is the number of items. To each item j , a key value r_j , which constitutes its order of selection, is associated. The first item to choose and to include in the selection is the one with the largest key value. And so on, until the first encountered item for which the gradient (at the corresponding solution) violates the conditions given by the formula (9). We get then, a subset of item that may be a initial solution to the QUBO problem.

(b) Structure of neighborhood. From a current solution x^k , it is possible to obtain a neighbor solution $x^{k+1} \in \mathcal{N}(x^k)$ by adding or removing an item from x^k .

(c) Intensification and diversification scheme. To improve, at each iteration k , the value of the objective function, we consider the two subsets of indices, $I_1^{(k)}$ and $I_0^{(k)}$, given by formula (11).

$$I_1^{(k)} = \{j / \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_j} < 0 \text{ and } x_j^{(k)} = 1\} \text{ and } I_0^{(k)} = \{j / \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_j} > 0 \text{ and } x_j^{(k)} = 0\}. \quad B94(11)$$

Let's set F^- and F^+ , respectively, as the smallest degradation and the smallest increase (formula (12)).

$$F^- = \min_{j \in I_1^{(k)}} \left| \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_j} \right| = \left| \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_{l^-}} \right| \text{ and } F^+ = \min_{j \in I_0^{(k)}} \left| \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_j} \right| = \left| \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_{l^+}} \right|. \quad (12)$$

We initialize the new current solution x^{k+1} at x^k , and we set the allowed move j^* to l^- ($l^- \in I_1^{(k)}$) if $F^- \geq F^+$ and to l^+ ($l^+ \in I_0^{(k)}$) otherwise. We put $k \rightarrow k + 1$. The new current solution x_j^k ($j = 1, \dots, n$) is then defined by $1 - x_j^{k-1}$ if $j = j^*$ and by x_j^{k-1} otherwise. $f(x^k) \geq f(x^{k-1})$ is immediate from the definition of the QUBO formulation. Every time a movement is applied to go from the current solution x^k , to the neighbor solution x^{k+1} . To avoid cycling cases in which we would come back to x^k and oscillate between x^{k+1} and x^k , a diversification process is ensured by the random walk algorithm which consists of realizing from time to time a move which is no more guided by the evaluation function.

(d) Stopping criteria. Let us put $q \in [0, 1]$ the value threshold and $nb - iter$ the number of iteration. At every iteration of the local search heuristic, a real value $rw \in [0, 1]$ is randomly generated. Then, if $rw > q$ the heuristic will select the best movement, otherwise, the heuristic will make a feasible random movement. The heuristic is stopped only if no further improvement can be obtained or the set $I_1^{(k)} \cup I_0^{(k)}$ becomes empty.

4 Didactic Example

Consider the 0-1 KP model with : $n = 10$; $c = (55, 10, 47, 5, 4, 50, 8, 61, 85, 87)$; $w = (95, 4, 60, 32, 23, 72, 80, 62, 65, 46)$; and $W = 269$.

Introducing a slack variable in the form of the binary expansion : $32x_{11} + 16x_{12} + 8x_{13} + 4x_{14} + 2x_{15} + 1x_{16}$, we get the equality constraint : $\sum_{j=1}^{16} w_j \cdot x_j = W$.

Taking $P = 90$ ([9]), the QUBO model ($\max_{x \in \{0,1\}^{16}} \frac{1}{2} x^T Q x - 6512490$), associated with the previous 0-1 KP model, is defined by the additive constant -6512490 and a QUBO matrix Q (Figure 1). The proposed Local Search Heuristic gives an optimal solution for the pre-

7575410	136800	2052000	1094400	786600	2462400	2736000	2120400	2223000	1573200	1094400	547200	273600	136800	68400	34200
0	384300	86400	46080	33120	103680	-115200	89280	93600	66240	46080	23040	11520	5760	2880	-1440
0	0	5162494	691200	496800	1555200	-1728000	1339200	1404000	993600	691200	345600	172800	86400	43200	21600
0	0	0	2914570	264960	829440	-921600	714240	748800	529920	368640	184320	92160	46080	23040	11520
0	0	0	0	2132108	596160	-662400	513360	538200	380880	264960	132480	66240	33120	16560	8280
0	0	0	0	0	6039460	2073600	-1607040	1684800	1192320	829440	414720	207360	103680	51840	25920
0	0	0	0	0	0	6595216	1785600	1872000	1324800	921600	460800	230400	115200	57600	28800
0	0	0	0	0	0	0	5312282	1450800	1026720	714240	357120	178560	89280	44640	22320
0	0	0	0	0	0	0	0	5342370	1076400	748800	374400	187200	93600	46800	23400
0	0	0	0	0	0	0	0	0	4073934	529920	264960	132480	66240	33120	16560
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2914560	184320	92160	46080	23040	11520
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1503360	46080	23040	11520	5760
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	763200	11520	5760	2880
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	384480	2880	-1440
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	192960	-720
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	96660

FIGURE 1 – QUBO matrix

vious QUBO model, after two iterations. The numerical results are summarized in Table1 and Table2.

TABLE 1 – KP Objectif function value of the Didactic example.

0-1 KP	Relax KP	Glouton Heuristic
295	312.22	290

TABLE 2 – QUBO Objectif function value of the Didactic example.

0-1 QUBO	Relax QUBO	Local Search Heuristic
295	295	295

5 Conclusion

In this paper, the 0-1 KP problem is considered and reformulated as a QUBO model. The proposed Local Search Heuristic for the equivalent QUBO model, offers a novel solution methodology for solving the 0-1 KP problem. Furthermore, when the relaxed KP model

gives only an upper bound for the 0-1 KP model, the relaxed QUBO model gives an optimal solution for the 0-1 KP model. A didactic example to illustrate our approach is presented. In future work, numerical and metaheuristics approaches for the relaxed QUBO model will be investigated and applied to practical and complex problems with large data sets.

References

- [1] Anthony M., Boros E., Crama Y., Gruber A. : Quadratic Reformulations of Nonlinear Binary Optimization Problems. *Mathematical Programming*, **162**, 1-2, 115-144 (2017).
- [2] Bean J.C. : Genetics and random keys for sequencing and optimization. *ORSA Journal of Computing*, **6**, 2, 154-160 (1994).
- [3] Boros E., Hammer P.L. : Pseudo-Boolean Optimization. *Discrete Applied Mathematics* **123**,155–225 (2002).
- [4] Boros E., Hammer P.L., Tavares G. : Local search heuristics for Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO). *J Heuristics* **13**, 99–132 (2007). DOI 10.1007/s10732-007-9009-3.
- [5] Dupuy, P., Hullo J.F. : Knapsack Problem Variant of QAOA for Battery Revenue Optimization. EDF Energy RD UK Center, Hove, United Kingdom. arXiv : 1908.02210v2 [CS.ET] (2019).
- [6] Hammer, P.L., Rudeanu S. : *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1968).
- [7] Garey, M.R., Johnson D.S. : *Computers and Intractability : An Introduction to the Theory of NP-completeness*. W.H. Freeman, San Francisco. (1979)
- [8] Kochenberger G., Hao J-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., Wang Y. : The Unconstrained Binary Quadratic Programming Problem : A survey. *Journal of Combinatorial Optimization*, **28**, 1, 58-81 (2014).
- [9] Quintero R. A., Zuluaga L. F. : *Characterizing and Benchmarking QUBO Reformulations of the Knapsack Problem*, by ISE Lehigh, (2018).
- [10] Ushijima-Mwesigwa H., Negre C. F. A., Mniszewsk S. M. : Graph Partitioning using Quantum Annealing on the D-Wave System. arXiv :1705.03082 (2017).
- [11] Vyskocil T., Pakin S., Djidjev H. N. : Embedding Inequality Constraints for Quantum Annealing Optimization,” *Quantum Technology and Optimization Problems. Lecture Notes in Computer Science*, vol 11413. Springer, Cham (2019).



Quadratic Programming Problems with a Diagonally Dominant M-matrix

Katia Hassaini*¹ and Mohand Ouamer Bibi²

¹Research Unit LaMOS (Modelling and Optimization of Systems), Department of Operations Research ,
University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria ,
katia.hassaini@univ-bejaia.dz

²Research Unit LaMOS (Modelling and Optimization of Systems), Department of Operations Research,
University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria ,
mdouamer.bibi@univ-bejaia.dz

Abstract : In this paper, we intend to minimize a quadratic programming problem with a diagonally dominant M-matrix and box constraints. The algorithm of optimization is constructed on the basis of support methods and uses the fact that a diagonally dominant M-matrix possesses a non-negative inverse which allows to have a sequence of feasible points monotonically increasing. Using the notion of support for an objective function developed by Gabasov et al. in 1987, our approach leads to a more general condition which allows to have an initial pseudo-solution, related to a coordinator support and close to the optimal solution. Furthermore, the algorithm is coupled with a presolving procedure and illustrated by a numerical example.

MSC: 90C20 ; 65K05

Keywords : Convex quadratic programming ; Diagonally dominant M-matrix ; Presolving procedure ; Coordinator support

1 Introduction

In the literature, several approaches were proposed for solving a quadratic programming problem with an associated positive definite matrix D and box constraints [2, 3, 6, 11, 13]. However, quadratic programming with a diagonally dominant M-matrix is also studied on its own right [10]. The M-matrices are known to have many applications in the modeling of the dynamic systems, in economic sciences and ecology [1, 12]. Quadratic minimization with a diagonally dominant M-matrix arises directly in a variety of applications including portfolio optimization with transaction costs [9] and image segmentation [5]. The M-matrices are also present in the obstacle problems, and active set methods are used to solve them [7], a direct

*Corresponding Author

algorithm for the solution to the affine two-sided obstacle problem with an M-matrix is presented in [8].

Our main goal in this article is to propose a new effective method for solving quadratic programming problems with a diagonally dominant M-matrix and box constraints, based on the algorithms of [10]. These methods use the fact that a diagonally dominant M-matrix possesses a nonnegative inverse which allows to have a sequence of feasible points monotonically increasing. Introducing the concept of support for an objective function developed in [2, 3, 4], our approach differs by a more general condition which allows to have an initial feasible solution, related to a coordinator support and close to the optimal solution. This new method is coupled with a presolving procedure and illustrated by a numerical example.

2 Problem Statement and Definitions

Consider the following quadratic programming problem :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x^T D x - c^T x, \\ \text{s.t.} \quad 0 \leq x \leq u e, \end{cases} \quad (1)$$

where u is a real positive number, $c = c(J) = (c_j, j \in J)$, $e = e(J) = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ are real finite n -vectors, and $J = \{1, 2, \dots, n\}$. The matrix $D = D(J, J) = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ is a symmetric square diagonally dominant M-matrix of order n , i.e,

$$d_{ii} > 0, \quad d_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \quad D^{-1} \geq 0, \quad d_{ii} > \sum_{j \neq i} |d_{ij}|, \quad i = \overline{1, n},$$

where the symbol $D^{-1} \geq 0$ denotes that all the elements of the matrix D^{-1} are nonnegative.

Remarque 2.1. *A symmetric M-matrix is always positive definite ($x^T D x > 0, \forall x \neq 0$). Moreover, any submatrix of an M-matrix is itself an M-matrix.*

Définition 2.1.

- Any vector x verifying the constraints $0 \leq x \leq u e$ is called a feasible solution of the problem (1).
- A feasible solution x^0 is said optimal if it gives to the objective function of the problem (1) his minimum value on the feasible set.
- If x is a feasible solution of (1), then the vector $E(x) = E = D x - c = g$ is the gradient of F at point x , also called vector of estimates. An optimal solution x^0 of (1) is completely characterized by the following relations :

$$\begin{cases} E_j(x^0) \geq 0, & \text{for } x_j^0 = 0, \\ E_j(x^0) \leq 0, & \text{for } x_j^0 = u, \\ E_j(x^0) = 0, & \text{for } 0 < x_j^0 < u, \quad j \in J. \end{cases} \quad (2)$$

From the matrix D , we define the two following matrices :

$$D^+ = \text{diag}(d_{ii}, \quad i = \overline{1, n}), \quad D^- = D - D^+;$$

and we calculate also the vectors :

$$y^+ = (y_i^+, i \in J) = uD^+e \Leftrightarrow y_i^+ = ud_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$y^- = (y_i^-, i \in J) = uD^-e \Leftrightarrow y_i^- = -u \sum_{j \neq i} |d_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

For every feasible solution x of (1), we have the double inequality :

$$y^- - c \leq E \leq y^+ - c. \quad (5)$$

In particular, we deduce for the optimal solution x^0 :

$$y^- - c \leq E^0 \leq y^+ - c, \quad E^0 = g^0 = Dx^0 - c. \quad (6)$$

Thus, the following lemma allows us to fix some components of the optimal solution x^0 at their bounds :

Lemma 2.1. *Let $i \in J = \{1, 2, \dots, n\}$. Then we have :*

$$(i) \text{ If } c_i < y_i^- \Rightarrow x_i^0 = 0,$$

$$(ii) \text{ If } c_i > y_i^+ \Rightarrow x_i^0 = u.$$

Proof. This follows from the relations (6) and the optimality conditions (2). \square

The second lemma allows us to exclude a component x_i^0 to be at a certain bound.

Lemma 2.2.

$$(i) \text{ If } c_i > 0 \implies x_i^0 > 0;$$

$$(ii) \text{ If } c_i < y_i^+ + y_i^- = u(d_{ii} - \sum_{j \neq i} |d_{ij}|) \implies x_i^0 < u.$$

The third lemma allows us to predict that for a certain index $i \in J$, the estimate E_i^0 of the optimal vector x^0 must be zero.

Lemma 2.3. *Let $i \in J$.*

If $0 < c_i < u(d_{ii} - \sum_{j \neq i} |d_{ij}|) = y_i^+ + y_i^-$, then we must have $E_i^0 = 0$.

Example.

Thanks to the above lemmas we can directly solve the following minimization problem, with :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = c(J) = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad ue = ue(J) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Calculate the vectors $y^- = -5(1, 2, 2, 2, 1)^T$, $y^+ = 5(4, 4, 4, 4, 4)^T$, $y^+ + y^- = (15, 10, 10, 10, 15)^T$. According to the lemmas (2.1)-(2.3) $c_1 = -10 < y_1^- = -5 \Rightarrow x_1^0 = 0$, $c_5 = 25 > y_5^+ = 20 \Rightarrow x_5^0 = u = 5$, and for $i = \overline{2, 4}$ we have $0 < c_i < y_i^+ + y_i^-$, then from equation $E_2^0 = E_3^0 = E_4^0 = 0$, we deduce $x_2^0 = \frac{57}{56}$, $x_3^0 = \frac{116}{56}$ and $x_4^0 = \frac{127}{56}$. Hence, we get $x^0 = \frac{1}{56}(0, 57, 116, 127, 280)^T$.

Définition 2.2.

- The subset $J_S \subset J$ is called a support of the objective function F , as the following condition always holds : $\det D_S = \det D(J_S, J_S) \neq 0$.
- We set $J_N = J \setminus J_S$, with $J_N = J_{N^+} \cup J_{N^-}$, $J_{N^+} \cap J_{N^-} = \emptyset$. The set $J_P = \{J_S, J_{N^+}, J_{N^-}\}$ is called a support of the problem (1).
- The couple $\{x, J_P\}$, formed by a feasible solution x and a support J_P is called a Support Feasible Solution (SFS).

According to the partition of J , we can partition the matrix and vectors into blocks as follows :

$$D = \begin{pmatrix} D_S & D_{SN} \\ D_{NS} & D_N \end{pmatrix} \text{ with } D_S = D(J_S, J_S), \quad D_{SN} = D(J_S, J_N), \quad D_N = D(J_N, J_N),$$

$$c = \begin{pmatrix} c_S \\ c_N \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_S \\ x_N \end{pmatrix}, g = E = \begin{pmatrix} E_S \\ E_N \end{pmatrix}, \quad c_S = c(J_S) = (c_j, j \in J_S), \quad c_N = c(J_N),$$

$$x_S = x(J_S), \quad x_N = x(J_N), \quad E_S = E(J_S), \quad E_N = E(J_N).$$

Définition 2.3.

- Let $\kappa = \kappa(J) = (\kappa(J_S), \kappa(J_{N^+}), \kappa(J_{N^-}))$ be a vector satisfying

$$\begin{cases} \kappa_{N^+} = \kappa(J_{N^+}) = 0, \\ \kappa_{N^-} = \kappa(J_{N^-}) = ue(J_{N^-}), \\ \kappa_S = \kappa(J_S) = -D_S^{-1}[D_{SN}\kappa_N - c_S]. \end{cases} \quad (7)$$

A vector κ satisfying (7) is called a pseudosolution of the problem (1). Thus, a pseudosolution κ verifies $E_S(\kappa) = 0$. If in addition κ verifies the inequality $0 \leq \kappa(J_S) \leq ue(J_S)$, then κ will be a feasible solution.

- The triplet $J_P = \{J_S, J_{N^+}, J_{N^-}\}$ is called a coordinator support if there exists a pseudosolution κ such that

$$E_j(\kappa) \geq 0, \quad j \in J_{N^+}, \quad (8)$$

$$E_j(\kappa) \leq 0, \quad j \in J_{N^-}. \quad (9)$$

In this case, we say that the pseudosolution κ is associated to the coordinator support J_P .

Théorème 2.1. A pseudosolution κ associated to a coordinator support J_P is optimal if and only if

$$0 \leq \kappa_j \leq u, \quad \forall j \in J_S. \quad (10)$$

Proof. The vector κ is a feasible solution and satisfies the optimality conditions (2). \square

2.1 Construction of a initial feasible solution

Let $J_S = \{i \in J : 0 < c_i < u(d_{ii} - \sum_{j \neq i} |d_{ij}|) = y_i^+ + y_i^-\}$, $J_N = J \setminus J_S = J_{N^+} \cup J_{N^-}$, with $J_{N^+} = \{i \in J_N : c_i \leq 0\}$, $J_{N^-} = \{i \in J_N : c_i \geq y_i^+ + y_i^-\}$. We construct the vector $x = x(J) = (x(J_S), x(J_{N^+}), x(J_{N^-}))$ as follows :

$$\begin{cases} x_{N^+} = x(J_{N^+}) = 0, \\ x_{N^-} = x(J_{N^-}) = ue(J_{N^-}) = ue_{N^-}, \\ x_S = x(J_S), \end{cases} \quad (11)$$

with

$$E_S(x) = D(J_S, J)x - c_S = D(J_S, J_S)x_S + D(J_S, J_N)x_N - c_S = 0,$$

from where we get

$$D_S x_S = -D_{SN} x_N + c_S \implies x_S = D_S^{-1}(-D_{SN} x_N + c_S).$$

We have $-D_{SN} x_N \geq 0$ and $c_S > 0 \implies -D_{SN} x_N + c_S > 0$. The inverse matrix $D_S^{-1} \geq 0$ and no row of D_S^{-1} is zero. Which implies $x_i > 0$, $\forall i \in J_S$, and so $x_S > 0$. We also have $x_S < ue_S$.

Therefore, the vector $x = (x_S, x_{N^+}, x_{N^-})$ constructed according to (11) is a feasible solution to the problem (1).

3 Iteration of algorithm

By virtue of the lemmas (2.1)-(2.2) of the presolving procedure, we can consider that the set J is composed of the following three subsets :

$$J_{N^+} = \{i \in J : y_i^- \leq c_i \leq 0\}, \quad J_{N^-} = \{i \in J : y_i^- + y_i^+ \leq c_i \leq y_i^+\},$$

$$J_S = \{i \in J : 0 < c_i < y_i^- + y_i^+\} \text{ with } y_i^- + y_i^+ = u(d_{ii} - \sum_{j \neq i} |d_{ij}|).$$

According to this partition, we construct with (11) the vector $x = (x_S, x_{N^+}, x_{N^-})$ which is a feasible solution of the problem (1). If we have $E_{N^+} \geq 0$ and $E_{N^-} \leq 0$, then x is an optimal solution of the problem (1). Else, we define the following sets :

$$K = \{i \in J_{N^+} : E_i < 0\}, \quad L = \{i \in J_{N^-} : E_i > 0\}.$$

We then construct a vector $\bar{x} = (\bar{x}(\bar{J}_S), \bar{x}(\bar{J}_{N^+}), \bar{x}(\bar{J}_{N^-}))$ such as

$$\bar{x}(\bar{J}_{N^+}) = 0, \quad \bar{x}(\bar{J}_{N^-}) = ue(\bar{J}_{N^-}) = ue_{N^-}, \quad \bar{E}(\bar{J}_S) = D(\bar{J}_S, J)\bar{x} - c(\bar{J}_S) = 0,$$

where

$$\bar{J}_S = J_S \cup K \cup L, \quad \bar{J}_{N^+} = J_{N^+} \setminus K, \quad \bar{J}_{N^-} = J_{N^-} \setminus L, \quad \bar{x}(\bar{J}_S) = D^{-1}(\bar{J}_S, \bar{J}_S) \left[-D(\bar{J}_S, \bar{J}_N)\bar{x}(\bar{J}_N) + c(\bar{J}_S) \right].$$

We set $x := \bar{x}$, $E := \bar{E}$ and $J_P := \bar{J}_P$, then repeat the iteration.

4 Numerical example

For the illustration of the described algorithm, we consider the quadratic programming problem (1) with

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ue = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calculate the vectors $y^- = -4(1, 2, 2, 2, 1)^T$, $y^+ = 4(4, 4, 4, 4, 4)^T$, $y^+ + y^- = (12, 8, 8, 8, 12)^T$.

Then $J_S = \{i \in J : 0 < c_i < y_i^+ + y_i^-\} = \{1\}$, $J_N = J \setminus J_S = \{2, 3, 4, 5\}$, $J_{N^+} = \{i \in J_N : c_i \leq 0\} = \{2, 3, 5\}$, $J_{N^-} = \{i \in J_N : c_i \geq y_i^+ + y_i^-\} = \{4\}$.

So $x_{N^+} = (x_2, x_3, x_5)^T = (0, 0, 0)^T$, $x_{N^-} = x_4 = 4$ and $x_S = D_S^{-1}(-D_{SN}x_N + c_S) \implies x_1 = \frac{1}{4}(-D_{14}x_4 + c_1) = \frac{1}{2}$.

Hence $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (\frac{1}{2}, 0, 0, 4, 0)^T$ is a feasible solution. So we have

$Dx = (2, -\frac{1}{2}, -4, 16, -4)^T \implies x^T Dx = 2 * \frac{1}{2} + 16 * 4 = 65$, $c^T x = 2 * \frac{1}{2} + 13 * 4 = 53$, $F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx - c^T x = \frac{65}{2} - \frac{106}{2} = -\frac{41}{2}$, then we obtain $E(x) = Dx - c = (0, \frac{3}{2}, 3, 3, 0)^T$.

Let $K = \{i \in J_{N^+} : E_i < 0\} = \emptyset$, $L = \{i \in J_{N^-} : E_i > 0\} = \{4\}$ and $\bar{J}_{N^+} = J_{N^+} \setminus K = \{2, 3, 5\}$, $\bar{J}_{N^-} = J_{N^-} \setminus L = \emptyset$, $\bar{J}_N = \{2, 3, 5\}$, $\bar{J}_S = J_S \cup K \cup L = \{1, 4\} \implies \bar{x}_{N^+} = (\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_5)^T = 0 = \bar{x}(\bar{J}_N)$, $\bar{x}(\bar{J}_S) = (\bar{x}_1, \bar{x}_4)^T = D^{-1}(\bar{J}_S, \bar{J}_S)[c(\bar{J}_S) - D(\bar{J}_S, \bar{J}_N)\bar{x}(\bar{J}_N)]$,

where $D(\bar{J}_S, \bar{J}_S) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies D^{-1}(\bar{J}_S, \bar{J}_S) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$c(\bar{J}_S) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix} \implies \bar{x}_S = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$.

So the vector $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)^T = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{13}{4}, 0)^T$ is feasible.

Since $E(\bar{x}) = D\bar{x} - c = (0, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}, 0, \frac{3}{4})$, then the vector \bar{x} satisfies the optimality criterion, with $F(\bar{x}) = \frac{1}{2}\bar{x}^T D\bar{x} - c^T \bar{x} = -\frac{173}{8} = -21.625$.

5 Conclusion

The main contribution of this paper is the construction of a method for solving a quadratic programming problem with a diagonally dominant M-matrix and box constraints, including a presolving procedure. The algorithm of optimization is constructed on the basis of support methods and uses the fact that an Diagonally Dominant M-matrix possesses a non-negative inverse which allows to have a sequence of feasible points monotonically increasing. Inspired by an external method and using the notion of support for an objective function, our approach leads to a more general condition which allows to have an initial pseudo-solution, related to a coordinator support and close to the optimal solution. The algorithm is illustrated by a numerical example. In a future work we will develop an implementation of the proposed algorithm in order to solve practical and complex problems.

References

- [1] Berman, A. and Plemmons, R. J. : Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences. *Academic Press, New York*, (1979).
- [2] Brahma, B., Bibi, M. O. : Dual Support Method for Solving Convex Quadratic Programs. *Optimization*, **59**, 6, 851-872 (2010).
- [3] Djemai, S., Brahma, B., Bibi, M. O. : A primal-dual method for SVM training. *Neurocomputing*. **211**, 34-40 (2016).
- [4] Gabasov, R., Kirillova, F. M., Kostyukova, I. O., Raketsky, V. M. : Constructive Methods of Optimization, Volume 4 : Convex Problems. University Press, Minsk (1987).(in Russian).
- [5] Hochbaum, D. S. : Multi-label markov random fields as an efficient and effective tool for image segmentation, total variations and regularization. *Numer. Math. Theory Methods Appl.***6**,169–198 (2013).
- [6] Bibi, M. O., Ikheneche, N. & Bentobache, M. : A hybrid direction algorithm for solving a convex quadratic problem. *International Journal of Mathematics in Operations Research*. **16**, 2 : 159-178 (2020).
- [7] Kärkkäinen, T., Kunisch, K. and Tarvainen, P. : Augmented Lagrangian Active Set Methods for Obstacle Problems. *Journal of optimization theory and applications*.**119**. 3 :499–533(2003).
- [8] Jiang, Y. J. and Zeng, J. P. : Direct algorithm for the solution of two-sided obstacle problems with M-matrix. *Numerical Linear Algebra with Applications*. **18**. 1 : 167-173. (2011).
- [9] Lobo, M.S., Fazel, M. and Boyd, S. : Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. *Annals of Operations Research*.**152**,341–365(2007).
- [10] Luk, F. T., & Pagano, M. : Quadratic programming with M-Matrices, *Linear Algebra And Its Applications*. **33**, 15-40 (1980).
- [11] Pakdaman, M. and Effati, S. : Bounds for convex quadratic programming problems and some important applications. *International Journal of Operational Research*. **30**, 2 :277-287 (2017).
- [12] Šiljak, D. D. : Large-scale Dynamic Systems : Stability and Structure. North-Holland, New York.(1978).
- [13] Stachurski, A. : On a conjugate directions method for solving strictly convex QP problem. *Math Meth Oper Res*. **86**, 523–548 (2017).



Cubical dimension of new classes of balanced binary trees

Kamal Kabyl 

¹LaMOS Research Unit, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria,
kamal.kabyl@univ-bejaia.dz

Abstract : The hypercube is a structure whose topology is used in different fields such as computer science, combinatorics, code theory, etc. A cubical dimension of a tree T is the smallest dimension of a hypercube in which T is embeddable. The Conjecture of Havel [4] claims that the cubical dimension of every 2^n -vertex balanced binary tree, $n \geq 1$, is n . It is known that given D_n , $n \geq 1$, the complete dichotomic tree, the binary tree B_n , $n \geq 2$ is obtained from one copy of D_{n-1} and a new vertex u , such that u is joined by an edge to the root of D_{n-1} . In this paper, we determine the cubical dimension of new families of 2^{n+1} -vertex balanced binary trees obtained by a suitable transformation of the tree B_n .

MSC: 05C05, 05C60

Keywords : binary tree ; cubical dimension ; embedding ; Havel's conjecture ; hypercube

1 Introduction

Let G and H be finite graphs. $V(G)$ and $V(H)$ denote the vertex sets of G and H , respectively. $E(G)$ and $E(H)$ denote the edge sets of G and H , respectively. An *embedding* f of G into H is a one-to-one mapping of $V(G)$ into $V(H)$ that preserves adjacency of vertices. In a general way, the study of an embedding of G into H turns to see if G is isomorphic to a subgraph of H . Our particular interest concerns the case where H is a hypercube and G is a binary tree. The hypercube of dimension n , denoted Q_n , is the graph whose 2^n vertices are boolean vectors of length n , such that two vertices are adjacent if and only if they differ in exactly one coordinate. A tree T is a connected graph without cycles. A binary tree is a tree with a maximum degree less than or equal to three. We say that a tree T is balanced if in the bipartition of $V(T)$, both parts have the same cardinality. A tree T is said to be cubical if, for some integer n , T is isomorphic to a subgraph of Q_n . Moreover, if T is cubical then the least integer n such that T is embeddable into Q_n is called the cubical dimension of T , denoted by $cd(T)$. In this setting, Firsov [3] showed that all trees are cubical. Hence, for a tree T , the problem we consider is to determine $cd(T)$. In this framework, Wagner and Corneil [9] showed that the problem of deciding if a tree T is isomorphic to a subgraph of Q_n is NP-Complete. Binary trees and their cubical dimensions have been studied in [1, 2, 7, 8]. A long standing conjecture of Havel (1984) [4] states that every 2^n -vertex balanced binary

tree, $n \geq 1$ is embeddable into the hypercube Q_n . This conjecture is known to be true for several classes of balanced binary trees [1, 4, 7, 8]. A tree T is said C_n -valuated if we can mark every edge of T by an integer from the set $\{1, 2, \dots, n\}$ in such a way that for any path P of T , there exists an integer $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ for which an odd number of edges are marked by m . Havel and Moravek [6] proved that a tree T is embeddable into the hypercube Q_n if and only if there exists a C_n -valuation of T . The following result is given by Havel and Liebl [5]: Every 2^n -vertex balanced binary tree having two vertices of degree 3 is embeddable into the hypercube Q_n . In this paper we introduce new classes of 2^{n+1} -vertex balanced binary trees for which the above conjecture of Havel is true.

2 Optimal embedding of new families of balanced binary trees

In this section we determine the cubical dimension of new families of 2^{n+1} -vertex balanced binary trees arising from an appropriate modification of the binary tree B_n , $n \geq 2$. To construct and characterize our families of 2^{n+1} -vertex balanced binary trees, we need to use the dichotomic tree D_n and the binary tree B_n , defined as follows :

1. The complete dichotomic tree D_n is defined as follows : if $n = 1$, D_n is the complete bigraph $K_{1,2}$; if $n \geq 2$, D_n is obtained from two disjoint copies T and T' of D_{n-1} and from a new vertex v by adding an edge from v to the only vertex of degree 2 of T and another edge to the analogous vertex of T' . Thus D_n has 2^n vertices of degree 1, one vertex of degree 2 called the root of D_n , and $2^n - 2$ vertices of degree 3. Havel and Liebl [5] have proved that $cd(D_1) = 2$, and for $n \geq 2$, $cd(D_n) = n + 2$.
2. For $n = 1$, the binary tree B_n is the complete bigraph $K_{1,2}$, for $n \geq 2$, B_n is obtained from D_{n-1} , and a new vertex u in such a way that u is joined by an edge (called auxiliary edge) to the root of D_{n-1} . Thus B_n has 2^n vertices and for $n \geq 1$, $cd(B_n) = n + 1$ [5].

2.1 Binary trees RB_n

For $n \geq 2$, the binary tree RB_n is obtained from the binary tree B_n , in such a way that for each vertex of B_n , we insert a new vertex into only one of its incident edge. In this framework, the vertically path obtained by subdivision of the auxiliary edge of B_n will be referred to as the auxiliary path of RB_n . Thus we distinguish the two following special cases that induce the different families of RB_n given as follows :

- For $n \geq 2$, the binary tree RB_n^1 is obtained from the tree B_n by subdividing the auxiliary edge of B_n and for each vertex of D_{n-1} in B_n , we insert a new vertex of degree two into only one of its incident edge.
- For $n \geq 2$, the binary tree RB_n^2 is obtained by subdividing twice the auxiliary edge of B_n and for each vertex of odd degree of D_{n-1} in B_n , we insert a new vertex of degree two into only one of its incident edge. The above-defined families of RB_n are illustrated in Figure 1.

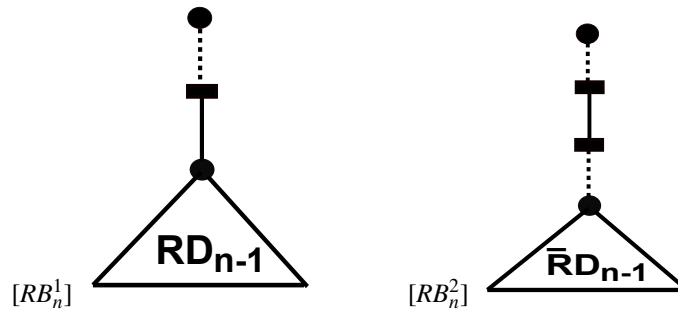


FIGURE 1 – Families of binary trees RB_n^i , $i \in \{1,2\}$ (the new inserted vertices are drawn as rectangles and the new created edges are drawn by dashed lines)

The copies of binary trees RD_{n-1} and $\bar{R}D_{n-1}$ given in Figure 1 are defined as follows :

- For $n \geq 2$, the binary tree $\bar{R}D_{n-1}$ is obtained from the binary tree D_{n-1} in such a way that for each vertex of odd degree of D_{n-1} , we insert a new vertex of degree 2 into one only of its incident edge.
 - For $n \geq 2$, the binary tree RD_{n-1} is obtained from the binary tree D_{n-1} in such a way that for each vertex of D_{n-1} , we insert a new vertex of degree 2 into one only of its incident edge.
- For illustration, for $n = 2$, RB_2^1 and RB_2^2 are given in Figure 2.

Clearly the binary tree RB_n is balanced and has $2^n + 1$ vertices of degree 1, 2^n vertices of

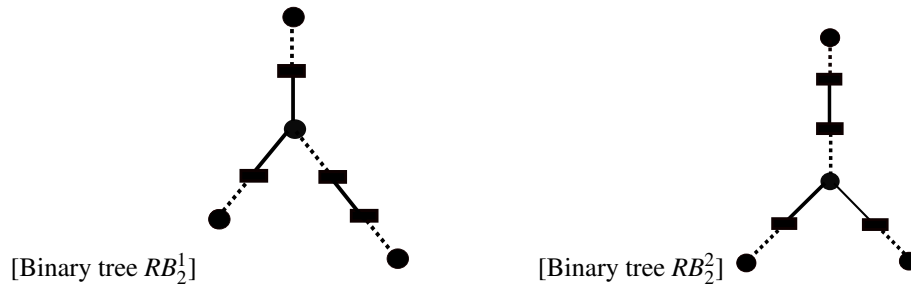


FIGURE 2 – Binary trees of RB_2

degree 2, and $2^n - 1$ vertices of degree 3. Thus, RB_n is a balanced binary tree with 2^{n+1} vertices, and for $n \geq 3$, RB_n is necessarily one of the possible seven types shown in Figure 3.

Our main result is given as follows :

Théorème 2.1. For $n \geq 2$, $cd(RB_n) = n + 1$.

3 Proof of the main result

In order to prove our main result, we consider the following classes of binary trees : For $n \geq 3$, $RB_{n,k}^i$ is a binary tree obtained from RB_n^i by inserting two new vertices x_k^i and y_k^i of

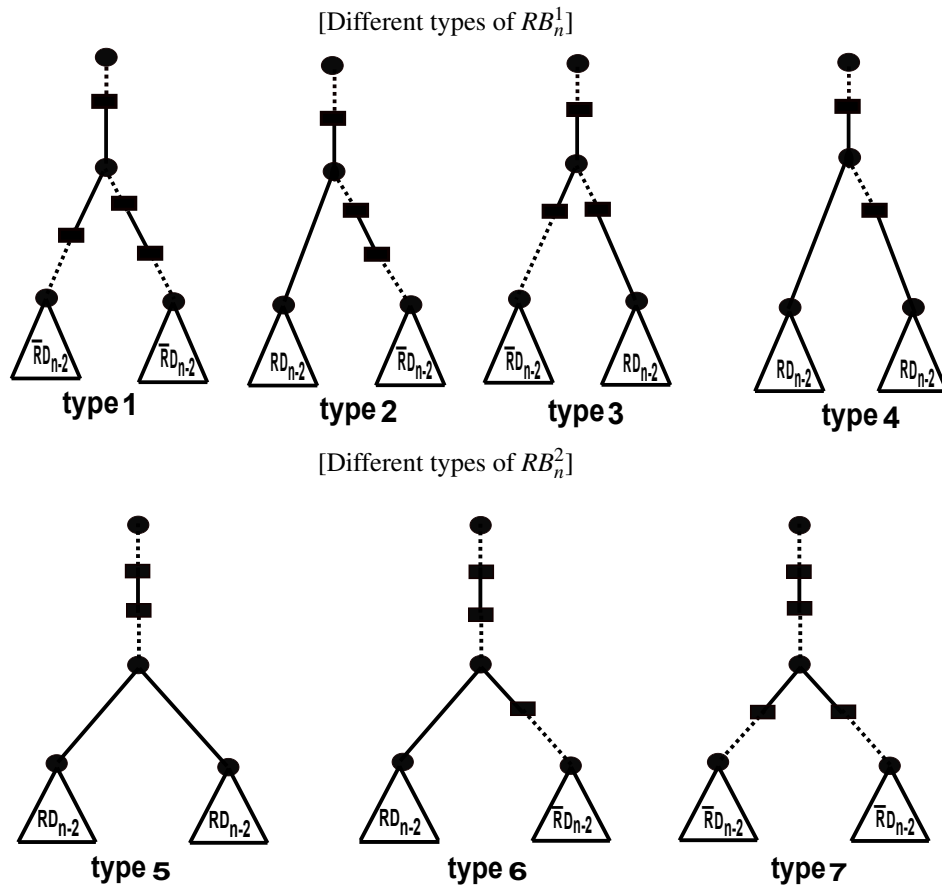


FIGURE 3 – Different types of RB_n

degree 2 in the k -th edge $u_k^i v_k^i$ of the descending auxiliary path of RB_n^i , $i, k \in \{1, 2\}$. The above-defined binary trees are illustrated in Figure 4.

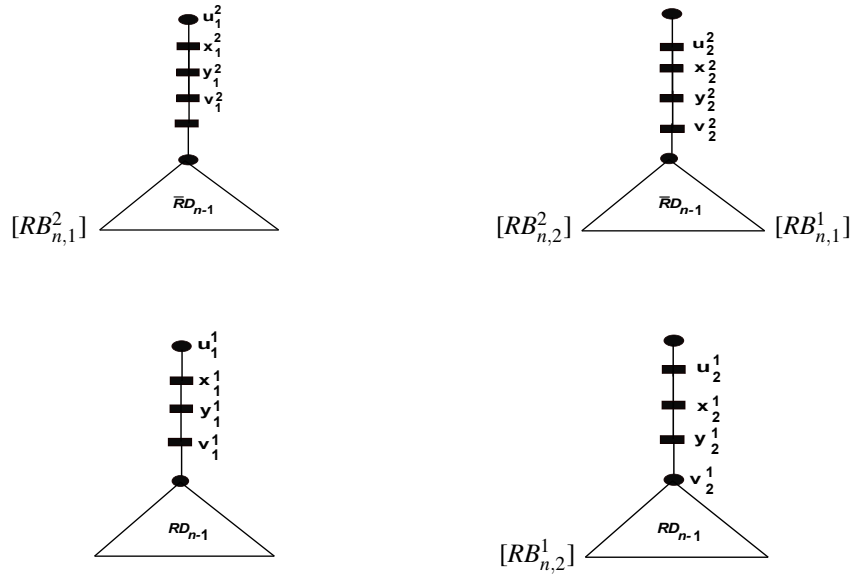


FIGURE 4 – Different classes of $RB_{n,k}^i$

To prove the main result, we proceed in the following way :

- For $i \in \{1, 2\}$, we use the induction on n by assuming that RB_{n-1}^i are C_n -valuated and their valuations γ_i are given by considering for each of them only its auxiliary path, see Figure 5 for illustration.
- Each type j of RB_n , $j \in \{1, 2, \dots, 7\}$ can be easily obtained by combining a copy T_j of

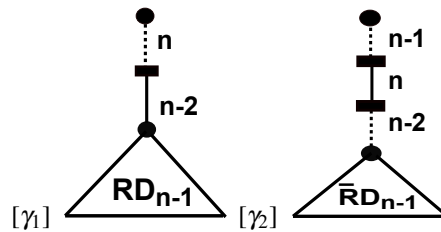


FIGURE 5 – C_n valuation γ_i of $RB_{n-1}^i, i \in \{1, 2\}$

$RB_{n-1,k}^i$ and a copy \hat{T}_j of $RB_{n-1}^i, i, k \in \{1, 2\}$. More specifically, this combination is done by identifying the pendant edge of the auxiliary path of \hat{T}_j with the edge $x_k^i y_k^i$ of T_j .

- For $i, k \in \{1, 2\}$ and for $j \in \{1, 2, \dots, 7\}$, the C_{n+1} -valuation λ_j of each type j of RB_n , is constructed from the C_n -valuation γ_i as depicted in Figure 5 by setting :
 - ▷ $\lambda_j(u_k^i x_k^i) = \lambda_j(y_k^i v_k^i) = n + 1$.
 - ▷ $\lambda_j(e') = \gamma_i(e')$ for every edge e' from \hat{T}_j of RB_{n-1}^i .
 - ▷ For every edge $e \notin \{u_k^i x_k^i, y_k^i v_k^i\}$ from T_k^i , $\lambda_j(e)$ is obtained from γ_i of RB_{n-1}^i by interchanging the two possible values. In other words, the identification of the edge $x_k^i y_k^i$ of T_j with the pendant edge of the auxiliary path of \hat{T}_j is only done under the condition that these edges have a same label.

4 Conclusion

In this paper, we define new families of 2^{n+1} -vertex balanced binary trees arising from an appropriate modification of the binary tree B_n , $n \geq 2$ and we determine their cubical dimension. Mainly, our main result shows that any type of RB_n , $n \geq 2$ satisfies the conjecture of Havel [4]. Then the result of Havel [4], who considered the tree B_n^2 obtained by inserting two new vertices of degree 2 into the auxiliary edge of B_n and by inserting a new vertex of degree two into each edge of D_{n-1} in the tree B_n , is a particular case of type 5.

References

- [1] S.A. Choudum and S. Lavanya. Embedding a subclass of trees into hypercube. *Discrete Math.* **311** (10-11) (2011), 866–871.
- [2] S.A. Choudum and I. Raman. Embedding height balanced trees and Fibonacci trees in hypercubes. *J. Appl. Math. Computing* **30** (1-2) (2009), 39–52.
- [3] V. Firsov. On isometric embedding of a graph into a Boolean cube. *Cybernetics* **1** (6) (1965), 112–113.
- [4] I. Havel. On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. *Časopis Pěst. Mat.* **109** (2) (1984), 135–152.
- [5] I. Havel and P. Liebl. One-legged caterpillars span hypercubes. *J. Graph Theory* **10** (1) (1986), 69–77.
- [6] I. Havel and J. Morávek. B -valuation of graphs. *Czech. Math. J.* **22** (2) (1972), 338–351.
- [7] L. Nebeský. On cubes and dichotomic trees. *Časopis Pěst. Mat.* **99** (2) (1974), 164–167.
- [8] K. Kabył, A. Berrachedi and É. Sopena. A note on the cubical dimension of new classes of binary trees. *Czech. Math. J.* **65** (1) (2015), 151–160.
- [9] A. Wagner and D.G. Corneil. Embedding trees in a hypercube is NP-complete. *SIAM J. Comput.* **19** (3) (1980), 570–590.



A dynamic model of the firm with time delay in investment

Mourad Azi^{*1,2}, Mohand-Ouamer Bibi², Rim Belaidi¹, and Soumia Laib¹

¹Department of Mathematics and Computer Science, University of Mila, Algeria,
m.azi@centre-univ-mila.dz

²Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
mdouamer.bibi@univ-bejaia.dz

Abstract : This work belongs to the realm of dynamic theory of the firm. It discusses the optimal financing and investment policies of a firm with time delay in investment. The problem is formulated as a nonlinear optimal control problem with phase and mixed constraints and time delay. In this work we apply the iterative policy-connecting procedure designed by Van Loon (1983) to derive the optimal policy of the firm.

Keywords : Optimal Control, Optimal Corporate Finance, Time Delay, Maximum Principle.

1 Introduction

The modern theory of optimal corporate finance is the area of finance that deals with making decisions regarding the sources of funding, the capital structure of corporation, discusses investment allocation, how earnings should be retained for internal investment and what proportion should be distributed to shareholders, the best mix of debt and equity financing, and the actions that managers take to increase the value of the firm to the shareholders. The primary objective of corporate finance is to increase shareholder value or to maximize the value of a company while minimizing its cost of capital. It is possible to model such situations as optimal control problems. Jorgenson (1963, 1967) was among the first economists to use of optimal control theory in order to analyze the dynamic investment behavior of a hypothetical firm.

In economics, we often see a delay between an economic action and its consequence. This is known as a time lag. Time delays and their causes are of paramount importance. By time delay, we do not mean the occasional time shift to get a "lagged". we mean an effect which is an identifiable, organic delay in one of the flow channels of the model. Examples may be : the length of time to buy and install a new machine.

*Corresponding Author

In this work, the problem of the optimal policies of financing and investment of a company with time delay is treated. The model of the firm (with out time delay) that serves as the starting point of this research work was studied in (Hilten and al. [1993], Blok and al. [1996], and Dmitruk [2001]). Essentially, the basic model can be traced back to Lesourne [1973]; later, it was also used amongst others as the foundation of most models by : Van Loon [1983], Van Schijndel [1988], Kort [1989], Van Hilten [1993], Blok [1996] and Dmitruk [2001].

2 Dynamic model of a company with time delay

The modern theory of optimal corporate finance consists in maximizing the value of firm (as conceived by its shareholders or by its managers), by determining simultaneously the optimal financing, investment and dividend policy over a finite horizon. Let us study the activity of a company in a finite time interval $T = [0, z]$, where z is the planning horizon.

A firm achieves its profit by transforming inputs into outputs. We need to specify the firm's production function, we restrict ourselves to the following : we assume that the firm produces output by means of labour and capital goods. At each instant $t \in T$ we assume that the firm produces a homogeneous output and that the level of production is determined by $Q = Q(t) = qK(t)$ where $K(t)$ is the amount of capital goods of the firm accumulated before an instant t and q is the productivity of the capital. This output is sold on the imperfect market and the income is given by the concave sales function $S = S(Q(t))$. We assume that the firm has only one type of assets : capital goods $K(t)$. Furthermore, the firm has the disposal of equity $X = X(t)$ and an amount of borrowing (debt) $Y = Y(t)$ to finance its affairs. Then the capital goods consist of $X = X(t)$ and $Y = Y(t)$:

$$K(t) = X(t) + Y(t), t \in T. \quad (1)$$

The debt is supposed to be nonnegative and we introduce an upper bound on debt in terms of a maximum debt to equity rate b :

$$0 \leq Y(t) \leq bX(t) \quad b \geq 0. \quad (2)$$

If we assume depreciation to be proportional to the amount of capital goods, and there is a delay between the investment action and its consequences, we can write :

$$\dot{K}(t) = I(t-s) - aK(t), \quad (3)$$

where $I(t-s) = I_s$: gross investment, that is the number of assets bought or sold by the firm ; s : time delay and a : depreciation rate.

We assume that the firm can raise its equity by retaining earnings instead of paying them out as dividends to the shareholders. The difference between the income $S(Q)$ and the expenses of the firm which consist of depreciation $aK(t)$, interest on debt $rY(t)$, wage payments $wL(t)$ ($w > 0$: wage rate, $L = L(t) = IK(t)$: amount of labor employed) and dividend pay-out $D(t)$, is retained by the firm and is used to raise its equity :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (1-f) \{S - aK - wL - rY\} - D. \\ &= (1-f) \{S(q^{-1}K) - aK - wlq^{-1}K - r(K-X)\} - D. \end{aligned} \quad (4)$$

where f is the tax rates.

At the start of the planning period, the value of capital goods and equity are known : $K(0) = K_0$ and $X(0) = X_0$.

Variables X , K will be treated as state variables, D , I are the control variables. Due to (1), the variable Y can be eliminated, and we consider trajectories of (3), (4) which satisfy the inequalities :

$$X(t) \leq K(t) \leq (1+b)X(t), \quad t \in T. \quad (5)$$

Piecewise continuous functions $D(t)$, $I(t)$, $t \in T$, are said to be feasible controls if the following inequalities hold :

$$D(t) \geq 0, \quad I(t-s) \geq 0, \quad t \in T. \quad (6)$$

Finally, we assume that the policy of the company is determined by the interest of share holders to maximize the value of the company, which is taken to be the present value of the future dividend plus the final value of equity capital at time z :

$$V(D, I) = \int_0^z e^{-it} D(t) dt + e^{-iz} X(z), \quad (7)$$

where i is the discount rate.

Thus, the construction of an optimal program policy of dividends, investments, and capital distribution is reduced to the following optimal control problem :

$$\begin{aligned} \max_{(D, I)} V(D, I) &= \int_0^z e^{-it} D(t) dt + e^{-iz} X(z), \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{K}(t) = I(t-s) - aK(t), \quad K(0) = K_0, \\ \dot{X}(t) = (1-f) \{ S(q^{-1}K(t)) - aK(t) - wlq^{-1}K(t) - r(K(t) - X(t)) \} - D(t), \\ X(0) = X_0, \\ K(t) - X(t) \geq 0, \\ (1+b)X(t) - K(t) \geq 0, \quad b \geq 0, \\ D(t) \geq 0, \\ I(t-s) \geq 0, \forall t \in T. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8)$$

3 Sufficient optimality conditions

The following theorem gives the sufficient conditions for optimality of the problem (8).

Théorème 3.1. *The admissible controls $D(t)$, $I(t)$, $t \in T$, and the corresponding trajectories $X(t)$, $K(t)$, $t \in T$, are optimal in problem (8) if there exist continuous functions $\lambda_1(t)$ and $\lambda_2(t)$, $t \in T$, and piecewise-continuous functions (Lagrange multipliers) $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\nu_1(t)$, and $\nu_2(t)$, $t \in T$, such that the following conditions hold :*

1. *the conjugacy condition*

$$\dot{\lambda}_1(t) - i\lambda_1(t) = a\lambda_1(t) - (1-f) \left\{ \frac{\partial S}{\partial K} - wlq^{-1} - a - r\lambda_2 + \nu_1(t) - \nu_2(t) \right\}, \quad (9)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) - i\lambda_2(t) = -(1-f)r\lambda_2(t) - \nu_1(t) + (1+b)\nu_2(t); \quad (10)$$

2. the transversality condition

$$\lambda_1(z) = \gamma_1 - \gamma_2, \quad (11)$$

$$\lambda_2(z) = 1 - \gamma_1 + (1+b)\gamma_2, \quad (12)$$

$$\gamma_1(K(z) - X(z)) = 0, \gamma_1 \geq 0, \quad (13)$$

$$\gamma_2((1+b)X(z) - K(z)) = 0, \gamma_2 \geq 0; \quad (14)$$

3. the complementary slackness and nonnegativity condition

$$\mu_1(t)I(t-s) = 0, \mu_1(t) \geq 0 \quad \forall, t \in [s, z], \quad (15)$$

$$\mu_2(t)D(t) = 0, \mu_2(t) \geq 0, t \in T, \quad (16)$$

$$v_1(t)(K(t) - X(t)) = 0, v_1(t) \geq 0, t \in T, \quad (17)$$

$$v_2(t)((1+b)X(t) - K(t)) = 0, v_2(t) \geq 0, t \in T; \quad (18)$$

4. the stationarity condition

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I(t)}(t) + \chi_{[0, z-s]} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_s}(t+s) = \chi_{[0, z-s]}(\lambda_1(t+s) + \mu_1(t+s)) = 0, t \in T, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D(t)} = 1 - \lambda_2(t) + \mu_2(t) = 0, t \in T, \quad (20)$$

$$\text{where } \chi_{[0, z-s]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \in [0, z-s], \\ 0, & \text{else;} \end{cases}$$

5. the discontinuities (jumps) condition

$$\lambda_1(\tau^-) = \lambda_1(\tau^+) + \eta_1(\tau) - \eta_2(\tau), \quad (21)$$

$$\lambda_2(\tau^-) = \lambda_2(\tau^+) - \eta_1(\tau) + (1+b)\eta_2(\tau), \quad (22)$$

$$\eta_1(\tau)(K(\tau) - X(\tau)) = 0, \eta_1(\tau) \geq 0, \quad (23)$$

$$\eta_2(\tau)((1+b)X(\tau) - K(\tau)) = 0, \eta_2(\tau) \geq 0. \quad (24)$$

4 Solving through path coupling

According to the Theorem each feasible trajectory $X(t), K(t), t \in T$, of problem (8) is characterized by a set of the Lagrange multipliers $\mu_1(t), \mu_2(t), v_1(t)$, and $v_2(t), t \in T$, which take either zero or positive values. A part of the feasible trajectory $X(t), K(t), t \in T$, and corresponding controls $D(t), I(t), t \in T$, is called a path if there exist continuous functions $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \mu_1(t), \mu_2(t), v_1(t)$, and $v_2(t), t \in T$, such that the optimality conditions are satisfied and none of the functional Lagrange multipliers $\mu_1(t), \mu_2(t), v_1(t)$, and $v_2(t), t \in T$, changes its positive value to zero or vice versa, from zero to positive. The optimal trajectories of the problem (8) consist of the paths and are constructed in such a way that the adjoint trajectory $\lambda_1(t), \lambda_2(t), t \in T$, complies with transversality conditions and jump conditions are satisfied at instants t_{ij} when the path i passes to the path j .

We now apply the iterative path coupling procedure developed by Van Loon [11] in order to transform the set of sufficient condition into a solution which covers the optimal policy of the firm over the whole planning period. This procedure consists of four steps. Identifying the feasible and infeasible policies (paths) ; selection of final policy(path) ; coupling of feasible policies to master policy strings ; found an optimal policy string according to initial state conditions.

4.1 Feasible policies (paths)

Since the model (8) has four inequality constraints (4 Lagrange multipliers), there are two possible values for each multiplier : (0) or (+). For each possible path if a multiplier has the positive sign +, the associate constraint is active, on the other hand if it is zero 0 the constraint can be passive. To find the optimal solution of the problem (8) we must treat the $2^4 = 16$ cases. But, the analysis of all these paths shows that most of them are not feasible. The following table displays the feasible paths :

<i>path</i>	2	3	4	6	7	8	9	10
μ_1	0	+	0	0	+	0	+	0
μ_2	+	0	0	+	0	0	+	+
v_1	+	+	+	0	0	0	0	0
v_2	0	0	0	+	+	+	0	0

TABLE 1 – Feasible paths

Each feasible path is characterized by

<i>path</i>	I_s	D	\dot{Y}	\dot{X}	\dot{K}	Y	$\frac{\partial S}{\partial K}$
2	+	0	0	+	+	0	$= wlq^{-1} + a + \frac{i}{1-f}$
3	0	+	0	-	-	0	
4	aK	+	0	0	0	0	
6	+	0	+	+	+	bX	$= wlq^{-1} + a + \frac{br+i/(1-f)}{(1+b)}$
7	0	+	-	-	-	bX	
8	+	+	+	0	+	bX	
9	0	0	\pm	\pm	-	+	$= wlq^{-1} + a + r$
10	aK	0	-	+	0	+	

TABLE 2 – Characteristics of feasible paths.

4.2 Determination of final paths

The transversality conditions and the discontinuity equations give us the following final path :

- if $i < (1 - f)r$, then the final path is 4 ;
- if $i > (1 - f)r$, so the final path is 8.

4.3 The construction of strings that end with the final paths

The synthesis problem can be solved recursively backwards by examining for each potential final path which paths could serve as predecessor. The criterium for doing so is the continuity of the state variables at the coupling points, which implicitly assumes boundaries on the control variables at each instant of time.

The optimal trajectories of the problem (8) are :

1. if $i < (1 - f)r$, the optimal strings are :
 - $3 \rightarrow 4$, if the initial condition is $K_0 = X_0$,
 - $9 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, if we have the initial condition : $X_0 < K_0 < (1 + b)X_0$,
 - $6 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, if we have the initial condition : $K_0 = (1 + b)X_0$;
2. if $i > (1 - f)r$, the optimal strings are :
 - 8, if we have $X(0) = m = \frac{1}{1 + b}K_8(t)$,
 - $7 \rightarrow 8$, if $X_0 > m$,
 - $6 \rightarrow 8$, if $X_0 < m$.

Example 4.1. *The following price function was chosen :*

$$P(Q(t)) = \bar{P}\left(1 - \frac{Q(t)}{\bar{Q}}\right),$$

and the values of the parameters assumed in this case study were obtained from statistics for the chemical industry and we used the following assumption [2] : $s = 2$, $z = 60$, $\bar{P} = 95.263$, $\bar{Q} = 0.0625$, $a = 0.1$, $b = 2$, $Y_0 = bX_0 = 0.0024$, $K_0 = 0.0036$, $f = 0.4$, $r = 0.1$, $i = 0.04$, $q = 62.5$, $wl = 80$, we assume that for all $t \in [-s, 0]$, $I(t) = 0.002$. In this example we have : $i < (1 - f)r = 0.06$. Since $K_0 = (1 + b)X_0$, then the optimal string is : $6 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 4$.

After finding the coupling points between paths, we obtain the following optimal controls :

$$I(t - s) = \begin{cases} 0.002 & \text{if } 0 \leq t \leq 2, \\ \frac{10.636e^{-0.139t} + 0.505}{227.727e^{-0.139t} + 5.05} & \text{if } 2 \leq t \leq 25.55, \\ 0.00564 & \text{if } 25.55 \leq t \leq 43.86, \\ \frac{138.222e^{-0.0864t} + 0.0965}{741.537e^{-0.0864t} + 0.965} & \text{if } 43.86 \leq t \leq 51.014, \\ 0.001 & \text{if } 51.014 \leq t \leq 60; \end{cases}$$

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t \leq 51.014, \\ 0.0078 & \text{if } 51.014 \leq t \leq 60. \end{cases}$$

Additionally we have : $X(z) = 0.1$, then we get :


$$\max V(D, I) \simeq 0.0235.$$

References

- [1] M. Azi and M. O. Bibi, Optimal Control of a Dynamical System with Intermediate Phase Constraints and Applications in Cash Management, *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 12(2) (2022), 279-291.
- [2] M.W.J. Blok, A.T. Kearney, *Dynamic Models of the Firm Determining Optimal Investment, Financing and Production Policies by Computer*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [3] M.N. Dmitruk and R. Gabasov, The Optimal Policy of Dividends, Investments, and Capital Distribution for the Dynamic Model of a Company, *Automation and Remote Control*, 62(8) (2001), 1349–1365.
- [4] L. Gollman et H. Maurer, Theory and application of optimal Problem with multiple time-delay, Department of Mechanical Engineering Munster University of Applied Sciences, Germany, April 2014.
- [5] O.V. Hiltten, Optimal Firm Behaviour in the Context of Technological Progress and a Business Cycle, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol 352, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.
- [6] O.V. Hiltten, P.M. Kort and P.J.J.M. Loon, *Dynamic Policies of a Firm : An Optimal Control Approach*, Springer, Berlin, 1993.
- [7] L. Kezan, E. Feng and X. Zhilong, Optimal control and optimization algorithm of non-linear impulsive delay system producing, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 24 (2007), 387–397.
- [8] P.M. Kort, Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol 330, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
- [9] C.G. Krouse, W. Y. Lee, Optimal equity financing of the corporation, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8(3) (1973), 539 - 563.
- [10] J. Lesourne, *Modèles de croissance des entreprises*, Dunod, Paris, 1973.
- [11] V.P. Loon , *A Dynamic Theory of the Firm : Production, Finance and Investment*, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol 218, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1983.
- [12] L.S. Pontryaguine, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley and Sons, New Jersey, 1962.
- [13] S.P. Sethi, *Optimal Control Theory : Applications to Management Sciences and Economics*, Third Edition, Springer Nature, Switzerland, 2019.
- [14] V.C Schijndel, *Dynamic Firm and Investor Behaviour under Progressive Personal Taxation*, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. vol 305. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 1988.



Risk-Sensitive Necessary Optimality Condition for a BSDE driven by fractional Brownian motion

Tayeb Bouaziz^{*1} and Adel Chala 

¹Laboratory of Applied Mathematics, Mohamed Khider University of Biskra, Algeria.,
tayeb.bouaziz@univ-biskra.dz

²Laboratory of Applied Mathematics, Mohamed Khider University of Biskra, Algeria.,
adel.chala@univ-biskra.dz

Abstract : In this work, we study the risk-sensitive optimal control problem for a backward stochastic system driven by a fractional Brownian motion with Hurst parameter H greater than one-half. We make the Malliavin derivative interfere to establish the risk-sensitive necessary optimality conditions, when the control domain is assumed convex and the driver of the system depends on the control variable.

MSC: 60G22 ; 60H07 ; 60H30 ; 93E03.

Keywords : Backward Stochastic Differential Equation ; Fractional Brownian motion ; Malliavin derivative.

1 Introduction

In this paper, we intend to establish necessary optimality conditions of Pontryagin's stochastic maximum principle, for risk-sensitive performance functionals, for a system governed by a backward stochastic differential equation (BSDEs in short) driven by a fractional Brownian motion (FBM in short) with Hurst parameter $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. For more details on controlled Backward stochastic differential equations, we refer to [3, 5, 6, 7].

2 Problem formulation

Let W^H be a one-dimensional FBM with Hurst index $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, that we equip with the natural filtration of the FBM $W^H : \mathcal{F}^H$ defined for all $t \geq 0$ by $\mathcal{F}^H = \mathcal{F}_t^H = \sigma(W^H(r); 0 \leq r \leq t) \vee \mathcal{N}$. We define the space

$$\mathcal{L}_\rho^2(\mathbb{R}) := \left\{ \xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \|\xi\|_\rho^2 := \int_0^T \int_0^T \xi(u) \xi(v) \rho(u, v) dudv < +\infty \right\},$$

*Corresponding Author

where for all $(u, v) \in [0, T]^2$, $\rho(u, v) = H(2H - 1)|u - v|^{2H-2}$. In this paper, we will work on a particular subspace of $\mathcal{L}_\rho^2(\mathbb{R})$, namely \mathcal{P}_T the set of all functions Q , of the form

$$Q = f \left(\int_0^T \xi_1(t) dW_t^H, \int_0^T \xi_2(t) dW_t^H, \dots, \int_0^T \xi_n(t) dW_t^H \right), \quad (1)$$

where f is polynomial of n variables and $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ is an orthogonal subsequence of $\mathcal{L}_\rho^2(\mathbb{R})$. The Malliavin derivative of such a random variable $Q \in \mathcal{P}_T$ is defined for all $s \in [0, T]$

$$D_s^H Q = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\int_0^T \xi_1(t) dW_t^H, \int_0^T \xi_2(t) dW_t^H, \dots, \int_0^T \xi_n(t) dW_t^H \right) \xi_i(s). \quad (2)$$

Let $\mathbb{D}_{1,2}$ be the Banach space which is the completion of \mathcal{P}_T with respect to the norm

$$\|Q\|_{1,2}^2 := \mathbb{E} \left(\|Q\|_\rho^2 + \|D_t^H Q\|_\rho^2 \right),$$

and we define the derivative of all $Q \in \mathcal{P}_T$

$$\mathbb{D}_s^H Q := \int_0^T \rho(s, v) D_v^H Q dv, s \in [0, T]. \quad (3)$$

Having given basic concepts and tools, we consider the following controlled fractional BSDE

$$\begin{cases} dy_t^v &= -g(t, \eta(t), y_t^v, z_t^v, v_t) dt + z_t^v dW_t^H \\ y_T^v &= \xi, \end{cases} \quad (4)$$

where $g : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, the terminal condition ξ is a square-integrable random variable \mathcal{F}_T^H -measurable and v is an admissible control. We denote by \mathcal{U} the set of all admissible controls, which we suppose convex and define the criterion to be minimized, with initial risk-sensitive cost, as follows

$$J^\theta(v) = \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\psi[y^v(0)] + \int_0^T f(t, \eta(t), y_t^v, z_t^v, v_t) dt \right) \right], \quad (5)$$

where θ is the risk-sensitive index, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, and η is to be defined in the next. In our control problem, we aim to minimize the functional J^θ over the set \mathcal{U} , that is, we seek an admissible control $u \in \mathcal{U}$ such that

$$J^\theta(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J^\theta(v). \quad (6)$$

Assumptions

(H₁) : We assume that η is an Itô process of the form $\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t F(s) dW_s^H$, where $\eta(0)$ is a given constant, and $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a deterministic continuous function such that $F(t) \neq 0$ for all $t \in [0, T]$.

(H₂) : $g, f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous with respect to t and continuously differentiable with respect to (η, y, z, u) and having (with all the derivatives) a polynomial growth in all variables. Moreover, there exists $C > 0$, such that for all $y_1, z_1, y_2, z_2, x \in \mathbb{R}$:

$$|g(t, x, y_1, z_1) - g(t, x, y_2, z_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

(H₃) : $\xi = h(\eta_T)$, such that $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable function with polynomial growth.

(H₄) : ψ is continuously differentiable, and there exists $C > 0$, such that for all $y \in \mathbb{R}$: $|\psi(y)| \leq C(1 + |y|)$.

Under the previous assumptions, the cost functional is well defined from \mathcal{U} to \mathbb{R} and we have existence and uniqueness result .See the paper of Peng and Hu [5].

3 Risk-Sensitive Necessary Optimality Conditions

At first, we introduce an auxiliary state process γ^v which satisfies the following forward SDE

$$d\gamma_t^v = f(t, \eta(t), y_t^v, z_t^v, v_t) dt, \gamma^v(0) = 0.$$

The control problem $\{(4), (5), (6)\}$ is equivalent to

$$\begin{cases} \inf_{v \in \mathcal{U}} \mathbb{E}[\exp\theta(\psi[y^v(0)] + \gamma_T)] = \inf_{v \in \mathcal{U}} \mathbb{E}[\Lambda(y^v(0), \gamma_T)], \\ \text{subject to} \\ d\gamma_t^v = f(t, \eta(t), y_t^v, z_t^v, v_t) dt, \\ dy_t^v = -g(t, \eta(t), y_t^v, z_t^v, v_t) dt + z_t^v dW_t^H, \\ \gamma^v(0) = 0, y_T^v = \xi. \end{cases} \quad (1)$$

Define

$$A_T^\theta := \exp\theta \left(\psi[y^u(0)] + \int_0^T f(t, \eta(t), y_t^u, z_t^u, u_t) dt \right).$$

and $\Theta_T = \psi[y^u(0)] + \int_0^T f(t, \eta(t), y_t^u, z_t^u, u_t) dt.$

Under assumptions 2, there exists a unique \mathcal{F}^H -adapted pair of processes p_1, q_1, p_2, q_2 , which solves the following system of forward-backward SDE

$$\begin{cases} d\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} dp_1(t) \\ dp_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_y(t) & g_y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} dt \\ \quad + \begin{pmatrix} q_1(t) \\ -H_z(t) \end{pmatrix} dW_t^H, \\ p_1(T) = -\theta A_T^\theta, \quad p_2(0) = -\theta A_T^\theta \psi_y[y^u(0)], \end{cases} \quad (2)$$

The Hamiltonian associated with the optimal state dynamics (γ, y, z)

$$H(t, \eta(t), y_t^u, z_t^u, u_t, \vec{p}(t), \vec{q}(t)) := p_1(t)f(t) + p_2(t)g(t).$$

3.1 Finding the new adjoint equation

The idea is to transform the process $((p_1, q_1), (p_2, q_2))$ as [3]. First of all, we remark that $dp_1(t) = q_1(t) dW_t^H$ and $p_1(T) = -\theta A_T^\theta$, the explicit solution of this FBSDE (Remark 3.4 in the paper of Hu [5]) is

$$p_1(t) = -\theta \tilde{\mathbb{E}} \left[A_T^\theta \mid \mathcal{F}_t^H \right] = -\theta V^\theta(t), \quad (1)$$

where $\tilde{\mathbb{E}}$ denotes the quasi-conditional expectation introduced by Hu et al. in [6] and

$$V^\theta(t) := \tilde{\mathbb{E}} \left[A_T^\theta \mid \mathcal{F}_t^H \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Hence

$$\tilde{p}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \end{pmatrix} := \frac{1}{\theta V^\theta(t)} \vec{p}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

By using (2) and (3), we have

$$\tilde{p}_1(T) = -1 \text{ and } \tilde{p}_2(0) = -\psi_y[y^u(0)].$$

We have

$$0 < e^{-(1+T)C\theta} \leq V^\theta(t) \leq e^{(1+T)C\theta}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Such bounds of V^θ provide us the following lemma.

Lemma 3.1. *If we define for all $t \in [0, T]$*

$$V^\theta(t) = \exp \theta \left[\Phi_t + \int_0^t f(s) ds \right], \quad (5)$$

then the process (Φ, l) satisfies the following quadratic FBSDE

$$\begin{cases} d\Phi_t &= -\theta \left[f(t) + \frac{\theta}{2} \frac{d}{dt} \|l_t\|_\rho^2 \right] dt + \theta l_t dW_t^H, \\ \Phi_T &= \psi[y^v(0)]. \end{cases}$$

V^θ is a uniformly bounded \mathcal{F}^H -quasi-martingale.

Preuve. We can consider the Logarithmic transformation in [4]

$$V^\theta(t) = \exp \theta \left[\Phi_t + \int_0^t f(s) ds \right] = \tilde{\mathbb{E}} \left[A_T^\theta \mid \mathcal{F}_t^H \right]. \quad (6)$$

By the fractional Clark-Ocone formula we get

$$\exp \theta \left[\Phi_t + \int_0^t f(s) ds \right] = \mathbb{E} \left(A_T^\theta \right) + \int_0^t M_s dW_s^H. \quad (7)$$

Suppose that Φ has the dynamics $d\Phi_t = -k_t dt + l_t dW_t^H$, where k and l are two processes to be identified. Then applying the fractional (generalized) Itô formula to both sides of (7), we obtain

$$M_s dW_s^H = \exp \theta \left[\Phi_t + \int_0^t f(s) ds \right] \left(\left[\theta f(t) + \frac{\theta^2}{2} \frac{d}{dt} \|l_t\|_\rho^2 - k_t \right] dt + \theta l_t dW_t^H \right).$$

Hence the second side is an \mathcal{F}^H -quasi-martingale, we take

$$k_t = \theta \left[f(t) + \frac{\theta}{2} \frac{d}{dt} \|l_t\|_\rho^2 \right] \text{ and } \theta l_t = M_s \exp \left(-\theta \left[\Phi_t + \int_0^t f(s) ds \right] \right),$$

which leads to the result. \square

Given the immediate previous result, we have the following lemma.

Lemma 3.2. *The risk-sensitive dynamics for the adjoint equation satisfied by $(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2)$ and (V^θ, l) becomes*

$$\begin{cases} d\tilde{p}_2(t) = -\tilde{H}_y^\theta(t) dt - \tilde{H}_z^\theta(t) dW_t^{H,\theta}, \\ dV^\theta(t) = \theta l_t V^\theta(t) dW_t^H, \\ V^\theta(T) = A_T^\theta, \text{ and} \\ \tilde{p}_2(0) = -\psi_y[y^\mu(0)]. \end{cases} \quad (8)$$

The solution $(\tilde{p}, \tilde{q}, V^\theta, l)$ of the system (8) is unique, such that

$$\|\tilde{p}(t)\|_\alpha^2 + \|V^\theta(t)\|_\alpha^2 + \mathbb{E} \int_0^T (|\tilde{q}(t)|^2 + |l_t|^2) dt < \infty, \quad (9)$$

where

$$\tilde{H}^\theta \left(t, \gamma_t, y_t, z_t, \begin{pmatrix} \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{q}_2(t) \end{pmatrix}, V^\theta(t), l_t \right) = (g(t) + \theta z_t l_t) \tilde{p}_2(t) - f(t),$$

and $dW_t^{H,\theta} = -2\theta l_t dt + dW_t^H$.

Preuve. See the paper of Bouaziz et al [2]. □

Given the previous lemmas, we have the following main result.

Théorème 3.1. *If (y, z, u) is the optimal solution to the risk-sensitive control problem $\{(4), (5), (6)\}$, under assumptions 2 there exist pairs of \mathcal{F}_T^H -adapted processes (V^θ, l) and (p, q) , such that*

$$(v_t - u_t) \tilde{H}_v^\theta(t) \geq 0, \quad (10)$$

for all $v \in \mathcal{U}$, almost every $0 \leq t \leq T$ and \mathbb{P} -almost surely, where

$$\tilde{H}^\theta(t, y_t^\mu, z_t^\mu, \vec{p}, \vec{q}, u_t) = \theta V^\theta(t) H \left(t, \gamma_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \begin{pmatrix} \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{q}_2(t) \end{pmatrix}, V^\theta(t), l_t, u_t \right).$$

4 Conclusion

This paper considers the optimal solution to a control problem for a BSDE driven by a fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, an exponential utility cost functional is used. Pontryagin's Risk-Sensitive Stochastic Maximum Principle is obtained after having constructed a new adjoint equation Lemma 3.2 using analogous approach as Chala [1], under the form of the necessary conditions of optimality theorem 3.1.

References

- [1] Chala, A. (2020). On the singular risk-sensitive stochastic maximum principle. *International Journal of Control*, 94(10) :2846–2856.

- [2] T. Bouaziz and A. Chala (2022). Pontryagin's Risk-Sensitive SMP for fractional BSDEs Via Malliavin , *Journal of Applied Probability and Statistics.*, Vol. 17, No. 2, 141–160.
- [3] Djehiche, B., Tembine, H., and Tempone, R. (2015). A stochastic maximum principle for risk-sensitive mean-field type control. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 60(10) :2640–2649.
- [4] El-Karoui, N. and Hamadène, S. (2003). BSDEs and risk-sensitive control, zero-sum and nonzero-sum game problems of stochastic functional differential equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 107(1) :145–169.
- [5] Hu, Y., Peng, S. (2009). Backward stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 48(3) :1675–1700.
- [6] Hu, Y., Øksendal, B., and Sulem, A. (2003). Optimal consumption and portfolio in a Black & Scholes market driven by fractional Brownian motion. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 6(4) :519–536.
- [7] Pardoux, E., Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems and Control Letters*, 14(1) :55–61.
- [8] Sottinen, T. (2001). Fractional Brownian motion, random walks and binary market models. *Finance and Stochastics*, 5(3) :343–355.
- [9] Tembine, H., Zhu, Q. and Basar, T. (2014). Risk-sensitive mean-field games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(4) :835–850.
- [10] Yong, J. (2010). Optimality variational principle for controlled forward-backward stochastic differential equations with mixed initial-terminal conditions. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 48(6) :4119–4156.



Numerical techniques for solving optimal control of pests by predators

Nacima Moussouni¹, Mohamed Aliane ^{*2}, and Louiza Dehbi³

¹ L2CSP Laboratory, Department of Mathematics, faculty of Science, University Mouloud MAMMERRI of Tizi-Ouzou, Algeria, nmoussouni@yahoo.fr

²Laboratory LMP2M, Department of mathematics and computer science, University of Medea, Medea, Algeria., m.aliane@lagh-univ.dz

³Department of mathematics and computer science, University Amar Telidji of Laghouat, Algeria, nmoussouni@yahoo.fr

Abstract : In Algeria, the white fly of citrus is a dread pest. Avoiding fight insecticide, National Institute of Plant Protection (INPV located at El Harrach, Algeria [14]) proceed a biological control [13]. This control's method is based on the introduction of parasitoids insects (*Cales noacki*) on crop pests [13]. To treat a nuisance fly $x_0 > 0$, a population of insect pests $y_0 > 0$ is introduced into the ecosystem to feed on the pests.

We set an optimal control problems, where the objective is to minimize the number of white flies while maximizing the amount of predators introduced at the final time T . The considered problems have been solved theoretically using the Pontryagin's maximum principle [1,2,3,4,5,7] the various methods of resolution have been provided and implemented : The indirect method based on the shooting method and the direct method.

Keywords : Optimal Control ; Pontryagin's maximum principal ; Seasonality ; White fly

1 Introduction

In this work, we have considered at first a system of differential equations representing two different populations, linked by predation [11,6,10].

We therefore modeled an optimal control problem by introducing to the considered system of differential equations, a bounded command which represents extinction rate of predators [5]. Subsequently we considered a Lotka Volterra system with three equations where the predators of the first model will be prey by birds [10,11]. We therefore modeled an optimal control problem by introducing to the considered system of differential equations with two commands, the rate of extinction of the parasites introduced and the natural death rate of the new predators. The objectif is to minimize the number of pest flies while maximizing the amount of

*Corresponding Author

introduced predators (those insects are sometimes imported). The final time T is fixed. In practice, we choose typically $T = 250$ days (approximately 8 months), which corresponds to the period when the fruit starts appearing until harvest, from May to December [13].

After having verified the existence of the trajectories and the commands and having verified the stability of the systems at the equilibrium points, the optimal control problems obtained are solved theoretically by using the Pontryagin's maximum principle, numerically we implemented in a MATLAB software two methods namely a direct method and an indirect method.

2 Statement of the problem with two spices

In this work, we consider the Lotka-Volterra model [10] regularized by replacing Malthus' exponential growth law of prey with Verhulst's logistic growth [6]. So the problem is formulated as an optimal control problem in the form

$$\begin{cases} J(u) = x(T) - y(T) \rightarrow \min_u \\ \dot{x}(t) = \alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \beta x(t)y(t), \quad x(0) = x_0 > 0 \\ \dot{y}(t) = -y(t)(u(t) - \gamma x(t)), \quad y(0) = y_0 > 0 \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ fix.} \end{cases} \quad (1)$$

where $x(t)$, $t \in [0, T]$ the number of pests (white fly), predators (Cales noacki) are noted by $y(t)$. α is the increase rate of prey. β is the prediction rate per day. K is carrying capacity. The objectif is to minimize the number of pest flies while maximizing the amount of introduced predators (those insects are sometimes imported). The control $u(t)$, $t \in [0, T]$ in our problem is extinction rate of predators, it is such that $d_1 \leq u(t) \leq d_2$, $t \in [0, T]$, d_1 and d_2 are two positives given values.

3 Theoretical solving of the optimal control problem

We apply the Pontryagin's maximum principle to our specific optimal control problem. The Hamiltonian of system (2.1) is

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = p_x(t) \left(\alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \beta x(t)y(t) \right) + p_y(t) (-y(t)(u(t) - \gamma x(t))), \quad t \in [0, T].$$

Where p_x , p_y , are the adjoint vectors, which are solutions of following system :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = \left(-\alpha + \frac{2\alpha}{K}x(t) + \beta y(t)\right)p_x(t) - \gamma y(t)p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = \beta x(t)p_x(t) + p_y(t)(u(t) - \gamma x(t)), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2)$$

We know that $x(T)$ and $y(T)$ are free, the final transversality condition leads to

$$p(T) = p^0 \nabla g(x(T), y(T)).$$

In other words :

$$p_x(T) = p^0 \frac{\partial}{\partial x} (x(T) - y(T)) \text{ and } p_y(T) = p^0 \frac{\partial}{\partial y} (x(T) - y(T)),$$

Then $p_x(T) = -1$, $p_y(T) = 1$.
The maximization condition is written

$$\max_{d_1 \leq u \leq d_2} (-p_y(t)y(t)u(t)), t \in [0, T].$$

As $y(t) > 0$ for $t \in [0, T]$, it follows

$$u^*(t) = \begin{cases} d_1 & \text{if } p_y(t) > 0 \\ d_2 & \text{if } p_y(t) < 0, \\ \in [d_1, d_2] & \text{if } p_y(t) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3)$$

4 Numerical simulations

4.1 Resolution with direct method

For the resolution with the direct method, we used the Euler discretization method, we implemented the method on the MATLAB software and we discussed the results found. For a number of subintervals N chosen in advance, we will have the step of discretization $h = \frac{T}{N}$ and the following times : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$. The application of the Euler discretization scheme for solving boundary value problems gives us the following non-linear programming problem :

$$\begin{cases} \text{Minimize } x(t_N) - y(t_N), \\ x(t_{i+1}) = x(t_i) + \frac{T}{N}(\alpha x(t_i)(1 - \frac{x(t_i)}{K} - \beta x(t_i)y(t_i))), \\ y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{T}{N}(-y(t_i)(u(t_i) - \gamma x(t_i))), \\ d_1 \leq u(t_i) \leq d_2, x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0, \quad i=0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (4)$$

From the figure (4.2. a), we find the phase portrait and the evolution of the trajectories of predators and prey, when the number of predators increases, the number of prey decreases.

4.2 Resolution by using indirect method

Using shooting method, the results found are illustrated in the following figures : We note that the number of insect pests decreases at the final time T contrariwise the number of predatory insects increases(4.2,b). The results found with the two methods are similar, however the execution times are significantly different. The execution time of the shooting method is $t = 15s$.

5 Three-species food chain model

5.1 Statement of the problem

In this part we have modeled an optimal control problem who is inspired from the Lotka Volterra model with three species [8,10]. We have considered the two species of the problem (2.1), we have added a redoubtable predator of the Cales Noacki parasites, namely the birds.

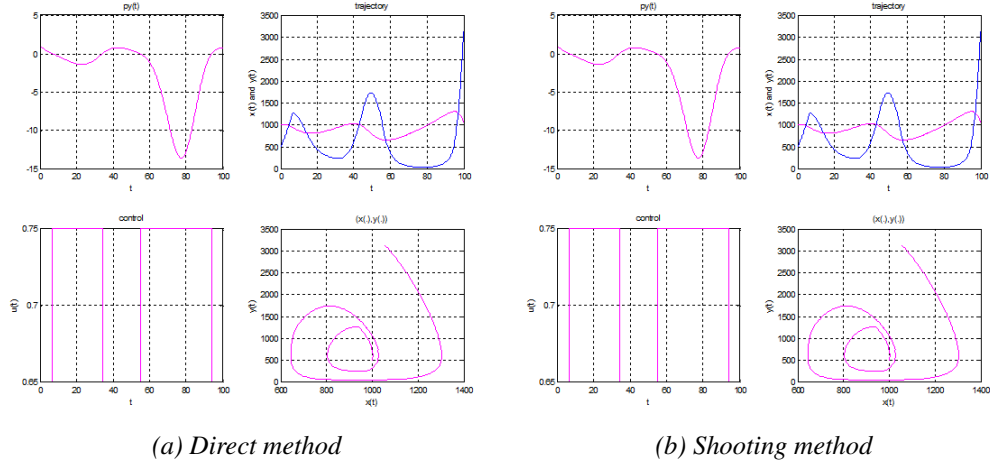


FIGURE 1 – Evolution of trajectories, control and phase portrait

The problem considered in this part is an optimal control system with two commands, the first command noted $u(\cdot)$ represents the effect of predation on species y by species z , we assume for $t \in [0, T]$, $d_1 \leq u(t) \leq d_2$. The second command noted $v(\cdot)$ represents the efficiency and propagation rate of the predator z in the presence of prey. Assume that for $t \in [0, T]$, $d'_1 \leq v(t) \leq d'_2$, where $d_1, d_2, d'_1, d'_2 > 0$. The objective of this modeling is to maximize the number of parasites introduced and to minimize the number of birds in the considered field. We will thus have the following optimal control problem.

$$\begin{cases} J(u, v) = -y(T) + z(T) \rightarrow \min_{u, v} \\ \dot{x}(t) = \alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \beta x(t)y(t), x(0) = x_0 > 0 \\ \dot{y}(t) = -\delta y(t) + \gamma x(t)y(t) - u(t)y(t)z(t), y(0) = y_0 > 0 \\ \dot{z}(t) = -\lambda z(t) + v(t)y(t)z(t), z(0) = z_0 > 0 \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, d'_1 \leq v(t) \leq d'_2, t \in [0, T], T \text{ fix.} \end{cases} \quad (5)$$

This model has similar parameters as the previous model. The parameters $\eta, \lambda > 0$ are interpreted as follows

δ represents the rate of extinction of the parasites introduced.
 λ represents the natural death rate of the predator z in the absence of prey y .

5.2 Theoretical resolution

The maximization of the Hamiltonian with respect to $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ Respectively gives us for $t \in [0, T]$,

$$u^*(t) = \begin{cases} d_1 & \text{if } p_y(t) > 0 \\ d_2 & \text{if } p_y(t) < 0, \\ \in [d_1, d_2] & \text{if } p_y(t) = 0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad \text{and } v^*(t) = \begin{cases} d'_1 & \text{if } p_z(t) < 0 \\ d'_2 & \text{if } p_z(t) > 0. \\ \in [d'_1, d'_2] & \text{if } p_z(t) = 0, t \in [0, T]. \end{cases}$$

With d_1, d_2, d'_1, d'_2 chosen values.

5.3 Numerical resolution

The phase plans of the different states $(x(\cdot), y(\cdot))$, $(x(\cdot), z(\cdot))$ and $(y(\cdot), z(\cdot))$ are illustrate in the following figure There is a indirect link between $x(\cdot)$ and $y(\cdot)$, But a direct link

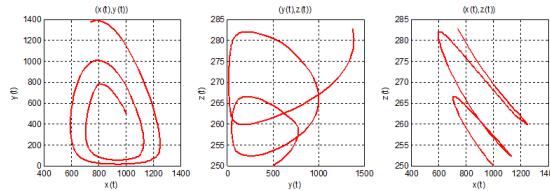


FIGURE 2 – plane phases

between $y(\cdot)$ and $x(\cdot)$, and between $y(\cdot)$ and $z(\cdot)$. The commands $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ are bang bang, they vary between their respective limit values.

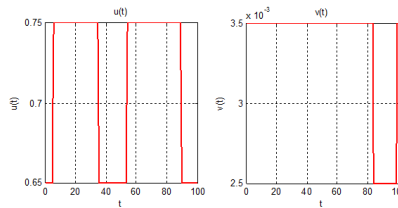


FIGURE 3 – commands $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$

6 Conclusion

Two optimal control problems were considered in this work and solved theoretically and then numerically, these problems were modeled using the Lotka volterra logistic model with two and three species. The results found with the two methods considered in this work are similar, however the shooting method is more efficient. We have been able to show and trace the trajectories of the states as well as the considered commands.

References

- [1] Moussouni, N., Aidene, M. : An Algorithm for Optimization of Cereal Output, Acta Applicandae Mathematicae, **119**, 113–127, (2011).

- [2] N. Moussouni, N., Aidene, M. : Optimization of cereal output in presence of locusts, *An International Journal of Optimization and Control : Theories & Applications*, **61**, 1–10, (2016).
- [3] Aliane, M., Moussouni, N., Bentobache, M. : Optimal control of a rectilinear motion of a rocket, *Statistics, Optimization & Information Computing*, **8**, 281–295, (2020).
- [4] Aliane, M., Moussouni, N., Bentobache, M. : Nonlinear optimal control of the heel angle of a rocket, *6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT'19)* ; Paris, France, April 23-26 ; (2019).
- [5] Trélat, E. : *Optimal control : theory and applications*, Paris : Vuibert, Concrete mathematics collection, (2005) (in french).
- [6] Murray, J.D. : *Mathematical biology*, Springer Verlag, Berlin, 3d edition, (2002).
- [7] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F. : *The mathematical theory of optimal processes*, New York : Intersciences Publisher, (1962).
- [8] Garrett, R.R. : *Numerical Methodes For Solving Optimal Control Problems*, Master Thesis, University of Tennessee, Knoxville, (2015).
- [9] Gonçalves, J.N.C., Rodrigues, H.S., Monteiro, M.T.T. : On the dynamics of a viral marketing model with optimal control using indirect and direct methods, *Statistics, Optimization & Information Computing*, **6**, 633–644, (2018).
- [10] Aitziber Ibañez : Optimal control of the Lotka-Volterra system : turnpike property and numerical simulations, *Journal of Biological Dynamics*, **11** 1, 25–41, (2017).
- [11] Verhulst, P. F. : Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, *Correspondance Mathematique et Physique*, **10**, 113–121, (1838).
- [12] Chitour, Y., Jean, F., Trélat, E. : Propriétés génériques des trajectoires singulières, *R. Math. Acad. Sci. Paris* 337(1), 49 – 52, (2003).
- [13] National Institute for Plant Protection INPV(Algeria) : Statistics 2011,2012, 2018, 2019 and 2020.
- [14] ONM., Office national de la météorologie, Algeria



A new metaheuristic for optimizing over the integer efficient set

Ali Zaidi*¹ and Djamal Caabane²

¹Research Center of Amaziy language and culture, Bejaia, Algeria,
zaidi.alili@gmail.com

²Laboratory of Multiple Criteria Decision and Operations Research (AMCD and RO) USTHB, Algiers,
Algeria,
dchaabane@usthb.dz

Abstract : In this work, we propose a new meta-heuristics to optimize a linear function Φ on the efficient set of a multiple objective integer linear programming problem. This last one is called the division algorithm and it is of the category of evolutionary algorithms which work on the variables space and it takes the directions which fast improve the objectives and the Φ function. It has been coded in Python and computational experiments have been undertaken in order to analyze performance properties of the algorithm over different randomly generated problem instances.

Keywords : Multiple objective programming , Optimization over the efficient set , Discrete optimization , Efficient solutions , meta-heuristics.

1 Introduction

Metaheuristics are optimization algorithms, most of which are inspired by natural phenomena such as ant colonies, tabu search and genetic algorithms. They aim to solve hard optimization problems. In this work our new metaheuristic is called Division (mitosis), it is inspired by the biological phenomenon of cell division. It is based on the global architecture of genetic algorithms and some ideas of ant colonies, so it inspires the principles of selection, evaluation and population of genetic algorithms and the principle of updating and vaporization in ant colonies, but with different uses. This algorithm can be used for solving multi-objective integer problems, but in this paper we use it for solving a function over an integer efficient set of a multiobjective integer linear programming (MOILP) problem. Many works have addressed this problem, but they all use exact methods and algorithms (see [1] to [17]). The Division algorithm inspires its mechanisms from cell division and natural selection. The mechanism consists of evolving from an initial draw of a set of points in the solution space. By analogy with cellular tissue, each cell represents a solution. The said cells divide

*Corresponding Author

into several by modifying some genes whose aim is to improve our objectives and for that they create a new population composed of living cells which improve the later ones and of dead cells which do not check the constraints or they are dominated.

The success of the division algorithm is based on the use of the variable space. The latter allows us to increase the number of objectives without too much influence on the CPU time.

2 Notations and basic concepts

Let the MOILP formulated as follows

$$(\Pi) \begin{cases} \min & Z_j(x) = c_j^\top x, \quad j=1, \dots, p, \\ \text{s.t.} & x \in \mathbf{D}. \end{cases}$$

Where $\mathbf{D} \equiv \{x \in \mathbf{Z}_+^n / Ax \leq b\}$ is the feasible set of the problem, with $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ and $C = (c_j^\top, j = 1, \dots, p)$ is a $p \times n$ matrix defining a number $p \geq 2$ of objective functions. We suppose that the feasible set \mathbf{D} is not empty and bounded.

As the objective functions are usually conflicting, there does not exist any feasible solution optimizing all the criteria simultaneously and thus, the concept of efficient solution is widely used.

We denote by \mathbf{E} the set of efficient solutions of (Π) and the problem we want to tackle is problem $(\Pi_{\mathbf{E}})$ defined as

$$(\Pi_{\mathbf{E}}) \begin{cases} \min & \Phi = \phi^\top x, \\ \text{s.t.} & x \in \mathbf{E}. \end{cases}$$

where ϕ denotes a n dimensional vector.

Définition 2.1. [16] *A point $\bar{x} \in \mathbf{D}$ is an efficient solution if and only if there is no $x \in \mathbf{D}$ such that $Z_j(x) \geq Z_j(\bar{x})$ for all $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ and $Z_j(x) > Z_j(\bar{x})$ for at least one j .*

3 A division algorithm

3.0.1 Description of the division algorithm

The division algorithm inspires many concepts of evolutionary algorithms such as population, selection, reproduction, evaluation and a large part of its hierarchy, but it modifies these in a very profound way to adapt it to our problem. In the first step we enter the data and the parameters we need, such as α , the selection parameter that represents the preference between the efficiency of the solution and its optimization of the compromise criterion and it varies between $[0, 1]$. γ the number of variables to explore by classification of their influence weights, δ the number of variables to explore randomly. ν update speed. Ω the set of indices

of the variables to be explored $\Omega = \Omega \cup \{the\ set\ of\ variables\ to\ explore\ at\ instant\ t\}$, Γ the population size. T the maximum of the iterations and we initialize the set of pseudo-efficient solutions $S = \emptyset$, $\Omega = \emptyset$ and $t = 0$. In the second step we normalize and unify the units of the objectives by transforming each coefficient of the variables c_{ij} to $c_{x_j} = \frac{c_{ij}}{\sum_{j=1}^n |c_{ij}|}$ and

same for the compromise function $\phi_{x_j} = \frac{\phi_j}{\sum_{j=1}^n |\phi_j|}$. Then we proceed to the calculation of the influence weights of each coefficient by the formula

$$\rho_{x_i} = \alpha c_{x_i} + (1 - \alpha) \phi_{x_i}$$

The latter is composed of two parts, the absolute value which gives us the weight of its influence and the sign which gives us the direction of improvement of the objectives. In the third step, we rank these influence weights in descending order of their absolute values and select the first γ variables to be explored and we also randomly select δ variables to be explored from the remaining list and store their indices in a set Ω . Then we begin the iterative unfolding of our algorithm as long as the number of iterations does not reach the maximum and the cardinal of Ω is not superior to n . We then proceed to the construction of the new population P^t . This last equals the new produced solutions which verify the constraints and $S \leftarrow S \cup P^t$. Of course a filtering that eliminates the dominated solutions will be done to have the new population P^t and the new set of pseudo effective solutions S (See Fig.1). The

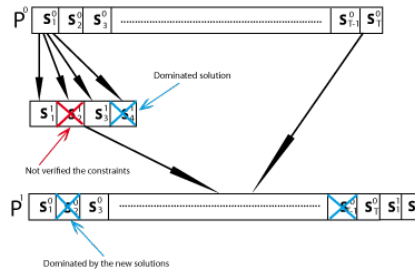


FIGURE 1 – building the population

algorithm would not be complete without the process of updating the influence weights of the variables. Indeed, to avoid being trapped in directions that do not improve our solutions, it is necessary to allow the system to weaken the influence weights of the bad directions. In the case where $P^t \neq \emptyset$, we use a formula that updated the absolute values of these influence weights

$$|\rho_{x_i}(t + 1)| = |\rho_{x_i}(t)| \times [1 - (1 - \tau_i)^v]$$

Where $\tau_i = \frac{\eta}{\gamma + \delta}$, η is the number of non-dominated solutions which verify the constraints created by improving the variable x_i and $v > 0$, it is the update speed which is related to the number of variables that remain to be explored. In the case $P^t = \emptyset$, the coefficients whose

indices are part of Ω become null and $P^t \leftarrow P^{t-1}$. At the end we reclassify the weights according to the new data.

Inputinput Outputoutput

Step 1

- ↓ $A_{(m \times n)}$: matrix of constraints ;
- ↓ $b_{(m \times 1)}$:RHS vector ;
- ↓ $\phi_{(1 \times n)}$: compromise criterion vector ;
- ↓ $C_{(p \times n)}$: matrix of criteria ;
- ↓ α :selection parameter ;
- ↓ γ :the number of variables to explore by priority ;
- ↓ δ :the number of variables to be randomly explored ;
- ↓ n_p :the size of the population to be generated ;
- ↓ T :the maximum number of iterations ;
- ↑ x^* :optimal solution of the problem P_E ;
- ↑ $\Phi(x^*)$:optimal value of criterion ϕ ; **Initialization** : $t \leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$; $\Omega = \emptyset$;

Step 2

Calculate the influence weights of the coefficients of the variables ρ_{x_i} .
 Generate the initial population P^0 which verify the constraints and are not dominated.

Step 3

- $t < T$ and $Card(\Omega) \leq n$ $t \leftarrow t + 1$;
- Select the variables to be explored and set their indexes in Ω .
- Create the population P^t .
- $S \leftarrow S \cup P^t$; Elimination of dominated solutions in S et P^t ;
- $P^t = \emptyset$ $i=1$ $n_i \in \Omega$ $\rho_{x_i} \leftarrow 0$; $P^t \leftarrow P^{t-1}$;
- Reclassified influence weights ρ_{x_i} ; Update and reclassify influence weights ρ_{x_i} ;

Division algorithm

4 A Computational Study

4.1 Computational results of the division algorithm.

Our algorithm was coded using Python programming language and run on a PC (Intel i7 2.0 GHz processor), with 8 Gb of RAM, under Ubuntu 20.04.3.

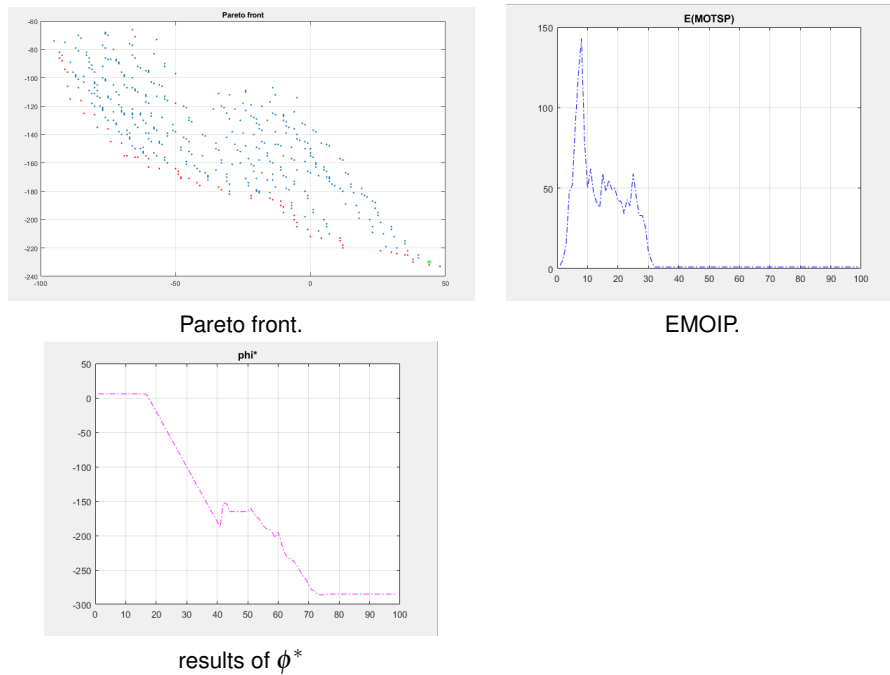
To test the performance of the algorithm we generated 400 problems in a random way. The variation of the coefficients of each matrix is as follows A [1,30], C and ϕ [-20,20] and the vector b [50,150]. The number of variables n varies, from 10 till 500, constraints, m , from 10 till 300 and the number of objective functions $p=3, 5, 8, 15$ and 100 into 8 classes ; in each category, 10 instances are solved, so that 400 problems are considered. We initialize the parameters in two categories according to the number of variables and objectives, because when there is a small number of variables the influence of their coefficients is significant,

on the other hand, if it is large, the influence of their coefficients becomes minimal. the first $\alpha = 0.7$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$, $n_p = 10$, $v = 10$ and T varies, from 50 till 300.

The computational results obtained have been summarized in Table 1, where the average CPU time (in seconds) required to solve the problems are shown. Also, the minimum and maximum values of each measure are reported in brackets.

TABLE 1 –
CPU times (seconds)

p	p=3	p=5	p=8	p=15	p=100
$m \times n$	Time. [min max]	Time. [min max].	Time. [min max]	Time. [min max].	Time. [min max]
10 × 15	0.33 [0.21 0.59]	5.1 [3 9]	0.63 [0.29 1.53]	6.57 [2 15]	6.80 [2 17]
15 × 25	0.42 [0.27 0.74]	5 [3 7]	1.23 [0.62 2.07]	8.14 [4 13]	8.20 [2 20]
50 × 70	0.89 [0.45 2.13]	5.57 [2 13]	2.08 [1.22 3.15]	8.71 [5 18]	9.10 [2 23]
80 × 100	0.89 [0.45 2.13]	5.57 [2 13]	2.16 [1.36 3.80]	8.90 [5 18]	9.21 [2 25]
100 × 150	0.89 [0.45 2.13]	5.57 [2 13]	2.46 [1.58 3.96]	8.26 [5 18]	9.81 [3 29]
150 × 200	0.89 [0.45 2.13]	5.57 [2 13]	2.86 [1.98 3.99]	8.74 [5 18]	10.01 [2 26]
250 × 400	86.58 [28.32 173.95]	7.28 [3 11]	255.46 [134.27 349.78]	13.71 [7 21]	15.23 [2 36]
300 × 500	174.88 [80.53 354.99]	8.85 [6 12]	445.58 [215.11 628.65]	11.14 [7.17]	16.22 [3 40]



5 Conclusion

this work, presents a metaheuristic called Division algorithm for optimizing a linear function on the efficient set of a multi-objective integer linear programming problem. The latter is evolutionary, it creates these populations by exploiting directions chosen by their influences on the improvement of the objectives.

This algorithm was coded using the Python language. It is tested on randomly generated problems from a discrete uniform distribution and the results obtained are very encouraging. Our computational experiments show an exceptional performance, with dimensions up to 1200 constraints, 2000 variables and 100 objectives. At the end we suggest the creation of specific benchmarks for this kind of problem for the comparison of existing algorithms and application of these methods.

References

- [1] Abbas, M., Chaabane, D., Optimizing a linear function over an integer efficient set, European Journal of Operational Research, 174(2) (2006) 1140-1161.
- [2] Benson, H., Existence of Efficient Solutions for Vector Maximization Problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 26(4) (1978) 569-580.
- [3] Benson, H., Optimization over the Efficient Set, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 98 (1984) 562-580.

-
- [4] Benson, H., Optimization over the efficient set :Four special cases, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 80(1) (1994) 3-17.
- [5] Boland, N., Charkhgard, H., Savelsbergh, M., A New Method for Optimizing a Linear Function over the Efficient Set of a Multiobjective Integer Program, *European Journal of Operational Research*, 260 (2017) 904-919.
- [6] Chaabane, D., Brahmi, B., Remdani, Z., The augmented weighted Tchebychev norm for optimizing a linear function over an integer efficient set of a multicriteria linear program, *International Transactions in Operational Research*, 19(2012) 531-545.
- [7] Chaabane, D., Mebrek, F., Optimization of a linear function over the set of stochastic efficient solutions, *Computational Management Science*, 11 (2014) 157-178.
- [8] Chaabane, D., Pirlot, M., A method for optimizing over the efficient set, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 6(4) (2010) 811-823.
- [9] Ecker, J. G., Song, H. G., Optimizing a Linear Function over an Efficient Set, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83 (3) (1994) 541-563.
- [10] Isermann, H., Steuer, E., Computational Experience Concerning Payoff Tables and Minimum Values over the Efficient Set, *European Journal of Operational Research*, 33 (1987) 91-97.
- [11] Jseus Jorg, M. J., An algorithm for optimizing a linear function over an integer efficient set, *European Journal of Operational Research*, 195 (2009) 98-103.
- [12] Liu, Z., Ehrgott, M., Primal and Dual Algorithms for Optimization over the Efficient Set, *A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 2018.
- [13] Nguyen, N.C., An Algorithm for Optimizing a Linear Function Over the Integer Efficient Set, *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin*, 1992.
- [14] Shigeno, M., Takahashi, I., Yamamoto, Y., Minimum Maximal Flow Problem - An Optimization over the Efficient Set, *Journal of Global Optimization*, 25 (2003) 425-443.
- [15] Sylva, J., Crema, A., A Method for Finding the set of Non-dominated Vectors for Multiple Objective Integer Linear Programs, *European Journal of Operational Research*, 158(1) (2004) 46-55.
- [16] Teghem, J., Kunsch, P., A Survey of Techniques for Finding Efficient Solutions to Multiobjective Integer Linear Programming, *Asia Pacific Journal of Operations Research*, 3 (1986) 95-108.
- [17] Yamamoto, Y., Optimization over the Efficient Set : Overview, *Journal of Global Optimization*, 24(1-4) (2004) 285-317.



Solving the multi-objective spanning tree problem using a hybrid strategy

Asma Boumesbah ¹ and Mohamed El-Amine ²

¹LRECITS, USTHB, Faculty of Mathematics, Algiers, Algeria,
boumesbah.asma2020@gmail.com

²LRECITS, USTHB, Faculty of Mathematics, Algiers, Algeria,
mchergui@usthb.dz

Abstract : In this study, we intend to find an approximation of the Pareto front of the multi-objective minimum spanning tree problem (MOST) problem which is NP -hard even for the bicriterion case. We propose in this work a hybrid NSGA-II algorithm with an exact mutation operator that is only occasionally invoked. If k edges from $G \setminus T$ are added to a spanning tree T of a connected graph G , we get a partial graph H of G , which results in a multi-objective spanning tree problem of less size than the original one. Subsequently, using a spanning tree T and the exact mutation operator with a low probability, the reduced MOST problem in graph H is solved and a number of mutant solutions are produced. Then, the selection operator of NSGA-II is activated to obtain the Pareto front approximation. Finally, this front is improved by an adapted VNS metaheuristic. Experimental comparison studies with an exact method yield encouraging findings and show that the suggested algorithm is effective.

MSC: 90C10, 90C27, 90C29, 90C59

Keywords : Minimum spanning tree ; Multiple objective linear optimization ; Combinatorial optimization, Non-Sorting Genetic Algorithm ; Variable Neighborhood Search.

1 Introduction

The Multi-Objective minimum Spanning Tree problem (MOST) is a combinatorial problem which is well-known to be NP-hard [7, 2] that why exact methods cannot be used to solve large sizes problems. This study is part of this perspective by proposing an algorithm able to find a good approximation of the Pareto front for the MOST problem.

We consider an undirected connected graph in which a cost-vector of dimension $r \geq 2$ is associated with each edge. We recall that a cost-vector Z of dimension r is said to dominate another cost-vector W of the same dimension, if Z is at least as good as W and Z is not equal to W . A vector Z is Pareto optimal if it is non-dominated by any other vector. The set

*Corresponding Author

of all non-dominated spanning trees is known as the Pareto front. For more details on the multi-objective optimization concepts, see [11].

The main objective of this study is to provide a method to deal with the MOST problem able to generate a good approximation of the Pareto front. Based on an hybridization between "Non-Sorting Genetic Algorithm" (NSGA-II) [4] and "Variable Neighborhood Search" (VNS) [8], the proposed (NSGA-II, multi-VNS) algorithm adopts two point crossover operator and a k -opt procedure as a mutation operator. Indeed, for a given child T , k edges randomly chosen from $G \setminus T$ are added to T to obtain a partial graph H of G . With a weak probability, the multi-objective spanning tree problem considering the partial graph H is solved to generate several mutated solutions of T .

2 Definitions and notations

Given a connected and undirected simple graph $G = (V, E)$ of order n , where $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ is a set of vertices, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ is a set of edges and each edge $e_i \in E$, $i \in \{1, \dots, m\}$, is valued by a cost-vector $c_i = (c_{ik})$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $r \geq 2$. Let $T \subset E$ a spanning tree of G , the cost-vector of T is given by $C_k(T) = \sum_{e_i \in T} c_{ik}$, $k \in \{1, \dots, r\}$. We note $C(T) = (C_k(T))_{k \in \{1, \dots, r\}}$.

We say that the vector $C(T)$ dominates another vector $C(T')$ if $C_k(T) \leq C_k(T')$ for all $k \in \{1, \dots, r\}$, and $C_{k_0}(T) < C_{k_0}(T')$ for at least one index $k_0 \in \{1, \dots, r\}$.

A spanning tree T of G is efficient if there is no spanning tree T' of G such that $C(T')$ dominates $C(T)$.

The set of all Pareto optimal spanning trees is called the efficient set and the set of non-dominated trees is called the Pareto front.

Supported spanning trees are easy to identify, they are located on the convex hull of the feasible region, and minima for a convex combination of criteria. This is the case when applying the weighted-sum methods where the optimal solutions found by varying the weights associated with each criterion are all supported efficient spanning trees.

Due to their difficulty in finding, the majority of algorithms are unable to determine non-supported efficient solutions. [6]

Note \bar{T} the following set of edges : $\bar{T} = \{e \in E : e \notin T\}$.

Then, for each edge e belonging to set \bar{T} , the set of edges $T \cup \{e\}$ contains a unique cycle μ_e and the set $B = \{\mu_e, e \in \bar{T}\}$ constitutes a cycle-basis of the graph G .

This means that the representative vectors $V(\mu_e)$ of edges of cycles $\mu_e \in B$ form a basis of the vector subspace of dimension $(m - n + 1)$ of \mathbb{R}^m , where the coordinates of $V(\mu_e)$ are given by $V_j(\mu_e) = 1$ if edge $e_j \in \mu_e$ and 0 otherwise, for all $j \in \{1, \dots, m\}$.

For more details see [10].

3 Description of the proposed method

The proposed method is described in the following procedures which constitute the different steps of our algorithm named HMOST-Algorithm :

3.1 Encoding Scheme

Initially the edges of the graph $G = (V, E)$ having n vertices and m edges, are numbered. The direct encoding of a chromosome is a set of $n - 1$ dimension, wherein each element represents the associated number of an edge in the corresponding spanning tree. Contrary to what Zhou et al. demonstrated in their study [13], the authors of the article [9] point out that direct encoding is better and more effective than Purfer-based encoding. We note $E(T)$ that represents a spanning tree T .

3.2 Starting Population

The first population of size s of spanning trees is generated using :

- 1- the optimal spanning trees corresponding to each criterion,
- 2- applying Kruskal's algorithm by randomly selecting edges of graph G ,
- 3- random generation with weighted-sum method.

3.3 Crossover-Repair Operator

The reproduction consists in recombining two individuals by the crossover operator. To do so, a number p is generated randomly in the interval $[0, 1]$ and the crossover is done only if $p \leq 0.8$. In this case, two types of crossover are provided :

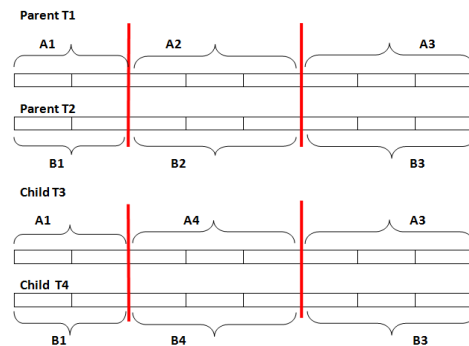


FIGURE 1 – Two point crossover

Two cut-points are randomly generated. The obtained offspring chromosomes do not correspond necessarily to spanning trees. To overcome this infeasibility, procedures of rearrangement of edges is introduced.

The two point crossover is described as follows :

Choose edges of $A4$ in increasing order of the sums of costs in the set : $E(T2) \cup E \setminus (A1 \cup A3)$. Those of $B4$ in increasing order of the sums of costs in the set : $E(T1) \cup E \setminus (B1 \cup B3)$.

Every offsprings obtained by the crossover operator are spanning trees, therefore no correction is needed.

3.4 Diversified Mutation Operator

The mutation is achieved as in the biological evolutionary process ; its priority aim is to generate better solutions in the sense of dominance. The diversity aspect is still present even in the case of non-improvement. The mutation operator is applied to each offspring T in the population with a predetermined low probability equal to 0.20. It consists to construct a partial graph H from an offspring by adding k edges from $E \setminus E(T)$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

By adding k edges, k cycles will be created in H . We then consider the partial subgraph L generated by the cycles of H . We call $k-opt$ the corresponding procedure which generates the mutated children by adding k edges.

For $1-opt$, L is reduced to an elementary cycle μ . If μ contains a dominated edge e , then we get a tree of L , $T(L) = \mu \setminus \{e\}$. Thus, we also obtain a tree in H , $T' = E(H) \setminus \{e\}$, where $E(H)$ is the edges set of H .

For $2-opt$ and $3-opt$, L is of reduced dimension compared to the initial graph G and, in these cases, we call on our exact method cited in [1] to generate all non-dominated trees in L . As for $1-opt$, we will reconstruct all the non-dominated trees of the partial graph H , by adding each time the edges of $H \setminus L$. Unlike the $1-opt$ mutation operator which receives a high probability of execution, the $2-opt$ and $3-opt$ operators are only executed with a low probability to not increase the execution time of the method.

3.5 Dynamic Selection Operator

The selection operator consists in proceed first with the partition in fronts of the current population containing at least $2s$ individuals. The first one contains the non-dominated individuals, the second still contains non-dominated individuals after removing elements of the first front, and so on. The new population consists in choosing individuals respecting to the order of dominance fronts. If necessary, individuals of the front $Fl, l \geq 2$ have to complete the s size of the new population are selected according to a distance of "crowding" [4]. Otherwise, the size of the new population is set to the size of the first front. Hence, the size of the populations is dynamic, it varies according to the size of the front 1.

3.6 Multi-VNS Strategy

Starting from the MST set of spanning trees constructed by the adapted NSGA-II and $ND1$ the corresponding non-dominated set, neighboring solutions are generated through a VNS based algorithm to improve the MST set. The update of the latter is done according to the Pareto dominance relation and the obtained populations have not necessarily the same size. Hence, an improved approximation with a higher number of non-dominated solutions is maintained applying a VNS based algorithm.

4 Computational Experiments

The HMOST-Algorithm is compared with the MOST-Algorithm described in [1] which generates the set of all non-dominated spanning trees (SND). On an HP laptop with an Intel Core i5, 8GB of RAM, Matlab 2014a is used to carry out the experimental study. The graphs are randomly generated according to Erdős-Renyi in [5]T who suggested to the

user to fix the number of vertices of the graph and the probability that an edge occurs between two vertices.

In the following, the reference set, denoted REF , indicates the set of non-dominated solutions obtained from the list grouping together the solutions of the two methods to be compared. The results are compared on average using the proportional measure to calculate the number of obtained non-dominated solutions of a given method belonging to REF set.

We denote by $\alpha_1 = (ND1 \cap REF)/(REF)$ the proportion of solutions of the $ND1$ set belonging to REF set.

It should be noted that the number p of iterations in the adapted NSGA-II procedure is fixed at 30, that of Multi-VNS Strategy is fixed at 20 and finally that of KEA-Algorithm is fixed at 50.

We considered it useful to conduct an experiment on randomly generated instances in order to confirm the satisfactory results found previously and indeed, the obtained results in Table 1 show that HMOST-Algorithm manages to generate nearly 80% of non-dominated solutions on average.

r	n	m	<i>MOST – Algorithm</i>	<i>HMOST – Algorithm</i>	α_1
5	20	[46,55]	74,80	307,20	0,81
5	30	[55,65]	930,30	980,50	0,79
5	50	[65,75]	1300,40	1612,06	0,77
5	100	[125,130]	627,39	1031,02	0,82
5	300	[325,340]	1267,40	1560,46	0,78
5	400	[425,440]	3427,94	6036,48	0,80
7	7	21	342,10	485,00	0,80
7	8	28	478,12	677,81	0,82

TABLE 1 – Comparison between MOST-Algorithm and HMOST-Algorithm using random instances with 5 and 7 criteria

A comparative study proved that in average, nearly 81% of the exact non-dominated solutions are found by the proposed HMOST-Algorithm attesting that the generated front is as close as possible to the exact Pareto front. In addition to being able to overcome the disability of the exact method to solve large instances, given the explosive complexity of the MOST problem, it shows also, an excellent performance overcoming the KEA-Algorithm given in [3] through the comparative study on complete graphs at 80, 100 and 200 nodes and costvectors of dimensions 3 and 5. It offers good characteristics according to the results of the experiment considering its ability to generate a good approximate Pareto front, to solve problems with more than three criteria and 200 nodes, as well as the proper distribution of the non-dominated set obtained which follows the shape of the exact Pareto front.

5 Conclusion

In this study, we were interested in the representative description of the Pareto front for the MOST problem and the adapted HMOST-Algorithm is proposed to solve the problem in two phases. The first phase consists of a hybridization of the NSGA-II algorithm using locally

an exact mutation operator, in order to obtain the first Pareto front. The Multi-VNS Strategy is activated in the second phase to bring improvements on some previously obtained solutions. The specialized mutation operator together with the exploitation of Multi-VNS Strategy make HMOST-Algorithm a flexible optimization algorithm that can manipulate both phases with required probabilities. The results of this new hybrid algorithm are effective and demonstrate its superiority to other existing approximate approaches.

References

- [1] A. Boumesbah, M.E-A. Chergui, An exact method to generate all nondominated spanning trees, *RAIRO Operations Research*, 50 (4-5), 857-867 (2016).
- [2] P. M. Camerini, G. Galbiati and F. Maffioli, The complexity of weighted multi-constrained spanning tree problems. *Colloquium the Theory of Algorithms*, Colloquium. L. Lovász, Ed. Amsterdam : North-Holland, 53-101 (1984).
- [3] David-Moradkhan M. and Browne W., Evolutionary Algorithms for the Multi Criterion Minimum Spanning Tree Problem, Y. Tenne and C.-K. Goh (Eds.) : Computational Intel. in Expensive Opti. Prob., ALO 2, 423-452 (2010).
- [4] Deb K., Agrawal S., Pratap A. and Meyarivan T. ,A fast and elitist multi-objective genetic algorithm for multi-objective optimization. *IEEE Trans. Evol. Comput.* 6, 181-197 (2002) .
- [5] Erdős P. and Rényi A., On the evolution of random graphs, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5 (1960).
- [6] Ehrgott M. and Gandibleux X., *Multiple Criteria Optimization : State of the Art. Annotated Bibliographic Surveys.* Kluwer International Series (2002).
- [7] . Hamacher H. W and Ruhe G., On spanning tree problems with multiple objectives. *Anal. of Operations Research*, 52, 209-230 (1994) .
- [8] Hansen P. and Mladenović N., Variable neighborhood search. *Computers and Operations Research*, 24 (11), 1097-1100 (1997).
- [9] Knowles J. and Corne D., Enumeration of Pareto optimal multi-criteria spanning trees - a proof of the incorrectness of Zhou and Gen's proposed algorithm, *European Journal of Operational Research*, 143, 3, 543-547 (2002).
- [10] Marshall C. W., *Applied graph theory.* Wiley-Interscience. (1971).
- [11] Steuer R. E., *Multiple criteria optimization : theory, computation, and application.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics - Applied, Wiley. (1986).
- [12] J.L. Santos, L. Pugliese, F. Guerriero, A new approach for the multiobjective minimum spanning tree, *Computers and Operations Research*. 98 69–83. (2018).
- [13] Zhou and Gen M., Genetic algorithm approach on multi-criteria minimum spanning tree problem, *European Journal of Operational Research*, 114 141-152 (1999).



Multi-objective Tunicate Swarm Algorithm

Amal Derrech¹, Zouache Djaafar², and Brahmi Boualem³

¹ Department of mathematics, University of Mohamed El Bachir Elibrahimi, Algeria,
amal.derrech63@gmail.com

² Department of Computer Science , University of Mohamed El Bachir Elibrahimi , Algeria,
djaafarzouache@yahoo.fr

³ Department of mathematics, University of Mohamed El Bachir Elibrahimi, Algeria,
b.brahmi@uni-bba.dz

Abstract : The answers to optimization problems, which are frequently multi-objective and involve complex constraints, call for effective optimization algorithms. Recently, a bio-inspired optimization algorithm named the Tunicate Swarm Algorithm (TSA) has been proposed. This paper extends this algorithm to optimize problems with multiple objectives, incorporating a fine-grained fitness assignment strategy, a density estimation technique, and an enhanced archive truncation method. Our algorithm's performance is validated on 10 test functions, 7 with two objectives and 3 with three objectives. It is compared with two well-regarded algorithms : Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition (MOEA/D) and Multi-Objective Particle Swarm Optimization (MOPSO). The inverted Generational Distance (IGD) metric and the Spacing (SP) metric are used to quantify the behaviours of multi-objective algorithms. The obtained results show the performance of the proposed algorithm in terms of convergence and diversity for the benchmark functions.

Keywords : Tunicate Swarm Algorithm ; Multi-objective Optimization ; Pareto Set ; External Archives

1 Introduction

For multi-objective optimization problems (MOPs), the best solution is represented by an equilibrium set of solutions known as the "Pareto set" or even "Pareto front", in which each solution represents a compromise of objectives [9]. A large number of methods have been developed to provide a satisfactory response to multi-objective problems. Among the most famous these methods : A fast and elitist multi-objective genetic algorithm (NSGA-II) in 2002 [2], Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2(SPEA2) proposed by Zitzler [10], A Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition (MOEA/D) [4], Multi-Objective Particle Swarm Optimization algorithm (MOPSO) proposed in 2004 by Reyes-Sierra and others [1], and Multi-objective Grey Wolf Optimizer (MOGWO) [5]. Even though these algorithms can effectively approximate the true Pareto optimal solutions of multi-objective problems, there is a theorem here called "No Free Lunch" (NFL)[7], which has been logically proved to be true.

No optimizer can guarantee the same performance for all types of problems. According to this theorem, an optimizer's better performance on one class of problems does not guarantee equivalent performance on another. That is the foundation and inspiration for this study. Recently, a new search algorithm for mono objective optimization, called Tunicate Swarm Algorithm (TSA), has been developed by Satnam Kaur [3]. Preliminary studies show that it is very promising and could outperform existing algorithms. In this paper, we will extend TSA to solve multi-objective problems and formulate a multi-objective algorithm (MOTSA) with these majors contributions : External archives $A(t)$ is incorporated into the TSA algorithm for preserving the Pareto optimal set, An improved fitness assignment scheme is used, which takes for each individual into account how many individuals it dominates and it is dominated by [10], A nearest neighbor density estimation technique is incorporated which allows more precise guidance of the search process [10], and truncation method guarantees the preservation of boundary solutions [10].

2 Problem statement and definitions

Définition 2.1. *Multi-objective Optimization Problem (MOP) is dened as :*

$$\begin{aligned} \text{Min} F(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)] \\ \text{Subject to } x &\in X. \end{aligned} \quad (1)$$

The vector $x \in \mathfrak{R}^n$ formed by n decision variables . The feasible set $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ is implicitly determined by a set of equality and inequality constraints. The vector function $F : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^M$ is composed by M scalar objective functions $f_M : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ($M \geq 2$).

Définition 2.2. (Dominance relation) The solution $x^{(i)}$ dominates the solution $x^{(j)}$ (on note $x^{(i)} \succ x^{(j)}$) if the following conditions are true

- $f_m(x^{(i)}) \leq f_m(x^{(j)}) \forall m \in \{1, \dots, M\}$
- $\exists m \in \{1, \dots, M\} : f_m(x^{(i)}) < f_m(x^{(j)})$.

Définition 2.3. (Non-dominated set) : Let P be a set of candidate solutions for a problem multi-objective optimization. The set $P^* \subseteq P$, composed of all the elements of P which are not dominated by any element of P is said to be a non-dominated subset of the set P solutions [2].

3 Multi objective tunicate swarm algorithm

As TSA (The Tunicate Swarm Algorithm) forms the basis for MOTSA, you can find the article on the algorithm here, see [3]. The TSA imitates tunicates' jet propulsion and swarm behaviors during the navigation and foraging process. The mathematical model of the jet propulsion behavior and the swarm behavior [3]. We propose an extended version of TSA, namely MOTSA, which incorporates a fine-grained fitness assignment strategy, a density estimation technique, and an archive truncation method. For more details on these strategies, see [10]. The MOTSA algorithm begins with locating randomly the tunicate population P_p and

creating an empty archive A size N . Then, Choose the initial parameters and the maximum number of iterations T . The MOTSA algorithm assesses the initial population of tunicate with respect M objective functions. after that Calculate Fitness assignment values of individuals in $P_p(t)$ and $A(t)$ then Copy all non-dominated individuals in $P_p(t)$ and $A(t)$ to $P_p(t+1)$. If the size of $A(t+1)$ exceeds N , then reduce $A(t+1)$ using the truncation operator. Otherwise, if the size of $A(t+1)$ is less than N , then fill $A(t+1)$ with dominated individuals in $P_p(t)$ and $A(t)$ Next, If iteration $t \geq T$ or another stopping criterion is satisfied then set $A(t+1)$ to the set of decision vectors else, we will do an update the position of each search agent with assistance the best search agent in each iteration.

Algorithm 1 Pseudo-code of MOTSA

- 1: Initialize the population $P_p(\vec{0})$ with n Tunicate.
- 2: Choose the initial parameters and the maximum number of iterations T .
- 3: Initialize the external archive $A(0)$.
- 4: Evaluate the fitness of the Tunicate population
- 5: Calculate Fitness assignment values of individuals in $P_p(\vec{t})$ and $A(t)$
- 6: Copy all non-dominated individuals in $P_p(\vec{t})$ and $A(t)$ to $A(t+1)$. If size of $A(t+1)$ exceeds N then reduce $A(t+1)$ by means of the truncation operator, otherwise if size of $A(t+1)$ is less than N then fill $A(t+1)$ with dominated individuals in $P_p(\vec{t})$ and $A(t)$
- 7: **if** $t > T$ **then** $PF = A(t+1)$ Stop
- 8: **end if**
- 9: Update the position of the Tunicate population using the equation 2

$$P_p(\vec{x}+1) = \frac{P_p(\vec{x}) + P_p(\vec{x}+1)}{2 + c_1} \quad (2)$$

where \vec{P}_p is the position of tunicate solution and the variable c_1 random number lies in the range of $[0, 1]$.

- 10: $t=t+1$ and go to Step 4
 - 11: return PF
-

4 Results and discussion

We Compared MOTSA algorithm with two well known algorithms : MOPSO algorithm and MOEA/D algorithm. We decided to choose 10 multi-objective test problems suggested in the CEC 2009 [8] . We used 100 search agents and 1000 iterations .These three algorithms run 31 independent times, with a size 100 population. All the algorithms are implemented using the programming environment Matlab R2015a under 64-bit Windows 10. For measurement of convergence, we used Inverted Generational Distance (IGD) for measuring the convergence and the Spacing (SP) for measuring the diversity [6].

Table 1 reports the statically results of three compared algorithms in terms of IGD metric over 31 runs to UF test functions, while Table 2 reports the statistical results of three com-

UF01	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	2.4005E-03	5.0656E-03	3.6139E-03	3.6620E-03	7.7502E-04
MOPSO	3.8061E-03	9.7891E-03	5.7675E-03	5.4817E-03	1.3794E-03
MOEA/D	3.4321E-03	2.3324E-02	8.9544E-03	8.7704E-03	4.8677E-03
UF02	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	5.2532E-03	5.2532E-03	5.2532E-03	5.2532E-03	0.0000E+00
MOPSO	1.7713E-03	5.5213E-03	2.7712E-03	2.3996E-03	9.6486E-04
MOEA/D	2.3519E-03	8.8619E-03	5.1492E-03	5.3061E-03	2.1359E-03
UF03	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	9.6196E-03	1.1599E-02	1.0716E-02	1.0690E-02	5.6447E-04
MOPSO	5.7301E-03	1.5542E-02	1.1218E-02	1.1000E-02	1.8900E-03
MOEA/D	1.0307E-02	2.0865E-02	1.4607E-02	1.4615E-02	2.7086E-03
UF04	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	3.8614E-03	3.8614E-03	3.8614E-03	3.8614E-03	0.0000E+00
MOPSO	4.3519E-03	5.3024E-03	4.7937E-03	4.8002E-03	2.2572E-04
MOEA/D	2.9587E-03	4.4100E-03	3.4221E-03	3.3784E-03	2.6140E-04
UF05	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	4.3410E-01	5.9872E-01	5.0640E-01	4.9458E-01	5.2864E-02
MOPSO	3.6082E-01	6.6015E-01	4.8546E-01	4.6497E-01	8.9139E-02
MOEA/D	3.0010E-01	9.8238E-01	6.1872E-01	6.0710E-01	1.5023E-01
UF07	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	1.8552E-03	1.5208E-02	7.7043E-03	8.0253E-03	4.6317E-03
MOPSO	4.2534E-03	2.4331E-02	1.4020E-02	1.4378E-02	5.1002E-03
MOEA/D	2.0551E-03	3.3467E-02	1.1393E-02	1.2053E-02	8.0155E-03
UF08	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	2.6667E-03	2.7290E-03	2.6845E-03	2.6804E-03	1.9949E-05
MOPSO	3.3343E-03	1.0394E-02	5.1628E-03	4.7930E-03	1.8488E-03
MOEA/D	2.7025E-03	5.0949E-03	3.3188E-03	3.2140E-03	4.3291E-04
UF09	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	3.5588E-03	7.0007E-03	4.9540E-03	4.9136E-03	6.9186E-04
MOPSO	4.0369E-03	9.0032E-03	5.4539E-03	5.0125E-03	1.1066E-03
MOEA/D	1.4930E-03	7.0576E-03	3.6998E-03	3.4740E-03	1.0303E-03
UF10	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	9.2159E-03	2.1042E-02	1.3872E-02	1.3392E-02	4.2120E-03
MOPSO	3.5588E-03	7.0007E-03	4.9540E-03	4.9136E-03	6.9186E-04
MOEA/D	8.4123E-03	4.8700E-02	2.0233E-02	1.9322E-02	6.9919E-03

TABLE 1 – Statistical results for IGD on UF1 to UF10

pared algorithms in terms of SP metric over 31 runs to UF test functions. These statistical results of the SP metric prove that the proposed MOTSA outperforms the other algorithms on all UF function tests. On the other hand, the MOTSA shows weak converges to the Pareto set But is not far from than compared algorithms.

UF01	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	5.0875E-03	1.0547E-02	8.0681E-03	8.2326E-03	2.2795E-03
MOPSO	4.1029E-01	8.8826E-01	6.8095E-01	6.9388E-01	1.2353E-01
MOEA/D	1.8318E-05	9.2422E-01	6.1605E-01	6.3741E-01	2.4044E-01
UF02	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	4.6359E-02	4.6359E-02	4.6359E-02	4.6359E-02	0.0000E+00
MOPSO	8.6669E-01	9.3282E-01	9.0094E-01	8.9922E-01	1.6284E-02
MOEA/D	6.7078E-01	9.4402E-01	8.6078E-01	8.5657E-01	5.5201E-02
UF03	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	8.9445E-03	4.8614E-02	2.2720E-02	2.2992E-02	1.1571E-02
MOPSO	2.9501E-01	7.8340E-01	5.7809E-01	5.9216E-01	1.0208E-01
MOEA/D	1.3837E-14	4.8175E-01	2.3511E-01	2.6148E-01	1.1688E-01
UF04	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	9.4942E-03	9.4942E-03	9.4942E-03	9.4942E-03	0.0000E+00
MOPSO	7.4982E-01	8.2549E-01	7.9318E-01	7.9354E-01	1.7722E-02
MOEA/D	7.6200E-01	8.9712E-01	8.3215E-01	8.3852E-01	3.2428E-02
UF05	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	2.4346E-02	1.8155E-01	7.6021E-02	6.1587E-02	5.0718E-02
MOPSO	6.1893E-02	4.4374E-01	2.6785E-01	2.6481E-01	9.9152E-02
MOEA/D	2.1606E-01	7.0741E-01	4.0741E-01	4.0104E-01	1.3187E-01
UF06	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	1.2446E-02	7.1683E-02	4.3572E-02	5.1320E-02	2.1108E-02
MOPSO	1.0993E-01	4.3314E-01	2.5969E-01	2.6319E-01	8.4635E-02
MOEA/D	6.9225E-02	6.7215E-01	3.0306E-01	3.0397E-01	1.7335E-01
UF07	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	3.1573E-03	7.9968E-03	6.6446E-03	6.9851E-03	1.4986E-03
MOPSO	6.0499E-03	7.7066E-01	4.8200E-01	5.4184E-01	1.8754E-01
MOEA/D	3.3718E-02	9.5619E-01	5.8056E-01	5.6167E-01	2.9193E-01
UF08	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	3.1075E-02	9.7438E-02	4.8659E-02	4.3334E-02	1.8289E-02
MOPSO	2.5814E-01	9.2826E-01	5.4488E-01	5.3695E-01	1.7534E-01
MOEA/D	7.2209E-01	9.9547E-01	9.3033E-01	9.7041E-01	7.5970E-02
UF10	Best	Worst	Average	Median	STD
MOTSA	1.0041E-01	2.3128E-01	1.8256E-01	1.8227E-01	3.6537E-02
MOPSO	9.2338E-03	3.0812E-01	1.1268E-01	1.0944E-01	7.8205E-02
MOEA/D	6.7281E-02	5.4659E-01	2.5162E-01	2.3865E-01	1.1196E-01

TABLE 2 – Statistical results for SP on UF1 to UF10

5 Conclusion

This paper proposed a novel multi-objective meta-heuristic termed MOTSA based on the recently developed TSA. The MOTSA algorithm integrated external archives $A(t)$ into the standard TSA for handling MOPs. The external archives allow MOTSA to balance conver-

gence and diversity to find a very accurate approximation of the Pareto optimal. On the other hand, the fitness assignment, A nearest neighbor density estimation technique, and truncation method improved the diversity and convergence of non-dominated solutions during the update of the $A(t)$ archives. MOTSA algorithm was tested on 10 benchmark functions and using two well-known metrics two well-known metrics by comparing two well-known algorithms : MOEA/D and MOPSO. The statistical results have shown that MOTSA outperforms the two selected approaches in terms of diversity. However, improving the algorithm's quality in terms of convergence is the main pending challenge of the present investigation. As part of future studies, we plan to Work on improving the algorithm in terms of convergence and expand it to solve the many-objective optimization problem.

References

- [1] Carlos A Coello Coello, Gregorio Toscano Pulido, and Maximino Salazar Lechuga. Handling multiple objectives with particle swarm optimization. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 8(3) :256–279, 2004.
- [2] Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, and TAMT Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2) :182–197, 2002.
- [3] Satnam Kaur, Lalit K Awasthi, AL Sangal, and Gaurav Dhiman. Tunicate swarm algorithm : a new bio-inspired based metaheuristic paradigm for global optimization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 90 :103541, 2020.
- [4] Xiaoliang Ma, Yutao Qi, Lingling Li, Fang Liu, Licheng Jiao, and Jianshe Wu. Moea/d with uniform decomposition measurement for many-objective problems. *Soft Computing*, 18(12) :2541–2564, 2014.
- [5] Seyedal Mirjalili, Shahrzad Saremi, Seyed Mohammad Mirjalili, and Leandro dos S Coelho. Multi-objective grey wolf optimizer : a novel algorithm for multi-criterion optimization. *Expert Systems with Applications*, 47 :106–119, 2016.
- [6] Jason Ramon Schott. *Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [7] David H Wolpert and William G Macready. No free lunch theorems for optimization. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 1(1) :67–82, 1997.
- [8] Qingfu Zhang, Aimin Zhou, Shizheng Zhao, Ponnuthurai Nagaratnam Suganthan, Wudong Liu, and Santosh Tiwari. Multiobjective optimization test instances for the cec 2009 special session and competition. 2008.
- [9] Aimin Zhou, Bo-Yang Qu, Hui Li, Shi-Zheng Zhao, Ponnuthurai Nagaratnam Suganthan, and Qingfu Zhang. Multiobjective evolutionary algorithms : A survey of the state of the art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1(1) :32–49, 2011.
- [10] Eckart Zitzler, Marco Laumanns, and Lothar Thiele. Spea2 : Improving the strength pareto evolutionary algorithm. *TIK-report*, 103, 2001.



Metagame model for urban traffic control

Hichem Mahiout Corresponding Author¹, Mohammed Said Radjef², and Nadir Fah³

¹LaMOS Research Unit, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria,
hichem.mahiout@univ-bejaia.dz

²LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
mohammedsaid.radjef@univ-bejaia.dz

³Cosys-Grettia, Univ Gustave Eiffel, Ifsttar, F-77447 Marne-la-Vallée, France.,
nadir.farhi@univ-eiffel.fr

Abstract : In this paper, we propose a new traffic control based on a non-cooperative game model with constraints, which models the strategic interactions of different movements at an isolated signalized intersection. We assume that appropriate data on the state of traffic can be collected by means of vehicle-to-infrastructure communications, and we determine the traffic light controls based on the generalized Nash equilibrium of the proposed non-cooperative game with constraints. We test the performance of the proposed model by implementing it using the urban traffic simulator SUMO (Simulation of Urban MObility). The obtained simulation results show the efficiency of the proposed model in terms of the number of waiting vehicles, arrival vehicles and average travel times.

Keywords : Traffic control ; Game theory ; Intelligent vehicles

1 Introduction

In urban areas with high traffic demand, the optimization of traffic light control is among the main solutions to reduce congestion, improve traffic mobility, and deal with safety issues. Several control strategies have been developed, we cite SCOOT [1] and PRODYN [2]. The game theory is widely used to perform traffic light control. Generally, based on game theory, each traffic phase is then controlled as player. The players compete or cooperate to have more green time in order to minimize the queue lengths and the car waiting times of the associated links. In [3], two different game models are proposed : Cournot and Stackelberg models. The Cournot model [3] is applied in the case where there are no priority vehicles, while the Stackelberg model is used in the case where some vehicles have priority over others at the intersection. In both models, the traffic movements on an isolated intersection are divided into two phases. The phases (players) compete to share the cycle time and minimize the waiting time of vehicles at the intersection. In practice, to avoid conflicts with turning movements, turning cars slow down and yield the passage to the cars going forward. Lower bounds on the green times are also considered. In this work, we propose a game theory model for traffic light control at an isolated intersection, taking into account

the practical conditions cited above. We group the vehicle movements turning left in phases separately from the movements of the vehicle going straight or turning right. Inspired by [3], we assume that vehicles can communicate with the intersection controller and determine the traffic demand. We propose a non-cooperative game model with constraints (MetMod) for the optimization of traffic control. Each player controls one phase of the intersection to increase its green time and minimize the waiting times on the associated movements. The players are restricted by the cycle time and by the lower bounds of the green times. On the other hand, we introduce a new constraint to limit unnecessary green times. Each player tries to solve an optimization problem to determine its optimal green time, taking into account the decisions of the other players. The solution looked for is a Generalized Normalized Nash Equilibrium (GNNE) introduced by Rosen [5], which we obtain as a solution of a linear program.

2 Problem Statement

Let us consider the example of isolated signalized intersection J described in Figure 1. We denote by $R = \{R_1, R_2, \dots, R_8\}$ the set of roads. A traffic movement (R_a, R_b) corresponds to a vehicle exiting from lane R_a and entering to lane R_b . The set M of all traffic movements in intersection J is given as follows :

$$M = \left\{ \begin{array}{l} (R_3, R_8), (R_3, R_1), (R_3, R_6), (R_7, R_4), (R_7, R_6), (R_7, R_1), \\ (R_5, R_4), (R_5, R_1), (R_2, R_6), (R_2, R_8), (R_2, R_4), (R_5, R_8) \end{array} \right\}.$$

We separate the traffic movements into four phases as [4], each phase contain a subset of movements that can pass simultaneously. We note by $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ the phases set :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \{(R_3, R_8), (R_3, R_1), (R_7, R_4), (R_7, R_6)\}, & \phi_3 &= \{(R_3, R_6), (R_7, R_1)\} \\ \phi_2 &= \{(R_5, R_4), (R_5, R_1), (R_2, R_6), (R_2, R_8)\}, & \phi_4 &= \{(R_2, R_4), (R_5, R_8)\}. \end{aligned}$$

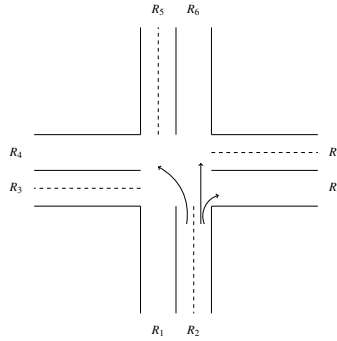


FIGURE 1 – The traffic movements of the intersection J .

We assume that vehicles communicate with the intersection controller and share some information about traffic state. The main problem consist of adjust traffic light control according to real-time traffic demand. All phases cyclically change state from green to red in a

fixed sequence to guide vehicles to pass or stop, respectively. The cycle time is fixed, but the green duration is variable. However, each phase want to increase its green time to minimize the number of waiting vehicles in the lanes of corresponding phase. In this study, our objective is to determine a traffic control that minimize the vehicle queue of all phases simultaneously. Here, we model this problem using a game theory approach, which we will detail in the next section.

3 Metagame model

We model the problem of real-time traffic light control at the intersection J as a non-cooperative metagame Γ (Non-cooperative game with constraints [7]) :

$$\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{C_i\}_{i \in I}, \{\Pi_i\}_{i \in I} \rangle. \quad (1)$$

where each player i controls a phase ϕ_i , $i \in I = \{1, 2, 3, 4\}$. A strategy of a player $i \in I$ consists in choosing the duration $t_i \in X_i = [0, T]$ of the green light of his phase ϕ_i . The green time t_i , chosen by each player $i \in I$ does not exceed the cycle length T , i.e :

$$t_i \leq T - \sum_{j \in I \setminus \{i\}} t_j \iff g_{i1}(t_i, t_{-i}) = \sum_{i=1}^4 t_i - T \leq 0, \quad \forall i \in I. \quad (2)$$

Furthermore, the green time t_i must be greater than a minimum green time $t_{min,i} > 0$:

$$t_i \geq t_{min,i} \iff g_{i2}(t_i, t_{-i}) = -t_i + t_{min,i} \leq 0, \quad \forall i \in I. \quad (3)$$

We assume that the parameters γ_i , μ_i and ω_i which represent the number of vehicles on the phase ϕ_i , the arrival rate of vehicles at the phase ϕ_i and the departure rate of vehicles from the phase ϕ_i , respectively, $i \in I$, are common knowledge to all players.

On the other hand, the green duration t_i chosen by each player $i \in I$ cannot exceed the needed duration to empty its average queue, i.e :

$$t_i \leq \frac{\gamma_i + \mu_i \sum_{j=1, j \neq i}^4 t_j}{\omega_i - \mu_i} \iff g_{i3}(t_i, t_{-i}) = (\omega_i - \mu_i)t_i - \mu_i \sum_{j=1, j \neq i}^4 t_j - \gamma_i \leq 0, \quad \forall i \in I. \quad (4)$$

Let us consider the notation $(t_i, t_{-i}) \in X_i \times X_{-i} = X$ to express the choice $t_i \in X_i$ of a player $i \in I$; $X_{-i} = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$.

Hence, an outcome $t \in X = \prod_{j \in I} X_j$ of the game is feasible, if the following relation is satisfied :

$$\forall i \in I, \quad t_i \in C_i(t_{-i}), \quad (5)$$

where the correspondence $C_i(\cdot) : X_{-i} \rightarrow X_i$ is the decision rule of the player $i \in I$ defined by

$$C_i(t_{-i}) = \{t_i \in X_i, \quad g_{ik}(t_i, t_{-i}) \leq 0, \quad k = 1, 2, 3\}, \quad i \in I. \quad (6)$$

The payoff function of the player $i \in I$ represents the vehicles' number remaining on the lanes of phase ϕ_i at cycle end, is given by :

$$\Pi_i(t_i, t_{-i}) = \gamma_i + \mu_i \sum_{j=1, j \neq i}^4 t_j + (\mu_i - \omega_i)t_i. \quad (7)$$

4 Resolution

The solution concept of the metagame (1) is the Generalized Nash Equilibrium (GNE), also called social equilibrium [8].

Definition 1. *An outcome $t^* \in \mathbb{R}^4$ is a GNE of the metagame (1), if the following assertions are satisfied :*

1. $t_i^* \in C_i(t_{-i}^*) \quad \forall i \in I$;
2. $\Pi_i(t_i^*, t_{-i}^*) \leq \Pi_i(t_i, t_{-i}^*), \quad \forall t_i \in C_i(t_{-i}^*), \quad \forall i \in I$.

Based on [5], find the GNE of the metagame (1) is equivalent to solve the following optimization problems for all players simultaneously :

$$\left\{ \min_{t_i} \Pi_i(t_i, t_{-i}) \text{ Subject to. } t_i \in C_i(t_{-i}) \right\}, \quad \forall i \in I. \quad (8)$$

As the constraints and the payoff functions (7) are linear, the problem (8) is called a Linear Generalized Nash Equilibrium Problem (LGNEP) [6]. When the player $i \in I$ optimizes his objective function $\Pi_i(t_i, t_{-i})$, by choosing its green time t_i , the term $\gamma_i + \mu_i \sum_{j=1, j \neq i}^4 t_j$ in (7) is a constant for the player $i \in I$. We can replace in (8) the objective functions by :

$$\begin{cases} \theta_i : X \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta_i(t_i, t_{-i}) = (\mu_i - \omega_i)t_i, \quad i \in I. \end{cases} \quad (9)$$

Thus, we rewrite the LGNEP (8) as follows :

$$\left\{ \min_{t_i} \theta_i(t_i, t_{-i}) \text{ st. } t_i \in C_i(t_{-i}) \right\}, \quad i \in I. \quad (10)$$

After some transformations, the problem 10 is reformulated as one linear program that we resolve using the dual simplex method. Its solution represent the optimal traffic control at isolated signalized intersection.

5 Conclusion

We presented a modeling process for a road traffic control problem at an isolated intersection with 12 movements. In a first step, we divided the movements into four phases, then we constructed a non-cooperative game with constraints with four players. We proved, under certain assumptions, that the constructed game admits a generalized Nash equilibrium. It should be noted that, subject to an adjustment of the duration of the cycle, the assumptions made are achievable. For its resolution, i.e. the calculation of the generalized Nash equilibrium of the game, we proceeded to a some transformations which brings the calculation of this equilibrium to the resolution of a linear program, which we solve by the dual simplex method. This model can be integrated without difficulty into a road network with several intersections. On the other hand, the model was presented for traffic control for one cycle, but it could be used in a dynamic model of traffic control in an intersection, and consequently in a network, over a long period.

Finally, the simulation results show the effectiveness of our model compared to the Webster classic method and to other game models in terms of waiting vehicles, arrival vehicles and average travel times.

References

- [1] Hunt, P. B., Robertson, D. I., Bretherton, R. D., and Royle, M. C. (1982). The SCOOT on-line traffic signal optimisation technique. *Traffic Engineering and Control*, 23(4).
- [2] Henry, J. J., and Farges, J. L. (1990). Prodyn. In *Control, Computers, Communications in Transportation* (pp. 253-255). Pergamon.
- [3] Bui, K. H. N., Jung, J. E., Camacho, D. (2017). Game theoretic approach on Realtime decision making for IoTbased traffic light control. *Concurrency and Computation : Practice and Experience*, 29(11), e4077.
- [4] Zaidi, A. A., Kulcsár, B., and Wymeersch, H. (2016). Back-pressure traffic signal control with fixed and adaptive routing for urban vehicular networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(8), 2134-2143.
- [5] Rosen, J. B. (1965). Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 520-534.
- [6] Dreves, A., and Sudermann-Merx, N. (2016). Solving linear generalized Nash equilibrium problems numerically. *Optimization Methods and Software*, 31(5), 1036-1063.
- [7] Aubin, Jean-Pierre. *Optima and equilibria : an introduction to nonlinear analysis*. Vol. 140. Springer Science and Business Media, 2002.
- [8] Debreu, Gerard. A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 38.10 (1952) : 886-893.



Financial Strategy, Accounting Quality and organizational Performance in Developing Countries

Baizid Touazi¹

¹ RMTQ Laboratory, Financial sciences and Accounting Department, University of Bejaia, Algeria
baizid.touazi@univ-bejaia.dz

Abstract. This study aims to construct hypotheses and a theoretical model based on financial strategies of listed companies. The question is how to improve their organizational productivity and performance o-PR through Strategic Management Choice s-MC of financial accounting characteristics f-AC. So, their accounting quality a-QA based on the international financial reporting standards IFRS may be affected. So, which research model r-MO, sample and method could be used then?

Keywords : Research model r-MO; Financial strategy; Organizational productivity and performance o-PR; Listed companies; Strategic management choice s-MC; Accounting quality a-QA; International financial reporting standards IFRS.

1 Introduction

Firstly, markets in developing countries are immature and imperfect [11] [23] so, a question should be raised about financial reporting staff competences and judgment level [23] . Empirically, the distinction between the Anglo-Saxon accounting model and the continental European accounting model is tested [15] . So, the adoption of the IFRS can raise serious questions about the financial accounting logic and the impact of s-MC on the o-PR of listed companies in developing countries. Secondly, although prior studies have examined the impact of f-AC on the a-QA and on the o-PR, little research has examined the relationship between them and with s-MC. So, this study aims to improve the o-PR of listed companies through s-MC.

The main objective of the adoption of IFRS is to facilitate the integration and the efficiency of capital markets [15] . They are useful for investors and lenders [16] as they can help them in decision-making through providing useful information for investment decisions and for credit decisions. However, the reasoning behind this is more a matter of rhetoric rather than of logical reasoning or of empirical justification [5] . Furthermore, accounting information is useful to multiple users [19].

2 Hypothesis

Valuation relevance and contracting relevance can be identified as alternative sub-objectives of financial accounting [10] . These two objectives can be in conflict with each other [10] [6] [7] . The contracting relevance aims to provide conservative information for creditors' decisions. Conservative information has been defined as the exercise of cautions in conditions of uncertainty so that assets and revenues may not be overestimated and liabilities and expenses may not be under-estimated [16] . It means also the tendency to underestimate profit and assets

* Corresponding Author:

or the speed with which loss are reported¹ [15] . However, the valuation relevance means that for financial information to be useful for investors' decisions, it must be informative about the firm value. Informative information can be defined as the information that is relevant to investors. Information is relevant if it has predictive value and or confirmatory value [16] :

Hypothesis 1: f-AC are a s-MC

The relationship between the accounting conservatism f-AC_c and the a-QA is widely studied. Empirical studies showed positive relationships [3]. The f-AC_c can play a vital role in debt contracts [13] . It may also positively impacts the relevance of earnings and the a-QA [13] . So, the accounting quality of investors' a-QA_i and the accounting quality of lenders' a-QA_L may be positively affected:

Hypothesis 2: The f-AC_c has a positive impact on a-AQ

Hypothesis 2a: The f-AC_c has a positive impact on the a-QA_L

Hypothesis 2b: The f-AC_c has a positive impact on the a-QA_i

Earnings coefficient responses are higher the higher the earnings persistence of unexpected current earnings changes [20] . So, the accounting informativeness f-AC_i may affect positively the a-QA:

Hypothesis 3: The f-AC_i has a positive impact on a-QA

Hypothesis 3a: The f-AC_i has a positive impact on the a-QA_L

Hypothesis 3b: The f-AC_i has a positive impact on the a-QA_i
QA may have an impact on users and on the o-PR [18] :

Hypothesis 3: a-QA has a positive impact on the o-PR

Hypothesis 3a: The a-QA_L has a positive impact on the o-PR

Hypothesis 4b: The a-QA_i has a positive impact on the o-PR

The f-AC_c can convey joint interests for the creditors and for borrowers and it may also reduce the cost of capital [13] . f-AC can reduce the cost of capital [22] and can improve contracting efficiency [1] [2] [22] . Financial reporting may positively affect stock prices and contracts [22] [25] . So, the accounting informativeness f-AC_i and the accounting conservatism f-AC_c may positively affect the o-PR:

Hypothesis 4: f-AC has a positive impact on the o-PR

Hypothesis 4a: The f-AC_L has a positive impact on the o-PR

Hypothesis 4b: The f-AC_i has a positive impact on the o-PR

Empirical studies showed a positive impact of strategic human resources management on the o-PR and employees attitudes [26] [14] . A positive relationship between good corporate

¹Caution prudence is a constituent of the faithful representation of IASB conceptual framework. However, the Basu (1997) model is the common measure for asymmetric timeless.

governance and the o-PR was documented [8] [9] . Involving employees in decision-making and team working would positively impact the o-PR [21] business growth and corporate accountability [4] :

Hypothesis 5: The s-MC has an impact on the o-PR

The stewardship theory states that management acts in the best way for the public interest in general and for shareholders in particular [4] . The Asian development bank explained that good corporate governance has four objectives namely accountability, transparency, predictability and participation [4]. An effective set of corporate governance mechanisms is associated with f-AC_c [1] . The board independence, board size and auditor type may be associated with f-AC_c [12]:

Hypothesis 6: The s-MC has an impact on f-AC

Hypothesis 6a: The s-MC has an impact on the f-AC_L

Hypothesis 6b: The s-MC has an impact on the f-AC_I

a-QA depends on managerial visions and creativity, audit quality and audit committee. The literature of accounting choice suggests that financial reporting affects a-AQ with implications for firm [20] [25] and for the contracting [17] [2] So, the a-QA_L and the a-QA_I may be affected:

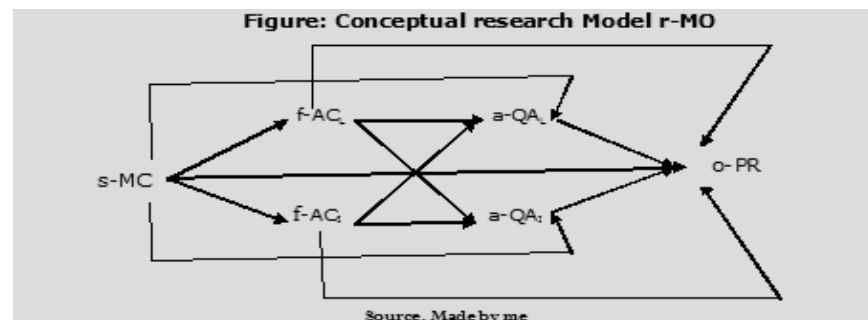
Hypothesis 7: The s-MC has an impact on a-QA

Hypothesis 7a: The s-MC has an impact on the a-QA_L

Hypothesis 7b: The s-MC has an impact on the a-QA_I

3 Research model, sample and method

As illustrated below, the model r-MO will be used to test the hypothesis. The association among the dimension of s-MC, f-AC_c, f-A_i, a-QA_L, a-QA_I, and the dimension of r-PR will be investigated by examining the standardized parameters in the causality model. Also, it is expected that this study adopts the questioning survey as the main method to collect data. So, the survey will be conducted in a specific area in developing countries. Companies and their managers will be chosen randomly to be invited to participate in the research. The questionnaire to be used in this research will consist of four parts: the s-MC scale, f-AC scale, accounting quality a-QA scale and o-PR scale. All the items to be measured using a 5-point Likert scale, and the final data to be analyzed using Excel, SPSS and AMOS. Finally, theoretical models to measure f-AC_c, f-AC_i, a-QA_L, a-QA_I and r-PR are also expected to be used.



References

- [1] Anis J.: Does corporate governance affect accounting conservatism? Empirical evidence in the French context (2013)
- [2] Armstrong, S. A., Guay, R.W., Weber, J.P.: The Role of Information and Financial Reporting in Corporate Governance and Debt Contracting. *Journal of Accounting and Economics* (2010)
- [3] Amneh A., Munther A. N., Mohammad D.: Accounting Conservatism and Ownership Structure Effect: Evidence from Industrial and Financial Jordanian Listed Companies. *International Journal of Economics and Financial* (2017)
- [4] Prabowo, B., Rochmatulaili, E., Rusdiyanto, R., Sulistyowati, E.: Corporate Governance and its Impact in Company's Stock Price: Case Study (2020)
- [5] BURLAUD, A., COLASSE, B. : La normalisation comptable internationale : le retour de la politique ? *Comptabilité Contrôle Audit* (2010)
- [6] Christensen, P. O., Feltham, G. A., Şabac F.: A contracting perspective on earnings quality. *Journal of accounting and economics* (2005)
- [7] Gjesdal, F.: Accounting for stewardship. *Journal of accounting research* (1981)
- [8] Hazril I. I., Abdul H. Z.: Corporate governance, HRM practices and organizational performance. *Socio-Economic Problems and the State* (2016)
- [9] Ibrahim, H., Zulkafli, A.: Corporate governance, HRM practices and organizational performance. *Socio-Economic Problems and the State* (2016)
- [10] Gassen, J. : Are Stewardship and Valuation Usefulness Compatible or Alternative Objectives of Financial Accounting? (2008)
- [11] LIU Z., B., LI J.: Research on the Comparison of Asset Impairment Accounting Standard between CAS and IAS, North China Electric Power University (2006)
- [12] Mahmoud A. N., Collins G.N. : Corporate governance mechanisms and accounting conservatism: evidence from Egypt (2018)
- [13] MOHAMMADI, M. H. K., HEYRANI, F., GOLESTANI, N.: Impact of Conservatism on the Accounting Information Quality and Decision Making of the Shareholders and the Firms Listed on the Tehran Stock Exchange. *International Journal of Academic Research in Accounting, Finance and Management Sciences* (2013)
- [14] Mark A. H.: The Impact of Human Resource Management Practices on Turnover, Productivity, and Corporate Financial Performance (1995)
- [15] Nobes, C., Parker, R.: comparative international accounting. Eleventh Edition, Dongbei University of Finance and Economics Press (2010)
- [16] OBERT, R. : Pratique des normes IFRS, référentiel et guide d'application. 6e édition, Dunode, Paris (2017)

-
- [17] Paul M. H., Krishna G. P.: Information asymmetry, corporate disclosure, and the capital markets: A review of the empirical disclosure literature (2021)
- [18] Rathnayake, R.M.S.S., Rajapakse, R.P.G.S.N. and Lasantha, S.A.R.: The Impact of Financial Reporting Quality on Firm Performance. *Journal of Business and Technology* (2021)
- [19] Schipper, K., Vincent, L.: Earning quality. *Accounting Horizons* (2003)
- [20] Scott R. W.: Financial accounting theory. Dongbei university of finance and economics press (2011)
- [21] Sergio F., Tima, M.: Employee Empowerment, Employee Attitudes, and Performance: Testing a Causal Model. *Public Administration Review* (2013)
- [22] Sugata R., Nemit S., Rodrigo S. V.: The Effects of Financial Reporting and Disclosure on Corporate Investment: A Review. *Massachusetts Institute of Technology* (2018)
- [23] Touazi, B., Chabi, T. : Contribution du nouveau système comptable financier à l'amélioration de la qualité de l'information comptable financière et la prise de décision : cas d'un échantillon d'entreprises Algériennes de production. Thèse de doctorat en sciences économique, Université Abderrahmane Mira de Bejaia (2021)
- [24] Thornton, D. B.: Financial Reporting Quality: Implications of Accounting Research. Submitted to the senate standing committee on banking, trade and commerce (2002)
- [25] Watts, R. L., Zimmerman, J. L.: Positive Accounting theory. Englewood Cliffs, N, Prentice-Hall (1986)
- [26] LIN Y., ZHAO S.: The impact of perceived Commitment HRM on employee performance: empirical evidence from china. *Entreprise management in a transitional economy and post financial crisis*, Nanjing university press (2011).



Mean-field-type games with hierarchical structures

Zahrate El Oula Frihi ¹, Julian Barreiro-Gomez ², Salah Eddine Choutri ³, and
Hamidou Tembine ⁴

¹Lab. of Probability and Statistics (LaPS), Department of Mathematics, Badji-Mokhtar University, B.P.12, 23000, Annaba, Algeria, zahrate.frihi@univ-annaba.org

²Learning & Game Theory Laboratory, Engineering Division, New York University Abu Dhabi, Saadiyat Campus PO Box 129188, UAE, {jbarreiro,choutri,tembine}@nyu.edu

Abstract : This paper presents a class of hierarchical mean-field-type games with multiple layers and non-quadratic polynomial costs. We first examine the single layer case where each decision-maker does not have the information about the other control strategies. We derive the Nash mean-field-type equilibrium and cost in linear state-and-mean-field feedback form. Then, we examine the Stackelberg two-layer problem with multiple leaders and multiple followers. The methodology is extended to multi-level hierarchical systems. We also identify specific range of parameters for which the Nash equilibrium coincides with the hierarchical solution independently of the number of layers and the order of play. In the heterogeneous case, it is shown that the total cost is significantly affected by the design of the hierarchical structure of the problem.

MSC: 05B05 ; 05B25 ; 20B25

Keywords : Mean-field-type hierarchical control ; Mean-field-type games ; design of hierarchical structure

1 Introduction

The idea of hierarchy dates back a least to 1934, when Stackelberg [1] introduced a game that models markets where some firms have stronger influence on others. Stackelberg games consist of two players, a leader and a follower. The leader who moves first, decides an optimal strategy after anticipating the best response of the follower. Then, the follower eventually chooses the anticipated best response to optimize her cost or payoff. Therefore, this game is a game with two-level hierarchy.

*Corresponding Author

Two or more players, the Stackelberg game is called hierarchical game and it becomes more interesting and involved due to its multi-layer structure including various forms of information. The players act in sequential order such that each one of them is a leader for the previous and a follower of the next player in the hierarchy.

Only few works consider hierarchical structures in mean-field related games. Open-loop Stackelberg solutions are addressed in linear-quadratic setting in [2, 3]; and in the context of large populations, mean-field Stackelberg games are investigated in [4, 5, 6]. *The works mentioned above do not consider hierarchical mean-field-type game setting where the payoff functionals are non-linear with respect to the probability measure of the state.*

Hierarchical mean-field-type game theory studies a class of hierarchical games in which the payoffs and/or state dynamics depend not only on the state-action pairs but also the distribution of them [7]. This class of games offers several features :

- A single decision-maker can have a strong impact on the mean-field terms,
- The expected payoffs are not necessarily linear with respect to the state distribution,
- The number of decision-makers is not necessarily infinite.

Games with non-linear distribution-dependent quantity-of-interest are very attractive in terms of applications since the non-linear dependence of the payoff functions in terms of state distribution allow us to capture risk measures, which are functionals of variance, inverse quantile, and/or higher moments.

Our contribution can be summarized as follows. This work examines a class of hierarchical mean-field-type games with multiple layers, multiple leaders and multiple followers. Based on infinite dimensional partial integro-differential equations (PIDEs) on the space of measures, we provide semi-explicit solutions in closed-loop form of a class of master systems with hierarchical structure and non-quadratic cost, which are not covered in the earlier works. The novelty of this paper mainly lies in the analysis of the effect of hierarchy and leadership on the solutions.

2 The Setup

There are $I \geq 2$ number of decision-makers interacting within the time horizon $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$. The set of decision-makers is denoted by $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, I\}$. Decision-maker $i \in \mathcal{I}$ has a control action $u_i \in U_i = \mathbb{R}$. The state x is driven by a Drift-Jump-Diffusion process of mean-field type given by

$$dx = bdt + \sigma dB + \int_{\Theta} \mu(\cdot, \theta) \tilde{N}(dt, d\theta), \quad x(t_0) \sim m(t_0, \cdot),$$

where

- Drift : $b : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \times \prod_{j=1}^I U_j \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,
- Diffusion coefficient : $\sigma : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \times \prod_{j=1}^I U_j \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,
- Brownian motion B ,
- Set of jump size : $\Theta = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$,
- Jump : $N(dt, d\theta)$,
- Compensated jump : $\tilde{N}(dt, d\theta) = N(dt, d\theta) - \nu(d\theta)dt$,
- Jump rate : $\mu : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \times \prod_{j=1}^I U_j \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$,

where $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ denotes the set of probability measures on \mathbb{R} . We assume that $x(t_0), B$ and N are mutually independent. The performance functional of decision-maker i is

$$L_i(u, m_0) = h_i(x(t_1), m(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} l_i(t, x, u, m) dt,$$

where $m(t, dy) = \mathbb{P}_{x(t)}(dy)$ is the probability measure of the state $x(t)$ at time t , and

$$\begin{aligned} l_i &: [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \times \prod_{j=1}^I U_j \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ h_i &: \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In addition, each decision-maker is assumed to have a computational capability such as being able to compute an aggregative term of m from the model. Let \mathcal{U}_i be the set of control strategies of decision-maker i that are progressively measurable with the respect to the filtration generated by the unions of events in $\{B, N\}$.

2.1 Games with polynomial cost

We investigate the mean-field-type game with the following data :

$$t_0 = 0, \quad t_1 = T > 0, \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} l_i(t, x, u, m) &= q_i \frac{(x - \bar{x})^{2k_i}}{2k_i} + r_i \frac{(u_i - \bar{u}_i)^{2k_i}}{2k_i} + c_i (x - \bar{x})^{2k_i - 1} (u_i - \bar{u}_i) \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} \varepsilon_{ij} (x - \bar{x})^{2(k_i - 1)} (u_i - \bar{u}_i) (u_j - \bar{u}_j) \\ &+ \bar{q}_i \frac{\bar{x}^{2\bar{k}_i}}{2\bar{k}_i} + \bar{r}_i \frac{\bar{u}_i^{2\bar{k}_i}}{2\bar{k}_i} + \bar{c}_i \bar{x}^{2\bar{k}_i - 1} \bar{u}_i + \sum_{j \neq i} \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{x}^{2(\bar{k}_i - 1)} \bar{u}_i \bar{u}_j, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$h_i(x, m) = q_{iT} \frac{(x_T - \bar{x}_T)^{2k_i}}{2k_i} + \bar{q}_{iT} \frac{\bar{x}_T^{2\bar{k}_i}}{2\bar{k}_i}, \quad (1c)$$

$$b(t, x, u, m) = b_1(x - \bar{x}) + \bar{b}_1 \bar{x} + \sum_{j \in \mathcal{I}} [b_{2j}(u_j - \bar{u}_j) + \bar{b}_{2j} \bar{u}_j], \quad (1d)$$

$$\sigma(t, x, u, m) = (x - \bar{x}) \tilde{\sigma}, \quad (1e)$$

$$\mu(t, x, u, m, \theta) = (x - \bar{x}) \tilde{\mu}(\cdot, \theta), \quad (1f)$$

$$\bar{x}(t) = \int y m(t, dy), \quad (1g)$$

$$\bar{u}_i(t) = \int u_i(t, y, m) m(t, dy), \quad i \in \mathcal{I}, \quad (1h)$$

where $k_i \geq 1, \bar{k}_i \geq 1$, are natural numbers, and the coefficients are time-dependent. The coefficient functions q_i, r_i, \bar{q}_i and \bar{r}_i are nonnegative functions and

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\tilde{\sigma}^2(t) + \int_{\Theta} \left((1 + \tilde{\mu}(t, \theta))^{2k_i} - 1 - 2k_i \tilde{\mu}(t, \theta) \right) \nu(d\theta) \right] dt < +\infty.$$

3 Nash Mean-Field-Type Equilibrium

A risk-neutral Nash Mean-Field-Type Equilibrium is a solution of the following fixed-point problem :

$$i \in \mathcal{I},$$

$$\mathbb{E}[L_i(u^*)] = \inf_{u_i \in \mathcal{U}_i} \mathbb{E}[L_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_I^*)].$$

Let $\hat{V}_i(t, m)$ be the optimal cost-to-go from m at time $t \in (t_0, t_1)$ given the strategies of the others, i.e.,

$$\hat{V}_i(t, m) = \inf_{u_i} \mathbb{E}[h_i(x(t_1), m(t_1)) + \int_t^{t_1} l_i(t, x, u, m) dt' | m(t) = m].$$

$\hat{V}_{i,m}(t, x, m) := \hat{V}_{i,m}(t, m)(x)$ is a Gâteaux derivative of $\hat{V}_i(t, m)$ with respect to the measure m . Let us denote the jump operator J as

$$J[\phi_i] := \int_{\Theta} [\phi_{i,m}(t^-, x + \mu) - \phi_{i,m} - \mu \phi_{i,xm}] \nu(d\theta),$$

Let us introduce the integrand Hamiltonian as

$$H_i(t, x, m, \hat{V}_m, \hat{V}_{xm}, \hat{V}_{xxm})$$

$$= \inf_{u_i \in \mathcal{U}_i} \left\{ l_i + b \hat{V}_{i,xm} + \frac{\sigma^2}{2} \hat{V}_{i,xxm} + \int_{\Theta} [\hat{V}_{i,m}(t^-, x + \mu) - \hat{V}_{i,m} - \mu \hat{V}_{i,xm}] \nu(d\theta) \right\}.$$

A sufficiency condition for a risk-neutral Nash equilibrium system is given by the following PIDE system :

$$0 = \hat{V}_{i,t}(t, m) + \int H_i(t, x, m, \hat{V}_m, \hat{V}_{xm}, \hat{V}_{xxm}) m(dx), \quad (2a)$$

$$\hat{V}_i(t_1, m) = \int m(dy) h_i(y, m), i \in \mathcal{I}. \quad (2b)$$

The system (2) is an infinite dimensional PIDE system in m and it provides the Nash equilibrium values of the mean-field-type game. Notice that from (2) the equilibrium strategies, are best response to the integrand Hamiltonian and can be expressed as functions of $t, x, m, \hat{V}_m, \hat{V}_{i,m}, \hat{V}_{i,xm}, \hat{V}_{i,xxm}$.

We use (2) to provide semi-explicitly the Nash mean-field-type equilibrium in linear state-and-mean-field feedback strategies.

4 Fully hierarchical game

In this section we make as many levels as the number of decision-makers. There are $|\mathcal{I}|$ hierarchical levels. At each layer i , decision-maker i chooses a control strategy u_i knowing the control strategy of the preceding decision-makers i.e., $\{i-1, \dots, 1\}$. This becomes a sequential decision-making problem. We use a backward induction method to solve the hierarchical game problem. This means that, the decision-making problem at the last layer I , which is the reaction of decision-maker I , can be seen as a mean-field-type control problem. This is because at the i -th level, the strategies $(u_{i'})_{i' \in \{1, \dots, i-1\}}$ are already known by decision-maker i .

Proposition 4.1. *The risk-neutral I–level hierarchical mean-field-type solution is given in a semi-explicit way as follows :*

$$u_i^{hs} = -\eta_i \left(x - \int ym(dy) \right) - \bar{\eta}_i \int ym(dy), i \in \mathcal{I}, \quad (3a)$$

$$\hat{V}_i(0, m) = \alpha_i(0) \int_x \frac{(x - \int ym_0(dy))^{2k_i}}{2k_i} m_0(dx) + \bar{\alpha}_i(0) \frac{(\int ym_0(dy))^{2\bar{k}_i}}{2\bar{k}_i}, \quad (3b)$$

with

$$\int ym(t, dy) = \left[\int ym(0, dy) \right] e^{\int_0^t [\bar{b}_1 - \sum_j \bar{b}_{2j} \bar{\eta}_j] dt}, \quad (3c)$$

where the coefficient functions are given by

Level 1 :

$$\begin{aligned} 0 &= -r_1 \eta_1^{2k_1-1} + c_1 - \sum_{j=2}^I \varepsilon_{1,j} \eta_j + \sum_{j=2}^I \varepsilon_{1,j} \eta_i \frac{\varepsilon_{ji}}{(2k_j-1)r_j} \eta_j^{-2(k_j-1)} \\ &+ \left[b_{2,1} - \sum_{j=2}^I b_{2j} \frac{\varepsilon_{j1}}{(2k_j-1)r_j} \eta_j^{-2(k_j-1)} \right] \alpha_1, \\ 0 &= \dot{\alpha}_1 + q_1 + r_1 \eta_1^{2k_1} - 2k_1 c_1 \eta_1 + 2k_1 \sum_{j=2}^I \varepsilon_{1j} \eta_1 \eta_j + 2k_1 \{ b_1 - b_{21} \eta_1 - \sum_{j=2}^I b_{2j} \eta_j \} \alpha_1 \\ &+ 2k_1 (2k_1 - 1) \alpha_1 \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 + \alpha_1 \int_{\Theta} [(1 + \bar{\mu})^{2k_1} - 1 - 2k_1 \bar{\mu}] \nu(d\theta), \end{aligned}$$

$$\alpha_1(T) = q_{1T},$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{r}_1 \bar{\eta}_1^{2\bar{k}_1-1} + \bar{c}_1 - \sum_{j=2}^I \bar{\varepsilon}_{1,j} \bar{\eta}_j + \sum_{j=2}^I \bar{\varepsilon}_{1,j} \bar{\eta}_1 \frac{\bar{\varepsilon}_{j1}}{(2\bar{k}_j-1)\bar{r}_j} \bar{\eta}_j^{-2(\bar{k}_j-1)} \\ &+ \left[\bar{b}_{21} - \sum_{j=2}^I \bar{b}_{2j} \frac{\bar{\varepsilon}_{j1}}{(2\bar{k}_j-1)\bar{r}_j} \bar{\eta}_j^{-2(\bar{k}_j-1)} \right] \bar{\alpha}_1, \\ 0 &= \dot{\bar{\alpha}}_1 + \bar{q}_1 + \bar{r}_1 \bar{\eta}_1^{2\bar{k}_1} - 2\bar{k}_1 \bar{c}_1 \bar{\eta}_1 + 2\bar{k}_1 \sum_{j=2}^I \bar{\varepsilon}_{1j} \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_j + 2\bar{k}_1 \{ \bar{b}_1 - \bar{b}_{21} \bar{\eta}_1 - \sum_{j=2}^I \bar{b}_{2j} \bar{\eta}_j \} \bar{\alpha}_1, \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}_1(T) = \bar{q}_{1T}.$$

Level i :

$$0 = -r_i \eta_i^{2k_i-1} + c_i - \sum_{i'=1}^{i-1} \varepsilon_{i-1,i'} \eta_{i'} - \sum_{j=i+1}^I \varepsilon_{i,j} \eta_j + \sum_{j=i+1}^I \varepsilon_{i,j} \eta_i \frac{\varepsilon_{ji}}{(2k_j-1)r_j} \eta_j^{-2(k_j-1)}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[b_{2i} - \sum_{j=i+1}^I b_{2j} \frac{\varepsilon_{ji}}{(2k_j - 1)r_j} \eta_j^{-2(k_j-1)} \right] \alpha_i, \\
 0 & = \dot{\alpha}_i + q_i + r_i \eta_i^{2k_i} - 2k_i c_i \eta_i + 2k_i \sum_{i'=1}^{i-1} \varepsilon_{i'i} \eta_i \eta_{i'} + 2k_i \sum_{j=i+1}^I \varepsilon_{ij} \eta_i \eta_j \\
 & + 2k_i \left\{ b_1 - \sum_{i'=1}^{i-1} b_{2i'} \eta_{i'} - b_{2i} \eta_i - \sum_{j=i+1}^I b_{2j} \eta_j \right\} \alpha_i + 2k_i (2k_i - 1) \alpha_i \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \\
 & + \alpha_i \int_{\Theta} [(1 + \bar{\mu})^{2k_i} - 1 - 2k_i \bar{\mu}] \nu(d\theta), \\
 \alpha_i(T) & = q_{iT}, \\
 0 & = -\bar{r}_i \bar{\eta}_i^{2\bar{k}_i-1} + \bar{c}_i - \sum_{i'=1}^{i-1} \bar{\varepsilon}_{i-1,i'} \bar{\eta}_{i'} - \sum_{j=i+1}^I \bar{\varepsilon}_{i,j} \bar{\eta}_j + \sum_{j=i+1}^I \bar{\varepsilon}_{i,j} \bar{\eta}_i \frac{\bar{\varepsilon}_{ji}}{(2\bar{k}_j - 1)\bar{r}_j} \bar{\eta}_j^{-2(\bar{k}_j-1)} \\
 & + \left[\bar{b}_{2i} - \sum_{j=i+1}^I \bar{b}_{2j} \frac{\bar{\varepsilon}_{ji}}{(2\bar{k}_j - 1)\bar{r}_j} \bar{\eta}_j^{-2(\bar{k}_j-1)} \right] \bar{\alpha}_i, \\
 0 & = \dot{\bar{\alpha}}_i + \bar{q}_i + \bar{r}_i \bar{\eta}_i^{2\bar{k}_i} - 2\bar{k}_i \bar{c}_i \bar{\eta}_i + 2\bar{k}_i \sum_{i'=1}^{i-1} \bar{\varepsilon}_{i'i} \bar{\eta}_i \bar{\eta}_{i'} + 2\bar{k}_i \sum_{j=i+1}^I \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\eta}_i \bar{\eta}_j \\
 & + 2\bar{k}_i \left[\bar{b}_1 - \sum_{i'=1}^{i-1} \bar{b}_{2i'} \bar{\eta}_{i'} - \bar{b}_{2i} \bar{\eta}_i - \sum_{j=i+1}^I \bar{b}_{2j} \bar{\eta}_j \right] \bar{\alpha}_i, \\
 \bar{\alpha}_i(T) & = \bar{q}_{iT}.
 \end{aligned}$$

Level I :

$$\begin{aligned}
 \eta_I & = \left(\frac{-\sum_{j=1}^{I-1} \varepsilon_{I,j} \eta_j + b_{2I} \alpha_I + c_I}{r_I} \right)^{\frac{1}{2k_I-1}}, \\
 0 & = \dot{\alpha}_I + q_I + r_I \eta_I^{2k_I} - 2k_I c_I \eta_I + 2k_I \sum_{i'=1}^{I-1} \varepsilon_{Ii'} \eta_I \eta_{i'} + 2k_I \left\{ b_1 - \sum_{i'=1}^{I-1} b_{2i'} \eta_{i'} - b_{2I} \eta_I \right\} \alpha_I \\
 & + 2k_I (2k_I - 1) \alpha_I \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 + \alpha_I \int_{\Theta} [(1 + \bar{\mu})^{2k_I} - 1 - 2k_I \bar{\mu}] \nu(d\theta), \\
 \alpha_I(T) & = q_{IT}, \\
 \bar{\eta}_I & = \left(\frac{-\sum_{j=1}^{I-1} \bar{\varepsilon}_{I,j} \bar{\eta}_j + \bar{b}_{2I} \bar{\alpha}_I + \bar{c}_I}{\bar{r}_I} \right)^{\frac{1}{2\bar{k}_I-1}}, \\
 0 & = \dot{\bar{\alpha}}_I + \bar{q}_I + \bar{r}_I \bar{\eta}_I^{2\bar{k}_I} - 2\bar{k}_I \bar{c}_I \bar{\eta}_I + 2\bar{k}_I \sum_{i'=1}^{I-1} \bar{\varepsilon}_{Ii'} \bar{\eta}_I \bar{\eta}_{i'} + 2\bar{k}_I \left\{ \bar{b}_1 - \sum_{i'=1}^{I-1} \bar{b}_{2i'} \bar{\eta}_{i'} - \bar{b}_{2I} \bar{\eta}_I \right\} \bar{\alpha}_I, \\
 \bar{\alpha}_I(T) & = \bar{q}_{IT},
 \end{aligned}$$

whenever these equations admit a solution. \square

5 Conclusion

We have examined a multi-layer hierarchical mean-field-type games with non-quadratic polynomial costs. We derived hierarchical mean-field-type solutions in linear state-and-mean-field feedback form by using a partial integro-differential system, and we have established the relationship between the Nash and the hierarchical solutions. Furthermore, we have studied the impact of the number of leaders on a bi-level Stackelberg problem for both symmetric and non-symmetric scenarios. In addition, we have shown that the number of layers, permutations of the decision-makers per layer and their identity affect significantly the total cost of the system. We have also shown numerically that the ordering among all permutations of heterogenous decision-makers may reduce the cost by significant proportion depending on the horizon.

References

- [1] H. V. Stackelberg. The theory of the market economy, trans. by aj peacock, london, william hodge. *Originally published as Grundlagen der Theoretischen Volkswirtschaftslehre*, 1948.
- [2] Y. Lin, X. Jiang, and W. Zhang. An open-loop Stackelberg strategy for the linear quadratic mean-field stochastic differential game. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(1) :97–110, 2019.
- [3] K. Du and Z. Wu. Linear-quadratic Stackelberg game for mean-field backward stochastic differential system and application. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 1798585, 17 pages, 2019.
- [4] A. Bensoussan, M. H. M. Chau, and S. C. P. Yam. Mean-field Stackelberg games : Aggregation of delayed instructions. *SIAM J. Control Optim.*, 53(4) :2237–2266, 2015.
- [5] A. Bensoussan, M.H.M. Chau, Y. Lai, and S.C.P. Yam. Linear-quadratic mean field Stackelberg games with state and control delays. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(4) :2748–2781, 2017.
- [6] J. Moon and T. Basar. Linear quadratic mean field stackelberg differential games. *Automatica*, 97(2018) :200–213, 2018.
- [7] J. Barreiro-Gomez, T. E. Duncan, and H. Tembine. Linear-quadratic mean-field-type games : Jump-diffusion process with regime switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(10) :4329–4336, 2019.

Presolving pour un Problème de Minimisation Quadratique Convexe

Samia Djemai*¹ and Mohand Ouamer Bibi²

¹Unité de Recherche LaMOS, Faculté des Sciences Exactes, Université de Jijel, Algérie,
samia.djemai@univ-jijel.dz

²Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa, Algérie,
mdouamer.bibi@univ-bejaia.dz

Résumé Dans ce travail, nous considérons le problème des SVM, se modélisant sous forme d'un problème de minimisation quadratique convexe, avec une contrainte linéaire d'égalité et des contraintes de bornes sur les variables. Le but est de trouver certains indices actifs à l'optimum afin de fixer à l'avance les variables correspondantes. Nous recherchons également d'autres indices de variables, dont les composantes correspondantes du gradient réduit seront nulles à l'optimum. Cette pré-résolution permet ainsi de réduire la dimension du problème et de commencer l'algorithme avec un support approprié qui assure sa convergence. Pour cela, la technique de bornage du gradient réduit optimal sera utilisée.

MSC: MSC 65K05 ; MSC 90C20 ; MSC 68T05

Mots clés : Problème de minimisation quadratique convexe ; SVM ; Presolving

1 Introduction

Les Séparateurs à Vaste Marge ou Support Vector Machines(SVM) fournissent une méthode de classification de l'apprentissage statistique, introduite par Vapnik en 1995 [1].

L'idée des SVM consiste à trouver, à base de notions de vaste marge et de fonctions noyaux, un hyperplan qui sépare au mieux les individus en deux classes. Étant donné un échantillon d'apprentissage $S = \{(x_i, y_i), i \in I = \{1, \dots, n\}\}$, où :

- $X = \{x_i, i \in I\}$ avec $x_i \in \mathbb{R}^p$ est le $i^{\text{ème}}$ exemple de l'échantillon,
- $y = \{y_i, i \in I\}$, $y_i \in \{-1, +1\}$ étant la classe du $i^{\text{ème}}$ exemple,
- n est la taille de l'échantillon, et p est le nombre d'attributs,
- f représente la fonction discriminante, et F est la classe de fonctions à laquelle appartient la fonction f , alors l'algorithme SVM permet de prédire la classe d'appartenance de nouvelles entrées :

$$f \in F : \mathbb{R}^p \rightarrow \{-1, +1\}, \quad f(x_i) = y_i. \quad (1)$$

*Corresponding Author

2 Formulation du problème SVM

La classification binaire par SVM consiste à résoudre le problème de minimisation d'une fonction objectif sous contraintes :

$$\min_{w, \xi} \quad \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad (2a)$$

$$\text{S. C.} \quad y_i [w' \phi(x_i) + b] \geq 1 - \xi_i, \quad (2b)$$

$$\xi_i \geq 0, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2c)$$

où

- ϕ est un projecteur de l'espace d'origine X dans un espace \mathfrak{F} (*the feature space*),
- ξ_i est une variable d'écart qui mesure à quel point l'exemple x_i est mal classifié,
- C est le paramètre de régularisation qui contrôle la misclassification de l'échantillon.

Le problème dual s'écrit :

$$\min_{\alpha} L(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha' D \alpha - e' \alpha, \quad (3a)$$

$$y' \alpha = 0, \quad (3b)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, i \in I, \quad (3c)$$

où

- $D = (d_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n symétrique et semi-définie positive, avec : $d_{ij} = y_i y_j k(x_i, x_j)$, $k(x_i, x_j)$ étant la fonction noyau, $\alpha = \alpha(I) = (\alpha_i, i \in I)$,
- $y = y(I) = (y_i, i \in I)$ avec $y_i \in \{-1, +1\}$, $e = (1, \dots, 1) \in R^n$. Le symbole $()'$ est celui de transposition.

En fonction de la valeur optimale des multiplicateurs de Lagrange α_i , les exemples d'apprentissage correspondants x_i peuvent être classés en trois catégories :

- $\alpha_i = 0$: l'exemple x_i est bien classé, mais il n'est pas un vecteur de support et il ne sera pas retenu pour construire le modèle final ;
- $0 < \alpha_i < C$: l'exemple correspondant x_i est bien classé et situé dans la marge, donc c'est un vecteur de support et il sera utilisé pour construire le classificateur final ;
- $\alpha_i = C$: puisque α_i est différent de zéro, alors l'exemple x_i est considéré comme un vecteur de support borné et il sera utilisé pour construire le classificateur final.

On déduit que les seuls coefficients α_i non nuls sont ceux associés aux exemples x_i de l'ensemble d'apprentissage S , c'est-à-dire ceux qui sont sur la marge (i.e., $\alpha_i = C$) ou à l'intérieur de l'espace délimité par la marge (i.e., $0 < \alpha_i < C$).

3 Presolving pour le problème quadratique convexe des SVM

On a la formulation duale pour le problème des SVM :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad L(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha' D \alpha - e' \alpha, \\ S.C. \quad y' \alpha = 0, \\ 0 \leq \alpha \leq C e. \end{array} \right. \quad (4)$$

On considère les répartitions suivantes : $I = I_B \cup I_N, I_B \cap I_N = \emptyset, I_N = I_S \cup I_{NN}, I_S \cap I_{NN} = \emptyset$.

Définitions

- $I_B \subset I$ tel que $|I_B| = 1$ est appelé *support des contraintes*.
- L'ensemble $I_S \subset I_N$ est appelé *support de la fonction objectif* du problème (4) si la sous-matrice $M_S = M(I_S, I_S)$ de M est non singulière, où

$$M = M(I_N, I_N) = Z' D Z \text{ et } Z = \begin{pmatrix} -y_B y_N \\ J_N \end{pmatrix}, J_N \text{ étant la matrice identité de dimension } (n-1).$$
- L'ensemble $I_P = \{I_B, I_S\}$ est appelé *support du problème* (4).
- Le couple $\{\alpha, I_P\}$ est appelé *Solution Réalisable de Support* (SRS) du problème (4). Elle est dite potentiellement *non dégénérée* si $0 < \alpha_i < C, i \in I_B$.
- Le vecteur $g = g(\alpha) = D\alpha - e$ est le gradient de la fonction objectif, avec $g = (g_B, g_N), g_B = g(I_B), g_N = g(I_N)$.
- Le scalaire $u = g_B y_B$ est appelé *potentiel*; Le vecteur $E = g - u y$ est le vecteur gradient réduit ou vecteur des estimations.
- La SRS $\{\alpha, I_P\}$ est dite *accordée* si $E_S = E(I_S) = (E_i, i \in I_S) = 0$.

Critère d'optimalité

Critère d'optimalité (R. Gabasov, 1987). Soit $\{\alpha, I_P\}$ une SRS accordée du problème (4). Alors les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} E_i \geq 0, \quad \text{si } \alpha_i = 0 \quad ; \\ E_i \leq 0, \quad \text{si } \alpha_i = C \quad ; \\ E_i = 0, \quad \text{si } 0 < \alpha_i < C, \quad i \in I_{NN} \quad , \end{array} \right. \quad (5)$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence de $\{\alpha, I_P\}$, aussi nécessaires pour l'optimalité de la solution réalisable α .

La Procédure de Presolving

Avant de procéder à l'algorithme de résolution du problème (4), on va faire une étape de pré-traitement qui permet de trouver certains indices actifs à l'optimum afin de fixer à l'avance les variables correspondantes. Nous recherchons également d'autres indices de variables,

dont les composantes correspondantes du gradient réduit seront nulles à l'optimum. La technique de presolving est basée sur les majorations et minoration suivantes :

$$g^- \leq g \leq g^+, \quad u^- \leq u \leq u^+, \quad E^- \leq E \leq E^+.$$

A partir de la matrice D , on définit les deux matrices suivantes :

$$D^+ := (d_{ij}^+, i, j \in I), \quad D^- := (d_{ij}^-, i, j \in I),$$

avec

$$d_{ij}^+ = \begin{cases} d_{ij}, & \text{si } d_{ij} \geq 0, \\ 0, & \text{si } d_{ij} < 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$d_{ij}^- = \begin{cases} d_{ij}, & \text{si } d_{ij} \leq 0, \\ 0, & \text{si } d_{ij} > 0. \end{cases} \quad (7)$$

On calcule ensuite les vecteurs :

$$v^+(I) = (v_i^+, i \in I) := CD^+e, \quad v^-(I) = (v_i^-, i \in I) := CD^-e.$$

Pour toute solution réalisable α du problème (4), on a la double inégalité :

$$g^- = v^- - e \leq g(\alpha) \leq v^+ - e = g^+, \quad (8)$$

avec

$$g_i^- = v_i^- - 1 \leq g_i \leq v_i^+ - 1 = g_i^+, \quad i \in I.$$

Puisque $u = \pm g_B$, alors

$$\begin{aligned} E &= g - uy \leq g^+ + |g_B|e, \\ E &\leq g^+ + \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\}e, \\ E &\leq E^+ = v^+ - e + \max_{i \in I} \{v_i^+ - 1, 1 - v_i^-\}e. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} E &\geq g^- - uy \geq g^- - |g_B|e, \\ E &\geq g^- - \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\}e, \\ E &\geq g^- + \min_{i \in I} \{-g_i^+, g_i^-\}e, \\ E &\geq E^- = v^- - e + \min_{i \in I} \{1 - v_i^+, v_i^- - 1\}e. \end{aligned}$$

Donc

$$E^- = v^- - e + \min_{i \in I} \{1 - v_i^+, v_i^- - 1\}e \leq E \leq v^+ - e + \max_{i \in I} \{v_i^+ - 1, 1 - v_i^-\}e = E^+.$$

En particulier, pour une solution optimale α^* , on a alors :

$$E^- \leq E^* \leq E^+. \quad (9)$$

Le lemme suivant permet de fixer certaines composantes de la solution optimale α^* à leurs bornes :

Lemma 3.1. Soit $i \in I_N = I \setminus I_B = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I_B$. Alors on a :

- (i) Si $E_i^+ < 0$ alors $E_i^* < 0 \Rightarrow \alpha_i^* = C$,
- (ii) Si $E_i^- > 0$ alors $E_i^* > 0 \Rightarrow \alpha_i^* = 0$.

Preuve. Cela vient des relations d'optimalité (5) et de l'inégalité (9). \square

Le deuxième lemme permet d'exclure une composante α_i^* d'être à une certaine borne. Pour cela, on définit pour tout $i \in I$, les ensembles :

$$I_i^+ = \{j \in I : j \neq i \text{ et } d_{ij} \geq 0\}, \quad I_i^- = \{j \in I : j \neq i \text{ et } d_{ij} < 0\}.$$

Donc on obtient :

$$v_i^+ = Cd_{ii} + C \sum_{j \in I_i^+} d_{ij}, \quad v_i^- = C \sum_{j \in I_i^-} d_{ij}.$$

Lemma 3.2. Soit $i \in I_N$, alors :

- (i) $1 < q_i^- := v_i^- + \min_{i \in I} \{-g_i^+, g_i^-\} + Cd_{ii} \Rightarrow \alpha_i^* < C$;
- (ii) $1 > q_i^+ := v_i^+ + \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\} - Cd_{ii} \Rightarrow \alpha_i^* > 0$.

Preuve. (i) Supposons que $\alpha_i^* = C$. Donc $E_i^* \leq 0$ en vertu du critère d'optimalité (5). Alors on aura :

$$E_i^* = Cd_{ii} + \sum_{j \in I_i^+} d_{ij} \alpha_j^* + \sum_{j \in I_i^-} d_{ij} \alpha_j^* - 1 - uy,$$

$$E_i^* \geq Cd_{ii} + v_i^- - 1 + \min_{i \in I} \{-g_i^+, g_i^-\} \geq q_i^- - 1.$$

D'après l'hypothèse (i), on obtient $E_i^* > 0$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, on doit avoir $\alpha_i^* < C$.

(ii) Supposons que $\alpha_i^* = 0$. D'après le critère d'optimalité (5), il vient $E_i^* \geq 0$. Alors on aura :

$$E_i^* = \sum_{j \in I_i^+} d_{ij} \alpha_j^* + \sum_{j \in I_i^-} d_{ij} \alpha_j^* - 1 - uy,$$

$$E_i^* \leq v_i^+ - 1 - Cd_{ii} + \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\} \leq q_i^+ - 1.$$

L'hypothèse (ii) implique que $E_i^* < 0$, d'où la contradiction. Par conséquent, on doit avoir $\alpha_i^* > 0$. \square

Le troisième lemme permet de prédire que pour certains indices $i \in I_N$, la composante E_i^* du gradient réduit de la solution optimale α^* doit être nulle.

Lemma 3.3. Soit $i \in I_N$. Si $q_i^+ < 1 < q_i^-$, alors $E_i^* = 0$.

Preuve. Si $q_i^+ < 1 < q_i^-$, l'application du Lemme 3.2. va impliquer que $\alpha_i^* > 0$ et $\alpha_i^* < C$. Donc $0 < \alpha_i^* < C$, et par conséquent $E_i^* = 0$. \square

Remarque 3.1. La condition $q_i^+ < q_i^-$ se produit si et seulement si :

$$d_{ii} - \sum_{j \neq i} |d_{ij}| > S, \quad \text{où } S = \frac{2 \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\}}{C}.$$

En effet, on a

$$q_i^+ = v_i^+ - Cd_{ii} + \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\} = C \sum_{i \in I_i^+} d_{ij} + \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\},$$

$$q_i^- = v_i^- + Cd_{ii} + \min_{i \in I} \{-g_i^+, g_i^-\} = Cd_{ii} + C \sum_{i \in I_i^-} d_{ij} + \min_{i \in I} \{-g_i^+, g_i^-\},$$

donc

$$q_i^+ - q_i^- < 0 \Leftrightarrow C \sum_{i \in I_i^+} d_{ij} - C \sum_{i \in I_i^-} d_{ij} - Cd_{ii} + \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\} - \min_{i \in I} \{-g_i^+, g_i^-\} < 0.$$

Or

$$\max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\} = -\min_{i \in I} \{-g_i^+, g_i^-\},$$

d'où

$$\begin{aligned} C \sum_{i \in I_i^+} d_{ij} - C \sum_{i \in I_i^-} d_{ij} - Cd_{ii} + 2 \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\} < 0, \\ \Leftrightarrow d_{ii} - \sum_{j \neq i} |d_{ij}| > \frac{2 \max_{i \in I} \{g_i^+, -g_i^-\}}{C} = S. \end{aligned}$$

Donc

$$q_i^+ < q_i^- \Leftrightarrow d_{ii} - \sum_{j \neq i} |d_{ij}| > S.$$

Il s'agit d'un cas de dominance diagonale forte pour la ligne i de la matrice D . Ainsi, on déduit

$$q_i^+ < 1 < q_i^- \Rightarrow E_i^* = 0 \Rightarrow i \in I_S^*.$$

Grâce aux Lemmes 3.1., 3.2. et 3.3., on définit les sous-ensembles suivants de I :

$$I_0 := \{i \in I_N : E_i^- > 0\};$$

$$I_C := \{i \in I_N : E_i^+ < 0\};$$

$$I_S := \{i \in I_N : q_i^+ < 1 < q_i^-\};$$

$$\bar{I}_N := I_N \setminus (I_0 \cup I_C);$$

$$\bar{I} := \bar{I}_N \cup I_B;$$

On aura alors

$$\alpha_i^* = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in I_0 ; \\ C, & \text{si } i \in I_C ; \\ 0 < \alpha_i^* < C(E_i^* = 0), & \text{si } i \in I_S . \end{cases} \quad (10)$$

Ensuite, on pose $I := \bar{I}, n := |\bar{I}|, D := D(\bar{I}, \bar{I}), \alpha(I) := \alpha(\bar{I}), \bar{e}(\bar{I}) = e(\bar{I}) + D(\bar{I}, I_0 \cup I_C) \alpha^*(I_0 \cup I_C)$.

Il faut encore renouveler la contrainte d'égalité :

$$\alpha' y = 0 \Leftrightarrow \alpha(\bar{I})' y(\bar{I}) = \bar{\gamma},$$

avec

$$\bar{\gamma} = -\alpha^*(I_0 \cup I_C) y(I_0 \cup I_C).$$

Remarque 3.2. Cette procédure peut être répétée jusqu'à ce que les ensembles I_0, I_C et I_S deviennent constants.

4 Conclusion

La procédure de presolving proposée dans ce travail va être intégrée dans notre algorithme SVM-A proposée dans l'article [2] pour obtenir une bonne initialisation concernant la solution réalisable initiale et le support de la fonction objectif. Par conséquent, cela va permettre de réduire sa complexité afin d'accélérer sa convergence et améliorer sa performance pour l'apprentissage de grands problèmes SVM.

Références

- [1] Vapnik, V.N. : The nature of statistical learning theory. Springer-verlag, New York, 1995.
- [2] Djemai, S., Brahmî, B., Bibi, M. O. : A primal-dual method for SVM training. Neurocomputing. **211**, 34-40 (2016).
- [3] Djemai, S. , Bibi, M. O. : Résolution des problèmes de classification SVM par la méthode adaptée. Editions universitaires européennes, 2016.
- [4] Laouar, A., Bibi, M.O. : An adaptive hybrid direction algorithm for convex box constrained quadratic programming problems with enhanced presolving. Optimization, Submitted.

Méthode Adaptée pour la Résolution d'un Problème Linéaire Fractionnaire à Variables Bornées

Nassima Lazari*¹ and Mohand Ouamer Bibi²

¹Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa, Algérie,
nassima.lazari@univ-bejaia.dz

²Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa, Algérie,
mdouamer.bibi@univ-bejaia.dz

Résumé Dans ce travail, on a proposé un algorithme basé sur la méthode adaptée pour la résolution des problèmes de programmation linéaire fractionnaire à variables bornées (PLFVB), avec une autre formule d'accroissement de la fonction objectif permettant d'établir une estimation de suboptimalité qui assure la convergence de la méthode proposée.

MSC: 90C32 ; 49M37 ; 65K05

Mots clés : Programmation Linéaire Fractionnaire ; Méthode Adaptée ; Estimation de Suboptimalité.

1 Introduction

La forme particulière des programmes fractionnaires et de nombreuses applications économiques, financières, informatiques [13, 14, 12] ont été à la source de motivation de nombreux auteurs. Plusieurs méthodes ont été proposées pour la résolution des problèmes de programmation linéaire fractionnaire à variables bornées introduites dans [6, 5, 7]. La résolution se fait par les méthodes directes, par paramétrisation ou par la résolution d'un programme linéaire équivalent. Dans notre travail, on propose une méthode directe de résolution, basé sur la méthode adaptée. [11, 2, 3, 8]

2 Position du Problème et Définitions

Le problème de programmation linéaire fractionnaire à variable bornées (PLFVB) se présente sous la forme canonique suivante :

$$(PLFVB) \left\{ \begin{array}{l} \max f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p^T x + p_0}{q^T x + q_0}, \\ Ax = b, \\ l \leq x \leq u, \end{array} \right. \quad (1)$$

*Corresponding Author

où A est une matrice d'ordre $m \times n$, avec $\text{rang}(A) = m < n$; b est un vecteur de \mathbb{R}^m ; x, p, q, l et u sont des vecteurs de \mathbb{R}^n ; $\|l\| < \infty$; $\|u\| < \infty$ et $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$.

Définissons les ensembles d'indices suivants :

$I = \{1, 2, \dots, m\}$: l'ensemble d'indices des lignes de la matrice A ;

$J = \{1, 2, \dots, n\}$: l'ensemble d'indices des colonnes de la matrice A .

Soit J_B un sous-ensemble de J tels que $|J_B| = |I| = m$ et $J_N = J \setminus J_B$.

En vertu de la partition de J , on peut écrire et fractionner les vecteurs x, p, q et la matrice A de la manière suivante :

$x = (x_B, x_N)^T$, $x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B)$, $x_N = x(J_N)$; $p = (p_B, p_N)^T$; $q = (q_B, q_N)^T$;

$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a_j, j \in J)$, $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$;

$A = (A_B, A_N)$, $A_B = A(I, J_B) = (a_j, j \in J_B)$, $A_N = A(I, J_N)$.

Donnons les définitions suivantes :

- Un vecteur x vérifiant les contraintes $Ax = b$, $l \leq x \leq u$ est appelé *solution réalisable* du problème (1). L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, l \leq x \leq u\}$ est alors appelé *ensemble des solutions réalisables*. On suppose que l'ensemble S est non vide et $Q(x) > 0, \forall x \in S$.
- Une solution réalisable x^0 est dite optimale si

$$f(x^0) = \frac{p^T x^0 + p_0}{q^T x^0 + q_0} = \max_{x \in S} \frac{p^T x + p_0}{q^T x + q_0}.$$

- Une solution réalisable x^ε est appelée ε -optimale ou suboptimale si

$$f(x^0) - f(x^\varepsilon) = \frac{P(x^0)}{Q(x^0)} - \frac{P(x^\varepsilon)}{Q(x^\varepsilon)} \leq \varepsilon,$$

où x^0 est une solution optimale du problème (1) et ε un nombre positif ou nul choisi comme précision.

- L'ensemble J_B est appelé support si $\det A_B = \det A(I, J_B) \neq 0$.
- Le couple $\{x, J_B\}$ formé de la solution réalisable x et du support J_B est appelé *Solution Réalisable de Support (SRS)*.
- Une solution réalisable de support $\{x, J_B\}$ est dite *non dégénérée* si :
 $l_j < x_j < u_j, \forall j \in J_B$.
- Le vecteur gradient de la fonction f au point x est le vecteur $g(x) = g = (g_B, g_N)$,
où

$$g(x) = \nabla f(x) = \frac{Q(x)p - P(x)q}{Q^2(x)} = \frac{p - f(x)q}{Q(x)}.$$

- Définissons le vecteur des multiplicateurs π_Q et le vecteur des coûts réduits E^Q de la fonction dénominateur Q :

$$\begin{aligned} \pi_Q^T &= q_B^T A_B^{-1}, \\ (E^Q)^T &= \pi_Q^T A - q^T \iff E_j^Q = \pi_Q^T a_j - q_j, j \in J, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} (E_B^Q)^T = \pi_Q^T A_B - q_B^T = q_B^T A_B^{-1} A_B - q_B^T = 0, \\ (E_N^Q)^T = \pi_Q^T A_N - q_N^T. \end{cases}$$

- Définissons le vecteur des multiplicateurs π et le vecteur des coûts réduits E de la fonction objectif f :

$$\begin{aligned} \pi^T(x) &= \pi^T = g_B^T A_B^{-1}, \\ E^T(x) &= E^T = \pi^T A - g^T \iff E_j = \pi^T a_j - g_j, j \in J, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} E_B^T = \pi^T A_B - g_B^T = g_B^T A_B^{-1} A_B - g_B^T = 0, \\ E_N^T = \pi^T A_N - g_N^T = g_B^T A_B^{-1} A_N - g_N^T. \end{cases}$$

On détermine deux nombres réels strictement positifs Q_{\min} et Q_{\max} tels que :

$$Q_{\min} = \min_{x \in S} Q(x), Q_{\max} = \max_{x \in S} Q(x).$$

2.1 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ une solution réalisable de support du problème (1). Considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$. On a alors :

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(x) = \frac{p^T \bar{x} + p_0}{q^T \bar{x} + q_0} - \frac{p^T x + p_0}{q^T x + q_0}.$$

L'accroissement de la fonction objectif f prend la forme suivante :

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(x) = -\rho E_N^T \Delta x_N, \quad \rho = \frac{Q(x)}{Q(\bar{x})} > 0. \quad (2)$$

2.2 Critère d'optimalité

Théorème 2.1. (Critère d'optimalité).

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1). Alors les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{pour } x_j = l_j, \\ E_j \leq 0, & \text{pour } x_j = u_j, \\ E_j = 0, & \text{pour } l_j < x_j < u_j, j \in J_N, \end{cases} \quad (3)$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable de support $\{x, J_B\}$. Ces mêmes relations sont aussi nécessaires si la SRS $\{x, J_B\}$ est non-dégénérée.

2.3 L'estimation de suboptimalité

L'estimation de suboptimalité est la quantité

$$\beta(x, J_B) = \frac{Q_{\max}}{Q_{\min}} \left(\sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j (x_j - l_j) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j (x_j - u_j) \right). \quad (4)$$

On a alors le théorème suivant

Théorème 2.2. (Condition suffisante de suboptimalité).

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1) et ε un nombre positif ou nul arbitraire. Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors la solution x est ε -optimale.

2.4 Le nouveau vecteur des coûts réduits

Le nouveau vecteur des coûts réduits $\bar{E}_N = E_N(\bar{x})$, avec $\bar{x} = x + \theta^0 d$, s'écrit :

$$\bar{E}_N = \rho \left(E_N + \theta^0 \frac{E_N^T d_N}{Q(x)} E_N^Q \right) \Rightarrow \bar{E}_j = \rho \left(E_j + \theta^0 \frac{E_N^T d_N}{Q(x)} E_j^Q \right), \forall j \in J_N.$$

On prend

$$\delta_j = \theta^0 \frac{E_N^T d_N}{Q(x)} E_j^Q, \forall j \in J_N,$$

d'où

$$\bar{E}_j = \rho(E_j + \delta_j), \forall j \in J_N.$$

2.5 La nouvelle estimation de suboptimalité

La nouvelle estimation de suboptimalité est donnée par

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)(2\rho - 1)\beta(x, J_B), \quad \text{avec } \rho = \frac{Q(x)}{Q(\bar{x})}. \quad (5)$$

Lorsque \bar{x} est proche de x , on aura l'estimation suivante :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)(2\rho - 1)\beta(x, J_B) \simeq (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) \leq \beta(x, J_B). \quad (6)$$

2.6 Présentation de l'algorithme proposé

Soient $\{x, J_B\}$ une solution réalisable de support (SRS) initiale du problème (1) et ε un nombre arbitraire positif ou nul. Le schéma de la méthode adaptée pour la résolution des problèmes de programmation linéaire fractionnaire à variables bornées est décrit dans les étapes suivantes :

Étape 1. Calculer les vecteurs g_B , E_N^Q et E_N , où

$$g_B = \frac{p_B - f(x)q_B}{Q(x)}, \quad (E_N^Q)^T = q_B^T A_B^{-1} A_N - q_N^T \quad \text{et} \quad E_N^T = g_B^T A_B^{-1} A_N - g_N^T.$$

Étape 2. Test d'optimalité de la SRS $\{x, J_B\}$.

Calculer l'estimation de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = \frac{Q_{\max}}{Q_{\min}} \left(\sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - l_j) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - u_j) \right).$$

1. Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors $\{x, J_B\}$ est une solution optimale de support du problème (1).

2. Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\{x, J_B\}$ est une solution ε -optimale de support du problème (1).
3. Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, alors aller à l'étape 3.

Etape 3. Changement de la solution réalisable x en \bar{x} .

- Calculer le vecteur de la direction non-basique d_N , avec $d_N = (d_j, j \in J_N)$, où

$$d_j = \begin{cases} l_j - x_j, & \text{si } E_j > 0, \\ u_j - x_j, & \text{si } E_j < 0, \\ 0, & \text{si } E_j = 0. \end{cases}$$

- Calculer le vecteur de la direction basique d_B , avec

$$d_B = -A_B^{-1} A_N d_N.$$

- Calculer le pas $\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j$, où θ_j est déterminé par la formule

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{u_j - x_j}{d_j} & \text{si } d_j > 0, \\ \frac{l_j - x_j}{d_j} & \text{si } d_j < 0, \\ \infty & \text{si } d_j = 0. \end{cases} \quad (7)$$

- Calculer le pas optimal θ^0 , où

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}\}.$$

- Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 d$, $Q(\bar{x}) = Q(x) + \theta^0 q^T d$, $\rho = \frac{Q(x)}{Q(\bar{x})}$, $f(\bar{x}) = f(x) - \rho \theta^0 E_N^T d_N$ et $\bar{E}_N = \rho (E_N - \theta^0 \frac{E_N^T d_N}{Q(\bar{x})} E_N^Q)$.

Etape 4. Test d'optimalité de la SRS $\{\bar{x}, J_B\}$.

1. Si $\theta^0 = 1$, alors le processus de résolution s'arrête, avec \bar{x} solution optimale du problème (1).
2. Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors calculer l'estimation de suboptimalité de la solution réalisable de support $\{\bar{x}, J_B\}$, qui est donnée par la formule suivante :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)(2\rho - 1)\beta(x, J_B). \quad (8)$$

- **Si** $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors le processus de résolution s'arrête, avec \bar{x} solution optimale du problème (1).
- **Si** $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors le processus de résolution s'arrête, avec \bar{x} solution ε -optimale du problème (1).
- **Si** $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$, alors aller à l'étape 5.

Etape 5. Changement du support J_B en \bar{J}_B .

- Calculer le vecteur $X = X(J_N)$, où

$$X^T = (x_{j_1 j}, j \in J_N) = e_{j_1}^T A_B^{-1} A_N.$$

- Construire l'ensemble des indices non-optimaux J_{NNO} , où

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : (E_j > 0 \text{ et } x_j > l_j) \text{ ou } (E_j < 0 \text{ et } x_j < u_j)\} \subset J_N.$$

- Choisir un indice j_0 de l'ensemble J_{NNO} tel que $|x_{j_1 j_0}| \neq 0$ et pour assurer une meilleure stabilité numérique, on prend j_0 tel que

$$|x_{j_1 j_0}| = \max_{j \in J_{NNO}} \{|x_{j_1 j}|\},$$

et on pose $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$.

Etape 6. Poser $x = \bar{x}, f = \bar{f}, J_B = \bar{J}_B, E_N = \bar{E}_N$ et aller à l'étape 1.

3 Conclusion

Dans ce travail, on a fait le choix de résoudre un PLFVB par une méthode directe. Ainsi, on a traité directement le problème sans aucun changement de variables et on a construit un algorithme basé sur la méthode adaptée. Par la suite, des expérimentations numériques seront effectuées pour tester ses performances par rapport aux méthodes classiques existantes.

Références

- [1] Bajalinov, E. B. : Linear-Fractional-Programming Theory, Methods, Applications and Software, **84**. Kluwer Academic, Boston, 1st edition (2003).
- [2] Bibi, M. O., Bentobache, M. : The adaptive method with hybrid direction for solving linear programming problems with bounded variables. In : Proceedings of COSI'2011, University of Guelma, Algeria, 80-91, 24-27 April 2011.
- [3] Bibi, M. O., Bentobache, M. : A Hybrid Direction Algorithm for Solving Linear Programs. International Journal of Computer Mathematics, **92**, 1, 201-216 (2015).
- [4] Charnes, A., Cooper, W. W. : Programming with linear fractional functionals. -Naval Res.Logist.Quart, **9**, 3-4, 181-186 (1962).
- [5] Chakroborty, S., Babul Hasan, M. : A Parametric Approach to Solve Bounded-Variable LFP by Converting into LP. International Journal of Operations Research, **13**, 2, 047-057 (2016).
- [6] Das, H.K., Babul Hasan, M. , Islam, A. : Solving Linear Bounded Variable LFP Problems by Conversion into a Single LP Problem. International Journal of Data Analysis and Information System, **5**, 2, 89-130 (2013).
- [7] Das, H.K., M. Babul Hasan. A proposed technique for solving linear fractional bounded variable problems. Dhaka Univ. J. Sci., **60**, 2, 223-230 (2012).
- [8] Djeloud, K., Bentobache, M., Bibi, M. O. : A new method with hybrid direction for linear programming. Concurrency and Computation Practice and Experience, **33**, 1 , (2021).
- [9] Hakmi, M. A. : Méthode de support pour la résolution des problèmes d'optimisation fractionnaire linéaire. Thèse de Magister, Ecole Normale Supérieure de Laghouat, 2017.

- [10] Gabasov, R., Dezhurko, L. F. : The adaptive method for solving the general problem of fractional programming (in Russian). Dokl. Akad.Nauk BSSR, **29**, 8, 685-687 (1985).
- [11] Gabasov, R., Kirillova, F. M. : Methods of linear programming. Part 3. University Press, Minsk (1980).
- [12] Goedhart, M. H., Spronk, J. : Financial planning with fractional goals. European Journal of Operational Research, **82**, 111-123 (1995).
- [13] Myung, Y., Tcha, D. : Return of investment analysis for facility location. Technical Report OR 91-251, Massachusetts Institute of Technology, 1991.
- [14] Pedrosa Filho, E. L., Hansen, P., Ribeiro, C. C. : Modeling location and sizing off shore platforms. European Journal of Operational Research, **72**, 3 ,602-605 (1994).
- [15] Stancu Minasian, M. : Fractional Programming : Theory, Methods and Applications. Kluwer Academic, Boston (1997).



Méthode Adaptée pour la Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire en Nombres Entiers et Mixtes

Houria Boussouira*¹ and Mohand Ouamer Bibi²

¹LaMOS Research Unit, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria,
houria.boussouira@univ-bejaia.dz

²LaMos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
mobibi.dz@gmail.com

Résumé Dans cet article, on élabore une nouvelle coupe pour les problèmes de programmation linéaire en nombres entiers et mixtes, à variables bornées. Les problèmes obtenus après l'ajout de la coupe, sont résolus par la méthode adaptée.

Mots clés : Programmation Linéaire en Nombres Entiers et Mixtes ; Génération de Coupes ; Méthode Adaptée.

1 Introduction

Les techniques de Programmation Linéaire en nombres Entiers et Mixtes (PLE, PLM) sont étroitement liées à la modélisation des problèmes dont les variables de décision sont des vecteurs, où certaines de leurs composantes sont astreintes à prendre des valeurs entières. Malgré cette restriction, la programmation linéaire mixte permet de modéliser une grande variété de problèmes d'optimisation dans des domaines d'application extrêmement divers [Pochet et al. (2006), Heinz et al. (2013)].

Il s'agit là d'un des domaines les plus riches et les plus actifs de la programmation mathématique, et le volume de publications et de recherches qui lui a été consacré depuis les premiers travaux de Gomory en 1958, atteste de la difficulté du sujet et de l'importance de ses applications [Schrijver (2003), Lodi (2010)]. Du point de vue de la complexité, les problèmes en nombres entiers et mixtes appartiennent à la classe des problèmes NP-difficiles [Karp (1972), Garey et Johnson (1979)].

Ici on se propose de développer une nouvelle méthode pour la résolution d'un programme linéaire en nombres entiers et mixtes, à variables bornées. A chaque itération de cet algorithme, on rajoute une nouvelle coupe et on résout le programme linéaire résultant par la méthode adaptée [Gabasov (1993) ; Bibi et Bentobache (2011)].

*Corresponding Author

2 Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire en nombres entiers et mixtes et à variables bornées, s'écrivant sous la forme standard suivante :

$$(PLM) \quad \begin{cases} \max z = c'x, \\ Ax = b, \\ l \leq x \leq u, \\ x \in \mathbb{R}^n, \\ x_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in J_E, \end{cases} \quad (1)$$

où A est une matrice rationnelle d'ordre $m \times n$, $\text{rang}(A) = m < n$; b est un vecteur rationnel de dimension m ; c , x , l et u sont des vecteurs de dimension n dans \mathbb{Z}^n , J_E est l'ensemble des indices des variables entières.

On considère alors le problème relaxé associé de programmation linéaire suivant :

$$(PL) \quad \begin{cases} \max z = c'x, \\ Ax = b, \\ l \leq x \leq u, \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2)$$

Notons : $I = \{1, 2, \dots, m\}$: l'ensemble d'indices des lignes de la matrice A ,

$J = \{1, 2, \dots, n\}$: l'ensemble d'indices des colonnes de A , avec $J_E \subset J$.

Donnons les définitions suivantes :

- Un vecteur x vérifiant les contraintes $Ax = b$, $l \leq x \leq u$ et x_j entier pour tout $j \in J_E$ est une solution réalisable (SR) du problème (1).
- Une SR x^ε est appelé ε -optimale ou suboptimale du problème (2) si :

$$z(x^0) - z(x^\varepsilon) = c'x^0 - c'x^\varepsilon \leq \varepsilon,$$

où x^0 est une SR optimale du problème (2) et ε est un nombre supérieur ou égal à zéro, choisi comme précision.

- Soit un sous-ensemble d'indices $J_B \subset J$ tel que $J = J_B \cup J_N$, $J_B \cap J_N = \emptyset$, $|J_B| = m$.
- En vertu de la partition de $J = J_B \cup J_N$, on peut alors écrire et fractionner les vecteurs et les matrices de la manière suivante :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, x_B = (x_j, j \in J_B), x_N = (x_j, j \in J_N); c = (c_j, j \in J) = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix};$$

$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a_j, j \in J)$, a_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A ;

$$A = A(I, J) = (A_B | A_N), A_B = A(I, J_B) = (a_j, j \in J_B), A_N = A(I, J_N).$$

- L'ensemble J_B est appelé support si : $\det(A_B) = \det(A(I, J_B)) \neq 0$.
- La paire $\{x, J_B\}$ formé de la SR x et du support J_B est appelé Solution Réalisable de Support (SRS). Une SRS $\{x, J_B\}$ est dite basique si $x_j = l_j \vee u_j, \forall j \in J_N$.
- Une SRS $\{x, J_B\}$ est non dégénérée si : $l_j < x_j < u_j, \forall j \in J_B$.

3 Obtention d'une solution réalisable basique optimale à partir d'une solution réalisable de support optimale.

Soit $\{x^0, J_B\}$ une solution de support optimale de (2) non basique. Selon les valeurs des composantes du vecteur des estimations $E_N = c'_B A_B^{-1} A_N - c'_N$, on définit les ensembles d'indices suivants :

$$J_N^l = \{j \in J_N : E_j \geq 0 \text{ et } x_j^0 = l_j\}, J_N^u = \{j \in J_N : E_j \leq 0 \text{ et } x_j^0 = u_j\},$$

$$J_N^{lu} = \{j \in J_N : E_j = 0 \text{ et } l_j < x_j^0 < u_j\} \text{ et } J_N = J_N^l \cup J_N^u \cup J_N^{lu}.$$

On construit une autre solution réalisable \bar{x} telle que $z(\bar{x}) = z(x^0)$, avec $\bar{x} = x + \theta^0 d$.

Pour cela, le vecteur de direction d sera construit comme suit :

$$d_j = \begin{cases} 0, & \text{si } j \in J_N^l \cup J_N^u, \\ l_j - x_j^0, & \text{si } j \in J_N^{lu} \text{ et } 0 < x_j^0 - l_j \leq u_j - x_j^0, \\ u_j - x_j^0, & \text{si } j \in J_N^{lu} \text{ et } 0 < u_j - x_j^0 < x_j^0 - l_j, \end{cases}$$

et $d_B = -A_B^{-1} A_N d_N$. Le pas θ est calculé comme suit :

$$\begin{cases} \theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}\}, \text{ avec } \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \text{ où} \\ \theta_j = \begin{cases} \frac{u_j - x_j}{d_j}, & d_j > 0, \\ \frac{l_j - x_j}{d_j}, & d_j < 0, \\ \infty, & d_j = 0, \end{cases} & j \in J_B. \end{cases} \quad (3)$$

– si $\theta^0 = 1$: $\bar{x} = x^0 + d$, dans ce cas on a : $\bar{x}_j = l_j \vee u_j, \forall j \in J_N$, et

$$z(\bar{x}) - z(x^0) = -\theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j = -\theta^0 \sum_{j \in J_N^0} E_j d_j = 0, \text{ où } J_N^0 = \{j \in J_N : E_j = 0\}.$$

Donc \bar{x} est une solution optimale basique.

– Si $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$: $\bar{x} = x^0 + \theta_{j_1} d$ avec $\bar{x}_{j_1} = l_{j_1} \vee u_{j_1}, j_1 \in J_B$. La nouvelle SR \bar{x} est optimale, car

$$z(\bar{x}) - z(x^0) = -\theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j = -\theta^0 \sum_{j \in J_N^0} E_j d_j = 0, \text{ d'où } z(\bar{x}) = z(x^0).$$

Dans ce cas, on recommence une nouvelle itération de la méthode adaptée à partir de la nouvelle SRS $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$, tel que $\bar{J}_B = \{J_B \setminus j_1\} \cup \{j_0\}$ et $\bar{J}_N = \{J_N \setminus j_0\} \cup \{j_1\}$, où j_0 est l'indice donné par l'itération duale.

La nouvelle solution réalisable \bar{x} aura une composante basique de plus à chaque itération. Au bout de $|J_N|$ itérations au maximum, cette procédure permet d'obtenir une solution optimale basique.

4 Algorithme de résolution d'un (PLM) par la méthode adaptée

Le but de cet algorithme est de construire une solution optimale pour le problème (1). Le principe est le même que celui des algorithmes de plans sécants.

Pour ce faire, on définit les ensembles d'indices suivants :

$$\begin{aligned} J_N^+ &= \{j \in J_N : E_j > 0\}, \quad J_N^- = \{j \in J_N : E_j < 0\}, \quad J_N^0 = \{j \in J_N : E_j = 0\} = J^+ \cup J^-, \\ J^+ &= \{j \in J_N^0 : x_j^0 - l_j \leq u_j - x_j^0\} \text{ et } J^- = \{j \in J_N^0 : u_j - x_j^0 < x_j^0 - l_j\}. \end{aligned}$$

On commence d'abord par étudier le cas où $J_E = J$ dans (1). Dans ce cas, on a affaire à un problème de programmation linéaire en nombres entiers.

En fonction de J_B , on construit les fonctions pour tout $i \in J_B$:

$$\begin{aligned} Z_i(x) = & - \left\{ \bar{b}_i - \sum_{j \in J_N^+ \cup J^+} \bar{a}_{ij} l_j - \sum_{j \in J_N^- \cup J^-} \bar{a}_{ij} u_j \right\} + \sum_{j \in J_N^+ \cup J^+} \{\bar{a}_{ij}\} (x_j - l_j) \\ & + \sum_{j \in J_N^- \cup J^-} \{-\bar{a}_{ij}\} (-x_j + u_j), i \in J_B, \end{aligned} \quad (4)$$

où $\bar{b} = A_B^{-1}b$, $\bar{A} = (\bar{a}_{ij}, i \in J_B, j \in J_N) = A_B^{-1}A_N$ et $\{\cdot\}$ étant la partie fractionnaire vérifiant $0 \leq \{\cdot\} < 1$, qui est la différence entre un nombre et sa partie entière.

Proposition 4.1. *Gabasov and Kirillova (1980)*

Pour toute solution réalisable entière de support $\{x^e, J_B\}$ du problème (2), on a $Z_i(x^e) \geq 0$, $\forall i \in J_B$. De plus, $Z_i(x^e)$ est un nombre entier pour tout $i \in J_B$.

Preuve. Voir Bibi et al. [2]. □

Proposition 4.2. *Soit $\{x^0, J_B\}$ une solution optimale de support du problème (2). S'il existe un indice $i_1 \in J_B$ tel que $Z_{i_1}(x^0) < 0$, alors l'inégalité*

$$Z_{i_1}(x) \geq 0,$$

donne une coupe valide.

Preuve. Evident, car en vertu de la proposition 4.1, toute solution réalisable entière x^e du problème (2) vérifie $Z_i(x^e) \geq 0$, $\forall i \in J_B$, en particulier $Z_{i_1}(x^e) \geq 0$. □

Proposition 4.3. *Lorsque une solution optimale x^0 est non entière et de base, alors $\exists i_1 \in J_B$ tel que $Z_{i_1}(x^0) < 0$.*

Preuve. Voir Bibi et al. [2]. □

Corollaire 4.1. *Soit $\{x^0, J_B\}$ une solution optimale de support du problème (2). Si x^0 est non entière et telle que $Z_i(x^0) \geq 0$, $\forall i \in J_B$, alors x^0 est forcément une solution optimale non basique.*

Proposition 4.4. *Soit $\{x^0, J_B\}$ une solution optimale de support du problème (2), où x^0 est non entière et il existe $i_1 \in J_B$ tel que $Z_{i_1}(x^0) < 0$. Soit x^* une solution réalisable du problème (2), augmenté de la coupe $Z_{i_1}(x) \geq 0$. Alors le couple (\bar{x}, \bar{J}_B) , où*

$$\bar{x} = (x^* + \lambda(x^0 - x^*), 0) \text{ et } \bar{J}_B = J_B \cup \{n+1\},$$

est une solution réalisable de support pour le problème (2) augmenté, où le paramètre λ est tel que $Z_{i_1}(\bar{x}) = 0$ et $0 \leq \lambda < 1$.

Dans le cas d'un problème à variables mixtes, comme pour un programme en nombres entiers, on construit pour tout $i \in J_B \cap J_E$ la fonction :

$$\begin{aligned}
Z_i(x) = & - \left\{ \bar{b}_i - \sum_{j \in J_N^- \cup J^-} \bar{a}_{ij} u_j - \sum_{j \in J_N^+ \cup J^+} \bar{a}_{ij} l_j - \sum_{j \in J_N \setminus J_E} \bar{a}_{ij} x_j \right\} + \sum_{\substack{\{\bar{a}_{ij}\} \leq V \\ j \in J_N^+ \cup J^+}} \{\bar{a}_{ij}\} (x_j - l_j) \\
& + \sum_{\substack{\{\bar{a}_{ij}\} \leq V \\ j \in J_N^- \cup J^-}} \{-\bar{a}_{ij}\} (-x_j + u_j) + \sum_{\substack{\{\bar{a}_{ij}\} > V \\ j \in J_N^+ \cup J^+}} \frac{V(1 - \{\bar{a}_{ij}\})}{1 - V} (x_j - l_j) + \\
& \sum_{\substack{\{\bar{a}_{ij}\} > V \\ j \in J_N^- \cup J^-}} \frac{V(1 - \{-\bar{a}_{ij}\})}{1 - V} (-x_j + u_j) + \sum_{\substack{\bar{a}_{ij} > 0 \\ j \in J_N \setminus J_E}} \bar{a}_{ij} x_j - \sum_{\substack{\bar{a}_{ij} < 0 \\ j \in J_N \setminus J_E}} \frac{V}{1 - V} \bar{a}_{ij} x_j, \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\text{où } V = \left\{ \bar{b}_i - \sum_{j \in J_N^- \cup J^-} \bar{a}_{ij} u_j - \sum_{j \in J_N^+ \cup J^+} \bar{a}_{ij} l_j - \sum_{j \in J_N \setminus J_E} \bar{a}_{ij} x_j \right\}.$$

Proposition 4.5. Pour toute SRS $\{x, J_B\}$ du problème (2), tel que x_j entier pour tout $j \in J_E$, on a $Z_i(x) \geq 0$, $\forall i \in J_B \cap J_E$.

Schéma de l'algorithme Le schéma général de cet algorithme est décrit comme suit :

Étape 1 Poser $t = 0$, $I_t = I = \{1, 2, \dots, m\}$ et $J^t = J = \{1, 2, \dots, n\}$.

Soit $\{x^t, J_B^t\}$ une SRS initiale du problème (2). On construit alors une solution optimale de support $\{x^t, J_B^t\}$ par la méthode adaptée. Si $x_j^t \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in J_E$, arrêter l'algorithme : x^t est une solution optimale du problème (1). Sinon, aller à l'étape 2.

Étape 2 On construit les fonctions $Z_i(x^t)$, pour tout $i \in J_B \cap J_E$.

Deux cas peuvent se présenter :

- (i) $\exists i_1 \in J_B \cap J_E : Z_{i_1}(x^t) < 0$. Dans ce cas l'inégalité $Z_{i_1}(x) \geq 0$ donne une coupe valide. On résout le problème augmenté, après avoir ajouté cette coupe. On commence par la SRS $\{\bar{x}^t, \bar{J}_B^t\}$, avec $\bar{x}^t = (x^t + \lambda(x^t - x^t), 0)$, $0 \leq \lambda < 1$, où λ sera trouvé à partir de l'équation $Z_{i_1}(\bar{x}^t) = 0$, et $\bar{J}_B^{t+1} = J_B^t \cup \{n+t+1\}$. On pose $I_{t+1} = I_t \cup \{m+t+1\}$ et $J^{t+1} = J^t \cup \{n+t+1\}$. Soit $\{x^{t+1}, J_B^{t+1}\}$ la nouvelle solution optimale de support du problème augmenté. Sur la base de cette dernière, on refait alors le processus comme avec $\{x^t, J_B^t\}$. On incrémente t , $t = t + 1$.
- (ii) $Z_i(x^t) \geq 0$, $\forall i \in J_B \cap J_E$: le vecteur x^t est non basique. Dans ce cas, à l'aide de la procédure 3, on obtient une solution optimale de base x^{tB} , puis par cette dernière on construit une coupe régulière comme dans le cas (i).

5 Conclusion

Contrairement aux problèmes de programmation linéaire, les problèmes en nombres entiers et mixtes sont difficiles à résoudre ; de ce fait, aucun algorithme général efficace n'est

connu pour leur résolution. La motivation des méthodes de *coupes* est de tenter de trouver l'enveloppe convexe des solutions entières ou mixtes, c'est-à-dire le plus petit polyèdre contenant toutes les solutions mixtes du (PLM). L'inconvénient de ces dernières est qu'elles fournissent souvent une solution réalisable uniquement à la fin. Il est clair, cependant, que le choix des coupes est déterminant pour la convergence de la méthode.

Références

- [1] Bibi, M. O., and Bentobache, M. : The adaptive method with hybrid direction for solving linear programming problems with bounded variables, Proceedings of COSI'2011, University of Guelma, Algeria, 24-27 April, 80-91 (2011).
- [2] Bibi M. O., Boussouira H. and Laouar A. : Solution of an Integer Linear Programming Problem via a Primal Dual Method Combined with a Heuristic, International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation (IJMMNO), **12**, 1, 69-87 (2021).
- [3] Gabasov, R., and Kirillova, F. M. : Methods of linear programming, **3** : Special Problems, University Press, Minsk (1980).
- [4] Gabasov, R. : Adaptive method of linear programming. Preprints of the University of Karlsruhe, Institute of Statistics and Mathematics, Karlsruhe, Germany (1993).
- [5] Gomory, R.E. : Outline of an Algorithm for Integer Solutions to linear Programs, Bulletin of the American Mathematical Society, **64**, 275-278 (1958).
- [6] Lodi, A. : Mixed integer programming computation. In 50 Years of Integer Programming 1958-2008, Springer, Berlin, Heidelberg (2010).
- [7] Marchand, H., Martin, A., Weismantel, R. and Wolsey, L. : Cutting planes in integer and mixed integer programming, Discrete Applied Mathematics, **123**, 397-446 (2002).
- [8] Mei Lee, S., Adi, S., Mohd Rizal, B. S., Effendi, M. : Comparison between linear programming and integer linear programming : a review, International Journal of Mathematics in Operational Research **13**, 91-106 (2018).
- [9] Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A. : Integer and Combinatorial Optimization, Wiley-Interscience, New Jersey (1988).
- [10] Schrijver, A. : Combinatorial optimization : polyhedra and efficiency, **A**. Paths, Flows, Matchings, Springer, Berlin (2003).
- [11] Pochet Y. and Wolsey L. A. : Production Planning by Mixed Integer Programming, Springer, New York (2006).
- [12] Heinz S., Ku W-Y. and Beck J. B. : Recent Improvements using Constraint Integer Programming for Resource Allocation and Scheduling, International Conference CPAIOR, **7874**, 12-27, (2013).



Nouvelle Méthode pour la Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire Fractionnaire

Mohammed Amin Hakmi¹, Mohand Bentobache ^{*1} et Mohand Ouamer Bibi²

¹Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Laghouat, Algérie,
hakmimoh32@gmail.com; m.bentobache@lagh-univ.dz

²Unité de recherche LaMOS, Département de recherche opérationnelle, Université de Bejaia, Algérie,
mobibi.dz@gmail.com

Résumé Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle méthode pour la résolution des problèmes de programmation linéaire fractionnaire à variables bornées. L'algorithme proposé passe d'une solution réalisable de support à une autre solution améliorée en suivant une direction réalisable hybride. Des critères d'optimalité et de suboptimalité qui permettent d'arrêter l'algorithme lorsqu'une solution optimale ou suboptimale est atteinte, ont été proposés.

MSC: 90C32

Mots clés : Programmation linéaire fractionnaire ; Méthode du simplexe ; Méthode à direction hybride ; Variables bornées.

1 Introduction

La Programmation Linéaire Fractionnaire (PLF) consiste à optimiser une fonction objectif linéaire fractionnaire (ratio de deux fonctions linéaires), soumise à des contraintes linéaires liant les variables de décision. Beaucoup de problèmes pratiques qui apparaissent dans plusieurs domaines d'application peuvent être modélisés sous forme de problèmes de PLF [1]. Parmi les approches de résolution des problèmes de PLF, on cite la méthode généralisée du simplexe par B. Martos en 1960 [9], la méthode de Charnes et Cooper (1962) [3] qui consiste à transformer le problème de PLF en un problème de PL équivalent, et l'approche paramétrique de Dinkelbach [5], etc.

Dans les années soixante-dix, R. Gabasov et F.M. Kirillova ont développé la méthode adaptée pour la résolution des problèmes de PL [6]. Contrairement à la direction du simplexe, la direction adaptée dépend de la solution courante. Récemment, plusieurs algorithmes basés sur le concept de « direction hybride » ont été proposés pour la résolution des

*Corresponding Author

problèmes de PL [2, 4, 7]. Dans cet article, nous allons généraliser la méthode à direction hybride proposée dans [4] pour la résolution des problèmes de PLF à variables bornées. Pour tester l'optimalité ou la suboptimalité de la solution courante, nous proposons des critères d'optimalité et de suboptimalité.

Cet article est organisé comme suit : dans la section 2, nous donnons quelques notations et définitions. Dans la section 3, nous présentons la méthode à direction hybride proposée pour la résolution des problèmes de PLF à variables bornées. Finalement, nous terminons cet article par une conclusion et quelques perspectives de recherche.

2 Position du Problème et Définitions

Le problème de Programmation Linéaire Fractionnaire à Variables Bornées (PLFVB) se présente sous la forme standard suivante :

$$\max F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0}, \quad (1)$$

$$\text{s.c. } x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, l \leq x \leq u\}, \quad (2)$$

où p, q, x, l et u sont des n -vecteurs, avec $\|l\| < \infty, \|u\| < \infty$; b un m -vecteur; A une matrice de dimension $(m \times n)$, p_0 et q_0 deux nombres réels. On suppose que $\text{rang}(A) = m < n$, $S \neq \emptyset$ et $Q(x) > 0, \forall x \in S$.

• Définissons les ensembles d'indices suivants :

$$I = \{1, 2, \dots, m\}, J = \{1, 2, \dots, n\}, J = J_B \cup J_N, J_B \cap J_N = \emptyset, |J_B| = m.$$

• Si v est un n -vecteur et M une $(m \times n)$ -matrice, alors on peut partitionner v et M comme suit :

$$v^T = (v_B^T, v_N^T), \text{ où } v_B = v(J_B) = (v_j, j \in J_B), v_N = v(J_N) = (v_j, j \in J_N);$$

$$M = (M_B, M_N), \text{ où } M_B = M(I, J_B) = (m_{ij}, i \in I, j \in J_B), M_N = M(I, J_N).$$

• Un vecteur x vérifiant les contraintes (2) est appelé solution réalisable (SR) du problème (1)-(2).

• Définissons le nombre réel $\alpha > 0$ comme suit : $\alpha = \min_{x \in S} Q(x)$.

• Une solution réalisable x^0 est dite optimale si $\forall x \in S, F(x^0) \geq F(x)$.

• D'autre part, une solution réalisable x^ε est appelée ε -optimale ou suboptimale si $F(x^0) - F(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$, où x^0 est une solution optimale du problème (1)-(2) et ε un nombre positif ou nul choisi à l'avance.

• Soit un sous-ensemble d'indices $J_B \subset J$ tel que $|J_B| = |I| = m$. L'ensemble J_B est alors appelé support si $\det A_B = \det A(I, J_B) \neq 0$.

• La paire $\{x, J_B\}$ formée de la solution réalisable x et du support J_B est appelée Solution Réalisable de Support (SRS).

• Une SRS est dite non-dégénérée si $l_j < x_j < u_j, j \in J_B$.

- Définissons les vecteurs des multiplicateurs : $\pi_p^T = p_B^T A_B^{-1}$, $\pi_Q^T = q_B^T A_B^{-1}$, ainsi que les vecteurs des coûts réduits :

$$\Delta' = \begin{pmatrix} \Delta'_B \\ \Delta'_N \end{pmatrix}, \Delta'' = \begin{pmatrix} \Delta''_B \\ \Delta''_N \end{pmatrix}, \Delta(x) = \begin{pmatrix} \Delta_B(x) \\ \Delta_N(x) \end{pmatrix},$$

où

$$\Delta'_N = A_N^T \pi_p - p_N, \Delta''_N = A_N^T \pi_Q - q_N, \Delta_N(x) = \Delta'_N - F(x) \Delta''_N, \Delta'_B = \Delta''_B = \Delta_B(x) = 0. \quad (3)$$

3 Méthode à Direction Hybride

3.1 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1)-(2). Considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \theta d$, $\theta \geq 0$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit [8] :

$$F(\bar{x}) - F(x) = \frac{-\theta \Delta_N^T(x) d_N}{Q(\bar{x})} = \frac{-\sum_{j \in J_N} \Delta_j(x) (\bar{x}_j - x_j)}{Q(\bar{x})}. \quad (4)$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1. (Critère d'optimalité)

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1)-(2). Alors les relations

$$\begin{cases} \Delta_j(x) \geq 0, \text{ pour } x_j = l_j; \\ \Delta_j(x) \leq 0, \text{ pour } x_j = u_j; \\ \Delta_j(x) = 0, \text{ pour } l_j < x_j < u_j; \end{cases} \quad j \in J_N \quad (5)$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable x . Ces mêmes relations sont aussi nécessaires dans le cas où la SRS $\{x, J_B\}$ est non-dégénérée.

Notons par

$$J_N^+ = \{j \in J_N : \Delta_j(x) > 0\}, J_N^- = \{j \in J_N : \Delta_j(x) < 0\}, J_{N0} = \{j \in J_N : \Delta_j(x) = 0\}.$$

L'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B)$ est alors donnée par la formule suivante :

$$\beta = \beta(x, J_B) = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j \in J_N^+} \Delta_j(x) (x_j - l_j) + \sum_{j \in J_N^-} \Delta_j(x) (x_j - u_j) \right). \quad (6)$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.2. (Condition suffisante de suboptimalité)

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1)-(2) et ε un nombre positif ou nul arbitraire. Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors la solution réalisable x est ε -optimale.

3.2 Une itération de l'algorithme

Soient $\{x, J_B\}$ une SRS pour le problème (1)-(2) et $\eta > 0$. Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors la SRS $\{x, J_B\}$ est ε -optimale, sinon on procède à son amélioration. Pour ce faire, nous déterminons les ensembles d'indices suivants :

$$\begin{aligned} J_{NE}^+ &= \{j \in J_N : \Delta_j(x) > \eta(x_j - l_j) \text{ et } x_j > l_j\}, \\ J_{NE}^- &= \{j \in J_N : \Delta_j(x) < \eta(x_j - u_j) \text{ et } x_j < u_j\}, \\ J_{NI}^+ &= \{j \in J_N : 0 < \Delta_j(x) \leq \eta(x_j - l_j)\}, \\ J_{NI}^- &= \{j \in J_N : \eta(x_j - u_j) \leq \Delta_j(x) < 0\}, \\ J_{NR}^+ &= \{j \in J_N : \Delta_j(x) > 0 \text{ et } x_j = l_j\}, \\ J_{NR}^- &= \{j \in J_N : \Delta_j(x) < 0 \text{ et } x_j = u_j\}, \\ J_{NI} &= J_{NI}^+ \cup J_{NI}^-, \quad J_{NE} = J_{NE}^+ \cup J_{NE}^-, \quad J_{NR} = J_{NR}^+ \cup J_{NR}^-. \end{aligned}$$

Calculons les quantités γ et μ comme suit :

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j \in J_{NI}^+} \Delta_j(x)(x_j - l_j) + \sum_{j \in J_{NI}^-} \Delta_j(x)(x_j - u_j) + \frac{1}{\eta} \sum_{j \in J_{NE}^+ \cup J_{NE}^-} \Delta_j^2(x) \right), \quad (7)$$

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \left(- \sum_{j \in J_{NE}^+} \Delta_j(x)(x_j - l_j) - \sum_{j \in J_{NE}^-} \Delta_j(x)(x_j - u_j) + \frac{1}{\eta} \sum_{j \in J_{NE}^+ \cup J_{NE}^-} \Delta_j^2(x) \right). \quad (8)$$

Nous avons alors $\beta = \gamma - \mu \leq \gamma$, $\gamma \geq 0$ et $\mu \geq 0$.

3.2.1 Changement de la solution réalisable

Nous définissons la direction réalisable d comme suit :

$$\begin{cases} d_j = l_j - x_j, \text{ si } j \in J_{NI}^+; \quad d_j = u_j - x_j, \text{ si } j \in J_{NI}^-; \\ d_j = \frac{-\Delta_j(x)}{\eta}, \text{ si } j \in J_{NE}^+ \cup J_{NE}^-; \quad d_j = 0, \text{ si } j \in J_{NR}; \\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N. \end{cases} \quad (9)$$

Cette direction est dite direction hybride [4].

Dans le but d'améliorer la valeur de la fonction objectif tout en restant dans le domaine réalisable, on calcule le pas θ^0 le long de la direction d : $\theta^0 = \min \{\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, 1\}$, où

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \quad \theta_{j_2} = \begin{cases} \min_{j \in J_{NE}} \theta_j, & \text{si } J_{NE} \neq \emptyset; \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \theta_j = \begin{cases} \frac{u_j - x_j}{d_j}, & \text{si } d_j > 0; \\ \frac{l_j - x_j}{d_j}, & \text{si } d_j < 0; \\ \infty, & \text{si } d_j = 0. \end{cases} \quad (10)$$

La valeur du pas 1 correspond aux indices de l'ensemble J_{NI} .

On a alors

$$F(\bar{x}) - F(x) = \frac{\alpha \theta^0}{Q(\bar{x})} \gamma = \frac{\alpha \theta^0}{Q(\bar{x})} (\beta + \mu) \geq 0. \quad (11)$$

Définissons les ensembles suivants :

$$J_N^+(\bar{x}) = \{j \in J_N : \Delta_j(\bar{x}) > 0\}, J_N^-(\bar{x}) = \{j \in J_N : \Delta_j(\bar{x}) < 0\},$$

et l'estimation de suboptimalité correspondant à la nouvelle SRS $\{\bar{x}, J_B\}$:

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j \in J_N^+(\bar{x})} \Delta_j(\bar{x})(\bar{x}_j - l_j) + \sum_{j \in J_N^-(\bar{x})} \Delta_j(\bar{x})(\bar{x}_j - u_j) \right).$$

Si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$, alors la solution réalisable \bar{x} est ε -optimale. Si $\theta^0 = \theta_{j_2}$, alors on pose $x = \bar{x}$ et on recommence une nouvelle itération avec la SRS $\{x, J_B\}$. Si $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, alors on change le support J_B .

3.2.2 Changement de support

Définissons le n -vecteur κ et le nombre réel α_0 , ainsi que la direction duale $t = (t_j, j \in J)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \kappa &= x + d, \quad \alpha_0 = \kappa_{j_1} - \bar{x}_{j_1} = (1 - \theta^0)d_{j_1}; \\ t_{j_1} &= -\text{sign}\alpha_0; \quad t_j = 0, \quad j \neq j_1, \quad j \in J_B; \quad t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N. \end{aligned}$$

Partitionnons l'ensemble $J_{N0}(\bar{x}) = \{j \in J_N : \Delta_j(\bar{x}) = 0\}$ comme suit :

$$J_{N0}^+(\bar{x}) = \{j \in J_{N0}(\bar{x}) : t_j > 0\}, J_{N0}^-(\bar{x}) = \{j \in J_{N0}(\bar{x}) : t_j < 0\}, \quad (12)$$

et définissons la quantité V_0 par :

$$V_0 = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j \in J_{N0}^+(\bar{x}) \cup J_N^+(\bar{x})} t_j(\bar{x}_j - l_j) + \sum_{j \in J_{N0}^-(\bar{x}) \cup J_N^-(\bar{x})} t_j(\bar{x}_j - u_j) \right). \quad (13)$$

Le nouveau support \bar{J}_B et les nouveaux vecteurs des coûts réduits $\bar{\Delta}'$, $\bar{\Delta}''$ et $\bar{\Delta}(\bar{x})$ sont calculés comme suit :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \quad \bar{\Delta}' = \Delta' + \sigma_0' t, \quad \bar{\Delta}'' = \Delta'' + \sigma_0'' t \quad \text{et} \quad \bar{\Delta}(\bar{x}) = \Delta(\bar{x}) + \sigma^0 t, \quad (14)$$

où

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min_{j \in J_N} \{\sigma_j\}, \quad \text{avec} \quad \sigma_j = \begin{cases} \frac{-\Delta_j(\bar{x})}{t_j}, & \text{si } \Delta_j(\bar{x}) t_j < 0; \\ 0, & \text{si } \Delta_j(\bar{x}) = 0, t_j < 0, \kappa_j \neq u_j; \\ 0, & \text{si } \Delta_j(\bar{x}) = 0, t_j > 0, \kappa_j \neq l_j; \\ +\infty, & \text{pour les autres cas;} \end{cases} \quad (15)$$

$$\sigma_0' = \begin{cases} \frac{-\Delta_{j_0}'(\bar{x})}{t_{j_0}}, & \text{si } (\Delta_{j_0}(\bar{x}) t_{j_0} < 0) \text{ ou } (\Delta_{j_0}(\bar{x}) = 0, t_{j_0} < 0, \kappa_{j_0} \neq u_{j_0}) \\ & \text{ou } (\Delta_{j_0}(\bar{x}) = 0, t_{j_0} > 0, \kappa_{j_0} \neq l_{j_0}); \\ +\infty, & \text{pour les autres cas;} \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma_0'' = \begin{cases} \frac{-\Delta_{j_0}''}{t_{j_0}}, & \text{si } (\Delta_{j_0}(\bar{x})t_{j_0} < 0) \text{ ou } (\Delta_{j_0}(\bar{x}) = 0, t_{j_0} < 0, \kappa_{j_0} \neq u_{j_0}) \\ & \text{ou } (\Delta_{j_0}(\bar{x}) = 0, t_{j_0} > 0, \kappa_{j_0} \neq l_{j_0}); \\ s \times (+\infty), & \text{pour les autres cas;} \end{cases} \quad (17)$$

avec $s = -\text{sign}F(\bar{x})$.

L'estimation de suboptimalité $\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ correspondant à la nouvelle SRS est alors donnée par :

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j \in \bar{J}_N, \Delta_j(\bar{x}) > 0} \bar{\Delta}_j(\bar{x})(\bar{x}_j - l_j) + \sum_{j \in \bar{J}_N, \Delta_j(\bar{x}) < 0} \bar{\Delta}_j(\bar{x})(\bar{x}_j - u_j) \right) = \beta(\bar{x}, J_B) + \sigma^0 V_0.$$

Si $V_0 \leq 0$, alors on change le support J_B avec la règle du pas multiple. Si $V_0 > 0$, alors deux cas se présentent :

- (a) Si $J_{N_0}^+(\bar{x}) \cup J_{N_0}^-(\bar{x}) \neq \emptyset$, alors choisir un indice $j_0 \in J_{N_0}^+(\bar{x}) \cup J_{N_0}^-(\bar{x})$, tel que $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = 0$. On posera alors $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$ et on recommencera une nouvelle itération avec la SRS $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$.
- (b) Si $J_{N_0}^+(\bar{x}) \cup J_{N_0}^-(\bar{x}) = \emptyset$, alors on procède à la mise à jour du paramètre η d'une façon appropriée et on recommence une nouvelle itération avec la SRS $\{\bar{x}, J_B\}$.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle méthode pour la résolution des problèmes de programmation linéaire fractionnaire à variables bornées. Cette méthode constitue une généralisation de la méthode à direction hybride développée récemment dans [4]. Dans le futur, nous allons tester la méthode proposée sur des problèmes-test issus de différentes applications de la programmation linéaire fractionnaire. De plus, nous envisageons de généraliser les algorithmes proposés pour la résolution des problèmes de programmation quadratique fractionnaire.

Références

- [1] Bajalinov, E. B. : Linear-Fractional Programming : Theory, Methods, Applications and Software. Applied optimization, Springer, University of Florida, USA. (2003).
- [2] Bibi, M. O., Bentobache, M. : A hybrid direction algorithm for solving linear programs. International Journal of Computer Mathematics, **92**, 2, 200–216 (2015).
- [3] Charnes, A., Cooper, W. W. : Programming with Linear Fractional Functionals. Naval Res. Logistics Quart., **9**, 3, 4, 181–186 (1962).
- [4] Djeloud, K., Bentobache, M., Bibi, M. O. : A new method with hybrid direction for linear programming. Concurrency and Computation, Practice and Experience, **33**, 1, doi : 10.1002/cpe.5836 (2021).
- [5] Dinkelbach, W. : Die Maximierung Eines Quotienten Zweier Linearer Funktionen Unter Linearen Nebenbedingungen. Wahrscheinlichkeitstheorie, **1**, 141–145 (1962).

- [6] Gabasov, R., Kirillova, F. M., Prischepova, S. V. : Optimal Feedback Control. Springer-Verlag, London (1995).
- [7] Guerbane, R., Bibi, M. O. : Primal-dual method for a linear program with hybrid direction. To appear in International Journal of Mathematics in Operational Research, doi : 10.1504/IJMOR.2021.10044248 (2022).
- [8] Hakmi, M. A. : Méthode de support pour la résolution des problèmes d'optimisation fractionnaire linéaire. Mémoire de Magistère en Mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Laghouat, Laghouat, Algérie (2017).
- [9] Martos, B. : Hyperbolic Programming. Publ. Math. Inst., Hungarian Academy of Sciences, **5**, Ser. B, 386–406 (1960).



Nouvelle technique sans variables artificielles pour l'initialisation de l'algorithme du simplexe

Khalil Djeloud¹, Mohand Bentobache*¹ et Mohand Ouamer Bibi²

¹Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Laghouat, Algérie,
kdjeloud@gmail.com, m.bentobache@lagh-univ.dz

²Unité de recherche LaMOS, Département de recherche opérationnelle, Université de Bejaia, Algérie,
mobibi.dz@gmail.com

Résumé Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle technique pour l'initialisation de l'algorithme primal du simplexe. La technique proposée consiste à trouver une solution réalisable de base de départ, et ce, sans ajouter de variables artificielles. Ainsi, le problème auxiliaire formé possède la même dimension que celle du problème original. Cette technique peut également être utilisée pour la recherche d'une solution réalisable de support initiale pour la méthode adaptée et ses variantes.

MSC: 90C05

Mots clés : Programmation linéaire ; Méthode du simplexe ; Méthode adaptée ; Solution réalisable de base initiale ; Solution réalisable de support initiale ; Variables bornées.

1 Introduction

L'algorithme du simplexe est l'un des algorithmes le plus utilisé en optimisation. Cet algorithme est développé par G.B. Dantzig en 1947 pour la résolution des problèmes de Programmation Linéaire (PL) [8], puis il a été généralisé par la suite pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe [16] et concave [5]. L'efficacité de l'algorithme du simplexe pour trouver la solution optimale dépend du choix de la solution initiale. Les techniques d'initialisation de l'algorithme du simplexe consistent à trouver une Solution Réalisable de Base (SRB) initiale. Il existe plusieurs techniques de recherche d'une SRB initiale, à savoir : la technique utilisant plusieurs variables artificielles [8], la technique utilisant une seule variable artificielle [3, 15] et les techniques qui n'utilisent aucune variable artificielle [1, 14, 17].

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle procédure qui nous permet de trouver une solution réalisable de base initiale pour la méthode primale du simplexe. Cette technique peut aussi être utilisée pour l'initialisation de l'algorithme de la méthode adaptée [11] et ses variantes à directions hybrides [4, 6, 9, 10, 12]. On commence d'abord par la recherche

*Corresponding Author

d'une base initiale ; puis on procède à la recherche d'une solution réalisable initiale pour le problème original, et ce, sans introduire de variables artificielles.

Cet article est organisé comme suit : dans la section 2, nous donnons quelques notations et définitions. Dans la section 3, nous présentons la technique d'initialisation proposée. Dans la section 4, nous illustrons la technique proposée par des exemples numériques. Finalement, nous terminons cet article par une conclusion et quelques perspectives de recherche.

2 Position du Problème et Définitions

Considérons le problème de programmation linéaire écrit sous la forme standard suivante :

$$\begin{aligned} \max z(x) &= c^T x, \\ \text{s.c. } Ax &= b, \quad l \leq x \leq u, \end{aligned} \quad (1)$$

où $c, x, l, u \in \mathbb{R}^n$, $A = A(I, J)$ est une matrice à coefficients réels de dimension $(m \times n)$ et $b \in \mathbb{R}^m$, où $\text{rang} A = m < n$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$ et $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Soit J_B un sous-ensemble d'indices de J , avec $|J_B| = m$, et $J_N = J \setminus J_B$. Notons la sous-matrice associée à J_B par $A_B = A(I, J_B)$, et $A_N = A(I, J_N)$, $x_B = x(J_B)$, $x_N = x(J_N)$, $l_B = l(J_B)$, $l_N = l(J_N)$, $u_B = u(J_B)$, $u_N = u(J_N)$.

L'ensemble J_B est appelé une base ou un support du problème (1), si $\det A_B \neq 0$. La matrice A_B est alors appelée une matrice de base et $x = (x_B, x_N)$, avec $x_j = l_j \vee u_j$, $j \in J_N$ et $x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N)$ est appelée une solution de base ; elle est dite Solution Réalisable de Base (SRB) si $l_B \leq x_B \leq u_B$. La paire $\{x, J_B\}$, avec $x = (x_B, x_N)$ vérifiant $l_N \leq x_N \leq u_N$ et $l_B \leq x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N) \leq u_B$ est appelée Solution Réalisable de Support (SRS) du problème (1).

3 Nouvelle technique d'initialisation

Pour résoudre le problème (1) avec l'algorithme primal du simplexe, il nous faut une SRB de départ. Pour certains problèmes ayant une structure particulière, il est possible qu'une solution de départ soit connue à l'avance. Cependant, pour la majorité des problèmes de PL, cette solution de départ n'est pas disponible, donc il est nécessaire d'utiliser une procédure d'initialisation afin de rechercher une SRB initiale. Ces procédures d'initialisation commencent d'abord par former un problème auxiliaire ayant une solution de départ évidente, puis le résoudre avec l'algorithme du simplexe (Phase I). Ainsi, la SRB optimale obtenue est utilisée comme une SRB de départ pour résoudre le problème original (Phase II) avec le même algorithme.

3.1 Recherche d'une base initiale

Afin de rechercher une base initiale, on pourra utiliser les techniques classiques de triangularisation de Gauss ou celle de diagonalisation de Gauss-Jordan. Cependant, ces techniques prennent beaucoup de temps de calcul pour la recherche d'une base [2], notamment pour les systèmes creux. Dans ce dernier cas, on préfère utiliser les techniques dites « crash

procedures » présentées dans [3, 7, 13], et qui permettent d'exploiter la structure de la matrice des contraintes pour trouver une base initiale, et ce, en un temps de calcul très court.

3.2 Recherche d'une solution réalisable initiale

Dans cette section, nous proposons une technique qui permet de trouver une solution réalisable initiale, et ce, sans ajouter de variables artificielles. Le problème auxiliaire obtenu a la même dimension que celle du problème original.

Soit J_B une base du problème de PL (1) et supposons que l_j et u_j sont finis pour $j \in J_N$. Soit x^0 une solution de base du système $Ax = b$, telle que

$$x_j^0 = l_j \vee u_j, \quad j \in J_N, \quad \text{et } x_B^0 = A_B^{-1}(b - A_N x_N^0).$$

Si $l_B \leq x_B^0 \leq u_B$, alors $\{x^0, J_B\}$ est une SRB du problème (1). Sinon, formons le problème auxiliaire suivant :

$$\max \psi(x) = \hat{c}^T x, \quad \text{s.c. } Ax = b, \quad \hat{l} \leq x \leq \hat{u}, \quad (2)$$

où

$$\hat{l}_N = l_N, \hat{u}_N = u_N \text{ et } \hat{c}_N = 0,$$

et pour $j \in J_B$, on pose :

$$\begin{aligned} \hat{l}_j &= -\infty, \hat{u}_j = l_j, \hat{c}_j = 1, \text{ si } x_j^0 < l_j; \\ \hat{l}_j &= u_j, \hat{u}_j = +\infty, \hat{c}_j = -1, \text{ si } x_j^0 > u_j; \\ \hat{l}_j &= l_j, \hat{u}_j = u_j, \hat{c}_j = 0, \text{ si } l_j \leq x_j^0 \leq u_j. \end{aligned}$$

La fonction objectif du problème auxiliaire peut alors s'écrire :

$$\psi(x) = \sum_{x_j^0 < l_j, j \in J_B} x_j - \sum_{x_j^0 > u_j, j \in J_B} x_j.$$

La paire $\{x^0, J_B\}$ est évidemment une SRB pour le problème auxiliaire (2).

Soit $\{x^*, J_B^*\}$ la SRB optimale du problème auxiliaire (2), obtenue avec l'algorithme du simplexe et considérons la valeur suivante :

$$w^* = \sum_{x_j^0 < l_j, j \in J_B} l_j - \sum_{x_j^0 > u_j, j \in J_B} u_j.$$

Proposition 3.1. *On a toujours $\psi(x^*) \leq w^*$. Si $\psi(x^*) = w^*$, alors $\{x^*, J_B^*\}$ est une SRB pour le problème original (1).*

Preuve :

On a :

$$w^* - \psi(x^*) = \sum_{x_j^0 < l_j, j \in J_B} (l_j - x_j^*) + \sum_{x_j^0 > u_j, j \in J_B} (x_j^* - u_j).$$

Puisque x^* est une solution réalisable du problème auxiliaire, alors on a

$$l_j - x_j^* \geq 0, \text{ pour } x_j^0 < l_j, j \in J_B \text{ et } x_j^* - u_j \geq 0, \text{ pour } x_j^0 > u_j, j \in J_B.$$

Donc $w^* - \psi(x^*) \geq 0 \Rightarrow \psi(x^*) \leq w^*$.

Si $\psi(x^*) = w^*$, alors on a

$$\sum_{x_j^0 < l_j, j \in J_B} (l_j - x_j^*) = \sum_{x_j^0 > u_j, j \in J_B} (x_j^* - u_j) = 0.$$

Donc x^* vérifie forcément les relations

$$\begin{cases} x_j^* = l_j, \text{ si } x_j^0 < l_j; \\ x_j^* = u_j, \text{ si } x_j^0 > u_j; \\ l_j \leq x_j^* \leq u_j, \text{ si } l_j \leq x_j^0 \leq u_j, j \in J_B. \end{cases}$$

D'où $l_B \leq x_B^* \leq u_B$. Comme la solution x^* est une SRB pour le problème auxiliaire, donc elle vérifie aussi les relations $Ax^* = b$ et $x_j^* = l_j \vee u_j, j \in J_N$. Par conséquent, x^* est une solution réalisable de base pour le problème original.

□

Remarque 3.1. Si l'on choisit le vecteur x^0 comme suit :

$$l_j \leq x_j^0 \leq u_j, j \in J_N, x_B^0 = A_B^{-1}(b - A_N x_N^0),$$

alors la solution x^0 est une solution réalisable de support évidente pour le problème auxiliaire, et donc la technique proposée pourra être utilisée pour l'initialisation de la méthode adaptée [11] et les méthodes à direction hybride [4, 6, 9, 12].

4 Exemples numériques

Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max z(x) &= c^T x, \\ \text{s.c. } Ax &= b, l \leq x \leq u, \end{aligned} \quad (3)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$l = 0_{\mathbb{R}^6}, u = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

Soit la base initiale $J_B = \{1, 2, 5, 6\}$, $J_N = \{3, 4\}$. On a $x_N^0 = (0, 0)^T$ et $x_B^0 = (2, \frac{2}{3}, 3, -1)^T$. Remarquons que $x_6^0 < 0$, donc $x^0 = (x_B^0, x_N^0)$ n'est pas réalisable.

Phase 1 :

Pour trouver une solution réalisable de base initiale pour le problème original (3), on forme le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \psi(x) &= x_6, \\ \text{s.c. } Ax &= b, \hat{l} \leq x \leq \hat{u}, \end{aligned} \quad (4)$$

où

$$\hat{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix}, \hat{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que x^0 est une SRB évidente pour le problème auxiliaire (4). Après l'application de l'algorithme du simplexe, en commençant par la SRB x^0 , on trouve la SRB optimale suivante :

$$\begin{aligned} x^* &= \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 0, \frac{11}{4}, 0 \right)^T \text{ et } \psi(x^*) = 0. \\ J_N^* &= \{4, 6\}, J_B^* = \{1, 2, 3, 5\}. \end{aligned}$$

On a $\psi(x^*) = w^* = 0$, donc x^* est une SRB pour le problème original.

Phase 2 :

L'application de l'algorithme du simplexe pour la résolution du problème original, en commençant par la SRB x^* obtenue dans la première phase, nous donne la SRB optimale suivante pour le problème original (3) :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left(\frac{5}{3}, \frac{16}{27}, 0, \frac{1}{9}, \frac{25}{9}, 0 \right)^T \text{ et } z(\bar{x}) = \frac{5}{3}. \\ \bar{J}_N &= \{3, 6\}, \bar{J}_B = \{1, 2, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Remarque 4.1. Dans le cas où $\psi(x^*) < w^*$, le problème original n'admet pas de solutions réalisables.

Pour illustrer le cas de la remarque précédente, considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max z(x) &= c^T x, \\ \text{s.c. } Ax &= b, l \leq x \leq u, \end{aligned} \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ c &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ +\infty \\ +\infty \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Phase 1 :

Soit $J_B = \{3, 4\}$ une base du problème (5). Pour $x_N^0 = l_N = (1, 1)^T$, on aura $x_B^0 = (-1, -3)^T$. Remarquons que x^0 n'est pas une solution réalisable pour le problème (5) car $x_3^0 < l_3 = 0$ et $x_4^0 < l_4 = 0$.

Formons le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \psi(x) &= \hat{c}^T x, \\ \text{s.c. } Ax &= b, \hat{l} \leq x \leq \hat{u}, \end{aligned} \tag{6}$$

où

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}, \hat{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'application de l'algorithme du simplexe montre que la SRB $x^0 = (1, 1, -1, -3)^T$, avec $\psi(x^0) = -4$ et $J_B = \{3, 4\}$, est optimale pour le problème auxiliaire (6). Mais

$$\psi(x^0) = -4 < w^* = \sum_{x_j^0 < l_j, j \in J_B} l_j - \sum_{x_j^0 > u_j, j \in J_B} u_j = 0.$$

Par conséquent, le problème original (5) n'admet pas de solutions réalisables.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé une nouvelle technique d'initialisation de l'algorithme du simplexe pour la résolution des problèmes de programmation linéaire. Cette méthode permet de trouver une SRB initiale sans introduire de variables artificielles au problème original. Ainsi, le problème auxiliaire formé a la même dimension que celle du problème original, donc cela nous évite des efforts supplémentaires de calcul pour le traitement des variables artificielles, notamment lorsque celles-ci demeurent dans la solution de base optimale du problème auxiliaire. Dans le futur, nous allons tester la méthode proposée sur des problèmes-test de la librairie NETLIB et la comparer avec les différentes techniques d'initialisation existantes.

Références

- [1] Arsham, H. : Artificial-Free Simplex-Type Algorithm for General LP Models, Math. Comput. Modelling, **25**, 1, 107–123 (1997).
- [2] Bentobache, M., Bibi, M. O. : Méthode de support à deux phases pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables bornées : Comparaison numérique, Actes de COSI'09, Université de Annaba, Algérie, 25-27 Mai, 109–120 (2009).
- [3] Bentobache, M., Bibi, M. O. : A two-phase support method for solving linear programs : Numerical experiments, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2012, Article ID 482193, 28 pages (2012). doi :10.1155/2012/482193.

-
- [4] Bentobache, M., Bibi, M. O. : A hybrid direction algorithm with long step rule for linear programming : Numerical experiments. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, **359**, 333–344 (2015).
- [5] Bentobache, M., Telli, M., Mokhtari, A. : New LP-based local and global algorithms for continuous and mixed-integer nonconvex quadratic programming, *Journal of Global Optimization*, **82**, 4, 659–689 (2022).
- [6] Bibi, M. O., Bentobache, M. : A hybrid direction algorithm for solving linear programs. *International Journal of Computer Mathematics*, **92**, 2, 200–216 (2015).
- [7] Bixby, R. E. : Implementing the Simplex Method : The Initial Basis, *ORSA Journal on Computing*, **4**, 3, 1–18 (1992).
- [8] Dantzig, G.B. : *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963).
- [9] Djeloud, K., Bentobache, M., Bibi, M. O. : A new method with hybrid direction for linear programming, *Concurrency and Computation Practice and Experience*, **33**, 1 (2021). doi :10.1002/cpe.5836.
- [10] Djeloud, K. : Une nouvelle direction pour l'optimisation linéaire et application au contrôle optimal, Thèse de doctorat, Université de Laghouat, Algérie (2021).
- [11] Gabasov, R., Kirillova, F. M., Prischepova, S. V. : *Optimal Feedback Control*. Springer-Verlag, London (1995).
- [12] Guerbane, R., Bibi, M. O. : Primal-dual method for a linear program with hybrid direction. To appear in *International Journal of Mathematics in Operational Research*, doi : 10.1504/IJMOR.2021.10044248 (2022).
- [13] Maros, I., Mitra, G. : Strategies for creating advanced bases for large-scale linear programming problems, *Inform Journal on Computing*, **10**, 2, 248–260 (1998).
- [14] Pan, P. Q. : *Linear programming computation*, Springer Berlin, Heidelberg (2014).
- [15] Millham, C. B. : Fast Feasibility Methods For Linear Programming, *Opsearch*, **13**, 198–204 (1976).
- [16] Wolfe, P. : The simplex method for quadratic programming, *Econometrica* **27**, 382–398 (1959).
- [17] Wolfe, P. : The Composite Simplex Algorithm, *SIAM Review*, **7**, 1, 42–54 (1965).



Amélioration de la Méthode Adaptée à Direction Hybride pour les Problèmes de Programmation Quadratique Convexe à Variables Bornées

Chafiâ Hadjout¹ and Mohand Ouamer Bibi²

¹Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Algérie, chafia.hadjout@univ-bejaia.dz

²Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Algérie, mdouamer.bibi@univ-bejaia.dz

30 octobre 2022

Résumé Ce travail est principalement consacré à trouver le minimum d'un problème de programmation quadratique convexe à variables bornées (PQCVB). Ainsi, nous proposons de ne pas calculer forcément l'inverse du hessien réduit dans l'implémentation de l'algorithme de la méthode adaptée à direction hybride pour la résolution des PQCVBs, et ce, afin de réduire le temps d'exécution de ce dernier. Afin de prouver l'efficacité de notre algorithme, une comparaison numérique entre les deux algorithmes a été réalisée, implémentée en Matlab.

Mots clés : algorithme à direction hybride, gradient réduit, comparaison numérique.

1 Introduction

La programmation quadratique est l'une des approches importantes en optimisation, dû à sa formulation adaptée aux problèmes pratiques si bien que ses applications sont extrêmement larges.

Dans ce travail, nous nous intéressons à améliorer en temps d'exécution la méthode adaptée à direction hybride proposée par Bibi et al dans [3]. L'idée est de ne pas calculer forcément l'inverse du hessien réduit dans l'implémentation de l'algorithme tant que le pas maximum sur les bornes améliore la fonction objectif. Ainsi, nous évitons de calculer le pas de relaxation, tout en assurant une amélioration de cette dernière.

Ce travail est organisé comme suit : dans la section 2, nous présentons notre problème avec le critère d'optimalité, puis nous donnons son algorithme de résolution et présentons les résultats de la simulation dans la section 3, et nous terminons par une conclusion et des perspectives dans la dernière section.

2 Position du problème et critère d'optimalité

Le problème de programmation quadratique convexe à variables bornées (PQCVB) se présente sous la forme standard suivante :

$$\min F(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x, \quad (1)$$

$$A x = b, \quad (2)$$

$$l \leq x \leq u, \quad (3)$$

où $D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ est une matrice non-nulle, carrée d'ordre n , supposée symétrique et semi-définie positive, i.e., $D^T = D \geq 0$;

c, l, u et x sont des n -vecteurs,

et $A = (a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ est une matrice de dimension $m \times n$ avec $\text{rang}(A) = m < n$.

Soient les ensembles d'indices : $I = \{1, 2, \dots, m\}$ et $J = \{1, 2, \dots, n\}$, où J est partitionné comme suit : $J = J_B \cup J_N$, $J_B \cap J_N = \emptyset$, et $|J_B| = m$. On a alors :

- $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B)$, $x_N = x(J_N)$; $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$;

- $A = (a_j, j \in J)$, $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, avec $A = (A_B | A_N)$, $A_B = (I, J_B) = (a_j, j \in J_B)$,

$$A_N = (I, J_N).$$

- L'ensemble J_B est appelé support des contraintes si $\det(A(I, J_B)) \neq 0$.

Soit $\{x, J_B\}$ une Solution Réalisable de Support (SRS) du problème (1)-(3) Considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \theta d$, où d est une direction et θ le pas le long de cette direction. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$F(\bar{x}) - F(x) = \frac{1}{2}(x + \theta d)^T D(x + \theta d) + c^T(x + \theta d) - \frac{1}{2}x^T D x - c^T x = g^T(x)\theta d + \frac{1}{2}\theta^2 d^T D d, \quad (4)$$

où $g(x) = D x + c$ est le gradient de F au point x , avec $g^T(x) = (g_B, g_N)$. En utilisant le support J_B , cet accroissement peut encore s'écrire[3] :

$$F(\bar{x}) - F(x) = \theta E_N^T d_N + \frac{1}{2}\theta^2 d_N^T M d_N, \quad (5)$$

où $d^T = (d_B, d_N)$, le vecteur des multiplicateurs et le vecteur des coûts réduits sont respectivement : $\pi^T = g_B^T A_B^{-1}$ et $E^T = g^T - \pi^T A = (E_B, E_N)$, sachant que $E_N^T = g_N^T - \pi^T A_N = g_N^T - g_B^T A_B^{-1} A_N$, avec la matrice M définie comme suit :

$$M = M(J_N, J_N) = Z^T D Z, \quad Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}, \quad \text{où } I_N \text{ est la matrice d'identité d'ordre } (n - m).$$

Soit $J_S \subset J_N$. L'ensemble J_S est appelé support de la fonction objectif si $\det(M_S) = \det(M(J_S, J_S)) \neq 0$. Le couple $\{x, J_P\}$, avec $J_P = \{J_B, J_S\}$, est appelé Solution Réalisable de Support (SRS) du problème (1)-(3).

La SRS $\{x, J_P\}$ est dite accordée si $E_S = E(J_S) = 0$.

Théorème 2.1. [6, 7] Soit $\{x, J_P\}$ une SRS accordée du problème (1)-(3), alors les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{pour } x_j = l_j, \\ E_j \leq 0, & \text{pour } x_j = u_j, \\ E_j = 0, & \text{pour } l_j < x_j < u_j, \quad j \in J_{NN} = J_N \setminus J_S, \end{cases} \quad (6)$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non-dégénérescence de la SRS $\{x, J_B\}$ aussi nécessaires pour l'optimalité de la solution réalisable x .

Soit $\{x, J_P\}$ une SRS accordée et

$$\alpha = \|D\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |d_{ij}| \neq 0 \quad (7)$$

Définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} J_{NN}^+ &= \{j \in J_{NN} : E_j > \alpha(x_j - l_j)\}; \quad J_{NN}^- = \{j \in J_{NN} : E_j < \alpha(x_j - u_j)\}; \\ J_{NN}^P &= \{j \in J_{NN} : \alpha(x_j - u_j) \leq E_j \leq \alpha(x_j - l_j)\}; \quad J_{NN}^{P0} = \{j \in J_{NN} : E_j = 0\}; \\ J_{NN}^{P+} &= \{j \in J_{NN} : 0 < E_j \leq \alpha(x_j - l_j)\} \text{ et } J_{NN}^{P-} = \{j \in J_{NN} : \alpha(x_j - u_j) \leq E_j < 0\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Nous appelons estimation d'optimalité, la quantité $\beta(x, J_P, \alpha)$ définie par :

$$\beta(x, J_P, \alpha) = \sum_{j \in J_{NN}^+} E_j(x_j - l_j) + \sum_{j \in J_{NN}^-} E_j(x_j - u_j) + \frac{1}{\alpha} \sum_{j \in J_{NN}^P} E_j^2. \quad (9)$$

Si $\beta(x, J_P, \alpha) \leq \varepsilon$ (ε arbitraire positif choisi à l'avance), alors l'algorithme s'arrête, sinon on construit une nouvelle SRS $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$, avec $\bar{x} = x + \theta d$.

Considérons une direction admissible

$$d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} d_N = Z d_N,$$

et la métrique suivante $l_j - x_j \leq d_j \leq u_j - x_j, j \in J_{NN}$. Ainsi, la direction admissible $d = (d_j, j \in J)$ se calcule comme suit :

$$d_j = \begin{cases} l_j - x_j, & \text{si } j \in J_{NN}^+; \\ u_j - x_j, & \text{si } j \in J_{NN}^-; \\ -\frac{E_j}{\alpha}, & \text{si } j \in J_{NN}^P; \end{cases} \quad \begin{aligned} d_S &= -M_S^{-1} M(J_S, J_{NN}) d(J_{NN}); \\ d_B &= -A_B^{-1} A_N d_N. \end{aligned} \quad (10)$$

Cette direction est une direction de descente car $F(\bar{x}) - F(x) \leq 0$ [3].
Le pas $\theta = \theta^0$ le long de la direction (10), sous la contrainte (3), est :

$$\theta^0 = \min \{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}\}, \quad (11)$$

où

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \text{ et } \theta_{j_s} = \min_{j \in J_S} \theta_j, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} \frac{u_j - x_j}{d_j}, & \text{si } d_j > 0; \\ \frac{l_j - x_j}{d_j}, & \text{si } d_j < 0; \\ \infty, & \text{si } d_j = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Si $F(\bar{x}) - F(x) \leq 0$, alors nous calculons la nouvelle estimation d'optimalité que nous définirons par la suite ; sinon nous calculons θ_F comme suit :

$$\theta_F = \sigma_{j^*} = \min \{ \sigma_j, j \in J_{NN} \}, \text{ avec } \sigma_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{\delta_j}, & \text{si } E_j \delta_j < 0; \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (13)$$

avec $\delta_N = (\delta_j, j \in J_N) = M d_N$. Ainsi, on obtient une nouvelle SRS $\bar{x} = x + \theta^0 d$, avec $\theta^0 = \theta_F = \sigma_{j^*}$, telle que $F(\bar{x}) \leq F(x)$. Puis, on définit les nouveaux ensembles

$$\begin{cases} \bar{J}_{NN}^+ = \{j \in J_{NN} : \bar{E}_j > \alpha(\bar{x}_j - l_j)\}; \\ \bar{J}_{NN}^- = \{j \in J_{NN} : \bar{E}_j < \alpha(\bar{x}_j - u_j)\}; \\ \bar{J}_{NN}^P = \{j \in J_{NN} : \alpha(\bar{x}_j - u_j) \leq \bar{E}_j \leq \alpha(\bar{x}_j - l_j)\} \end{cases} \quad (14)$$

Si $\beta(\bar{x}, J_P, \alpha) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête, sinon on change de support tel que présenté dans l'algorithme.

Schéma de l'algorithme amélioré de la méthode adaptée à direction hybride **Initialisation** : $\varepsilon, x, J_B, J_N, J_S = \emptyset$;

1. Calculer les vecteurs : $g(x) = Dx + c$, $\pi^T = g_B^T A_B^{-1}$ et $E_N^T = g_N^T - \pi^T A_N$;
2. Déterminer $\alpha = \|D\|_\infty$ et les ensembles d'indices $J_{NN}^+, J_{NN}^-, J_{NN}^{P+}, J_{NN}^{P-}$ et J_{NN}^{P0} par (8) ;
3. Calculer $\beta(x, J_P, \alpha)$ par (9) ;
si $\beta \leq \varepsilon$ **alors** l'algorithme s'arrête ;
sinon aller à l'étape 4 ;
4. Calculer d par (10) ;
5. Calculer le pas $\theta^0 = \min \{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}\}$ en s'appuyant sur (12) ;
6. Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 d$ et $F(\bar{x})$
si $F(\bar{x}) \leq F(x)$ **alors**
Calculer \bar{E}_N^T et $\beta(\bar{x}, J_P, \alpha)$;
si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$ **alors** l'algorithme s'arrête ;
sinon aller à l'étape 9 ;
sinon aller à l'étape 7 ;
7. Calculer les matrices : $Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix}$ et $M = Z^T D Z$; et le vecteur
 $\delta_N = M d_N$, $\theta_F = \sigma_{j^*}$ par (13) et $\theta^0 = \theta_F$;

8. Calculer \bar{x} , $F(\bar{x})$, \bar{E}_N et $\beta(\bar{x}, J_P, \alpha)$,
si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$ **alors** l'algorithme s'arrête ;
sinon poser $\bar{J}_B = J_B$, et $\bar{J}_S = J_S \cup \{j_S\}$ et aller à l'étape 10 ;
9. Changement de support
 - $\theta^0 = 1$ et $J_{NN}^+ = J_{NN}^- = \emptyset$, alors $x^0 = \bar{x} = x + d$ est une solution optimale pour le problème (1)-(3) ;
 - Si $\theta^0 = 1$ et $J_{NN}^+ \cup J_{NN}^- \neq \emptyset$, alors on traite le problème par la méthode adaptée ([8, 4]), en commençant par la SRS $\{\bar{x}, J_P\}$;
 - Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors
 - .. Calculer $X^T = (x_{j_1 j}, j \in J_N) = -e_{j_1}^T A_B^{-1} A_N$,
 - .. Si $\exists j_0 \in J_S$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$, alors $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$,
et $\bar{J}_S = J_S \setminus \{j_0\}$.
 - .. Sinon, poser $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$ et $\bar{J}_S = J_S$ tel que $|x_{j_1 j_0}| = \max\{|x_{j_1 j}|, j \in J_{NN}\}$.
 - Si $\theta^0 = \theta_{j_S}$, alors poser $\bar{J}_B = J_B$, et $\bar{J}_S = J_S \setminus \{j_S\}$;
10. Poser $x = \bar{x}$, $J_B = \bar{J}_B$, $J_S = \bar{J}_S$, $J_P = \bar{J}_P$ et aller à l'étape 1.

3 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons une comparaison numérique entre l'approche que nous avons proposée (MADHF) et la méthode adaptée à direction hybride proposée dans [3](MADH). Nous avons réalisé une implémentation de ces deux algorithmes sous Matlab (R2022a) sous Windows 7 de RAM 4GB.

Nous avons généré un ensemble de problèmes de programmation quadratique à variables bornées

$$\left\{ \min F(x) = \frac{1}{2} x^T D x + c^T x, \text{ s.c. } Ax = b, l \leq x \leq u \right\}, \quad (15)$$

où

- D est une $n \times n$ -matrice, symétrique et semi-définie positive, avec $D = G^T G$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ générée aléatoirement uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$;
- A est une $m \times n$ -matrice générée aléatoirement et uniformément sur l'intervalle $[-10, 10]$;
- c et l sont des n -vecteurs générés aléatoirement et uniformément sur l'intervalle $[-10, 10]$;
- $u = l + 5h$, avec h un n -vecteur généré aléatoirement et uniformément sur l'intervalle $[0, 10]$;
- $x^0 = \frac{1}{2}(l + u)$ est une solution réalisable initiale et $b := Ax^0$.

Les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau suivant :

D'après les résultats obtenus dans le tableau ci-dessus, on remarque que notre approche montre une efficacité importante dans le temps d'exécution. Cependant, le nombre d'itérations est légèrement supérieur à celui de la MADH, et ce, pour la simple raison que le pas de relaxation maximale n'est pas calculé à chaque itération.

Problème	m	n	MADH		MADHF	
			Niters	CPU	Niters	CPU
1	40	80	12.9091	0.4892	13.5714	0.2541
2	50	100	16.4545	0.4923	16.4762	0.1486
3	100	200	17.1818	0.5761	18.7619	0.3121
4	250	500	23.6364	4.0617	24.0476	2.3248
5	500	1000	41.2727	53.7042	41.9524	24.8919

TABLE 1 – Le nombre d'itérations Niters avec le temps d'exécution CPU dans la résolution des problèmes générés.

4 Conclusion

Dans notre travail, nous avons amélioré la méthode adaptée à direction hybride proposée dans [3], où nous avons évité, lorsque cela est possible, de calculer l'inverse du hessien réduit, ce qui a donné une amélioration dans le temps d'exécution dans l'implémentation de l'algorithme.

Références

- [1] Bibi, M. O. : Support Method for Solving a Linear-Quadratic Problem with Polyhedral Constraints on Control. *Optimization*, 37, 2, 139-147 (1996).
- [2] Bibi, M. O., Bentobache, M. : An Hybrid Direction Algorithm for Solving Linear Programs. *International Journal of Computer Mathematics*, 92, 1, 201-216 (2015).
- [3] Bibi, M.O, Ikhneche, N. and Bentobache, M. A Hybrid Direction Algorithm for Solving a Convex Quadratic Problem. *International Journal Of Mathematics in Operational Research*, 16(2) : 159-178 (2020).
- [4] Bentobache. M, Bibi, M.O. Numerical methods of linear and quadratic programming. French Academic Editions, Germany (2016).
- [5] Brahmi, B., Bibi, M. O. : Dual Support Method for Solving Convex Quadratic Programs. *Optimization*, 59, 6, 851-872 (2010).
- [6] Gabasov, R., Kirillova, F. M. and Raketskii, V. M. :On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. *Soviet. Math. Dokl.*, Vol. 23, No. 3, pp.653-657 (1981).
- [7] Gabasov, R., Kirillova, F. M., Kostyukova, O. I : Solution of linear quadratic extremal problems. *Soviet. Math. Dokl.*, Vol. 31, No. 1, pp.99-103 (1985).
- [8] Gabasov, R., Kirillova, F. M., Kostyukova, O. I. and Raketsky, V. M. : Constructive Methods of Optimization, Part 4 : Convex Problems. University Press, Minsk (1987).
- [9] Radjef, S., Bibi, M. O. : An Effective Generalization of the Direct Support Method in Quadratic Convex Programming. *Applied Mathematical Sciences*. 6, 31, 1525-1540 (2012).

Procédure de presolving en programmation linéaire en nombres binaires

Abdelkrim Rezzag  and Mohand Ouamer Bibi 

¹Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, Algerie,
abdelkrim.rezzag@univ-bejaia.dz

²Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, Algerie,
mdouamer.bibi@univ-bejaia.dz

Résumé Dans cet article, nous présentons une nouvelle technique de réduction des variables pour les problèmes généraux de programmation linéaire en $\{0, 1\}$. Cette technique permet de fixer à zéro ou à un, certaines variables de la solution optimale du problème posé.

Mots clés : Programmation linéaire en nombres binaires ; Procédure de presolving.

1 Introduction

Les techniques de réduction des variables ont été intensivement étudiées lors de la résolution de problèmes d'optimisation NP-difficiles de grande taille. En 1994, Babayev et Mardanov ont présenté une nouvelle méthode basée sur la comparaison de paires de colonnes de la matrice des contraintes [1]. En 1997, Zhu et Broughan ont dérivé une condition nécessaire et suffisante pour l'identification des variables réduites dans la matrice d'un problème général de programmation linéaire en nombres entiers [10, 9]. Cependant, la plupart de ces techniques ne sont appliquées qu'aux problèmes d'optimisation linéaire, avec des variables de décision non négatives, ce qui fait que les auteurs n'ont la possibilité de fixer une variable qu'à zéro [3, 4, 6, 8]. En 2007, Hua a proposé une nouvelle technique de réduction des variables pour les programmes quadratiques entiers convexes [5], tandis que Zhou l'a fait pour les problèmes généraux de programmation quadratique en nombres entiers [7].

Dans cet article, une nouvelle technique de réduction de variables est proposée pour un problème général (P) de programmation linéaire en nombres entiers binaires, ce qui permet de fixer certaines variables de (P) à zéro ou un, sans sacrifier l'optimalité. Nous présentons certaines conditions pour qu'une variable puisse être supprimée de (P). En comparant les données du problème, sous certaines conditions, certaines variables peuvent être fixées à zéro ou un.

2 Présentation du problème et définitions

Nous considérons le problème de programmation linéaire (P) avec des variables binaires sous la forme suivante :

$$(P) \begin{cases} \max z(x) = c^T x \\ Ax \leq b, \\ 0 \leq x \leq 1, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \end{cases} \quad (1)$$

où

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad I = \{1, 2, \dots, m\}, \quad J = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Soit X le domaine réalisable de (P) : $X = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b, x = 0 \vee 1\}$.

Si nous fixons une certaine variable du problème (P), en général la solution optimale et la valeur optimale changeront. Cependant, si la valeur optimale du problème avec la variable fixée est égale à la valeur optimale du problème original, alors nous devrions seulement considérer le nouveau problème avec une dimension inférieure, et ce, après avoir attribué la valeur optimale de la variable fixée au problème (P).

Soit (P_r) le nouveau problème obtenu après avoir fixé la variable $x_r = \tilde{x}_r$, avec $\tilde{x}_r = 0 \vee 1$ dans (P) :

$$(P_r) \begin{cases} \max z_r(y) = d^T y + c_r \tilde{x}_r \\ By \leq \tilde{b}, \\ 0 \leq y \leq 1, \quad y \in \mathbb{Z}^{n-1}, \end{cases} \quad (2)$$

où

$$B = A(I, J_r) \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}, \quad J_r = J \setminus \{r\},$$

$$d = (c_1, \dots, c_{r-1}, c_{r+1}, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \tilde{b}_i = b_i - a_{ir} \tilde{x}_r, \quad \forall i \in I.$$

Soit Y le domaine réalisable de (P_r) : $Y = \{y \in \mathbb{Z}^{n-1} : By \leq \tilde{b}, y = 0 \vee 1\}$.

Définition 2.1. Soient x^* (respectivement y^*) la solution optimale de (P) (respectivement (P_r)) et $z(x^*)$ (respectivement $z_r(y^*)$) la valeur optimale correspondante. Si $z_r(y^*) = z(x^*)$, alors on peut fixer la variable x_r à \tilde{x}_r et la variable $x_r^* = \tilde{x}_r$ est optimale dans (P). La variable entière x_r est alors appelée une variable dominée.

Lemma 2.1. Dans (P), s'il existe $k \in I$ et $r \in J$ satisfaisant

$$a_{kj} > 0, \quad \forall j \in J, \quad (3)$$

$$a_{kr} > b_k, \quad (4)$$

alors $x_r^* = 0$ est une variable dominée.

Preuve. On suppose que x^* est une solution optimale avec $x_r^* = 1$, alors pour $i = k$, on aura :

$$\sum_{j \in J} a_{kj} x_j^* \leq b_k \Rightarrow a_{kr} x_r^* \leq b_k \Rightarrow a_{kr} \leq b_k,$$

car $x_r^* = 1$. Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse $a_{kr} > b_k$. Par conséquent, il n'existe pas de solution optimale avec $x_r^* = 1$, donc la variable $x_r^* = 0$ est dominée. \square

Lemma 2.2. Dans (P), s'il existe $r \in J$ satisfaisant

$$a_r \geq 0 \quad \text{et} \quad c_r \leq 0, \quad (5)$$

où $a_r = (a_{ir}, i \in I)$ est un vecteur colonne de A , alors $x_r^* = 0$ est une variable dominée.

Preuve. Supposons que le vecteur \bar{x} est une solution réalisable de (P) avec $\bar{x}_r = 1$, et soit \hat{x} tel que

$$\begin{cases} \hat{x}_j = \bar{x}_j, & \forall j \in J_r, \\ \hat{x}_r = 0. \end{cases}$$

On a alors pour tout $i \in I$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} \hat{x}_j &= \sum_{j \in J_r} a_{ij} \hat{x}_j + a_{ir} \hat{x}_r \\ &\leq \sum_{j \in J_r} a_{ij} \bar{x}_j + a_{ir} \bar{x}_r = \sum_{j \in J} a_{ij} \bar{x}_j \\ &\leq b_i, \end{aligned}$$

alors \hat{x} satisfait les contraintes de (P). De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} z(\hat{x}) &= \sum_{j \in J} c_j \hat{x}_j = \sum_{j \in J_r} c_j \hat{x}_j + c_r \hat{x}_r \\ &\geq \sum_{j \in J_r} c_j \bar{x}_j + c_r \bar{x}_r = \sum_{j \in J} c_j \bar{x}_j = z(\bar{x}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la nouvelle solution \hat{x} est meilleure ou aussi bonne que \bar{x} . Par conséquent, la variable $x_r^* = 0$ est dominée. \square

Théorème 2.1. Dans le problème de programmation linéaire en nombres binaires (P), la variable x_r , $r \in J$, est fixée à 1 si :

$$\begin{cases} \max_{j \in J} \{c_j\} = c_r \geq 0, \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ \min_{j \in J} \{a_{ij}\} = a_{ir}, \text{ avec } a_{ir} \leq b_i, \forall i \in I. \end{cases} \quad (6)$$

Preuve. Supposons que le vecteur \bar{x} est une solution réalisable de (P) avec $\bar{x}_r = 0$ et $\bar{x}_q = 1$; $q \in J_r$ est un indice arbitraire, et soit \hat{x} tel que :

$$\begin{cases} \hat{x}_j = \bar{x}_j, & \forall j \in J \setminus \{r, q\}, \\ \hat{x}_r = 1, \\ \hat{x}_q = 0, \end{cases}$$

d'après 6, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} \hat{x}_j &= \sum_{j \in J \setminus \{r, q\}} a_{ij} \hat{x}_j + a_{ir} \hat{x}_r + a_{iq} \hat{x}_q \\ &\leq \sum_{j \in J \setminus \{r, q\}} a_{ij} \bar{x}_j + a_{iq} \bar{x}_q + a_{ir} \bar{x}_r = \sum_{j \in J} a_{ij} \bar{x}_j \\ &\leq b_i, \quad \forall i \in I, \end{aligned}$$

donc \hat{x} vérifie les contraintes de (P). En outre, on déduit que :

$$\begin{aligned} z(\hat{x}) &= \sum_{j \in J} c_j \hat{x}_j = \sum_{j \in J \setminus \{r, q\}} c_j \hat{x}_j + c_r \hat{x}_r + c_q \hat{x}_q \\ &\geq \sum_{j \in J \setminus \{r, q\}} c_j \bar{x}_j + c_q \bar{x}_q + c_r \bar{x}_r = \sum_{j \in J} c_j \bar{x}_j = z(\bar{x}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la nouvelle solution \hat{x} est meilleure ou aussi bonne que \bar{x} . Ainsi, la variable $x_r^* = 1$ est dominée. \square

Théorème 2.2. Soit $r_1, r_2 \in J$ avec $c_{r_1} \geq 0, c_{r_2} \geq 0$ et tels que :

$$a_{r_1} + a_{r_2} \leq 0. \quad (7)$$

Alors $x_{r_1}^* = 1, x_{r_2}^* = 1$ sont deux variables dominées.

Preuve. Supposons que le vecteur \bar{x} est une solution réalisable de (P) avec $\bar{x}_{r_1} = 0, \bar{x}_{r_2} = 0$, et soit \hat{x} , avec :

$$\begin{cases} \hat{x}_j = \bar{x}_j, & j \in J \setminus \{r_1, r_2\}, \\ \hat{x}_{r_1} = 1, \\ \hat{x}_{r_2} = 1. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} \hat{x}_j &= \sum_{j \in J \setminus \{r_1, r_2\}} a_{ij} \hat{x}_j + a_{ir_1} \hat{x}_{r_1} + a_{ir_2} \hat{x}_{r_2} = \sum_{j \in J \setminus \{r_1, r_2\}} a_{ij} \hat{x}_j + \underbrace{a_{ir_1} + a_{ir_2}}_{\leq 0} \\ &\leq \sum_{j \in J \setminus \{r_1, r_2\}} a_{ij} \bar{x}_j + a_{ir_1} \bar{x}_{r_1} + a_{ir_2} \bar{x}_{r_2} = \sum_{j \in J} a_{ij} \bar{x}_j \\ &\leq b_i, \quad \forall i \in I, \end{aligned}$$

d'où \hat{x} satisfait les contraintes de (P). De plus, on déduit que :

$$\begin{aligned} z(\hat{x}) &= \sum_{j \in J} c_j \hat{x}_j = \sum_{j \in J \setminus \{r_1, r_2\}} c_j \hat{x}_j + c_{r_1} \hat{x}_{r_1} + c_{r_2} \hat{x}_{r_2} \\ &\geq \sum_{j \in J \setminus \{r_1, r_2\}} c_j \bar{x}_j + c_{r_1} \bar{x}_{r_1} + c_{r_2} \bar{x}_{r_2} = \sum_{j \in J} c_j \bar{x}_j = z(\bar{x}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la nouvelle solution \hat{x} est meilleure ou aussi bonne que \bar{x} . Par conséquent, les variables $x_{r_1}^* = 1, x_{r_2}^* = 1$ sont dominées. \square

Corollaire 2.1. Dans le problème de programmation linéaire en nombres binaires (P), la variable $x_r, r \in J$, est fixée à 1 si :

$$a_r \leq 0 \quad \text{et} \quad c_r \geq 0.$$

Preuve. Supposons que le vecteur \bar{x} soit une solution réalisable de (P) avec $\bar{x}_r = 0$, et soit \hat{x} , avec :

$$\begin{cases} \hat{x}_j = \bar{x}_j, & j \in J_r, \\ \hat{x}_r = 1. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} \hat{x}_j &= \sum_{j \in J_r} a_{ij} \hat{x}_j + a_{ir} \hat{x}_r \\ &\leq \sum_{j \in J_r} a_{ij} \bar{x}_j + a_{ir} \bar{x}_r = \sum_{j \in J} a_{ij} \bar{x}_j \\ &\leq b_i, \quad \forall i \in I, \end{aligned}$$

d'où \hat{x} satisfait les contraintes de (P). De plus, on déduit que :

$$\begin{aligned} z(\hat{x}) &= \sum_{j \in J} c_j \hat{x}_j = \sum_{j \in J_r} c_j \hat{x}_j + c_r \hat{x}_r \\ &\geq \sum_{j \in J_r} c_j \bar{x}_j + c_r \bar{x}_r = \sum_{j \in J} c_j \bar{x}_j = z(\bar{x}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la nouvelle solution \hat{x} est meilleure ou aussi bonne que \bar{x} . Ainsi, si \bar{x} est optimale, alors il existe toujours une solution optimale telle que $x_r^* = 1$. Par conséquent, la variable $x_r^* = 1$ est dominée. \square

3 Exemple numérique

On considère le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \max z(x) = -9x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 3x_4 + 13x_5 + 12x_6 - 2x_7 + 7x_8 \\ 6x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 5x_5 - 7x_6 + 6x_7 + 9x_8 \leq 24, \\ 8x_1 - 2x_2 - x_3 + 7x_4 + x_6 + 9x_7 + 9x_8 \leq 12, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 9x_4 - 3x_5 - 8x_6 + 3x_7 + x_8 \leq 32, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1, 0 \leq x_5 \leq 1, \\ 0 \leq x_6 \leq 1, 0 \leq x_7 \leq 1, 0 \leq x_8 \leq 1, x \in \mathbb{Z}^8. \end{cases}$$

La solution optimale du problème (P) dans \mathbb{R}^8 est $\bar{x} = (0, 1, 1, \frac{5}{7}, 1, 1, 0, 1)^T$,

avec $z(\bar{x}) = \frac{470}{7}$.

• Pour $r = 7$, on a :

$$a_{17} = 6 \geq 0, a_{27} = 9 \geq 0, a_{37} = 3 \geq 0 \text{ et } c_7 = -2 \leq 0,$$

d'après le lemme 2.2, la variable $x_7^* = 0$. Le nouveau vecteur b s'écrit alors :

$$\tilde{b}_1 := 24, \tilde{b}_2 := 12, \tilde{b}_3 := 32.$$

- Pour $r = 3$

$$a_{13} = -4 \leq 0, a_{23} = -1 \leq 0, a_{33} = -2 \leq 0 \text{ et } c_3 = 18 \geq 0,$$

d'après le corollaire 2.1, la variable $x_3^* = 1$. Dans ce cas, on obtient :

$$\tilde{b}_1 := 24 - a_{13} = 28, \tilde{b}_2 := 12 - a_{23} = 13, \tilde{b}_3 := 32 - a_{33} = 34.$$

- Pour $r_1 = 2, r_2 = 6$

$$c_2 = 15 \geq 0 \text{ et } c_6 = 12 \geq 0,$$

$$a_{12} + a_{16} = -3 \leq 0,$$

$$a_{22} + a_{26} = -1 \leq 0,$$

$$a_{32} + a_{36} = -3 \leq 0,$$

d'après le théorème 2.2, $x_2^* = 1, x_6^* = 1$. Le vecteur b sera :

$$\tilde{b}_1 := 28 - a_{12} - a_{16} = 31, \tilde{b}_2 := 13 - a_{22} - a_{26} = 14, \tilde{b}_3 := 34 - a_{32} - a_{36} = 37.$$

- Pour $r = 5$, on applique le théorème 2.1 pour le problème réduit, avec $\tilde{J} = \{1, 4, 5, 8\}$.
On a donc :

$$\max\{c_1; c_4; c_5; c_8\} = c_5 = 13 \geq 0,$$

$$\min\{a_{11}; a_{14}; a_{15}; a_{18}\} = a_{15} = 5 \leq \tilde{b}_1 = 31,$$

$$\min\{a_{21}; a_{24}; a_{25}; a_{28}\} = a_{25} = 0 \leq \tilde{b}_2 = 24,$$

$$\min\{a_{31}; a_{34}; a_{35}; a_{38}\} = a_{35} = -3 \leq \tilde{b}_3 = 37.$$

Par conséquent, $x_5^* = 1$. Alors, on obtient :

$$\tilde{b}_1 := 31 - a_{15} = 26, \tilde{b}_2 := 14 - a_{25} = 14, \tilde{b}_3 := 37 - a_{35} = 40.$$

On pose $y_1 = x_1, y_2 = x_4$ et $y_3 = x_8$ avec $c_2x_2^* + c_3x_3^* + c_5x_5^* + c_6x_6^* = 58$, alors le nouveau problème s'écrit comme suit :

$$(P_r) \begin{cases} \max z_r(y) = -9y_1 + 3y_2 + 7y_3 + 58 \\ 6y_1 + 9y_2 + 9y_3 \leq 26, \\ 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 \leq 14, \\ -y_1 + 9y_2 + y_3 \leq 40, \\ 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1, 0 \leq y_3 \leq 1, y \in \mathbb{Z}^3. \end{cases}$$

La solution optimale de (P_r) est $y^* = (0, 0, 1)^T$ et $z_r(y^*) = 65$.

Donc, la solution optimale du problème original (P) est $x^* = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)^T$, avec $z(x^*) = z_r(y^*) = 65$.

Après avoir implémenté les deux problèmes ci-dessus sous MATLAB R2018b, on a obtenu la même solution optimale.

4 Conclusion

Alors que certains auteurs [1, 3, 4, 5, 6, 7, 9] ont proposé des techniques de réduction de variables à zéro uniquement, dans ce travail, nous avons proposé une nouvelle technique de réduction des variables pour les problèmes généraux de programmation linéaire en nombres binaires (P), selon laquelle certaines variables de (P) peuvent être fixées à zéro ou un, sans sacrifier l'optimalité. Dans notre prochain travail, nous intégrerons cette procédure de presolving dans l'algorithme de résolution d'un problème de programmation linéaire en nombres entiers [2]. De plus, nous appliquerons cette technique pour des problèmes de programmation quadratique convexe et non convexe.

Références

- [1] D.A. Babayev, S.S. Mardanov. Reducing the number of variables in integer and linear programming problems. *Computational Optimization and Applications*, 3(2) :99–109, 1994.
- [2] M.O. Bibi, H. Boussouira, A. Laouar. Solution of an integer linear programming problem via a primal dual method combined with a heuristic. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, 12(1) :69–87, 2022.
- [3] I.V. Danilchenko, Yu.M. Makarenkov. On the methods of reducing the dimension of linear programming problem. *Economics Mathematics Methods*, 11(N3) :516–524, 1975. (in Russian)
- [4] K. Dudziński. A note on dominance relation in unbounded knapsack problems. *Operations Research Letters*, 10(7) :417–419, 1991.
- [5] Z.S. Hua, B. Zhang, X.Y. Xu. A new variable reduction technique for convex integer quadratic programs. *Applied Mathematical Modelling*, 32(2) :224–231, 2008.
- [6] H.P. Williams. The elimination of integer variables. *Journal of the Operational Research Society*. 43(5) :387–393, 1992.
- [7] M. Zhou and W. Chen. Reducing the number of variables in integer quadratic programming problem. *Applied mathematical modelling*, 34(2) :424–436, 2010.
- [8] N. Zhu. On the relationship between the knapsack problem and the group knapsack problem. *Institute of Statistics and Operations Research*, Victoria University of Wellington, 1993.
- [9] N. Zhu, K. Broughan. A note on reducing the number of variables in integer programming problems. *Computational Optimization and Applications*, 8(3) :263–272, 1997.
- [10] N. Zhu, K. Broughan. On dominated terms in the general knapsack problem. *Operations Research Letters*, 21(8) :31–37, 1997.

Méthode directe de support pour l'optimisation paramétrique du modèle Moyenne-Variance

Souhaib Boudjelda*¹ and Belkacem Brahmi²

¹Unité de Recherche LaMOS, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie, souhaib.boudjelda@univ-bejaia.dz

²Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie, belkacem.brahmi@univ-bejaia.dz

Résumé Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode paramétrique pour résoudre le problème de gestion de portefeuille Moyenne-Variance de Markowitz sous contraintes générales. L'algorithme proposé permet de déterminer itérativement tous les points pivots associés aux portefeuilles de coins du problème et tracer entièrement la frontière efficiente.

Mots clés : Modèle de Markowitz ; Programmation Quadratique Paramétrique ; Frontière Efficiente ; Méthode Directe de Support

1 Introduction

La théorie moderne du portefeuille a été introduite par Harry Markowitz dans son modèle Moyenne-variance (MV) [1]. Dans ses travaux [1, 2], Markowitz a formulé et défini un processus de sélection d'actifs de façon à minimiser le risque d'un portefeuille mesuré par la variance et à maximiser son rendement qui est mesuré par l'espérance de ces rendements. Le modèle moyenne-variance (MV) résultant est un programme quadratique (PQ) convexe bi-objectifs avec contraintes linéaires. En effet, l'objectif est de déterminer l'ensemble des portefeuilles efficients qui forment la frontière de Markowitz. Notons que cette frontière est constitué de la réunion de segments de demi-hyperboles connectés entre eux par des portefeuilles de coins.

La programmation quadratique paramétrique est l'une des approches utilisées pour résoudre le modèle MV. Cette approche consiste à modéliser le problème avec un paramètre, et puis le faire varier pour déterminer totalement la frontière efficiente. Dans ce cadre, plusieurs algorithmes paramétriques ont été développés dans la littérature pour résoudre le modèle de Markowitz [5, 4, 6].

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode paramétrique basée sur la méthode

*Corresponding Author

directe de support (MDS) de Gabasov [3] pour résoudre le problème de gestion de portefeuille MV sous contraintes linéaires générales et l'absence de ventes à découvert. L'algorithme proposé est formé de deux phases dont la première permet de déterminer le portefeuille de variance minimale (PVM) en utilisant la MDS. La solution optimale obtenue est utilisée comme point de départ de la seconde phase. La phase 2 permet de calculer itérativement les autres portefeuilles de coins de la frontière efficiente et ce en calculant les points pivots associés.

Le reste du papier est structuré comme suit. Dans la seconde section, on présentera le modèle MV, puis nous présentons les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). La méthode de support proposée pour la résolution du PQ paramétrique (PQP) sera décrite dans la section 3, suivi d'un exemple d'application. Nous concluons ce travail à la section 4.

2 Présentation du problème

Le modèle classique de Markowitz [1] consiste à minimiser le risque d'un portefeuille et à maximiser son rendement. L'une des formulations du problème est exprimée par le PQP suivant [1, 7] :

$$\min\left\{\frac{1}{2}x'\Sigma x - \lambda\mu'x \mid Ax = b, x \geq 0\right\}, \quad (1)$$

où $x \in \mathbf{R}^n$ est appelé portefeuille, représentant les proportions du capital à investir dans les n titres ; μ est un n -vecteur des rendements des titres ; Σ est une $(n \times n)$ matrice de variance-covariance, supposée symétrique et semi-définie positive ; A est une $(m \times n)$ matrice, avec $\text{rang}(A) = m < n$; b est un m -vecteur ; $\lambda \in [0, \infty[$ est le paramètre d'aversion au risque.

On note respectivement les indices des ensembles des contraintes et des variables de décision par : $I = \{1, 2, \dots, m\}$ et $J = \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $J = J_B \cup J_N$ et $J_B \cap J_N = \emptyset$.

Pour décrire les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker du problème (1), considérons sa fonction de Lagrange associée :

$$L(x, y, v) = \frac{1}{2}x'\Sigma x - \lambda\mu'x + y'(Ax - b) - v'x,$$

où $y \in \mathbf{R}^m$ et $v \in \mathbf{R}^n$ sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'égalité et d'inégalité. Comme la matrice de variance-covariance Σ est semi-définie positive, donc le problème (1) est un PQP-convexe et par conséquent les conditions d'optimalité de KKT de premier ordre sont à la fois nécessaires et suffisantes :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \Sigma x - \lambda\mu + A'y - v = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = Ax - b = 0, \quad (2b)$$

$$v'x = 0, \quad x \geq 0, \quad v \geq 0. \quad (2c)$$

3 Approche de résolution

La résolution du PQP (1) se fait en deux phases, dont la première consiste à déterminer le premier portefeuille pivot de la frontière efficiente. Pour cela, on pose $\lambda = 0$ et on résout le PQ suivant par la MDS :

$$\min\left\{\frac{1}{2}x'\Sigma x \mid Ax = b, x \geq 0\right\}, \quad (3)$$

La solution optimale du problème précédent sert comme point de départ de la seconde phase de la MDS proposée. Pour mieux présenter notre approche, définissons la notion de *support* du problème (1) comme suit :

Définition 3.1 (Support du problème).

- Un sous-ensemble d'indices non vide $J_B \subset J$, tel que $|J_B| \geq m$, est appelé *support* du problème (1) si et seulement si la sous-matrice $\sigma_B = \Sigma(J_B, J_B)$ est non singulière et les colonnes de la sous-matrice $A_B = A(I, J_B)$ sont linéairement indépendantes. Notons par $J_N = J \setminus J_B$ l'ensemble des indices hors base de x .
- La paire $\{x, J_B\}$ formée par la solution réalisable x et le support J_B est appelée *solution réalisable de support (SRS)*. Elle est dite *non dégénérée* si $x_j > 0, \forall j \in J_B$.

Suivant la partition de l'ensemble des indices $J = J_B \cup J_N$, les différents vecteurs et matrices se décomposent comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}; x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B), x_N = x(J_N) = (x_j, j \in J_N).$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_B & \sigma_{BN} \\ \sigma_{BN}' & \sigma_N \end{pmatrix}; \sigma_B = \Sigma(J_B, J_B), \sigma_{BN} = \Sigma(J_B, J_N) = \sigma_{NB}', \sigma_N = \Sigma(J_N, J_N).$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_B \\ \mu_N \end{pmatrix}; \mu_B = \mu(J_B), \mu_N = \mu(J_N); A = (A_B \mid A_N), A_B = A(I, J_B), A_N = A(I, J_N).$$

Selon les conditions d'optimalité de KKT (2a) et si on considère seulement les solutions basiques $x = (x_B, x_N)'$, avec $x_N = 0$, nous définissons le vecteur des coûts réduits : $v = E = (E_B, E_N)' = \Sigma x - \lambda \mu + A'y$, avec :

$$\begin{cases} E_B &= \sigma_B x_B - \lambda \mu_B + A_B' y, \\ E_N &= \sigma_{NB} x_B - \lambda \mu_N + A_N' y. \end{cases}$$

Les conditions d'optimalité de KKT (2) sont reformulées dans le théorème suivant :

Théorème 3.1. Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du PQP (1). Les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j(\lambda) \geq 0 & \text{si } x_j(\lambda) = 0, \\ E_j(\lambda) = 0 & \text{si } x_j(\lambda) > 0, \forall j \in J_N, \end{cases} \quad (4)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du point x et sont aussi nécessaires si la SRS $\{x, J_B\}$ est non dégénérée.

La procédure paramétrique proposée dans ce travail consiste à résoudre le système KKT (2) pour tout λ , $\lambda^k \leq \lambda \leq \lambda^{k+1}$, avec λ^k est le point pivot associé au portefeuille de coin à l'itération k . Les formules explicites de la solution optimale et les multiplicateurs associés sont données dans le théorème 3.2.

Théorème 3.2. Pour tout $\lambda^k \leq \lambda \leq \lambda^{k+1}; k = 0, 1, 2, \dots$, la solution optimale du système de KKT (2) $x^k(\lambda)$, le vecteur des potentiels $y^k(\lambda)$ et le vecteur des coûts réduits $E_N^k(\lambda)$ sont des fonctions linéaires dépendant du paramètre λ , tels que :

$$y^k(\lambda) = \alpha_1^k + \lambda \alpha_2^k, \quad x_B^k(\lambda) = \gamma_1^k + \lambda \gamma_2^k \quad \text{et} \quad E_N^k(\lambda) = \beta_1^k + \lambda \beta_2^k,$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_1^k &= -(A_B \sigma_B^{-1} A_B')^{-1} b, & \alpha_2^k &= (A_B \sigma_B^{-1} A_B')^{-1} (A_B \sigma_B^{-1} \mu_B). \\ \gamma_1^k &= -\sigma_B^{-1} A_B' \alpha_1^k, & \gamma_2^k &= \sigma_B^{-1} (\mu_B - A_B' \alpha_2^k). \\ \beta_1^k &= \sigma_{NB} \gamma_1^k + A_N' \alpha_1^k, & \beta_2^k &= \sigma_{NB} \gamma_2^k + A_N' \alpha_2^k - \mu_N. \end{aligned}$$

Preuve. Voir [7]. □

3.1 Rendement espéré et risque associé du portefeuille

Pour chaque portefeuille de coin $x^k(\lambda)$, son rendement espéré $\mu_p^k(\lambda) = \mu' x^k(\lambda)$ et son risque associé $\sigma_p^k(\lambda) = x^{k'}(\lambda) \Sigma x^k(\lambda)$.

Notons que les portefeuilles pivots $x^k(\lambda)$ et $x^{k+1}(\lambda)$ représentent les extrémités du segment de la frontière efficiente sur l'intervalle $[\lambda^k, \lambda^{k+1}]$, sont respectivement des fonctions linéaire et quadratique du paramètre λ :

$$\mu_p^k(\lambda) = t_1^k + \lambda t_2^k \quad \text{et} \quad \sigma_p^k(\lambda) = \tilde{t}_1^k + \lambda \tilde{t}_2^k + \lambda^2 \tilde{t}_3^k, \quad \text{avec} :$$

$$\begin{aligned} t_1^k &= \mu_B' \gamma_1^k, & t_2^k &= \mu_B' \gamma_2^k, \\ \tilde{t}_1^k &= \gamma_1^{k'} \sigma_B \gamma_1^k, & \tilde{t}_2^k &= 2 \gamma_1^{k'} \sigma_B \gamma_2^k \quad \text{et} & \tilde{t}_3^k &= \gamma_2^{k'} \sigma_B \gamma_2^k, \end{aligned}$$

3.2 Détermination du nouveau point pivot

Le nouveau point pivot λ^{k+1} est déterminé comme suit : $\lambda^{k+1} = \min\{\lambda_{j_0}^k, \lambda_{j_1}^k\}$, où $\lambda_{j_0}^k$ est la plus grande valeur de λ pour laquelle $x_B^k(\lambda)$ reste réalisable :

$$\lambda_{j_0}^k = \min_{j \in J_B^k} \{\lambda_j^k\}; \lambda_j^k = \begin{cases} \frac{-\gamma_{1j}^k}{\gamma_{2j}^k}, & \text{Si } \gamma_{1j}^k \gamma_{2j}^k < 0 \text{ et } \lambda_j^k > \lambda^k; \\ \infty, & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

Le pas $\lambda_{j_1}^k$ est la plus grande valeur de λ pour lequel $E_N^k(\lambda)$ reste non-négatif ($E_N^k \geq 0$) :

$$\lambda_{j_1}^k = \min\{\lambda_j^k\}; \lambda_j^k = \begin{cases} \frac{-\beta_{1j}^k}{\beta_{2j}^k}, & \text{Si } \beta_{1j}^k \beta_{2j}^k < 0 \text{ et } \lambda_j^k > \lambda^k; \\ \infty, & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

3.3 Changement du support

Si $\lambda^{k+1} = \infty$, alors on arrête l'algorithme et par conséquent la frontière efficiente est complètement déterminée. Sinon, on change le support de la façon suivante :

- Si $\lambda^{k+1} = \lambda_{j_0}^k$, alors on pose : $J_B^{k+1} \leftarrow J_B^k \setminus j_0, J_N^{k+1} \leftarrow J_N^k \cup j_0$.
- Si $\lambda^{k+1} = \lambda_{j_1}^k$, alors on pose : $J_B^{k+1} \leftarrow J_B^k \cup j_1, J_N^{k+1} \leftarrow J_N^k \setminus j_1$.

4 Exemple numérique

Considérons le PQP suivant : $\min\{\frac{1}{2}x'\Sigma x - \lambda\mu'x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, avec les données suivantes :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.03 \\ 0 & 0.03 & 0.03 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On pose $k = 0$ et $\lambda^0 = 0$. On résout le PQP par la MDS. La solution optimale obtenue est $\{x^0, J_B^0\} = (1.8478, 0.7174, 0.4348)'$, avec $J_B^0 = \{1, 3, 2\}$.

Itération 1 :

- Calculons les vecteurs y^0, x_B^0 et E_N^0 :

$$y^0 = \alpha_1^0 + \lambda^0 \alpha_2^0, \text{ avec } \alpha_1^0 = \begin{pmatrix} -0.0417 \\ 0.0024 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha_2^0 = \begin{pmatrix} 1.0478 \\ 0.0717 \end{pmatrix}.$$

$$x_B^0 = \gamma_1^0 + \lambda^0 \gamma_2^0, \text{ avec } \gamma_1^0 = \begin{pmatrix} 1.8478 \\ 0.7174 \\ 0.4348 \end{pmatrix}, \gamma_2^0 = \begin{pmatrix} -4.5652 \\ 1.5217 \\ 3.0435 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_B^0 = \begin{pmatrix} 1.8478 \\ 0.7174 \\ 0.4348 \end{pmatrix}.$$

Comme $J_N^0 = \emptyset$, alors $E_N^0 = \emptyset$.

- Détermination du prochain point pivot λ^1 :

$$\lambda_{j_0}^0 = \min_{j \in J_B^0} \left\{ \lambda_j = \frac{-\gamma_{1j}^0}{\gamma_{2j}^0}; \right\} = \min\{0.4048, \infty, \infty\}; \Leftrightarrow \lambda_{j_0}^0 = 0.4048 \text{ et } j_0 = 1.$$

Comme $E_N^0 = \emptyset$, on pose $\lambda_{j_1}^0 = \infty$. Alors, $\lambda^1 = \min\{\lambda_{j_0}^0, \lambda_{j_1}^0\} = 0.4048$.

- Changement de support :

$$J_B^1 \leftarrow J_B^0 \setminus \{j_0\} = \{3, 2\}, J_N^1 \leftarrow J_N^0 \cup \{j_0\} = \{1\}.$$

Itération 2 : • Calculons les vecteurs y^1, x_B^1 et E_N^1 :

$$y^1 = \alpha_1^1 + \lambda^1 \alpha_2^1, \text{ avec } \alpha_1^1 = \begin{pmatrix} -0.1033 \\ 0.0044 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha_2^1 = \begin{pmatrix} 1.2000 \\ 0.0667 \end{pmatrix}.$$

$$x_B^1 = \gamma_1^1 + \lambda^1 \gamma_2^1, \text{ avec } \gamma_1^1 = \begin{pmatrix} 1.3333 \\ 1.6667 \end{pmatrix}, \gamma_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_B^1 = \begin{pmatrix} 1.3333 \\ 1.6667 \end{pmatrix}.$$

$$E_N^1 = \beta_1^1 + \lambda^1 \beta_2^1, \text{ avec } \beta_1^1 = -0.0944 \text{ et } \beta_2^1 = 0.2333.$$

- Détermination du point pivot λ^2 :

$$\lambda_{j_0}^1 = \min_{j \in J_B^1} \left\{ \lambda_j = \frac{-\gamma_{1j}^1}{\gamma_{2j}^1}; \right\} = \min\{\infty, \infty\}; \Leftrightarrow \lambda_{j_0}^0 = \infty.$$

$$\lambda_{j_1}^1 = \min_{j \in J_N^1} \left\{ \lambda_j = \frac{-\beta_{1j}^1}{\beta_{2j}^1}; \right\} = \infty.$$

Alors $\lambda^2 = \min\{\lambda_{j_0}^1, \lambda_{j_1}^1\} = \infty$.

- Comme $\lambda^2 = +\infty$, alors on arrête l'algorithme et la frontière efficiente est complètement déterminée. La figure suivante montre la frontière de Markowitz pour l'exemple.

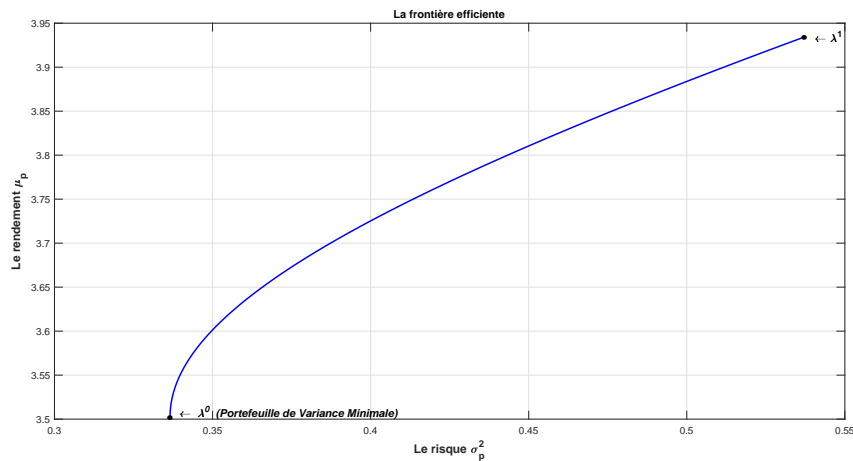


FIGURE 1 – La frontière efficiente et les portefeuilles de coins associés.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étendu la méthode directe de support pour résoudre le modèle MV de Markowitz. L'approche proposée est une adaptation de la MDS pour résoudre le modèle dans sa formulation paramétrique sous contraintes linéaires générales et d'absence de ventes à découvert. Le processus de résolution est itératif et permet de calculer tous les portefeuilles de coins et ainsi tracer complètement la frontière efficiente. Comme perspectives de ce travail, nous essaierons d'effectuer une étude de simulation pour tester l'efficacité de notre approche par rapport aux méthodes existantes.

Références

- [1] Markowitz, H. : Portfolio Selection. *Journal of Finance*, **7**, 1, 77-91 (1952).
- [2] Markowitz, H. : Portfolio selection, efficient diversification of investments. New York, John Wiley (1959).
- [3] Gabasov, R., Kirillova, F. M. and Raketkii, VM. : On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. *Doklady Akademii Nauk*, **258**, 6, 1289-1293 (1981).
- [4] Markowitz, H., Todd, G.P. : Mean-variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. New York, John Wiley & Sons (2000).
- [5] Best, M.J. : An algorithm for the solution of the parametric quadratic programming problem. In : *Applied Mathematics and Parallel Computing*, pp. 57–76. Physica, Heidelberg (1996).
- [6] Hirschberger, M., Qi, Y., Steuer, R.E. : Large-scale mv efficient frontier computation via a procedure of parametric quadratic programming. *European Journal of Operational Research*, **3**, 204, 581-588 (2010).
- [7] Best, M.J. : Portfolio Optimization. London, CRC Press (2010).



Ordonnancement d'atelier Job-Shop par métaheuristique des Colonies d'abeilles- Etude de sensibilité.

Amaria OUIS KHEDIM ^{*1}, Mehdi SOUIER ^{1,2}

¹ Manufacturing Engineering Laboratory of Tlemcen (MELT), University of Tlemcen, Algeria.
khedim3@gmail.com

² High School of Management of Tlemcen, Algeria.
souier.mehdi@gmail.com

Résumé : Le problème d'ordonnancement de job-shop (JSP : Job-Shop Scheduling Problem) est connu comme l'un des problèmes d'ordonnancement les plus difficiles. Il s'agit d'un problème pratique très important dans les domaines de la gestion de la production et de l'optimisation combinatoire. Un JSP de petite taille peut être résolu par des méthodes exactes mais à partir de certaines instances le JSP est classé parmi les problèmes NP-difficiles. Dans une telle situation, le recours aux heuristiques et aux métaheuristiques serait d'un grand secours. L'objectif principal de cet article est d'adapter la métaheuristique des colonies d'abeilles récemment formulée pour la résolution des problèmes d'optimisation continus. Pour notre problème de Job shop qui est de nature combinatoire, nous avons proposé une nouvelle version appelée : « Combinatorial Artificial Bee Colony » (CABC) algorithm. De plus, pour assurer un bon ajustement de paramètres, une étude de sensibilité a été faite. Les résultats obtenus sur certains benchmark pris de la littérature confirment l'efficacité de la métaheuristique des colonies d'abeilles.

Mots-clés : Ordonnancement ; métaheuristique; job-shop; les colonies d'abeilles; benchmark.

1 Introduction

Le problème de type job-shop est l'un des problèmes les plus étudiés dans la littérature de l'ordonnancement. Son importance théorique ainsi que la modélisation de nombreuses applications industrielles sous forme de systèmes de type job-shop le rendent très intéressant. Les systèmes de type job-shop sont considérés comme des systèmes fortement combinatoires. Ils sont composés d'un ensemble de n jobs, chacun composé d'un ensemble de m_i opérations qui peuvent être exécutées sur m machines en respectant certaines contraintes technologiques.

Un problème d'ordonnancement consiste à affecter des tâches (job) aux ressources (machines) et à décider de leur répartition dans le temps, de manière à optimiser un critère ou à trouver un compromis entre plusieurs critères.

* Corresponding Author:

Un problème d'ordonnancement de job-shop (JSP : Job-Shop Scheduling Problem) de petite taille peut être résolu par des méthodes exactes qui fournissent des solutions optimales. Mais à partir de certaines instances, ces méthodes s'avèrent inefficaces, car le JSP se trouve classé parmi les problèmes NP-difficiles [3]. Pour remédier à ce genre de limitations dans la recherche de solutions, les chercheurs se sont alors orientés vers l'utilisation de méthodes approchées appelées « métaheuristiques ». L'objectif d'une métaheuristique est de trouver une solution acceptable en un temps de calcul assez raisonnable. Durant ces cinq dernières décennies, plusieurs investigations ont été faites sur les méthodes de résolution du JSP, aussi bien sur les méthodes exactes, que sur les méthodes approchées et encore même sur les méthodes hybrides. Le papier de Jain et Meerran [4], met à notre disposition un bon état de l'art concernant le job-shop. On trouve aussi dans l'article de Çalis et al. [7] un autre état de l'art sur tous les travaux récents sur les méthodes basées sur l'intelligence artificielle pour l'ordonnancement d'un job-shop.

Dans nos investigations, nous nous intéressons à une métaheuristique qui s'inspire du comportement naturel des colonies d'abeilles. En effet, le comportement intelligent des abeilles pour la recherche d'une source de nourriture de bonne qualité dans la nature a été une bonne source d'inspiration pour plusieurs chercheurs, entre autres, Karaboga qui a introduit en 2005, une nouvelle métaheuristique formulée par l'algorithme ABC (Artificial Bee Colony) [5], [1]. Mais il se trouve que cet algorithme a été conçu à l'origine pour résoudre des problèmes d'optimisation de nature continue et ne peut pas être utilisé directement pour le cas combinatoire. Ainsi, si l'on veut résoudre le problème de JSP qui est de nature combinatoire, certaines modifications doivent être apportées à l'algorithme ABC fondamental. Nous avons donc proposé une nouvelle version appelée : « Combinatorial Artificial Bee Colony » (CABC) algorithm. A l'instar de toutes les métaheuristiques, pour avoir une bonne adaptation de l'algorithme proposée nous avons besoin de faire une étude de sensibilité pour ainsi assurer un bon ajustement de paramètres. C'est ce qui fait l'objet de cet article.

Pour le reste de cet article nous allons commencer par donner en section 2, une bonne définition du JSP avec toutes les notations nécessaires. La métaheuristique des colonies d'abeilles est introduite en section 3 et son adaptation au JSP est présentée dans la section 4. La section 5 est réservée aux résultats de l'application de l'algorithme proposé à certains benchmark pour différents paramètres de réglage. L'article est finalisé par une conclusion.

2 Problème d'ordonnancement d'un Job Shop [8] (JSP: Job-Shop Scheduling Problem)

Le problème du job-shop consiste à exécuter un ensemble de n jobs $J = \{J_1, \dots, J_n\}$ (tâches) sur un ensemble de m machines $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ (ressources). Le passage d'un job sur une machine est appelé opération. À chaque job J_i correspond une gamme opératoire composée d'un ensemble ordonné de m_i opérations noté $O_i = \{O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{im_i}\}$ pour lesquelles des contraintes de précédence sont décrites.

O_{ij} est la j -ième opération du i -ième job (J_i). Pour préciser que l'opération O_{ij} est exécutée sur la k -ième machine (M_k), on la note O_{ij}^k . Une opération O_{ij} est associée à un temps de traitement p_{ij} correspondant à sa durée d'exécution sur la machine. Chaque opération est définie alors par un couple (machine, durée), $O_{ij}^k = \{(M_k, p_{ij})\}$.

Chaque job doit être traité par toutes les machines dans un ordre particulier sous respect des contraintes technologiques. Le temps opératoire varie avec chaque job. Une machine ne peut traiter qu'une seule opération à la fois. L'ordre de passage par les machines varie également d'un job à un autre. Une fois qu'une machine commence à traiter une opération, aucune interruption n'est autorisée.

D'une manière générale, le coût global de production est lié au temps nécessaire pour la fabrication des différents produits. En conséquence, l'objectif principal du problème d'ordonnancement de job-

shop (JSP) consiste à réduire la durée globale de fabrication, appelée « makespan » et notée C_{max} . Le C_{max} représente la date de fin de tous les jobs.

Mathématiquement parlant, le critère d'optimalité le plus souvent étudié dans le JSP est la minimisation du délai total de l'ordonnancement :

$$C_{max}^* = \min_{\substack{\text{ordonnements} \\ \text{admissibles}}} (C_{max}) \quad (1)$$

La résolution d'un problème d'ordonnancement de job-shop (JSP) revient alors à résoudre un problème d'optimisation qui a pour solution la liste ordonnée de toutes les opérations O_{ij} et ceci afin de satisfaire le critère qui minimise le C_{max} sous respect des contraintes de précédence. La difficulté à trouver de bonnes solutions pour le JSP est due au nombre de solutions possibles. Pour les problèmes de taille élevée, le nombre élevé de solutions possibles, rendrait l'exploration de tout l'espace des solutions presque impossible. Le nombre total de toutes les solutions possibles étant $(n!)^m$.

Le comportement intelligent des abeilles pour la recherche d'une source de nourriture de bonne qualité dans la nature a été une bonne source d'inspiration pour Karaboga qui a introduit en 2005, une nouvelle métaheuristique formulée par l'algorithme ABC (Artificial Bee Colony) [5]. Ainsi, pour découvrir de bonnes solutions à un problème d'optimisation, l'algorithme ABC repose sur des concepts issus de la recherche de nourriture chez les abeilles. Les composantes essentielles de l'ABC sont donc établies comme suit :

- **Une source de nourriture** : représente une solution possible pour un problème d'optimisation
- **La valeur de la Fitness** représente la rentabilité d'une source de nourriture. Pour simplifier, c'est la seule valeur que prend la fonction objectif pour une solution possible.
- **Les agents abeilles** sont l'ensemble des agents de calcul.

Les agents de l'algorithme ABC sont classés en trois groupes : les abeilles actives, les abeilles spectatrices et les abeilles scoutes. La colonie est également partagée en abeilles actives (50%) et en abeilles inactives (spectatrices + scoutes).

La métaheuristique des colonies d'abeilles est une méthode stochastique, itérative et à population de solutions. Chaque solution dans l'espace de recherche consiste en un ensemble de paramètres d'optimisation, qui représente une "localisation" de la source de nourriture. Le nombre d'abeilles actives est égal au nombre de sources de nourriture, c'est à dire qu'il y aurait une abeille active pour chaque source de nourriture.

Les abeilles actives seront chargées d'explorer leurs sources de nourriture et de partager des informations concernant ces sources pour recruter des abeilles spectatrices. À la base de ces informations, les abeilles spectatrices prendront une décision pour choisir une source de nourriture. La source de nourriture qui a la meilleure qualité aura la plus grande probabilité d'être sélectionnée par les abeilles spectatrices. Une abeille active dont la source de nourriture est de faible qualité est rejetée par les abeilles actives et spectatrices et se transforme en abeille scoute à la recherche aléatoire de nouvelles sources de nourriture.

3 Optimisation par Colonies D'abeilles

Le comportement intelligent des abeilles pour la recherche d'une source de nourriture de bonne qualité dans la nature a été une bonne source d'inspiration pour Karaboga qui a introduit en 2005, une nouvelle métaheuristique formulée par l'algorithme ABC (Artificial Bee Colony) [5]. Ainsi, pour découvrir de bonnes solutions à un problème d'optimisation, l'algorithme ABC repose sur des concepts issus de la recherche de nourriture chez les abeilles. Les composantes essentielles de l'ABC sont donc établies comme suit :

- **Une source de nourriture** : représente une solution possible pour un problème d'optimisation

- **La valeur de la Fitness** représente la rentabilité d'une source de nourriture. Pour simplifier, c'est la seule valeur que prend la fonction objective pour une solution possible.

- **Les agents abeilles** sont l'ensemble des agents de calcul.

Les agents de l'algorithme ABC sont classés en trois groupes : les abeilles actives, les abeilles spectatrices et les abeilles scoutes. La colonie est également partagée en abeilles actives (50%) et en abeilles inactives (spectatrices + scoutes).

La métaheuristique des colonies d'abeilles est une méthode stochastique, itérative et à population de solutions. Chaque solution dans l'espace de recherche consiste en un ensemble de paramètres d'optimisation, qui représente une "localisation" de la source de nourriture. Le nombre d'abeilles actives est égal au nombre de sources de nourriture, c'est à dire qu'il y aurait une abeille active pour chaque source de nourriture.

Les abeilles actives seront chargées d'explorer leurs sources de nourriture et de partager des informations concernant ces sources pour recruter des abeilles spectatrices. À la base de ces informations, les abeilles spectatrices prendront une décision pour choisir une source de nourriture. La source de nourriture qui a la meilleure qualité aura la plus grande probabilité d'être sélectionné par les abeilles spectatrices. Une abeille active dont la source de nourriture est de faible qualité est rejetée par les abeilles actives et spectatrices et se transforme en abeille scoute à la recherche aléatoire de nouvelles sources de nourriture.

Étape 1 : phase d'initialisation

Répéter :

Étape 2 : mise à jour des solutions possibles par les abeilles actives

Étape 3 : sélection des solutions possibles par les abeilles spectatrices

Étape 4 : mise à jour des solutions possibles par les abeilles spectatrices

Étape 5 : prévention des solutions sous-optimales par les abeilles scoutes

Mémorisation de la meilleure solution obtenue jusque là

Jusqu'à : satisfaction du critère d'arrêt (nombre d'itérations maximal).

Pour plus de détails concernant cette version continue de l'ABC, le lecteur peut se référer à l'article de Karaboga et Basturk [1].

4 L'algorithme CABC proposé :

À la base, l'algorithme ABC fondamental, a été conçu pour résoudre des problèmes d'optimisation de nature continue et ne peut pas être utilisé directement pour le cas combinatoire. Afin de résoudre le problème de JSP qui est de nature combinatoire, certaines modifications doivent être apportées à l'algorithme ABC fondamental. Nous avons donc proposé une nouvelle version appelée : « Combinatorial Artificial Bee Colony » (CABC) algorithm.

Le premier point à prendre avec soin lors d'une adaptation d'un algorithme à un problème donné, c'est le choix de la représentation de la solution. Dans notre cas, nous avons opté pour la "représentation basée sur les opérations" avec "répétition de jobs" ("operation-based representation" with "job repetition").

Ainsi, la solution de ce JSP est une liste d'opérations ordonnancées et est représentée dans notre algorithme CABC en tant que source de nourriture 'X'. Cette source est un vecteur de $(n \times m)$ dimensions, chaque dimension représente une opération d'un job.

Les adaptations apportées pour chaque étape sont présentées comme suit :

4.1 Phase d'initialisation [8]

Dans cette phase, nous commençons par définir les paramètres de l'algorithme, tels que :

- CS : la taille de la colonie,
- $SN = CS/2$: le nombre de sources de nourriture qui est égal au nombre d'abeilles actives (employed bees), et égal au nombre d'abeilles spectatrices (onlooker bees),
- Limit: Le paramètre qui représente la valeur limite du nombre de fois qu'une solution soit mise à jour sans subir d'amélioration. C'est-à-dire, si par des mises à jour, on va essayer plusieurs fois d'améliorer la solution X_i et on n'y arrive pas au bout de 'Limit' tentatives, on l'abandonne et on la remplace dans la population de solutions par une nouvelle solution choisie au hasard pour créer de la diversification
- NI_max: Le nombre d'itérations maximal.
- Les paramètres du Job shop.

Ensuite, des solutions initiales sont générées aléatoirement. Bien que ces solutions soient construites en générant une suite aléatoire de nombres de jobs (selon la taille du JSP), elles seront toujours des solutions admissibles (ordonnancement réalisables). En effet, lorsque la « représentation basée sur les opérations » avec « répétition de job » est utilisée pour la représentation de solution, les contraintes de précédence sont toujours respectées. Sous sa version originale, l'algorithme ABC, cherche à trouver la solution qui maximise la fitness. Cependant, notre objectif est de résoudre le JSP avec une minimisation du Makespan (le C_{max}). Par conséquent, dans le CAB algorithm, la fitness sera calculée comme suit :

$$fit_i = \frac{1}{C_{max_i}} = \frac{1}{F(X_i)} \quad (2)$$

Où fit_i représente la valeur de la fitness de la source de nourriture X_i et $F(X_i)$ est la fonction objectif de la source de nourriture X_i ; (notée $C_{max}(X_i)$ ou C_{max_i}).

Dans l'algorithme CAB, une autre variable $trial_i$ est affectée à chaque source de nourriture (X_i). $trial_i$ est un compteur d'essais infructueux pour lesquels la source de nourriture (X_i) n'est pas améliorée après sa mise à jour. C'est un indicateur pour trouver des sources de nourriture (solutions) à abandonner dans les prochaines itérations après un nombre d'essais infructueux égale à Limit. Au début, tous les compteurs $trial_i$ ($i = 1, 2, \dots, SN$), sont initialement mis à zéro.

4.2 Étape 1 : La Phase des abeilles actives (Employed bees phase)

Dans cette phase, l'abeille active génère une nouvelle source de nourriture (V_i), en mettant à jour (updating) l'ancienne source de nourriture déjà exploitée (X_i). Le updating se fait le Position-based neighborhood avec un opérateur d'insertion (insert with forward shift). Après cela, on applique le principe de l'élitisme entre la nouvelle source de nourriture (V_i) et l'ancienne (X_i). Dans le cas où la mise à jour aurait amélioré (X_i), son compteur $trial_i$ est remis à '0'. Sinon, si l'abeille active ne change pas de source de nourriture (X_i), $trial_i$ est incrémenté de '1'.

L'abeille active va faire des essais de changement de position pour améliorer sa source de nourriture (X_i). Si à chaque fois elle n'arrive pas à l'améliorer et que le nombre de ces essais dépasse la valeur définie par 'Limit', ($trial_i \geq limit$), cette source de nourriture va être abandonnée et retirée de la population de solutions. L'abeille active qui exploitait la source (X_i) va devenir une abeille scoute qui va faire une recherche aléatoire et va trouver une nouvelle source de nourriture.

4.3 Étape 2 : La Phase des abeilles spectatrices (Onlooker bees phase)

Ordonnancement d'atelier Job-Shop par métaheuristique des Colonies d'abeilles- Etude de sensibilité.

Les abeilles actives partagent les informations qu'elles viennent de trouver sur les nouvelles solutions avec les abeilles spectatrices. Ces dernières utilisent la "roulette wheel selection" [Goldberg, 1989] pour faire la sélection des meilleures solutions suivant une probabilité (P_i) calculée par l'équation suivante :

$$P_i = \frac{fit_i}{\sum_{k=1}^{SN} fit_k} \quad (3)$$

Les solutions sélectionnées subiront une mise à jour comme à l'étape 1. Les compteurs $trial_i$ sont également mis à jour.

Dans le CABC, la phase des abeilles spectatrices fournit l'intensification de la recherche locale sur des solutions choisies relativement prometteuses. Cela signifie que seules les meilleures sources de nourriture proposées par les abeilles actives seront candidates à une mise à jour dans la phase des abeilles spectatrices.

4.4 Étape 4 : Phase des abeilles scouts (Scout bees phase)

Après avoir effectué les phases d'abeilles actives et spectatrices, certaines solutions qui n'ont pas été améliorées après de nombreux essais sont soit des solutions de très mauvaise qualité ou des solutions qui sont prises au piège des optima locaux. Dans les deux cas il faut les éviter. La phase des abeilles scouts est faite pour remédier à cette situation. En effet, si une source de nourriture (solution) ne peut pas être améliorée après un certain nombre d'essais, noté Limit, cette solution doit être abandonnée. L'abeille active associée à cette source de nourriture devient une abeille scoute. Cette abeille scoute va chercher aléatoirement une nouvelle source de nourriture et redevient encore une abeille active et leurs compteurs d'essais ($trial_i$) seront remis à zéro.

Le paramètre Limit joue un rôle très important dans l'algorithme CABC. Il permet d'assurer un équilibre entre l'exploration et l'exploitation. Une petite valeur du paramètre Limit favorise l'exploration par rapport à l'exploitation et l'inverse est vrai pour le cas où il prend une grande valeur. En effet, en remplaçant de temps en temps les mauvaises solutions dans une colonie (population), par de nouvelles, on assure une bonne diversification.

5 Expérimentation et analyse de sensibilité

Afin d'examiner l'efficacité de la version Combinatoire de l'algorithme des colonies d'abeilles (CABC), des simulations numériques sont effectuées sur de nombreuses instances de benchmarks de Job shop. Ces benchmarks sont disponibles en ligne sur la bibliothèque de recherche opérationnelle (OR-Library) [2]. On a considéré les instances de Lawrence, à savoir le : « La01-La05 » (10x5) ; « La06 » (15x5) et le « La11 » (20x5).

- Paramètres de simulation

La métaheuristique des colonies d'abeilles a l'avantage d'avoir très peu de paramètres à régler. A savoir : la taille de la population de solutions (SN) qui représente la moitié de la taille de la colonie (TC) ; le nombre d'itération maximal à faire (**NI_max**) et le paramètre Limit car il ajuste l'équilibre entre l'exploration et l'exploitation.

- Les indicateurs de performances [8]

Notre objectif est de faire une étude de sensibilité de l'algorithme CABC qui est une méthode itérative et stochastique, donc pour pouvoir juger sa qualité et sa robustesse, nous allons l'exécuter 10 fois sur chaque exemple d'instances et nous allons considérer les paramètres et les indicateurs de performances suivants :

- **Instance** : Représente le nom de l'instance testée.
- **Size** : la taille du problème. Exemple : l'instance de taille $(n \times m)$ correspond à un Job shop de n jobs m machines.
- **BKS** : Best Known Solution, la meilleure solution connue pour cette instance, elle peut être une valeur optimale ou une borne inférieure Jain et Meeran [1999].
- **Best_C_{max}** : La meilleure valeur de C_{max} relevée sur les 10 exécutions de l'algorithme.
- **Avg_C_{max}** : La moyenne calculée sur tous les C_{max} obtenus par les 10 exécutions.
- **RPE_{Best}** : Relative Percent Error, l'écart relatif entre la meilleure solution trouvée et la meilleure solution connue. C'est un pourcentage d'erreur calculé par l'équation (4). Lorsque **RPE_{Best}** = 0 pour une instance, cela signifie que sa solution optimale est obtenue.
- **RPE_{Avg}** : Relative Percent Error aussi, mais cette déviation représente l'écart relatif entre la moyenne des solutions trouvées et la meilleure solution connue calculé par l'équation (5). C'est un indicateur de robustesse. Si **RPE_{Avg}** = 0, ça veut dire que cette solution optimale est obtenue avec les 10 répétitions de simulation.
- **NIROS_{min}** : Minimal Number of Iteration to Reach Optimal Solution, le nombre minimal d'itérations pour atteindre la solution optimale. Ce paramètre nous donnera une idée sur la vitesse de convergence de l'algorithme.

$$RPE_{Best} = \frac{(Best_C_{max} - BKS)}{BKS} \times 100 \quad (4)$$

$$RPE_{Avg} = \frac{(Avg_C_{max} - BKS)}{BKS} \times 100 \quad (5)$$

- Étude de sensibilité par rapport à la taille de la colonie :
Pour les tests on a fixé le nombre d'itération maximal **NI_{max}** à 1000 et on a fait varier la taille de la colonie TC et par conséquent la taille de la population SN ($SN=TC/2$). Une estimation du temps de calcul moyen a été faite aussi.

A partir des résultats contenus dans le Tableau 1, on peut conclure que l'algorithme CABC s'avère efficace pour la résolution du problème NP-difficile du JSP. En effet, il permet d'avoir la solution connue optimale pour plusieurs instances considérées, et ce même pour de petites populations de solutions. Pour certaines instances telles que La01et La05, la solution optimale peut être trouvée à la première itération. Les instances La02 et La03 qui sont connues pour être plus dures nécessitent un peu plus de temps de calcul mais on finit par avoir la solution optimale.

Instance	Size	BKS	SN	RPE_{Best} (%)	RPE_{Avg} (%)	$NIROS_m$	$NIROS_{Avr}$	Avg Time
La01	10x5	666	50	0	3.3556	5	9.6	1.077 s
			100	0	2.8281	3	7.8	1.595 s
			500	0	1.7863	2	3.8	4.293 s
			1000	0	1.4975	1	2.7	6.107 s
La02	10x5	655	50	0	3.3755	84	908.4	1.754 min
			100	0	2.2364	579	957.9	4.178 min
			500	0	1.2618	21	123	2.84 min
			1000	0	0.9523	570	705	7.562 min
La03	10x5	597	50	3.4387	4.7113	-	-	1.313 min
			100	2.4162	3.8665	-	-	2.807 min
			500	1.6429	3.0529	-	-	30.057 min
			1000	0	2.3529	920	992	84.902 min
La04	10x5	590	50	1.4888	3.0054	-	-	1.312 min
			100	0.2880	2.3504	-	-	2.870 min
			500	0	1.3158	52	665	17.437 min
			1000	0	0.8541	90	586	28.645 min
La05	10x5	593	50	0	0.4975	1	1.5	0.140 s
			100	0	0.2192	1	1.3	0.299 s
			500	0	0	1	1	0.804 s
			1000	0	0	1	1	1.591 s
La06	15x5	926	50	0	2.4099	2	4.3	0.448 s
			100	0	1.3931	2	4.1	0.741 s
			500	0	1.0511	2	2.7	1.761 s
			1000	0	0.5562	1	2.1	2.763 s
La11	20x5	1222	50	0	2.5468	4	8.1	0.897 s
			100	0	2.1026	3	5.9	1.285 s
			500	0	1.3446	3	4.4	4.568 s
			1000	0	1.2095	2	3.4	6.801 s

Tableau 1 : les résultats de simulation de l'algorithme CABG différentes instances.

- Étude de sensibilité par rapport au paramètre *Limit* :

Cette étude va se faire sur l'instance La02, pour SN=500, $NI_max=1000$

Instance	Size	BKS	Limit	RPE_{Best} (%)	RPE_{Avg} (%)	$NIROS_{min}$	$NIROS_{Avr}$	Avg Time (minute)
La02	10x5	655	20	0.1527	1.1360	76	497.1	12.77
			50	0	1.3737	37	214	5.22
			500	0	0.8122	23	188,7	3.53
			2000	0	1.2618	21	123	2.84
			5000	0	0.8445	55	217	4.8

Tableau 2 : étude de sensibilité par rapport au paramètre 'Limit'

On remarque que lorsqu'on augmente la valeur de 'Limit', on assure mieux l'obtention de la solution optimale et même le programme converge plus rapidement. En effet, plus la valeur de 'Limit'

augmente, plus on insiste sur l'exploration. Cependant, il ne faut pas que ça soit trop élevé pour assurer une meilleure diversification aussi. On choisira alors de prendre : $Limit=2 * NI_{max}$.

6 Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'adaptation d'une métaheuristique pour résoudre le problème d'ordonnancement de job-shop (le JSP). C'est une métaheuristique à population de solutions. Elle est inspirée du comportement naturel des abeilles et nous l'avons formulée par le Combinatorial Artificial Bee Colony (CABC) algorithm. Cette métaheuristique nécessite peu de paramètres de réglage, mais il est toujours important de faire une étude de sensibilité pour avoir le bon ajustement de leurs valeurs.

L'algorithme CABC, dans lequel les abeilles représentent les agents de calcul, l'exploitation est assurée par les abeilles actives et spectatrices alors que l'exploration est faite par les abeilles scoutes. Ce mécanisme, régit par la valeur du paramètre *Limit*, lui permet d'avoir la possibilité d'équilibrer entre l'exploitation locale et l'exploration globale. Sur la base de cet avantage, l'algorithme CABC sera en mesure de sortir d'un point d'optimum local dans l'espace de recherche et de trouver le meilleur optimum global. Il a aussi l'avantage de converger très rapidement vers la solution.

Références

- [1] Basturk, B. and Karaboga, D.: An artificial bee colony (ABC) algorithm for numeric function optimization, in: IEEE Swarm Intelligence Symposium, Indianapolis, IN, USA, (2006).
- [2] Beasley, J. E.: Or-library: distributing test problems by electronic mail. J. Oper. Res. Soc.14, pp1069–1072, (1990).
- [3] Garey, M.R. and Johnson, M.R.: Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness, San Francisco: Freeman, (1979).
- [4] Jain, A.S. and Meeran, S.: Deterministic job-shop scheduling: Past, present and future. Eur. J. Oper. Res. 113, pp 390–434, (1999).
- [5] Karaboga, D.: An idea based on honey beeswarm for numerical optimisation, a technical report-TR06. Engineering faculty, Computer Engineering Departement, Erciyes
- [6] Karaboga, D., Gorkemli, B., Ozturk, C. and Karaboga, N.: A comprehensive survey: artificial bee colony (ABC) algorithm and applications. Artif Intell Rev, (2012).
- [7] Çalis, B. and Bulkan, S.: A research survey: review of AI solution strategies of job shop scheduling problem". J Intell Manuf vol. 26, pp. 961–973, (2015).
- [8] Ouis Khedim, A. : Métaheuristique à base de colonies d'abeilles pour l'ordonnancement des ateliers de type Job shop ", Thèse de Doctorat, Université de Tlemcen, (2020).
- [9] Ouis Khedim, A., Souier, M. and Sari, Z.: Combinatorial artificial bee colony algorithm hybridised with a new release of iterated local search for job shop scheduling problem, forthcoming in Int. J. Operational Research, (2022).



Optimisation des dimensions de l'AS/RS à racks glissant en utilisant l'algorithme génétique

FANDI Wahiba ^{1*}, KOULOUGHLI Sihem ², and GHOMRI Latéfa³

¹Manufacturing Engineering Laboratory Tlemcen, Algeria,

wahiba.fandi@univ-tlemcen.dz

²Manufacturing Engineering Laboratory Tlemcen, Algeria,

kouloughli_sihem@yahoo.

³Manufacturing Engineering Laboratory Tlemcen, Algeria,

latefa.ghomri@univ-tlemcen.dz

Abstract Dans ce travail, nous nous intéressons à l'optimisation du temps de cycle de la machine de stockage/déstockage afin de trouver les dimensions optimales d'un système de stockage et déstockage à rack glissant. Ce type de système est une variation d'un système de stockage et déstockage de type multi allées. Il permet un gain considérable dans l'espace de stockage grâce à sa structure qui est composée d'un ensemble de racks disposés en parallèles et d'une seule machine de stockage et déstockage.

La particularité de ce système est que les allées de service n'apparaissent que lorsqu'une opération de stockage ou déstockage est prévue dans les racks correspondants. Les racks coulisent de manière à libérer un espace entre deux casiers mitoyens et permettra à la machine de stockage et déstockage d'accéder au rack désiré.

Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme génétique pour trouver les dimensions temporelles optimales d'un système de stockage et déstockage à rack glissant qui sont le temps de déplacements dans le sens horizontal, le temps de déplacement dans le sens vertical et le temps de déplacement de la première à la dernière allée pour n'importe quelle valeur donnée du paramètre de temps de glissement des racks.

Keywords : AS/RS à racks glissant, machine S/R, optimisation, algorithme génétique, temps de cycle, optimisation des dimensions.

1 Introduction

Les systèmes automatisés de stockage et déstockage (AS/RS) ont évolué en plusieurs branches, et chaque branche a donné lieu à de nombreuses recherches : sur les méthodologies de conception et de configuration des systèmes ainsi que sur les stratégies de contrôle opérationnel. L'objectif principal de ces nombreux travaux de recherches est de minimiser le temps de cycle moyen de la machine déstockage et de stockage (machine S/R) afin d'améliorer le débit de système. Ce dernier est considéré comme le plus important mesure de performance.

L'un des premiers travaux s'intéressant à la modélisation et à l'optimisation du temps de cycle a été réalisé par Bozer et al [1] où ils ont développé des modèles analytiques des temps de simple et double cycle d'un AS/RS à charge unitaire. Ils ont ensuite optimisé les dimensions de ce système.

Ghomri et al [2] ont développé un modèle mathématique pour le temps de cycle d'un AS/RS multi allées. Dans ce travail, les auteurs ont approximé tout le système par un parallélépipède continu. Kouloughli et al [3] ont optimisé les dimensions de ce système pour un temps de simple et double cycle. Guezzen et al [4] ont modélisé l'expression analytique continue du temps moyen de simple cycle pour un AS/RS à racks glissants. Ils ont ensuite fait une comparaison entre le modèle continu développé, le modèle discret exact et un modèle de simulation du système étudié.

* Corresponding Author:

Un autre travail de Kouloughli et al [5] dans lequel ils ont fait une simulation numérique pour trouver les dimensions optimales de l'AS/RS à racks glissant pour un temps de simple cycle. Hamzaoui et al [6] ont déterminé les dimensions optimales d'un AS/RS avec un convoyeur gravitationnel en U et une seule machine S/R en utilisant une technique de comptage. Fandi et al [7] se sont intéressés au temps multi cycles de la machine S/R où ils ont déterminé les dimensions optimales de l'AS/RS multi allées en utilisant l'algorithme génétique. Bensnoussi et al [8] ont utilisé des algorithmes de recherche tabou et le recuit simulé pour minimiser le temps de cycle d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'optimisation du temps de cycle de l'AS/RS à rack glissant en appliquant l'algorithme génétique.

2 Notations et hypothèses

Avant d'entamer notre étude, nous allons définir les différents termes que nous utiliserons pour la présentation des modèles.

2.1 Notations

- M : nombre de racks dans un AS/RS à rack glissant.
 N : nombre total de casiers.
 t_h : temps de déplacement horizontal du premier casier au dernier d'un rack.
 t_v : temps de déplacement vertical du premier casier au dernier d'un rack.
 t_r : temps nécessaire pour l'ouverture d'une allée (ou le temps de glissement des racks).
 t_p : temps de déplacement de la première à la dernière allée.
 $E(SC)$: temps moyen de simple cycle.

2.2 Hypothèses

- L'AS/RS est composé de M racks, $M/2$ allées et N casiers avec $N=M$. N_L . N_H .
- Il existe entre le point de dépôt/Livraison et la première allée une distance horizontale correspondant à la distance entre deux allées.
- La machine S/R se déplace simultanément dans les directions verticale et horizontale, c'est ce qu'on appelle le déplacement de Tchebychev.
- La probabilité d'accès à n'importe quel casier du système est la même. Et la méthodologie de stockage utilisée est aléatoire.
- La station de dépôt et de livraison D/L est située dans le coin inférieur gauche du rack.

3 Description de l'AS/RS a racks glissant

L'AS/RS à racks glissant est un cas particulier de l'AS/RS multi allée .Il est composée d'un ensemble de racks disposés en parallèle et d'une seule machine de stockage et déstockage. La particularité de ce système est que les allées de service n'apparaissent que lorsqu'une opération de stockage ou déstockage est prévue dans les racks correspondants. Les racks coulissent de manière à libérer un espace entre deux casiers mitoyens et permettra à la machine S/R d'accéder au rack désiré.

Ce type de système permet un gain considérable dans l'espace de stockage grâce à sa structure qui permet d'optimiser l'utilisation de l'espace en réduisant au minimum le nombre d'allées de service. De plus de son cout réduit par rapport à d'autres types de système grâce à l'utilisation d'une seule machine S/R.

Dans l'état initial, il existe une seule allée de service (allée aléatoire), la machine S/R se trouve toujours à la station dépôt\livraison (D\L). Cette machine se déplace suivant trois axes : verticalement, le long des colonnes formants les racks, horizontalement, le long des allées de desserte et transversalement, le long de l'allée commune a l'état initial. À la fin de chaque cycle, la machine S/R revient à la position initiale.

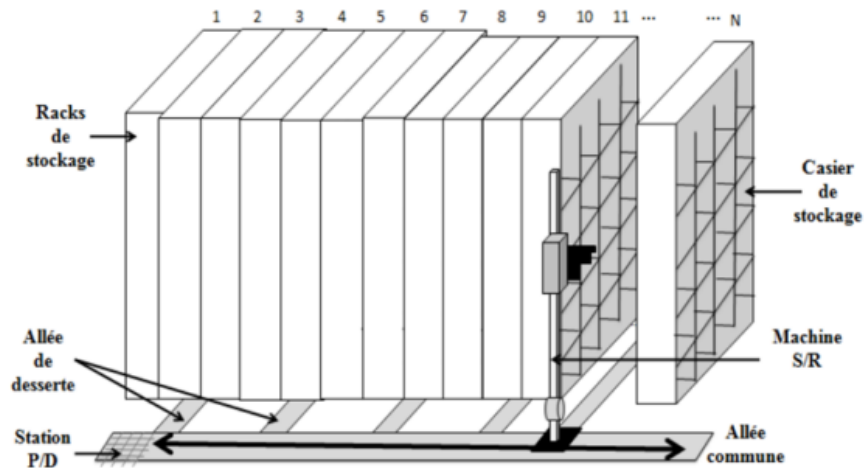


Figure 1. L'AS/RS à racks glissant

4 Fonctionnement de l'AS/RS à racks glissant

Dans un simple cycle la machine S/R réalise soit un stockage soit un déstockage. Dans un double cycle, elle réalise un stockage suivi d'un déstockage.

A l'état initial la machine S/R se trouve dans la station de D/L où il y a une seule allée de service, pour une opération de stockage elle se déplace simultanément dans le sens horizontal et dans le sens vertical (déplacement de Chebyshev) jusqu'à le casier de stockage au même temps l'allée correspondante au casier de stockage s'ouvre pour que la machine peut atteindre le casier prévu pour stocker le produit.

Pour une opération de déstockage, la machine S/R se déplace vers le casier où se trouve le produit à déstocker, dès que ce déplacement commence, les racks glissent pour ouvrir l'allée permettant à la machine S/R d'arriver au casier de déstockage, celle-ci récupère le produit à déstocker pour revenir ensuite, à la station D/L.

5 Modèle continu du temps moyen de simple cycle de l'AS/RS à rack glissant

Le temps de simple cycle de l'AS/RS à racks glissants $E(SC)$ comprend : le temps de déplacement de la station dépôt/livraison vers le casier de stockage/déstockage et le temps pour retourner vers la station de dépôt/livraison. Il est décomposé en un ensemble de temps de déplacement de distributions uniformes. A partir de ces distributions, Guezzen et al.[4] ont calculé la distribution du temps de simple cycle global. L'espérance mathématique de cette distribution leur a donné le temps de simple cycle moyen $E(SC)$ pour l'AS/RS à racks glissants.

$E(SC)=$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{1}{2}t_h + t_r & t_p < t_r \text{ et } t_v \leq t_r \\
 \frac{1}{6t_h t_v} (3t_h^2 t_v + 6t_h t_r t_v - t_r^3 + 3t_r^2 t_v - 3t_r t_v^2 + t_v^3) & t_p < t_r \text{ et } t_v > t_r \\
 & \text{et } t_v \leq t_r + t_h \\
 \frac{1}{6t_v} (t_h^2 + 3t_h t_r + 3t_r^2 + 3t_v^2) & t_p < t_r \text{ et } \\
 & t_r + t_h < t_v \\
 \frac{1}{2t_p} (t_p t_h + t_p^2 + t_r^2) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_v \leq t_r \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_r^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_r < t_v \text{ et } t_v \leq t_r + t_h \\
 -\frac{1}{24t_p t_v} (t_h^3 - 4t_h^2 t_v - 12t_p t_h t_v - 6t_h t_r^2 + 6t_h t_r^2 - 12t_p^2 t_v - 8t_r^3 - 4t_v^3) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_v \leq t_p \text{ et } t_r + t_h < t_v \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v - 6t_h^2 t_r^2 + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 8t_h t_r^3 \\
 - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_p < t_v \text{ et } \\
 & t_v \leq t_p + t_h \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 3t_h t_r^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2 + 4t_v^3) & t_r \leq t_p \text{ et } t_h < t_p - t_r \\
 & \text{et } t_p + t_h < t_v \\
 \frac{1}{2t_p} (t_h t_p + t_p^2 + t_r^2) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_v \leq t_r \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_r^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - 3t_r^4 + 8t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_r < t_v \text{ et } t_v \leq t_p \\
 \frac{1}{24t_p t_h t_v} (12t_h^2 t_p t_v + 12t_h t_r^2 t_v + 12t_h t_r^2 t_v - t_r^4 + 4t_r^3 t_v - 6t_r^2 t_v^2 \\
 + 4t_p t_v^3 - 3t_v^4 + 8t_p^2 t_v - 6t_p^2 t_v^2) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_p < t_v \text{ et } t_v \leq t_r + t_h \\
 \frac{-1}{24t_p t_h t_v} (t_h^4 - 4t_h^3 t_v - 12t_h^2 t_p t_v - 6t_h^2 t_r^2 + 6t_h^2 t_v^2 - 12t_h t_p^2 t_v - 8t_h t_r^3 \\
 - 4t_h t_v^3 + t_p^4 - 4t_p^3 t_v + 6t_p^2 t_v^2 - 4t_p t_v^3 + t_v^4) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \text{ et } \\
 & t_r + t_h < t_v \text{ et } \\
 & t_v \leq t_p + t_h \\
 \frac{1}{12t_p t_v} (2t_h^2 t_p + 3t_h t_p^2 + 3t_h t_r^2 + 2t_p^3 + 6t_p t_v^2 + 4t_v^3) & t_r \leq t_p \text{ et } t_p - t_r \leq t_h \\
 & \text{et } t_p + t_h < t_v
 \end{array} \right. \quad (1)$$

La lourdeur des équations de temps de simple cycle rend le calcul analytique exact difficile. C'est pourquoi nous utilisons un algorithme génétique pour déterminer les dimensions optimales du système AS/RS à rack glissant.

6 Optimisation du temps de cycle de l'AS/RS à racks glissant

Le but de ce travail est de trouver les dimensions optimales t_p ; t_v et t_h de l'AS/RS à racks glissant cela en minimisant le temps de simple cycle $E(SC)$ en appliquant l'algorithme génétique.

Dans notre problème d'optimisation, on a deux types de contraintes :

$$t_p > 0, t_h > 0, t_v > 0$$

t_p ; t_v ; et t_h sont des variables représentant des temps. Elles sont positives et différentes de zéro.

$$t_p \times t_h \times t_v = \text{constant}$$

Le nombre total de casiers est constant. Ainsi le temps de glissement des racks t_r est un paramètre donné qui prend des valeurs réelles positives.

Le programme manipule aléatoirement une population initiale de solutions (ensemble de chromosomes) de taille 20. Chaque chromosome contient des gènes t_p et t_h choisis aléatoirement dans l'intervalle [0,3]

Nous avons varié le paramètre t_r de 0 à 8 pour voir son impact par rapport au temps de cycle. Ainsi nous avons fixé le nombre de générations à 1000. Une fonction fitness $E(SC)$ minimal est maintenue pour chaque nouvelle génération. Ensuite une nouvelle population de solutions est créée à l'aide d'opérateurs évolutionnaires simples : La sélection, le croisement et la mutation.

6.1. Sélection

50% des chromosomes ayant un temps de cycle $E(SC)$ les plus faibles ont été choisis comme population pour la nouvelle génération. Notons également que la sélection des chromosomes parents a été effectuée selon la procédure de sélection par la roulette.

6.2. Croisement

Une nouvelle population est créée à partir des parents sélectionnés en utilisant des opérateurs de croisement. Le chromosome parent qui est censé s'accoupler est sélectionné de manière aléatoire, et le nombre de chromosomes accouplés est vérifié à l'aide du paramètre de taux de croisement (pc), est défini comme étant $pc = 80\%$.

6.3. Mutation

Le nombre de chromosomes qui présentent des mutations dans une population est déterminé par le paramètre du taux de mutation (pm). Ce dernier a été fixé à 10 %, ce qui signifie que 10 % du nombre total de gènes de la population devraient subir une mutation. Ensuite, le gène sélectionné (t_p ou t_h) est remplacé par une valeur choisie aléatoirement dans l'intervalle $[0,3]$.

Ce même processus est répété pour les 1000 générations afin d'obtenir le meilleur chromosome. Les résultats trouvés sont résumés et discutés dans la section suivante.

7 Résultats et discussions

Le tableau 1 récapitule les dimensions temporelles optimales t_p, t_h et t_v ainsi que leurs temps de cycle minimums obtenus en appliquant l'algorithme génétique pour des valeurs de t_r variant de 0 à 8.

t_r	t_p	t_h	t_v	$E(SC)$
0	0.8785	0.8761	1.2993	1.9868
0.1	0.8737	0.8775	1.3042	1.989
0.2	0.8811	0.8648	1.3124	1.9967
0.3	0.898	0.8516	1.3077	2.0113
0.4	0.9113	0.8334	1.3168	2.0339
0.5	0.9336	0.8065	1.328	2.0654
0,6	0.963	0.7721	1.345	2.1063
0.7	0.9928	0.7385	1.3639	2.1566
0,8	1.0359	0.7011	1.377	2.2161
0.9	1.0796	0.6668	1.3892	2.2845
1	1.1211	0.6306	1.4145	2.3612
1.1	1.1694	0.5939	1.4398	2.4457
1.2	1.2148	0.5658	1.455	2.5372
1.3	1.2348	0.5482	1.4773	2.634
1.4	1.2334	0.5425	1.4946	2.7328
1.5	1.2326	0.5403	1.5204	2.8326
1.6	1.2273	0.5429	1.5009	2.9326
1.7	1.2367	0.5362	1.5079	3.0326
1.8	1.2347	0.5447	1.4868	3.1327
1.9	1.2299	0.5444	1.4936	3.2327
2	1.2282	0.5421	1.502	3.3326
3	1.2345	0.5381	1.5055	4.3326
4	1.2358	0.5368	1.5075	5.3326
5	1.2299	0.5395	1.507	6.3326
6	1.2364	0.5385	1.5021	7.3326
7	1.2325	0.5442	1.4908	8.3327
8	1.2343	0.5394	1.502	9.3326

Tableau1. Les dimensions optimales t_p, t_h, t_v et leurs temps de cycle minimal

Optimisation des dimensions de l'AS/RS à racks glissant en utilisant l'algorithme génétique

Les résultats montrent qu'après $t_r = 1.3$, les dimensions optimales sont presque constantes. Notons que $t_h \in [0.5403, 0.5394]$, $t_p \in [1.2326, 1.2343]$ et $t_v \in [1.5204, 1.502]$.

Les résultats obtenus dans le présent travail sont en accord avec ceux trouvés par Kouloughli et al [5] pour un temps de simple cycle.

Enfin, les dimensions optimales t_p , t_h et t_v en fonction du paramètre sont tracées dans la figure

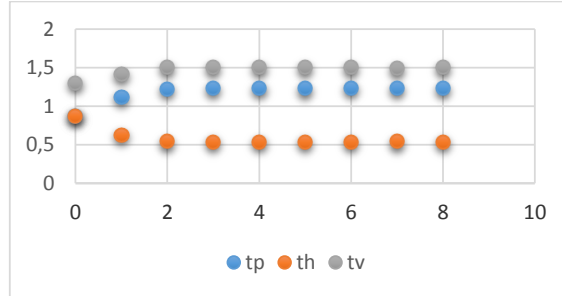


Figure 2 : les dimensions optimales t_p , t_h , t_v en fonction de t_r

La figure montre l'évolution des dimensions t_p , t_h et t_v en fonction du paramètre t_r .

Pour $t_r \in [0; 1.3]$: nous remarquons que en augmentant le paramètre t_r , les dimensions de t_p et t_v augmentent alors que celles de t_h diminuent.

Pour $t_r \in [1.3; 8]$ les trois dimensions restent quasiment inchangées ($t_h \in [0.5403, 0.5394]$, $t_p \in [1.2326, 1.2343]$ et $t_v \in [1.5204, 1.502]$).

8 Conclusion

Dans ce travail, nous avons déterminé les dimensions optimales t_p , t_h , t_v de l'AS/RS à racks glissant pour un temps de simple cycle. Cela en variant le paramètre t_r et en considérant les deux contraintes. La première est liée à la positivité des temps de déplacements et la deuxième à la constance de la taille du système.

Les résultats trouvés par l'algorithme génétique permettent une flexibilité lors du choix des dimensions pour la conception d'un AS/RS à rack glissant.

Comme perspective nous allons augmenter le nombre d'opérations de la machine S/R pour trouver les dimensions optimales t_p , t_h , t_v pour un temps de double cycle et multi cycles pour n'importe quelle valeur de t_r .

References

- [1]. BOZER, Yavuz A. et WHITE, John A. Travel-time models for automated storage/retrieval systems. IIE transactions, 1984, vol. 16, no 4, p. 329-338..
- [2]. GHOMRI, Latefa, SARI, Zaki, GUEZZEN, Amine Hakim, et al. Expression Analytique Du Temps de Cycle Pour Les AS/RS Multi-alées. In : Actes de La 7e Conférence Internationale de Modélisation et Simulation. 2008. p. 333-340.
- [3]. Kouloughli, S., Sari, Z.: Multi-aisle as/rs dimensions optimization for cycle time minimization. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 79(1-4), 675-692 (2015)
- [4]. GUEZZEN, Amine Hakim, SARI, Zaki, CASTAGNA, Pierre, et al. Travel time modeling and simulation of a mobile racks automated storage/retrieval system. International Journal of Engineering and Technology, 2013, vol. 5, no 3, p. 420.
- [5]. KOULOUGHLI, Sihem, KORSO FECIANE, Malika, et SARI, Zaki. Mobile rack AS/RS dimensions optimization for single cycle time minimization. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2022, p. 1-22.
- [6]. Hamzaoui, M.A., Sari, Z.: Optimal dimensions minimizing expected travel time of a single machine flow rack as/rs. Mechatronics 31, 158-168 (2015)
- [7]. FANDI, Wahiba, KOULOUGHLI, Sihem, et GHOMRI, Latefa. Multi-shuttle AS/RS dimensions optimization using a genetic algorithm—case of the multi-aisle configuration. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2022, vol. 120, no 1, p. 1219-1236.
- [8]. Bessenouci, H.N., Sari, Z., Ghomri, L.: Metaheuristic based control of a flow rack automated storage and retrieval system. Journal of Intelligent Manufacturing 23(4), 1157-1166 (2012)



Variabilité de la rente et incitations à la réforme dans un cadre non-démocratique : Une analyse théorique

Abdelhakim Lounaci^{1*}, and Saïd Souam²

¹Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement, Algérie,
lounaci.abdelhakim@gmail.com

²EconomiX, UPL, CNRS, Université Paris Nanterre, CREST, France,
Saïd.Souam@ensae.fr

Résumé La réforme se définit comme étant un changement profond réalisé en vue d'une amélioration. A ce titre, de nombreux pays et organisations internationales tentent de promouvoir différents types de réformes qu'ils espèrent en mesure d'accélérer la croissance économique et d'améliorer les conditions de vie des populations. Cependant, mettre en œuvre une réforme s'avère, en pratique, souvent une tâche très délicate. Outre le fait que les décideurs politiques sont souvent rarement enthousiastes au sujet des réformes notamment à cause du coût qu'elles engendrent, celles-ci rencontrent, lorsqu'elles sont mises en œuvre, de nombreuses difficultés politiques, techniques, etc. Ainsi, alors que certains pays engagent rapidement les réformes nécessaires, d'autres maintiennent un statu quo. Par ailleurs, certaines réformes réussissent lorsqu'elles sont mises en œuvre tandis que d'autres échouent complètement. Le présent travail se veut une contribution au débat sur les conditions favorables à l'émergence des réformes dans les pays caractérisés par un manque de démocratisation. Il s'intéresse, d'une part, à l'étude des incitations à la réforme en analysant, à travers la mobilisation des outils de la théorie des jeux, une situation dans laquelle une élite autoritaire au pouvoir se trouve confrontée au choix de mettre en œuvre une réforme ou maintenir un statu quo. D'autre part, il analyse l'impact de la variabilité de la rente sur les incitations d'un régime autoritaire à réformer.

Mots clés : Economie politique ; théorie des jeux ; réformes ; statu quo ; incitations ; ressources naturelles ; régime autoritaire

1 Introduction

L'un des débats les plus controversés en économie politique concerne l'impact de la nature du régime politique sur la conduite des réformes, et plus généralement, sur la performance économique. En effet, suite à la vague mondiale de libéralisation politique et de démocratisation des années 1970, de nombreuses études ont examiné la capacité relative des gouvernements à introduire des réformes [4, 5, 6, 8, 9, 11]. Une partie de cette littérature soutient que les régimes autoritaires réussissent souvent à mieux engager des réformes que les régimes démocratiques. Cela s'explique, d'une part, par la faiblesse des institutions démocratiques, notamment dans les pays en

* Corresponding Author

développement où les groupes à la recherche de rente ont souvent une grande influence¹. D'autre part, les régimes démocratiques se caractérisent généralement par des horizons temporels plus courts (en comparaison avec les régimes autoritaires). Ainsi, à cause de la durée de leur mandat politique, il est souvent difficile pour eux d'entreprendre des politiques de long terme². Les régimes autoritaires pourraient, en revanche, trouver plus facile l'adoption de ce type de politiques parce qu'ils sont épargnés par les contraintes électorales³.

Une autre partie de la littérature soutient, a contrario, que les régimes démocratiques sont plus enclins à mettre en œuvre des réformes. Selon ces travaux, la démocratie permet aux gouvernements de résoudre les problèmes de coopération (entre les différents acteurs) et atteindre ainsi un consensus primordial à la mise en œuvre des politiques adéquates. Cette littérature soulève également quelques insuffisances dans les travaux précédents. En effet, ces derniers supposent un leadership éclairé au sein des régimes autoritaires, ce qui n'est souvent pas le cas. Ils supposent également que ces derniers sont à l'abri des pressions des groupes d'intérêts, ce qui n'est pas, non plus, tout le temps vérifié. Cette littérature explique, qu'au contraire, les régimes autoritaires sont, en pratique, rarement enthousiastes au sujet des réformes, notamment les réformes économiques, car la mise en œuvre de celles-ci conduirait à réduire l'intervention de l'État dans les activités économiques, chose qu'un gouvernement autoritaire est rarement prêt à accepter.

Il existe également des travaux qui ont voulu dépasser la simple distinction faite entre les deux types de régimes politiques [7]. Ces derniers se sont intéressés aux processus de transitions (de l'autocratie vers la démocratie et vice-versa). En se basant sur le modèle d'Acemoglu et Robinson [1], Dunning [2] développe deux modèles théoriques. Le premier, intitulé « coup d'État contre la démocratie » se focalise sur le moment où les élites, dans un État démocratique rentier, trouvent les risques d'une mise en œuvre d'un coup d'État plus intéressants. Le deuxième modèle, intitulé « modèle de la démocratisation », étudie la façon dont les élites, dans un pays autoritaire rentier, sont susceptibles de répondre à la menace d'un changement révolutionnaire par une répression, une politique modérée ou une démocratisation. L'objet des deux modèles est la détermination des conditions sous lesquelles l'effet autoritaire et l'effet démocratique de la richesse en ressources peut être plus important.

En se référant principalement au travail théorique de Lounaci et Souam [10], qui analyse les incitations à la réforme dans un cadre démocratique, ainsi qu'au travail de Dunning [2], nous proposons, dans le présent article, un cadre théorique simple d'économie politique qui va nous permettre d'analyser les incitations à la réforme dans un cadre non-démocratique. Plus précisément, nous analysons, l'impact de la variabilité des dotations en ressources naturelles sur les incitations du régime autoritaire à mettre en œuvre une réforme ou maintenir un statu quo.

2 Analyse de l'impact de la variabilité des dotations en ressources naturelles sur les incitations à la réforme

Nous étudions, dans ce qui suit, un jeu dans lequel une élite autoritaire au pouvoir peut décider de mettre en œuvre une réforme ou maintenir un statu quo lorsqu'il existe une variabilité dans le niveau des dotations initiales, noté Z . Il s'agit donc d'analyser l'impact de la variabilité des dotations (en ressources naturelles) sur les choix des différents acteurs dans un cadre non-démocratique.

Présentation du jeu

Présentation des joueurs

Nous supposons que la société est constituée de deux groupes dont les décisions sont prises, au nom du groupe, par un agent représentatif. Les deux groupes en question sont : Une élite

¹ Ces derniers peuvent bloquer les réformes qui ne leur conviennent pas et/ou soutenir des réformes inefficaces qui leur sont favorables. Les dirigeants autoritaires, en revanche, font habituellement face à moins de pression, car ils se caractérisent globalement pas une meilleure capacité à dominer les groupes d'intérêt.

² En effet, la mise en œuvre de ce type de politiques peut non seulement leur coûter leur place (à cause des coûts immédiats élevés), et, pire encore, profiter à d'autres élites qui viennent après eux. A cet effet, un régime qui sait qu'il sera confronté de nouveau aux électeurs (à la fin de son mandat) sera fortement tenté de mettre en place des politiques de court terme même si celles-ci s'avèrent parfois inefficaces ou vouées à l'échec à long terme.

³ Selon Haggard et Webb (1993, p. 145), « L'hypothèse selon laquelle les régimes autoritaires font mieux n'est pas sans appui empirique, les expériences des pays d'Amérique Latine et d'Asie de l'Est sont souvent citées comme exemples ».

autoritaire au pouvoir, avec une proportion $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Elle désigne la minorité de ceux qui dirigent et le peuple avec une proportion $(1 - \alpha)$.

Notons qu'en cas de révolution, c'est le peuple qui prend le pouvoir. Dans ce cas de figure, on peut considérer que le régime politique devient démocratique.

Stratégies des joueurs

Stratégies de l'élite autoritaire

L'élite autoritaire au pouvoir (en première période) peut décider de mettre en œuvre une réforme ou maintenir un statu quo. Elle applique également un taux d'appropriation du surplus (exogène), noté ρ , dans chacune des deux situations (réforme ou statu quo).

Choix du niveau de la réforme

L'élite autoritaire en place choisit son niveau de réforme, $Q_A > 0$, à mettre en œuvre.

Les coûts de la réforme et du statu quo : Nous supposons que la mise en œuvre d'une réforme ainsi que le statu quo engendrent des coûts, qui seront supportés par l'élite au pouvoir ainsi que par le peuple. Ils sont déclinés de la manière suivante :

Le coût social de la réforme, noté $C(Q_A)$, dépend du niveau de celle-ci⁴. Il peut être scindé en deux comme suit : Une proportion $\alpha C(Q_A)$ supportée par l'élite autoritaire ; Une proportion $(1 - \alpha) C(Q_A)$ supportée par le peuple.

En l'absence de réforme, l'élite autoritaire et le peuple subissent (respectivement) des coûts de statu quo⁵ \bar{C}_A et \bar{C}_P .

La probabilité de succès de la réforme : Nous supposons, pour des raisons de simplicité des calculs, que lorsqu'une réforme est mise en œuvre, sa probabilité de réussite est égale à 1.

Le taux d'appropriation du surplus

Nous considérons, dans ce modèle, que le taux d'appropriation du surplus, $\rho \in [0,1]$, est déterminé de façon exogène. Ainsi, nous supposons que l'élite autoritaire se caractérise par un taux d'appropriation $\rho_A > \alpha$, quelle que soit la politique qu'elle choisit (réforme ou statu quo). En revanche, l'élite démocratique (en cas de révolution) se caractérise par un taux d'appropriation $\rho_D = (1 - \alpha)$.

Stratégies du peuple

Le peuple décide de se révolter (ou non) contre l'élite autoritaire afin de prendre le pouvoir. En cas de révolution, il choisit le niveau de réforme (Q_D) à mettre en œuvre, lorsque l'élite autoritaire maintient un statu quo en première période. Il inflige également une punition⁶, $\psi > 0$, à l'ancienne élite autoritaire et applique un taux d'appropriation $\rho_D = (1 - \alpha)$.

Décision de révolution

Nous supposons que lorsque le peuple décide de se révolter, il subit un coût (de révolution) μ . μ est une variable aléatoire de support $[\mu_L, \mu_H]$, distribuée selon une loi de probabilité caractérisée par une fonction de répartition $F_X(\mu)$ ⁶. μ_L désigne un coût de révolution faible tandis que μ_H désigne un coût de révolution élevé⁷.

Décision de réforme en cas de révolution

Le peuple décide de mettre en œuvre une réforme en deuxième période ($Q_D > 0$) uniquement lorsque l'élite autoritaire en première période maintient un statu quo. Autrement dit, en cas de réforme de la part de l'élite autoritaire (en première période), il n'est plus nécessaire pour la nouvelle élite démocratique (en l'occurrence, le peuple) de réformer à nouveau.

Les dotations initiales

⁴ Nous supposons que $C(\cdot)$ est une fonction croissante et strictement convexe sur \mathbb{R}^+ . Pour des raisons de facilitation des calculs, nous considérons une fonction quadratique : $C(Q_A) = \frac{1}{2}(Q_A)^2$.

⁵ Il d'agit là d'un coût d'opportunité ; coût de non mise en œuvre de politiques susceptibles d'améliorer la situation des agents.

⁶ $F_X(\mu) = \text{Prob}(X \leq \mu)$.

⁷ Nous supposons que μ_H est suffisamment élevé de telle sorte qu'il dissuade le peuple de se révolter. Autrement dit, lorsque le coût de révolution se révèle de type H, le peuple n'aura aucune incitation à se révolter.

Variabilité de la rente et incitations à la réforme dans les pays non-démocratiques

Nous supposons, dans ce modèle, que la dotation initiale (\tilde{Z}) peut être de deux types. Ainsi, avec une probabilité $p = \frac{1}{2}$, le niveau des dotations initiales serait⁸ $\tilde{Z} = Z + m$, tel que $m > 0$, et avec une probabilité complémentaire $(1 - p) = \frac{1}{2}$, $\tilde{Z} = Z - m$.

Le niveau de volatilité de \tilde{Z} dépend donc de m . Autrement dit, plus le paramètre m est grand, plus le niveau des dotations initiales \tilde{Z} est volatile.

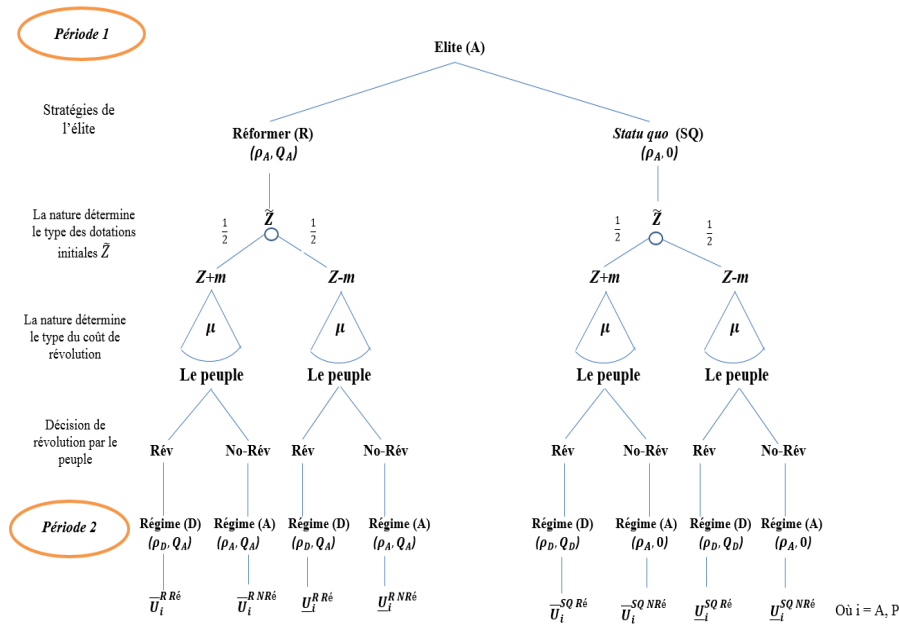
Description du jeu

La structure informationnelle du jeu

Nous supposons qu'au cours du déroulement du jeu dans le temps, le joueur qui a la main a la possibilité d'observer les actions prises dans le passé par l'autre joueur jusqu'à l'étape présente du jeu. Néanmoins, en première période, l'élite autoritaire au pouvoir, lorsqu'elle décide de la politique à mettre en œuvre, n'observe pas la nature de \tilde{Z} et ignore également le type du coût que subit le peuple en cas de révolution. En conséquence, notre jeu est un jeu dynamique à information parfaite et incomplète.

La représentation du jeu sous forme extensive

La figure, ci-après, propose une représentation sous forme extensive de notre jeu



3 Résultats et discussions

Pour résoudre ce jeu, nous allons procéder par backward induction. Nous déterminons, en premier lieu, le coût de révolution du peuple en-dessous duquel ce dernier sera incité à se révolter contre l'élite autoritaire en place lorsque cette dernière décide de mettre en œuvre une réforme ou de maintenir un statu quo. En second lieu, nous analysons la décision de l'élite (autoritaire) de mettre en œuvre une réforme (ou maintenir un statu quo), en anticipant la réaction du peuple.

Etude des incitations du peuple à se révolter lorsque l'élite autoritaire décide de réformer en première période

Bonne période : Nous analysons, dans un premier temps, les incitations à la révolution du peuple lorsque le niveau des dotations initiales est élevé ($\tilde{Z} = Z + m$).

⁸ Nous qualifierons l'état durant lequel $\tilde{Z} = Z + m$ de *bonne période* et celui durant lequel $\tilde{Z} = Z - m$ de *mauvaise période*.

Le peuple décide de se révolter, quand l'élite autoritaire décide de mettre en œuvre une réforme, lorsque son gain en cas de révolution, noté $\bar{U}_p^{RRé}$, est supérieur à celui en cas de non-révolution, noté $\bar{U}_p^{NRé}$. Autrement dit, la condition suivante doit être vérifiée :

$$\bar{U}_p^{RRé} > \bar{U}_p^{NRé} \Leftrightarrow \mu < \bar{\mu}_1. \text{ Où } \bar{\mu}_1 = \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right) [(Z + m + Q_A)(\rho_A - \alpha) + \psi]. \quad (1)$$

Mauvaise période ($\bar{Z} = Z - m$)

$$\bar{U}_p^{RRé} > \bar{U}_p^{NRé} \Leftrightarrow \mu < \underline{\mu}_1. \text{ Où } \underline{\mu}_1 = \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right) [(Z - m + Q_A)(\rho_A - \alpha) + \psi]. \quad (2)$$

Propriété (1) : en comparant les deux coûts de révolution seuils, nous constatons que $\bar{\mu}_1 > \underline{\mu}_1$. Cela signifie que le peuple est d'autant plus incité à se révolter contre l'élite autoritaire (quand celle-ci décide de mettre en œuvre une réforme) lorsque le niveau des dotations initiales $\bar{Z} = (Z + m)$. On peut également déduire que lorsque $\mu < \underline{\mu}_1$ il y aura une révolution à coup sûr, quelle que soit la nature de \bar{Z} (bonne ou mauvaise période).

Propriété (2) : les coûts de révolution seuils en-dessous desquels le peuple est incité à se révolter contre l'élite autoritaire en place ($\bar{\mu}_1$ et $\underline{\mu}_1$) sont croissants avec les paramètres Z , ψ , Q_A , δ , ρ_A et décroissants avec le paramètre α . Chaque variation de paramètre permettant d'augmenter la valeur de ces coûts (seuils) serait de nature à renforcer les incitations du peuple à se révolter, plutôt que d'accepter la politique de réforme mise en œuvre par l'élite autoritaire en place. Ainsi, une augmentation dans le niveau des dotations initiales (Z), une possibilité d'infliger une forte punition (ψ) à l'élite autoritaire après la révolution, une réforme d'une plus grande envergure (Q_A), une plus grande préférence pour le gain futur (δ) et une décision de l'élite autoritaire de s'approprier une plus grande part (ρ_A) du surplus (au détriment du peuple) augmentent le coût d'opportunité pour le peuple de rester en dehors du pouvoir et l'incitent davantage à se révolter contre l'élite autoritaire au pouvoir⁹.

Etude des incitations du peuple à se révolter lorsque l'élite autoritaire décide de maintenir un statu quo en première période

Bonne période :

$$\bar{U}_p^{SQRé} > \bar{U}_p^{SQNRé} \Leftrightarrow \mu < \bar{\mu}_2. \text{ Où } \bar{\mu}_2 = \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right) [(\rho_A - \alpha)(Z + m) + \psi + \bar{C}_p + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)]. \quad (3)$$

Mauvaise période :

$$\bar{U}_p^{SQRé} > \bar{U}_p^{SQNRé} \Leftrightarrow \mu < \underline{\mu}_2. \text{ Où } \underline{\mu}_2 = \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right) [(\rho_A - \alpha)(Z - m) + \psi + \bar{C}_p + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)]. \quad (4)$$

Propriété (3) : les coûts de révolution seuils ($\bar{\mu}_2$ et $\underline{\mu}_2$) en-dessous desquels le peuple est incité à se révolter contre l'élite autoritaire, lorsque celle-ci décide de maintenir un *statu quo*, sont croissants avec les paramètres Z , ψ , \bar{C}_p , δ , ρ_A , et décroissants avec le paramètre α . Ainsi, une augmentation dans le niveau des dotations initiales (Z), une possibilité d'infliger une forte punition (ψ) à l'élite autoritaire après la révolution, une augmentation du coût de *statu quo* subi par le peuple (\bar{C}_p), une plus grande préférence pour le gain futur (δ) et une décision de l'élite autoritaire de s'approprier une plus grande part (ρ_A) du surplus (au détriment du peuple) augmentent le coût d'opportunité pour le peuple de rester en dehors du pouvoir et l'incitent davantage à se révolter contre l'élite autoritaire.

Remarque (1) : nous constatons, toutefois, que l'effet de la variabilité des dotations initiales (m) sur les incitations du peuple à se révolter est ambigu. En effet, $\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial m} > 0$ et $\frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial m} > 0$: lorsque le niveau des dotations initiales $\bar{Z} = (Z + m)$, une augmentation de la variabilité de \bar{Z} impacte positivement les incitations du peuple à se révolter. Autrement dit, elle incite davantage le peuple à se révolter contre la politique mise en œuvre par l'élite autoritaire en place (réforme ou *statu quo*). Par ailleurs, $\frac{\partial \underline{\mu}_1}{\partial m} < 0$ et $\frac{\partial \underline{\mu}_2}{\partial m} < 0$: lorsque le niveau des dotations initiales $\bar{Z} = (Z - m)$, une augmentation de la variabilité de \bar{Z} impacte négativement les incitations du peuple à se révolter. Autrement dit, elle incite de moins en moins le peuple à se révolter contre la politique mise en œuvre par l'élite autoritaire en place (réforme ou *statu quo*).

⁹ Le paramètre α impacte négativement les incitations du peuple à se révolter en raison du terme $(1 - \alpha)$ existant dans la fonction de paiement de celui-ci. En effet, lorsque le peuple décide de se révolter, il s'approprie une part $(1 - \alpha)$ du surplus total. De ce fait, une augmentation du niveau de α se traduit par une diminution de la part du surplus que celui-ci va s'approprier en cas de révolution.

Les incitations à la réforme de l'élite autoritaire au pouvoir

Nous commençons, tout d'abord, par déterminer le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire. Celui-ci maximise sa fonction de paiement :

$$U_A^R = \rho_A(Z + Q_A)(1 + \delta) - \alpha C(Q_A) - \left(\frac{\delta}{2}\right) \psi \left[F(\bar{\mu}_1) + F(\underline{\mu}_1) \right] + \left(\frac{\delta}{2}\right) (\alpha - \rho_A) \left[(Z + Q_A) \left[F(\bar{\mu}_1) + F(\underline{\mu}_1) \right] + m \left[F(\bar{\mu}_1) - F(\underline{\mu}_1) \right] \right].$$

Distribution uniforme de la variable aléatoire μ

Supposons, dans un premier cas, que la variable aléatoire μ est distribuée selon une loi uniforme sur l'intervalle $[\mu_L, \mu_H]$. Le gain espéré de l'élite autoritaire lorsqu'elle décide de réformer est, dans ce cas de figure, donné par :

$$U_A^R = \rho_A(Z + Q_A)(1 + \delta) - \alpha C(Q_A) - \left(\frac{\delta}{2}\right) \psi \left[\frac{2 \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) [(Z + Q_A)(\rho_A - \alpha) + \psi] - 2\mu_L}{\Delta\mu} \right] - \left(\frac{\delta}{2}\right) (\rho_A - \alpha)(Z + Q_A) \left[\frac{2 \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right) [(Z + Q_A)(\rho_A - \alpha) + \psi] - 2\mu_L}{\Delta\mu} \right] - \left(\frac{\delta}{2}\right) (\rho_A - \alpha)m \left[\frac{2\delta m(\rho_A - \alpha)}{(1 + \delta)\Delta\mu} \right].$$

Remarque (2): la variabilité impacte négativement l'espérance de gain de l'élite autoritaire en cas de réforme ($\frac{\partial U_A^R}{\partial m} < 0$).

Nous déterminons maintenant le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire.

$$Q_A^* = \underset{Q_A}{\text{Argmax}} U_A^R$$

$$Q_A^* = \frac{\Delta\mu(1 + \delta)^2 \rho_A - 2\delta^2(\rho_A - \alpha)\psi - 2\delta^2(\rho_A - \alpha)^2 Z + (1 + \delta)\delta(\rho_A - \alpha)\mu_L}{\alpha(1 + \delta)\Delta\mu + 2\delta^2(\rho_A - \alpha)^2}. \quad (5)$$

Remarque (3) : le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire est indépendant du niveau de la variabilité des dotations initiales (m). Il est à noter que ce résultat n'est pas général. Il s'explique par le choix d'une loi uniforme pour la distribution du coût de la révolution. En effet, étant donné que la distribution est symétrique, alors la variabilité n'impacte pas la probabilité de révolte.

Remarque (4) : En comparant le gain de l'élite autoritaire en cas de réforme avec celui en cas de *statu quo* (à l'équilibre) et en analysant l'impact de la variabilité des dotations initiales (m) sur la différence de gain, nous constatons que, pour les mêmes raisons qu'avant (en l'occurrence, le choix d'une distribution de probabilité uniforme), le niveau de variabilité des dotations initiales (m) ne change pas les incitations de l'élite autoritaire en place à réformer (ou à maintenir un *statu quo*).

La variable aléatoire μ distribuée selon une loi quelconque

Considérons maintenant un cas plus général dans lequel la variable aléatoire μ est distribuée selon une loi de probabilité quelconque, caractérisée par une fonction de répartition $F_X(\mu)$.

Le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire est, dans ce cas de figure :

$$Q_A^* = \underset{Q_A}{\text{Argmax}} \left\{ \rho_A(Z + Q_A)(1 + \delta) - \alpha C(Q_A) - \left(\frac{\delta}{2}\right) \psi \left[F(\bar{\mu}_1) + F(\underline{\mu}_1) \right] + \left(\frac{\delta}{2}\right) (\alpha - \rho_A) \left[(Z + Q_A) \left[F(\bar{\mu}_1) + F(\underline{\mu}_1) \right] + m \left[F(\bar{\mu}_1) - F(\underline{\mu}_1) \right] \right] \right\}.$$

La condition du premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial U_A^R}{\partial Q_A} = 0 \Leftrightarrow \rho_A(1 + \delta) - \alpha Q_A - \left(\frac{\delta}{2}\right) \psi \left[\frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial Q_A} + \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial Q_A} \right] + \left(\frac{\delta}{2}\right) (\alpha - \rho_A) \left[F(\bar{\mu}_1) + F(\underline{\mu}_1) + (Z + Q_A) \left[\frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial Q_A} + \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial Q_A} \right] + m \left[\frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial Q_A} - \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial Q_A} \right] \right] = 0. \quad (7)$$

L'équation (7) définit implicitement¹⁰ $Q_A^*(m)$. On définit alors la fonction implicite suivante :

$$G(Q_A^*(m), m) = \frac{\partial U_A^R(Q_A^*(m), m)}{\partial Q_A} = 0. \quad (8)$$

¹⁰ La valeur de Q_A^* satisfait la condition de premier ordre.

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on peut déterminer le signe de $\frac{dQ_A^*(m)}{dm}$ et connaître ainsi l'impact de la variabilité (m) sur l'incitation de l'élite autoritaire à réformer.

$$\begin{aligned} G(Q_A^*(m), m) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial Q_A} dQ_A^*(m) + \frac{\partial G}{\partial m} dm = 0 \\ G(Q_A^*(m), m) = 0 &\Leftrightarrow \frac{dQ_A^*(m)}{dm} = -\frac{\frac{\partial G(Q_A^*(m), m)}{\partial m}}{\frac{\partial G(Q_A^*(m), m)}{\partial Q_A}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Etant donné que¹¹ $\frac{\partial G(Q_A^*(m), m)}{\partial Q_A} < 0$, alors le signe de $\frac{dQ_A^*(m)}{dm}$ est le même que celui de $\frac{\partial G(Q_A^*(m), m)}{\partial m}$.

Propriété (4) : l'application du théorème des fonctions implicites nous a permis d'aboutir aux résultats suivants, concernant l'impact de la variabilité des dotations initiales sur les incitations de l'élite autoritaire au pouvoir à mettre en œuvre une réforme :

$$- \frac{\partial^2 F_X(\mu)}{\partial X^2} = a > 0 \Rightarrow \frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial X} - \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial X} > 0 \Rightarrow \frac{dQ_A^*(m)}{dm} < 0 ;$$

Lorsque nous avons plus de chance d'avoir un coût de révolution élevé (que d'avoir un coût de révolution faible)¹², une augmentation du niveau de la variabilité des dotations initiales (m) impacte négativement le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire (Q_A^*). Autrement dit, l'élite autoritaire aurait de moins en moins intérêt à réformer à mesure que la variabilité (m) augmente. En effet, d'après (12), une augmentation dans les niveaux de (m) et/ou de Q_A incite davantage le peuple à se révolter ($\bar{\mu}_1$ croissant avec m et Q_A). Ainsi, lorsque le niveau de variabilité des dotations initiales (m) augmente, l'élite autoritaire risque de plus en plus de faire face à une révolution. Pour contrebalancer cet effet, l'élite en question a intérêt à mettre en œuvre une réforme (Q_A) de moindre envergure, pour empêcher le peuple de se révolter contre elle.

$$- \frac{\partial^2 F_X(\mu)}{\partial X^2} = a < 0 \Rightarrow \frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial X} - \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial X} < 0 \Rightarrow \frac{dQ_A^*(m)}{dm} > 0 ;$$

Lorsque nous avons plus de chance d'avoir un coût de révolution faible (que d'avoir un coût de révolution élevé), une augmentation du niveau de la variabilité des dotations initiales (m) impacte positivement le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire (Q_A^*). Autrement dit, l'élite autoritaire aurait de plus en plus intérêt à réformer à mesure que la variabilité (m) augmente. En effet, d'après (13), une augmentation dans le niveau de (m) incite de moins en moins le peuple à se révolter ($\underline{\mu}_1$ décroissant avec m) tandis qu'une augmentation dans le niveau de Q_A procure un effet inverse ($\underline{\mu}_1$ croissant avec Q_A). Ainsi, lorsque le niveau de variabilité des dotations initiales (m) augmente, l'élite autoritaire risque de moins en moins de faire face à une révolution. Dans ce cas, l'élite en question peut se permettre de mettre en œuvre une réforme (Q_A) plus importante, pour maximiser son gain.

$$- \frac{\partial^2 F_X(\mu)}{\partial X^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial X} - \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{dQ_A^*(m)}{dm} = 0 ;$$

Lorsque la probabilité d'avoir une révolution en bonne période est égale à la probabilité d'avoir une révolution en mauvaise période ($\frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial X} = \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial X}$), une augmentation du niveau de la variabilité des dotations initiales (m) n'aura aucun impact sur le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire (Q_A^*). Comme nous l'avons déjà souligné, ce résultat est identique au cas dans lequel la variable aléatoire μ est distribuée selon une loi uniforme (symétrique).

4 Conclusion

Dans le présent article, nous avons développé un modèle théorique d'économie politique qui nous a permis d'analyser les incitations à la réforme dans un cadre non-démocratique. Ce modèle étudie particulièrement, à l'aide d'un jeu dynamique à information parfaite et incomplète, une situation

¹¹ Notons que $\frac{\partial G(Q_A^*(m), m)}{\partial Q_A} < 0$. Il s'agit de la condition du second ordre.

¹² La probabilité d'avoir une révolution en bonne période est supérieure à la probabilité d'avoir une révolution en mauvaise période ($\frac{\partial F(\bar{\mu}_1)}{\partial X} - \frac{\partial F(\underline{\mu}_1)}{\partial X} > 0$).

Variabilité de la rente et incitations à la réforme dans les pays non-démocratiques

dans laquelle une élite autoritaire au pouvoir peut décider de mettre en œuvre une réforme ou maintenir un statu quo en présence d'une variabilité du niveau des dotations initiales.

La résolution du jeu par backward induction, à travers la détermination, dans un premier temps, des coûts de révolution seuils du peuple en-dessous desquels ce dernier sera incité à se révolter (en cas de réforme et en cas de statu quo), nous a permis de montrer que le peuple est incité à se révolter contre l'élite autoritaire au pouvoir lorsque son coût de révolution est relativement faible (en situation de réforme, il faudrait que $\mu < \bar{\mu}_1$ durant une bonne période et $\mu < \underline{\mu}_1$ durant une mauvaise période. Tandis qu'en situation de statu quo, il faudrait que $\mu < \bar{\mu}_2$ durant une bonne période et $\mu < \underline{\mu}_2$ durant une mauvaise période). Par ailleurs, nous avons montré que l'incitation du peuple à se révolter est, en somme, impactée positivement par : (i) une augmentation dans le niveau des dotations initiales, (ii) une possibilité d'infliger une forte punition à l'élite autoritaire après la révolution, (iii) une réforme d'une plus grande envergure ou une augmentation du coût de statu quo subi par le peuple, (iv) une plus grande préférence pour le futur et (v) une décision de l'élite autoritaire de s'approprier une plus grande part du surplus (au détriment du peuple). Nous avons également constaté que l'incitation du peuple à se révolter est d'autant plus importante durant une bonne période ($\bar{\mu}_1 > \underline{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2 > \underline{\mu}_2$).

Nous avons, dans un deuxième temps, analysé les incitations à la réforme de l'élite autoritaire au pouvoir. En supposant, dans un premier cas, que la variable aléatoire μ soit distribuée selon une loi uniforme, nous avons constaté que le niveau de réforme optimal de l'élite autoritaire est indépendant du niveau de la variabilité des dotations initiales (m). En considérant, par ailleurs, un cas plus général, dans lequel la variable aléatoire μ est distribuée suivant une loi de probabilité quelconque, nous avons pu montrer que lorsqu'il y a plus de chance d'avoir un coût de révolution élevé (que d'avoir un coût de révolution faible), une augmentation du niveau de la variabilité des dotations initiales (m) impacte négativement l'incitation de l'élite autoritaire à réformer et vice versa.

Références

- [1] Acemoglu, D. et Robinson, J.A.,: A Theory of Political Transitions, *The American Economic Review*, Vol. 91 (4), 938-963. (2001)
- [2] Dunning, T.,: *Crude democracy: Natural resource wealth and political regimes*, Cambridge: Cambridge University Press, 350 p. (2008)
- [3] Fernandez, R. et Rodrik, D.: Resistance to Reform: Status Quo Bias in the Presence of Individual-Specific Uncertainty, *The American Economic Review*, Vol. 81 (5), 1146-1155. (1991)
- [4] Giuliano, P., Mishra P. et Spilimbergo, A.: Democracy and Reforms: Evidence from a new dataset, *American Economic Journal: Macroeconomics*, Vol. 5 (4), 179-204. (2013)
- [5] Grosjean, P. et Senik, C.: Democracy, Market Liberalization, and Political Preferences," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 93 (1), 365-381. (2011)
- [6] Haggard, S. et Kaufman, R.: *Economic Adjustment in New Democracies*, In: Nelson, J. (ed.), *Fragile Coalitions*. New Brunswick, Transaction Books. (1989)
- [7] Haggard, S. et Webb, S.B., (eds.): What do we know about the political economy of economic policy reform ?, *The World Bank Research Observer*, Vol. 8 (2), 143-168. (1993)
- [8] Kaufman, R., : A Concrete Review of the Bureaucratic-Authoritarian Model, In : Collier, D., (ed.), *The New Authoritarianism in Latin America*. Princeton University Press. (1979)
- [9] Kaufman, R., : Democratic and Authoritarian Responses to the Debt Issue: Argentina, Brazil and Mexico, In : Kahler, M., (ed.), *The Politics of International Debt*, Cornell University Press, Ithaca, N.Y. (1986)
- [10] Lounaci, A. et Souam, S.: Une analyse théorique des incitations à la réforme dans un cadre démocratique Mimeo. (2018)
- [11] Williamson, J. et Haggard, S.: The Political Conditions for Economic Reform. In: Williamson, J. (ed.), *The Political Economy of Policy Reform*, Institute for International Economics, Washington, D.C., 601 p. (1994)

Perception de la Qualité et Création de Valeur via l'Indication Géographique

Nacim Nait Mohand^{*1}, Abdelhakim Hammoudi², and Mohammed Said Radjef³

¹Unité de Recherche LaMOS, Faculté de Technologie, Université de Bejaia, Algérie ,
nacim.naitmohand@univ-bejaia.dz

²University of Paris-Saclay, National Research Institute for Agriculture, Food and the Environment (INRAE), AgroParisTech, Paris-Saclay Applied Economics, 91120 Palaiseau, France,
abdelhakim.hammoudi@inrae.fr

³Unité de Recherche LaMOS, Faculté des sciences Exactes, Université de Bejaia, Algérie ,
mohammedsaid.radjef@univ-bejaia.dz

Résumé Ce travail s'inscrit dans le cadre général de la problématique de la concurrence déloyale dans la filière datte et de son impact négatif sur le fonctionnement de marché. Nous analysons cette question en comparant deux situations : la situation avant et la situation après la mise en place d'une indication géographique (IG). Nous nous appuyons sur un modèle d'économie mathématique et un jeu séquentiel, qui met en évidence les différentes interactions entre les décisions des différents acteurs. Les résultats de cette étude montrent qu'en absence d'une IG l'amélioration du niveau de connaissance des consommateurs de la qualité de la Datte peut paradoxalement déboucher sur l'exclusion d'une partie d'entre eux de la consommation. Nous montrons qu'avec une mise en place d'une IG, les prix des dattes, et le niveau d'exclusion des consommateurs de la consommation, peuvent augmenter en fonction de la qualité des dattes non IG.

Mots clés : Filière dattes ; Théorie des jeux ; Concurrence déloyale ; Indication géographique.

1 Introduction

La lutte contre les différentes formes de concurrence déloyale dans le secteur agro-alimentaire représente aujourd'hui un défi majeur pour les pays qui doivent à la fois assurer un bon fonctionnement des marchés et protéger le consommateur. Ce travail est axé sur les pratiques anti-concurrentielles qui consistent à tromper le consommateur et à biaiser sa perception de la qualité en lui offrant un produit de moindre qualité tout en lui faisant croire qu'il est de bonne qualité. Cette forme de concurrence déloyale a en particulier deux effets bien connus : le premier effet négatif agit sur l'offre et plus précisément, sur l'incitation des opérateurs à investir en qualité puisque les opérateurs qui se livrent à cette pratique,

*Corresponding Author

qui n'ont pas dépensé le coût associé à une production de qualité peuvent concurrencer des opérateurs qui ont effectivement investi en qualité et dépensé le coût qui y est associé. Ce phénomène est bien connu en économie publique sous l'appellation "passager clandestin". Le deuxième effet négatif de cette pratique agit sur le consommateur trompé, qui voit son bien-être détérioré du fait qu'il consomme une qualité différente de celle qu'il croit avoir achetée ([1],[2]).

La filière dattes en Algérie est un cas de cette problématique, à travers l'enquête que nous avons réalisée récemment¹ pour tirer des informations sur les profils des consommateurs des dattes en Algérie, nous avons pu avoir certaines statistiques, qui montrent l'intensité de ces pratiques anticoncurrentielles dans ce secteur. Plus de 76% de personnes, qui achètent des dattes sont victimes d'expériences décevantes lors de l'achat de dattes. Plus de 82% de ces victimes, considèrent que qualité ne correspond pas à celle attendue (fraîcheur, présence de vers). Plus de 59% des victimes, qui n'ont pas changé leur mode d'achat après une expérience décevante trouvent que le prix est relativement intéressant et correspond à leur pouvoir d'achat ou que les expériences décevantes ne sont pas suffisantes pour conduire un changement de leur comportement d'achat.

Ces tromperies du consommateur sont d'autant plus faciles à mettre en oeuvre pour le consommateur peu connaisseur du produit et qui ne peut reconnaître la bonne qualité de la mauvaise. Nous avons le cas d'école de ce type de problématique dans le contexte de la mise en place d'une Indication Géographique (IG) ([4]) : Une des justifications de l'IG est la réparation de cette défaillance de marché en informant le consommateur de la qualité liée au produit à travers la labellisation de la qualité associée au savoir-faire ancestral et au terroir.

Pour répondre aux exigences des consommateurs des dattes en termes de qualité et de prix et encourager les savoir-faire ancestraux, les autorités publiques doivent définir, avec les associations de producteurs/distributeur un cahier des charges pour l'IG ainsi que les opérations marketing pour faire connaître le produit IG auprès du public ayant peu de connaissance dans les propriétés de ce produit du terroir. Notre étude s'inscrit dans cet objectif, nous analysons dans deux situations : avant la mise en place de l'IG et après sa mise en place, l'effet des décisions publiques et privées sur les prix des dattes, et sur les niveaux d'accès et d'exclusion des consommateurs à la consommation du produit.

Pour apporter quelques réponses, nous proposons un modèle d'économie industrielle où nous considérons deux distributeurs représentatifs, qui s'approvisionnent auprès d'une région éligible à l'indication géographique, et la périphérie de cette région, les deux régions proposent deux qualités différentes des dattes. Le premier distributeur s'approvisionne auprès de la région éligible à l'IG et offre des dattes de bonne qualité sur le marché final. Par contre, le deuxième distributeur s'approvisionne auprès de la périphérie de la zone éligible à l'IG, et réalise une opération de tri de son approvisionnement, pour améliorer la qualité de son offre avec comme objectif : faire croire aux consommateurs que son offre est de la même qualité que celle de son concurrent. Nous supposons dans ce modèle :

- Avant la mise en place de l'IG, le niveau de connaissance des consommateurs sur la qualité à travers le visuel, ne permet pas aux consommateurs de concevoir correctement la qualité des dattes (Ecart positif entre la qualité réelle et la qualité conçue).
- Après la mise en place de l'IG, les consommateurs peuvent distinguer correctement

1. Cette enquête a été réalisée sur la période septembre 2021-Mai 2022 dans le cadre du projet VALUE-TEAM, financé par l'ARIMNet2 (2017).

les deux qualités de dattes offertes par les deux distributeurs sur le marché. Pour ce qui est de la demande sur le marché final, nous avons repris la formulation de Moussa et Rosen [3], et les différentes interdépendances stratégiques entre les décisions des opérateurs sont représentées par un jeu, que nous résolvons par la technique de backward induction.

En s'appuyant sur le modèle que nous proposons, les résultats obtenus ont permis de voir certains effets pervers des décisions publiques et privées dans les deux situations. En absence d'une IG, l'augmentation du niveau de connaissance des consommateurs sur la qualité peut générer une hausse des prix de dattes des deux qualités. Avec la mise en place d'une IG, le renforcement des normes de qualité des dattes non IG peut induire une exclusion de la consommation de certains consommateurs.

2 Description du modèle

2.1 Hypothèses

Nous considérons dans ce modèle, deux distributeurs R_1 et R_0 , qui s'approvisionnent de deux qualités k_1 , ($k_1 \in [0, 1]$) et k_0 , ($k_0 \in [0, k_1]$) respectivement, en dattes auprès d'une région éligible à l'indication géographique (zone de production de la qualité k_1) et la périphérie de cette région (zone de production de la qualité k_0).

Le prix ω_i , ($i \in \{0, 1\}$) dans la région de production des dattes qualité k_i est donné par :

$$\omega_i = \mu k_i, \quad (1)$$

où : $\mu \geq 0$.

Le distributeur R_1 offre un produit de qualité k_1 sur le marché final, par contre le distributeur R_0 qui s'approvisionne du produit de qualité inférieure k_0 , décide d'un niveau de tri $r \in [0, 1]$, avant d'offrir son produit sur le marché final afin que son produit soit de qualité $k_0(r)$:

$$k_0(r) = k_1 - (k_1 - k_0)(1 - r). \quad (2)$$

La probabilité β qu'une unité de produit de qualité k_0 , soit rejetée suite à une opération de tri d'un niveau r , réalisée par le distributeur R_0 est donnée par :

$$\beta(k_0, r) = \gamma r (1 - k_0), \quad (3)$$

où : $\gamma \in [0, 1]$.

La quantité rejetée suite au tri du produit, dépend à la fois de niveau de tri r et de la qualité k_0 du produit. Quand le distributeur R_0 décide d'exercer un niveau de tri plus élevé (r augmente) la qualité de son offre s'améliore, mais la proportion rejetée de sa quantité commandée augmente.

Pour répondre à sa demande D_1 sur le marché final le distributeur R_1 s'approvisionne d'une quantité Q_1 de produit de qualité k_1 égale à sa demande D_1 , par contre le distributeur R_0 , pour répondre à sa demande D_0 sur le marché final, il doit s'approvisionner d'une quantité Q_0 en produit de qualité k_0 donnée par :

$$Q_0(k_0, r) = \frac{1}{1 - \beta(k_0, r)} D_0. \quad (4)$$

Le distributeur R_0 , qui s'approvisionne du produit de qualité k_0 , et qui décide d'un niveau de tri r pour que son offre sur marché soit de qualité $k_0(r)$ subit un coût unitaire C lié aux opérations de tri donné par² :

$$C(t, r) = t r (\Delta - r), \quad (5)$$

où $t \geq 0$.

La demande sur le marché final du produit est adressée par M consommateurs, qui sont hétérogènes dans leurs revenus et leurs appréciations de la qualité. Ils sont uniformément distribués selon leurs dispositions à payer pour la qualité dans l'intervalle $[0, \bar{\theta}]$. Chaque consommateur achète au plus une unité de produit. Le surplus U d'un consommateur $\theta \in [0, \bar{\theta}]$, qui achète un produit de qualité k au prix p s'écrit :

$$U(\theta, p, k) = \theta k - p. \quad (6)$$

Les profits Π_0 et Π_1 des distributeurs R_0 et R_1 , qui fixent les prix de ventes p_0 et p_1 respectivement sont donnés par :

$$\Pi_0 = p_0 D_0 - \omega_0 Q_0(k_0, r) - C(t, r) Q_0(k_0, r). \quad (7)$$

$$\Pi_1 = p_1 D_1 - \omega_1 Q_1. \quad (8)$$

Le profit du distributeur R_0 est la rémunération de sa quantité offerte sur le marché final au prix p_0 moins ses coûts : d'acquisition du produit $\omega_0 Q_0(k_0, r)$, et de tri de sa quantité commandée $C(t, r) Q_0(k_0, r)$.

Le profit du distributeur R_1 est la rémunération de sa quantité offerte sur le marché final au prix p_1 moins le coût de l'acquisition du produit $\omega_1 Q_1$.

On se place dans deux situations : la première est celle d'inexistence d'une indication géographique pour les produits de qualité k_1 , et la deuxième est la situation où les autorités publiques avec les associations des opérateurs mettent en place une indication géographique pour la zone éligible.

Perception de la qualité avant et après la mise en place de l'indication géographique.

Avant la mise en place d'une indication géographique au produit de la zone éligible à l'indication géographique, les produits offerts par les deux distributeurs R_1 et R_0 qui sont de qualités k_1 , et $k_0(r)$ sont perçus par les consommateurs, en fonction de leur niveau de connaissance $\lambda \in [0, 1]$ sur la qualité à travers l'aspect visuel comme étant des produits de qualités \bar{k}_1 et \bar{k}_0 respectivement :

$$\bar{k}_1(k_0, k_1, \lambda) = \lambda k_1 + (1 - \lambda) k_0(r). \quad (9)$$

$$\bar{k}_0(k_0, k_1, \lambda) = \lambda k_0(r) + (1 - \lambda) k_1. \quad (10)$$

Le paramètre λ , ($\lambda \in]\frac{1}{2}, 1]$) mesure le niveau de connaissance des consommateurs sur la qualité des dattes à travers l'attribut visuel. λ varie entre un niveau de connaissance ($\lambda \geq \frac{1}{2}$) qui permet aux consommateurs de distinguer correctement les deux qualités $\bar{k}_1(k_0, k_1, \lambda) \geq$

2. Nous supposons que $\Delta \geq 2$ pour que la fonction C soit croissante et concave par rapport à r .

$\bar{k}_0(k_0, k_1, \lambda)$ tout en sous-estimant la qualité k_1 et surestimant la qualité $k_0(r)$, jusqu'au niveau de connaissance ($\lambda = 1$) qui permet à la fois de distinguer les deux qualités et de percevoir correctement les deux qualités ($\bar{k}_1(k_0, k_1, 1) = k_1$, $\bar{k}_0(k_0, k_1, 1) = k_0(r)$).

La mise en place d'une indication géographique au produit de la zone éligible à l'indication géographique (zone de production de la qualité k_1), permettra aux consommateurs de distinguer et percevoir correctement ($\lambda = 1$) les deux qualités k_1 , et $k_0(r)$ du produit sur le marché final.

2.2 Le jeu

L'interaction stratégique entre les opérateurs peut être représentée par le jeu séquentiel suivant :

Étape 1. Le distributeur R_0 décide de niveau de tri r .

Étape 2. Les deux distributeurs R_0 et R_1 choisissent simultanément les prix p_0 et p_1 .

La demande sur chaque marché est déterminée par les choix de la catégorie à acheter par chaque consommateur, qui décide soit d'acheter une unité du produit de qualité $k_0(r_0)$ offert par R_0 , ou bien une unité de produit de qualité k_1 offert par R_1 ou bien de ne pas acheter le produit. Ces décisions des consommateurs permettent de déterminer la demande qui s'adresse à chaque marché selon le processus de résolution du modèle de Mussa et Rosen [3].

3 Principaux résultats

La résolution du jeu séquentiel avec la technique d'induction en amont dans les deux situations avant et après mise en place d'une IG nous permet d'obtenir des résultats relatifs aux impacts sur les différents indicateurs économiques (prix, profits,...etc.) d'une part, l'amélioration de niveau de connaissance des consommateurs sur la qualité et, ii) le renforcement de la norme de la qualité des dattes produites dans la zone non éligible à l'IG³.

3. Les figures qui seront présentées dans cette section sont obtenues par les valeurs suivantes de l'ensemble des paramètres : $M = 40$; $k_1 = 1$; $t = 0.02$; $\Delta = 2$; $\gamma = 1$; $\mu = 0.1$; $\theta = 1$.

Figure 1. $k_0 = 0.4$

Figure 2. $\lambda = 1$.

Figure 3. avant IG $\lambda = \frac{4}{7}$; après IG $\lambda = 1$.

Remarque 3.1.

Avant la mise en place d'une IG, l'amélioration du niveau de connaissances des consommateurs sur la qualité des dattes peut engendrer :

- Une augmentation du nombre de consommateurs exclus de la consommation.
- Une augmentation des prix des dattes des deux qualités.
- Une augmentation des profits des distributeurs.

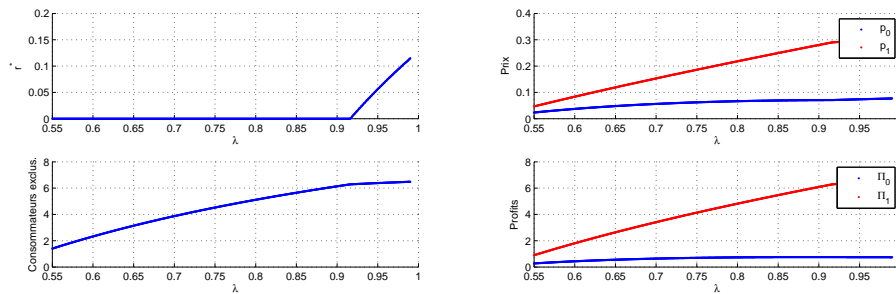


FIGURE 1 – Effets de niveau de connaissance en absence d'une IG.

Remarque 3.2.

Après mise en place d'une IG, l'amélioration de la qualité des dattes produites dans la périphérie de la zone non IG peut selon l'écart entre les deux qualités faire varier dans un sens ou un autre le nombre de consommateurs exclus de la consommation, les prix et les profits des distributeurs.

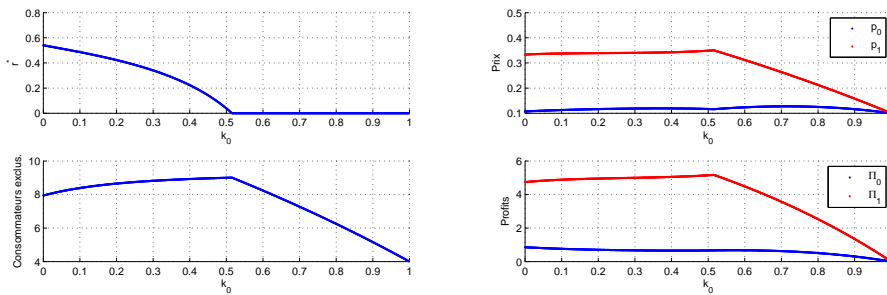


FIGURE 2 – Effets de k_0 en présence d'une IG.

Remarque 3.3.

La comparaison des deux situations avant et après mise en place de l'IG dépend du niveau de la qualité basse k_0 . Après la mise en place de l'IG ; le nombre de consommateurs exclus de consommation, les prix des deux qualités de dattes et le profit du distributeur de la qualité k_1 peuvent augmenter.

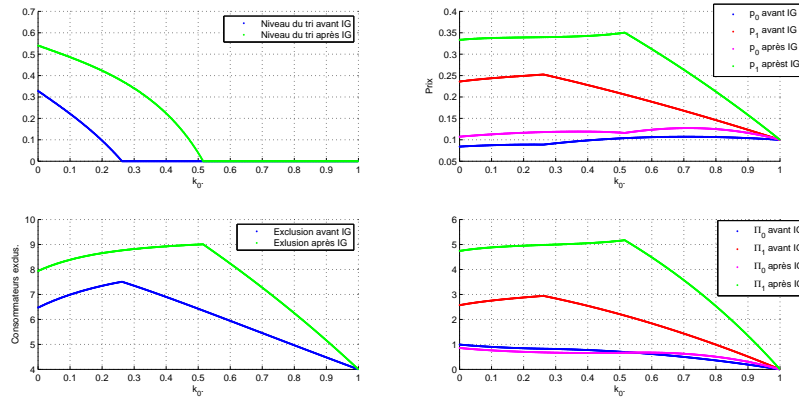


FIGURE 3 – Comparaison des deux situation avant et après mise en place d'une IG en fonction de k_0 .

4 Conclusion

L'originalité de notre modèle est qu'il permet d'analyser un contexte très peu modélisé dans la littérature économique : le cas où l'aspect visuel d'un produit peut jouer un rôle, à côté bien sûr d'autres attributs, dans la perception qu'a le consommateur sur la qualité du produit.

Notre modèle s'applique à des familles de produits dont la qualité est plus ou moins identifiable à travers l'aspect visuel du produit. Notre approche est adaptée à la réalité de la filière dattes où les consommateurs peuvent être amenés à juger de la qualité de la Dattes à partir de quelques caractéristiques visuelles de celle-ci : calibre de la dattes, couleur, fermeté....

Dans un contexte d'imperfection de la connaissance des consommateurs quant à la qualité de la dattes, nous avons analysé l'évolution des indicateurs économiques (prix, profits... etc.) en clés comparant dans la situation antérieure à la mise en place de l'IG avec dans la situation qui prévaut après la mise en place de celle-ci.

Le modèle proposé dans ce travail analyse la question de la valorisation des dattes d'une zone éligible par un signe officiel de qualité (IG), avec comme objectifs : dissuader la concurrence déloyale, et protéger les consommateurs de la tromperie. Nos résultats, montrent que la mise en place d'une IG peut avoir des effets pervers sur l'accès des consommateurs à la consommation, et sur les prix du produit. Ces conséquences éventuelles de cette décision sont issues d'une modélisation théorique. Ainsi, pour tester la robustesse de ces résultats, l'investigation empirique s'avère une piste intéressante pour un développement futur de ce travail.

Références

- [1] Arfini, F., Albisu, L. M., and Giacomini, C. (2011). Current situation and potential development of geographical indications in Europe. CAB e Books, Labels of Origin for Food.

In Barham, E., Sylvander, B.(Eds). Labels of origin for food : local development, global recognition, 4, 29.

- [2] Calboli, I. (2015). Geographical indications of origin at the crossroads of local development, consumer protection and marketing strategies. IIC-International Review of Intellectual Property and Competition Law, 46(7), 760-780.
- [3] Mussa, M., and Rosen, S. (1978). Monopoly and product quality. Journal of Economic theory, 18(2), 301-317.
- [4] Teuber, R. (2011). Consumers' and producers' expectations towards geographical indications : Empirical evidence for a German case study. British Food Journal.

Secteur informel et Impact de la crise COVID 19 sur la filière datte en Algérie. Une approche d'économie industrielle.

Walid Aziez ¹, Abdelhakim Hammoudi ², and Mohammed Said Radjef ³

¹Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté des Sciences Exactes,
Université de Béjaïa,
walid.aziez@univ-bejaia.dz

²Université Paris-Saclay, INRAE, AgroParisTech, Paris-Saclay Applied Economics, 91120, Palaiseau,
France,
abdelhakim.hammoudi@inrae.fr

³Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté des Sciences Exactes,
Université de Béjaïa,
mohammedsaid.radjef@univ-bejaia.dz

Résumé Dans ce papier, nous présentons un modèle théorique d'économie industrielle pour étudier les caractéristiques et la structure du marché algérien des dattes dans deux périodes, avant et après la crise COVID-19.

Mots clés : Théorie des jeux ; structure du marché ; COVID19.

1 Introduction

Le 11 mars 2020, l'organisation mondiale de la santé a déclaré COVID-19 comme une pandémie mondiale[1]. Pour empêcher sa propagation en Algérie, les autorités publiques ont mis en place diverses mesures sanitaires (confinement, instauration d'une autorisation de circulation entre wilayas pour les véhicules de transport de marchandises,...). Ces mesures sanitaires ont eu des impacts sur divers secteurs économiques. Dans ce papier, nous abordons l'impact de ces mesures sur la filière datte. Nous nous intéresserons plus précisément à l'impact sur les activités des acteurs informels dans des segments importants de la chaîne de valeur, tels que ceux en charge de la récolte, le stockage, le transport, la commercialisation et l'exportation. La filière datte en Algérie produit trois grandes variétés, qui sont la Deglet Nour, les dattes molles (type Ghers) et les dattes sèches (type Degla Beida). Dans ce papier, nous nous intéresserons à Deglet Nour. La filière est organisée autour d'un ensemble d'opérateurs, qui sont, dans la majorité des cas, privés : producteurs, distributeurs, exportateurs, grossistes, détaillants, marchés de gros et marchés hebdomadaires. Il faut noter que l'agriculture est le secteur où la part des emplois informels est la plus forte, « plus

*Corresponding Author

de 80% des emplois agricoles sont informels »[2]. Concernant la filière datte, les segments distributeurs sont particulièrement concernés par l'informel.

2 Méthodologie et Analyse

Le cadre conceptuel est tiré d'un modèle générique [3]. C'est un modèle d'économie industrielle qui met en jeu à la fois des producteurs en amont de la filière et des distributeurs en aval de la filière. Un certain nombre de distributeurs sont entravés par la réglementation liée à la crise sanitaire et disparaissent momentanément des transactions de filière. Le modèle permet de déterminer les prix des différentes qualités de dattes que ce soit au niveau du consommateur, qu'au niveau des intermédiaires (marché de gros). Le modèle se décline sous une logique que l'on peut décrire dans les schémas ci-dessous :

- Saison 1 : Situation pré-COVID avec des transactions amont aval portées par des intermédiaires (distributeurs) formels et informels qui s'approvisionnent de dattes de deux catégories : Deglet Nour de qualité Supérieure Cat_1 et Deglet Nour générique Cat_2 .
- Saison 2 : La crise sanitaire a provoqué une éviction d'une portion des transactions informelles et éventuellement une petite proportion de transactions formelles.

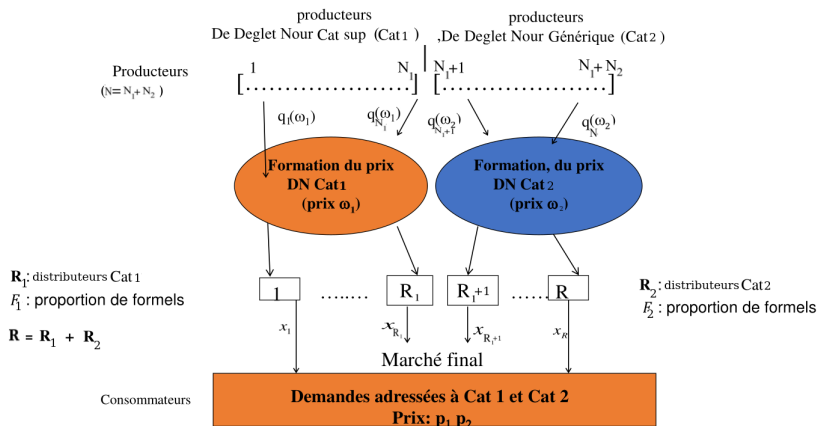


FIGURE 1 – La filière

2.1 Le modèle

Nous considérons un ensemble de N producteurs indexés par $i, (i \in \{1, \dots, N\})$, produisant chacun une quantité q_i de Deglet Nour catégorie 1 ou catégorie 2, et un ensemble de R distributeurs indexés par $j, (j \in \{1, \dots, R\})$, commercialisant chacun une quantité d_j de Deglet Nour catégorie 1 ou catégorie 2. Soit e le nombre de distributeurs, qui ont arrêté

variable	description
R	Le nombre total de distributeurs.
R_1	Le nombre de distributeurs qui commercialisent les dattes de catégorie 1.
R_2	Le nombre de distributeurs qui commercialisent les dattes de catégorie 2.
d_j	La demande individuelle, qui s'adresse au distributeur j , $j \in \{1, \dots, R\}$.
D_k	La demande totale de la datte catégorie k , $k \in \{1, 2\}$.
N	Le nombre total de producteurs.
N_1	Le nombre de producteurs des dattes de catégorie 1.
N_2	Le nombre de producteurs des dattes de catégorie 2.
q_i	La quantité offerte par un producteur i , $i \in \{1, \dots, N\}$.
Q_k	La quantité totale offerte de la datte catégorie k , $k \in \{1, 2\}$.
M	Le marché final.
M_1	Le marché de gros des dattes de catégorie 1.
M_2	Le marché de gros des dattes de catégorie 2.
Π_k	Le profit d'un distributeur qui commercialise la datte de catégorie k , $k \in \{1, 2\}$.
B_k	Le profit d'un producteur de dattes de catégorie k , $k \in \{1, 2\}$.

TABLE 1 – Notations.

leur activité pendant la pandémie, en raison des restrictions administratives, exigeant une autorisation de circulation entre les wilayas.

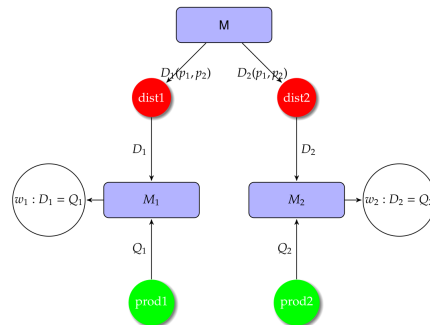


FIGURE 2 – Le modèle

Nous formalisons le fait que la crise soit apparue après la saison de production et est venue perturber le processus de commercialisation. Nous supposons qu'il y a une saison de référence pré-COVID, représentative d'une saison "normale" de production et de commercialisation (l'année antérieure par exemple). Dans cette saison, les activités amont (de production) et les activités aval (de commercialisation) ont lieu sans entrave et les prix sur les marchés de gros et de détails émergent comme issue d'un jeu qu'on appellera "jeu de référence" associé à la saison 1 (avant COVID-19). Ces prix de référence, ainsi que les profits et surplus des acteurs issus de cette saison, seront comparés avec ce qui adviendra quand la crise de la COVID apparaît (saison 2). La production de la saison 2 étant déjà achevée, les mêmes quantités que la saison 1 ont été produites, mais les activités de commercialisation

sont entravées par l'apparition de la crise qui conduit à des réglementations qui réduisent la mobilité des acteurs en aval. Pour formaliser la demande des consommateurs sur les deux marchés, nous reprenons le modèle de Mussa-Rosen [4].

2.2 Le jeu

Jeu de référence associé à la saison 1 :

1. Chacun des R distributeurs choisit individuellement le marché de gros (marché de la catégorie) auquel il s'approvisionne (R_1 choisissent la catégorie 1 et $R_2 = R - R_1$ choisissent la catégorie 2).
2. Chaque distributeur fixe le prix de vente p_k , $k \in \{1, 2\}$ de son produit de détail et commande sur le marché de gros correspondant la quantité demandée sur le marché de détail.
3. chaque producteur $i \in N$ produit la quantité qu'il doit vendre sur le marché correspondant à la catégorie de la datte dont il est spécialisé.

Quand les commandes des distributeurs d'une catégorie donnée du produit sont fixées et les productions proposées sur le marché de gros correspondant, le prix sur les marchés de gros émerge à l'égalisation de la demande et de l'offre.

Saison II (Apparition de la COVID) : La crise sanitaire a provoqué une éviction d'une portion des transactions. Nous supposons que chaque producteur continue à offrir la même quantité pendant la crise que durant la période avant la crise. Nous supposons, pour fixer les idées, que la capacité de distribution des distributeurs s'est forgée et stabilisée au fil des quantités distribuées dans le passé (c'est-à-dire, par exemple, dans la période de référence pré-COVID) et que la capacité maximale de distribution correspond exactement à la quantité distribuée dans cette période. Nous supposons par ailleurs que la crise a débouché sur l'éviction de " e " distributeurs qui ne peuvent plus circuler en raison de l'imposition d'une autorisation de circulation entre wilayas, qui n'est délivrée qu'aux acteurs formels.

Sachant que la saison de production a eu lieu et les offres de produits, non ajustables, sont celles qui étaient produites lors de la saison de référence, le jeu se restreint donc aux distributeurs restant en activité et qui doivent ajuster leur prix sur le marché de détail et passer commande sur les marchés de gros. Le jeu associé à cette période est alors :

- Les $R - e$ choisissent simultanément et de façon indépendante le marché de gros où ils vont s'approvisionner.

Les prix sur les marchés de gros émerge à l'égalisation des offres et des demandes sur chaque catégorie.

3 Quelques résultats

La résolution du jeu s'est fait par la processus de backward-induction, qui nous donne les résultats suivants :

- Le prix final " p_k " $k \in \{1, 2\}$ augmente en fonction de e , mais le prix " p_2 " de la catégorie 2 augmente plus rapidement.

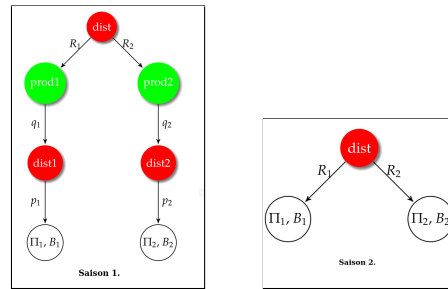


FIGURE 3 – Le jeu

- Les prix intermédiaires des marchés de gros " w_k " $k \in \{1, 2\}$ diminuent en fonction de ϵ . Ceci conduit les producteurs à brader leurs produits, par conséquent, les prix aux consommateurs augmentent. Ainsi, les distributeurs, qui activent après la COVID, enregistrent une amélioration de leur "pouvoir de marché" sur le marché de gros (vis-à-vis des producteurs) et de leur pouvoir de marché vis-à-vis des consommateurs en aval.
- Les distributeurs en activité, ayant une capacité de distribution limitée égale, par hypothèse, à la quantité distribuée dans les périodes antérieures à la COVID, satisfont donc individuellement, à la saison 2, la demande qui leur a été adressée à la saison 1.
- Le nombre de distributeurs ayant diminué, la demande totale satisfaite à la saison 2 est inférieure à celle satisfaite à la saison 1.

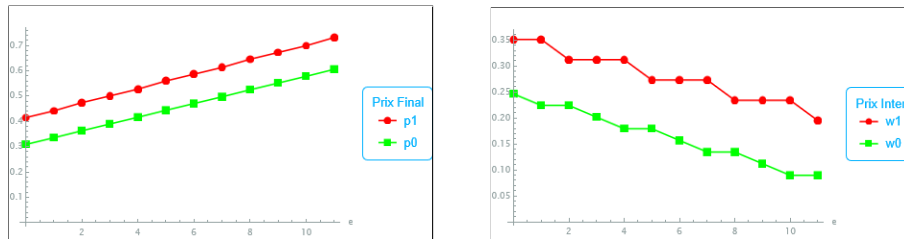


FIGURE 4 – Les prix de vente et d’achat.

4 Conclusion

A travers deux modèles de la théorie des jeux, nous montrons que l’ampleur des effets de la COVID-19 est, dans une certaine mesure, un indicateur de l’importance de l’informel dans la filière datte en Algérie. En effet, l’immobilisation des distributeurs et acheteurs informels nationaux a eu des effets négatifs sur les capacités de vente et d’écoulement des

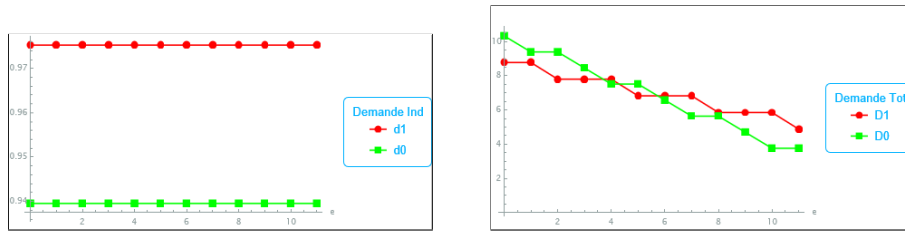


FIGURE 5 – La demande qui s'adresse aux distributeurs.

producteurs de datte. De ce fait, l'éviction de l'informel a contribué à un changement du rapport de force amont/aval en faveur des acheteurs/distributeurs/ exportateurs restés sur le marché qui appartiennent majoritairement au secteur formel.

Références

- [1] Organization WH (2020) WHO director-general's opening remarks at the media briefing on COVID-19-11 March 2020 : Geneva, Switzerland
- [2] Souag, A. L'emploi informel en Algérie : tendances et caractéristiques (2001-2010) Revue MECAS N°12 Juin 2016
- [3] Nait Mohand, N. Qualité des Aliments, Formation des Prix et Disponibilité de l'Offre. Une Approche par la théorie des jeux. Thèse de doctorat soutenue le 19/12/2017 au Département de Recherche Opérationnelle, Spécialité : Mathématiques Appliquées, Option : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision, Faculté des Sciences Exactes, Université de Béjaia.
- [4] Mussa Michael, Rosen Sherwin. 1978. Monopoly and product quality. Journal of Economic Theory, 18(2), 301–317.
- [5] Nait Mohand, N., Hammoudi, A. et Radjef, M.S. (2020). Agriculture raisonnée versus Agriculture Biologique. Une approche d'économie industrielle". Working paper.



La veille stratégique, un outil de gestion d'aide à la prise de décision

BENABDESLAM Chafiaa¹ and BOUDACHE Souad *²

¹Laboratoire RMTQ, Université de Bejaia, Algérie,
Chafiaabenabdeslam@yahoo.fr

²Laboratoire RMTQ, Université de Bejaia, Algérie,
souad.boudache@univ-bejaia.dz

Abstract The objective of this article is to study the strategic watch of exporting companies and its influence on the decision-making of the managers of non-hydrocarbon exporting companies. In doing so, we postulate that the business intelligence behavior of companies determines their competitiveness through the influence of the practice of business intelligence on the decision-making of managers.

After studying strategic intelligence, as well as competitiveness, we carried out a qualitative study with about thirty Algerian non-hydrocarbon exporting companies. We used modeling for data analysis. The results obtained show the positive effect of strategic intelligence on decision-making and the development of the competitiveness of Algerian non-hydrocarbon exporting companies.

MSC: F23; L20; L25

Keywords: Business intelligence; Decision making; Competitive advantage; SmartPLS.

1 Introduction

Pour devenir compétitives les entreprises, et notamment celles des pays émergents, doivent sortir de leur marché local et se hisser sur des marchés transnationaux voire internationaux. Cependant, se lancer à l'international demande une préparation rigoureuse,, et la nécessité de déployer une stratégie de veille afin de se donner les moyens de disposer de tous les éléments d'information s'avère nécessaire.

La gestion de l'information environnementale est un des principaux obstacles auxquels se heurtent les PME internationales [16]. Disposer d'informations pertinentes lors de la prise de décisions et l'élaboration de stratégie est un défi majeur pour les entreprises notamment. Dans ce contexte, la mise en place des processus informationnel, t'elle que la veille stratégique, s'avère indispensable.

*Corresponding Author

Cette communication s'inscrit dans ce cadre de réflexion. Elle vise à étudier le comportement informationnel des PME exportatrices et en particulier la relation entre la pratique de la veille stratégique, la prise de décision et la compétitivité à l'export des entreprises exportatrices hors hydrocarbures.

La problématique posée dans cette recherche peut être formulé comme suit : **Dans quelle mesure la pratique de la veille stratégique, par son appui à la décision, permet-elle d'acquérir des avantages concurrentiels?**

Afin de répondre à cette question de recherche, nous structurons cet article en trois parties. La Première partie portera sur le cadre théorique de la recherche, la deuxième partie portera sur l'exposition de la méthodologie et du modèle de recherche et la troisième partie sur l'analyse est la discussion des résultats.

2 Le cadre théorique de la recherche

Le concept de la compétitivité sera d'abord exposé puis, celui de la veille stratégique au sein des entreprises.

2.1 La compétitivité des entreprises

Les entreprises évoluent dans un monde marqué par la mondialisation où la compétitivité s'impose. En effet, pour se développer l'entreprise doit acquérir des capacités lui permettant d'augmenter son efficacité et son efficacité en particulier dans un contexte fortement concurrentiel [2, 4].

Dans leur ouvrage MARNIESSE et FILIPIAK [19] renvoient la compétitivité d'une entreprise à ses performances à long terme, c'est-à-dire sa croissance. Elle est reliée à ses produits, ses prix, son positionnement. Nous pouvons considérer que la compétitivité est la capacité de l'entreprise à réaliser des performances supérieures à la moyenne (gain de parts de marché).

MARNIESSE et FILIPIAK [19] distinguent quatre types de compétitivité au sein des entreprises : La compétitivité prix : Elle exprime la structure des prix et coûts d'une économie par rapport à celle de ses partenaires commerciaux.

La compétitivité hors prix : Elle est fondée sur l'investissement, la souplesse et la flexibilité de et l'innovation, l'amélioration, et changement.

La compétitivité technologique : fait référence, à la concurrence entre les firmes et les pays qui s'opèrent sur les produits eux-mêmes. Elle se réfère à la recherche, à l'innovation, à l'accumulation du savoir technologique et à la compétence.

La compétitivité structurelle, exprime les capacités internes de production et de commercialisation au sens large. Elle se réfère à la capacité de financement, d'encadrement, de structuration de la filière, etc.

Par ailleurs aborder la compétitivité des entreprises fait intervenir le concept d'avantage concurrentiel. LAMBIN, J.J et CHMPITAZ, R [6], distinguent entre les avantages concurrentiels internes et externes. Un avantage concurrentiel est dit externe lorsqu'il s'appuie sur des qualités distinctives du produit qui constitue une valeur pour l'acheteur soit en diminuant ses coûts d'utilisation soit en augmentant sa performance d'utilisation (permet d'augmenter le prix). Un avantage concurrentiel est dit interne lorsqu'il donne une meilleure productivité et une meilleure rentabilité à l'entreprise et donne une meilleure capacité à résister à une baisse de prix imposé par le marché ou la concurrence.

Quelles que soient les stratégies adoptées pour acquérir un savoir-faire original, les

entreprises doivent en permanence chercher à acquérir des informations et à réactualiser leurs connaissances [25, 11] afin de faire face aux défis de la mondialisation.

2.2 La veille stratégique

La veille stratégique a été largement diffusée dans les années 1990-1995 et devient indispensable dans un environnement de plus en plus incertain. Pour Humbert Lesca [17] la veille stratégique est : Le processus informationnel par lequel l'entreprise se met à l'écoute anticipative des signaux faibles de son environnement dans le but créatif de découvrir des opportunités et de réduire son incertitude. Revelli [24] soutient que la veille stratégique est indispensables à la prise de décisions stratégiques pour renforcer la compétitivité. De ce fait, demeurer en harmonie avec son environnement, s'adapter à ses changements, saisir les opportunités et détecter les menaces sont d'autant de raisons qui rendent la veille stratégique nécessaire pour le management de l'entreprise.

En effet, le management stratégique insiste sur l'identification à la fois des forces/faiblesses internes à l'entreprise et des opportunités/menaces externes de l'environnement. Dans ce sens, la veille stratégique est utilisée de façon défensive pour réagir à des menaces de façon offensive lorsqu'elle trouvera des signaux annonciateurs d'une évolution et que l'entreprise sera prête à saisir une nouvelle opportunité pour créer un marché ou un nouveau produit [12].

Aujourd'hui la compétitivité des entreprises repose largement sur leur capacité de maîtriser l'information de façon efficace. Ce phénomène est généralement expliqué par le fait que la VS aide à prendre les décisions nécessaires à leur survie [7].

2.3 La veille stratégique, outil d'aide à la décision

La prise de décision est un processus non linéaire qui consiste à effectuer un choix supposé éclairé par de l'information et motivé par l'expérience ou l'intuition du décideur, entre plusieurs options envisageables [9]. Il s'agit de bien comprendre la situation pour décider de la solution la plus satisfaisante et la plus acceptable pour les parties prenantes [27, 18].

Dans ce cadre, la veille stratégique serait une observation de l'environnement suivi de la diffusion bien ciblée des informations analysées, sélectionnées et traitées utiles à la prise de décision stratégique [13] afin d'appuyer la décision qui est la raison d'être la veille stratégique à travers la gestion de l'information comme un facteur de production.

En effet, devant l'incertitude qui est difficile à gérer, la maîtrise de l'information devient indispensable pour prendre des décisions. Il n'y a point de décision valable sans bonne information au préalable [20]. Le but du processus de veille stratégique est la collecte et le partage de l'information afin de servir la décision (création de sens).

3 Cadre conceptuel de la recherche

La capacité de l'entrepreneur à localiser et, à exploiter des opportunités d'affaires et à développer de nouvelles façons de concurrencer constituent des facteurs critiques de la survie et de la croissance des entreprises [10]. Il ne suffit pas de détenir de l'information grâce à l'écoute prospective de l'environnement, mais il faut savoir l'utiliser dans les décisions stratégiques [14, 15]. En effet, l'information ne peut avoir de valeur stratégique que si elle est transformée en connaissance. C'est dans cette lignée d'idée que s'inscrivent les travaux

La veille stratégique, un outil de gestion d'aide à la prise de décision

[25] qui démontrent que l'engagement international des entreprises dépend de la sensibilité des dirigeants des entreprises à l'information.

Le recours à des activités de veille de manière étendue à plusieurs environnements (concurrentiel, technologique, commerciale, sociétale), permet aux dirigeants d'entreprise d'acquérir une meilleure connaissance de son environnement, des menaces et des opportunités qui l'imprègnent[1]. Ce qui leur permettra de mieux ajuster la réponse stratégique, les structures, les processus et les conditions de performance.

En réponse à l'incertitude environnementale, les dirigeants des entreprises les plus performantes effectuaient des activités de veille plus fréquemment que leurs homologues des entreprises moins performantes[8, 23]. Pour être compétitif l'entreprise doit être en mesure de créer et de conserver des avantages concurrentiels.

Notre étude s'inscrit dans le même cadre de réflexion. Cependant, au lieu d'étudier l'impact de la veille stratégique sur la performance nous avons étudié l'influence de la veille stratégique sur la compétitivité à l'international des entreprises exportatrices hors hydrocarbures algériennes à travers son influence dans la prise des décisions. A cette fin, nous avons avancé l'hypothèse suivante :

Les entreprises exportatrices les plus compétitives sont celles qui intègrent le produit des activités de veille stratégique lors de la prise de décision.

De cette hypothèse générale deux hypothèses secondaires se déclinent :

La première hypothèse (H1) postule que plus les activités de veille stratégique sont étendues plus les dirigeants détiennent l'information, plus elles ont des avantages concurrentiels.

La deuxième hypothèse (H2) postule que plus les activités de veille sont réalisées d'une manière fréquente plus les dirigeants détiennent l'information plus ont des avantages concurrentiels.

4 Le modèle de recherche

La revue de la littérature nous a permis de proposer un modèle théorique qui nous aidera à expliquer, d'une part, les variables indépendantes à savoir la veille stratégique, et d'autre part, la variable dépendante soit la compétitivité des entreprises exportatrices hors hydrocarbures.

4.1 Les variables du modèle théorique

A travers notre revue de la littérature, nous avons retenu un ensemble de variables manifestantes nous permettant de mesurer nos variables latentes. Le tableau N°1 résume les variables retenues.

Tableau 1 : Les variables du modèle théorique

Variabes latentes	Variabes manifestantes	Les items	auteurs
la veille stratégique	L'étendu du champ de veille	Veille concurrentielle Veille technologique Veille commercial Veille environnemental	<u>Daft, Sormunen</u> et Parks (1988) de Beal (2000)
	La fréquence des activités de veille stratégique	Détection des besoins en information Collecte de l'information Analyse de l'information Diffusion de l'information Création de connaissance	<u>Daft, Sormunen</u> et Parks (1988) de Beal (2000)
La compétitivité à l'export	L'innovation	Innovation produit Innovation organisationnel Innovation concurrentiel Innovation commercial	(LAMBIN, J.J et CHMPITAZ, R (2000), Duncan et Weiss (1979), Drucker (1985)),
	La qualité des produits exportés	Investissement en TIC Utilisation des TIC Introduction des TIC dans l'organisation Formation en TIC	

Source : Elaboré par les auteurs

Nous soutenons, dans ce présent travail, que la sensibilité des dirigeants à l'information est l'un des facteurs qui détermine la compétitivité des entreprises exportatrices et que la sensibilité des dirigeants à l'information des entreprises est déterminée en amont par la pratique de veille stratégique. La sensibilité des dirigeants à l'information sont utilisées dans notre modèle comme une variable médiatrice.

Pour mesurer la sensibilité du dirigeant à l'information nous avons retenu les items suivants : l'utilisation des informations issues de la veille lors de la prise de décision, l'utilisation de l'information issue de la veille lors du développement des stratégies international, l'utilisation des informations issues de la veille pour adapter leurs produits aux attentes des marchés étrangers.

5 Methodologie de recherche

La méthodologie de recherche utilisée est basée sur des données empiriques recueillies par le biais d'un questionnaire. En effet, la nature causale de la problématique de recherche nous a conduits à privilégier une méthodologie d'analyse de données quantitatives [26]. Nous avons constitué un échantillon de 33 entreprises exportatrices hors hydrocarbures algériennes, Le questionnaire qui a servi à la réalisation de l'enquête comporte environ 50 questions principales. <https://www.overleaf.com/project/63511f41e9e3cb46ea66ae32> Les questions posées aux chefs d'entreprises portent sur leurs perceptions, les items servis pour la mesure des manifestantes sont représentés sur une échelle de Likert allant de 1 à 5.

La méthode des équations structurelles, en particulier celle des moindres carrés partiels (PLS, Partial least squares), a été utilisée pour la vérification des hypothèses de recherche. Pour réaliser notre analyse, nous avons testée deux modèles (Figures 2 et 3). Chacun se

6 La vérification des propriétés empiriques du modèle conceptue

La Dans un premier temps, pour satisfaire les conditions de validité convergente et de validité discriminante, nous avons relevé les corrélations entre chaque variable manifeste et sa variable latente. Dans les deux modèles les items l'innovation produit et intégration de l'information lors de l'élaboration des stratégies internationales présentent des corrélations inférieures à 0.7. Les items ont été écartés dans les deux modèles (les figures 2 et 3).

Toutes les variables retenues dans notre modèle satisfont la condition de validité convergente. (Les figures 4 et 5)

Figure 1 : Teste de corrélation entre les variables manifestes et variables latentes du deuxième modèle (smart PLS, n = 33)

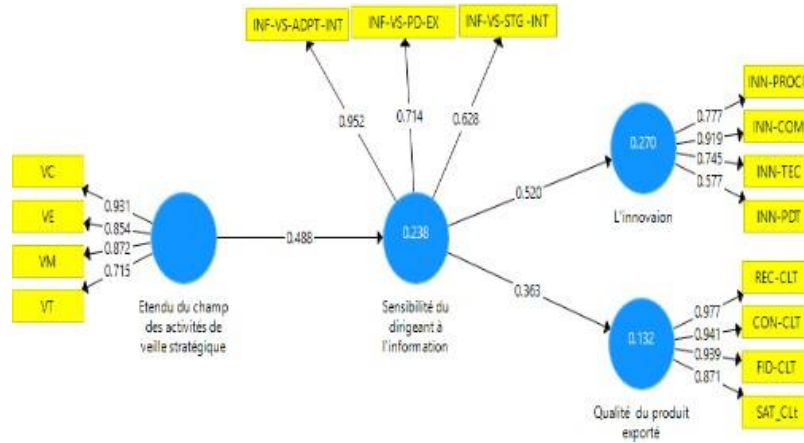


Figure 2 : Teste de corrélation entre variables manifestes et variables latentes du deuxième modèle (smart PLS, n = 33)

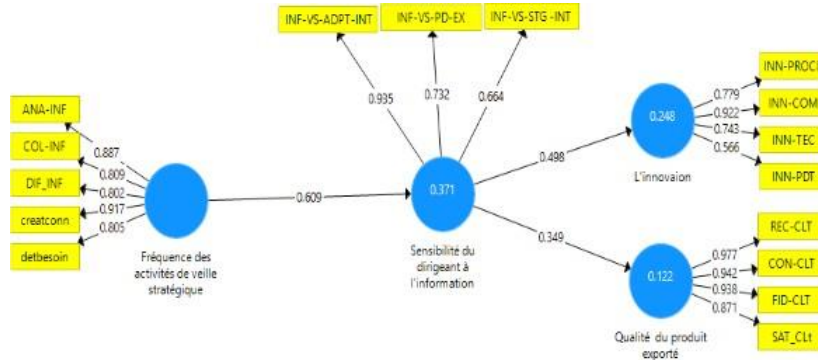


Tableau 2 : La validité discriminante du premier modèle

	Alpha de Cronbach	rho_A	Fiabilité composite	la variance moyenne extraite (AVE)
Etendu du champ des activités de veille stratégique	0.869	0.907	0.910	0.718
Innovation	0.764	0.802	0.864	0.681
Qualité du produit exporté	0.950	0.974	0.964	0.870
la sensibilité du dirigeant à l'information	0.701	1.108	0.838	0.725

Tableau 3 : La validité discriminante du deuxième modèle

	Alpha de Cronbach	rho_A	Fiabilité composite	la variance moyenne extraite (AVE)
Fréquence des activités de veille stratégique	0.899	0.905	0.926	0.714
Innovation	0.764	0.808	0.864	0.681
Qualité du produit exporté la	0.950	0.975	0.964	0.870
sensibilité du dirigeant à l'information	0.701	0.979	0.844	0.732

Les valeurs de l'Alpha de Cronbach et RHO de Dillon Goldstein sont supérieures au seuil de représentativité (supérieur à 0,7) dans les deux modèles. Ce qui indique que les variables traduisent une seule et même variable latente.

Concernant la fiabilité des mesures, Seuls les niveaux de fiabilité supérieurs à 0,7 sont acceptés. Les scores réalisés par chaque construit sont supérieurs à ce seuil, ce qui indique une bonne consistance des mesures utilisées. La variance extraite moyenne (AVE) pour chaque construit est supérieure à 0,5. Ceci veut dire que plus de la moitié de la variance d'un construit n'est pas due aux erreurs de mesure. Ceci démontre une bonne consistance interne des deux modèles.

Tableau 4 : La validité convergente du deuxième modèle

	Etendu du champ des activités de veille stratégique	L'innovation	La sensibilité des dirigeants à l'information	Qualité du produit exporté
Etendu du champ des activités de veille stratégique	0.847			
L'innovation	0.417	0.825		
Qualité du produit exporté	0.484	0.575	0.933	
La sensibilité des dirigeants à l'information	0.534	0.550	0.357	0.852

Tableau 5 : La validité convergente du deuxième modèle

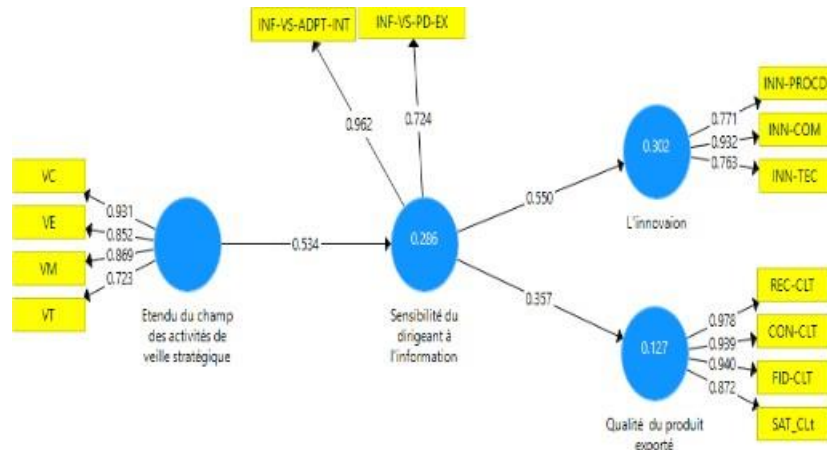
	Fréquence des activités de veille stratégique	L'innovation	La sensibilité des dirigeants à l'information	Qualité du produit exporté
Fréquence des activités de veille stratégique	0.845			
L'innovation	0.398	0.825		
Qualité du produit exporté	0.414	0.573	0.933	
La sensibilité des dirigeants à l'information	0.650	0.537	0.344	0.856

Source : Elaboré par les auteurs

L'analyse des données des deux tableaux 4 et 5, expliquent que les valeurs des racines carrées des VME correspondantes aux construits sont supérieures aux coefficients de corrélations entre les construits. Nous pouvons avancer que les deux modèles satisfont les conditions d'unidimensionnalité, de fiabilité et de validité et sont prêts être tester.

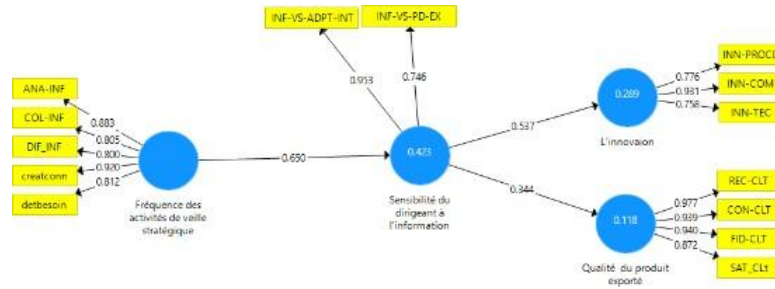
6.1 La relations entre les construits dans le modèle

Figure 3 : La validité discriminante du deuxième modèle



Source : Elaboré par les auteurs

Nous notons que dans le modèle, les valeurs liant la sensibilité du dirigeant à l'information aux trois construits (fréquence de la veille stratégique, l'innovation et la qualité du produit exporté) sont positives et significatives. Ceci nous permet de valider la première hypothèse de recherche H1.

Figure 4 : La validité discriminante du deuxième modèle

Source : Elaboré par les auteurs

En ce qui concerne l'examen des coefficients de régression, ils valident pleinement l'hypothèse H2. En effet ; Les coefficients de régression liant l'effet de la sensibilité du dirigeant à l'information et l'étendu du champ de la veille stratégique, l'innovation et la qualité du produit exporté sont positifs et significatifs.

6.2 Discussion des résultats

La pratique de la veille stratégique est l'un des déterminants de la prise de décision. Nos résultats montrent que les dirigeants des entreprises échantillonnées utilisent le produit de leur veille dans la prise de décision lors du développement des stratégies à l'international. Nos résultats confirment que la veille stratégique est utilisée d'une fréquence plus au moins forte, permettant ainsi de suivre les évolutions des marchés étrangers. Les entreprises échantillonnées veillent sur leur environnement, et sont conscientes de la nécessité de traquer les informations relatives pour la prise de décision stratégique. Ces premiers résultats sont en adéquation avec ceux de Boukrif et al. [3, 5].

Au niveau international, l'intensification de la concurrence impose des contraintes et exigences auxquelles nos exportateurs ne peuvent se soustraire afin de soutenir le processus décisionnel.

Pour exporter, l'exportateur doit être en conformité avec les prescriptions du marché à l'exportation. Notre échantillon est caractérisé par 0,81 d'entreprises certifiées contre 0,38 qui ne le sont pas. Cette situation impose aux entreprises étudiées d'adapter leurs produits aux prescriptions en vigueur sur le marché cible. Pour ce faire, elles ont dû se procurer des informations sur les prescriptions techniques en vigueur.

En ce qui a trait à l'innovation, 0,68 d'entreprises ne sont pas brevetées contre 0,31 qui le sont. Les interviewés ont répondu qu'ils sont plus dans des améliorations de leurs produits et processus. L'innovation de processus consiste à la mise en œuvre d'une méthode de production, de distribution et de commercialisation nouvelle ou sensiblement améliorée, mais on se rapproche plus d'une amélioration ou de développement que d'une innovation.

Néanmoins, pour un développement d'un produit existant ou d'innovation, la pratique de la veille stratégique est indispensable, car elle permet la maîtrise de l'information est le suivi du rythme rapide du changement.

La pratique de la veille se présente en effet comme un véritable système géré visant à transformer des informations brutes collectées en recommandations d'actions. La pratique de la veille s'avère être un véritable outil de pilotage de l'entreprise grâce à son soutien en amont au processus de décision. En effet, la pratique de la veille stratégique permettrait aux décideurs de décider de manière plus confortable et à les rassurer dans leurs choix.

Nos résultats se rapprochent de ceux d'AMABILE S., et al. ainsi que ceux de RAMAN-GALAHY [25, 21, 22].

À savoir, la présence sur des marchés étrangers est appuyée par veille stratégique car elle permet de renforcer leurs connaissances des marchés étrangers.

7 Conclusion

Cette recherche vise à comprendre l'influence des activités de veille stratégique sur la prise de décision d'un côté. Et d'un autre côté, de déterminer l'influence de la prise de décision, fondées sur le produit de la veille stratégique, dans le développement des avantages concurrentiel.

Les résultats de notre étude montrent que la compétitivité sur des marchés étrangers peut être soutenu par la pratique d'activités de veille stratégique. En effet, la veille stratégique représente un maillon fondamental du management international. Egalement, nos résultats soulignent l'influence positive de l'intégration des informations stratégiques issu de la pratique de la veille stratégique dans la prise de décision.

Au final, les résultats auxquels nous nous sommes parvenu au moyen de la méthode PLS confirment la vraisemblance de toutes les hypothèses de recherche que nous avons avancé. Des relations de causalité positives et fortement significatives ont été observées entre, d'une part la veille stratégique, la prise de décision. Et entre la prise de décision et la compétitivité à l'international. Soulignons que nos résultats ne doivent être compris que relativement aux limites de la recherche.

En effet, sur le plan théorique, la présente recherche soulève quelques limites liées principalement à la non-prise en compte d'autres dimensions de l'engagement à l'international tels : la structure organisationnelle, l'expérience à l'international, etc. Au niveau de la pratique de veille stratégique, d'autres variables pourraient être ajoutées, nous identifions : les moyens organisationnels, les sources d'information, etc.

Références

- [1] Beal, R.M. Competing Effectively: Environmental Scanning, Competitive Strategy, and Organizational Performance in Small Manufacturing Firms. *Journal of Small Business Management*, 38(1), 27-47(2000).
- [2] Benabdeslam, C., Boukrif, M.: Analyse de l'influence de la veille stratégique sur la compétitivité des entreprises algériennes exportatrices hors hydrocarbures. *Roa Iktisadia Review*, 10(2), 221-235(2020).
- [3] Boukrif, M., Taguelmint, M.Z.: Les facteurs déterminants pour l'émergence d'une pratique de veille stratégique. (Doctoral dissertation, Université A.MIRA BEJAIA).(2017).
- [4] Brouard, F.: développement d'un outil diagnostique des pratiques existantes de la veille stratégique auprès des pme. Université du Québec à Trois-Rivières, MAI(2004).
- [5] Cohen C. veille et intelligence stratégiques, Ed Lavoisier, Paris, .p116-121(2004)
- [6] Chmpitaz, R., Lambin, J.J. marketing stratégique et opérationnel, éd DUNOD,(2002).

- [7] Cuenot, P., Pelletier, A. : Intelligence économique, mode d'emploi. Pearson Education France, (2013).
- [8] Daft, R. L., Sormunen, J., Parks, D. Chief. Executive scanning, environmental characteristics and company performance: An empirical study. *Strategic management journal*, 9(2), 123-139(1988).
- [9] Drevon M. D., Dufour, C. E. : Veille stratégique et prise de décision : une revue de la littérature. *Documentation et bibliothèques*, 64(1), (2018).
- [10] Drucker, P. Les entrepreneurs. Paris. L'Expansion Hachette(1985).
- [11] Ghoshal, S., Kim S.K. : Building effective intelligence systems for competitive advantage, *Sloan Management Review*, 49-58(1986).
- [12]
- [13] HERMEL, L. Maîtriser et pratiquer... Veille stratégique et intelligence économique, Paris : AFNOR (2007).
- [14] JAKOBIAK F, l'intelligence économique, édition D'organisation, Paris(2001).
- [15] KUMAR, K., SUBRAMANIAN, R.; YAUGER, C. Examining the market orientation-performance relationship: a context-specific study. *Journal of management*, vol. 24, no 2, 201-233 (1998) .
- [16] KUMAR, K., SUBRAMANIAN, R., YAUGER, C.. The scanning of task environments in hospitals: An empirical study. *Journal of Applied Business Research*, vol. 10, p. 104-104(1994),
- [17] LEONIDOU, L. C. et THEODOSIOU, Marios. The export marketing information system: an integration of the extant knowledge. *Journal of World Business*. vol. 39, no 1, 12-36 (2000).
- [18] LESCA, H. Veille stratégique pour filemanagement stratégique. Etat de la question et axes de recherche. *Economies et sociétés*. vol. 20, no 5, p. 31-50 (1994).
- [19] March, J. G. A primer on decision-making : how decisions happen. New York : The Free Press.(1994).
- [20] MARNIESSE, S., . Compétitivité et mise à niveau des entreprises. Notes et Documents. no 1, (2003).
- [21] PATEYRON, E.A. . La veille stratégique. Paris : Economica.(1998).
- [22] RAYMOND, L., RIVARD, S., VERREAULT, D. Resource-based view and competitive strategy: An integrated model of the contribution of information technology to firm performance. *The Journal of Strategic Information Systems*. vol. 15, no 1, p. 29-50(2006).
- [23] RAMANGALAHY, C. Capacité d'absorption de l'information, compétitivité et performance des PME exportatrices: une étude empirique (Absorptive capacity of information, competitiveness and exporting SMEs' performance: an empirical study). Thèse de doctorat. PhD dissertation, University of Montréal, Montréal.(2001).
- [24] RAMANGALAHY J. Competitive strategy and performance of exporting SMEs: An em-

pirical investigation of the impact of their export information search and competencies. Entrepreneurship Theory and Practice, vol. 27, no 3, p. 227-245 (2003).

- [25] REVELLI, C. Intelligence stratégique sur Internet : Comment développer des activités de veille et d'intelligence économique sur le web. (1998).
- [26] SERGE A. et al., Pratiques de veille stratégique par les PME exportatrices ,Management Avenir.4 (n°44), p. 15-33 (2011).
- [27] THIÉTART, R.A. Méthodes de recherche en management-4ème édition. Dunod (1999),
- [28] Simon, H. A. The new science of management decision (2e éd.). Englewood Cliffs : Prentice-Hall.(1977).



Approche méthodologique d'aide à la décision spatiale en groupe

Mebrek Abdellah¹, Mendas Abdelkader², and Makranfar Zohra³

¹ Agence Spatiale Algérienne, Centre des Techniques Spatiales, Arzew, Algérie,
amebrek@cts.asal.dz

² Agence Spatiale Algérienne, Centre des Techniques Spatiales, Arzew, Algérie,
amendas@cts.asal.dz

³ Agence Spatiale Algérienne, Centre des Techniques Spatiales, Arzew, Algérie,
zmakranfar@cts.asal.dz

Résumé L'objectif principal de ce travail est de proposer une méthodologie permettant de prendre en considération les aspects multicritères et multi-acteurs et montrer leur importance dans l'aide à la décision spatiale. Il s'agit de proposer une approche de prise de décision en groupe. En effet, les membres d'une équipe pluridisciplinaire n'ont pas besoin d'être tous d'accord sur l'importance relative des critères impliqués ou sur le classement des alternatives. Chaque membre donne son propre jugement et contribue de manière distincte et identifiable à la recherche d'une solution de compromis. Douze critères (Réserve Facilement Utilisable, Drainage, Perméabilité, Potentiel d'hydrogène (pH), Conductivité électrique, Calcaire actif, Capacité d'échange cationique, Texture du sol, Profondeur utile du sol, Pente, Disponibilité de la main-d'œuvre, Proximité (routes)) regroupés en cinq facteurs (agronomiques, aménagement et socio-économie, mise en valeur et amélioration des terres, conservation de la nature et protection de l'environnement) ont été utilisés dans cette étude et quatre experts (agronome, hydrologue, économiste et écologiste) ont été retenus. Les poids des critères sont évalués par l'utilisation de la méthode AHP (Analytic Hierarchical Process) avec l'aide des experts du domaine. Ils sont introduits dans un modèle de convergence de consensus (MCC) pour obtenir des poids de critères consensuels qui seront utilisés pour évaluer l'aptitude des terres à l'agriculture. Les performances des décideurs sont agrégées en utilisant la méthode multicritère d'aide à la décision ELECTRE Tri. Toutes les méthodes de traitement requises sont implémentées dans un environnement SIG. La méthodologie adoptée a été appliquée sur l'aptitude des terres à l'agriculture dans la plaine de Mleta située à l'ouest de l'Algérie.

Mots clés : Décision spatiale ; Analyse MultiCritères de Décision ; SIG ; Agriculture ; Convergence de consensus.

1 Introduction

Un problème décisionnel spatial, qui implique sans doute de nombreux critères et de multiples acteurs (experts), peut être source de confusion en l'absence d'un processus de

décision logique et bien structuré. Ainsi, pour parvenir à la meilleure prise de décision, l'avis de chaque intervenant d'une équipe pluridisciplinaire et l'importance de chaque critère impliqué dans la décision à prendre doivent être évalués puis inclus dans le processus de décision. Aboutir à un consensus général, à l'intérieur de cette équipe, sur l'importance relative des différents critères peut s'avérer complexe et difficile à atteindre lors de la prise de décision. L'analyse multicritère d'aide à la décision (AMCD) permet de prendre en considération la multiplicité, la divergence et la nature des critères en vue d'atteindre des compromis acceptables[1]. Elle offre la possibilité de comparer des actions potentielles en fonction de problématiques générales définies (Choix, Tri, Classement et Description) [2]. Il est évident que les problèmes décisionnels à référence spatiale présentent toutes les caractéristiques des problèmes multicritères ce qui veut dire que le traitement par l'évaluation multicritères devient incontournable. Cependant, les approches d'AMCD toutes seules ne prennent pas en compte l'aspect spatial des problèmes de décision. En revanche, les SIG, outils puissants de gestion, de traitement et d'analyse des données, présentent toujours des limites en matière d'aide à la décision, notamment lorsque plusieurs critères et objectifs parfois contradictoires sont en jeu, mais, ils sont bien adaptés pour répondre aux insuffisances de l'approche de l'analyse multicritère. Ainsi, il semble que l'intégration du SIG et l'AMCD constitue la meilleure solution pour combler leurs lacunes respectives[3]. C'est dans ce contexte que cette étude a pour objectif principal de prendre en considération les aspects multicritères et multi-acteurs et montrer leur importance dans l'aide à la décision spatiale. Il s'agit de proposer aux décideurs une approche scientifique pour les aider à prendre une décision en groupe bâtie sur des bases scientifiques.

2 Méthodes et outils

Le problème d'agrégation des préférences individuelles en vue d'établir une préférence collective a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche dans la littérature relative à la décision en groupe. En effet, les décideurs ne sont pas obligés de donner le même poids au même critère. Il faut donc trouver un résultat de compromis. En réalité, le décideur lorsqu'il est unique n'a pas connaissance de tous les paramètres. Se couper de l'avis des autres peut donc représenter des problèmes. La décision personnelle est donc subjective dans la mesure où les choix des individus varient selon leurs préférences. Quant à la décision en groupe, elle présente un degré de complexité qui nécessite d'être bien géré. Son objectif principal est de tirer le meilleur profit du groupe dans la discussion et trouver un consensus. Le groupe permet une analyse plus complète des informations selon plusieurs points de vue (diversité des opinions). Les membres du groupe se sentent plus engagés face à la décision et sont donc plus motivés à contribuer à sa mise en œuvre. Néanmoins, la participation d'un grand nombre de personnes aux discussions ralentit le processus décisionnel, les décisions de groupe exigent généralement plus de temps que les décisions individuelles. La problématique traitée étant l'analyse d'aptitude des terres à l'agriculture, la solution idéale serait donc d'implémenter dans un SIG des modules qui comprendront les méthodes de classification les plus importantes, ainsi que les méthodes d'analyse appropriées, indépendamment des données, de la région d'étude ou du type de culture. Dans le système élaboré, nous avons implémenté la méthode de classification FAO, les méthodes d'AMCD AHP et Electre Tri et un modèle de convergence de consensus dans le logiciel SIG open source QGIS.

2.1 Système d'Information Géographique (SIG)

La classification d'aptitude des terres est un problème décisionnel qui requiert, en entrée, un ensemble de données géo-référencées. Un système d'information géographique, par sa capacité de stockage, de gestion, d'analyse, de modélisation et d'affichage de données à référence spatiale, se présente comme l'outil le plus adéquat pour appréhender les problèmes de décision à référence spatiale[4]. Il constitue une véritable aide pour les utilisateurs notamment en ce qui concerne la gestion et la représentation des données spatiales. Il joue un rôle très important dans le cadre de l'aménagement du territoire (étude d'impact, choix des sites, etc.). Afin de faire évoluer les SIG vers un véritable outil d'aide à la décision, il est recommandé de les coupler avec des outils de l'analyse multicritère d'aide à la décision (AMCD)[5].

2.2 Méthode Electre Tri

Il existe plusieurs méthodes Electre (Elimination Et Choix Traduisant la Réalité) associées aux différents types de problématiques (choix, tri et rangement)[2]. Elles appartiennent à l'école française basée sur l'approche du « bas vers le haut » dite aussi méthodes de surclassement. Nous nous intéresserons à la méthode Electre Tri qui traite la problématique de tri (la classification d'aptitude des terres étant une problématique de tri). Elle relève de la problématique d'affectation (β) : le problème est posé en termes d'attribution de chaque action potentielle à une catégorie prédéfinie « C_h » d'une façon que chaque catégorie est bornée inférieurement et supérieurement par deux actions de référence « b_{h-1} » et « b_h », et chaque action de référence « b_h » sert donc de borne à deux catégories, l'une supérieure « C_{h+1} » et l'autre inférieure « C_h » [6].

2.3 Méthode AHP (Analytic Hierarchy Process)

AHP est une méthode de décision multicritère proposée par Saaty[7], d'inspiration anglo-saxon, basée sur l'approche updown « haut vers le bas ». Elle appartient à la catégorie des procédures d'agrégation complète appelée aussi approche du critère unique de synthèse évacuant toute incomparabilité. Son principe de base est de chercher une fonction qui permet de calculer une valeur correspondante à chaque action. Ensuite, l'action la mieux notée est retenue. Elle consiste à décomposer le problème de décision en un ou plusieurs niveaux hiérarchiques (objectif, critères, sous critères, alternatives) et comparer les critères entre eux, deux à deux, à l'aide d'une échelle de pondération afin de mettre en lumière la meilleure solution[8]. L'importance relative est exprimée par les poids des critères qui sont évalués par une fonction de préférence, obtenue par des comparaisons deux à deux entre les critères. Son application est simple, elle peut se faire par un individu seul ou en groupe.

2.4 Modèle de convergence de consensus

Dans ce travail, le modèle développé par Regan[9] a été utilisé. Il consiste à regrouper les poids des critères individuels pour former un poids consensuel pour le groupe. On suppose que les membres d'un groupe ont des opinions sur l'expertise et la rationalité des autres membres dans le groupe. La première étape du modèle de consensus indique que chaque membre i attribue un poids de respect w_{ij} pour lui-même et pour les autres membres, j , où

$\sum \ll W_{ij} \gg = 1$ [9].

$$W_{ij} = \frac{1 - |p_i^0 - p_j^0|}{\sum_{j=1}^n 1 - |p_i^0 - p_j^0|}, \quad (1)$$

Le poids original (donné par chaque participant) du critère, p_i^0 , devrait être mis à jour pour incorporer les opinions des autres membres du groupe en fonction des poids de respect qu'il leur a attribués. Cela donne une moyenne pondérée pour la nouvelle affectation du poids du critère du membre i comme suit :

$$p_i^1 = W_{i1}p_1^0 + W_{i2}p_2^0 + \dots + W_{in}p_n^0; \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Si un consensus n'est pas atteint lors de la première itération et si les participants conservent les mêmes poids de respect, alors on passera à l'étape 2 (1^{er} cycle d'agrégation) des poids des critères pour le participant i [9] :

$$p_i^2 = W_{i1}p_1^1 + W_{i2}p_2^1 + \dots + W_{in}p_n^1; \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Lorsque tous les participants sont considérés simultanément, le modèle de consensus est formalisé comme suit[9] :

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1} & W_{n2} & \dots & W_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \\ \dots \\ p_n^0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Où W est la table des poids de respect constant et P est la colonne des poids du critère initial pour chacun des n membres du groupe. Un poids du critère d'état-un (c'est-à-dire les poids de critères issus du premier cycle d'agrégation) résulte de la multiplication matricielle WP , un poids de critère d'état-deux (lorsque les mêmes poids de respect sont maintenus) est calculé comme $W(WP) = W^2P$ et l'état- m est W^mP . Quand m s'approche de l'infini, les poids des critères actualisés convergent vers un seul nombre qui est le poids du critère consensuel (p_c , c'est-à-dire $p_c = p_1^c = p_2^c = \dots = p_n^c$ où c est le nombre d'itérations qu'il faut pour atteindre la convergence). La convergence est garantie lorsque les poids de respect sont constants (et non triviaux) tout au long du processus d'itération pour chaque agent[9]. Les composants de l'outil réalisé dans le cadre de ce travail s'ajoutent à QGIS sous une palette de barre d'outils. Quatre interfaces ont été conçues. Il s'agit de l'interface AHP destinée au calcul des poids initiaux des critères, de l'interface du modèle de convergence de consensus dédiée à la détermination des poids de consensus, de l'interface Electre Tri permettant d'agréger les performances des décideurs et d'affecter les différents unités de terre à des catégories prédéfinies et de l'interface Borda qui consiste à affiner les meilleurs résultats obtenus.

3 Applications et résultats

Dans cette application, il s'agit d'identifier les terres aptes à la culture du blé dur à l'aide des méthodes multicritères Electre Tri et AHP et un modèle de convergence de consensus

intégrés dans un SIG. La plaine de M'leta dans la wilaya d'Oran, qui a fait l'objet d'une étude pédologique réalisée par l'Agence Nationale des Ressources Hydrauliques (ANRH) en 2005 et d'un projet d'aménagement hydro-agricole par le groupement de bureaux d'études SCET-Tunisie / ENHYD-Algérie en 2007, semble une zone idéale pour mettre en œuvre notre approche méthodologique adoptée vu la disponibilité de la majorité des données et informations nécessaires. Les informations, concernant la zone d'étude, présentées dans notre projet proviennent des études effectuées par SCET-Tunisie / ENHYD-Algérie en 2007[10]. En utilisant la méthode AHP, les poids des facteurs et des critères ont été calculés pour les quatre experts (agronome, hydrologue, économiste et aménagiste. Pour tenir compte de l'avis des différents participants dans la prise de décision et aboutir aux poids finaux (consensuels), le modèle de convergence de consensus développé par Regan [9] a été appliqué aux critères définis pour l'identification des terres aptes à l'agriculture. La convergence a été atteinte en quelques itérations. Il ressort clairement qu'aucun poids de deux membres du groupe n'est identique. Plus important encore, aucun membre du groupe n'a classé les critères dans le même ordre d'importance. Deux cartes ont été réalisées : une pour l'affectation selon la procédure optimiste et l'autre pour l'affectation selon la procédure pessimiste. Puisqu'on utilise une combinaison SIG-AMCD avec intégration complète, l'échange de données entre ces deux logiciels (QGIS et Electre Tri) se fait d'une façon automatique. Les résultats obtenus ne sont pas définitifs, ils restent expérimentaux.

4 Conclusion

Les travaux réalisés au cours de cette étude consistaient à définir une approche méthodologique permettant une aide à la prise de décision spatiale dans un cas multicritères et multi-décideurs. Cette approche est basée sur un processus d'analyse multicritère d'aide à la décision spatiale qui consiste à établir la liste des alternatives à évaluer, à définir une famille exhaustive des critères d'évaluation et à les pondérer. Afin de prendre en considération l'aspect de décision en groupe, il a été nécessaire d'exprimer l'importance individuelle des critères, en utilisant la méthode AHP, par les différents participants à la prise de décision pour enfin déterminer les poids finaux des critères, en utilisant un modèle de convergence de consensus qui aide à parvenir à un consensus sur des problèmes de décision complexes. Les performances des décideurs sont agrégées par la méthode d'AMC ELECTRE Tri. Les algorithmes nécessaires ont été intégrés dans un environnement SIG. La méthodologie proposée a permis de prendre en considération la multitude d'intervenants, issus de différents domaines, dans un processus décisionnel pour arriver à une décision consensuelle. L'identification des terres aptes à l'agriculture a bien montré le potentiel des méthodes d'analyse multicritère et multi-décideurs en matière d'aide à la décision. Il est possible que ces résultats ne présentent pas une classification définitive, mais plutôt un outil d'aide mis à la disposition du décideur pour consolider sa prise de décision. Les applications réalisées ont aussi démontré la nécessité d'utiliser les SIG, lors de ce genre de travaux, pour la préparation des données et l'affichage des résultats. Durant cette étude, toutes les données et les informations nécessaires à l'identification des terres aptes à l'agriculture ont été identifiées et organisées.

Références

- [1] Vincke, P. : Multicriteria Decision-Aid. Chichester : Wiley(1992).
- [2] Roy, B., Boyssou, D. : Aide multicritère à la décision : Méthodes et cas. Economica, Paris (1993).
- [3] Laaribi, A. : Systèmes d'information géographique et analyse multicritère : intégration pour l'aide à la décision à référence spatiale. Thèse présentée pour l'obtention du grade de philosophiae Doctor (Ph. D.), Université Laval, Faculté de foresterie et de géomatique, Centre de recherche en géomatique (1995).
- [4] Mendas, A., Delali, A. : Integration of MultiCriteria Decision Analysis in GIS to develop land suitability for agriculture. Application to durum wheat cultivation in the region of Mleta in Algeria. Computers and Electronics in Agriculture, 83, 117-126 (2012).
- [5] Chakhar, S., Mousseau, V. : Multicriteria Spatial Decision Support Systems. In : Encyclopedia of GIS. Shashi Shekar, Hui Xiong (Eds), pp. 753-758 (2008).
- [6] Maystre, L. Y., Pictet, J., Simos, J. : Méthodes multicritères Electre. Description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (1994).
- [7] Saaty, T. L. : The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill, New York, NY, 287 pages (1980).
- [8] Mendas, A., Mebrek, A., Mekranfar, Z. : Comparison between two multicriteria methods for assessing land suitability for agriculture : application in the area of Mleta in western part of Algeria. Environ Dev Sustain 23, 9076–9089 (2021).
- [9] Regan, H. M., Colyvan, M., Markovchick-Nicholls, L. : A formal model for consensus and negotiation in environmental management. Journal of Environmental Management 80 167–176 (2006).
- [10] SCET-Tunisia/ENHYD-Algérie. Hydro-agricultural improvements study of M'leta – Oran, Algeria (2007).



Qualité nutritionnelle des aliments et risque sanitaire, intervention publique et stratégie des acteurs: une approche de l'économie industrielle

Manel Zahra Boutouis*¹ and Abdelhakim Hammoudi²

¹Centre de recherche en Economie Appliquée pour le Développement, CREAD, Rue Djamel Eddine El-Afghani - El Hammadia BP.197, Algérie.,
boutouis.man@gmail.com

²Université Paris-Saclay, INRAE, AgroParisTech, Paris-Saclay Applied Economics, 91120, Palaiseau, France.,
abdelhakim.hammoudi@inra.fr

Résumé Cet article contribue aux débats émergents sur l'efficacité des politiques nutritionnelles de promotion d'une alimentation saine. En adaptant le modèle d'Hotelling (1929), nous visons d'examiner deux politiques nutritionnelles publiques : les campagnes d'information publiques (CI) et une politique de reformulation obligatoire basée sur l'imposition d'un Standard de Qualité Minimum (SQM), pour réduire la teneur d'un nutriment nocif pour la santé, à l'exemple du sucre, le sel, et le gras. Le modèle permet de prendre en compte deux dimensions associées au profil des consommateurs : leur goût pour le produit et leur perception du risque associé à la consommation de ces nutriments. Il nous permet également, de prendre en compte l'effet de la régulation sur la concurrence industrielle et la conséquence sur le risque sanitaire. L'objectif de cet article est d'analyser l'efficacité de chacun de ces deux instruments à réduire le risque sur la santé des consommateurs à travers notamment, l'incitation des firmes à améliorer la qualité de l'offre alimentaire (incitation à la reformulation des produits offerts) tout en évaluant par ailleurs, les effets possibles de ces politiques en matière d'amélioration de bien être des consommateurs et le bien-être collectif. Enfin, nous analysons dans quelle mesure et sous quelles conditions la combinaison de ces deux instruments est plus efficace que si chacun est appliqué seule. Nous montrons que l'efficacité à réduire le risque d'une politique par rapport à une autre est influencée d'une part par la sensibilité du consommateur par rapport aux effets de l'alimentation sur sa santé mais aussi par le niveau de son attachement au goût du nutriment. Nos résultats montrent ainsi que le régulateur, en choisissant l'une ou l'autre des deux politiques (campagnes informationnelles ou SQM) peut avoir des difficultés à concilier les différents objectifs économiques et sociaux que sont i) la promotion d'une offre alimentaire d'un niveau élevé de qualité nutritionnelle, ii) l'atteinte d'un niveau relativement élevé de bien-être des consommateurs.

*Corresponding Author

1 Introduction

Durant les dernières décennies, les régimes alimentaires ont connu des changements importants, marqués par une forte consommation des produits ultra-transformés denses en énergie (Monteiro Cannon, 2012). L'augmentation accrue de la consommation de ces produits ultra-transformés a été à l'origine de l'émergence d'un grand nombre de problèmes de santé dans le monde (Monteiro, et al, 2019 ; McCain, et al. 2018). De plus en plus de preuves empiriques sont venues confirmer la présence d'un lien entre cette typologie d'aliments et l'occurrence de certaines maladies (Monteiro, et al, 2019). En particulier, des travaux montrent la relation directe ou indirecte entre une consommation excessive de sucre (Stanhope 2015) et l'augmentation des maladies chroniques telles que les Maladies Cardio-Vasculaires, l'obésité, le diabète de type 2, la stéatose hépatique non alcoolique ainsi que le déclin cognitif et certains cancers (Dhurandhar Thomas, 2015 ; Seo, et al. 2019). Cependant, les coûts économiques de ces maladies, notamment en terme de santé humaine, sont trop importants pour être ignorés.

L'évaluation de l'impact des deux politiques que sont l'incitation à la reformulation des produits et les campagnes d'information publiques a fait l'objet d'un grand nombre de recherches pluridisciplinaires. La majeure partie des travaux sont d'essence empirique. Cependant, les résultats obtenus sont souvent contradictoires (Mazzocchi et al. 2017). Face à la diversité des résultats, les modélisations théoriques peuvent être particulièrement utiles pour nuancer les résultats empiriques ou trancher, à travers une approche normative, les différentes pistes qui y sont proposées. Cependant, le sujet est en général assez peu investi par la littérature théorique, à l'exception des travaux de Duvaléix-Treguer, et al., (2012), et Requillart et al. (2016).

Dans le prolongement de cette approche, nous proposons dans cet article, une analyse théorique d'impact de deux politiques nutritionnelles ; l'une est basée sur la sensibilisation des consommateurs à l'effet santé de leur alimentation (campagnes d'information publiques) et l'autre est basée sur le contrôle de la qualité de l'offre des entreprises à travers la reformulation éventuelle de leurs produits (imposition d'un Standard de Qualité Minimum (SQM), il s'agit d'un seuil maximal de sucre autorisé par unité de produit. Nous analysons l'efficacité de chacune de ces deux politiques séparément puis dans un deuxième temps, de façon combinées à savoir une politique mixte : Campagne Informationnelle SQM. Nos résultats ont permis de montrer que le choix d'une politique par rapport à une autre s'avère peu complexe, il dépend à la fois des caractéristiques de l'instrument de régulation publique utilisé (l'intensité des campagnes d'information publique et le niveau du SQM imposé) et du profil des consommateurs (sensibilité par rapport aux effets de l'alimentation sur sa santé). L'effet de ces caractéristiques n'est pas neutre sur les différentes réponses et stratégies des acteurs. Plus particulièrement, nos résultats relèvent certaines incompatibilités entre les objectifs économiques et sociaux (un niveau élevé de bien-être collectif, préserver la santé des consommateurs et leur bien être). Nous montrons par exemple, que lorsque le SQM est très exigeant, ces deux critères de décision (santé et bien-être collectif) sont incompatibles. Nous montrons ainsi que la politique mixte est toujours meilleure sur le plan sanitaire, tandis que la politique SQM est meilleure en termes d'amélioration du bien-être collectif.

L'article est organisé comme suit : la section 2 propose un modèle d'analyse. Nous présentons les résultats dans la section 3, et la conclusion dans la section 4.

2 Modèle

2.1 Hypothèses

Nous proposons un modèle de différenciation horizontale, à la Hotelling, qui prend à la fois les caractéristiques gustatives et sanitaires d'un produit alimentaire. Pour cela, nous considérons deux firmes mono-produit F_0 et F_1 , qui se font concurrence en prix. Les prix fixés par les firmes F_0 et F_1 sont notés respectivement : p_0 et p_1 , les caractéristiques des produits offerts, respectivement x_0 et x_1 . La différenciation des produits offerts par les deux firmes se fait sur une seule dimension, appelée caractéristique du produit, à savoir la teneur d'un nutriment, que l'on suppose nocif pour la santé, à l'exemple du sucre. En se référant à la présentation d'Hotelling, nous supposons que cette caractéristique x_i ($i = 0, 1$)¹ est définie sur le segment $[0, 1]$. Cela permet de représenter à la fois la caractéristique du produit et les préférences des consommateurs. La caractéristique d'un produit est donc un indicateur du goût pour le produit lié à la présence du sucre dans le produit. Les consommateurs sont uniformément distribués sur $[0, 1]$, et supposés hétérogènes, autrement dit, ils ont une préférence différente en matière de goût. Les préférences de chaque consommateur sont représentées par un point (localisation) sur $[0, 1]$.

Sur la même droite sont représentés les produits. Chaque firme doit choisir sa localisation selon la teneur du nutriment qu'elle met dans son produit. Le choix de localisation de chaque firme équivaut à choisir une qualité nutritionnelle de son produit. Sans perte de généralité, nous supposons que F_0 est localisée en 0, représentant une firme produisant le niveau de qualité nutritionnelle de référence, sans nutriment nocif², et F_1 , produisant une qualité nutritionnelle inférieure, et donc elle choisit sa localisation (la teneur du nutriment de son produit) sur $[0, 1]$. Notons qu'une localisation sur le segment faisant référence à un produit avec une teneur donnée de nutriment, cela implique que si ce produit est consommé, il induit sur la santé de ce consommateur un risque (au moins à long terme) associé à la teneur proprement dite (voir figure 1 qui illustre bien les caractéristique du bien et la localisation des firmes).

Chaque consommateur localisé sur $[0, 1]$ est supposé acheter une seule unité de produit (hypothèse d'Hotelling). Confronté à l'offre disponible sur le marché, chaque consommateur fait face à une désutilité mesurée par la différence entre la variété qu'il consomme réellement (localisation du produit offert sur l'axe $[0, 1]$, que l'on note x_i)

1. Pour tout le reste du document, l'indice 0 fait référence à F_0 et l'indice 1 fait référence de sa part à tout ce qui concerne F_1 .

2. Cette hypothèse est classique dans les travaux d'économie industrielle. La firme représente ce que l'on appelle les outside goods qui évitent aux firmes produisant des produits à nutriment indésirables d'être dans des positions de monopoles ou de domination excessive. Pour les sodas par exemple, on peut considérer une concurrence soda sucré versus un soda light (ou versus l'eau tout simplement), un jus de fruit à sucre ajouté ou un jus de fruit sans sucre ajouté, un yaourt avec ou sans sucre. Il est bien sûr possible de considérer deux firmes se concurrençant sur les localisations ; Un tel modèle est techniquement compliqué et ne permet pas d'avoir des résultats exploitables.

et sa variété idéale (la localisation de la préférence du consommateur sur l'axe [0,1], notée X). Dans les modèles de localisation cette désutilité est assimilée à un coût de transport. Dans le présent modèle, nous prenons le cas d'un coût quadratique $(X - x_i)^2$. Autrement dit, la désutilité croît en fonction du carré de la distance entre le choix idéal du consommateur et la localisation du produit que la firme offre sur le marché, et qu'il décide de consommer.

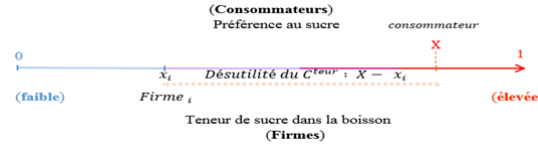


FIGURE 1 – Représentation simplifiée des hypothèses du modèle, en prenant l'exemple de la teneur du sucre dans une boisson..

Des travaux ont apporté des preuves scientifiques sur le fait que les produits alimentaires transformés présentent une menace pour la santé des consommateurs (Canella, et al., 2014 ; Chen, et al., 2018 ; Parra, et al., 2019). En tenant compte de cette asymétrie d'information sur l'aspect nutritionnel du produit et de ses effets à long terme, pour sa santé d'une part, et de l'hétérogénéité des préférences des consommateurs d'autre part, nous définissons l'appréciation de la qualité nutritionnelle, autrement dit, la sensibilité sanitaire ex-post notée $f(\alpha, s)$ comme suit :

$$f(\alpha, s) = 1 - (1 - s)(1 - \alpha). \quad (1)$$

Nous supposons que la sensibilité sanitaire ex-post du consommateur pour la qualité nutritionnelle est définie d'une part, par la sensibilité (initiale) α du consommateur par rapport à l'effet santé associé au nutriment contenu dans le produit qu'il consomme. D'autre part, elle est affectée par les effets que pourraient engendrer les différentes campagnes informationnelles lancées par les autorités publiques. On note par $U(f, x, r, t, p_i, x_i)$, l'utilité que le consommateur obtient s'il achète une unité du produit i chez la firme F_i .

$$U(f, x, r, t, p_i, x_i) = r - p_i - x_i f(\alpha, s) - t (X - x_i)^2. \quad (2)$$

Elle correspond au prix de réserve, noté r à quoi on retranche : le prix p_i du produit de la firme i , la désutilité découlant de la prise en compte de l'impact sur sa santé mesuré par $x_i f(\alpha, s)$, et la désutilité $t (X - x_i)^2$ associée au fait de ne pas consommer un produit correspondant à sa préférence idéale. Où, t indique à quel point le consommateur est prêt à renoncer au goût.

r : est le prix de réserve du consommateur que l'on suppose suffisamment large de sorte que le marché soit couvert. p_i : Le prix du bien de la firme i , ($i = 0, 1$).

Le modèle général que nous proposons, permet d'analyser et de comparer l'efficacité de trois politiques publiques. Pour ce faire, nous mobilisons, les outils de la théorie des jeux, dans la mesure de mettre au clair les interactions stratégiques entre les décisions

du régulateur public (les différents outils mobilisés pour réguler la qualité nutritionnelle des produits alimentaires), et les réponses stratégiques des firmes, en termes de stratégies prix et qualité nutritionnelle.

2.2 Le jeu

Nous définissons le jeu en trois étapes suivant : **À la première étape**, les autorités publiques décident de l'une des trois politiques à mettre en place : investir en campagnes informationnelles (et donc choisir un niveau d'investissement correspondant), imposer un SQM sur la teneur du nutriment nocif (et donc choisir un niveau de SQM), la combinaison de ces deux instruments.

À la deuxième étape, la firme F_1 décide de la qualité nutritionnelle de son produit (localisation x_1 sur $[0,1]$).

À la troisième étape, les deux firmes se livrent à une concurrence en prix.

2.3 Résolution

Avant de commencer la résolution de ce problème, il faut tout d'abord définir les fonctions de demande de chaque firme. Pour ce faire, nous déterminons la localisation du consommateur indifférent. Un consommateur est indifférent d'acheter à F_0 ou à F_1 , si l'achat chez l'une ou l'autre des deux firmes, procure la même utilité, c'est-à-dire $U_0 = U_1$. Les consommateurs qui sont localisés à gauche de du consommateur indifférent constitueront la clientèle de F_0 , et ceux qui sont localisés à droite constitueront la clientèle de F_1 .

Lorsqu'un consommateur achète à la firme F_0 ou F_1 , il en retire une utilité U_0 , U_1 , données respectivement par :

$$U_0 = r - p_0 - t X^2; \quad (3)$$

$$U_1 = r - p_1 - (1 - (1 - s)(1 - \alpha)) x_1 - t (X - x_1)^2. \quad (4)$$

Les consommateurs étant uniformément répartis sur l'axe $[0, 1]$, la localisation \tilde{X} du consommateur indifférent correspond également à la demande D_0 adressée à la firme F_0 . Les fonctions de demandes sont données respectivement :

$$D_0 = \tilde{X} = \frac{p_1 - p_0 + (s + (1 - \alpha) + t x_1) x_1}{2 t x_1^2}; \quad (5)$$

$$D_1 = 1 - \tilde{X} = \frac{p_0 - p_1 + (2 t - s - \alpha (1 - s)) x_1 - t x_1^2}{2 t x_1^2}. \quad (6)$$

Nous considérons que la fonction de coût de production de F_1 est décroissante en x_1 : les coûts augmentent à mesure que la firme réduit la teneur du sucre dans son produit³

$$C(x_1) = 1 - \frac{\delta}{2} x_1^2 D_1. \quad (7)$$

3. La spécification, d'un coût de production décroissant en x_i (la teneur du nutriment nocif) s'appuie sur un certain nombre de preuves disponibles dans la littérature soulignant l'augmentation des coûts de production associée à la reformulation de produits (Scott, et al., 2017 ; Monteiro Cannon, 2012 ; Barahona, et al., 2021). Étant F_0 est localisée à 0, sans perte de généralité, nous supposons que le coût de F_0 est fixé à $\frac{1}{2}$.

Le profit de chaque firme est donné par les expressions suivantes :

$$\pi_0(0, p_0) = (p_0 - \frac{1}{2}) D_0; \quad (8)$$

$$\pi_1(x_1, p_0) = (p_1 - (1 - \frac{\delta}{2} x_1^2)) D_1. \quad (9)$$

Le jeu est résolu en procédant par induction à rebours, il s'agit de déterminer dans un premier temps l'équilibre en prix de sous-jeu à x_1 donné, puis, dans un second temps, la teneur de nutriment optimale x_1 de F_1 , et en fin, le choix de l'instrument de régulateur public permettant d'améliorer la qualité nutritionnelle de l'offre sur la marché.

Stratégie de prix des deux firmes F_0 , et F_1 (Etape 3)

À la troisième et dernière étape, la maximisation des profits π_i donnés ci-dessus en (9) et (10) par rapport aux prix p_i , nous donne les expressions de prix suivantes :

$$p_0^*(c, s, \alpha, x_1, t, \gamma) = \frac{1}{6}(6c + (2s + 4t + 2\alpha * (1-s)) x_1 + (2t - \gamma c) x_1^2); \quad (10)$$

$$p_1^*(c, s, \alpha, x_1, t, \gamma) = \frac{1}{3}(3c + (4t - s - \alpha(1-s)) x_1 - (t + \gamma c) x_1^2). \quad (11)$$

Stratégie de localisation de la firme F_1 (Etape 2)

À la deuxième étape, la localisation optimale x_1^* de la firme F_1 est fixé soit par l'entreprise elle-même de manière à maximiser son profit, $x_1^* = \tilde{x}_1$ où $\tilde{x}_1 = \operatorname{argmax}_{x_1} \pi_1(x_1, p_1^*)$, soit il est fixé par une réglementation obligatoire par les autorités publiques, $x_1^* = \bar{x}$. Dans cette étape, il est important de souligner que le premier cas de figure correspond à une politique dite « informationnelle ». Le second cas de figure, fait référence à une politique « mixte », autrement dit, campagne informationnelle et restriction réglementaire sur la teneur du nutriment nocif définie à l'aide d'un SQM. En posant $s = 0$ (aucun investissement en campagnes informationnelles), nous pourrions étudier le troisième cas de figure de politique dite « restrictive » ou « politique de reformulation ».

$$\begin{cases} x_1^* = \tilde{x}, & \text{si } \tilde{x}_1 < \bar{x}; \\ x_1^* = \bar{x}, & \text{si } \tilde{x}_1 > \bar{x}. \end{cases} \quad (12)$$

Dans le cas d'une politique informationnelle, il est obtenu de la maximisation du profit de F_1 par rapport à x_1 . Ce qui nous donne l'expression suivante :

$$x_1^*(s, t, c, \alpha, \gamma) = \frac{2(s + \alpha(1-s) - 4t)}{3(\gamma c - 2t)}. \quad (13)$$

Nous pouvons facilement vérifier que la qualité nutritionnelle optimale $x_1^*(s, t, c, \alpha, \gamma)$ choisie par la firme produisant le produit de moindre qualité est décroissante en fonction de l'investissement « s » en campagnes d'information et de la sensibilité α du consommateur à sa santé.

3 Résultats : Choix de la politique publique

Il s'agit dans cette section, de résoudre l'étape 1 du jeu où les autorités publiques doivent décider quelle politique choisir en fonction de critères que nous donnerons dans la suite.

À la première étape, les autorités publiques doivent choisir une des trois politiques. Le choix se fait sur la base du bien-être collectif (critère économique) et/ou d'un indice de santé publique noté RS (critère sanitaire) et que nous définirons par :

$$RS = x_1 D_1. \quad (14)$$

Pour ce qui est du bien-être collectif, il est défini comme la somme du surplus des consommateurs et de profit de l'industrie ($\pi_{ind} = \pi_0 + \pi_1$), à laquelle est soustrait le coût des campagnes informationnelles.

$$BS = SC + \pi_{ind} - c(s). \quad (15)$$

Nous supposons que le coût des campagnes informationnelles $c(s)$ est une fonction quadratique de l'investissement « s » en campagnes informationnelles, c'est à dire :

$$c(s) = \frac{\beta}{2} s^2. \quad (16)$$

Le surplus du consommateur est défini comme suit :

$$SC = \int_0^{\bar{x}} (r + (1 - (1 - \alpha)(1 - s)) - p_0 - t(z)^2) dz \\ + \int_{\bar{x}}^1 (r + (1 - (1 - \alpha)(1 - s))(1 - x_1) - p_1 - t(z - x_1)^2) dz \quad (17)$$

Comme signalé précédemment, compte tenu de la complexité des expressions analytiques des fonctions de bien-être à l'équilibre, nous baserons notre analyse comparative des trois politiques sur des simulations numériques. Nous présentons les résultats en fonction des paramètres caractérisant le profil des consommateurs (α : sensibilité sanitaire faible, élevée et attachement pour le goût faible et élevé), et selon les niveaux des instruments de régulation publique (s : faible, élevé et \bar{x} : laxiste, stricte). La partie suivante est consacrée à la présentation et l'interprétation des résultats de cette analyse comparative. Présentons tout d'abord, les résultats associés au choix d'un SQM exigeant (tableau 1), puis par ceux associés au choix d'un SQM moins exigeant (tableau 2).

Tableau 1 : Comparaison des choix de politique publique dans le cas d'un SQM (\bar{x}) stricte

En présence d'un SQM exigeant, la politique mixte est toujours meilleure en matière de santé publique, et la politique restrictive est meilleure en matière de bien-être global, quelques soient le niveau des investissements en campagnes informationnelles

<i>Investissement en campagnes informationnelles relativement faible (s=0.4) ou élevé (s=0.9)</i>			
$\bar{x}=0.2$ (stricte)	Sensibilité sanitaire Faible $\alpha = 0.6$	Attachement au goût	
		Faible : $t = 0.35$	Fort : $t = 0.63$
Sensibilité sanitaire du consommateur (α)	Sensibilité sanitaire Forte $\alpha = 0.95$	La politique mixte est meilleure en matière de RS.	
		La politique restrictive est meilleure en matière de BS et SC.	

(élevé ou faible), l’attachement des consommateurs pour le goût, et la sensibilité sanitaire des consommateurs. Ainsi, une politique ne peut pas atteindre tous les objectifs en même temps. Le dilemme peut être alors difficile pour le régulateur entre choisir une politique qui maximise le bien-être collectif ou une politique qui se focalise sur l’amélioration du bénéfice santé.

Tableau 2 : Comparaison des choix de politique publique dans le cas d’un SQM (\bar{x}) laxiste

<i>Investissement en campagnes informationnelles relativement faible (s=0.4) ou élevé (s=0.9)</i>			
$\bar{x} = 0.37$	Sensibilité sanitaire Faible $\alpha = 0.6$	Attachement pour le goût	
		Faible : $t = 0.35$	Fort : $t = 0.63$
Intérêt du consommateur pour sa sante	Sensibilité sanitaire Forte $\alpha = 0.95$	La politique mixte est meilleure en matière de RS. La politique restrictive est meilleure en matière de BS et de SC.	La politique mixte est meilleure en matière de RS. La politique restrictive est meilleure en matière de BS et de SC.
		La politique mixte est meilleure matière de RS, et de BS. La politique restrictive est meilleure en matière de SC	

En présence d’un SQM moins exigeant, la politique mixte est toujours meilleure en matière d’amélioration de la santé publique. Cependant, la politique restrictive est meilleure en matière d’amélioration de bien-être collectif, à l’exception d’une seule configuration (l’attachement au goût est faible et la sensibilité sanitaire est élevée), où la politique mixte est meilleure aussi bien sur le plan santé que sur le plan bien être global.

4 Conclusion

Les politiques nutritionnelles publiques ont fait l’objet de beaucoup de débats scientifiques, économiques et politiques. Nous nous intéressons dans cet article à évaluer

l'impact de deux politiques : un SQM et les campagnes d'information publiques, sur les stratégies (prix, qualité) des firmes, sur la santé des consommateurs et sur le bien être global. Pour cela, nous proposons un modèle théorique en adaptant le modèle de différenciation horizontale d'Hotelling. L'approche théorique que nous adoptons permet de prendre en considération les réponses stratégiques des acteurs (firmes, consommateurs) et d'anticiper donc, selon l'instrument mis en œuvre (SQM, investissement en campagnes d'information, ou la combinaison des deux), et selon le profil des consommateurs (sensibilité sanitaire et attachement au goût du produit), quel est l'instrument le plus efficace pour assurer une alimentation saine et préserver la santé publique.

Cependant, l'approche adoptée nous dévoile la réalité sur la difficulté et le compromis auxquels est confronté le régulateur public pour concilier l'objectif ultime des politiques nutritionnelles qui est de promouvoir une offre alimentaire saine, et préserver de la santé publique, tout en préservant le bien-être collectif. En d'autres termes, nos résultats montrent que la conclusion sur l'efficacité d'un instrument de régulation publique s'avère difficile, car l'objectif ultime de préserver la santé publique peut être entravé par d'autres distorsions d'ordre économique.

Nous avons montré que les CI peuvent inciter les firmes à reformuler leurs produits. Les preuves sur de telles incitations à la reformulation ont été montrées dans la littérature, mais sur d'autres types d'instruments de régulation comme par exemple la taxe nutritionnelle (Allais, et al., 2020) et les politiques d'étiquetage nutritionnelle. Cependant les résultats sur l'impact de l'étiquetage nutritionnel sont mitigés. L'étude de Moorman et Huber (2012) a soulevé un effet négatif (l'étiquetage a incité les firmes à réduire la qualité nutritionnelle de leurs produits), tandis que Barahona et al. (2021) ont trouvé que l'étiquetage obligatoire peut inciter les firmes à améliorer la qualité.

Sur les trois politiques que nous analysons (campagnes d'information, SQM et la combinaison SQM-campagnes d'information), la politique mixte est toujours meilleure en terme d'amélioration de la santé publique. Cela pourrait s'expliquer par le double effet associé à l'amélioration de la qualité nutritionnelle induite par le SQM et par les campagnes de sensibilisation. L'efficacité d'une telle combinaison a été également soulignée par l'analyse empirique de Mason, et al. (2014), comme il rejoint, dans l'ensemble, les résultats de la littérature disponible sur l'efficacité des politiques mixtes en termes de gains de santé (Nnoaham, et al., 2009 ; Ratnayake, et al., 2009 ; Cobiac, et al., 2017 ; Ares, et al., 2018).

Nos résultats précisent par ailleurs qu'un tel effet bénéfique sur le plan sanitaire, n'est pas toujours compatible avec l'intérêt collectif (augmentation du bien-être collectif). Nous montrons par exemple que, quand le SQM n'est pas très exigeant, les consommateurs ne sont pas très attachés au goût et ont une sensibilité sanitaire élevée, l'objectif de préserver la santé et l'intérêt collectif sont compatibles, par ailleurs, pour un standard très exigeant, ces deux critères de décision (santé et bien-être collectif) publiques sont incompatibles. Nous montrons ainsi que la politique mixte est toujours meilleure sur le plan sanitaire, tandis que la politique SQM est meilleure en termes d'amélioration du bien-être collectif.

Références

- [1] Ares, G., Aschemann-Witze, J., Curutchet, M. R., Antúnez, L., Machín, L., Ana-Giménez, L. V. (2018). Product reformulation in the context of nutritional warning labels : Exploration of consumer preferences towards food concepts in three food categories. *Food Research International*, 669-674.
- [2] Barahona, N., Otero, C., Otero, S., Kim, J. (2021). Equilibrium Effects of Food Labeling Policies. Working paper .
- [3] Cobiac, L. J., Tam, K., Veerman, L., Blakely, T. (2017). Taxes and Subsidies for Improving Diet and Population Health in Australia : A Cost-Effectiveness Modelling Study. *PLOS Medicine*, 1-18.
- [4] Dhurandhar, N. V., Thomas, D. (2015). The Link Between Dietary Sugar Intake and Cardiovascular Disease Mortality :An Unresolved Question. *Journal of the American Medical Association*, 959-960.
- [5] Duvaléix-Treguer, S., Hammoudi, A., Rouached, L., Soler, L. (2012). Firm-s'responses to nutritional policies. *European Review of Agricultural Economics*, 843-877.
- [6] Griffith, R., O'Connell, M., Smith, K. (2017). The Importance of Product Reformulation Versus Consumer Choice in Improving Diet Quality. *Economica London School of Economics and Political Science*, 34-53.
- [7] Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, 41-57.
- [8] Mason, H., Shoaib, A., Ghandour, R., O'Flaherty, M., Capewell, S., Khatib, R., . . . team, t. M. (2014). A cost effectiveness analysis of salt reduction policies to reduce coronary heart disease in four Eastern Mediterranean countries. *PLoS One*.
- [9] Monteiro, C., Cannon, G. (2012). Product reformulation will not improve public health. *Journal of the World Public Health Nutrition Association*, 406-434.
- [10] Monteiro, C. A., Cannon, G., Lawrence, M., Louzada, M. L., Machado, t. P. (2019). Ultra-processed foods, diet quality, and health using the NOVA classification system. Rome : FAO, 2019, 936-941.
- [11] Moorman, F., Huber, J. (2012). Unintended Nutrition Consequences : Firm Responses to the Nutrition Labeling and Education Act. *Marketing Science* , 717-737.
- [12] Nnoaham, K. E., Sacks, G., Rayner, M., Mytton, O., Gray, A. (2009). Modelling income group differences in the health and economic impacts of targeted food taxes and subsidies. *International Journal of Epidemiology*, 1324-1333.
- [13] Ratnayake, W. M., L'Abbe, M. R., Farnworth, S., Dumais, L., Gagnon, C., Lampi, B., . . . Kwo, K. (2009). Trans fatty acids : current contents in Canadian foods and estimated intake levels for the Canadian population. *The Journal of AOAC International*, 1258-1576.
- [14] Réquillart, V., Soler, L.-G., Zang, Y. (2016). Quality standards versus nutritional taxes : Health and welfare impacts with strategic firms. Réquillart, Vincent Soler, Louis-Georges Zang, Yu, 2016. "Quality standards versus *Journal of Health Economics*, 268-285.

- [15] Seo, E. H., Kim, H., Kwon, O. (2019). Association between Total Sugar Intake and Metabolic Syndrome in Middle-Aged Korean Men and Women. *Nutrient*, 1-12.
- [16] Stanhope, K. L. (2015). Sugar consumption, metabolic disease and obesity : The state of the controversy. *Critical Reviews in Clinical Laboratory Sciences*, 52-67.

Émergence de coopérations de firmes hétérogènes en R&D: règle d'adhésion exclusive versus règle d'adhésion ouverte

Sait Razika ¹, Hammoudi Abdelhakim ², and Radjef Mohammed Said ³

¹Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté des Sciences Exactes,
Université de Bejaia, Bejaia, Algérie ,
razika.sait@univ-bejaia.dz

²Université Paris-Saclay, INRAE, AgroParisTech, Paris-Saclay Applied Economics, 91120, Palaiseau,
France,
abdelhakim.hammoudi@inra.fr

³Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes), Faculté des Sciences Exactes,
Université de Bejaia, Bejaia, Algérie ,
mohammedsaid.radjef@univ-bejaia.dz

Résumé L'article analyse les conditions de réussite de coopération en R&D entre des firmes hétérogènes. L'étude compare la taille stable d'une coalition en R&D et le bien-être social associé en utilisant des concepts de stabilité basés sur les règles d'adhésion ouverte et exclusive. Nous montrons qu'en présence de spillovers élevés, et sous l'hypothèse d'une règle d'adhésion ouverte, seule la coalition regroupant l'ensemble des firmes émerge à l'équilibre du jeu. Nous montrons aussi qu'en présence de spillovers faibles, et sous l'hypothèse d'une règle d'adhésion exclusive, seule la grande coalition émerge à l'équilibre mais pour des valeurs intermédiaires de spillovers, plusieurs coalitions partielles asymétriques (de même taille mais de composantes différentes) émergent à l'équilibre.

MSC: 91-10, 91A80, 91B54, 91B24, 91-08

Mots clés : Spillovers, Firmes hétérogènes, Formation endogène de coalitions en R&D, Équilibre parfait en sous-jeux, Règle d'adhésion exclusive, Règle d'adhésion ouverte, Stabilité interne et externe, Bien-être social.

1 Introduction

Les progrès récents de la théorie des jeux non-coopératifs ont permis d'analyser avec des concepts plus adaptés la formation de coalitions dans le secteur industriel. En effet, dans le domaine de l'organisation industrielle, la coopération en R&D a été jugée comme un des

*Corresponding Author

moyens possibles non seulement pour mutualiser les coûts de l'innovation mais aussi de limiter le recours à l'imitation ([5], [2], [3]), de réduire le risque lié à l'échec des activités de R&D [4] et d'augmenter l'incitation à l'investissement en R&D par la réduction du problème d'appropriation (ou de free-riding) ([5], [2], [8], [6]). Les processus de formation de telles coopérations et leurs stabilité est devenu un thème de recherche important en économie industrielle. Nous analysons dans cet article le rôle des externalités de recherche associées à l'innovation (ou spillovers) et le niveau d'efficacité des firmes sur la stabilité d'une forme particulière de coalition en R&D dans un marché oligopolistique à firmes hétérogènes. L'objectif est de comparer l'issue du processus de formation de la coopération et la taille d'équilibre des coalitions résultant de ce processus sous l'hypothèse de deux règles d'adhésion : la règle d'adhésion ouverte et la règle d'adhésion exclusive. Sous la règle d'adhésion ouverte, chaque firme est libre de rejoindre ou de quitter la coopération [1, 9] contrairement à la règle d'adhésion exclusive pour laquelle le consensus de tous les membres est requis pour rejoindre la coopération [9].

2 Description du modèle

Considérons une industrie composée de plusieurs firmes hétérogènes en terme d'efficacité et produisent un bien homogène en présence de spillovers. Chaque firme est indexée par $i \in I = \{1, 2, \dots, N\}$, $2 < N < \infty$, de coût de production $c_i > 0$. Ces firmes s'engagent en amont dans la R&D, soit d'une manière coopérative (coalition ou coopération en R&D) soit de manière non-coopérative (compétition en R&D), et en aval dans la production et se concurrencent à la Cournot sur un marché caractérisé par une fonction inverse de demande supposée linéaire.

Le contexte de formation endogène de ces coopérations hétérogènes en R&D est modélisé à l'aide d'un jeu à trois étapes. À la première étape de la formation de la coalition, nous déterminons d'une manière endogène (en utilisant les concepts de stabilité basés sur les règles d'adhésion ouverte et exclusive¹) la taille de la coalition de recherche. À la deuxième étape, une coalition de taille k ($k \leq N$) est donc formée et composée des firmes ayant choisi d'adhérer. Les $N - k$ autres firmes restent indépendantes et constituent la frange. Dans cette étape, les décisions d'investissement en R&D se prennent simultanément et de façon non coopérative. À la troisième étape, Ayant observés les décisions de la première et de la deuxième étape, les N firmes décident simultanément de leurs niveaux de production.

L'équilibre de Nash parfait en sous-jeu est déterminé en utilisant la méthode d'induction à rebours. Une simulation numérique analysant les conditions de stabilité en fonction du niveau de spillover, du niveau de l'efficacité des firmes et de la règle choisie est donnée et par conséquent les conditions de stabilité sont définies.

3 Conclusion

L'originalité de cet article dans le domaine de la formation endogène de la coopération en R&D est de fournir une analyse comparative de taille d'équilibre de la coalition de R&D et

1. Les jeux correspondants à ces règles supposent que les firmes annoncent simultanément leur stratégie d'adhésion (jeux non-coopératifs).

du bien-être associé dans un marché oligopolistique à firmes hétérogènes en utilisant deux règles de formation de coalition : la règle d'adhésion ouverte et la règle d'adhésion exclusive. Selon la règle choisie, la plupart des résultats de la littérature existant dans le cas symétrique font état de l'intervention des pouvoirs publics pour inciter les firmes à former des accords de coopération sectorielle ([7], [9]). En revanche, notre contribution ne propose pas d'encourager la formation de la grande coalition (comme dans le cas symétrique) mais suggère l'intervention de ces autorités en amont (dans le processus de formation) en imposant aux firmes d'adopter une règle d'adhésion spécifique.

Références

- [1] d'Aspremont, C., Jacquemin, A., Gabszewicz, J. J., Weymark, J. A. : On the stability of collusive price leadership. *Canadian Journal of economics*, 17-25 (1983).
- [2] d'Aspremont, C., Jacquemin, A. : Cooperative and noncooperative R&D in duopoly with spillovers. *The American Economic Review*, **78**, 5, 1133-1137 (1988).
- [3] Encaoua, David, et al. : Diffusion du savoir et incitation à l'innovation : le rôle des accords de coopération en recherche et développement. *Economie et statistique*, **266**, 1, 47-63 (1993).
- [4] Gerlach, H.A., Thomas, R. and Konrad, S. : Project choice and risk in R&D. *The Journal of Industrial Economics*, **53**, 1, 53-81 (2005).
- [5] Kamien, M.I., Eitan, M., Israel, Z. : Research joint ventures and R&D cartels. *The American Economic Review*, **82**, 5, 1293-1306 (1992).
- [6] Matt, M. : Diversité exogène des entreprises et justification économique d'une politique d'incitation à la coopération en R&D. *Economie & prévision*, **145**, 4, 117-130 (2000).
- [7] Poyago-Theotoky, J.A. : Equilibrium and optimal size of a research joint venture in a oligopoly with spillovers. *The Journal of Industrial Economics* **2**, 209–226 (1995).
- [8] Suzumura, K. : Cooperative and non-cooperative R&D in oligopoly with spillovers. *American Economic Review* **82**, 1307–1320 (1992).
- [9] Yi, S. S., Shin, H. : Endogenous formation of research coalitions with spillovers. *International Journal of Industrial Organization*, **18**, 2, 229-256 (2000).

IV

STATISTIQUES

Sommaire

IV.1	Asymmetric Kernel Density Estimation for Dependent Data	320
IV.2	Nonparametric Estimation of Performability for Homogeneous Continuous-Time Semi-Markov Models	326
IV.3	Asymptotic Normality of the Kernel Regression Estimator for Truncated and Associated Data	332
IV.4	Inference in Weakly Dependent Data Models	339
IV.5	Non Parametric Robust Regression : Automatic Bandwidth Selection	344
IV.6	Theoretical Choice of the Optimal Bandwidth of the Robust Regression in the Incomplete and Dependent Data	350
IV.7	A Family of Asymmetric Kernels Based on Log-Symmetric Distributions	355
IV.8	Asymptotic Normality for Regression Function Estimate under Right Censored Data and Association	361
IV.9	On the Asymptotic Properties of Kernel Estimators for Continuous-Time Semi-Markov Processes	367
IV.10	Quantile Quadratic Credibility Premium	373
IV.11	Heavy Tailed Distribution in a Random Stopping Time for Supercritical Branching Processes	377
IV.12	Bais Reduction in Tail Index Estimation for Randomly Truncated Data	384
IV.13	On the Estimation of Signed Periodic INAR Models	389
IV.14	The Markov Switching Periodic INARCH Models	393
IV.15	Spectral Estimation of Unevenly Spaced Tome Series	398
IV.16	Nonlinear Least Squares Estimation of the Unrestricted Periodic EXPAR(1) Model	403
IV.17	Central Limit Theorem of the Maximum Likelihood Estimates of 2D-RCAR Models	409
IV.18	A Novel Class of Count Time Series Models	416
IV.19	Détection des Valeurs Aberrantes avec le Bayésien Empirique	420
IV.20	Un Algorithme pour le Block Clustering des Séries Temporelles	428



Asymmetric Kernel Density Estimation For Dependent Data

Mohamed Khemici^{*1}, Nabil Zougab², and Smail Adjabi³

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
mohamed.khemici@univ-bejaia.dz

²Lamos Research Unit, Electrical engineering Department, University of Bejaia, Algeria,
nabil.zougab@univ-bejaia.dz

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
adjabi@hotmail.com

Abstract : This paper studies the density estimation using asymmetric kernel, in the context of positive dependent data. The mean squared error (MSE) as local property is established. A simulation study investigates the performance of some asymmetric kernel (IG, RIG, LN and BS) density estimators and compare their performances with the Gamma kernel estimator for positive dependent data proposed in [1].

MSC: MSC :82B31 ; MSC :62G07 ; MSC :62G08

Keywords : Asymmetric kernels, Density estimation, Gamma kernel, Positive dependent data, mean squared error, integrated squared error

1 Introduction

The objective of this paper is to propose the asymmetric kernel for density estimation in the context of positive dependent data. For this purpose, we exclusively consider the inverse Gaussian (IG) and Reciprocal inverse Gaussian (RIG) kernels of [4], and Log-normal (LN) and Birnbaum-Saunders (BS) asymmetric kernels of [3] introduced for independent data. First, we derive the local property (MSE) for dependent data from a stationary α -mixed process using IG, RIG, LN and BS kernels. Second, a Monte Carlo study based on dependant data from an autoregressive conditional duration (ACD) and a stochastic volatility (SV) models is conducted by using IG, RIG, LN and BS asymmetric kernels. The finite sample performances in the sens of integrated squared error (ISE) of the proposed estimators are compared with the dependant Gamma kernel estimator developed by [1]. Note that this study can be considered as a complement to the Bouezmarni and Rombouts [1] Gamma kernel estimator for dependent data.

*Corresponding Author

2 Asymmetric kernel estimator for dependent data

2.1 Estimator

Let $X_1 \dots, X_n$ from a stationary α -mixing process with density function f . The asymmetric kernel estimator for dependent data can be adapted as follows (see [1])

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i) \tag{1}$$

where h is the smoothing parameter and $K_{x,h}$ is the continuous asymmetric kernel of target x and smoothing parameter h ; see Table 1 for some asymmetric kernels.

TABLE 1 – Functional forms of asymmetric kernels.

Kernel	Support	Kernel Function
Gamma [2]	$[0, \infty[$	$K(y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{x}{h}+1)} \frac{y^{\frac{x}{h}} e^{-y/h}}{h^{\frac{x}{h}+1}}$
RIG [4]	$]0, \infty[$	$K(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h y}} \exp\left(-\frac{x-h}{2h} \left[\frac{y}{x-h} - 2 + \frac{x-h}{y}\right]\right)$
LN [3]	$[0, \infty[$	$K(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h y}} \exp\left(-\frac{1}{2h} (\log(y) - \log(x) + \sigma^2)^2\right)$
IG [4]	$]0, \infty[$	$K(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h y^3}} \exp\left(\frac{-1}{2hx} \left[\frac{y}{x} - 2 + \frac{x}{y}\right]\right)$
BS [3]	$]0, \infty[$	$K(y) = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\sqrt{\frac{1}{xy}} + \sqrt{\frac{x}{y^3}}\right) \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-1}{2\alpha^2} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - 2\right)\right)$

Now, we recall some useful conditions for this study. We start with the strong mixing coefficient, see for example [1]

Condition 1. We require that the process $\{X\}_{i \geq 1}$ is α -mixing. The sequence is α -mixing if the mixing coefficient $\alpha(i) \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$, where

$$\alpha(i) = \sup_k |P(A \cap B) - (P(A)P(B))|, \tag{2}$$

with $A \in \mathcal{F}_1^k(X)$ and $B \in \mathcal{F}_1^{k+i}(X)$, where $\mathcal{F}_k^i(X)$ is the σ -field of events generated by $\{X_j, i \leq j \leq k\}$.

Condition 2. $\{X\}_{i \geq 1}$ is supposed to be α -mixing such that

$$\alpha(i) \leq \gamma i^{-\beta}, i \geq 1 \tag{3}$$

for some positive constants γ and β .

2.2 MSE of $\widehat{f}(x)$ for dependent data

We assume that

Assumption 1. f is twice continuously differentiable

Assumption 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} nh^{\frac{1}{2}} = \infty$

Below we present the theorem on the approximation to MSE for the estimator .

Théorème 2.1. *By conditions 1 and 2 and if Assumptions 1 and 2 hold, then for sequence $v_n \cong cte \times h^{-\frac{3}{2\beta}}$ since $\beta > \frac{3}{2}$, the MSE of $\hat{f}(x)$ for dependent data can be approximated by*

$$MSE(\hat{f}(x)) = B^2(x) + V_{x,h}(x) + C(x).$$

where $B(x)$ and $V(x)$ are the bias and the variance approximations of $\hat{f}(x)$ given in Table 2 for specified asymmetric kernel, and

$$C(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) cov[K_{x,h}(X_i), K_{x,h}(X_{i+1})],$$

with $nh^{1/2}C(x) = o(1)$.

Proof. The theorem can be established by combining the results of [4], [3] and the results of [1].

TABLE 2 – Bias and variance of $\hat{f}(x)$.

kernel	$B(x) = Bias(\hat{f}(x))$	$V_{x,h}(x) = Variance(\hat{f}(x))$
Gamma [2]	$h[f'(x) + \frac{x}{2}f''(x)]$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}n^{-1}h^{-1/2}x^{-1/2}f(x)$
RIG [4]	$h[\frac{1}{2}xf''(x)]$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}n^{-1}h^{-1/2}x^{-1/2}f(x)$
LG [3]	$h[2xf'(x) + 2x^2f''(x)]$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}n^{-1}h^{-1/2}x^{-1}f(x)$
IG[4]	$h[\frac{1}{2}x^3f''(x)]$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}n^{-1}h^{-1/2}x^{-3/2}f(x)$
BS[3]	$h[\frac{1}{2}xf'(x) + \frac{1}{2}x^2f''(x)]$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}n^{-1}h^{-1/2}x^{-1}f(x)$

3 Simulation

The main goal of this section is to investigate the performance of the IG, RIG, LN and BS density estimators and compare their performances with the Gamma kernel estimator for positive dependent data introduced by [1]. We consider the dependent data generated from an autoregressive conditional duration (ACD) and a stochastic volatility (SV) models (see [1] for more details). The bandwidth is chosen as $h_n = sd(X)n^{-2/5}$, and the performances are compared using the integrated squared error (ISE) given by :

$$ISE = \int (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \tag{4}$$

For each replication of the simulation, the bandwidth parameter is selected by reducing its value. ISE in (4) Since the underlying density f is unknown for both the ACD and SV models. We examine the empirical density function based on 100000 observations. We perform 100 replications for different degrees of dependence and for sample sizes of

50, 100, 300 and 500.

The ACD model is given by	Parameters values for the ACD mode				
$x_i = \Psi_i \xi_i$ $\Psi_i = \omega + \alpha x_{i-1} + \beta \Psi_{i-1}$	I	high dependence	ω	α	β
	II	low dependence	0.017	0.11	0.88
	III	independence	0.153	0.11	0.80
			1.700	0	0

TABLE 3 – ACD model

The SV model is given by	Parameters values for the SV mode				
$X_i = \exp(y_i)$ $y_i = \exp(x_i/2)\mu_i$ $x_i = \gamma + \delta x_{i-1} + v\varepsilon_i$	I	high dependence	ω	α	β
	II	low dependence	0.01	0.98	0.3
	III	independence	0.01	0.95	0.3
			1	0	0

TABLE 4 – SV model

For ACD model, we consider two models for ξ_i

– Model A : $\xi_i \sim \text{Gamma}(4.92, 4.92)$;

– Model B : $\xi_i \sim \text{Exp}(1.02)$.

For SV model, we consider the Gaussian model for ε_i and μ_i as

– Model D : $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0.1, 0.4)$ and $\mu_i \sim \mathcal{N}(0.1, 0.4)$.

(a) High dependence

(b) Low dependence

(c) Independence

FIGURE 1 – Comparison the gamma kernel estimator and the empirical density function for ACD model gamma kernel(f')(- - -). the empirical density function(f) (- - -).

Figure 1 shows the plots of pdf estimates for ACD model using gamma kernel estimator and empirical density function $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0.1, 0.4)$ and $\mu_i \sim \mathcal{N}(0.1, 0.4)$.

Table 5 shows the integrated squared error (ISE) for the Gamma, IG, RIG, LN and BS kernel estimators for ACD model in the cases of high dependence, low dependence and independence for sample size (50,100,300,500).

Model	Method	Kernel	n=50	n=100	n=300	n=500
A	I	Gamma	3.301931e-04	1.248200e-04	4.333045e-05	2.122282e-05
		IG	3.708251e-04	1.214169e-04	1.670250e-05	3.658338e-05
		RIG	3.766101e-04	1.271207e-04	3.056360e-05	2.756933e-05
		LG	6.941590e-04	3.461377e-04	5.130968e-05	5.143619e-06
		BS	5.184881e-03	3.757398e-03	9.701632e-04	2.650851e-04
	II	Gamma	1.942890e-05	1.832132e-05	5.567656e-06	2.902343e-06
		IG	1.017209e-05	5.611717e-06	2.223901e-06	3.876800e-07
		RIG	1.238931e-05	6.516517e-06	3.425854e-06	4.566252e-07
		LG	1.041245e-04	2.039831e-05	3.856313e-06	2.301152e-06
		BS	1.271378e-03	1.651369e-03	1.427849e-03	8.502729e-04
	III	Gamma	1.166215e-05	8.267595e-06	2.256003e-06	1.013376e-06
		IG	3.795415e-06	9.834271e-07	6.166501e-07	4.972411e-07
		RIG	4.755617e-06	1.251153e-06	8.059029e-07	5.078164e-07
		LG	1.329811e-04	1.340214e-04	1.331998e-05	1.350952e-06
		BS	1.340176e-04	1.332706e-04	1.330995e-05	1.317540e-05
B	I	Gamma	1.850671e-04	1.337349e-05	5.648755e-05	2.778837e-06
		IG	4.669337e-03	3.773672e-04	1.411313e-04	9.261248e-05
		RIG	7.662549e-04	4.658737e-05	2.954113e-05	9.133461e-05
		LG	2.737507e-04	1.490732e-04	3.874495e-05	3.908156e-05
		BS	1.079234e-02	6.478496e-03	5.672807e-03	4.877966e-03
	II	Gamma	6.825731e-06	7.198958e-06	1.333420e-06	1.029024e-06
		IG	1.496650e-04	2.553251e-04	5.644035e-05	6.637381e-05
		RIG	1.217519e-05	3.340141e-05	1.117332e-05	7.664925e-06
		LG	8.929997e-05	2.878806e-04	5.869585e-05	1.624456e-05
		BS	9.584003e-03	6.957631e-03	2.752687e-03	1.092379e-03
	III	Gamma	3.028409e-06	8.137539e-06	6.710345e-06	2.341956e-06
		IG	1.384619e-04	1.651651e-04	4.283716e-05	2.577438e-05
		RIG	2.235392e-05	8.826013e-05	2.268449e-05	8.119692e-06
		LG	8.572216e-05	7.582349e-05	1.212289e-05	1.663657e-05
		BS	2.579179e-03	1.400884e-03	1.570494e-03	5.221085e-04

TABLE 5 – Comparison of ISE for Gamma, IG, RIG, LN and BS kernel estimators with model ACD.

Table 6 shows the integrated squared error (ISE) for the Gamma, IG, RIG, LN and BS kernel estimators for SV model in the cases of high dependence, low dependence and independence for sample size (50,100,300,500).

Model	Method	Kernel	n=50	n=100	n=300	n=500 .
D	I	Gamma	7.144356e-05	5.405882e-05	4.693856e-05	4.593494e-05
		IG	1.020328e-04	6.959852e-05	4.958614e-05	4.350670e-05
		RIG	9.392880e-05	6.543285e-05	4.810290e-05	4.531115e-05
		LG	9.835047e-05	6.309846e-05	3.573257e-05	1.597062e-05
		BS	6.168563e-04	1.190476e-04	2.329112e-05	8.099299e-06
	II	Gamma	4.223314e-05	1.013281e-05	5.156940e-06	1.286286e-06
		IG	1.961111e-05	1.554607e-06	1.733826e-06	1.564455e-06
		RIG	2.180124e-05	1.017576e-06	1.698058e-06	9.060207e-07
		LG	1.015645e-04	9.339953e-06	8.815665e-06	1.315104e-06
		BS	1.016445e-02	3.691605e-04	1.023247e-03	1.281856e-04
	III	Gamma	2.117934e-05	7.769845e-06	4.118250e-06	3.032453e-07
		IG	8.565430e-06	4.093442e-06	2.293387e-06	7.418696e-07
		RIG	2.598210e-06	2.972740e-06	2.016711e-06	4.130220e-07
		LG	1.262010e-05	8.672967e-06	5.834472e-06	1.593548e-06
		BS	1.215168e-02	2.545261e-04	3.194193e-04	9.474685e-05

TABLE 6 – Comparison(ISE)of the gamma estimator ,some Asymmetric Kernel estimator with SV model

4 Conclusion

In this paper, we have studied the performance of asymmetric kernel estimators for dependent data. We have computed the mean squared error (MSE) for data series from a stationary α -mixing process, and we have conducted a simulation study to compare the performance of IG, RIG, LN and BS kernel density estimators with Gamma kernel estimator of [1].

References

- [1] Bouezmarni, T and Rombouts, J.V.K. : Nonparametric density estimation for positive time series. *Computational Statistics & Data Analysis*, **54**,2,245–261, (2010).
- [2] Chen, S. : Probability density function estimation using gamma kernels. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **52**,3,471–480, (2000).
- [3] Jin, X and Kawczak, J. : Birnbaum–Saunders and lognormal kernel estimators for modelling durations in high frequency financial data .*Annals of Economics and Finance*. **4**.103–124, (2003).
- [4] Scaillet, O. : Density estimation using inverse and reciprocal inverse Gaussian kernels. *Nonparametric Statistics*, **16**,1-2,217–226, (2004).

Nonparametric estimation of performability for homogeneous continuous-time semi-Markov models

Tayeb Hamlat ¹ and Fatiha Mokhtari  ²

^{1,2}Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University of Saïda–Doctor Moulay Taher, Saïda, Algeria,
tayebhamlat1998@gmail.com,
fatiha.mokhtari@univ-saida.dz

Abstract : In this work a nonparametric estimator of the performance for semi-Markov systems is presented. This concept is described as the sum or the real-valued integral functional stochastic process. When this model is homogeneous and continuous-time semi-Markov process, we present empirical estimators of the semi-Markov kernel, the renewal matrix, the semi-Markov transition matrix and the mean performance of this system. Asymptotic properties of the proposed estimators as the strong consistency and the asymptotic normality are obtained. The theoretical results of the performability are checked by a numerical example.
MSC: 60F05 ; 60K15 ; 62G05 ; 62G20.

Keywords : Semi-Markov processes ; Performability ; Semi-Markov kernel ; Renewal matrix ; Consistency ; Asymptotic normality.

1 Introduction

Performability has initially been introduced by Meyer [5] in order to generalize classical reliability indicators. This idea is theoretically stated as the sum or the real-valued integral functional of the process Z for a system with the state space set E , a reward rate function h and a stochastic process $Z_t, t \geq 0$, defined as follows,

$$\Phi(t) = \int_0^t h(Z_u) du, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

The performability is the marginal distribution function of the integral functional $\Phi(t)$, $t \geq 0$. It is worth mentioning that (1) has been mainly used in insurance, technological systems, in economical etc. For the purpose of performing semi-Markov systems with general state space, a complete study is given in [3] when Z is homogeneous semi-Markov and continuous-time stochastic process.

In this work we present a nonparametric estimator of the performability for semi-Markov systems. In section 2, we will review some of the author's results that are pertinent to understanding the characteristics of the proposed estimators. Section 3 is devoted to presentation of the empirical estimators of the main characteristics of a continuous-time semi-Markov process as well as the mean performance of a semi-Markov system. In the same section, we state consistency and asymptotic normality results for such a system. In the last section, the usefulness of the theoretical results is illustrated by a numerical example.

2 The Semi-Markov System

Définition 2.1. (*Markov renewal process*) Let $E = \{1, \dots, s\}$ be the state space. A Markov renewal process is a bivariate stochastic process (J_n, T_n) where J_n is the system state at the n th time, and T_n is the n th jump time. We define $X_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ to be the sojourn time in the state. The process has to satisfy the following formula

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid J_0, J_1, \dots, J_n, T_0, T_1, \dots, T_n) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid J_n),$$

for all $j \in E$, all $t \in \mathbb{R}_+$ and all $n \in \mathbb{N}$

Définition 2.2. (*Continuous-time semi-Markov process*) Consider a Markov-renewal process $\{(J_n, T_n) : n \in \mathbb{N}\}$ defined on a complete probability space and with state space E . The stochastic process $\{Z_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ defined by

$$Z_t = J_{N(t)}. \quad (2)$$

is called a Semi-Markov Process (SMP) where $N(t) = \max \{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$ is the counting process of the SMP up to time t .

Let's also introduce some random variables associated with the process Z :

- The semi-Markov kernel $Q(t) = \{Q_{ij}(t), i, j \in E\}, t \geq 0$ is given by

$$Q_{ij}(t) = P(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq t \mid J_n = i).$$

- H_i , the sojourn time distribution in state i .

$$H_i(t) = P(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i) = \sum_{j=1}^s Q_{ij}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

- Let us define the Markov renewal function $\Psi_{ij}(t), i, j \in E, t \geq 0$, by

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}(t) &= E_i[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{J_n=j, T_n \leq t\}}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_i(J_n = j, T_n \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}(t), \end{aligned}$$

- We define the semi-Markov transition function $P_{ij}(t), i, j \in E, t \geq 0$, by

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(Z_t = j \mid Z_0 = i) = \mathbb{P}(J_{N(t)} = j \mid J_0 = i).$$

– It is known in [7] that

$$P_{ij}(t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}} \left(1 - \sum_{k=1}^s Q_{ik}(t) \right) + \sum_{k \in E} \int_0^t P_{kj}(t-s) Q_{ik}(ds).$$

By solving the above Markov renewal equation, cf. [2], the unique solution is given in matrix notation by

$$P(t) = (I - \mathbf{Q}(t))^{(-1)} * (I - \text{diag}(\mathbf{Q}(t)\mathbf{e})) \quad (3)$$

where $\text{diag}(\cdot)$ is a diagonal matrix of i -th entry $\sum_{j=1}^s Q_{ij}(t)$ and $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^t$.

Définition 2.3. Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, be a homogeneous SMP with finite state space E , and let h be a real-valued function defined on E . The performance process is defined by

$$\Phi(t) = \int_0^t h(Z_u) du = \sum_{i \in E} h(i) \int_0^t \mathbf{1}_{\{z_u=i\}} du, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

It is worth noticing that the performance process $\Phi(t)$ can be written as follows

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{N(M)} h(J_{k-1}) X_k + (M - T_{N(M)}) h(J_{N(M)}). \quad (5)$$

The conceptual framework can be found in ([2] and [1]).

Définition 2.4. The mean performance at time $t > 0$, denoted by $\bar{\Phi}(t) := \mathbb{E}[\Phi(t)]$, is given by

$$\bar{\Phi}(t) := \mathbb{E}[\Phi(t)] = \sum_{i \in E} \int_0^t h(i) \mathbb{P}[Z_u = i] du = \sum_{i \in E} h(i) \int_0^t P_u(i) du. \quad (6)$$

3 Elements of statistical estimation

Nonparametric estimators of the main characteristics of the SMP Z are defined on sample functions of the MRP over $[0, M]$. These sample functions of the MRP are equivalent to the sample functions $(J_0, J_1, \dots, J_{N(M)}, X_0, X_1, \dots, X_{N(M)})$.

3.1 Empirical estimators

Let M be the end time of the process.

– The empirical estimator of the semi-Markov kernel $Q_{ij}(t)$ is given by

$$\hat{Q}_{ij}(t, M) = \frac{1}{N_i(M)} \sum_{n=1}^{N(M)} \mathbf{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n \leq t\}}, \quad (7)$$

– The following estimator of the Markov renewal function $\Psi_{ij}(t)$ is given by

$$\hat{\Psi}_{ij}(t, M) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}_{ij}^{(n)}(t, M). \quad (8)$$

- The empirical estimator of the transition function of the SMP $P_{ij}(t)$, $i, j \in E$ and $t \geq 0$ is given by the following matrix form

$$\widehat{P}(t, M) = \widehat{\Psi} * (I - \text{diag}(\widehat{Q}(t, M)e)). \quad (9)$$

- Define now the following estimator for the mean performance $\overline{\Phi}_i(t) := \mathbb{E}_i[\Phi(t)]$,

$$\widehat{\overline{\Phi}}_i(t, M) := \sum_{j \in E} h(j) \int_0^t \widehat{P}_{ij}(s, M) ds \quad (10)$$

3.2 Asymptotic behavior

All along this paper we are working under the following assumptions :

- (H.1) The embedded Markov chain $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is an ergodic irreducible Markov chain, with stationary distribution \mathbf{v} .
- (H.2) The SMP is irreducible, aperiodic, with finite mean sojourn times.

The following theorem gives the uniform strong consistency of the empirical estimators introduced in (7), (9) and (8) :

Théorème 3.1. *for all $i, j \in E$, we have*

- $\max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, M]} \left| \widehat{Q}_{ij}(t, M) - Q_{ij}(t) \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad M \rightarrow \infty.$
- $\max_{i, j} \sup_{t \in [0, M]} \left| \widehat{P}_{ij}(t, M) - P_{ij}(t) \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad M \rightarrow \infty$
- $\max_{i, j} \sup_{t \in [0, M]} \left| \widehat{\Psi}_{ij}(t, M) - \Psi_{ij}(t) \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad M \rightarrow \infty$

Asymptotic normality of the nonparametric estimators (7), (9) and (8) is stated in the following theorem : for any fixed $t > 0$

- $M^{1/2} \left[\widehat{Q}_{ij}(t, M) - Q_{ij}(t) \right] \xrightarrow{D} N \left(0, \sigma_{ij}^2 \right),$
where $\sigma_{ij}^2 = \mu_{ii} Q_{ij}(t) [1 - Q_{ij}(t)]$ and $\mu_{ii} = \mathbf{E}(T_2^i - T_1^i).$
- $M^{1/2} \left(\widehat{P}_{ij}(t, M) - P_{ij}(t) \right) \xrightarrow{D} N \left(0, \sigma_{ij}^2(t) \right),$
where

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^2(t) &= \sum_{r \in E} \sum_{k \in E} \mu_{rr} \left[(1 - H_i) * B_{irkj} - \Psi_{ij} \mathbf{1}_{\{r=j\}} \right]^2 * Q_{rk}(t) \\ &\quad - \left\{ \left[(1 - H_i) * B_{irkj} - \Psi_{ij} \mathbf{1}_{\{r=j\}} \right] * Q_{rk}(t) \right\}^2, \end{aligned}$$

$$\text{and } B_{irkj}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^n Q_{ir}^{(\ell-1)} * Q_{kj}^{(n-\ell)}(t).$$

- $M^{1/2} \left(\widehat{\Psi}_{ij}(t, M) - \Psi_{ij}(t) \right) \xrightarrow{D} N \left(0, \sigma_{ij}^2(t) \right),$
where $\sigma_{ij}^2(t) = \sum_{r=1}^s \sum_{k=1}^s \mu_{rr} \left\{ (\Psi_{ir} * \Psi_{kj})^2 * Q_{rk} - (\Psi_{ir} * \Psi_{kj} * Q_{rk})^2 \right\} (t).$

the intermediate following result is needed.

Théorème 3.2. *We have the following strong convergence :*

$$\frac{\Phi(t)}{t} \xrightarrow{a.s.} \pi h := \sum_{i \in E} \pi(i) h(i), \quad t \rightarrow +\infty.$$

$$\frac{\overline{\Phi}(t)}{t} \xrightarrow{a.s.} \pi h, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Using the above definitions and results, the following theorem holds :

Théorème 3.3. *The estimator $\widehat{\Phi}(t, M)$ of $\bar{\Phi}(t)$ is*

– *Strongly uniformly consistent, that is*

$$\max_{i \in E} \sup_{0 \leq t \leq M} \left| \widehat{\Phi}(t, M) - \bar{\Phi}(t) \right| \xrightarrow{a.s.} 0, \quad M \rightarrow \infty.$$

– *Converges in distribution, for any fixed t , as $M \rightarrow \infty$, to a normal random variable, i.e.,*

$$M^{1/2}(\widehat{\Phi}(t, M) - \bar{\Phi}(t)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_{ij}^2(t)),$$

with

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^2(t) = & \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \mu_{ii} \left\{ (W_{ij})^2 * Q_{ij} - (W_{ij} * Q_{ij})^2 + \int_0^\infty \left[\int_0^\infty h(j)(x \wedge (t-u)) dA_i(u) \right]^2 dQ_{ij}(x) \right. \\ & - \left[\int_0^\infty \int_0^\infty h(j)(x \wedge (t-u)) dA_i(u) dQ_{ij}(x) \right]^2 + 2 \int_0^\infty W_{ij}(t-x) \int_0^\infty h(j)(x \wedge (t-u)) dA_i(u) dQ_{ij}(x) \\ & \left. - 2 (W_{ij} * Q_{ij})(t) \cdot (A_i * (h(j)(x \wedge \cdot)))(t) \right\}. \end{aligned}$$

where for $t \in \mathbb{R}^+$: $A_i(t) = \sum_{k=1}^s \alpha_k h(i) \Psi_{ki}(t)$, and $W_{kl}(t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j \in U} \alpha_i (\Psi_{ik} * \Psi_{lj} * I_j)(t)$.

4 Numerical Example

Let us consider a three state semi-Markov system as illustrated in figure 1. States 1 and 2 are up states and state 3 is a down state. The reward rate function h is defined by $h(1) = 1$, $h(2) = 0.6$ and $h(3) = 0$. We have two exponential and two Weibull distribution functions as conditional transitions, for all $x \geq 0$, say $H_{12}(x) = 1 - \exp(-\lambda_1 x)$, $H_{31}(x) = 1 - \exp(-\lambda_2 x)$, $H_{23}(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right]$, $H_{21}(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right]$. The parameters of these distributions are : $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 2$, $\alpha_2 = 0.1$, $\beta_2 = 2$.

The transition probability matrix of the embedded Markov chain (J_n) is :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where p is given by $p = \int_0^\infty [1 - H_{23}(x)] dH_{21}(x)$.

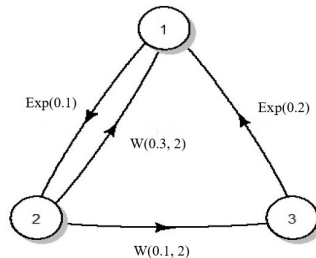


Figure 1 : A Three State Semi-Markov System

If we simulate one trajectory for different censoring times $M_1 < M_2 < \dots < M_r$, we see that the performance curve of the estimator (10), that is $\widehat{\Phi}_i(t, M_k)$, converges to the true curve of $\bar{\Phi}(t)$ as

k increases. Figure 2 illustrates such a situation for two values of M , that is for $M_1 = 100$ and for $M_2 = 1000$. It can be noticed that the second curve is closer to the true curve represented on the same figure 2 by a continuous line.

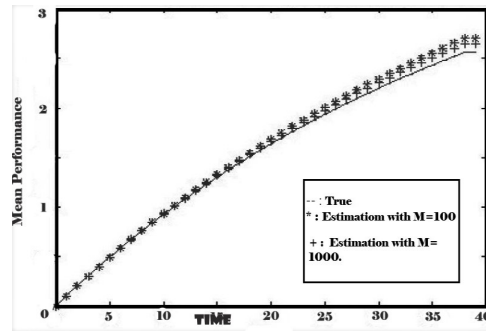


Figure 2 : Mean performance estimation of the three state Semi-Markov System

References

- [1] Korolyuk V. S. and N. Limnios, Poisson Approximation of Homogeneous Stochastic Additive Functionals with Semi-Markov Switching, *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 64, pp 75–84, 2002.
- [2] Limnios N. and G. Oprüřan, *Semi-Markov Processes and Reliability*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [3] Limnios N. and G. Oprüřan, A General Framework for Reliability and Performability Analysis of Semi-Markov Systems, *Appl. Stochastic Models Business Indust.*, vol. 15, no. 4, pp. 353–368, 1999.
- [4] Limnios N., Ouhbi B., PLATIS A. and G. SAPOUNTZOGLU. Nonparametric Estimation of Performance and Performability for Semi-Markov Processes. *International Journal of Performability Engineering* Vol. 2, No. 1, pp. 19-27, 2006.
- [5] Meyer J., On Evaluating the Performability of Degradable Computer Systems, *IEEE Trans. Comput.*, vol. 29, pp. 720–731, 1980.
- [6] Ouhbi, B. and N. Limnios. Non-parametric estimation for semi-Markov kernels with application to reliability analysis. *Applied Stoch. Models Data Anal.*, 12 : 209–220, 1996.
- [7] Pyke R. Markov renewal processes with finitely many states, *Ann. Math. Statist.* 32 , 1243–1259, 1961.



Asymptotic normality of the kernel regression estimator for truncated and associated data

Farida Hamrani*¹ and Zohra Guessoum²

¹MSTD Laboratory, Faculty of Mathematics, USTHB, Algeria,
farida.h1989@gmail.com

²MSTD Laboratory, Faculty of Mathematics, USTHB, Algeria,
zguessoum@usthb.dz

Abstract : The main purpose of this paper is to establish the asymptotic normality of the kernel estimator of the regression function for a random left truncated model when the data exhibit some kind of dependence which is association. We use asymptotic normality to construct confidence interval.

Keywords : Association ; Asymptotic normality ; Kernel estimate ; Regression function ; Truncated data

1 Introduction

The nonparametric estimators of the regression function is known to provide a suitable and efficient means to catch the possibly complex relation between a given variable of interest and some explanatory covariates. Because of this obvious practical interest, many authors have studied the (asymptotic) properties of such estimators during the last decades. One of the basic assumptions which was generally considered is the independence of the observed data. However in many situations, the assumption of independence is not verified that's why the study of the dependence data has received much attention in the last few years. Two types of dependence data are so widely used in the literature are mixing and associated data. In this work, we are interested to the concept of association which was introduced and defined by [5]. Recall that a set of finite family of random variables (rv's) $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ is said to be associated if for every pair of functions $f(\cdot)$ and $g(\cdot)$ from \mathbb{R}^N to \mathbb{R} , which are non decreasing componentwise,

$$Cov(f(Y), g(Y)) \geq 0,$$

whenever this covariance exists. An infinite family is said to be associated if every finite subfamily is associated. For more details on the concept of association, we refer the reader to [2].

*Corresponding Author

Let Y be a real rv of interest with continuous distribution (df) F , and X an \mathbb{R}^d -valued random vector of covariates with the joint df V and the joint density v . The regression function at a point $x \in \mathbb{R}^d$ is the conditional expectation of Y given $X = x$, this is

$$m(x) := \mathbb{E}[Y|X = x]$$

Note that $m(x)$ can be written as $m(x) = \frac{\psi(x)}{v(x)}$ where $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} yF(x, dy)$ and $F(\cdot, \cdot)$ denote the joint distribution of (X, Y) .

Several nonparametric methods which consist in estimating $m(x)$ exist in the literature, here we use the kernel method. Under the assumption that the observed random variables are mutually independent, the nonparametric kernel estimator of $m(x)$ has been studied by many authors, we cite a few of them ([4, 10, 20], ...).

In many survival practical application, it is often happens that the rv of interest Y may not be observed completely. Censored and truncation are the most current forms of the incomplete data. The rv Y can be regarded as the lifetimes of the items under biomedical studies. In this paper we are interested in the left truncated data, where the observation (X, Y) is interfered by another independent rv T such that all three random quantities Y, X , and T are observable only if $Y \geq T$. Such data occur in astronomy, economics, epidemiology and biometry (see, e.g., [22, 21, 19] and [7]).

Recently, [15] constructed a new nonparametric kernel estimator of the regression function $m(\cdot)$ for the random left truncation (RLT) model and studied its asymptotic properties for the independent and identically distributed (i.i.d.) rv's. Later, [12] have obtained the strong uniform consistency of the estimator constructed and [13] established its asymptotic normality. [9] have considered the same estimator under association condition for which, they established the strong uniform convergence with a rate.

Our focus in the present article is to establish the asymptotic normality of the estimator of the regression function used by [15] for the left-truncation under association.

2 Presentation of the model and the estimators

Let $\{(Y_i, T_i); i = 1, \dots, n\}$ be a sequence of N copies of the couple (Y, T) defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where the sample size N is fixed but unknown. In all the remaining of this paper, $\{Y_i, 1 \leq i \leq N\}$ denote a strictly stationary associated sequence of Y that we assume that is a bounded and nonnegative rv with a continuous df F and $\{T_i, 1 \leq i \leq N\}$ is a strictly stationary iid sequence of the truncation rv T with a lipschitz df G and a bounded probability density function g .

In the RLT model, the rv of interest Y and the truncating rv T are observable only if $Y \geq T$, whereas nothing is observed if $Y < T$. Without possible confusion, we still denote $\{(Y_i, T_i); i = 1, \dots, n\}$, ($n \leq N$) the actually observed sample from the original N -sample with n being random but known. Note that as the original sequence of interest is associated, the observed one is associated (by property (P1) in [5] and the observed sequence of truncation is also i.i.d. (by proposition 2.1 in [11]).

As a consequence of truncation, the size of the actually observed sample, n , is a $\text{Bin}(N, \alpha)$ rv, with parameter $\alpha := \mathbb{P}(Y \geq T)$. It is clear that if $\alpha = 0$, no data can be observed and therefore, we suppose through this paper that $\alpha > 0$.

Since N is unknown and n known (although random), our results will not be stated with respect to the probability measure \mathbb{P} (related to the N -sample) but will involve the probability \mathbf{P} (related to the n -sample) defined as $\mathbf{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | Y \geq T)$. In the same way \mathbb{E} and \mathbf{E} will denote the expectation operators related to \mathbb{P} and \mathbf{P} respectively.

Following [18], the joint \mathbf{P} -distribution of (Y, T) , under the left-truncation condition, becomes

$$\begin{aligned} H^*(y, t) &:= \mathbf{P}\{Y \leq y, T \leq t\} = \mathbb{P}\{Y \leq y, T \leq t | Y \geq T\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^y G(t \wedge u) dF(u) \end{aligned}$$

where $t \wedge u := \min(t, u)$. The marginal distributions of Y and T and their empirical estimators are defined by

$$\begin{aligned} F^*(y) &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^y G(u) dF(u), \quad G^*(t) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} G(t \wedge u) dF(u), \\ F_n^*(y) &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{Y_i \leq y\}} \quad \text{and} \quad G_n^*(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}, \end{aligned}$$

where \mathbb{I}_A denotes the indicator function of the set A .

In the sequel, the unknown distribution functions F and G are estimated by the respective [14] estimators F_n and G_n given by

$$\begin{aligned} F_n(y) &:= 1 - \prod_{i: Y_i \leq y} \left[\frac{nC_n(Y_i) - 1}{nC_n(Y_i)} \right] \\ G_n(t) &:= \prod_{i: T_i > t} \left[\frac{nC_n(T_i) - 1}{nC_n(T_i)} \right], \end{aligned} \tag{1}$$

where $C_n(y) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{T_i \leq y \leq Y_i\}}$ is the empirical estimator of $C(y) := \mathbb{P}\{T \leq y \leq Y | Y \geq T\}$.

And for the unknown probability α , we use the estimator proposed by [8] given by

$$\alpha_n := \frac{G_n(y)(1 - F_n(y))}{C_n(y)}, \tag{2}$$

for any y such that $C_n(y) \neq 0$, which is independent of y . Woodroffe (1985) pointed out that F and G can be completely estimated only if

$$a_G \leq a_F, \quad b_G \leq b_F \quad \text{and} \quad \int_{a_F}^{\infty} \frac{dF}{G} < \infty.$$

Let $\{(X_i, Y_i, T_i); i = 1, \dots, n\}$ be the n triplets observed among the N ones such that $Y_i \geq T_i$ and T independent of (X, Y) where $\{(X_i, Y_i); i = 1, \dots, n\}$ are supposed strictly stationary and associated.

Following [15], a kernel estimator of the regression function $m(x)$ when the data are left truncated is given by

$$\tilde{m}_n(x) := \frac{\tilde{\Psi}_n(x)}{\tilde{v}_n(x)}, \tag{3}$$

where

$$\tilde{\psi}_n(x) := \frac{\alpha}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{G(Y_i)} K_d \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right), \quad (4)$$

is an estimator of $\psi(x)$ and $v_n(x)$ is the density estimator of X assumed that is strictly positive for all $x \in \mathbb{R}^d$ and defined by

$$\tilde{v}_n(x) := \frac{\alpha}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{1}{G(Y_i)} K_d \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right). \quad (5)$$

$K_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth kernel function and h_n is a positive bandwidth sequence that tends to zero as $n \rightarrow \infty$.

Note that in (4), (5) and in the sequel, the sum is taken only for i such that $G_n(Y_i) \neq 0$. In practice α and G are unknown, hence it is not possible to use the estimator (3). Then, by replacing them by their estimators G_n and α_n defined in (1) and (2), respectively, we get the following feasible estimator for $m(x)$

$$\hat{m}_n(x) := \frac{\hat{\psi}_n(x)}{\hat{v}_n(x)},$$

where

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_n(x) &:= \frac{\alpha_n}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{G_n(Y_i)} K_d \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right), \\ \hat{v}_n(x) &:= \frac{\alpha_n}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_n(Y_i)} K_d \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Throughout this paper, the letter C denotes a generic constant which might take different values at different place.

3 Assumptions and main results

Let define

$$\theta_{i,j} := \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \text{cov}(X_i^k, X_j^l) + 2 \sum_{k=1}^d \text{cov}(X_i^k, Y_j) + \text{cov}(Y_i, Y_j),$$

where X_i^k is the k -th component of X_i . In order to formulate the main result, we need to impose the following assumptions.

(H) The bandwidth h_n satisfies :

- (i) $nh_n^{d+4} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$,
- (ii) $h_n = o \left[\left(\frac{\log \log n}{n} \right)^\tau \right]$ for some $\frac{1}{d+4} < \tau < \frac{1}{d+3}$.

(A) $\int \frac{dF(z)}{G^2(z)} < +\infty$,

(K1) The kernel K_d is a bounded probability density with compact support and it has bounded first order partial derivatives.

(K2) $\int_{\mathbb{R}^d} z_i K_d(z) dz = 0$ for all $i = 1, \dots, d$ and $\int_{\mathbb{R}^d} |z_1^{i_1} \dots z_d^{i_d}| K_d(z) dz < +\infty$ for $i_1 + \dots + i_d = 2$,

(R) The covariance term defined by : $\rho(s) := \sup_{|i-j| \geq s} \theta_{i,j}$ for $s > 0$, satisfies $\rho(s) \leq \gamma_0 e^{-\gamma s}$ for some positive constants γ_0 and γ ,

(D1) The function $\psi(\cdot)$ is bounded, twice differentiable with $\sup_{x \in D} \left| \frac{\partial^k \psi}{\partial x_i \partial x_j^{k-1}}(x) \right| < +\infty$ for $i, j = 1 \dots d$ and $k = 1, 2$,

(D2) The probability density $v(\cdot)$ is bounded and twice differentiable with $\sup_{x \in D} \left| \frac{\partial^k v}{\partial x_i \partial x_j^{k-1}}(x) \right| < +\infty$ for $i = 1 \dots d$ and $k = 1, 2$,

(D3) The joint density $v_{i,j}$ of (X_i, X_j) exists and $\sup_{r,s \in D} |v_{i,j}(r,s) - v(r)v(s)| \leq C < +\infty$ such that C is a constant not depending on (i, j) .

(B) Let $0 < p = p_n < n$, $0 < q = q_n < n$ and $k = k_n := \left[\frac{n}{p+q} \right]$, ($[x]$ designate the integer part of x) be a positive integer sequences tending to ∞ , as $n \rightarrow \infty$, such that $k(p+q) \leq n$ and $\frac{k(p+q)}{n} \rightarrow 1$ satisfying :

- (i) $\frac{pk}{n} \rightarrow 1$,
- (ii) $ph_n^d \rightarrow 0$ and $\frac{p^2}{nh_n^q} \rightarrow 0$,
- (iii) $\frac{e^{-\gamma q}}{h_n^{d+2}} \rightarrow 0$.

Our main result concerning the asymptotic normality of $\hat{m}_n(x)$ is given in the following theorem.

Théorème 3.1. *Under Assumptions H, A, K1-K2, R, D1-D3 and B we have*

$$\sqrt{nh_n^d} [\hat{m}_n(x) - m(x)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

where

$$\sigma^2(x) := \frac{\alpha [\psi_0(x)v^2(x) - 2\psi_1(x)\psi(x)v(x) + \psi_2(x)\psi^2(x)]}{v^4(x)} \kappa, \tag{7}$$

$$\kappa = \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(z) dz < +\infty \text{ and } \psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{2-j}}{G(y)} F(x, dy), j = 0, 1, 2.$$

Remarque 3.1. *A plug-in-type estimate $\hat{\sigma}_n^2(x)$ for the asymptotic variance $\sigma^2(x)$ can be obtained by using the estimators $\alpha_n, \hat{v}_n(\cdot)$ given in (2), (6) and the estimators*

$$\hat{\psi}_{j,n}(x) := \frac{\alpha_n}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i^{2-j}}{G_n^2(Y_i)} K_d\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

of $\psi_j(\cdot)$, $j = 0, 1, 2$.

As an application for the asymptotic normality, we get the confidence interval which is given in the following corollary.

Corollaire 3.1. *Under the assumptions of Theorem 3.1, we get for each $\xi \in (0, 1)$, the following confidence interval of asymptotic level $1 - \xi$ for $m(x)$*

$$\left[\hat{m}_n(x) - \frac{u_{1-\xi/2} \hat{\sigma}_n^2(x)}{\sqrt{nh_n^d}}, \hat{m}_n(x) + \frac{u_{1-\xi/2} \hat{\sigma}_n^2(x)}{\sqrt{nh_n^d}} \right],$$

where $u_{1-\xi/2}$ denotes the $1 - \xi/2$ -quantile of the standard normal distribution.

4 Conclusion

In this paper we obtained the asymptotic normality for the kernel regression estimator based on random left truncated and associated data. Here it is concluded that in random left truncated model, which is also dealing with weak dependency, we can get asymptotic normality and comparing the results with [15] and [13], we have obtained the same asymptotic variance and confidence interval.

References

- [1] Bulinski, A. V. : On the convergence rates in the CLT for positively and negatively dependent random fields. In :Ibragimov, I. A. (1996).
- [2] Bulinski, A., Shashkin, A. : Limit theorems for associated random fields and related systems. Vol 10, Advanced series on statistical science & applied probability (2007).
- [3] Chen, K., Chao, M.T., Lo, S.W. : On strong uniform consistency of the Lynden-Bell estimator for truncated data. Ann.Statistic., **23**, 440-449 (1995).
- [4] Devroye, L., Györfi, L., Lugosi, G. : A probability theory of pattern recognition. Berlin Heidelberg, New York :Springer (1996).
- [5] Esary, J., Proschan, F., Walkup, D. : Association of random variables with applications. Ann. Math. Stat., **38**, 1466-1476 (1967).
- [6] Guessoum, Z., Ould Saïd, E. : Central limit for the kernel estimator of the regression function for censored time series. Journal of Nonparametric Statistics, **24**, 379-397 (2012).
- [7] He, S., Yang, G. : Estimating a lifetime distribution under different sampling plan. Statistical Decision Theory and Related Topics, **5**, 73-85 (1994).
- [8] He, S., Yang, G. : Estimation of the truncation probability in the random truncation model. The Annals of Statistics, **26**, 1011-1027 (1998).
- [9] Guessoum, Z., and Hamrani, F. : Convergence rate of the kernel regression estimator for associated and truncated data. J. Nonparametric Statist, **29**, 2, 425-446 (2017).
- [10] Györfi, L., Kohler, M., Walk, H. : Weak and strong universal consistency semi-recursive partitioning and kernel regression estimates. Statistics and Decisions, **16**, 1-18 (1998).

- [11] Lemdani, M., and Ould Saïd, E. : Asymptotic Behavior of the Hazard Rate Kernel Estimator Under Truncated and Censored Data, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36**, 1, 155-173 (2007).
- [12] Liang, H.Y., Li, D. L., Qi, Y.C. : Strong convergence in nonparametric regression with truncated dependent data. *J.Multivariate Anal.*, **100**, 162-174 (2009).
- [13] Liang, H.Y. : Asymptotic normality for regression function estimate under truncation and α -mixing conditions. *C. Statistics-Theory and Methods.*, **40**, 1999-2021 (2011).
- [14] Lynden-Bell, D. : A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3CR quasars. *Monthly Notices Royal Astronomy Society.*, **155**, 95-118 (1971).
- [15] Ould Saïd, E. Lemdani, M. : Asymptotic properties of a nonparametric regression function estimator with randomly truncated data. *Ann.Inst.Statist.Math.*, **58**, 357-378, (2006).
- [16] Ould Saïd, E., Tatachak, A. : Strong consistency rate for the kernel mode under strong mixing hypothesis and left truncation. *Com.Statist.Theory & Meth*, **38**, 1154-1169 (2009).
- [17] Silverman, B.W. : *Density estimation for statistics and data analysis*, Monographs on Statist. and Appl. Probab., Chapman and Hill, (1986).
- [18] Stute, W. : Almost sure representation of the product-limit estimator for truncated data. *Ann. Statist.*, **21**, 146-156 (1993).
- [19] Tsai, W.Y., Jewell, N.P., Wang, M.C. : A note on the product-limit estimator under right censoring and left truncation. *Biometrika*, **74**, 883-886 (1987).
- [20] Walk, H. : Almost sure convergence of Nadaraya- Watson regression estimates. In M. Dror, P. l'Ecuyer F. Szidarovsky (Eds.) *Assays on uncertainty-S. Yakowitz memorial volume*, 201-223 (2002).
- [21] Wang, M.C., Jewell, N.P., Tsai, W.Y. : Asymptotic properties of the product-limit estimate under random truncation. *Ann.Statist.* **14**, 1597-1605 (1986).
- [22] Woodroffe, M. : Estimating a distribution function with truncated data. *Ann. Statist.*, **13**, 163-177 (1985).



Inference in weakly dependent data models

Soumia Rih^{*1} and Abdelkader Tatachak²

¹M.S.T.D Laboratory, USTHB, Algeria,
srih@usthb.dz

²M.S.T.D Laboratory, USTHB, Algeria,
atatachak@usthb.dz

Abstract : In practical forecasting problems, classical regression is not always sufficiently informative to provide good predictions of a response variable. This usually occurs when asymmetry, or heteroscedastic noise, characterizes the underlying distribution function. In this situation, conditional mode estimation may be an alternative prediction method, as the conditional density is more adequate to describe the association between a vector of explanatory data and a response variable. The goal of our study is to establish the convergence and asymptotic normality of the kernel estimator of the conditional mode for ψ -weakly dependent observations. Some predictions on real data are also performed in order to show the interest of our study.

MSC: 62G05 ; 62G20

Keywords : Asymptotic normality ; Conditional mode ; Kernel estimation ; ψ -dependence ; Strong consistency

1 Introduction

In this study, we focus on the kernel estimator of the conditional mode under weak dependence in the sense of Doukhan and Louhichi (1999) [3]. This type of dependence includes mixing, association, Gaussian sequences and Bernoulli shifts.

Définition 1.1. (Doukhan and Louhichi (1999) [3]) *The sequence $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ is called $(\varepsilon, \mathcal{L}, \psi)$ -weakly dependent (simply, ψ -weakly dependent), if there exists a sequence $\varepsilon = (\varepsilon_r)_{r \in \mathbb{N}}$ decreasing to zero at infinity and a function ψ with arguments $(g, h, n, m) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m \times \mathbb{N}^2$ such that for n -tuple (i_1, \dots, i_n) and any m -tuple (j_1, \dots, j_m) with*

$$i_1 \leq \dots \leq i_n < i_n + r \leq j_1 \leq \dots \leq j_m,$$

one has,

$$\left| \text{Cov}(g(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}), h(X_{j_1}, \dots, X_{j_m})) \right| \leq \psi(g, h, n, m) \varepsilon_r,$$

*Corresponding Author

Where $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$, with

$$\mathcal{L}_n = \left\{ g \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n), Lip(g) < \infty, \|g\|_{\infty} := \sup_x |g(x)| \leq 1 \right\}.$$

The class \mathcal{L} will be used together with the following functions :

$$\begin{aligned} \psi_1(g, h, n, m) &= \min(n, m) Lip(g) Lip(h) \\ \psi_2(g, h, n, m) &= 4(n + m) \min(Lip(g), Lip(h)), \end{aligned}$$

2 Model and notations

Let $Z_i = (X_i, Y_i)_{\{1 \leq i \leq n\}}$ be a strictly stationary sequence of ψ -weak dependent random vectors identically distributed sampled from $Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. We denote by $f(\cdot|x) = \frac{f(x, \cdot)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$ the conditional density function of Y given $X = x$. The functions $f(\cdot, \cdot)$ and $v(\cdot)$ are the joint probability density function of (X, Y) and the marginal density of X , respectively.

It is well known that if $\Theta(x)$ denotes the unique mode of $f(\cdot|x)$, then

$$\Theta(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{R}} f(y|x).$$

A kernel estimator of the conditional mode $\Theta(x)$ is defined as the rv $\Theta_n(x)$ maximizing the kernel estimator $f_n(y|x)$ of $f(y|x)$ (see Collomb et al. (1987) [1]), that is

$$\Theta_n(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{R}} f_n(y|x). \quad (1)$$

Here

$$f_n(y|x) = \frac{f_n(x, y)}{v_n(x)}, \quad v_n(x) \neq 0,$$

with

$$f_n(x, y) = \frac{1}{nh_{n,K}^d h_{n,H}} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{x - X_i}{h_{n,K}} \right) H \left(\frac{y - Y_i}{h_{n,H}} \right)$$

and

$$v_n(x) = \frac{1}{nh_{n,K}^d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{x - X_i}{h_{n,K}} \right).$$

The functions K_d and H are probability kernels defined on \mathbb{R}^d and \mathbb{R} respectively, and $h_{n,K} =: h_K(h_{n,H} =: h_H)$ are positive sequences decreasing to zero, called bandwidths.

3 Main results

The results of our study provide strong uniform consistency rates and asymptotic normality of the studied estimator (1) for ψ -weakly dependent series. Under certain conditions of kernel, joint density and marginal density regularity and under appropriate assumptions on

the bandwidths, the following two theorems are established :

Theorem 1. Strong uniform consistency rate for $\Theta_n(\cdot)$ (Rih and Tatachak (2021) [6])

For n large enough, we have

$$\sup_{x \in S} |\Theta_n(x) - \Theta(x)| = O \left\{ \left(\frac{\log n}{nh_K^d h_H} \right)^{\frac{1}{4}} + h_K + h_H \right\}, \text{ a.s.}$$

S : a compact subset of $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d, \inf_x v(x) > 0\}$.

Theorem 2. Asymptotic normality for $\Theta_n(\cdot)$ (Rih and Tatachak (2021) [6])

For n large enough, we have

$$\sqrt{nh_K^d h_H^3} (\Theta_n(x) - \Theta(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

where

$$\sigma^2(x) := \frac{V(x, \Theta(x))}{(f^{(0,2)}(x, \Theta(x)))^2} = \frac{f(x, \Theta(x)) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} (K_d(u) H^{(1)}(v))^2 dudv}{(f^{(0,2)}(x, \Theta(x)))^2}.$$

4 Application to real data

This part is a real application of our study to illustrate the performance of the conditional mode estimator in the case of a non-parametric forecasting analysis of real ψ -weakly dependent data.

The data set consists of the logarithmic return on the USD/EURO exchange rate.

4.1 Forecasting

- We consider the relationship between the return at time t (the variable of interest) and the return at time $t - 1$ (the explanatory variable).

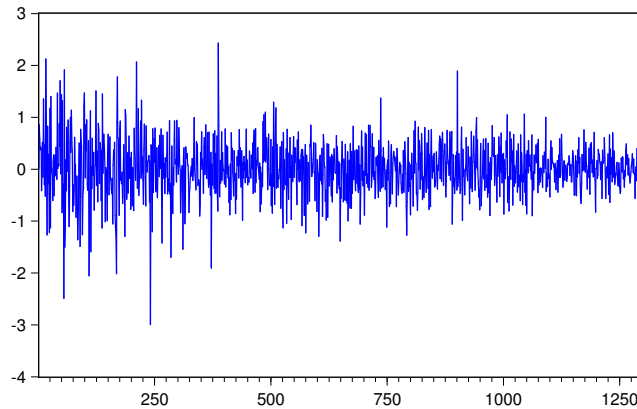
$$\begin{cases} X_t = R_{t-1} \\ Y_t = r(R_t) + \varepsilon_t, R_0 = 0, \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ i.i.d.}, t \geq 1. \end{cases}$$

- 1250 data points were used as the learning sample, denoted by $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, 1250}$;
- and the remaining data points were treated as the test sample, denoted by $(X_i, Y_i)_{i=1251, \dots, 1301}$;
- Purpose : Predict the values of $(Y_i)_{i=1251, \dots, 1301}$ by :
 - ↪ $\Theta_n(x)$,
 - ↪ Kernel regression estimator

$$r_{NW,n}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}, x \in \mathbb{R};$$

- We compare in Figure 4.1 the true values of $(Y_i)_{i=1271, \dots, 1301}$ and the predictions of the conditional mode estimator and the regression estimator.

The graph shows that our model has good estimation and prediction accuracy with respect to regression. This result is justified by the presence of heteroskedasticity.

FIGURE 1 – Daily logarithmic returns of the USD/EURO exchange rate R_t

5 Conclusions

Although classical regression is the most common subject in nonparametric statistics, especially for prediction problems, it remains very limited for some situations. In this work, we are interested in the conditional mode estimator problem which is an alternative prediction approach to regression. The main contribution of our study is the general type of dependence, Doukhan and Louhichi (1999) [3]. In this model, we established the strong uniform consistency on a compact of the kernel estimator of the conditional mode and its asymptotic normality. Finally, we applied this study to the logarithmic returns of the exchange rate of the euro against the US dollar. A predictive analysis allowed us to show the efficiency of our estimator and its interest.

References

- [1] Collomb, G., Härdle, W., Hassani, S., (1987). A note on prediction via estimation of the conditional mode function. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 15 :227–236, 1987.
- [2] Bardet, J. M., Doukhan, P., Lang, G., Ragache, N. (2008). Dependent Lindeberg central limit theorem and some applications. *ESAIM : Probability and Statistics*. 12 :154–172.
- [3] Doukhan, P., Louhichi, S. (1999). A new weak dependence condition and application to moment inequalities. *Stochastic Processes their Appl.* 84 :313–342.

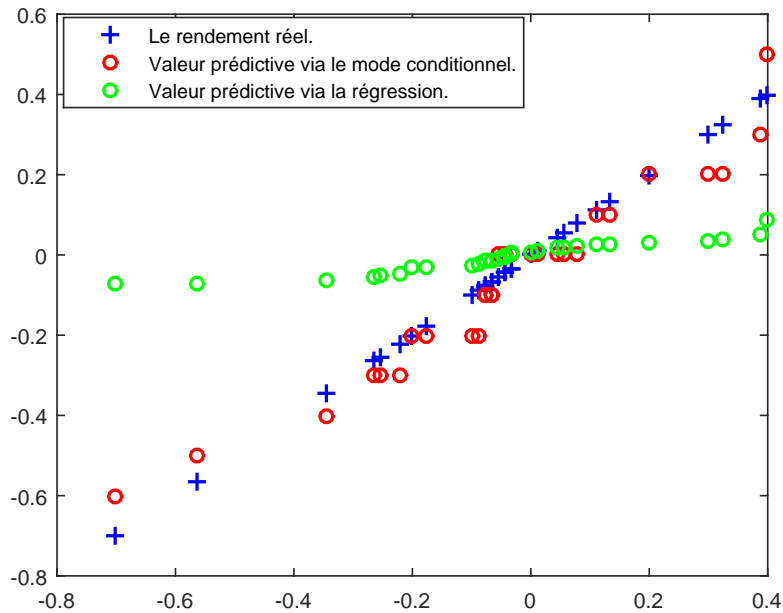


FIGURE 2 – Return prediction by conditional mode and regression

- [4] Hwang, E., Shin, D. W. (2016). Kernel estimators of mode under ψ -weak dependence. *Ann Inst Stat Math.* 68 :301–327.
- [5] Louani, D., Ould-Saïd, E. (1999). Asymptotic normality of kernel estimators of the conditional mode under strong mixing hypothesis. *Journal of Nonparametric Statistics.* 11 :413–442.
- [6] Rih, S., Tatachak, A. (2021). Kernel conditional density and mode estimation for psi-weakly dependent observations. *Communications in Statistics-Theory and Methods.* 1–27.



Non parametric Robust Regression: Automatic Bandwidth Selection

Hassiba Benseradj^{*1} and Zohra Guessoum²

¹Lab MSTD (USTHB) Research Unit, Faculty of Sciences, University of Boumerdes, UMBB, Algeria, h.benseradj@univ-boumerdes.dz

²Lab MSTD Research Unit, Faculty of Mathematics, University of Algiers, USTHB, Algeria, z.guessoum@usthb.dz

Abstract : Based on randomly left truncated and right censored (LTRC) data, we are interested with the problem of selecting an appropriate bandwidth, for the smooth M-estimator $\hat{m}(\cdot)$ of the robust regression function $m(\cdot)$ under strong mixing condition. It is shown that the bandwidth h_{glob} obtained as the minimizer of the MISE distance, is asymptotically optimal for $\hat{m}(\cdot)$. As a consequence, a bandwidth selector based on plug-in ideas is introduced. We also present a robust version of the Cross-Validation (RCV) bandwidth selection as an alternative to the plug-in method. A simulation study is investigated to examine and compare the practical performance of both two methods.

MSC: 62G05 ; 62G20

Keywords : Alpha-mixing ; Bandwidth selection ; M-estimator ; Truncated-Censored data.

1 Introduction

This paper is concerned with the problem of selecting a suitable bandwidth needed in kernel M-estimation of the robust regression function, when the response variable Y , the lifetime with continuous distribution function (df) F , is not completely observed, more precisely is subjected to both left truncation and right censorship mechanisms, LTRC model. In many applications, one of the main aims of survival studies, is to predict the survival time Y_i of the subject i , $i = 1 : N$, for which the values of an explanatory covariates vectors X_i ($X_i \in \mathbb{R}^d$) is known. When the data may be contaminated with outliers, it is more effective to predict Y , for a given $x \in \mathbb{R}^d$, via the robust regression function defined as the zero with respect to (w.r.t.) θ of

$$\mathbb{E}[\psi_x(Y - \theta) | X = x], \quad (1)$$

where $\psi_x(\cdot)$ is a continuous monotone function. Suppose that the responses Y_i are not completely observable due to left truncation and right censoring by random variables T_i and W_i ,

^{*}Corresponding Author

$i = 1, N$, with common continuous df's L and G , respectively. Under this model one can observe samples of the random vectors (Z, T, δ) only if $T \leq Z$, where $Z = \min(Y, W)$ and $\delta = \mathbb{I}_{\{Y \leq W\}}$. If $Z < T$ we are not able to observe any thing. Of course, a reasonable condition in this setup is $\mu := \mathbb{P}(T \leq Z) > 0$.

Assume that the covariate X admits a density v . Then denote by $\{(X_i, Z_i, T_i, \delta_i) : Z_i \geq T_i, i = 1, \dots, n\}$, $n \leq N$, a stationary sequence of random samples being observed. Denoted by \mathbb{P} and \mathbf{P} the probability measure related to the N sample, and the actually observed n sample, respectively. Also \mathbb{E} and \mathbf{E} the expectation operators related to \mathbb{P} and \mathbf{P} respectively. Now return out to the robust regression function $m(\cdot)$ defined in (1) and set

$$\Psi_x(x, \theta) := \mathbb{E}[\psi_x(Y - \theta) | X = x] v(x),$$

hence $m(\cdot)$ can be viewed as a solution w.r.t θ of the equation $\Psi_x(x, \theta) = 0$, since $v(x) > 0$. Based on the observed data $(X_i, Z_i, T_i, \delta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$; Benseradj and Guessoum (2020)[1] have constructed a consistent estimator of the function $\Psi_x(x, \cdot)$ defined by

$$\widehat{\Psi}_x(x, \theta) := \frac{\mu_n}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i \psi_x(Z_i - \theta)}{L_n(Z_i) \overline{G}_n(Z_i)},$$

for all Z_i such that $L_n(Z_i) \overline{G}_n(Z_i) \neq 0$, where $K(\cdot)$ is a kernel function, h_n is a smoothing parameter tending to zero along with n , G_n , and L_n are the concomitant TJW, see Tsai et al. (1987)[3] and the Lynden-Bell, see Lynden (1971)[2] estimators, of the distribution functions G and L respectively and μ_n is a consistent estimate of μ .

The corresponding M-estimator $\widehat{m}(x)$ is defined as a solution w.r.t θ of

$$\widehat{\Psi}_x(x, \theta) = 0.$$

Benseradj and Guessoum (2020) established the strong uniform consistency rate of the estimators under strong mixing condition, through the analysis of the asymptotically equivalent (but unfeasible) version of $\widehat{\Psi}_x(x, \cdot)$

$$\widetilde{\Psi}_x(x, \theta) := \frac{\mu}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i \psi_x(Z_i - \theta)}{L(Z_i) \overline{G}(Z_i)}.$$

We define also, a pseudo estimator of $m(x)$ denoted $\widetilde{m}(x)$ as a zero w.r.t θ of $\widetilde{\Psi}_x(x, \theta) = 0$.

2 Results

In order to select an "optimal" bandwidth, we need to choose a way to measure the distance between the pseudo estimator $\widetilde{m}(x)$ and its target regression function $m(x)$. A commonly used criterion for selecting a global optimal bandwidth, is the integrated mean squared error (*MISE*) distance, defined by

$$MISE(h) := \mathbf{E} \int [(\widetilde{m}(x) - m(x))^2] dx.$$

Proposition 2.1. *Under Assumptions of the kernel M-estimation under α -mixing data we have*

$$MISE(h) =: AMISE(h) + o(h_n^4) + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right),$$

where

$$AMISE(h) = \frac{\mu}{nh_n^d} \frac{\int \Gamma_x(x, m(x)) dx}{\int \left(\frac{\partial \Psi_x(x, m(x))}{\partial \theta} \right)^2 dx} \kappa + \frac{h_n^4}{4} \frac{\int \left(\sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial^2 \Psi_x(x, m(x))}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} w_i w_j K(w) dw \right)^2 dx}{\int \left(\frac{\partial \Psi_x(x, m(x))}{\partial \theta} \right)^2 dx}.$$

with $\Gamma_x(u, \theta) := \mathbb{E} \left[\frac{\mu \Psi_x^2(Y_1 - \theta)}{L(Y_1) \overline{G}(Y_1)} | X_1 = u \right] v(u)$, and $\kappa := \int_{\mathbb{R}^d} K^2(w) dw$.

The asymptotically optimal global bandwidth is defined by $h_{glob} := \arg \min_h AMISE(h)$, we have the following

Théorème 2.1. Under the same assumptions as Proposition above the optimal global bandwidth which minimize the AMISE is given by

$$h_{glob} = \frac{1}{n^{1/(d+4)}} \left(\frac{d\mu \int \Gamma_x(x, m(x)) dx \kappa}{\int \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial^2 \Psi_x(x, m(x))}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} w_i w_j K(w) dw \right\}^2 dx} \right)^{\frac{1}{d+4}}. \quad (2)$$

Théorème 2.2. Under the Assumptions of Theorem 2.1, h_{glob} given in (2) is asymptotically optimal for $\widehat{m}(x)$ over an interval $E_n = [n^{-1+\varepsilon}, n^{-\varepsilon}]$, for $\varepsilon < \min\{1/d, 1/2\}$, with respect to the distance MISE, in the sense that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{MISE(\widehat{m}_{h_{glob}}, m)}{\inf_{h \in E_n} MISE(\widehat{m}_h, m)} = 1.$$

The theoretical optimal bandwidth h_{glob} , depends on unknown quantities involving $m(x)$, and thus no direct practical use for selecting them.

3 Automatic Bandwidth Selection

We extend two bandwidths selection rules to the M-estimation setting under LTRC data : Iterative Plug-in (IPI) and Robust Cross-Validation (RCV) method.

a) Iterative Plug-in (IPI) : this method is based on the idea of "plugging-in" appropriate estimators of the unknown quantities, that appear in the formula of h_{glob} . We consider the case of ($d = 1$) with gaussian kernel then h_{glob} given in formula (2) is estimated by

$$\widehat{h}_{plug} := \left(\frac{\mu_n \int \widehat{\Gamma}_x(x, \widehat{m}(x)) dx}{2n\sqrt{\pi} \int \left(\frac{\partial^2 \widehat{\Psi}_x(x, \widehat{m}(x))}{\partial x^2} \right)^2 dx} \right)^{1/5}, \quad (3)$$

where

$$\hat{\Gamma}_x(x, \theta) := \frac{\mu_n}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i \psi_x^2(Z_i - \theta)}{L_n^2(Z_i) \overline{G}_n^2(Z_i)},$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}_x(x, \theta)}{\partial x^2} = \frac{\mu_n}{nh_n} \sum_{i=1}^n K''\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \frac{\delta_i \psi_x(Z_i - \theta)}{L_n(Z_i) \overline{G}_n(Z_i)},$$

$K''(\cdot)$ is the second derivative of the kernel $K(\cdot)$. We observe that formula (3), is instead it still depends on the value of h_n . To solve this dependency we will use an iterative algorithm.

b) Robust Cross-Validation (RCV) : under LTRC data, we define a new robust cross validation criterion, denoted RCV_{LTRC} and given by

$$RCV_{LTRC}(h) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\hat{\psi}_x^*(Z_i, \hat{m}^{(i)}(X_i)) \right)^2,$$

where

$$\hat{\psi}_x^*(Z_i, \theta) := \frac{\mu_n \delta_i \psi_x(Z_i - \theta)}{L_n(Z_i) (1 - G_n(Z_i))},$$

and $\hat{m}^{(i)}(X_i)$ is the leave-*sequence*-out estimate of $m(X_i)$.

Hence we estimate the optimal global bandwidth h by minimizing $RCV_{LTRC}(h)$ over h

$$\hat{h}_{RCV_{LTRC}} := \arg \min_h RCV(h).$$

4 Simulation study : Comparison between RCV and IPL methods

This study was carried out in order to compare the performance of the bandwidth obtained by Robust Cross-Validation RCV , and the Iterative Plug-in IPL , methods. For this purpose, we consider different censoring rates $CR \approx (0\%, 20\%, 40\%)$ and two truncation rates $TR \approx (20\%, 60\%)$, for sample sizes $n = 50, 100$ and 200 . We do this for the model $m(x) = \sin(2x)$, $x \in [-2, 2]$ under Normal $\mathcal{N}(0, 0.1)$, and Contaminated Normal $0.7\mathcal{N}(0, 0.1) + 0.3\mathcal{C}(0, 1)$, error distributions. The number of replication was $B = 200$. For comparisons between these bandwidth selectors, for each sample, using each of the two error distributions described above, we calculated the Integrated Squared Errors ISE criterion of the M-estimators $\hat{m}_h(x)$ when using the two bandwidth rules.

$$ISE(\hat{h}_{method}) = \int \left(\hat{m}_{\hat{h}_{method}}(t) - m(t) \right)^2 dt.$$

where, $method = RCV$ and IPL . Based on them, we compare the $MISE$ function, which can be approximated by the sample mean of the ISE :

$$MISE(\hat{h}_{method}) = \mathbb{E} \left[ISE(\hat{h}_{method}) \right] \simeq \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B ISE_j(\hat{h}_{method}).$$

Furthermore, to facilitate the interpretation of the results, we calculated the relative efficiency between these two methods RE_{IPL}^{RCV} with respect to the $MISE$:

$$RE_{IPL}^{RCV} = \frac{MISE(\hat{h}_{RCV})}{MISE(\hat{h}_{IPL})}. \tag{4}$$

Values of RE_{IPL}^{RCV} lower than one mean that the robust cross validation criterion is more efficient than the IPL criterion. The results of the simulation are summarized in table 1

TR%	CR%	n	Normal error		Contaminated error			RE_{IPL}^{RCV}
			RCV	IPL	RCV	IPL	RE_{IPL}^{RCV}	
20	0	50	0.2281	0.8213	0.2777	0.7149	0.9401	0.7605
		100	0.0772	0.2417	0.3193	0.2550	0.3310	0.7703
		200	0.0130	0.0134	0.9717	0.2310	0.2972	0.7773
	20	50	0.1893	0.8639	0.2191	0.5080	0.4775	1.0639
		100	0.0740	0.2269	0.3262	0.1246	0.1596	0.7808
		200	0.0181	0.0184	0.9837	0.3143	0.3915	0.8028
	40	50	0.7395	1.4704	0.5030	0.6946	0.8688	0.7995
		100	0.0944	0.5578	0.1693	0.3216	0.3244	0.9914
		200	0.0229	0.0232	0.9856	0.2117	0.2370	0.8932
60	0	50	0.1685	0.6665	0.2529	0.6405	0.8013	0.7994
		100	0.0675	0.2733	0.2470	0.5861	0.5675	1.0328
		200	0.0204	0.0206	0.9907	0.0913	0.1266	0.7211
	20	50	0.1674	0.7941	0.2108	0.5917	0.7013	0.8436
		100	0.0935	0.4521	0.2073	0.3608	0.3688	0.9784
		200	0.0199	0.0200	0.9950	0.2162	0.3266	0.6621
	40	50	0.2439	0.6947	0.3512	0.5173	0.5164	1.0018
		100	0.1320	0.2860	0.4617	0.2554	0.2707	0.9433
		200	0.0283	0.0284	0.9984	0.1043	0.1233	0.8465

TABLE 1 – Approximate $MISE$'s of $\hat{m}_h(x)$ using RCV and IPL bandwidth selectors, and the corresponding relative efficiency RE_{IPL}^{RCV} .

The results summarized in Table 1 indicate that :

- For normal noise :
 - The iterative plug-in technique work reasonably, and it has similar performance to the robust cross validation rule under moderate sample sizes ($n = 200$).
 - The robust cross validation technique is more efficient than the IPL method for small sample sizes ($n = 50$ and 100). This is may be caused by the fact that much more unknown function have to be estimated when using the plug-in bandwidth.
- For contaminated noise :
 - The iterative plug-in method is resistant to the presence of outliers, and gave comparable performance to the RCV method, since the relative efficiency RE is more than 0.8 in most simulation cases.

5 Conclusion

We have considered the estimation of the robust regression function by a kernel M-estimation, when the available data are subject to censoring and truncation. In particular, we have proposed two bandwidths selection methods and have studied their finite sample behavior via a thorough simulation study. The simulation show that in general the two methods perform well, but in some cases the RCV method outperforms the plug-in method.

References

- [1] Benseradj, H. and Guessoum, Z. : Strong uniform consistency rate of an M-estimator of regression function for incomplete data under α -mixing condition. Communications in Statistics-Theory and Methods,(2020). DOI : 10.1080/03610926.2020.1764037.
- [2] Lynden-Bell, D. : A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3cr quasars. Monthly Notices Roy. Astronom Soc, **155**, 95-118 (1971)
- [3] Tsai, W. Y, Jewell, N. P.and Wang, M. C. : A note on the product limit estimator under right censoring and left truncation. Biometrika, **74**, 883-886 (1987).



Theoretical choice of the optimal Bandwidth of the robust regression estimator in the incomplete and dependent data

Gheliem Asma^{*1} and Guessoum Zohra²

¹M.S.T.D Laboratory, USTHB , Algiers, Algeria.,
agheliem@usthb.dz

²M.S.T.D Laboratory, USTHB , Algiers, Algeria.,
zguessoum@usthb.dz

Abstract : The choice of the smoothing parameter, or bandwidth, is crucial to the effective performance of the estimator. In this contribution we are interested by a bandwidth-selection rule in the non parametric kernel M type estimation of the regression function in associated and left-truncated model.

MSC: 62G05 ; 62G20.

Keywords : bandwidth-selection ; M-estimator ; Associated data ; truncated data

1 Introduction and motivation

Let Y be a real random variable (rv) of interest with distribution function (df) F and X a random vector of covariates taking its values in \mathbb{R}^d with (df) V and continuous density ν and we want to estimate Y after observing X . The regression function between Y and X for $x \in \mathbb{R}^d$, is defined by the conditional expectation of Y given $X = x$, that is

$$r(x) = \mathbb{E}[Y|X = x].$$

Note that the function $r(x)$ can be expressed as

$$r(x) = \arg \min_{s \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(Y_i - s)^2 | X = x].$$

This latter is a particular case of a more general definition when dealing with robust estimation, viz

$$r(x) = \arg \min_{s \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\rho(Y_i - s) | X = x],$$

*Corresponding Author

where $\rho(\cdot)$ is an outlier-resistant loss and convex function defined on \mathbb{R} , hence, one can see $r(x)$ as a solution, with respect to s (w.r.t.s), of

$$\mathbb{E}[\psi(Y_i - s)|X = x] = 0,$$

where $\psi(\cdot) := \frac{\partial}{\partial s}\rho(\cdot)$ is a monotone (score) function.

The corresponding non parametric kernel M-estimator is equivalent to solving the equation

$$\sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \psi(Y_i - s) = 0,$$

where K_d is a kernel function on \mathbb{R}^d and h_n is a sequence of positive real numbers which goes to zero as n goes to infinity (bandwidth). As it is well known, this last estimator is sensitive to the presence of outliers (for example in economic and finance time series) and suffers from being not robust.

In realistic framework, the variable of interest Y may be subject to censoring and/or truncation. Under random left-truncation model (RLTM), [9] constructed the M-estimator of the non parametric regression function for α -mixing data and truncated multivariate data and established a weak and strong consistency of the estimator (without rate) as well as its asymptotic normality.

The choice of the smoothing parameter, or bandwidth, is crucial to the effective performance of the estimator. It's studied by several authors. For example for the complete sample case, [5, 1, 8] have taken an interest to the mean integrated squared error (MISE) which has an asymptotic decomposition as a simple variance term, a simple squared bias term and some negligible terms, [4, 7] studied other method for selection of optimal bandwidth.

Our focus in this contribution is to see how this type of decomposition may be done for an M-type regression estimator, in the case of truncated and associated data and to give the theoretical form (local and global) of the optimal bandwidth.

our motivation comes from a previous work on the asymptotic behavior of the robust estimator (see [3]), where the choice of h_n was classical and equal to $O\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$. We want here to give a theoretical expression of h_n and that can be used to calculate the estimator.

The concept of association was introduced and defined by [2],

Définition 1.1. *A set of finite family of rv's (X_1, X_2, \dots, X_N) is said to be associated if for every pair of functions $g_1(\cdot)$ and $g_2(\cdot)$ from \mathbb{R}^N to \mathbb{R} , which are non decreasing componentwise,*

$$\text{Cov}(g_1(X), g_2(X)) \geq 0,$$

whenever the covariance is defined, where $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$. An infinite sequence $\{X_N, N \geq 1\}$ of rv's is said to be associated if every finite subset is associated.

2 Model and Main result

Let $(X_k, Y_k), 1 \leq k \leq N$ be a sequence of associated random vector, where Y has continuous df F and T be the truncation variable with continuous df G , defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Let $f(\cdot, \cdot)$ be the joint density function of the random vector (X, Y) . We assume throughout this paper that T and (X, Y) are independent. Under RLTM, the lifetime Y and T are observable only when $Y \geq T$, here N is the potential sample size. As a consequence of truncation, the size N is fixed but unknown and n , the size of the actually observed sample, is random and known with $n \leq N$.

Let $\mu =: \mathbf{P}(Y \geq T)$ be the probability to observe the rv of interest Y . Under RLTM, we denote by $m(x)$ the implicit solution (w.r.t.s), of

$$H(x, s) := \int_{\mathbb{R}} \psi(y-s) \frac{f(x, y)}{G(y)} dy = \frac{1}{\mu} \mathbb{E}[\psi(Y-s)|X=x]v(x) = 0.$$

Moreover as $H(x, s)$ can be empirically estimated by

$$\tilde{H}_n(x, s) := \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{1}{G(Y_i)} K_d \left(\frac{x-X_i}{h_n} \right) \psi(Y_i - s),$$

we propose $\tilde{m}_n(x)$, the implicit solution (w.r.t.s) of $\tilde{H}_n(x, s) = 0$, as an M-estimator of $m(x)$. Nevertheless, as $G(\cdot)$ is unknown, the estimator $\tilde{H}_n(x, s)$ is unusable and so is $\tilde{m}_n(x)$. We finally define $\hat{m}_n(x)$, the implicit solution (w.r.t.s) of

$$\hat{H}_n(x, s) := \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_n(Y_i)} K_d \left(\frac{x-X_i}{h_n} \right) \psi(Y_i - s) = 0,$$

as a feasible M-estimator of $m(x)$, where $G_n(x)$ is the well known product limit estimator of $G(x)$ in RLTM, proposed by [6] defined by

$$G_n(y) = \prod_{\tilde{T}_i > y} \left[\frac{nC_n(T_i) - 1}{nC_n(T_i)} \right],$$

where

$$C_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{T_i \leq y \leq Y_i\}},$$

is an estimator of $C(y) := \mathbb{P}\{T \leq y \leq Y | Y \geq T\}$. Set

$$\Lambda_1(x, u, m(x)) := \frac{1}{\mu} \mathbb{E} \left[\psi(Y - m(x)) | X = u \right] v(u) = H(x, m(x)) = 0,$$

$$\Lambda_2(x, u, m(x)) := \frac{1}{\mu} \mathbb{E} \left[\psi^2(Y - m(x)) G^{-1}(Y) | X = u \right] v(u),$$

$$\Lambda_3(x, u, m(x)) := \frac{1}{\mu} \mathbb{E} \left[\psi'(Y - m(x)) | X = u \right] v(u),$$

To simplify the notations, let

$$\Lambda_i := \Lambda_i(x, x, m(x)) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Then we have,

Proposition 2.1. *Under some regularity conditions, we have*

$$\mathbf{Var}(\tilde{m}_n(x)) = \frac{\kappa}{nh_n^d} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_3^2} + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right)$$

With $\kappa := \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(t) dt (< +\infty)$

Proposition 2.2. *Under some regularity conditions and if $\int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(t) dt < +\infty$, we have*

$$\text{Bias}(\tilde{m}_n(x)) = -\frac{\frac{h_n^2}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(t) dt}{\Lambda_3} + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right)$$

Théorème 2.1. i) *Under the conditions of Propositions 2.1 and 2.2, we get*

$$\begin{aligned} \text{a) } MSE(x, h_n) &= \frac{h_n^4}{4} \frac{\left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(t) dt \right)^2}{\Lambda_3^2} \\ &\quad + \frac{\kappa}{nh_n^d} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3^2} \right) + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right) \\ \text{b) } AMSE(x, h_n) &= \frac{h_n^4}{4} \frac{\left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(t) dt \right)^2}{\Lambda_3^2} \\ &\quad + \frac{\kappa}{nh_n^d} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3^2} \right) \end{aligned}$$

ii) *Under the conditions of Propositions 2.1 and 2.2 and for $I \subseteq \mathbb{R}^d$, we get*

$$MISE(x, h_n) = \int_I \left\{ \frac{h_n^4}{4} \frac{\left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(t) dt \right)^2}{(\Lambda_3)^2} + \frac{\kappa}{nh_n^d} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3^2} \right) \right\} dx + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right)$$

Corollaire 2.1. i) *Under the conditions of Propositions 2.1 and 2.2, we get*

$$h_{n,MSE}^{opt} = n^{\frac{-1}{d+4}} \cdot \left[\frac{d\kappa\Lambda_2}{\left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(t) dt \right)^2} \right]^{\frac{1}{d+4}}$$

ii) Under some regularity conditions

$$h_{n,MISE}^{opt} = n^{\frac{-1}{d+4}} \cdot \left[\frac{d \int_I \kappa \Lambda_2 dx}{\int_I \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} t_i^2 K_d(t) dt \right)^2 dx} \right]^{\frac{1}{d+4}}$$

References

- [1] Chen, S. : Optimal Bandwidth Selection for Kernel Density Functionals Estimation. Journal. of Probability. and .Statistics. **3** 1-21 (2015).
- [2] Esary, J., Proschan, F., Walkup, D. : Association of random variables with applications. Ann. Math. Stat. **38** 1466-1476 (1967).
- [3] Ghelien, A., Guessoum, Z. Simulating the behavior of a kernel M-estimator for left-truncated and associated model. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* (2022).
- [4] Härdle, W., Marron, J. S. : Optimal bandwidth selection in nonparametric regression function estimation. The Annals of Statistics, vol.13,4 1465–1481 (1985).
- [5] Jones, M. C., Marron, J. S., : Sheather S. J. A brief survey of bandwidth selection for density estimation. Journal of the American Statistical Association, vol.91,**433** 401–407 (1996).
- [6] Lynden-Bell D. : A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3CR quasars. Monthly Notices Royal Astronomy Society **155** 95-118 (1971).
- [7] Moreira, C., Van Keilegom, I. : Bandwidth selection for kernel density estimation with doubly truncated data (2013). Computational Statistics and Data Analysis ,**61** 107–123 (2013).
- [8] Slaoui, Y. : Optimal bandwidth selection for semi-recursive kernel regression estimators. Statistics and Its Interface vol. 9, **3** 375-388 (2016).
- [9] Wang, J.F., Liang, H.Y. : Asymptotic properties for an M-estimator of the regression function with truncation and dependent data. J. Korean Stat. Soc. **41** 351-367 (2012).



A family of asymmetric kernels based on log-symmetric distributions

Syha Makhloufi¹, Nabil Zougab², Yasmina Ziane³, and Smail Adjabi³

¹LaMOS Research Unit, University of Bejaia, Algeria,
syha_makhloufi@yahoo.com

²LaMOS Research Unit, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria,
nabilzougab@yahoo.fr

³LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
yasmina-ziane@hotmail.com

⁴LaMOS Research Unit, University of Bejaia, Algeria,
smail.adjabi@univ-bejaia.dz

Abstract : This paper presents a family of asymmetric kernels based on log-symmetric (LS) distributions for probability density function estimation in the context of strictly positive skewed data, see [15]. Some asymptotic properties (bias, variance and mean integrated squared error) of the LS kernel density estimators are established. The choice of bandwidth is investigated by adapting the rule-of-thumb and cross-validation methods. A simulation study investigates the performance of the proposed LS kernel density estimators and compare their performances with the Kakizawa's LS kernel estimators, see [13]. Finally, an application on real data is analyzed.

Keywords : Bandwidth ; Cross validation ; LS kernels ; Rule-of-thumb.

1 Introduction

The kernel density estimator was originally proposed to estimate density functions f with unbounded support.

Let K be the kernel function, which is assumed to be a symmetric probability density. And given a sample X_1, \dots, X_n of iid random variables, the kernel density estimator of f at a target point x is defined by :

$$\hat{f}_S(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \quad (1)$$

When X_1, \dots, X_n are i.i.d random variables with an unknown probability density function (PDF) f on the bounded support \mathbb{T} (e.g. $[0, \infty)$, $(0, \infty)$ or $[0, 1]$), the standard kernel density estimation generates the boundary bias (edge effect); it is of a larger order near the boundary than that in the interior. The boundary bias phenomena is due to weight allocation by

the symmetric kernel outside the density support when smoothing is carried out near the boundary. Several boundary bias correction techniques have been suggested in statistical literature. The so-called asymmetric kernels method has emerged as good alternative to solve this boundary bias issue.

2 Problem Statement and Definitions

We deal with nonparametric asymmetric kernel density estimation of a PDF in the support $(0, \infty)$ (or $[0, \infty)$ with $f(0) = 0$).

We present the family of asymmetric kernel estimators based on log-symmetric (LS) kernels family (see [15]) that is built on the PDF of the LS distributions.

The LS kernel estimators are free of boundary bias, have flexible shape always non-negative and achieve the optimal rate of convergence for the mean squared error (MSE) and mean integrated squared error (MISE).

Log-symmetric distributions

The LS distributions can be obtained by setting $Y = \mu \exp(\sigma Z) \sim LS(\mu, \sigma; r)$, where $\mu > 0$ and $\sigma > 0$ are scale and power parameters, respectively. Then, the pdf of Y is given by

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma y} r \left(\frac{1}{\sigma^2} \{\log(y) - \log(\mu)\}^2 \right), \quad y > 0. \quad (2)$$

PDF estimation based on LS kernels

Let X_1, \dots, X_n be independent and identically (i.i.d) continuous random variable with an unknown PDF f on the support $(0, \infty)$. We present the LS kernel estimators ([15]) of the density f with nonnegative support as

$$\hat{f}_{LS}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{LS(x, h^{1/2}; r)}(X_i), \quad x > 0, \quad (3)$$

where $K_{LS(x, h^{1/2}; r)}$ is the proposed LS kernel that is constructed on the PDF of the LS distributions given in (2), by setting $\mu = x$ and $\sigma = h^{1/2}$.

More precisely, we have

$$K_{LS(x, h^{1/2}; r)}(y) = \frac{1}{\sqrt{hy}} r \left(\frac{1}{h} \{\log(y) - \log(x)\}^2 \right), \quad y > 0, x > 0, h > 0. \quad (4)$$

where x is the target (point where the density is estimated), $h = h(n)$ is an arbitrary sequence of bandwidths such that $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$ and $r(\cdot)$ is the density generator.

3 Examples

For the illustration of the described kernels, we give the following examples from [15] :

TABLE 1 – LS kernels for the indicated generator.

Distribution	Kernel
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi h y}} \exp\left(-\frac{1}{2h} (\log(y) - \log(x))^2\right)$
PE	$\frac{v}{2^{2v} \Gamma(\frac{1}{2v})} \frac{1}{\sqrt{h y}} \exp\left(-\frac{1}{2h^v} (\log(y) - \log(x))^2\right), v > 0$
t	$\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi} \Gamma(\frac{v}{2})} \frac{1}{\sqrt{h y}} \left(1 + \frac{1}{v h} (\log(y) - \log(x))^2\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}, v > 0$
logistic	$\frac{1}{\sqrt{h y}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{h} (\log(y) - \log(x))\right\}}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{1}{h} (\log(y) - \log(x))\right\}\right)^2}$
Slash	$\frac{v}{\sqrt{2\pi h y}} IGF\left(v + \frac{1}{2}, \frac{(\log(y) - \log(x))^2}{2h}\right), v > 0$
Hyperbolic	$\frac{1}{2\sqrt{h(v,1)}} \exp\left(-v\sqrt{1 + \frac{1}{h} (\log(y) - \log(x))^2}\right), v > 0$
Contaminated-Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi h y}} \left\{v_1 \sqrt{v_2} \exp\left(\frac{-v_2 (\log(y) - \log(x))^2}{2h}\right) + (1 - v_1) \exp\left(\frac{-(\log(y) - \log(x))^2}{2h}\right)\right\}, 0 < v_1, v_2 \leq 1$
Laplace	$\frac{1}{2\sqrt{h y}} \exp\left(-\frac{1}{h} (\log(y) - \log(x))^2\right)$

4 Convergence properties of the LS kernel estimators

4.1 Asymptotic properties : bias and variance

The following proposition presents the asymptotic bias and variance of the LS kernel estimators given by (3). We assume that

- A1. f is twice continuously differentiable.
- A2. the bandwidth h satisfied $h \rightarrow 0$ and $nh^{3/2} \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

Proposition 4.1. ([15]) *Let \hat{f}_{LS} be the LS kernel estimator defined by (3). For a given design point $x > 0$ and under assumptions A1 and A2, then :*

(i) *the bias of the LS kernel estimator admit the following expansion*

$$bias\{\hat{f}_{LS}(x)\} = \frac{\mathbb{E}(Z^2)}{2} \{x f'(x) + x^2 f''(x)\} h + o(h),$$

where $\mathbb{E}(Z^2)$ is the second-order moment of $Z \sim S(0, 1; r)$ with PDF given by (??).

(ii) *the variance of the LS kernel estimator is given by*

$$Var\{\hat{f}_{LS}(x)\} = \begin{cases} \frac{C_{r,2}}{nh^{1/2} x} f(x) + o\left(\frac{1}{nh^{1/2}}\right) & \text{if } x/h \rightarrow \infty \\ O\left\{\frac{1}{nh^{3/2}}\right\} & \text{if } x/h \rightarrow \kappa, \end{cases}$$

where $C_{r,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2(z^2) dz$ is the normalization constant for density generator $r^2(\cdot)$ and $\kappa > 0$ is a constant.

4.2 Local and global properties

For local property, we use the mean squared error $MSE\{\hat{f}_{LS}(x)\} = bias^2\{\hat{f}_{LS}(x)\} + Var\{\hat{f}_{LS}(x)\}$. Using the expressions of the bias and variance given in proposition 4.1, then

the MSE is given as

$$\begin{aligned} \text{MSE}\{\widehat{f}_{LS}(x)\} &= \frac{\mathbb{E}^2(Z^2)}{4} \{xf'(x) + x^2f''(x)\}^2 h^2 + \\ &\quad \frac{C_{r^2}}{nh^{1/2}x} f(x) + o\left(h^2 + \frac{1}{nh^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

Now, we use the mean integrated squared error ($MISE$) for global property. If $\int \{xf'(x)\}^2 dx$, $\int \{x^2f''(x)\}^2 dx$ and $\int \{x^{-1}f(x)\}^2 dx$ are finite, then the $MISE$ is given by

$$\begin{aligned} \text{MISE}\{\widehat{f}_{LS}\} &= \int_0^\infty \text{MSE}\{\widehat{f}_{LS}(x)\} dx \\ &= \frac{\mathbb{E}^2(Z^2)}{4} h^2 \int_0^\infty \{xf'(x) + x^2f''(x)\}^2 dx \\ &\quad + \frac{C_{r^2}}{nh^{1/2}} \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x) dx \\ &\quad + o\left(h^2 + \frac{1}{nh^{1/2}}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

By minimizing the $MISE$ given in (5) on the bandwidth, we obtain

$$h_{ideal} = \left\{ \frac{C_{r^2} \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x) dx}{\mathbb{E}^2(Z^2) \int_0^\infty \{xf'(x) + x^2f''(x)\}^2 dx} \right\}^{2/5} n^{-2/5}. \tag{6}$$

Then the optimal- $MISE$ with the ideal bandwidth (6) is given by

$$\begin{aligned} \text{MISE}_{opt}\{\widehat{f}_{LS}\} &= \frac{5}{4} n^{-4/5} \left\{ \mathbb{E}^2(Z^2) \int_0^\infty \{xf'(x) \right. \\ &\quad \left. + x^2f''(x)\}^2 dx \left(C_{r^2} \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x) dx \right)^4 \right\}^{1/5}. \end{aligned}$$

5 Conclusion

we have proposed a family of asymmetric kernels based on log-symmetric distributions for estimating densities with strictly positive support. This family includes as special cases, the log-normal (LN), log-power exponential (LPE), log-Student (Lst) and log-logistic (LLG) kernels. Some asymptotic properties (bias, variance and mean integrated squared error) of LS kernel density estimators are established. The LS kernel estimators and two methods for bandwidth selection, such as rule-of-thumb with gamma reference model and unbiased cross validation are implemented in the R statistical software. The performances of the our proposed LS and Kakizawa's LS estimators based on LN, LPE, Lst and LLG kernels with rule-of-thumb and unbiased cross-validation bandwidth selectors are investigated through simulation study and real application for strictly positive data. This study show good finite sample performances of the proposed LS kernel estimators for densities supported on $(0, \infty)$.

References

- [1] Chen SX. Gamma kernel estimators for density functions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 2000 ; 52 :471-480.
- [2] Chen SX. Beta kernel estimators for density functions. *Computational Statistics and Data Analysis*. 1999 ; 31 :131-145.
- [3] Erçelik E, Nadar M. Nonparametric density estimation based on beta prime kernel. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 2020 ; 49 :325-342.
- [4] Ferrari SLP, Fumes G. Box-Cox symmetric distributions and applications to nutritional data. *AStA Advances in Statistical Analysis*. 2017 ; 101 :321-344.
- [5] Hirukawa M. *Asymmetric Kernel Smoothing : Theory and Applications in Economics and Finance*, JSS Research Series in Statistics, 2018, Heidelberg : Springer, ISBN : 978-981-10-5465-5.
- [6] Igarashi G. Weighted log-normal kernel density estimation. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 2016 ; 45 :6670–6687.
- [7] Igarashi G, Kakizawa Y. Generalised gamma kernel density estimation for nonnegative data and its bias reduction. *Journal of Nonparametric Statistics*. 2018 ; DOI : 10.1080/10485252.2018.1457791.
- [8] Igarashi G, Kakizawa Y. Re-formulation of inverse Gaussian, reciprocal inverse Gaussian, and Birnbaum-Saunders kernel estimators. *Statistics and Probability Letters*. 2014 ; 84 : 235-246.
- [9] Jin X, Kawczak J. Birnbaum-Saunders and Lognormal Kernel Estimators for Modelling Durations in High Frequency Financial Data. *Annals of Economics and Finance*. 2003 ; 22 :103-124.
- [10] Jones MC, Henderson DA. Kernel-type density estimation on the unit interval. *Biometrika*. 2007 ; 24 :977-984.
- [11] Jeon Y, Kim JHT. A gamma kernel density estimation for insurance data. *Insurance : Mathematics and Economics*. 2013 ; 53 : 569-579.
- [12] Kakizawa Y, Igarashi G. Inverse gamma kernel density estimation for nonnegative data. *Journal of the Korean Statistical Society*. 2017 ; 46 :194-207.
- [13] Kakizawa Y. Nonparametric density estimation for nonnegative data, using symmetrical-based inverse and reciprocal inverse Gaussian kernels through dual transformation. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 2018 ; 193 :117–135.
- [14] Ligengue Dolele-Kpoka FGB, Kokonendji C. The mode-dispersion approach for constructing continuous associated kernels. *Afrika Statistika*. 2017 ; 12 :1417 –1446.
- [15] Makhloufi S, Zougab N, Ziane Y, Adjabi S. A family of asymmetric kernels based on log-symmetric distributions. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 2021 ; 1-18.
- [Marchant et al.(2013)] Marchant C, Bertin K, Leiva V, Saulo H. Generalized Birnbaum-Saunders Kernel Density Estimators and an Analysis of Financial Data. *Computational Statistics and Data Analysis*. 2013 ; 63 :1-15.

- [16] Saulo H, Leiva V, Ziegelmann FA, Marchant C. A nonparametric method for estimating asymmetric densities based on skewed Birnbaum-Saunders distributions applied to environmental data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2013 ; 27 :1479-1491.
- [17] Silverman BW. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman & Hall, London. 1986.
- [18] Vanegas LH, Paula GA. Log-symmetric distributions : statistical properties and parameter estimation. *Brazilian Journal Probability and Statistics*. 2016 ; 30 : 196-220.



Asymptotic normality for regression function estimate under right censored data and association

Nassira Menni *¹

¹Faculty of Science, University Algiers I, Department of Mathematics, Algeria,
menni.nassira@gmail.com

Abstract : The goal of this paper is to establish asymptotic normality of the kernel estimator of regression function, in the random right censored model for associated data. An application to prediction and confidence bands are also given. Simulations are drawn to lend further support to our theoretical results for finite samples sizes.

Keywords : Associated data ; Asymptotic normality ; Censored data ; Kaplan-Meier estimator ; Kernel regression estimator.

1 Introduction

Let $\{(X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n\}$ be a sequence of strictly stationary random vectors with the same distribution as $(X, Y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, for which there exists a joint probability density function (pdf) $f_{X,Y}$. We will denote by $F_{X,Y}$ the joint distribution function (df) of (X, Y) , and by ℓ and F_Y the marginal pdf corresponding to the covariate X and the marginal df corresponding to the random variable (rv) of interest Y , respectively. In the sequel, we will suppose Y bounded and non-negative.

Survival analysis is the part of statistics, in which the variable of interest may often be interpreted as the time elapsed between two events. Such variables (lifetimes) typically appear in a medical or an engineering context. A typical feature of such lifetime data analysis is that due to time limitations, Y may not always be observable. Instead, one gets only the minimum of the survival time Y_i and a non-informative censoring time C_i together with the information δ_i as to whether the survival time of an individual is less than the censoring time or not. This means that the observable rv's are given by $X_i, Z_i = \min(Y_i, C_i)$ and the censoring indicator $\delta_i = 1_{Y_i \leq C_i}$. Hence the data are randomly right censored and the available data only provide partial information and, as a consequence, standard statistical procedures are not applicable.

In this paper, the rv's $\{C_i, 1 \leq i \leq n\}$ are non-negative, assumed to be independent and identically distributed (iid) and having a common Lipschitz marginal df G .

*Corresponding Author

It is well known that under this model, the observable random vector (X, Y, δ) does not identify the conditional distribution of Y given X . To overcome the identifiability problem, we will assume that C is independent of (X, Y) .

Since Nadaraya (1964) and Watson (1964) proposed their kernel method to estimate an unknown regression function

$$r(x) = \mathbb{E}[Y|X = x], \tag{1}$$

from a sample $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ of independent replicates of (X, Y) there have been numerous activities to study their well known estimator

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}. \tag{2}$$

Here, K denotes a smoothing kernel integrating to one (we refer to Wied and Weißbach (2012) for a good survey) and $h_n =: h$ is a sequence of bandwidths tending to zero as n goes to infinity. For more details on the estimator in (2) we refer to Härdle (1990) and Wand and Jones (1995). However, as above-mentioned, the latter estimator does not estimate consistently the regression function in presence of a number of events which potentially censor the event of interest. Hence, for this kind of data, the regression function

$$r(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y f_{X,Y}(x, y) dy}{\ell(x)} =: \frac{r_1(x)}{\ell(x)}, \tag{3}$$

must be estimated from the n available triplets (Z_i, δ_i, X_i) , $i = 1, \dots, n$. Based on these observations one may use a local averaging estimate, defined as

$$r_n(x) = \frac{(nh^d)^{-1} \sum_{i=1}^n (\bar{G}_n(Z_i))^{-1} \delta_i Z_i K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)}{(nh^d)^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)} =: \frac{r_{1,n}(x)}{\ell_n(x)}, \tag{4}$$

where $\ell_n(\cdot)$ is the Parzen-Rosenblatt estimate of $\ell(\cdot)$ and $\bar{G}_n(\cdot)$ is the celebrated Kaplan-Meier (1958) estimate of $\bar{G}(\cdot) := 1 - G(\cdot)$, defined as

$$\bar{G}_n(t) = \begin{cases} \prod_{i: Z_{(i)} \leq t} \left(\frac{n-i}{n-i+1}\right)^{1-\delta_{(i)}} & \text{if } t < Z_{(n)} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{5}$$

where $(Z_{(i)}, \delta_{(i)}; 1 \leq i \leq n)$ are the n pairs of observed (Z_i, δ_i) ordered on the $Z_{(i)}$. Note that the estimate in (5) and its version for F_Y have been deeply studied by many authors. To cite only a work related to our model, Cai and Roussas (1998) stated its strong uniform consistency and asymptotic normality under association hypothesis. More references can be found therein.

The regression function estimation under censoring has gained a great interest and to quote only a few of works dealing with this topic, we cite Koul et al. (1981), Stute (1993) and the monograph by Györfi et al. (2002). Recently, the strong uniform consistency and asymptotic normality for the regression function estimate in (4) have been established in the iid

case by Guessoum and Ould Saïd (2008), while under α -mixing condition, El Ghouch and Van Keilegom (2008), and Guessoum and Ould Saïd (2010,2012) stated asymptotic results for (4). In absence of covariables, Ferrani et al. (2016) established strong consistencies for kernel density and mode estimates under associated and censored model.

In the spirit to extend the existing results to association dependence, we aim in the present note to state asymptotic normality of $r_n(x)$. For this purpose, we need the following definition.

Définition 1.1. *A finite collection $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ of real-valued rv's $Y_k, k = 1, 2, \dots, n$ is called associated if $\text{cov}(\phi_1(Y), \phi_2(Y)) \geq 0$ for any coordinate-wise non-decreasing functions $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, whenever the covariance exists. An infinite family of rv's is associated if this is valid for every finite sub-family.*

Associated rv's form an important class of dependent systems and were first introduced by Esary et al. (1967). These systems are encountered in mathematical statistics, reliability and statistical physics. In the latter area, the concept of association is known as FKG-inequalities (see, Fortuin et al. 1971). As examples of associated rv's, we recall that most often in reliability studies, the rv's which are generally lifetimes of components, are not independent but are associated. If independent components of a system are subject to the same stress, then their lifetimes are associated. A variety of relevant examples and ample bibliographical references can be found in Bulinski and Shashkin (2007).

The next section introduces notations and main results.

2 Notations and main results

Before listing the required conditions to formulate our main results, we introduce another interesting feature of the above adapted $r_n(\cdot)$, namely $\tilde{r}_n(\cdot)$ defined as

$$\tilde{r}_n(x) = \frac{(nh^d)^{-1} \sum_{i=1}^n (\bar{G}(Z_i))^{-1} \delta_i Z_i K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)}{(nh^d)^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)} =: \frac{\tilde{r}_{1,n}(x)}{\ell_n(x)}. \tag{6}$$

Note that in a real data situation or in simulation studies we shall, however, not dwell on (6) since \bar{G} is unknown. This pseudo-estimator will be needed as a technical tool in the proofs. Let us now define τ_F and τ_G as the right endpoints of F_Y and G respectively, with $\tau_F = \sup\{y, \bar{F}(y) > 0\}$ and $\tau_G = \sup\{y, \bar{G}(y) > 0\}$. In what follows, we assume that $\tau_F \leq \tau_G$ and the set D will denote a compact such that $D \subset \{x \in \mathbb{R}^d / \ell(x) > \Gamma > 0; \Gamma := \inf \ell(x)\} \subset \mathbb{R}^d$. Furthermore, we set $\Delta_{i,j} := \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \text{cov}(X_i^k, X_j^l) + 2 \sum_{k=1}^d \text{cov}(X_i^k, Y_j) + \text{cov}(Y_i, Y_j)$. Finally, c will denote a positive constant which may take different values.

3 Assumptions

H. The bandwidth h satisfies :

- i). $h \rightarrow 0$, as $n \rightarrow +\infty$;
- ii). $\log \log n = o(h^{-\mu})$ for some $0 < \mu < d$;
- iii). $\lim_{n \rightarrow +\infty} nh^{d+4} = 0$.

K. The kernel function K_d is bounded ($\|K_d\|_\infty := \sup |K_d|$), and satisfies :

- a). $\int_{\mathbb{R}^d} t_i K_d(t) dt = 0$, for all $i = 1, 2, \dots, d$; $t = (t_1, t_2, \dots, t_d)^\top$;
- b). $\int_{\mathbb{R}^d} |t_1 + t_2 + \dots + t_d| K_d^2(t) dt < \infty$;
- c). $\int_{\mathbb{R}^d} |t_1^{i_1} + t_2^{i_2} + \dots + t_d^{i_d}| K_d(t) dt < \infty$, $i_1 + i_2 + \dots + i_d = 2$;
- d). The derivative $(\frac{d}{dt})K(t) = \dot{K}(t)$ exists for all $t \in \mathbb{R}$ and is bounded.

M. $\rho(s) := \sup_{j:|i-j|\geq s} \Delta_{i,j} = O(e^{-\gamma s})$, for all $i \geq 1$, $\gamma > 0$ and $s > 0$.

D1. The function $r_1(\cdot)$ defined in (3) is bounded, twice differentiable and $\sup_{x \in D} |\frac{\partial^k r_1}{\partial x_i \partial x_j^{k-1}}(x)| < \infty$ for $i, j = 1, \dots, d$ and $k = 1, 2$;

D2. The marginal density $\ell(\cdot)$ is bounded, twice differentiable and $\sup_{x \in D} |\frac{\partial^k \ell}{\partial x_i \partial x_j^{k-1}}(x)| < \infty$ for $i, j = 1, \dots, d$ and $k = 1, 2$;

D3. The function $r_2(x) := \int_{\mathbb{R}} (\bar{G}(y))^{-1} y^2 f_{X,Y}(x, y) dy$ is continuously differentiable and $\sup_{x \in D} |\frac{\partial r_2}{\partial x_i}(x)| < \infty$ for $i = 1, \dots, d$;

D4. The joint pdf $\ell_{i,j}(\cdot, \cdot)$ of (X_i, X_j) satisfies $\sup_{u,v \in D} |\ell_{i,j}(u, v) - \ell(u)\ell(v)| < \infty$.

B. For large p -blocks and small q -blocks, where $p = p_n$, $q = q_n$ are positive integers tending to ∞ as $n \rightarrow +\infty$, and $K = K_n := \lfloor \frac{n}{p+q} \rfloor$ (where $\lfloor x \rfloor$ stands for the integral part of x), we suppose that

- i). $\frac{p_n k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$;
- ii). $p_n h^d \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, and $\frac{p_n^2}{n h^d} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- iii). $\frac{q_n k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- iv). $\frac{1}{h^{d+2}} \sum_{j=q}^{\infty} |\Delta_{1,j+1}| \rightarrow 0$.

4 Main results

Théorème 4.1. *If the assumptions **H,K,M,D1-D4** and **B** hold, then for n large enough we have*

$$\sqrt{nh_n^d} [r_n(x) - r(x)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)),$$

where

$$\sigma^2(x) = \kappa \frac{r_2(x)\ell(x) - r_1^2(x)}{\ell^3(x)},$$

$\kappa = \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(t) dt$ and $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ stands for the convergence in distribution.

References

- [1] Bulinski A, Shashkin A (2007) Limit theorems for associated random fields and related systems. Vol. 10. Advanced series on statistical science and applied probability. World Scientific, Singapore
- [2] Cai Z, Roussas GG (1998) Kaplan-Meier estimator under association. J Multivariate Anal 67 :318–348
- [3] El-Ghouch A, Van Keilegom I (2008) Non-Parametric Regression with Dependent Censored Data, Scand J Stat 35 :228–247
- [4] Esary J, Proschan F, Walkup D (1967) Association of random variables with applications. Ann Math Stat 38 :1466–1476
- [5] Ferrani Y, Ould Saïd E, Tatachak A (2016) On kernel density and mode estimates for associated and censored data. Commun Stat Theory Methods 45 :1853–1862
- [6] Fortuin CM, Kasteleyn PW, Ginibre J (1971) Correlation inequalities on some partially ordered sets. Comm Math Phys 22 :89–103
- [7] Guessoum Z, Ould Saïd E (2008) On the nonparametric estimation of the regression function under censorship model. Statist and Decisions 26 :159–177
- [8] Guessoum Z, Ould Saïd E (2010) Kernel regression uniform rate estimation for censored data under α -mixing condition. Electronic J Stat 4 :117–132
- [9] Guessoum Z, Ould Saïd E (2012) Central limit theorem for the kernel estimator of the regression function for censored time series. J of Nonparam Stat 24 :379–397
- [10] Györfi L, Kohler M, Krzyzak A, Walk H (2002) A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression. Springer-Verlag, New York
- [11] Härdle W (1990) Applied Nonparametric Regression. Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] Kaplan EL, Meier P (1958) Nonparametric estimation from incomplete observations. J Amer Statist Assoc 53 :457–481
- [13] Koul H, Susarla V, van Ryzin J (1981) Regression analysis with randomly right censored data. Ann Stat 9 :1276–1288
- [14] Nadaraya EA (1964) On estimating regression. Theor Probab Appl 9 :141–142

- [15] Stute W (1993) Consistent Estimation Under Random Censorship When Covariables are Present. *J of Multivar Anal* 1 :89–103
- [16] Wand MP, Jones MC (1995) *Kernel Smoothing*. Chapman & Hall, London
- [17] Wied D, Weißbach R (2012) Consistency of the kernel density estimator : a survey. *Stat Papers* 53 :1–21



On the asymptotic properties of kernel estimators for continuous-time semi-Markov processes

Ayhar Chafiâa^{*1}, Vlad Stefan Barbu¹, Mokhtari Fatiha², and Saâdia Rahmani³

¹LMSSA, University of Saida–Doctor Moulay Taher, 20000, Algeria,
chafiaa.ayhar@univ-saida.dz

²LMRS, University of Rouen–Normandy, France,
barbu@univ-rouen.fr

³LMSSA, University of Saida–Doctor Moulay Taher, 20000, Algeria.,
fatiha.mokhtari@univ-saida.dz

⁴LMSSA, University of Saida–Doctor Moulay Taher, 20000, Algeria,
saadia.rahmani@univ-saida.dz

Abstract : This paper provides kernel estimators of the main characteristics of a continuous-time semi-Markov process, like conditional and unconditional sojourn times in a state, semi-Markov kernel, etc. The main goal of this paper is to establish asymptotic properties of the semi-Markov kernel estimators and of the sojourn time distribution estimators, as well as of the estimators of the associated Radon-Nikodym derivatives, when the sample size becomes large.

MSC: 60G ; 60F ; 62M

Keywords : semi-Markov processes ; kernel estimator ; sojourn times ; semi-Markov kernel ; consistency ; asymptotic normality.

1 Introduction

Semi-Markov processes (SMPs) and Markov renewal processes (MRPs) represent an important class of stochastic processes that naturally generalize Markov jump processes and renewal processes. This class of processes was introduced independently and almost simultaneously by [2], [6] and [7]; later on, essential developments of this theory were proposed by [4], [3], [5] and many other researchers.

Our objectives in the present paper are : (1) to introduce kernel estimators for the sojourn time distribution function (conditional or not), for the semi-Markov kernel and for the corresponding densities ; (2) to establish asymptotic properties of the estimators, namely the uniform strong consistency and the asymptotic normality. We would like to stress that this work is an important step in the theory of statistical methods for semi-Markov processes ; in

*Corresponding Author

this way we fill a gap in the use of the important and already classical class of estimators for this type of stochastic processes.

Our work is organized as follows. In the next section we introduce some basic notations and definitions that are needed along the paper. In Section 3, we present kernel estimators of the conditional sojourn time, continuous-time semi-Markov kernel, and unconditional sojourn time distribution. Section 4 is devoted to the study of the asymptotic properties of the proposed estimators.

2 Preliminaries

Let us consider a SMP $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ with finite state space $E = \{1, \dots, s\}$ or, equivalently, a MRP $(J, S) = (J_n, S_n)_{n \geq 0}$, defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where we have denoted by $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ the successive time points when state changes in Z occur and by $J = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ the successive visited states at these time points. Note that J takes values in the finite state space E , while S takes values in $[0, \infty]$. Set also $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for the successive sojourn times in the visited states. Thus, $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, and, by convention, we set $X_0 = S_0 = 0$. Here \mathbb{N}^* denotes the set of positive integers. The relationships between the SMP Z and the MRP (J, S) can be written as

$$Z_t = J_{N(t)} \Leftrightarrow J_n = Z_{S_n},$$

with $N(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, the counting process of the number of jumps in the time interval $(0, t]$. Thus, Z_t gives the state of the system at time t .

Let us introduce the semi-Markov kernel $Q(t) = \{Q_{ij}(t), i, j \in E\}$, $t \geq 0$, defined by

$$Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq t \mid J_0, \dots, J_n = i, X_1, \dots, X_n) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq t \mid J_n = (i))$$

If $(J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a MRP, it can be immediately checked that $J = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Markov chain, called the *embedded Markov chain* (EMC) with state space E , initial distribution $\alpha_i := \mathbb{P}(J_0 = i)$, $i \in E$, and transition probabilities, $p_{ij} = \mathbb{P}(J_{n+1} = j \mid J_n = i) = Q_{ij}(\infty)$, $i, j \in E$.

Note that the MRP and the SMP are considered homogeneous with respect to the time, in the sense that Equation (1) is independent of n . All along this work we consider homogeneous MRPs/SMPs only. We do we allow transitions to the same state, i.e., $p_{ii} = 0$ for all $i \in E$, or equivalently $Q_{ii}(t) = 0$, for all $i \in E$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Définition 2.1. For all $i, j \in E$ such that $p_{ij} \neq 0$, let us denote by :

(i) F_i , the sojourn time distribution in state i , $F_i(t) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i) = \sum_{j=1}^s Q_{ij}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) F_{ij} , the conditional distribution of the sojourn time in state i before going to state j ,

$$F_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i, J_{n+1} = j), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Obviously, for all $i, j \in E$ and $t \in \mathbb{R}_+$, we have $Q_{ij}(t) = p_{ij}F_{ij}(t)$.

3 Nonparametric kernel estimators

For all $i, j \in E$ and $t \leq T$, let us define the following counting processes :

$N_i(T) = \sum_{l=1}^{N(T)} \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}}$, the number of visits to state i , up to time T ; $N_{ij}(T) = \sum_{l=1}^{N(T)} \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j\}}$, the number of transitions from i to j , up to time T .

For fixed states i and j , let us denote by $X_{i;l}$ the corresponding sojourn time in state i during l^{th} visit of this state.

Taking a sample path $\mathcal{H}(T) := (J_0, X_1, \dots, J_{N(T)-1}, X_{N(T)}, J_{N(T)}, u_T)$, $T \in \mathbb{R}_+$, where $u_T := T - S_{N(T)}$ of a Markov renewal processes, for all $i, j \in E$ and $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$, we define the kernel estimators of $F_i(t)$, $F_{ij}(t)$, $Q_{ij}(t)$ and of the derivatives $f_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $q_{ij}(t)$ as follows :

$$\widehat{F}_i(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_i(T)} H\left(\frac{t - X_{i;l}}{h_{i,T}}\right) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N(T)} H\left(\frac{t - X_l}{h_{i,T}}\right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}}; \quad (2)$$

$$\widehat{F}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} H\left(\frac{t - X_{ij;l}}{h_{ij,T}}\right) = \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{l=1}^{N(T)} H\left(\frac{t - X_l}{h_{ij,T}}\right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j\}}; \quad (3)$$

$$\widehat{f}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} \frac{1}{h_{ij,T}} K\left(\frac{t - X_{ij;l}}{h_{ij,T}}\right); \quad (4)$$

$$\widehat{f}_i(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_i(T)} \frac{1}{h_{i,T}} K\left(\frac{t - X_{i;l}}{h_{i,T}}\right), \quad (5)$$

where $H(t) = \int_{-\infty}^t K(t)dt$ and with some abuse of notations, we wrote $h_{i,T}$ (resp. $h_{ij,T}$) instead of $h_{i, N_i(T)}$ (resp. $h_{ij, N_{ij}(T)}$).

Second, we can introduce a kernel estimators of $Q_{ij}(T)$ and $q_{ij}(t)$ defined by,

$$\widehat{Q}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} H\left(\frac{t - X_{ij;l}}{h_{ij,T}}\right), \quad (6)$$

$$\widehat{q}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} \frac{1}{h_{ij,T}} K\left(\frac{t - X_{ij;l}}{h_{ij,T}}\right), \quad (7)$$

and $\widehat{p}_{ij}(T) := \frac{N_{ij}(T)}{N_i(T)}$ is the empirical estimator of p_{ij} .

4 Asymptotic properties of the estimators

Let us first focus on the assumptions we need to derive the asymptotic behavior of our estimators.

4.1 Assumptions

All along this article we are working under the following three assumptions.

(H.1) The EMC $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is an ergodic irreducible Markov chain, with stationary distribution ν .

(H.2) The SMP is irreducible, aperiodic, with finite mean sojourn times.

(H.3) The SMP (or equivalently, the MRP) is regular, that is $\mathbb{P}_i(N(t) < \infty) = 1$ for all $t > 0, i \in E$, with $\mathbb{P}_i(\cdot)$ means $\mathbb{P}(\cdot | J_0 = i)$.

In addition, we need to introduce the following conditions.

(H.4) i) $Q_{ij}(t), F_i(t)$ and $F_{ij}(t)$ are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, and let $q_{ij}(t), f_i(t)$ and $f_{ij}(t)$ be respectively the corresponding Radon-Nikodym derivative.

ii) The first derivatives f_{ij} and f_i are bounded.

(H.5) i) The function H is a distribution function.

ii) The kernel K is density function of bounded variation such that $\lim_{x \rightarrow \infty} |xK(x)| = 0$ and $|\int t^j K^k(t) dt| < \infty$ for $j = 0, 1$, and $k = 1, 2$, where K is the derivative of H .

(H.6) The smoothing parameters $h_{i,n}, h_{ij,n}$ satisfy $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{i,n} = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_{i,n} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{ij,n} = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_{ij,n} = \infty$.

(H.7) The series $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma h_{i,n}^2}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma h_{ij,n}^2}$ converge for every positive value of γ .

Our first results concern the uniform strong consistency of the proposed estimators.

Theorem 4.1. For any fixed arbitrary states $i, j \in E$ and any fixed arbitrary positive $t \in \mathbb{R}_+, t \leq T$, under Assumptions (H.5)-(H.7), the following statement stands true. The kernel estimator $\widehat{F}_i(t, T)$ introduced in (2) is uniformly strongly consistent, i.e.,

$$\max_i \sup_{t \in [0, T]} |\widehat{F}_i(t, T) - F_i(t)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

Corollary 4.2. For any fixed arbitrary states $i, j \in E$ and any fixed arbitrary positive $t \in \mathbb{R}_+, t \leq T$, under Assumptions (H.5)-(H.7), the following statements stand true.

(i) The kernel estimator $\widehat{F}_{ij}(t, T)$ introduced in (3) is uniformly strong consistent, i.e.,

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} |\widehat{F}_{ij}(t, T) - F_{ij}(t)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

(ii) The kernel estimator $\widehat{f}_{ij}(t, T)$ proposed in (4) is uniformly strong consistent, i.e.,

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} |\widehat{f}_{ij}(t, T) - f_{ij}(t)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

(iii) The kernel estimator $\widehat{f}_i(t, T)$ introduced in (5) is uniformly strong consistent, i.e.,

$$\max_i \sup_{t \in [0, T]} |\widehat{f}_i(t, T) - f_i(t)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

(iv) The kernel estimator of the semi-Markov kernel density proposed in (3) is uniformly strongly consistent, i.e.,

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0,T]} |\hat{q}_{ij}(t,T) - q_{ij}(t)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

(v) Since $\hat{Q}_{ij}(t,T) = \hat{p}_{ij}(T) \hat{F}_{ij}(t,T)$, the uniform strong consistency of the estimators $\hat{p}_{ij}(T)$ and $\hat{F}_{ij}(t,T)$ allow as to deduce that :

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0,T]} |\hat{Q}_{ij}(t,T) - Q_{ij}(t)| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

The following results concern the asymptotic normality of the proposed estimators.

Theorem 4.3. For any fixed arbitrary states $i, j \in E$ and any fixed arbitrary positive $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$, under Assumptions (H.4), (H.5) and (H.6), the following statements stand true.

(i) $\sqrt{T}[\hat{F}_i(t,T) - F_i(t)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_F^2(i,t))$, with the asymptotic variance

$$\sigma_F^2(i,t) = \mu_{ii} F_i(t) [1 - F_i(t)],$$

(ii) $\sqrt{Th_{ij,T}}[\hat{q}_{ij}(t,T) - q_{ij}(t)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_q^2(i,j,t))$, with the asymptotic variance

$$\sigma_q^2(i,j,t) = \mu_{ii} q_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz.$$

where μ_{ii} is the mean recurrent time of state i for the semi-Markov process $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Corollary 4.4. For any fixed arbitrary states $i, j \in E$ and any fixed arbitrary positive $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$, under Assumptions (H.4), (H.5) and (H.6), the following statements stand true.

(i) $\sqrt{T}[\hat{F}_{ij}(t,T) - F_{ij}(t)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_F^2(i,j,t))$, with the asymptotic variance

$$\sigma_F^2(i,j,t) = \frac{\mu_{ii}}{\rho_{ij}} F_{ij}(t) [1 - F_{ij}(t)].$$

(ii) $\sqrt{T}[\hat{Q}_{ij}(t,T) - Q_{ij}(t)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_Q^2(i,j,t))$, with the asymptotic variance

$$\sigma_Q^2(i,j,t) = \mu_{ii} Q_{ij}(t) [1 - Q_{ij}(t)].$$

(iii) $\sqrt{Th_{ij,T}}[\hat{f}_{ij}(t,T) - f_{ij}(t)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2(i,j,t))$, with the asymptotic variance

$$\sigma_f^2(i,j,t) = \frac{\mu_{ii}}{\rho_{ij}} f_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz.$$

(iv) $\sqrt{Th_{i,T}}[\hat{f}_i(t,T) - f_i(t)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2(i,t))$, with the asymptotic variance

$$\sigma_f^2(i,t) = \mu_{ii} f_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz.$$

5 Concluding remarks

The main contribution of the work presented in this article is the use of the classical technique of nonparametric Parzen-Rosenblatt kernel estimation for estimating the main characteristics of a continuous-time semi-Markov process, namely the sojourn time distribution functions (conditional or not), the semi-Markov kernel and the corresponding densities. We have proposed kernel estimators for these quantities and investigated the uniform strong consistency and the asymptotic normality of these estimators.

References

- [1] V.S. Barbu, N. Limnios (2006). Empirical estimation for discrete time semi-Markov processes with applications in reliability. *J. Nonparametr. Statist.*, **18**, 483–498.
- [2] P. Lévy (1954). *Processus semi-markoviens*. Proc. of International Congress of Mathematics, Amsterdam.
- [3] R. Pyke (1961). Markov renewal processes : definitions and preliminary properties. *Ann. Math. Statist.*, **32**, 1231–1241.
- [4] R. Pyke (1961). Markov renewal processes with finitely many states. *Ann. Math. Statist.*, **32**, 1243–1259.
- [5] R. Pyke, R. Schaufele (1964). Limit theorems for Markov renewal processes. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 1746–1764.
- [6] W.L. Smith (1955). Regenerative stochastic processes. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng.*, **232**, 6–31.
- [7] L. Takács (1954). Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kzl.*, **3**, 115–128.



Quantile Quadratic Credibility Premium

Ahmed Sadoun¹, Farouk Metiri^{*2}, and Mouhamed Riad Remita³

¹ LaPS laboratory, Badji-Mokhtar University, Box 12, Annaba, 23000, ALGERIA ,
saadounahmed1@yahoo.fr

² LaPS laboratory, Badji-Mokhtar University, Box 12, Annaba, 23000, ALGERIA ,
fmetiri@yahoo.fr

³ LaPS laboratory, Badji-Mokhtar University, Box 12, Annaba, 23000, ALGERIA ,
r-remita@yahoo.fr

Abstract : This article generalizes links between credibility theory and quantile introduced by Pitselis (2013), Le Courtois (2016) and Sumpf (2018), to define the quantile credibility premium . We present a system of equations from which the quantile credibility premium can be calculated. More precisely, we construct a quadratic quantile credibility where premiums are estimated based on the values of quantiles and of squared quantiles under the non-parametric approaches. Credibility estimators are also established for this model and numerical examples are presented.

MSC: 62E10 ;62C12

Keywords : Non-Parametric Approach, Quadratic Credibility, Quantile Credibility.

1 Introduction

Credibility models are actuarial tools to distribute premiums fairly among a heterogeneous group of policyholders (henceforth called entities). More generally, they can be seen as prediction methods applicable in any setting where repeated measures are made for subjects with different risk levels, for recent detailed introductions to credibility theory, see [1, 3, 4] . In actuarial practice there are cases where the claim distribution is not normal and other cases where the data are contaminated due to large claims (catastrophic events). On the other hand insurance regulations (Solvency) may require that a risk margin should be established on a basis that is intended to secure the insurance liabilities of the insurer at a given level of sufficiency. For those cases it is more appropriate to use quadratic quantile instead of the mean for the classical q-credibility model instead of the ordinary least squares estimation. The aim of this paper is present the a new premium relies on q-quantiles. More specifically, we incorporate quantiles into the Le Courtois model (2016) following the procedure of Sumpf (2018). Furthermore, Le Courtois (2016) has constructed a quadratic credible framework under the net quadratic loss function where premiums are estimated based on the values of

*Corresponding Author

past observations and of past squared observations. Recently, Sumpf (2018) generalized the credibility framework to define the p-credibility premium by adding higher exponents of the past observations in the structure of the premium.

The paper is organized as follows. In Section 2, we state the main result of the paper which is the characterization of the quantile and of squared quantile credibility premium. From that, we conclude the formula of the quadratic credibility premium. In Section 3, numerical example of the results in a non-parametric approach is given.

2 Main Results

Our idea consists of replacing P in $L_q(P, x)$ by an expression of the form

$$\alpha_{0q} + \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \hat{\zeta}_{pi} + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \hat{\zeta}_{pi}^2 \tag{1}$$

depending on the quantile and of squared quantiles. The main result of this paper is showed in the next proposition.

Proposition 2.1. *Under the above assumptions, the estimator of the homogeneous quantile q-credibility premium can be expressed as a function of the empirical means of the past values $\hat{\zeta}_p$ and $\hat{\zeta}_p^2$, can be expressed as*

$$\Xi_p^{cred} = \Xi_p + \tilde{\alpha}_1 \hat{\zeta}_p + \tilde{\alpha}_2 \hat{\zeta}_p^2$$

where

$$\tilde{\alpha}_1 = n\alpha_1, \tilde{\alpha}_2 = n\alpha_2,$$

and

$$\begin{cases} \alpha_{0q} + \tilde{\alpha}_1 \Xi_p(\theta) + \tilde{\alpha}_2 \Xi_p^2(\theta) = E[\Xi_{pj}(\theta_{pj})] \\ \tilde{\alpha}_1 \Sigma_{11} + \tilde{\alpha}_2 \Sigma_{12} = \rho_1 \\ \tilde{\alpha}_1 \Sigma_{21} + \tilde{\alpha}_2 \Sigma_{22} = \rho_2 \end{cases}$$

Under the above assumptions, the linear quantile credibility estimator under the squared error loss function giving the best predictor of X for the next period can be expressed as

$$P_2 = \Xi_p + \tilde{\alpha}_1 (\hat{\zeta}_p - \varepsilon_p) + \tilde{\alpha}_2 (\hat{\zeta}_p^2 - (\Xi_p^2 + \psi_p + v_{\hat{\zeta}_p}))$$

where

$$\alpha_{0q} = \Xi_p (1 - \alpha_1) - \alpha_2 (\Xi_p^2 + \psi_p + v_{\hat{\zeta}_p})$$

and

$$\alpha_1 = \frac{\psi_p (n\omega_p + \eta_p) - \tau_p (n\tau_p + \phi_p)}{(n\psi_p + v_{\hat{\zeta}_p})(n\omega_p + \eta_p) - (n\tau_p + \phi_p)^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\tau_p v_{\hat{\zeta}_p} - \psi_p \phi_p}{(n\psi_p + v_{\hat{\zeta}_p})(n\omega_p + \eta_p) - (n\tau_p + \phi_p)^2}$$

Preuve. The objective is to solve an optimization problem which we have already expressed in the sections above :

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(\Xi_{pi}(\theta_{pi}), \zeta_{pk}\right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \text{cov}\left(\hat{\zeta}_{pi}, \zeta_{pk}\right) + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \text{cov}\left(\hat{\zeta}_{pi}^2, \zeta_{pk}\right) \\ \text{cov}\left(\Xi_{pi}(\theta_{pi}), \hat{\zeta}_{pk}^2\right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \text{cov}\left(\hat{\zeta}_{pi}, \hat{\zeta}_{pk}^2\right) + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \text{cov}\left(\hat{\zeta}_{pi}^2, \hat{\zeta}_{pk}^2\right) \end{aligned}$$

we consider $\forall i = 1 : n, \alpha_{1i} = \alpha_1$ and $\alpha_{2i} = \alpha_2$. Then, Eqs (15) and (17) become

$$\begin{cases} \alpha_1 (n\psi_p + v_{\hat{\zeta}_p}) + \alpha_2 (n\tau_p + \varphi_p) = \psi_p \\ \alpha_1 (n\tau_p + \varphi_p) + \alpha_2 (n\omega_p + \eta_p) = \tau_p \end{cases}$$

The solutions of the two equations are of the form :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\psi_p (n\omega_p + \eta_p) - \tau_p (n\tau_p + \varphi_p)}{(n\psi_p + v_{\hat{\zeta}_p})(n\omega_p + \eta_p) - (n\tau_p + \varphi_p)^2} \\ \alpha_2 &= \frac{\tau_p v_{\hat{\zeta}_p} - \psi_p \varphi_p}{(n\psi_p + v_{\hat{\zeta}_p})(n\omega_p + \eta_p) - (n\tau_p + \varphi_p)^2} \end{aligned}$$

Hence, we can write () as :

$$\alpha_{0q} + n\alpha_1 \varepsilon_p + n\alpha_2 (\varepsilon_p^2 + \psi_p + v_{\hat{\zeta}_p}) = \varepsilon_p$$

because

$$E\left(\hat{\zeta}_{pk}^2\right) = E\left(\hat{\zeta}_{pk}\right)^2 + \text{var}\left(\hat{\zeta}_{pk}\right) = \varepsilon_p^2 + \psi_p + v_{\hat{\zeta}_p}.$$

Finally, denoting Z_q by $n\alpha_1$ and Y_q by $n\alpha_2$, we have that :

$$\alpha_{0q} = \Xi_p (1 - \tilde{\alpha}_1) - \tilde{\alpha}_2 (\Xi_p^2 + \psi_p + v_{\hat{\zeta}_p})$$

$$\alpha_{0q} + \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \hat{\zeta}_{pi} + \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \hat{\zeta}_{pi}^2$$

that we rewrite as

$$\alpha_{0q} + n\alpha_1 \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{pi}}{n} + n\alpha_2 \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{pi}^2}{n}$$

Note that P_2 can also be written as

$$P_2 = \Xi_p + \tilde{\alpha}_1 (\hat{\zeta}_p - \Xi_p) + \tilde{\alpha}_2 (\hat{\zeta}_p^2 - (\Xi_p^2 + \psi_p + v_{\hat{\zeta}_p})).$$

□

3 Numerical examples

All the data obtained from the largest social security organization in Greece . The 6 contracts correspond to the 6 different classes, for 22 years of claim experiences, from 1980-2001.

TABLE 1 – Quantile (median) q-Credibility model

Contract	Sick	Accid	Matern	Funer	Other	Manag
$\hat{\xi}_{pi}$	16782.50	2003.50	5332	2373.50	3106.50	1884
$\hat{\xi}_{pi}^2$	281655498.50	4014432.50	28442545	5634908.50	9650762.50	3549856
p_q^{perid}	16606.54576	2015.733359	5588.204859	2421.082895	3218.05898	1884.37455
$\hat{h} = 2.67184e + 15, \hat{c} = 9.69149e + 15, \hat{g} = 1.06214e + 11, \hat{b} = 5.31716e + 11$						
$\alpha_{0,q} = -214.9552496, \alpha_1 = 1.128454813, \alpha_2 = -7.51554e - 06$						

According to the results above, it can be seen that when the individual experience is not important, the premiums converge towards the collective, but when there is an important claims history, the premiums converge in the opposite case.

4 Conclusion

In this paper, we have examined the effect of adding a quadratic correction to credibility theory. For all of our analysis, we have considered uniform exposures.

References

- [1] Bühlmann, H., Gisler, A., 2005. A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer, Netherlands
- [2] Courtois, O., 2016. Uniform Exposure Quadratic Credibility. Available at SSRN : <https://ssrn.com/abstract/2571195> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2571195>
- [3] Herzog, T.N., 1996. Introduction to Credibility Theory, 2nd ed. ACTEX Publications, Winsted.
- [4] Norberg, R., 2004. Credibility theory. In : Encyclopedia of Actuarial Science. Wiley, Chichester, UK.
- [5] Sumpf, A., 2018. Extended Construction of the Credibility Premium. Insurance : Mathematics and Economics. accepted



Heavy tailed distribution in a random stopping time for supercritical branching processes

Akila Hedjam ¹ and Djamel Hamadouche ²

¹Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University Mouloud Mammeri of Tizi-Ouzou, Algeria, akila.hedjam@fs.ummo.dz

²Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University Mouloud Mammeri of Tizi-Ouzou, Algeria, djamel.hamadouche@ummo.dz

Abstract : In this paper, we study the asymptotic distribution of exponentially growing processes in a random stopping time. Under hypothesis of exponential random stopping time, we prove that the asymptotic distribution of the considered process, in this stopping time, is a heavy tailed distribution. In particular under some conditions, the continuous time branching process in the supercritical case, is exponentially growing process, so we prove that its asymptotic distribution in a random stopping time is a heavy tailed distribution, in the sense Pareto-like distribution, which are given as examples of applications.

MSC: 60F05 ; 60F10 ; 60J80 ; 60J85

Keywords : exponential growth ; heavy tailed distribution ; branching process

1 Introduction

The asymptotic behavior of branching processes, under various conditions, is widely studied in the literature. Branching processes are stochastic processes which are often used to model a population which evolves according to precise rules of reproduction. These processes being unstable, many methods were introduced to study their asymptotic behavior.

The aim of this paper is to characterize the asymptotic distribution of exponentially growing processes, in a random stopping time. Under the hypothesis of exponential growing of a process $(X_t)_{t \geq 0}$, we prove that the asymptotic distribution of this process, in particular branching processes, in a random stopping time T , is a heavy tailed distribution, in the sense Pareto-like distribution, i.e

$$P[X_T > t] \sim Ct^{-\rho}, t \rightarrow \infty,$$

for some $C, \rho > 0$.

*Corresponding Author

We first consider the Bellman-Harris process. Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a Bellman-Harris branching process with offspring mean m , and lifetime distribution G . In the supercritical case ($m > 1$), it is established ([4]) that $(X_t)_{t \geq 0}$ is an exponentially growing process, in the sense that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{e^{\mu t}} = W \geq 0, \quad a.s.,$$

where μ is the unique root of the equation

$$m \int_0^\infty e^{-\mu s} dG(s) = 1,$$

called the Malthusian parameter and W is a random variable with expectation

$$\mathbb{E}[W] = (m-1)(\mu m^2 \int_0^\infty s e^{-\mu s} dG(s))^{-1} < \infty.$$

Consider now a positive random process $(X_t)_{t \geq 0}$ such that for $r > 0$, $\mathbb{E}[X_t^r] < \infty, \forall t \geq 0$. Let T be an exponential random variable with parameter ν and independent of $(X_t)_{t \geq 0}$. We are interested in characterizing the random variable X_T , in particular we want show that if, $(X_t)_{t \geq 0}$ is an exponentially growing process,

$$\text{i.e } \exists \mu > 0 \text{ such that } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{e^{\mu t}} = W, \quad a.s., \quad (1)$$

where W is a continuous random variable, such that $0 < \mathbb{E}[W^\rho] < \infty$, and $P[W > 0] = 1$, with $\rho = \frac{\nu}{\mu} > 0$. Then the asymptotic distribution of X_T is a heavy tailed distribution, in particular Pareto-like distribution, i.e there exists a constant $C > 0$ such that,

$$P[X_T > t] \sim Ct^{-\rho}, \quad t \rightarrow \infty.$$

The paper is organized as follows. The conditions for which the asymptotic distribution of a positive random process, in an exponential stopping time, is a Pareto-like distribution are exposed in section 2. In particular, these conditions are satisfied by continuous-time branching processes in the supercritical case. These results are proposed as examples of applications in section 3.

2 Main results

In this section, we will show under some conditions that the asymptotic distribution of a positive random process, in a random stopping time, is a Pareto-like distribution. For this, we remark that if the distributions of the X_t are Pareto-like distributions, in the sense that their right tails are of the form

$$P[X_s > t] \sim c.t^{-\alpha}, t \rightarrow \infty, \forall s > 0,$$

for some $\alpha > 0$, $c > 0$. Then the distribution of X_T is Pareto-like distribution. Indeed, we have the following proposition.

Proposition 2.1. Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a real random process, with Pareto-like distributions, and let T be a real positive random variable and independent of $(X_t)_{t > 0}$, then X_T is a Pareto-like distribution, i.e we have

$$P[X_T > t] \sim c.t^{-\alpha}, t \rightarrow \infty,$$

for some $\alpha > 0$, $c > 0$.

Proposition 2.2 below gives a general condition for Pareto-like distribution of X_T .

Proposition 2.2. Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a positive random process such that for $r > 0$, $\mathbb{E}[X_t^r] < \infty$, $\forall t \geq 0$, and satisfying condition (1). Let T be an exponential random variable with parameter $\nu < \mu.r$ and independent of $(X_t)_{t \geq 0}$, such that

$$\text{for all } a > 0, \int_0^a \mathbb{E}[X_y^r] e^{-\nu y} dy < \infty. \quad (2)$$

Then X_T is a Pareto-like distribution i.e as t tends to infinity,

$$P[X_T > t] \sim \mathbb{E}[W^\rho] t^{-\rho}, \text{ with } \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

Preuve. For $a > 0$, we have

$$P[X_T > t] = \int_0^\infty P[X_y > t] \nu e^{-\nu y} dy = \int_0^a P[X_y > t] \nu e^{-\nu y} dy + \int_a^\infty P[X_y > t] \nu e^{-\nu y} dy.$$

By Markov's inequality and from hypothesis (2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\rho \int_0^a P[X_y > t] \nu e^{-\nu y} dy \leq \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\rho-r} \int_0^a \nu \mathbb{E}[X_y^r] e^{-\nu y} dy = 0, 0 < \rho < r.$$

On the other hand, according to (1) and for a large enough,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\rho \int_a^\infty P[X_y > t] \nu e^{-\nu y} dy = \mathbb{E}[W^\rho].$$

It follows that,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\rho P[X_T > t] = \lim_{t \rightarrow \infty} t^\rho \int_0^\infty P[X_y > t] \nu e^{-\nu y} dy = \mathbb{E}[W^\rho],$$

i.e

$$P[X_T > t] \sim \mathbb{E}[W^\rho] t^{-\rho}, t \rightarrow \infty.$$

□

3 Examples of applications

In this section, we give some examples of processes where the conditions of Proposition 2.2 are satisfied.

Example 1 : Case of the process $X_t = We^{\mu t}$

Proposition 3.1. *Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be the process defined by $X_t = We^{\mu t}$, with $\mu > 0$ and W a continuous random variable such that $0 < \mathbb{E}[W] < \infty$ and $P[W > 0] = 1$. If T is an exponential random variable with parameter ν ($\nu < \mu$) and independent of $(X_t)_{t \geq 0}$, then X_T is a Pareto-like distribution i.e as t tends to infinity, there exists $C > 0$, such that*

$$P[X_T > t] \sim C.t^{-\rho}, \text{ with } \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

Preuve. We apply Proposition 2.2.

By hypothesis $X_t e^{-\mu t} = W$, $P[W > 0] = 1$ and $0 < \mathbb{E}[W^\rho] < \infty$, since $0 < \mathbb{E}[W] < \infty$. So the condition (1) is satisfied.

The condition (2) is satisfied also, indeed for $a > 0$

$$\int_0^a \mathbb{E}[X_y] \nu e^{-\nu y} dy = \int_0^a \mathbb{E}[W] \nu e^{(\mu-\nu)y} dy = \frac{\mathbb{E}[W] \nu}{\mu - \nu} (e^{(\mu-\nu)a} - 1) < \infty.$$

Therefore, there exists $C > 0$, ($C = \mathbb{E}[W^\rho]$) such that,

$$P[X_T > t] \sim C.t^{-\rho}, t \rightarrow \infty, \text{ with } \rho = \frac{\nu}{\mu}.$$

□

Example 2 : Case of a Markov branching process

Proposition 3.2. *Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a continuous-time Markov branching process with offspring distribution $(p_k)_{k \geq 0}$, offspring mean m and exponential lifetime distribution with parameter λ . Let T be an exponential random variable with parameter ν such that $\lambda(m - 1) > \nu$ and independent of $(X_t)_{t \geq 0}$. If $X_0 = 1$, $p_0 = 0$ and $\sum k p_k \ln k < \infty$, then X_T is a Pareto-like distribution i.e as t tends to infinity, there exists $C > 0$ such that*

$$P[X_T > t] \sim C.t^{-\rho}, \text{ with } \rho = \frac{\nu}{\lambda(m - 1)}.$$

Preuve. The condition (1) is satisfied by the following theorem of Athreya-Ney [2, p. 111].

Théorème 3.1. [2] *The process $(e^{-\mu t} X_t)_{t \geq 0}$ with $\mu = \lambda(m - 1)$, is a non-negative martingale and hence*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mu t} X_t = W \text{ exists a.s.}$$

On the other hand, with the condition $\sum k p_k \ln k < \infty$, the following theorem of Athreya-Ney [2, p. 112] shows that W is a continuous random variable and gives its expectation.

Théorème 3.2. [2] *Let W be as defined in theorem 3.1 and assume $m > 1$. Then*

$$P[W = 0] = 1 \text{ or } \mathbb{E}[W] = 1,$$

the latter is holding if and only if $\sum k p_k \ln k < \infty$.

Furthermore if $\sum k p_k \ln k < \infty$, then

i) $P[W = 0] = q = P[\exists t : X_t = 0]$,

and

ii) There exists a continuous density function $w(x)$ on $(0, \infty)$ such that for $0 < x_1 < x_2 < \infty$

$$P[x_1 \leq W \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx.$$

Hence $0 < \mathbb{E}[W^\rho] < \infty$.

From hypothesis, $p_0 = 0$, the extinction probability q is zero, hence $P[W > 0] = 1$. And for $a > 0$,

$$\int_0^a \mathbb{E}[X_t] v e^{-vt} dt < \infty.$$

Indeed, by the following theorem of Harris [4, p. 103].

Théorème 3.3. [4] If $X_0 = 1$, then

$$\mathbb{E}[X_t] = e^{\mu t}.$$

We get

$$\int_0^a \mathbb{E}[X_t] v e^{-vt} dt = \int_0^a v e^{(\mu-v)t} dt = \frac{v}{\mu-v} (e^{(\mu-v)a} - 1) < \infty.$$

So, by Proposition 2.2, there exists $C > 0$ such that,

$$P[X_T > t] \sim C.t^{-\rho}, t \rightarrow \infty.$$

□

Remarque 3.1. When $p_2 = 1$ in the previous case, $(X_t)_{t \geq 0}$ is a pure-birth process with rate λ (the individual lifetimes are exponentially distributed with parameter λ), also called the Yule process.

In this case, $(X_t)_{t \geq 0}$ satisfies the conditions of Proposition 3.2, i.e $\exists C > 0$ such that, as $t \rightarrow \infty$,

$$P[X_T > t] \sim C.t^{-\rho}, \text{ with } \rho = \frac{v}{\lambda},$$

since $p_2 = 1$, we have

$$p_0 = 0, m = \sum k p_k = 2, \text{ and } \sum k p_k \ln k = 2 \ln 2 < \infty.$$

Example 3 : Case of a Bellman-Harris branching process

Proposition 3.3. Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a Bellman-Harris branching process with offspring distribution $(p_k)_{k \geq 0}$ and lifetime distribution F . Let T be an exponential random variable with parameter v and independent of $(X_t)_{t \geq 0}$ and let $\alpha > v$ be the Malthusian parameter for the offspring mean m and the lifetime distribution F . If $X_0 = 1$,

$p_0 = 0$, $m > 1$, $F(0+) = 0$ and $\sum k p_k \ln k < \infty$, then X_T is a Pareto-like distribution i.e there exists $C > 0$ such that

$$P[X_T > t] \sim C.t^{-\rho}, \quad t \longrightarrow \infty, \quad \text{with } \rho = \frac{\nu}{\alpha}.$$

To prove Proposition 3.3, we use the following proposition.

Proposition 3.4. *Let $(X_t)_{t \geq 0}$ be a Bellman-Harris branching process with offspring mean m and let τ be the individual's lifetime with distribution function F . If $X_0 = 1$, $m > 1$ and $mF(0+) < 1$, then $\exists \theta > 0$ such that*

$$\mathbb{E}[X_t] \leq \frac{e^{\theta t}}{1 - m\mathbb{E}[e^{-\theta\tau}]}, \quad \text{with } m\mathbb{E}[e^{-\theta\tau}] < 1.$$

Preuve. (Proposition 3.3)

The condition (1) is satisfied by the following theorem of Athreya-Ney [3].

Théorème 3.4. [3] *If $p_0 = 0$, $m > 1$, $F(0+) = 0$ and $\sum k p_k \ln k < \infty$, then*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} X_t = W$$

exists almost surely and $P[W > 0] = 1$.

And let $V_t = X_t/n_1 e^{\alpha t}$, with

$$n_1 = \frac{m-1}{\alpha m^2 \int_0^\infty t e^{-\alpha t} dF(t)}.$$

By the following theorem of Athreya-Ney [2, p. 172].

Théorème 3.5. [2] *Assume that $m > 1$.*

- (i) *If $\sum k p_k \ln k = \infty$, then $V_t \rightarrow 0$ in probability.*
- (ii) *If $\sum k p_k \ln k < \infty$, then V_t converges in distribution to a non-negative random variable V having the following properties :*

- a) $\mathbb{E}[V] = 1$.
- b) *The distribution of V is absolutely continuous on $(0, \infty)$.*

We have $\mathbb{E}[V] = 1$, hence $\mathbb{E}[W] = n_1$, with $W = n_1 V$, which shows that $0 < \mathbb{E}[W^\rho] < \infty$ and W is a continuous random variable.

On the other hand, by Proposition 3.4, for $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^a \mathbb{E}[X_y] e^{-\nu y} dy &\leq \int_0^a \frac{e^{\theta y}}{1 - m\mathbb{E}[e^{-\theta\tau}]} e^{-\nu y} dy \\ &\leq \int_0^a \frac{e^{\theta a}}{1 - m\mathbb{E}[e^{-\theta\tau}]} e^{-\nu y} dy \\ &= \frac{e^{\theta a}}{\nu(m\mathbb{E}[e^{-\theta\tau}] - 1)} (e^{-\nu a} - 1) < \infty, \end{aligned}$$

which is the condition (2). Therefore with Proposition 2.2, there exists $C > 0$ ($C = n_1^\rho \mathbb{E}[V^\rho]$) such that

$$P[X_T > t] \sim C.t^{-\rho}, \quad t \longrightarrow \infty.$$

□

References

- [1] Athreya, K. B. and Ney, P. E. : The local limit theorem and some related aspects of supercritical branching processes. Transactions of the American Mathematical Society. 152, 233-251 (1970).
- [2] Athreya, K. B. and Ney, P. E. : Branching processes. Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [3] Athreya, K. B. and Kaplan, N. : Convergence of the age distribution in the one dimensional supercritical age dependent branching process. The Annals of Probability. **4**, 1, 38-50 (1976).
- [4] Harris, T. E. : The theory of branching processes. Springer-Verlag, Berlin (1963).
- [5] Lambert, A. : The contour of splitting trees is a Lvy process. The Annals of Probability. **38**, 1, 348-395 (2010).
- [6] Li, J., Chen, A. and Pakes, A. G. : Asymptotic Properties of the Markov Branching Process with Immigration. Journal of Theoretical Probability. **25**, 1, 122-143 (2012).
- [7] Louhichi, S. and Ycart, B. : Exponential Growth of Bifurcating Processes with Ancestral Dependence. Advances in Applied Probability. **47**, 02, 545-564 (2015).



Bias reduction in tail index estimation for randomly truncated data

Saida Mancer¹, Abdelhakim Necir^{*2}, and Souad Benchaira³

¹ University of Mohamed Khider Biskra, Algeria,
mancer.saida731@gmail.com

² University of Mohamed Khider Biskra, Algeria,
ah.necir@univ-biskra.dz

³ University of Mohamed Khider Biskra, Algeria,
benchaira.s@hotmail.fr

Abstract : A bias reduction to a kernel estimator of the tail index of randomly right-truncated Pareto-type distributions is made. The asymptotic normality of the derived estimator is established by assuming the second-order condition of regular variation.

Keywords : Bias reduction ; Extreme value index ; Kernel estimation ; Truncated data.

1 Introduction

Let $(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$, $i = 1, \dots, N \geq 1$ be a sample from a couple (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) of independent positive random variables (rv's) defined over a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, with continuous distribution functions (df's) \mathbf{F} and \mathbf{G} respectively. Suppose that \mathbf{X} is right-truncated by \mathbf{Y} , in the sense that \mathbf{X}_i is only observed when $\mathbf{X}_i \leq \mathbf{Y}_i$. Thus, let us denote (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ to be the observed data, as copies of a couple of dependent rv's (X, Y) corresponding to the truncated sample $(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$, $i = 1, \dots, N$, where $n = n_N$ is a random sequence of discrete rv's. By the weak law of large numbers, we have

$$n/N \xrightarrow{\mathbf{P}} p := \mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}) = \int_0^\infty \mathbf{F}(w) d\mathbf{G}(w), \quad (1)$$

as $N \rightarrow \infty$, where the notation $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ stands for the convergence in probability. The marginal df's F^* and G^* corresponding to the joint df of (X, Y) are given by $F^*(x) := p^{-1} \int_0^x \overline{\mathbf{G}}(w) d\mathbf{F}(w)$ and $G^*(x) := p^{-1} \int_0^x \mathbf{F}(w) d\mathbf{G}(w)$. The notation $\bar{\phi} := 1 - \phi$ stands for the distribution tail of df ϕ . In the sequel, we are dealing with the concept of regular variation. A df ψ is said to be regularly varying at infinity with negative index $-1/\zeta$, notation $\psi \in \mathcal{RV}(-1/\zeta)$, if

*Corresponding Author: ah.necir@univ-biskra.dz

$\psi(st)/\psi(t) \rightarrow s^{-1/\zeta}$, as $t \rightarrow \infty$, for $s > 0$. The rate of this convergence is expressed in terms of the second-order condition : for any $x > 0$, we have

$$\frac{U_\psi(tx)/U_\psi(t) - x^\zeta}{\tilde{A}_\psi(t)} \rightarrow x^\zeta \frac{x^\tau - 1}{\tau}, \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

where $\tau < 0$ denotes the second-order parameter, $U_\psi(t) := \psi^{-1}(1 - 1/t)$, $t > 1$, stands for the tail quantile function pertaining to df ψ and \tilde{A}_ψ is a function tending to zero and not changing signs near infinity with regularly varying absolute value of index τ . The second order condition (2) is equivalent to

$$\frac{\psi(tx)/\psi(t) - x^{-1/\zeta}}{A_\psi(t)} \rightarrow x^{-1/\zeta} \frac{x^{\tau/\zeta} - 1}{\tau\zeta}, \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

where $A_\psi := \tilde{A}_\psi(1/\psi)$. A function ψ that satisfies assumption (3) is denoted $\psi \in \mathcal{RV}_2(-1/\zeta; \tau, A_\psi)$.

Let us now assume that the tails of both df's \mathbf{F} and \mathbf{G} are regularly varying, that is $\bar{\mathbf{F}} \in \mathcal{RV}(-1/\gamma_1)$ and $\bar{\mathbf{G}} \in \mathcal{RV}(-1/\gamma_2)$, with $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Under this assumption, $\bar{\mathbf{F}}^* \in \mathcal{RV}(-1/\gamma)$ and $\bar{\mathbf{G}}^* \in \mathcal{RV}(-1/\gamma_2)$ too, where $\gamma := \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$. The estimation of the tail index γ_1 was addressed for the first time in Gardes and Stupfler(2015) [4] where the authors used the previous formula of γ to propose an estimator as a function of Hill estimators of tail indices γ and γ_2 . These estimators are based on the top order statistics $X_{n-k:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ and $Y_{n-k:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$ pertaining to the samples (X_1, \dots, X_n) and (Y_1, \dots, Y_n) respectively. The sample fraction $k = k_n$ being a sequence of integers such that, $k_n \rightarrow \infty$ and $k_n/n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Benchaira *et al.*(2016a) [2] used a Woodrooffe-integral with a random threshold, to derive the following estimator to γ_1

$$\hat{\gamma}_1 := \frac{1}{n\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{F}_n(X_{n-i+1:n})}{C_n(X_{n-i+1:n})} \log \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}}, \quad (4)$$

where $C_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i \leq x \leq Y_i)$ and $\mathbf{F}_n(x) := \prod_{X_i > x} \exp\left\{-\frac{1}{nC_n(X_i)}\right\}$, is the so-called Woodrooffe's nonparametric estimator of df \mathbf{F} . By means of Lynden-Bell integral with deterministic threshold, Worms and Worms(2016) in [8] proposed a similar estimator to γ_1 and established its asymptotic normality. Benchaira *et al.*(2016b) [3] proposed a Kernel (smoothed) version to $\hat{\gamma}_1$ given by

$$\hat{\gamma}_{1,K} := \frac{1}{n\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{F}_n(X_{n-i+1:n})}{C_n(X_{n-i+1:n})} g_K \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-i+1:n})}{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \right) \log \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}},$$

where g_K is the Lebesgue derivative of function $s \rightarrow sK(s)$ and K is a nonnegative kernel function satisfying the following assumptions :

- [A1] $K(s) \geq 0$ for $s \in (0, 1]$, otherwise $K(s) = 0$.
- [A2] g_K is positive nonincreasing over some interval in $(0, 1]$.
- [A3] $\int_{\mathbb{R}} K(s) ds = 1$.
- [A4] K and its first and second Lebesgue derivatives K' and K'' are bounded.
- [A5] K is nonincreasing.

Assuming the second-order conditions

$$\bar{\mathbf{F}} \in \mathcal{RV}_2(-1/\gamma_1; \tau_1, A_{\mathbf{F}}) \text{ and } \bar{\mathbf{G}} \in \mathcal{RV}_2(-1/\gamma_2; \tau_2, A_{\mathbf{G}}), \quad (5)$$

Benchaira *et al.*(2016b) [3] also showed that, whenever $\gamma_1 < \gamma_2$, one has

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_{1,K} - \gamma_1) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(0, (\gamma^2/\gamma_1)^2 \int_0^1 \varphi_K^2(s) ds\right) + \eta_{1,K} \sqrt{k} A_{\mathbf{F}}(n/k) + o_{\mathbf{P}}(1), \quad (6)$$

as $n \rightarrow \infty$, provided that $\sqrt{k} A_{\mathbf{F}}(n/k) = O(1)$, where $\eta_{1,K} := \eta_{1,K}(\tau_1) = \int_0^1 s^{-\tau_1} K(s) ds$, and

$$\begin{aligned} & \varphi_K(s) \\ &= s^{-1} \int_0^s t^{-\gamma/\gamma_2} \left\{ K(t^{\gamma/\gamma_1}) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} t^{-\gamma_2/\gamma_1} K(t^{\gamma/\gamma_1}) + t^{\gamma/\gamma_1} K'(t^{\gamma/\gamma_1}) \right\} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

2 Bias reduction of $\hat{\gamma}_{1,K}$

In this section we propose a bias reduction to $\hat{\gamma}_{1,K}$ by means of a weighted estimator to the rate of convergence $A_{\mathbf{F}}(n/k)$. More precisely, given estimators for $\eta_{1,K}$ and $A_{\mathbf{F}}(n/k)$, denoted $\hat{\eta}_{1,K}$ and $\hat{A}_{\mathbf{F},K}(n/k)$, we propose an asymptotically centred normal estimator of γ_1 defined by

$$\hat{\gamma}_{1,K}^* := \hat{\gamma}_{1,K} - \hat{\eta}_{1,K} \hat{A}_{\mathbf{F},K}(n/k). \quad (8)$$

For the construction of $\hat{A}_{\mathbf{F},K}(n/k)$, we opt for a similar approach as the one used in Benchaira *et al.*(2016b) [3] to the bias-reduction in tail index estimation for censored data by introducing a weight function. To this end, let us define

$$L_{t,K} := \int_1^\infty \frac{\bar{\mathbf{F}}(tx)}{\bar{\mathbf{F}}(t)} K\left(\frac{\bar{\mathbf{F}}(tx)}{\bar{\mathbf{F}}(t)}\right) \frac{dx}{x} \quad (9)$$

and

$$E_{t,K}(\beta) := 1 - \beta \int_1^\infty x^{-\beta-1} K^*\left(\frac{\bar{\mathbf{F}}(tx)}{\bar{\mathbf{F}}(t)}\right) dx,$$

for $\beta > 0$, where K^* is a measurable positive weight function that depends on K .

We showed that for a fixed $\beta > 0$, we have $L_{t,K} \rightarrow \gamma_1$ and $E_{t,K}(\beta) \rightarrow \eta_{2,K}$ as $t \rightarrow \infty$, where $\eta_{2,K} = \eta_{2,K}(\beta; \gamma_1) := 1 - \beta \gamma_1 \int_0^1 s^{\gamma_1 \beta - 1} K^*(s) ds$. Moreover, we show that

$$A_{\mathbf{F}}(t) = \frac{E_{t,K}(\beta) - f_*(L_{t,K})}{\eta_{3,K} - f'_*(\gamma_1) \eta_{1,K}} (1 + o(1)), \text{ as } t \rightarrow \infty, \quad (10)$$

where

$$f_*(x) := 1 - \beta x \int_0^1 s^{\beta x - 1} K^*(s) ds, \text{ for } \beta > 0, \quad (11)$$

and

$$\eta_{3,K} = \eta_{3,K}(\beta; \tau_1, \gamma_1) := \frac{\beta}{\tau_1} \int_0^1 s^{\gamma_1 \beta} (1 - s^{-\tau_1}) K(s) ds.$$

Let us set

$$\eta_{4,K} = \eta_{4,K}(\beta; \gamma) := f'_*(\gamma) = -\beta \int_0^1 s^{\beta\gamma-1} (\beta\gamma \log s + 1) K^*(s) ds.$$

To obtain an estimator to $A_{\mathbf{F}}(n/k)$ it suffices to substitute, in (10), both γ_1 and $L_{t,K}$ by $\hat{\gamma}_{1,K}$ and replace $\eta_{i,K}$, $i = 1, \dots, 4$ by their respective estimators $\hat{\eta}_{1,K} := \eta_{1,K}(\hat{\tau}_1)$, $\hat{\eta}_{2,K} := \eta_{2,K}(\beta; \hat{\gamma}_1)$, $\hat{\eta}_{3,K} := \eta_{3,K}(\beta; \hat{\tau}_1, \hat{\gamma}_1)$ and $\hat{\eta}_{4,K} := \eta_{4,K}(\beta; \hat{\gamma}_1)$, where $\hat{\tau}_1$ is the consistent estimator for second-order parameter τ_1 first proposed by Haouas et al.(2019) [6]. It is worth mentioning that $\hat{\eta}_{2,K}$ coincides with $f'_*(\hat{\gamma}_{1,K})$, this means that $\hat{\eta}_{2,K}$ is an estimator for $f'_*(L_{t,K})$. For the estimation of $E_{t,K}(\beta)$, we substitute \mathbf{F} by \mathbf{F}_n and t by $X_{n-k:n}$, to get

$$\hat{E}_{k,K}(\beta) = 1 - \beta \int_1^\infty K^* \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_n(xX_{n-k:n})}{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \right) x^{-\beta-1} dx, \quad (12)$$

which by an integration by parts becomes

$$\hat{E}_{k,K}(\beta) = \int_{X_{n-k:n}}^\infty K \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_n(x)}{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \right) (x/X_{n-k:n})^{-\beta} d \frac{\mathbf{F}_n(x)}{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})}.$$

The relation between df's \mathbf{F} and F^* is $\int_x^\infty d\mathbf{F}(y)/\mathbf{F}(y) = \int_x^\infty dF^*(y)/C(y)$, where $C(y) := \mathbf{P}(X \leq y \leq Y)$ denotes the theoretical counterpart of C_n defined above in Woodrooffe's non-parametric estimator $\bar{\mathbf{F}}_n$, see for instance equation (1) in Strzalkowska-Kominiak and Stute(2009) cite [7]. Differentiating leads to the following crucial equation $C(x)d\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x)dF^*(x)$, which implies that $C_n(x)d\mathbf{F}_n(x) = \mathbf{F}_n(x)dF_n^*(x)$, where F_n^* being the empirical counterpart of $df F^*$. This allows to rewrite (12) into

$$\hat{E}_{k,K}(\beta) = \int_{X_{n-k:n}}^\infty \frac{\mathbf{F}_n(x)}{C_n(x)} K \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_n(x)}{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \right) (x/X_{n-k:n})^{-\beta} d \frac{F_n^*(x)}{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})},$$

which may be made into

$$\hat{E}_{k,K}(\beta) = \frac{1}{n\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \prod_{i=1}^k \frac{\mathbf{F}_n(X_{n-i+1:n})}{C_n(X_{n-i+1:n})} K \left(\frac{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-i+1:n})}{\bar{\mathbf{F}}_n(X_{n-k:n})} \right) \left(\frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right)^{-\beta}. \quad (13)$$

A smoothed estimator

$$\hat{A}_{\mathbf{F},K}(n/k) := \frac{\hat{E}_{k,K}(\beta) - \hat{\eta}_{2,K}}{\hat{\eta}_{3,K} - \hat{\eta}_{4,K}\hat{\eta}_{1,K}},$$

is now constructed of $A_{\mathbf{F}}(n/k)$. Substituting this expression in (8) we end up with the new bias-reduced estimator of γ_1 :

$$\hat{\gamma}_{1,K}^*(\beta) := \hat{\gamma}_{1,K} - \hat{\eta}_{1,K} \frac{\hat{E}_{k,K}(\beta) - \hat{\eta}_{2,K}}{\hat{\eta}_{3,K} - \hat{\eta}_{4,K}\hat{\eta}_{1,K}}, \text{ for } \beta > 0.$$

Under some regularity assumptions, we show that

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_{1,K}^*(\beta) - \gamma_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, (\gamma^2/\gamma_1)^2 \int_0^1 q_{\beta,K}^2(s) ds \right),$$

as $n \rightarrow \infty$, provided that $\gamma_1 < \gamma_2$, where

$$q_{\beta,K}(s) := \frac{\gamma}{\gamma_1} K_{\beta} \left(s^{\gamma/\gamma_1} \right) - \frac{\gamma}{\gamma_2} s^{-\gamma/\gamma_1} \int_0^{s^{\gamma/\gamma_1}} u^{-\gamma_2/\gamma} K_{\beta}(u) du,$$

with $K_{\beta}(u) := u^{-1} \int_0^u (1 + \rho_K \eta_{4,K} + \rho_K s^{\beta\gamma_1}) K(s) ds$ and $\rho_K := (\eta_{3,K}/\eta_{1,K} - \eta_{4,K})^{-1}$.

References

- [1] Beirlant, J., Maribe, G., Verster, A., 2018. Penalized bias reduction in extreme value estimation for censored Pareto-type data, and long-tailed insurance applications. *Insurance Math. Econom.* **78**, 114–122.
- [2] Benchaira, S., Meraghni, D., Necir, A., 2016a. Tail product-limit process for truncated data with application to extreme value index estimation. *Extremes* **19**, 219-251.
- [3] Benchaira, S., Meraghni, D., Necir, A., 2016b. Kernel estimation of the tail index of a right-truncated Pareto-type distribution. *Statist. Probab. Lett.* **119**, 186-193.
- [4] Gardes, L., Stupfler, G., 2015. Estimating extreme quantiles under random truncation. *TEST* **24**, 207-227.
- [5] de Haan, L., Ferreira, A., 2006. *Extreme Value Theory : An Introduction*. Springer.
- [6] Haouas, N., Necir, A., Brahimi, B., 2019. Estimating the second-order parameter of regular variation and bias reduction in tail index estimation under random truncation. *J. Stat. Theory Pract.* **13**, Paper No. 7, 33 pp.
- [7] Strzalkowska-Kominiak, E., Stute, W., 2009. Martingale representations of the Lynden-Bell estimator with applications. *Statist. Probab. Lett.* **79**, 814–820.
- [8] Worms, J., Worms, R., 2016. A Lynden-Bell integral estimator for extremes of randomly truncated data. *Statist. Probab. Lett.* **109**, 106-117.



On the estimation of Signed Periodic INAR Models

Fares Ouzzani^{*1} and Nawel Aries²

¹Centre de Recherche en Astronomie, Astrophysique et Géophysique,
ouzzani.fares@gmail.com

²Centre de Développement des Energies Renouvelables,
aries.nawel@hotmail.com

Abstract : We present in this work an integer valued autoregressive time series model that can handle both positive and negative integer values on one hand, and the periodicity feature on the other hand. The aim behind this class of models is to tackle the nonnegativity restriction over most of integer valued time series models, feature that entangle the modeling of many practical phenomena. First we present the model and its main assumptions and notations, then we provide the estimation procedure through the maximum likelihood procedure and finally test its performance through simulation study.

Keywords : Signed integer valued time series ; Periodic Time series models ; Maximum likelihood estimation ; Simulation study

1 Introduction

In the last few decades, there have been a growing interest in studying non-negative integer-valued time series, in particular, time series of counts. These time series of counts occur naturally associated with counting processes of events, objects or individuals in specified time intervals (Weiß, 2018). Several models have been proposed in order to take into account the different features of frequently observed integer-valued time series, such as, excess of zeros, volatility changes in time, asymmetric distributions, low counts, overdispersion and others (Kedem and Fokianos 2005 ; Fokianos 2012 ; Monteiro, Scotto, and Pereira 2012 ; Yang 2012 ; Bourguignon 2016 ; Weiß 2018, among others). However, all the previous models are based on the binomial thinning operator introduced by Steutel and Van Harn (1979), where all the coefficients of the models must be positive. Thus, they can only applied to positive integer-valued time series. Therefore, the modeling of the series with negative autocorrelations is excluded. Nevertheless, integer-valued time series with negative values are very frequent in practice, and can also appear when taking differences of positives integer-valued time series. In this paper, we extended the work of Chesneau and Kachour (2012), where their model is based on the signed thinning operator to the periodic case. A signed

^{*}Corresponding Author

periodic INAR(1) process, S-PINAR(1), with period S is introduced. Furthermore, we present the conditional maximum likelihood as an estimation method. Finally, the performance of the proposed estimation method is shown via an extensive simulation study.

2 Presentation of the model

A periodically correlated Integer-Valued process $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ in the sense of Gladyshev (1961), with period S (where $S \geq 2$), is said to satisfy a Signed Periodic Integer-Valued Autoregressive model, with orders p , noted $SPINAR_S(1)$, if it is a solution of the following linear stochastic equation

$$X_t = F_t \odot X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

where $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ is a sequence of uncorrelated and independent integer-valued random variables, and follows a periodic Skellam distribution with periodic parameters, λ_t and β_t of period S , i.e., $\lambda_{t+rS} = \lambda_t$ and $\beta_{t+rS} = \beta_t, \forall t, r \in \mathbb{Z}$. For each t , the innovation process ε_t is assumed to be independent of X_{t-1} and $F_t \odot X_{t-1}$. and where " \odot " stands, to the so-called signed thinning operator introduced by Kachour and Truquet (2011) (**Latour and Truquet (2008)**), which is a natural extension of the binomial thinning operator of Steutel-Van Harn (1979) to \mathbb{Z} -valued random variables. In the periodic case, the signed thinning operator, denoted by $F_t \odot$, is defined by

$$F_t \odot X_{t-1} = \begin{cases} \text{sign}(X_{t-1}) \prod_{i=1}^{|X_{t-1}|} Y_{i,t}(\varphi_t), & X_{t-1} \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.2)$$

where, for an integer x

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ -1 & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

and F_t represents the common distribution of the periodic sequence of i.i.d. counting sequences $\{Y_{i,t}, i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$. Therefore, all counting sequences associated to the operator $F_t \odot$ are mutually independent. According to Kachour and Truquet (2011), we consider that F_t , the distribution of the periodic sequence of i.i.d. random variables $\{Y_{i,t}, i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}\}$, has probability mass function given by

$$P(Y_{i,t}(\varphi_t) = \alpha) = \begin{cases} (1 - \varphi_t)^2, & \alpha = -1, \\ 2\varphi_t(1 - \varphi_t), & \alpha = 0, \\ \varphi_t^2, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

where φ_t is periodic in t with period S , i.e., $\varphi_{t+rS} = \varphi_t, \forall t, r \in \mathbb{Z}$, and $\varphi_t \in [0, 1]$.

Letting $t = s + \tau S$ for $s = 1, 2, \dots, S$ and $\tau \in \mathbb{Z}$, the $SPINAR_S(1)$ model (2.1) can be rewritten in the equivalent form

$$X_{s+\tau S} = F_{s+\tau S} \odot X_{s-1+\tau S} + \varepsilon_{s+\tau S} \quad (2.4)$$

3 Estimation procedure : Conditional Maximum Likelihood

We provide in this section the parameters estimation through the conditional Maximum Likelihood procedure. For our estimation procedure, we adopt the Skellam distribution for innovation process with periodic parameters $\lambda_{1,t}$ and $\lambda_{2,t}$. Let, $\underline{\theta}_s = (\varphi_s, \lambda_{1,s}, \lambda_{2,s})'$ be the column vector containing all parameters to be estimated for the season s . At fixed time $t = s + rS$, the conditional mass function is given by :

$$P(X_t = x; X_{t-1} = x_{t-1}, \underline{\theta}_s) = \sum_{z=-|x_{t-1}|}^{|x_{t-1}|} \text{Bin}(\text{sign}(x_{t-1})(x_{t-1} + z), 2|x_{t-1}|, \varphi_s) \times \text{Sk}l(x - z, \lambda_{1,s}, \lambda_{2,s}),$$

where $\text{Bin}(x, n, p)$, $\text{Sk}l(x, \lambda_{1,s}, \lambda_{2,s})$ and $\text{sign}(x)$ denotes the binomial mass function, Skellam mass function and the sign of the value x , respectively. Hence, the Conditional log-likelihood, $l(\underline{X}, \underline{\theta})$ is expressed as follows :

$$l(\underline{X}, \underline{\theta}) = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \log(P(X_{s+rS} = x_{s+rS}; X_{s-1+rS} = x_{s-1+rS}, \underline{\theta}_s)),$$

where $\underline{X} = (X_1, \dots, X_{NS})'$ and $\underline{\theta} = (\underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_s)'$. The Conditional maximum Likelihood estimator cannot be directly obtained by maximizin the previous equation, respectively to $\underline{\theta}$. So, the estimation is performed using an optimization routine. We provide a simulation study for a $S - \text{PINAR}_4(1)$ model. The Boxplots shown in figures 1, and 2 become narrower as well as the size series increase. This prove that the method is consistent and convergent.

FIGURE 1 – Figure 1. Boxplots for $\hat{\varphi}_s$

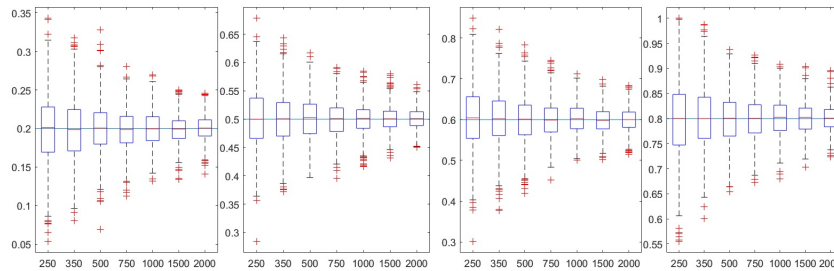
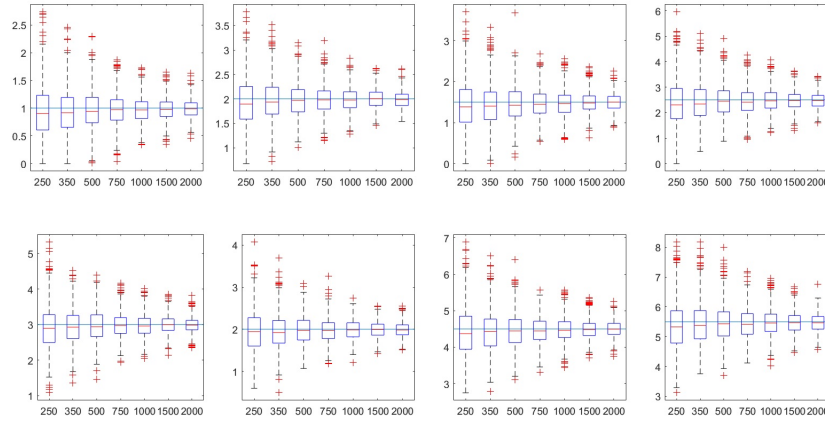


FIGURE 2 – Figure 2. Boxplots for $\hat{\lambda}_{1,s}$ (top) and $\hat{\lambda}_{2,s}$ (bottom)



References

- [1] Bourguignon, M., K. L. P. Vasconcellos, V. A. Reisen, and M. Ispány. (2016). A Poisson INAR(1) process with a seasonal structure. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 86 (2) :373–87.
- [2] Fokianos, K. (2012). Count Time Series Models. *Time Series Analysis : Methods and Applications* 30 :315–47.
- [3] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet Mathematics*, 2 : 385 – 388.
- [4] Kedem, B., and K. Fokianos. (2005). *Regression models for time series analysis*. Hoboken, NJ : John Wiley & Sons.
- [5] Monteiro, M., M. G. Scotto, and I. Pereira. (2015). A periodic bivariate integer-valued autoregressive model. *Dynamics, Games and Science* 1 :455–77.
- [6] Steutel, F. W., and K. Van Harn. (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability* 7 (5) :893–9.
- [7] Weiß, C. H. (2018). *An introduction to discrete-valued time series*. Wiley, Chichester.
- [8] Yang, M. (2012). *Statistical models for count time series with excess zeros*. Ph.D. thesis, University of Iowa, IA, USA.



The Markov Switching Periodic INARCH models

Billel Aliat^{*1,3} and Fares Ouzzani²

¹Laboratoire RECITS, Faculté des Mathématiques, USTHB,

³Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement, CREAD,
aliatbillel@yahoo.fr

²Centre de Recherche en Astronomie, Astrophysique et Géophysique,
ouzzani.fares@gmail.com

Abstract : This work is concerned with count time series taking values in non-negative integers. We deal with an integer-valued time series model that we called the Markov-switching periodic integer-valued ARCH model (*MS – PINARCH*). This new model, that we introduce, takes into account, not only, heteroskedasticity often encountered in many integer-valued time series, but also the hidden periodicity in the autocovariance structure and structural changes that appear in the dynamics of this type of series. The main goal of this work is to provide some of its probabilistic properties such as the periodic first and second orders stationarity conditions. Furthermore, the estimation of the model parameters is tackled using the Hamilton filter and its performance is shown through a simulation study.

Keywords : Periodic Integer valued time series ; Markov Switching models ; Periodic stationarity ;Hamilton Filter ; Simulation study

1 Introduction

Integer-valued time series models have received growing attention recently. Indeed, Time series of counts are commonly observed in real-world applications. Hence, several researchers have studied and used this type of models in order to model series encountered in various practical fields, such as medicine and epidemiology (e.g. the number of infections by some diseases like Campylobacteriosis studied by Ferland et al, 2006, Bentarzi & Bentarzi, 2017 and Ouzzani & Bentarzi, 2021), sociology (the number of unemployed people in the short-term study by Monteiro et al in (2010)), among others.

In fact, real-valued time series models are insufficient to reproduce the discrete nature of counting phenomena which arise when one is interested in the number of occurrences of a particular event within a specified time interval. Consequently, many researchers have introduced analogues of these models that consider the integer character of time series, in addition to other features such as, heteroskedasticity, multimodality, regime changes, nonlinearity, periodicity, overdispersion and underdispersion. So, many discrete-valued time series

*Corresponding Author

models have been introduced in the literature as, *INAR* model (Al-Osh & Alzaid, 1987) which is analogous to the usual autoregressive (*AR*) one, *INARCH* model (Weiss, 2010) which is similar to the well-known *ARCH* model of Engle (1982), *INGARCH* model (Ferland et al, 2006), which is suitable to model heteroskedasticity in integer-valued time series, just like Bollerslev's *GARCH* (1986), periodic *INGARCH* model (Bentarzi & Bentarzi, 2017) that can be seen as the integer-valued version of *PGARCH* (Bollerslev & Ghysels, 1996), and many others.

Furthermore, Markov-switching (*MS*) models have attracted a lot of attention in the econometric literature since the seminal paper of Hamilton (1989) and continue to gain popularity especially in time series which exhibit structural changes. In *MS* models, the parameters are allowed to depend on the state of an unobserved Markov chain. So, at each period of time, there is a certain probability to belong to a regime and a transition probability from one regime to another. A considerable interest has been dedicated in the last decades to the analysis of various aspects of Markov-switching models. We particularly mention the *MS – ARCH* (Cai, 1994) and *MS – GARCH* (Dueker, 1997, Haas et al, 2004) models. The latter has recently been introduced in its integer-valued version, namely *MS – INGARCH*, by Chen et al, 2019, thus allowing integer-valued heteroskedastic series of counts exhibiting changes in behaviour to be better described and modelled.

Moreover, many phenomena show periodicity in their behaviour, due to the relationship with periodic schedules such as epidemics which depends on natural seasons, traffic accidents that depend on days of the week, and many others. In real-valued problems, researchers tend to work around this problem by adopting the principle of seasonal differentiation, but this technique shows flaws for integer-valued problems essentially because of the loss of positivity of the obtained series.

In order to obtain a more tractable model that allows us to capture heteroskedasticity, regime changes, periodicity hidden in the autocovariance structure and other features commonly encountered in integer-valued time series, we propose to include in the *INARCH* model the concepts of periodicity and Markov regime switching. This new model that we obtain is a Markov-switching periodic *INARCH* (*MS – PINARCH*) model.

2 Definitions, Notations and Assumptions

Consider the Markov-switching periodic *INARCH* model of order q and period S , defined as follows

$$\begin{cases} Y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t) \\ \lambda_t = \sum_{k=1}^d \alpha_{0,t}^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^d \alpha_{i,t}^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} Y_{t-i} \end{cases} ; t \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

where $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ denotes the indicator function, (Δ_t) is a homogeneous Markov chain with finite state space $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, d\}$, $\mathcal{P}(\cdot)$ represents the Poisson distribution and \mathcal{F}_{t-1} is the σ -field generated by $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots\}$. The parameters $\alpha_{i,t}^{(k)}$, for $0 \leq i \leq q$ are periodic functions with period S , such that $\alpha_{0,t}^{(k)} > 0$ and $\alpha_{i,t}^{(k)} \geq 0$ for $1 \leq i \leq q$.

Let

$$\begin{aligned}\alpha_{0,t}(\Delta_t) &: = \sum_{k=1}^d \alpha_{0,t}^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}, \\ \alpha_{i,t}(\Delta_t) &: = \sum_{k=1}^d \alpha_{i,t}^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}, \quad i = 1, \dots, q,\end{aligned}$$

hence one can rewrite the model (1) in a simple form as follows

$$\lambda_t = \alpha_{0,t}(\Delta_t) + \alpha_{i,t}(\Delta_t) Y_{t-i}. \quad (2)$$

Throughout this work we make the following assumptions : the process (Δ_t) is a homogeneous, stationary, irreducible, and aperiodic Markov chain with finite state-space $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, d\}$. The transition probabilities matrix of this process, \mathbb{P} , is defined by its elements $p_{i,j} = P(\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i)$, and since the irreducibility and the aperiodicity, a unique stationary distribution $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)$ is guaranteed.

3 Parameter estimation of the MS-PINARCH model

In order to estimate the model's parameters, we choose the Hamilton filter (1994), which has been shown to be powerful and useful when a Markov regime switching is identified. This filter is based on both the Maximum Likelihood principle and the trajectories enumeration (e.g. Aliat and Hamdi ; 2018). But in our case, enumerating trajectories is not required since the instantaneous likelihood function involves only the knowledge of the actual regime.

Let β be the vector containing the model parameters and the transition probabilities between the states of the Markov chain. For a given realization $\mathcal{Y}_T = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ of model (1), it is possible to estimate the vector parameter β by maximizing the following log-likelihood function with respect to β

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\beta) &= \sum_{t=1}^T \log(\mathbb{P}(Y_t = y_t | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= \sum_{t=1}^T \log \left(\sum_{k=1}^d \mathbb{P}(Y_t = y_t | \Delta_t = k, \mathcal{F}_{t-1}) \mathbb{P}(\Delta_t = k | \mathcal{F}_{t-1}) \right) \\ &= \sum_{t=1}^T \log \left(\xi'_{t|t-1} \eta_t \right).\end{aligned} \quad (3)$$

where $\xi_{t|t-1}$ is a $(d \times 1)$ vector containing the predicted occurrence probabilities, estimated for each trajectory, and η_t defines the $(d \times 1)$ vector containing the conditional probabilities of the observation, at time t , knowing the current Markov chain state, given by :

$$\xi_{t|t-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\Delta_t = 1 | \mathcal{F}_{t-1}) \\ \mathbb{P}(\Delta_t = 2 | \mathcal{F}_{t-1}) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(\Delta_t = d | \mathcal{F}_{t-1}) \end{pmatrix} \text{ and } \eta_t = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_t = y_t | \Delta_t = 1, \mathcal{F}_{t-1}) \\ \mathbb{P}(Y_t = y_t | \Delta_t = 2, \mathcal{F}_{t-1}) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y_t = y_t | \Delta_t = d, \mathcal{F}_{t-1}) \end{pmatrix}$$

where $\mathcal{F}_t = (\mathcal{Y}_t, \beta)$ is the set of the information available up to time t , and

$$\mathbb{P}(Y_t = y_t | \Delta_t = k, \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{(\alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t}^{(k)} y_{t-i})^{y_t}}{y_t!} \times \exp \left\{ -\alpha_{0,t}^{(k)} - \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t}^{(k)} y_{t-i} \right\} \quad (4)$$

In order to be able to compute the log-likelihood in (3), we obviously need to quantify the conditional probabilities $\mathbb{P}(\Delta_t = k | \mathcal{F}_{t-1})$ which can be achieved by iterating these two equations

$$\xi_{t|t} = \frac{\xi_{t|t-1} \odot \eta_t}{\mathbf{1}(\xi_{t|t-1} \odot \eta_t)} \text{ and } \xi_{t+1|t} = \mathbb{P} \xi_{t|t} \quad (5)$$

such that \odot defines the element-by-element product, and $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ which is a row vector of size d .

Finally, these results can be summarized in the following algorithm.

1. Initialization of the algorithm

- (a) Choose initial values of the vector $\xi_{1|0}$ and then compute $\xi_{t|t-1}$ from (5), for $t = 2, \dots, q$.
- (b) Compute the elements of η_t from (4), for $t = 1, \dots, q$.

2. Calculating the log-likelihood function

- (a) For $t = q + 1$ to T
 - Compute the vector $\xi_{t|t-1}$ using (5).
 - Update the vector η_t using (4)
- (b) Compute the log-likelihood function $\mathcal{L}(\beta)$ from (3).

3. Use an optimization routine to find $\hat{\beta}$ that maximizes $\mathcal{L}(\beta)$ under the different constraints of the model.

References

- [1] AlOsh, M. A., Alzaid, A. A. (1987). Firstorder integervalued autoregressive (INAR (1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, 8(3), 261-275.
- [2] Aliat, B., Hamdi, F. (2018). On Markov-switching periodic ARMA models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(2), 344-364.
- [3] Bentarzi, M., Bentarzi, W. (2017). Periodic integer-valued GARCH (1, 1) model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(2), 1167-1188.
- [4] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- [5] Bollerslev, T., Ghysels, E. (1996). Periodic autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Business Economic Statistics*, 14(2), 139-151.
- [6] Cai, J. (1994). A Markov model of switching-regime ARCH. *Journal of Business Economic Statistics*, 12(3), 309-316.

- [7] Chen, C. W., Khamthong, K., Lee, S. (2019). Markov switching integervalued generalized autoregressive conditional heteroscedastic models for dengue counts. *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)*, 68(4), 963-983.
- [8] Dueker, M. J. (1997). Markov switching in GARCH processes and mean-reverting stock-market volatility. *Journal of Business Economic Statistics*, 15(1), 26-34.
- [9] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica : Journal of the econometric society*, 987-1007.
- [10] Ferland, R., Latour, A., Oraichi, D. (2006). Integervalued GARCH process. *Journal of time series analysis*, 27(6), 923-942.
- [11] Haas, M., Mitnik, S., Paoletta, M. S. (2004). A new approach to Markov-switching GARCH models. *Journal of financial Econometrics*, 2(4), 493-530.
- [12] Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica : Journal of the econometric society*, 357-384.
- [13] Hamilton, J. D. (1994). Time series analysis. New Jersey : Princeton University Press.
- [14] Monteiro, M., Scotto, M. G., Pereira, I. (2010). Integer-valued autoregressive processes with periodic structure. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(6), 1529-1541.
- [15] Ouzzani, F., Bentarzi, M. (2021). On mixture periodic Integer-Valued ARCH models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 50(12), 3931-3957.
- [16] Weiss, C. H. (2010). The INARCH (1) model for overdispersed time series of counts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 39(6), 1269-1291.



Spectral Estimation of Unevenly Spaced Time Series

Charef Eddine Mansouri¹ and Tarek Medkour²

¹Laboratory of MSTD, Department of Probability and Statistics, University of Science and Technology Houari Boumediene, Algiers, Algeria,
cmansouri@usthb.dz

²Laboratory of MSTD, Department of Probability and Statistics, University of Science and Technology Houari Boumediene, Algiers, Algeria,
tmedkour@usthb.dz

Abstract : In this paper we consider the problem of spectral analysis for unevenly spaced time series. We extend the result of quantile periodogram developed in [2] for unevenly sampling. The ultimate goal of this study is to investigate the asymptotic property of the quantile periodogram for unevenly spaced time series. We demonstrate the usefulness of the proposed periodogram in detecting the hidden frequency from the time series with big gaps and outliers. We evaluate the performance of our periodogram function using simulations.

MSC: MSC code1 ; MSC code2 ; more

Keywords : Quantile regression, Periodicity, Unevenly spaced, time series analysis

1 Introduction

The analysis of time-series data is becoming increasingly common in astrophysics research, and will continue to grow in various fields of study. An unevenly (or unequally or irregularly) spaced time series is a sequence of observation time and value pairs (t_n, Y_n) in which the spacing of observation times is not constant. The analysis of unevenly spaced time series are limited by issues such as unevenly sampled data, measurement uncertainties, and the statistical methods we employ. A several methods were originally developed in statistics and signal processing have been applied to study the periodic pattern in uneven spaced time series. Wherefore, astronomers and statisticians used the periodogram for detecting a hidden frequency in the unevenly spaced time series. Therefore, most of the popular periodogram methods are based on least square regression fitting of the observing data with a linear combination of trial functions $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$. The least squares periodogram, also called the Lomb-Scargle (LS) periodogram proposed a modification on the ordinary periodogram to deal with unevenly samples. The Lomb-Scargle periodogram is efficient for Gaussian white noise, while it suffers from considerable degradation of performance when the noise has a heavy-tailed distribution. To overcome this problem we propose a new periodogram that are constructed from trigonometric quantile regression. The main contribution of the proposed periodogram is to evaluate the significance of the periodic patterns for unevenly spaced time series.

2 The Least Squares Periodogram

In this section, we review some of a standard method of time series spectral analysis for both evenly and unevenly spaced time series. Most of the popular periodogram methods are based on fitting a sine waves of the form $y(t) = a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)$ using least squares regression.

2.1 The Classical Periodogram

Any time series $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ can be expressed as a combination of cosine and sine waves with differing periods and amplitudes as follows :

$$Y_t = \lambda + \sum_{m=1}^M \beta_{1m} \cos(\omega_m t) + \beta_{2m} \sin(\omega_m t), \quad (1)$$

with $\omega_m := \frac{2\pi m}{n} \in (0, \pi)$ is a Fourier frequency, and $\beta_m = [\beta_{1m}, \beta_{2m}]^T$ are the regression parameters.

The ordinary periodogram of $\{Y_t\}$ is defined by :

$$I_n(\omega_m) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t \exp(it\omega_m) \right|^2, \quad (2)$$

Note that this formula also can be rewritten as :

$$I_n(\omega_m) = \frac{n}{4} \|\hat{\beta}_m(\omega_m)\|_2^2, \quad (3)$$

We denote $\hat{\beta}_m(\omega_m)$ to be the least square regression solution :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_m(\omega_m) &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \sum_{t=1}^n (Y_t - \lambda - \sum_{m=1}^M \beta_{1m} \cos(\omega_m t) + \beta_{2m} \sin(\omega_m t))^2, \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \|Y_t - X^T(\omega_m)\beta\|_2^2, \end{aligned} \quad (4)$$

Where $X(\omega_m) = [\cos(\omega_m t), \sin(\omega_m t)]^T$ are the harmonic regressors.

2.2 Lomb-Scargle periodogram

The Lomb-Scargle periodogram is a common and useful tool in the frequency analysis of unevenly spaced time series. Despite its many shortcomings [5], The application of the LS periodogram has become very popular in various fields of study.

2.2.1 The Model

Suppose a set of discret-time noisy samples $y(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, is acquired by sampling on unequally time instants t_k from a continuous- time signal $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t_k) &= \beta_1(\omega) \cos(\omega(t_k - \varphi)) + \beta_2(\omega) \sin(\omega(t_k - \varphi)) + \varepsilon(t_k), \\ &= x^T(t_k, \omega)\beta(\omega) + \varepsilon(t_k), \end{aligned} \quad (5)$$

where $\beta(\omega) = [\beta_1(\omega), \beta_2(\omega)]^T$ is the regression coefficients, ω could be any real number, the errors $\varepsilon(t_k)$ are independent with zero mean and variance σ_ε^2 and φ is defined by :

$$\varphi = \frac{1}{2\omega} \arctan \left(\frac{\sum_{k=1}^n \sin(2\omega t_k)}{\sum_{k=1}^n \cos(2\omega t_k)} \right) \quad (6)$$

The coefficient vector $\beta(\omega)$ can be obtained by minimizing the mean squared error of fitting as :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(\omega) &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^n (y(t_k) - \beta_1 \cos(\omega(t_k - \varphi)) - \beta_2 \sin(\omega(t_k - \varphi)))^2, \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \|y(t_k) - x^T(t_k, \omega)\beta(\omega)\|_2^2, \end{aligned} \quad (7)$$

The Lomb-Scargle periodogram [3, 4] is given by

$$\begin{aligned} P_{LS}(\omega) &= \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \frac{\left[\sum_{k=1}^n ((y(t_k) - \bar{y}) \cos(\omega(t_k - \varphi))) \right]^2}{\sum_{k=1}^n \cos^2(\omega(t_k - \varphi))} + \frac{\left[\sum_{k=1}^n ((y(t_k) - \bar{y}) \sin(\omega(t_k - \varphi))) \right]^2}{\sum_{k=1}^n \sin^2(\omega(t_k - \varphi))}, \\ &= \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} (\hat{\beta}_1^2(\omega) + \hat{\beta}_2^2(\omega)), \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 Quantile Periodogram for spectral analysis of evenly spaced time series

As a generalization of the ordinary periodogram, Li [2] introduced the quantile periodogram as

$$Q(\omega_m) = \frac{n}{4} \|\hat{\beta}_\tau(\omega_m)\|_2^2 \quad (9)$$

Where $\hat{\beta}_\tau = [\hat{\beta}_{\tau,1}, \hat{\beta}_{\tau,2}]$, $\hat{\lambda}$ denotes the quantile regression coefficient defined by

$$\hat{\beta}_\tau(\omega_m) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \rho_\tau(Y_t - X^T(\omega_m)\beta(\omega_m)) \quad (10)$$

and

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(Y_t - \lambda),$$

with ρ is the check function introduced by Koenker [1] defined as :

$$\rho_\tau(u) = u\{\tau - I(u < 0)\} = \begin{cases} -(1 - \tau)u & \text{si } u < 0 \\ \tau u & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

Where $I(\cdot)$ is the indicator function and τ is the quantile level.

The optimization problem in 10 can be solved efficiently by linear programming techniques [1]

2.4 Quantile Periodogram for spectral analysis of unevenly spaced time series

The least squares loss function in 2 is very sensitive to outliers in the observation data. In addition, the problem of detecting and estimating the frequency of a sinusoidal signal from noisy observations where the noise has a heavy-tailed distribution occur. To address this problem a quantile periodogram is proposed. It is constructed from quantile regression estimates in a trigonometric linear model.

$$\tilde{\beta}_\tau(\omega) = \arg \min_{(\beta_{\tau,1}, \beta_{\tau,2}) \in \mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^n \rho_\tau(y(t_k) - \beta_{\tau,1} \cos(\omega(t_k - \varphi)) - \beta_{\tau,2} \sin(\omega(t_k - \varphi))), \quad (11)$$

where $0 < \tau < 1$ and $\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0))$ is the check function. Therefore, instead of fitting the models mentioned in 5 we fit the model below :

$$y(t_k) = x^T(t_k, \omega) \beta(\omega) + \varepsilon(t_k), \quad (12)$$

The quantile periodogram is defined by :

$$Q_\tau(\omega) = \frac{n}{4} \|\tilde{\beta}_\tau(\omega)\|_2^2 \quad (13)$$

3 Results

Théorème 3.1. *First, we start by giving some technical assumption which are required.*

(C1) $f_{t_k}(u) := F'_{t_k}(u)$ exists for all u and $F_{t_k}(u + \lambda) - F_{t_k}(\lambda) = f_{t_k}(\lambda)u + O(u^{d+1})$ uniformly for $|u| \leq u_0$.

(C2) $F_{t_k}(\lambda) = \tau$ and $f_{t_k}(\lambda) = \kappa$ for all k .

(C3) $n^{-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x^T(t_k, \omega) x(t_k, \omega) = \Omega$ a positive definite matrix.

Under the assumptions (C1), (C2), and (C3) we have :

$$\sqrt{n}(\tilde{\beta}_\tau(\omega) - \beta(\omega)) \overset{\mathcal{L}}{\sim} N(0, \eta^2 \Omega^{-1}) \quad (14)$$

This asymptotic distribution for the regression quantile can be used to investigate the asymptotic distribution of the quantile periodogram defined in 13

Théorème 3.2. *Under the assumptions (C1), (C2), and (C3) we have :*

$$\tilde{Q}_\tau(\omega) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(1, \eta^2) \quad (15)$$

4 Numerical Examples

In this section, we illustrate the utility of quantile periodogram for spectral analysis of unevenly spaced time series data using two numerical examples.

4.1 Example

we generate a sequence of time series from the following model :

$$y(t_k) = 3 \cos(\omega_0 t_k) + \sigma_\varepsilon \varepsilon_{t_k}, \quad (16)$$

where t_k are arbitrary $\omega_0 = 2\pi \times 0.2$ and $\varepsilon_{t_k} \sim \mathcal{N}(0, 2)$ or $\varepsilon_{t_k} \sim \mathcal{C}(0, 1)$

In particular, for normal distribution, the Lomb-Scargle periodogram fail to estimate the frequency, meaning that they almost lose their estimation ability. Beside, the quantile periodogram delivers the highest detection and provides a reliable estimation under the Cauchy error setting. In summary, our proposed periodograms are more efficient in frequencies estimation from the data including outliers and big gaps.

5 Conclusion

In this paper, we investigated the application of different regression techniques (least squares, quantile regression) for periodicity detection in irregularly sampled time series. We show that the distribution of the quantile periodogram is a scaled gamma distribution. Simulations are reported on the performance of the proposed periodogram

References

- [1] Koenker, R. Bassett Jr, G. (1978). *Regression quantiles*, *Econometrica* : Journal of the Econometric Society 33–50
- [2] Li, T.H.(2012) *Quantile periodograms*. *Journal of the American Statistical Association* 107 (498) 765 776.
- [3] Lomb, N. R. (1976). *Least-Squares Frequency Analysis of Unequally Spaced Data*. *Astrophysics and Space Science*. Vol. 39, , pp. 447–462.
- [4] Scargle, J. D, (1982). *Studies in Astronomical Time Series Analysis*. II. Statistical Aspects of Spectral Analysis of Unevenly Spaced Data. *Astrophysical Journal*. Vol. 263, pp. 835–853.
- [5] VanderPlas, J. T. (2018). *Understanding the Lomb-Scargle Periodogram* *ApJS*, 236, 16.



Nonlinear least squares estimation of the unrestricted periodic EXPAR(1) model

Sabah Bécila*¹ and Mouna Merzougui²

¹LaPS Laboratory, Badji Mokhtar University of Annaba, Algeria,
sabahbc@gmail.com

²LaPS Laboratory, Badji Mokhtar University of Annaba, Algeria,
merzouguimouna@yahoo.fr

Abstract : In this paper, we study the strong consistency and asymptotic normality properties of nonlinear least squares (NLS) estimator of the periodic EXPAR(1) model. The general statistical literature on estimation of nonlinear models of Gallant and White[5] is used. Simulation study and one real example are given to assess the performance of this NLS.

MSC: 62F12 ; 62M10

Keywords : Nonlinear time series ; periodic exponential autoregressive model ; nonlinear least squares ; asymptotic normality ; consistency.

1 Introduction

The problem of estimation in nonlinear context is more complicated, it has been approached by many authors, see, for instance, Tong (1990)[8] and Bierens (1994)[3]. The nonlinear least squares (NLS) and the quasi-maximum likelihood estimators (QMLE) are essentially used in this case. The NLS estimator of parameter θ is the one that minimizes the sum of squared residuals or the one that solves the first-order conditions of the minimization problem. The application requires the strict stationarity of the model and we will use the standard tools as the compactness and the Taylor expansion. In this paper, we prove the consistency and the asymptotic normality of the NLS estimator for the PEXPAR(1) model. We obtain the same results as Amendola and Francq (2009)[1] for their QMLE for the non periodic EXPAR(1) and for the CLSE (conditional least squares estimators) of Tjøstheim (1986) [7] who uses slightly different conditions.

*Corresponding Author

2 Definition of the NLS estimator for $PEXPAR_S(1)$ model

The proces $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ is said to follow a periodic exponential autoregressive $PEXPAR_S(1)$, with period $S(S \geq 2)$, if it satisfies :

$$Y_t = (\alpha_{t,1}^0 + \alpha_{t,2}^0 \exp(-\gamma_t^0 Y_{t-1}^2)) Y_{t-1} + \varepsilon_t, t \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Where $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ is i.i.d. process with mean 0 and finite variance σ_t^2 and $\gamma_t > 0$.

The autoregressive parameters $\alpha_{t,1}, \alpha_{t,2} \forall t \in \mathbb{Z}$, the nonlinear parameter, γ_t , and the innovation variance σ_t^2 are periodic, in time, with period S , i.e.,

$$\alpha_{t+kS,1} = \alpha_{t,1}, \alpha_{t+kS,2} = \alpha_{t,2}, \gamma_{t+kS} = \gamma_t, \text{ and } \sigma_{t+kS}^2 = \sigma_t^2, \forall k, t \in \mathbb{Z}.$$

Putting $t = i + S\tau, i = 1, 2, \dots, S$ and $\tau \in \mathbb{Z}$, one can rewrite Equation (1) in the equivalente form :

$$Y_{i+S\tau} = (\alpha_{i,1}^0 + \alpha_{i,2}^0 \exp(-\gamma_i^0 Y_{i+S\tau-1}^2)) Y_{i+S\tau-1} + \varepsilon_{i+S\tau}, i = 1, \dots, S, \tau \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

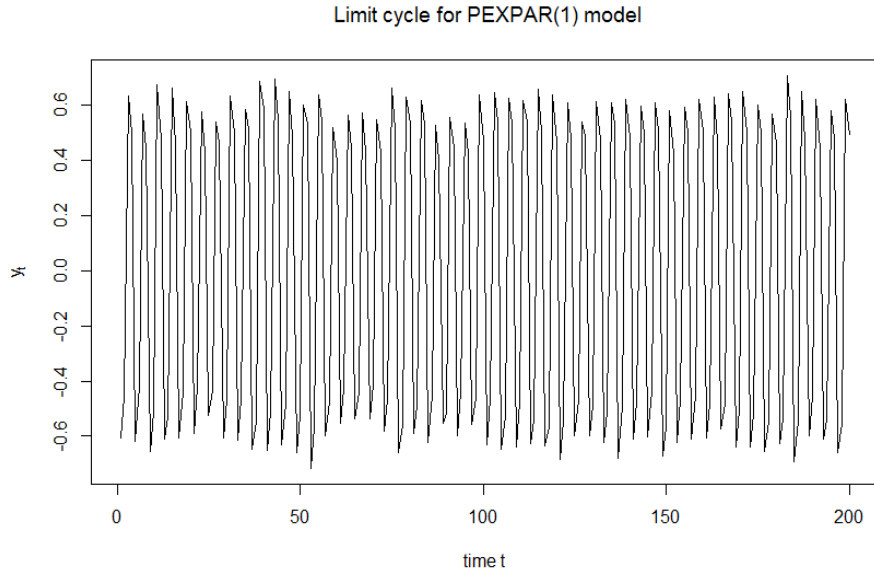


FIGURE 1 – Simulated series from $PEXPAR_2(1)$ model.

The vector of the parameters $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_S')' \in \mathbb{R}^{3S}$ where $\theta_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \gamma_i)'$, $i = 1, \dots, S$, belongs to a parameter space of the form :

$\Theta^S \subset (]-1, +1[\times]-1, +1[\times]0, \infty[)^S$. The true value of the parameters is unknown and denoted by : $\theta_{i,0} = (\alpha_{i,1}^0, \alpha_{i,2}^0, \gamma_i^0)'$, $i = 1, \dots, S$, and $\theta_0 = (\theta_{1,0}', \dots, \theta_{S,0}')' \in \mathbb{R}^{3S}$.

Suppose that the observations Y_1, \dots, Y_n constitute a realization of length n from (2) and

$n = m$ which means that we have m full cycle of data. The NLS estimator of θ is the one that minimizes the sum of squared residuals.

Let $\hat{\theta}_n$ the NLS estimator which is defined as a measurable solution of the following minimization problem with respect to θ : $\hat{\theta}_n = \arg \inf_{\theta \in \Theta^S} \tilde{Q}_n(\theta)$. Where $Q_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ell_t$ and $\ell_t(\theta) = (Y_t - (\alpha_{t,1} + \alpha_{t,2} \exp(-\gamma_t Y_{t-1}^2)) Y_{t-1})^2$.

The initial value is unknown but its choice is not important for the asymptotic behavior of the NLS estimator so we put $Y_0 = 0$ which defines the operational criterion $\tilde{Q}_n(\theta)$, then $\hat{\theta}_n = \arg \inf_{\theta \in \Theta^S} \tilde{Q}_n(\theta)$.

$$\tilde{Q}_n(\theta) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} (Y_{i+S\tau} - (\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} \exp(-\gamma_i Y_{i+S\tau-1}^2)) Y_{i+S\tau-1})^2 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \tilde{Q}_{i,m}(\theta_i). \quad (3)$$

The existence of a solution to (3) is guaranteed under the assumption :

A1 : Θ^S is compact Borel set $\subset \mathbb{R}^{3S}$. The assumption of compactness of Θ^S plays a key role this ensures that the infimum over Θ^S exists see, for instance, theorem 1.6.1 (Bierens 1994, 16). To obtain the estimators we differentiate $\tilde{Q}_{i,m}(\theta_i)$ with respect to each parameter $\theta_i, i = 1, \dots, S$. The first-order condition of the NLS minimization problem is a system of 3S nonlinear equations with 3S unknowns. For a given season i , the gradient vector of $\tilde{Q}_{i,m}(\theta_i)$ is

$$\frac{\partial \tilde{Q}_{i,m}(\theta_i)}{\partial \theta_i} = -2 \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} (Y_{i+S\tau} - (\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} \exp(-\gamma_i Y_{i+S\tau-1}^2)) Y_{i+S\tau-1}) \times \begin{bmatrix} Y_{i+S\tau-1} \\ Y_{i+S\tau-1} \exp(-\gamma_i Y_{i+S\tau-1}^2) \\ -\alpha_{i,2} Y_{i+S\tau-1}^3 \exp(-\gamma_i Y_{i+S\tau-1}^2) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Then analytical solutions cannot be found for $\frac{\partial \tilde{Q}_{i,m}(\theta_i)}{\partial \theta_i} = 0$ and the NLS estimators $\hat{\theta}_{i,m}$ must be calculated by numerical optimization such as gradient or quasi-Newton method. Under the hypothesis that the expectation exists, we have

$$E \left((Y_{i+S\tau} - (\alpha_{i,1}^0 + \alpha_{i,2}^0 \exp(-\gamma_i^0 Y_{i+S\tau-1}^2)) Y_{i+S\tau-1}) \begin{bmatrix} Y_{i+S\tau-1} \\ Y_{i+S\tau-1} \exp(-\gamma_i^0 Y_{i+S\tau-1}^2) \\ -\alpha_{i,2}^0 Y_{i+S\tau-1}^3 \exp(-\gamma_i^0 Y_{i+S\tau-1}^2) \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (5)$$

which is the asymptotic version of $\frac{\partial \tilde{Q}_{i,m}(\theta_i)}{\partial \theta_i} = 0$ at $\theta_{i,0}$ by the ergodic theorem.

3 Asymptotic behavior of the NLS estimator

We make the following assumptions to show strong consistency and asymptotic distribution.

A2 : (i) Y_t is periodically strictly stationary, a sufficient condition for this is $|\alpha_{i,1}| + |\alpha_{i,2}| < 1$ for $i = 1, \dots, S$.

(ii) $E(\varepsilon_t^2) < \infty$, for any $t \in \mathbb{Z}$.

A3 : $\theta_{i,0}$ belongs to the interior Θ° of Θ .

A4 : $E(\varepsilon_t^6) < \infty$, for any $t \in \mathbb{Z}$. The first theorem states the strong consistency of the NLSE $\hat{\theta}_{i,m}$.

Theorem 1

Under assumptions A1-A2, the nonlinear least squares estimators $\hat{\theta}_{i,m}$ are strongly consistent, i.e. almost surely

$\hat{\theta}_{i,m} \rightarrow \theta_{i,0}$ as $m \rightarrow \infty$ The limiting distribution of is given by the following result.

Theorem 2

Under assumptions A1 – A4,

$$\sqrt{m}(\hat{\theta}_{i,m} - \theta_{i,0}) \xrightarrow{D, m \rightarrow \infty} N(0_{3S}, 2\sigma_i^2 J_i^{-1}),$$

where $J_i = E \left(\frac{\partial^2 \ell_{i,\tau}(\theta_{i,0})}{\partial \theta_i \partial \theta_i'} \right)$

is a positive definite matrix. Furthermore, $\hat{\theta}_{i,m}$ and $\hat{\theta}_{j,m}$ are asymptotically independent, $i \neq j, i, j = 1, \dots, S$.

4 Simulation results

The asymptotic properties of the NLS estimator are shown by a small simulation study. We generate time series from the $PEXPAR_2(1)$ models with sizes $n = 300$ and 600 . We consider $N = 1000$ Monte Carlo replications and report the mean value of NLS estimations and their standard deviations. Table 1 gives the estimation for the parameters $\theta = (-0.7, 0.2, 2; 0.5, -0.4, 1)'$. The programs are written in R using the nlm function.

NLSE	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$	γ_1	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$	γ_2
$n = 300$	-0.7005	0.2012	2.0006	0.4975	-0.4013	1.0001
<i>sd</i>	0.0309	0.0307	0.0147	0.0597	0.0586	0.0147
$n = 600$	-0.7003	0.2000	1.9997	0.4999	-0.3989	0.9995
<i>sd</i>	0.0270	0.0271	0.0142	0.0436	0.0411	0.0144

Table 1 : Estimation results for $PEXPAR_2(1)$.

From Table 1, we can see that the parameters are well estimated and the standard deviation decreases when n increases showing that the estimates are consistent.

5 Application

As an example, we fit the model $PEXPAR_{12}(1)$ to the famous monthly Fraser River flow data by the NLS method, from January 1915 to December 1990. The estimation results of the parameters are given in Table 2.

<i>i</i>	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun
$\alpha_{i,1}$	0.6829	0.8145	0.7652	0.7069	0.1805	0.2368
$\alpha_{i,2}$	-0.4936	-1.2685	0.2472	2.5652	0.0450	-4.6453
γ_i	46.6180	242.1705	16.8679	104.7684	27.9312	440.3529
<i>i</i>	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
$\alpha_{i,1}$	0.6748	0.7616	0.7066	0.7842	0.7406	0.7369
$\alpha_{i,2}$	0.9969	-1.4752	1.3841	0.3392	1.5638	1.6418
γ_i	146.5914	248.9337	153.4060	6.5568	97.6726	153.5859

Table 2 : Parameter estimation of the $PEXPAR_{12}(1)$.

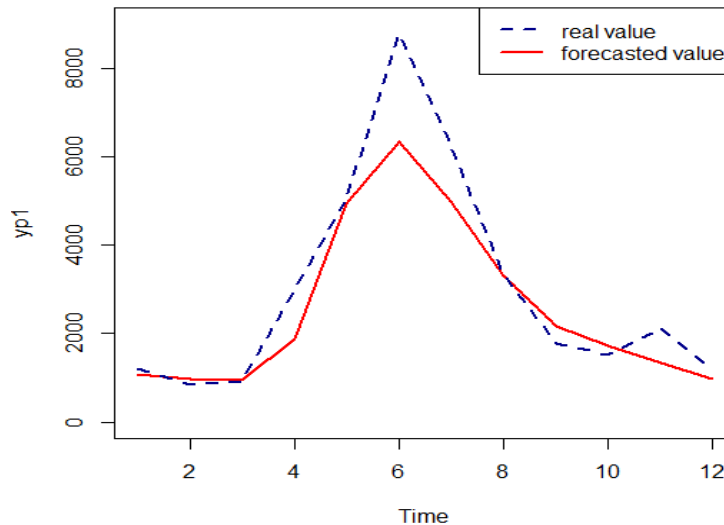


FIGURE 2 – Comparison between the real values and their forecasted values.

In Figure 2, we give a comparison between the real values and their forecasted values for the last year. Monthly residual variances for restricted $PEXP\text{PAR}_{12}(1)$ model with $\gamma = 4$ and LSE method and $PEXP\text{PAR}_{12}(1)$ with NLS method are comparable as shown in Table 3.

i	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun
σ_{LSE}^2	0.0268	0.0238	0.0281	0.0850	0.0451	0.0282
σ_{NLS}^2	0.0265	0.0241	0.0280	0.0851	0.0455	0.0273
i	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
σ_{LSE}^2	0.0258	0.0131	0.0241	0.0363	0.0480	0.0388
σ_{NLS}^2	0.0270	0.0129	0.0237	0.0369	0.0473	0.0388

Table 3 : Monthly residual variances.

6 Conclusion

Given the importance of the PEXPAR model, we were interested to estimate its parameters using the NLS method which is clearly a nonlinear optimization procedure involving all the calculation difficulties specific to this procedure. Our estimators are consistent and asymptotically normal, the results of the simulations show that we have the asymptotic properties. In the application we have worked with the Fraser River flow series known for its nonlinearity and periodicity, the estimated model is competitive. We considered, here, a sufficient condition of strict stationarity but this subject deserves further research.

References

- [1] Amendola, A. and Francq, C. : Concepts and tools for nonlinear time series modelling. In Handbook of Computational Econometrics (eds D. A. Belsley and E. J. Kontoghiorghes), John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK. pp. 377-427 (2009).
- [2] Becila, S and Merzougui, M. : Nonlinear Least Squares estimation of the Pe-riodic EXPAR(1) model. Communications in Statistics-Theory and Methods. DOI :10.1080/03610926.2020.1839099. (2020).
- [3] Bierens, H. J. : Estimation, testing, and specification of cross-section and time series models. Cambridge University Press (1994).
- [4] Chan, K. S. and Tong, H. : On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. Advances in applied probability, 17(3), 666-678 (1985).
- [5] Gallant, A. R., and White, H. : A Unified Theory of Estimation and Inference for Nonlinear Dynamic Models. Basil Blackwell, New York (1988).
- [6] Merzougui, M. : Estimation in periodic restricted EXPAR(1) models. Communications in Statistics - Simulation and Computation, D.O.I. 10.1080/03610918.2017.1361975 (2017).
- [7] Tjøstheim, D. : Estimation in Nonlinear Time Series Models. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland. Stochastic Processes and their Applications 21 (1986), 251-273 (1986).
- [8] Tong, H. : Nonlinear Time Series : a Dynamical System Approach. Oxford University Press, Oxford (1990).



Central Maximum Likelihood Estimates of 2D-RCAR Models

Ouerdia Arezki ¹ and Abdelghani Hamaz

¹LMPA, Faculté des sciences, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou,
ouerdia.arezki@ummto.dz
ghani.hamaz@ummto.dz

Abstract : For the autoregressive model with indexed random coefficients in two dimensions of order $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$, $2D - RCAR(p_1, p_2)$ in short, the authors in [6] obtained estimates of the unknown parameters and furthermore they showed strong consistency if the fourth moment of the considered stochastic process exists. In this paper we show that the maximum likelihood estimates satisfy a central limit theorem, i.e. we prove that the estimates are asymptotically normally distributed.

MSC: 62H11 ; 62H12 ; 60B10 ; 60B12 ; 60G50 ; 60G60

Keywords : Likelihood Estimates ; 2D-RCAR Models ; Central Limit Theorem ; asymptotic normality

1 Introduction

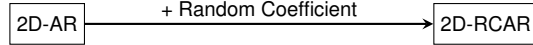
In recent years, interest in nonlinear random field models has been growing steadily [1, 2, 3, 4]. This field generates new interesting problems and the results of the research can be applied in many branches of science such as econometrics, biometry, hydrology, etc. Some of the models formulated in these disciplines are non-linear, their linear approximations may lose much of the information, so predictions may suffer from inaccuracy. Indeed, the variability of a process may depend on the information available. This reality has motivated extensive research to relax the constant variance assumption imposed by traditional linear models. Among the proposed models, we focus on autoregressive models whose coefficients are assumed not to be constant, but subject to random perturbations, called random coefficient autoregressive models (RCAR).

In our previous work [6], we first developed a Maximum Likelihood Estimation (MLE) procedure for estimating the unknown parameters of $2D - RCAR(p_1, p_2)$. Then, we proved that the estimates are strongly consistent. In this work, we focus on deriving the Central Limit Theorem of the Maximum Likelihood Estimates of the Parameters of 2D-RCAR Models.

*Corresponding Author

2 Preliminaries & Problem formulation

Two-dimensional indexed random coefficient autoregressive models (2D-RCAR) is a generalization of 2D-AR models. The introduction of 2D-RCAR models is motivated by the fact that the fixed coefficients hypothesis for 2D-AR Model is not very realistic. Indeed, the autoregressive models with coefficients assumed to be not constant, but subjected to random perturbations allow accurate handling of the non-homogeneity of a process and ensure a faithful interpretation of real-valued spatial phenomena.



Bibi. et al [5] realised a well-structured framework for analyzing the $2D-RCAR(p_1, p_2)$, $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$ models. Using these models enables us to exploit all the analytical tools and formulate new results. We borrow the following definition which gives the main analytical features of the class of $2D-RCAR(p_1, p_2)$ models.

Définition 2.1 ([5]). *Autoregressive valued random field $\{X_{s,t}, (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ defined in the probability space (Ω, F, P) is called two-dimensional indexed random coefficient autoregressive model with order $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$ denoted by $2D-RCAR(p_1, p_2)$ if it is a solution of the following stochastic equation*

$$X_{s,t} = \sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} (\zeta(i, j) + \zeta_{s,t}(i, j)) X_{s-i, t-j} + \varepsilon_{s,t}, \quad (s, t) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

where

- (i) *The innovation process $\{\varepsilon_{s,t}, (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ is an independent and identically distributed (i.i.d) sequence of random fields with mean zero and variance σ^2 .*
- (ii) *$\underline{\zeta} = (\zeta(i, j), (i, j) \in \mathfrak{S})^\top$ is a real vector of constants, where for any positive integers p_1, p_2, k, l , we define the set*

$$\mathfrak{S} = \{(k, l); 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2, (k, l) \neq (0, 0)\}.$$

- (iii) *We suppose that $\underline{\zeta}_{s,t} = (\zeta_{s,t}(i, j); (i, j) \in \mathfrak{S}, (s,t) \in \mathbb{Z}^2)$ is taken with respect to the lexicographic order. Then the perturbation process $(\underline{\zeta}_{s,t}, (s,t) \in \mathbb{Z}^2)$ is a strictly stationary process of independent vectors of random fields with zero mean and variance $\text{var}(\underline{\zeta}_{s,t}) = E(\underline{\zeta}_{s,t} \underline{\zeta}_{s,t}^\top) = \Lambda$, independent of $\{\varepsilon_{s,t}, (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$.*
- (iv) *The variance of $\varepsilon_{s,t}$, $\sigma^2 \geq c_1 > 0$, while the smallest eigenvalue of Λ is bounded below by c_2 , where c_1 and $c_2 > 0$ are both arbitrarily small*

Let $W_{st} = K_{m^2-1} \text{vec}(Y_{s,t-1} Y_{s,t-1}^\top)$, where $Y_{s,t-1} = (X_{k,l}; (1, 1) \leq (k, l) < (m, m))^\top$.

3 Maximum Likelihood Estimates of the Parameters of 2D-RCAR

In order to be able to use nonlinear random field models in practice, it is necessary to be able to fit the models to the data and to estimate the unknown parameters. The computa-

tional procedure used to determine the unknown parameters of the process (1) is based on the optimization of the likelihood function which, under certain conditions, is shown to give strongly consistent estimates of the true parameters. Model (1) may be rewritten in the form of autoregressive process as :

$$X_{s,t} = \underline{\zeta}^\top Y_{s,t-1} + u_{s,t}, \quad (2)$$

where $u_{s,t}$ is the residual function defined as $u_{s,t} = \underline{\zeta}_{s,t}^\top Y_{s,t-1} + \varepsilon_{s,t}$, with $E(u_{s,t}|F_{s,t}) = Y_{s,t-1}E(\underline{\zeta}_{s,t}) + E(\varepsilon_{s,t}) = 0$. Since $\underline{\zeta}_{s,t}$ and $\varepsilon_{s,t}$ are independent of the σ -field $F_{s,t}$ and $X_{s,t}$ is F_{st} -measurable. From the structure of the model (1), we have

$$E(X_{s,t}|F_{s,t}) = \underline{\zeta}^\top Y_{s,t-1} \text{ and } E(u_{s,t}^2|F_{s,t}) = \sigma^2 + \Gamma^\top W_{s,t}, \quad \Gamma = \text{vech}(\Lambda). \quad (3)$$

3.1 Construction of the Maximum Likelihood Estimates

Given a sample $(X_{k,l}; k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, m)$ of size m^2 from the random field $\{X_{s,t}\}$ generated by the model (1) which is strictly stationary $F_{s,t}$ -measurable satisfying conditions (i) and (iv). To avoid cumbersome notations we put $\lambda = m^2$. The purpose is to obtain the likelihood function conditional on the values $\{X_{s,t}; 1 - p_1 < s \leq 0, 1 - p_2 < t \leq 0\}$, as if we were assuming the joint normality of $\varepsilon_{s,t}$ and $\zeta_{s,t}$.

So that the derivation of the maximum likelihood estimates to be clear, we use the following step-by-step estimation procedure.

Step 1 : given $A_{s-q_1, t-q_2} \in F_{s,t}$, let $f(X_{s,t}, \dots, X_{s-q_1, t-q_2} | A_{s-q_1, t-q_2+1})$ denotes the density of $X_{s,t}, \dots, X_{s-q_1, t-q_2+1}$. Hence, it follows from (3) that

$$\begin{aligned} f_{mm}\{X_{11}, \dots, X_{m,m} | X_{0,1}, \dots, X_{1-p_1, 1-p_2}\} &= \prod_{s=1}^m \prod_{t=1}^m f(X_{s,t} | X_{0,1}, \dots, X_{1-p_1, 1-p_2}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{\lambda}{2}} \prod_{s=1}^m \prod_{t=1}^m (\sigma^2 + \Gamma W_{s,t})^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(X_{s,t} - \underline{\zeta}^\top Y_{s,t-1})^2}{\sigma^2 + \Gamma^\top W_{s,t}} \right\} \\ &= \tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \Gamma, \sigma^2), \end{aligned}$$

the resulting $\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \Gamma, \sigma^2)$ is the likelihood function conditional on $\{X_{00} \dots X_{1-p_1, 1-p_2}\}$. However, instead of the maximization of this latter, it will be more practical and appropriate to think to the minimization of the monotone function of the likelihood $\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \Gamma, \sigma^2)$, namely

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \Gamma, \sigma^2) &= -2\lambda^{-1} \ln \left(\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \Gamma, \sigma^2) \right) - \ln(2\pi) \\ &= \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \ln(\sigma^2 + \Gamma^\top W_{st}) + \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{(X_{s,t} - \underline{\zeta}^\top Y_{s,t-1})^2}{\sigma^2 + \Gamma^\top W_{st}}. \end{aligned}$$

It will be seen that the likelihood function to be optimized is nonlinear in the parameters (to be estimated) so it is necessary to use the following procedure to find the estimates.

Step 2 : the function $\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \Gamma, \sigma^2)$ is nonlinear in σ^2 and Γ and there is no fully defined expression for the estimates $\hat{\underline{\zeta}}_{mm}$, $\hat{\Gamma}_{mm}$ and $\hat{\sigma}_{mm}^2$ of $\underline{\zeta}$, Γ and σ^2 , respectively, which minimize $\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \Gamma, \sigma^2)$. Hence, by letting $\rho = \frac{\Gamma}{\sigma^2}$, we may equivalently minimize a function of ρ alone by concentrating out the parameters $\underline{\zeta}$ and σ^2 .

$$\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \rho, \sigma^2) = \ln(\sigma^2) + \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \ln(1 + \rho^\top W_{s,t}) + \sigma^{-2} \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{(X_{s,t} - \underline{\zeta}^\top Y_{s,t-1})^2}{1 + \rho^\top W_{s,t}}. \quad (4)$$

For fixed ρ , the function $\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \rho, \sigma^2)$ reaches its minimum at $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_{mm}(\rho)$ and $\sigma^2 = \sigma_{mm}^2(\rho)$, where

$$\underline{\zeta}_{mm}(\rho) = \left(\lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{Y_{s,t-1} Y_{s,t-1}^\top}{1 + \rho^\top W_{s,t}} \right)^{-1} \times \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{X_{s,t} Y_{s,t-1}}{1 + \rho^\top W_{s,t}},$$

and

$$\sigma_{mm}^2(\rho) = \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{(X_{s,t} - \underline{\zeta}_{mm}^\top(\rho) Y_{s,t-1})^2}{1 + \rho^\top W_{s,t}}.$$

Finally, the maximum likelihood estimates $\hat{\underline{\zeta}}_{mm}$, $\hat{\Gamma}_{mm}$ and $\hat{\sigma}_{mm}^2$ are obtained by calculating $\hat{\rho}_{mm}$, where $\hat{\rho}_{mm}$ minimizes the function

$$L_{mm}^*(\rho) = \ln(\sigma_{mm}^2(\rho)) + \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \ln(1 + \rho_{mm}^\top W_{s,t}).$$

The estimates $\hat{\underline{\zeta}}_{mm}$, $\hat{\Gamma}_{mm}$ and σ_{mm}^2 are given by $\hat{\sigma}_{mm}^2 = \sigma_{mm}^2(\hat{\rho})$, $\hat{\underline{\zeta}}_{mm} = \underline{\zeta}_{mm}(\hat{\rho})$ and $\hat{\Gamma}_{mm} = \hat{\sigma}_{mm}^2 \hat{\rho}_{mm}$. Note that for λ large enough, the matrix $\lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{(Y_{s,t-1} Y_{s,t-1}^\top)}{1 + \rho_{mm}^\top W_{s,t}}$ is invertible almost everywhere since it is always positive definite. In the opposite case, if it was not positive definite, it would exist a non zero $(p_1 \times p_2 - 1)$ -component vector κ such that $\kappa^\top Y_{s,t-1} = 0$ almost everywhere. The procedure above is useful if we use an optimal algorithm which doesn't require the first and second derivatives of the function $L_{mm}^*(\rho)$. For this reason, it is better to minimize $\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \rho)$, indeed we have

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \rho) &= \inf_{\sigma^2} \tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \rho, \sigma^2) - 1 \\ &= \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \ln(1 + \rho^\top W_{s,t}) + \lambda^{-1} \ln \left(\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{(X_{s,t} - \underline{\zeta}^\top Y_{s,t-1})^2}{1 + \rho^\top W_{s,t}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Finally, the maximum likelihood estimates $\hat{\underline{\zeta}}_{mm}$, $\hat{\rho}_{mm}$ and $\hat{\sigma}_{mm}^2$ are obtained from the following

equations :

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{mm}(\hat{\underline{\zeta}}_{mm}, \hat{\rho}_{mm}) &= \inf_{(\underline{\zeta}^\top, \rho^\top) \in \Theta} \tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}, \rho); \\ \hat{\sigma}_{mm}^2(\hat{\rho}) &= \lambda^{-1} \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m \frac{(X_{s,t} - \hat{\underline{\zeta}}_{mm}^\top Y_{s,t-1})^2}{1 + \hat{\rho}_{mm}^\top W_{s,t}}; \\ \hat{\Gamma}_{mm} &= \hat{\sigma}_{mm}^2 \hat{\rho}_{mm},\end{aligned}$$

where the set Θ is the set of all $\frac{\lambda^2+3\lambda}{2}$ dimensional vectors $(\underline{\zeta}^\top, \rho^\top)^\top$, with $\underline{\zeta}$ and ρ containing λ and $\frac{\lambda^2+\lambda}{2}$ elements, respectively. It is the set over which $\tilde{L}_{mm}(\underline{\zeta}_{mm}, \rho_{mm})$ is to be minimized. Note that the same estimates will be obtained by minimizing either function (4) or (5). Using function (4) is suitable only for optimization algorithms that don't require the first and second derivatives. The calculation of the derivatives of the function (4) seems to be complicated and may lead to some loss of accuracy of the estimation procedure. Therefore it is better to minimize the function (5) of $\underline{\zeta}$ and ρ .

4 Main results : The Central Limit Theorem

The main contribution of this work is stated in the following theorem where we show that the maximum likelihood estimates satisfy a central limit theorem. Suppose that the real value $\theta_{0,0} = (\underline{\zeta}_{0,0}^\top, \rho_{0,0}^\top)^\top$ and that $\{X_{s,t}\}$ strictly stationary, and $\mathcal{F}_{s,t}$ -measurable process $X_{s,t}$ satisfying (1) with $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_{0,0}$, $\sigma^2 = \sigma_{0,0}^2$ and $\Gamma = \Gamma_{0,0}$

For a strictly stationary, and $\mathcal{F}_{s,t}$ -measurable process $X_{s,t}$ satisfying (1), under assumptions (i), (iv). Then $\lambda^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_{mm} - \theta_{00})$ has a limiting normal distribution with mean zero and covariance matrix $H^{-1}JH^{-1}$. if $\underline{\zeta}_{s,t}$ and $\varepsilon_{s,t}$ are jointly normal, the covariance matrix reduces to $2H^{-1}$ Where

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & \vdots & H_{12} & \vdots & H_{13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{12}^\top & \vdots & H_{22} & \vdots & H_{23} \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ H_{13}^\top & \vdots & H_{23}^\top & \vdots & H_{33} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J_{11} & \vdots & J_{12} & \vdots & J_{13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{12}^\top & \vdots & J_{22} & \vdots & J_{23} \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ J_{13}^\top & \vdots & J_{23}^\top & \vdots & J_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= 2E \left[\left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-1} Y_{s,t-1} Y_{s,t-1}^\top \right]; \\
 H_{12} &= 2E \left\{ E[u_{00,st} | F_{s,t}] \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-2} Y_{s,t-1} W_{st}^\top \right\} = 0; \\
 H_{13} &= 2E \left\{ E[u_{00,st} | F_{s,t}] \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-2} Y_{s,t-1} \right\} = 0; \\
 H_{22} &= E \left\{ \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-2} W_{s,t} W_{s,t}^\top \right\}; \\
 H_{23} &= E \left\{ \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-2} W_{s,t} \right\}; \\
 H_{23} &= E \left\{ \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-2} \right\}; \\
 J_{11} &= 4E \left\{ W_{s,t} W_{s,t}^\top \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-1} \right\}; \\
 J_{12} &= 2E \left\{ u_{00,st}^3 \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-3} Y_{s,t-1} W_{s,t}^\top \right\}; \\
 J_{13} &= 2E \left\{ u_{00,st}^3 \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-3} Y_{s,t-1} \right\}; \\
 J_{22} &= 2E \left\{ \left(u_{00,st}^2 - \sigma_{00}^2 + \Gamma_{00}^\top W_{00,st} \right)^2 \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-4} W_{s,t} W_{s,t}^\top \right\}; \\
 J_{23} &= 2E \left\{ \left(u_{00,st}^2 - \sigma_{00}^2 + \Gamma_{00}^\top W_{00,st} \right)^2 \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-4} \right\}; \\
 J_{33} &= 2E \left\{ \left(u_{00,st}^2 - \sigma_{00}^2 + \Gamma_{00}^\top W_{00,st} \right)^2 \left(E(u_{00,st}^2 | F_{s,t}) \right)^{-4} \right\};
 \end{aligned}$$

5 Conclusion

In this paper, we have presented new original theoretical results on estimation in non-linear random field models. We focus on a two-dimensionally indexed random coefficients autoregressive model with order $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$, $2D - RCAR(p_1, p_2)$ for short. We have shown that the maximum likelihood estimates satisfy a central limit theorem, i.e. we proved that the estimates are asymptotically normally distributed.

References

- [1] Bibi, A., & Lescheb, I. (2013). Estimation and asymptotic properties in periodic GARCH (1, 1) models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(19), 3497-3513.
- [2] Hamaz, A., Arezki, O., & Achemine, F. (2020). Impact of missing data on the prediction of random fields. *Journal of Applied Statistics*, 47(1), 132-149.
- [3] Arezki, O., & Hamaz, A. (2020). On linear prediction for stationary random fields with nonsymmetrical half-plane past. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-12.
- [4] Kohli, P., & Pourahmadi, M. (2014). Some prediction problems for stationary random fields with quarter-plane past. *Journal of Multivariate Analysis*, 127, 112-125.

- [5] Bibi, A. (2016). Two-stage generalized moment method approach for bidimensional random coefficient autoregressive models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(14), 4268-4284.
- [6] Saidi, A., Hamaz, A., & Arezki, O. (2022). Estimation in nonlinear random fields models of autoregressive type with random parameters. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-16.

A novel class of count time series models

Nassim Touche 

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
nassim.touche@univ-bejaia.dz

Abstract : We propose a novel class of count time series models, the mixed Poisson integer-valued stochastic volatility models. The proposed specification, which can be considered as an integer-valued analogue of the discrete-time stochastic volatility model, encompasses a wide range of conditional distributions of counts. We study its probabilistic structure and develop an easily adaptable Markov chain Monte Carlo algorithm, based on the Griddy-Gibbs approach that can accommodate any conditional distribution that belongs to that class. We demonstrate that by considering the cases of Poisson and negative binomial distributions. The methodology is applied to simulated and real data.

MSC: C00, C10, C11, C13, C22

Keywords : Griddy-Gibbs, Markov chain Monte Carlo, mixed Poisson parameter-driven models, stochastic volatility.

1 Introduction

Many count time series models are often related to the Poisson process with a given parametric intensity. Following the general terminology by Cox (1981), these models can be classified into observation-driven and parameter-driven, depending on whether the dependence structure of counts is induced by an observed or a latent process, respectively.

The literature on time series of counts has put forward parameter-driven models, which do not consider a dynamic equation for the latent intensity parameter (Zeger, 1998; Davis et al., 1999, 2000; Hay and Pettitt, 2001; Davis and Wu, 2009) and unobserved intensity models, that is, parameter driven models with a dynamic specification for the intensity parameter (Davis and Rodriguez-Yam, 2005; Jung et al., 2006; Sorensen, 2019). In the first case, the parameter-driven models are constructed based on a particular conditional distribution of counts (Poisson, negative binomial, integer-valued exponential family), given some covariates and an intensity parameter.

In the second case of unobserved intensity models, an autoregressive process (without an intercept), driven by Gaussian innovations, is assigned to a latent multiplicative or additive component of the intensity equation. Yet, all the previous research on unobserved intensity models is restricted solely to the Poisson distribution with an exponential conditional mean (which is usually a function of covariates as well). In addition, the probabilistic properties of (Poisson-based) unobserved intensity models have not been studied so far. As such, the extant literature lacks a general framework for modeling, estimating and studying the theoretical

properties of unobserved intensity count time series models. The present paper aspires to fill these gaps.

We propose a broad class of unobserved intensity models for count data, the mixed Poisson integerevaluated stochastic volatility (INSV) models. This class of models encompasses a large number of conditional distributions of counts and is formulated by considering a mixed Poisson process (Mikosch, 2009), for which the logarithm of the latent conditional mean parameter (intensity) follows a first-order (drifted) autoregressive model, which in turn, is driven by independent and identically (not necessarily Gaussian) distributed innovations.

Although we focus on the mixed Poisson INSV model, we show that the present framework can be easily generalized to account for different stochastic processes that are all based on the general INSV model. Different stochastic processes lead to different *INSV*-type models that correspond to different families of conditional distributions (e.g, the exponential family). These distributions do not necessarily belong to the class of the mixed Poisson *INSV* process. The mixed Poisson INSV model can be considered as the integer-valued analogue of the stochastic volatility model (Taylor, 1986) for real-valued time series; hence the term "integer-valued stochastic volatility". As we explain, though, in more detail in Section 2, this term is somewhat a misnomer. Furthermore, since the INSV processes can be seen as flexible alternatives to the INGARCH processes (see, for example, Christou and Fokianos (2014)), the present work also complements the count time series literature on observed intensity models.

We study the probabilistic path properties of the mixed Poisson INSV model, such as ergodicity, mixing, covariance structure and existence of moments. Moreover, by construction, the proposed model leads to an intractable likelihood function, as it depends on high-dimensional integrals. Yet, conditional of the intensity parameter, the likelihood function has a closed form and parameter estimation can be achieved by MCMC methods. The proposed posterior sampler can be easily modified to accommodate any conditional distribution that belongs to the family of the mixed Poisson *INSV* process (or of any INSV-type process). To demonstrate that, we consider two specific cases of the mixed Poisson INSV specification, the Poisson INSV model (P-INSV) and the negative binomial INSV model (NB-INSV). For both models, the parameters of the autoregression are assigned conjugate priors and are updated from well-defined conditional posterior distributions.

The only difficult updating steps concern the vector of unobserved intensities in both models and the dispersion parameter in the negative binomial case. Since the joint conditional posterior of the latent intensities is of unknown form, we adopt the Griddy-Gibbs technique (Ritter and Tanner, 1992) and sample them one at a time (element-by-element updating), in the spirit of Jacquier et al., (1994). The same technique is used for sampling the dispersion parameter of the negative binomial *INSV* model. For the negative binomial case, a modified scale mixture representation, in the spirit of Jacquier et al, (2004), is also used to improve efficiency. Model selection is conducted using the Deviance Information Criterion (Spiegelhalter et al., 2002).

We carry out a simulation study in order to evaluate the performance of our Bayesian methodology. To empirically illustrate its usefulness, we implement it to financial and health data. In particular, we exploit the transaction data used by Fokianos et al., (2009) and the Zeger (1988)'s poliomyelitis data. Both data sets have been widely used in the past in the context of count data models. Although no covariates are considered in our analysis, the specified drifted autoregressive latent process not only adds serial dependence and overdispersion to

the proposed model, but can also be viewed as a proxy for unknown/unavailable covariates (Davis and Wu, 2009).

2 Representation of the model

Consider the unknown real parameters ϕ_0 and ϕ_1 and an independent and identically distributed (i.i.d) latent sequence $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ with mean zero and unit variance. Let also $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ be an i.i.d sequence of positive random variables with unit mean and variance $\rho^2 \geq 0$ and $\{N_t(\cdot), t \in \mathbb{Z}\}$ be an i.i.d sequence of homogeneous Poisson processes with unit intensity. The sequences $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$, $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ and $\{N_t(\cdot), t \in \mathbb{Z}\}$ are assumed to be independent.

A mixed Poisson integer-valued stochastic volatility (INSV) model is an observable integer-valued stochastic process $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ given by the following equation

$$Y_t = N_t(Z_t \lambda_t) \quad (1)$$

where the logarithm of the intensity $\lambda_t > 0$ (latent mean process) follows a first-order autoregression driven by ϕ_0, ϕ_1 and $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$, that is,

$$\log(\lambda_t) = \phi_0 + \phi_1 \log(\lambda_{t-1}) + \sigma e_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

with $\sigma > 0$. The model (1)-(2) is novel and enlarges the existing framework of unobserved intensity models. The family of processes represented by (1) is known as mixed Poisson process with mixing variable Z_t (Mikosch, 2009). Depending on the law of Z_t , this class of models offers a wide range of conditional distributions for Y_t given λ_t .

3 Bayesian inference via Griddy-Gibbs sampling

In this section we propose Bayesian Griddy-Gibbs (BGG) samplers for two cases of the mixed Poisson INSV model, assuming that the distribution of the innovation in the log-intensity equation is Gaussian. The first case refers to the Poisson INSV model for which $\rho^2 = 0$, so the parameter vector to be estimated is $\theta = (\phi', \sigma^2)'$, where $\phi = (\phi_0, \phi_1)'$.

The second case refers to the negative binomial INSV model, corresponding to $Z_t \sim \mathcal{G}(\rho^{-2}, \rho^{-2})$, with $\rho^2 > 0$. The vector of parameters to be estimated is now $\theta = (\phi', \tau, \sigma^2)'$, where $\tau = \rho^{-2}$ (the dispersion parameter).

4 Simulation study and empirical examples

We assess the performance of the proposed Bayesian methodology on simulated mixed Poisson INSV series with Gaussian innovations for the log-intensity equation. In particular, we consider two cases of the mixed Poisson INSV model; the P-INSV model and the NB-INSV model. To illustrate the Bayesian methodology of this paper, we apply the P-INSV and NB-INSV models to a transaction data set that has been widely used by the relevant empirical literature.

References

- [1] Cox, D.R. (1981). Statistical analysis of time series : Some recent developments. *Scandinavian Journal of Statistics* 8 : 93-115.
- [2] Davis, R.A., Dunsmuir, W.T., Wang, Y. (2000). On autocorrelation in a Poisson regression model. *Biometrika* 87 : 491-505.
- [3] Davis, R.A., Rodriguez-Yam, G. (2005). Estimation for state-space models based on likelihood approximation. *Statistica Sinica* 15 : 381–406.
- [4] Davis, R.A., Wu, R. (2009). A negative binomial model for time series of counts. *Biometrika* 96 : 735–749.
- [5] Fokianos, K., Rahbek A., Tjøstheim, D. (2009). Poisson autoregression. *Journal of the American Statistical Association* 140 : 1430–1439.
- [6] Hay, J., Pettitt, A. (2001). Bayesian analysis of a time series of counts with covariates : an application to the control of an infectious disease. *Biostatistics* 2 : 433–444..
- [7] Jacquier, E., Polson, N.G., Rossi, P.E. (1994). Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics* 12 : 371–389.
- [8] Hay, J., Pettitt, A. (2001). Bayesian analysis of a time series of counts with covariates : an application to the control of an infectious disease. *Biostatistics* 2 : 433–444.
- [9] Jung, R.C., Kukuk, M., Liesenfeld, R. (2006). Time series of count data : modeling, estimation and diagnostics. *Computational Statistics & Data Analysis* 51 : 2350–2364.
- [10] Mikosch, T. (2009). Non-life Insurance Mathematics, An Introduction with the Poisson Process. *Springer-Verlag*, Berlin.
- [11] Ritter, C., Tanner, M.A. (1992). Facilitating the Gibbs sampler : the Gibbs stopper and the Griddy-Gibbs sampler. *Journal of the American Statistical Association* 87 : 861-868.
- [12] Spiegelhalter, D., Best, N., Carlin, B., Van Der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)* 64 : 583-639.
- [13] Taylor, S. (1986). Modelling Financial Time Series. Chichester : Wiley.



Détection des valeurs aberrantes. L'approche Bayésienne empirique

kamilia Haddadou¹, Lynda Atil^{*2}, and Hocine Fellag³

¹LMPA Faculté des sciences, Université de Tizi-Ouzou Algérie,
kamilia.haddadou@ummto.dz

²LMPA, Faculté des sciences, Université de Tizi-Ouzou Algérie,
lynda.atil@ummto.dz

³LMPA, Faculté des sciences, Université de Tizi-Ouzou Algérie,
hocinefellag@ummto.dz

Résumé La détection des valeurs aberrantes et leurs localisations est une étape principale dans plusieurs projets d'exploration des données pour obtenir une analyse cohérente. Le but de notre travail est de proposer un nouveau test de détection des valeurs aberrantes en s'inspirant du test proposé par De alba et Van Ryzin [1] pour détecter les valeurs aberrantes dans un échantillon Gaussien qui provient du changement de variance (dilatation de la variance).

Mots clés : Bayésien empirique ; échantillon Gaussien ; puissance ; test ; valeurs aberrantes.

1 Introduction

L'approche Bayésienne empirique a été introduite par Robbins [5]. Elle est un mélange de l'inférence Bayésienne et fréquentiste. Elle représente une approche pour rectifier l'incertitude concernant la loi a priori. Les estimateurs associés sont basés sur la formule de Bayes mais en partant, comme en statistique classique, des données observées, via la loi a posteriori. Plusieurs travaux ont été publiés sur cette approche, tel que l'article de De alba et Van Ryzin [1] qui ont proposé l'approche Bayésienne empirique pour la détection des valeurs aberrantes. Ce problème de détection a pris une importance non négligeable dans l'inférence statistique. Mais bien que l'identification des outliers ait fait l'objet de plusieurs recherches, la définition de ces valeurs ou anomalies reste imprécise. Hawkins [3] définit les valeurs aberrantes comme des observations qui s'écartent tellement des autres observations qu'elle suscite la suspicion qu'elle ait été générée par un mécanisme différent.

La méthode Bayésienne empirique est utilisée pour l'estimation des paramètres d'une loi lorsque les observations sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées qui suivent cette loi. On peut mentionner que cette technique n'est pas une méthode

*Corresponding Author

Bayésienne pure car elle fait appel à des approximations fréquentistes dans le cas où l'information a priori n'est pas disponible ou insuffisante. Cependant un résultat montre qu'on peut obtenir des résultats asymptotiquement équivalents à ceux du modèle Bayésien hiérarchique. L'analyse Bayésienne empirique peut être vue comme une bonne combinaison des méthodes fréquentistes et Bayésiennes.

1.1 Modèle Bayésien

On appelle modèle Bayésien la donnée d'un modèle paramétrique, $f(x|\theta)$, et d'une loi a priori $\pi(\theta)$ sur les paramètres.

Soit la loi des observations $f(x|\theta)$ et la densité a priori $\pi(\theta)$, on peut construire :

i) la loi marginale de x ,

$$f(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta$$

ii) la loi a posteriori de θ , obtenue par formule de Bayes,

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(\theta|x)\pi(\theta)d\theta} \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$$

Autrement dit, la loi a posteriori représente une actualisation de l'information a priori au vu de l'information apportée par les observations.

1.2 Modèle Bayésien hiérarchique

L'un des problèmes d'une approche Bayésienne classique noté par les fréquentistes est l'incertitude concernant la loi a priori. Une approche qui essaie de rectifier ce problème est l'analyse Bayésienne hiérarchique qui met des mesures a priori sur les paramètres de la loi a priori $\pi(\theta)$.

Définition 1.1. [6] *Un modèle Bayésien hiérarchique est un modèle statistique Bayésien ($f(x|\theta), \pi(\theta)$), dans lequel la loi a priori $\pi(\theta)$ est décomposée en plusieurs lois conditionnelles*

$$\pi_1(\theta|\theta_1), \pi_2(\theta_2|\theta_1), \dots, \pi_n(\theta_n|\theta_{n-1})$$

et une loi marginale $\pi_{n+1}(\theta_n)$ telle que

$$\pi(\theta) = \int_{\Theta_1 \times \dots \times \Theta_n} \pi_1(\theta|\theta_1), \pi_2(\theta_2|\theta_1), \dots, \pi_{n+1}(\theta_n)d\theta_1 \dots d\theta_{n+1}$$

Les paramètres θ_i sont appelés hyperparamètres de niveau i ($1 \leq i \leq n$).

1.3 Modèle Bayésien empirique

L'estimation Bayésienne empirique peut être vue comme un complément du modèle hiérarchique ; l'estimation Bayésienne empirique consiste à estimer la densité a posteriori lorsque les hyperparamètres sont inconnus.

On considère \tilde{x} , un vecteur de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de vraisemblance $f(x|\theta)$ avec θ un vecteur de paramètres inconnus de fonction de densité $g(\theta|\lambda)$ et λ un vecteur de paramètres.

Si λ est connu, alors la densité a posteriori de θ est

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)g(\theta|\lambda)}{m(x|\lambda)}$$

où $m(x|\lambda)$ est la distribution marginale

$$m(x|\lambda) = \int_{\Theta} f(x|\theta)g(\theta|\lambda)d\theta$$

Si λ est inconnu, dans l'approche Bayésienne, on considère la hyperdistribution a priori de λ , $\pi(\lambda)$, et nous définissons la distribution a posteriori de θ de la manière suivante :

$$\pi(\theta|x) = \frac{\int f(x|\theta)g(\theta|\lambda)\pi(\lambda)d\lambda}{\int \int f(x|\theta)g(\theta|\lambda)\pi(\lambda)d\theta d\lambda}$$

2 Détection des valeurs aberrantes, la procédure de De alba et Van Ryzin

On considère un échantillon de taille n , $(n-k)$ observations ont été générées par la loi normale $X_r \sim N(\mu, \sigma^2)$ tandis que les k observations restantes suivent $X_r \sim N(\mu, \sigma^2\lambda)$ ($\lambda > 1$). Ce modèle peut encore s'écrire mathématiquement :

$$X_{i_1}, \dots, X_{i_{(n-k)}} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$X_{i_j} \sim N(\mu, \sigma^2\lambda) \quad j = n-k+1 \dots n$$

On considère alors $(X_1, \Lambda_1), \dots, (X_n, \Lambda_n)$ n paires de variables aléatoires réciproquement indépendantes, où $X_r, (r = 1, \dots, n)$ est défini sur l'espace échantillonnel χ et $\Lambda_r, (r = 1, \dots, n)$ sur l'espace des paramètres Θ . Les $\Lambda_r, (r = 1, \dots, n)$ sont supposés avoir une distribution a priori G sur Θ commune et la densité conditionnelle de X_r sachant Λ_r est $f_{\Lambda_r}(x_r), r = 1, \dots, n$.

La règle Bayésienne empirique pour la $r^{\text{ème}}$ observation, $r = 1, \dots, n$, est donnée par $t_n^{(r)}(x_r)$. Si $t_n^{(r)}(x_r)$ est obtenue pour chaque $r = 1, \dots, n$ et que son risque relatif à G est noté par $r^*(t_n^{(r)}, G)$, alors le vecteur, de dimension n , des fonctions de décision, $t_n = \{t_n^{(r)}(x_r) \quad r = 1, \dots, n\}$ est appelé une procédure Bayésienne empirique de décision. Une telle procédure nous permet alors de décider si chaque observation $X_r, (r = 1, \dots, n)$ est une valeur aberrante ou non.

2.1 Description du modèle

On considère n variables aléatoires X_1, \dots, X_n , où pour $\Lambda_r = \lambda$, les X_r suivent la loi normale de moyenne μ et de variance $\sigma^2\lambda$, où μ et σ sont supposés connus. Les Λ_r ont une distribution a priori G définie comme suit :

$$P(\Lambda_r = 1) = p$$

$$P(\Lambda_r = \lambda_0) = 1 - p$$

2.2 L'objectif du test

Tester chaque variable aléatoire X_r si elle est aberrante ou non. C'est à dire tester si $X_r \sim N(\mu, \sigma^2 \lambda_0)$ ou bien $X_r \sim N(\mu, \sigma^2)$ On a donc hypothèses H_0 et H_1 ,
 $H_0 : X_r$ n'est pas une valeur aberrante $X_r \sim N(\mu, \sigma^2)$ $H_1 : X_r$ est une valeur aberrante $X_r \sim N(\mu, \sigma^2 \lambda_0)$
 donc pour chaque X_r on a
 $H_0 : X_r \sim N(\mu, \sigma^2)$ contre $H_1 : X_r \sim N(\mu, \sigma^2 \lambda_0)$

2.3 Description du test

Le test de De alba et Van Ryzin est donné dans le théorème suivant :

Théorème 2.1. Soit $A = \{a_0, a_1\}$ l'espace des actions avec a_i définie comme suit a_i : est décidée en faveur de H_i pour $i = 0, 1$.
 Les fonctions pertes sont données par $L(a_0, 1) = L(a_1, \lambda_0)$. On définit une fonction Δ_n comme suit :

$$\Delta_n(x) = (1 - \hat{p})L(a_0, \lambda_0)f_{\lambda_0}(x) - \hat{p}L(a_1, 1)f_0(x)$$

où $f_\lambda(x)$ est la densité de X quand $\lambda_r = 1$ ou 0 et $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \xi_0 X_r$ tel que

$$\xi_0(X_r) = \frac{\lambda_0 \sigma^2 - (X_r - \mu)^2}{\sigma^2(\lambda_0 - 1)}$$

La règle de décision est $t_n(X_r)$ telle que

$$t_n(X_r) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \Delta_n(X_r) \geq 0, X_r \text{ n'est pas une valeur aberrante} \\ 1 & \text{Sinon } X_r \text{ est une valeur aberrante} \end{cases}$$

Avec le logiciel R, nous avons généré tout d'abord un vecteur de λ_i de taille n et un échantillon de variables aléatoires de taille n de loi normale $N(\mu, \sigma^2 \lambda_i)$. Nous calculons l'estimateur symétrique de p pour appliquer le test pour chaque valeur de l'échantillon. D'après les résultats obtenus, nous remarquons que le test ne détecte pas toutes les valeurs contaminées par contre il identifie certaines valeurs non contaminées comme aberrantes.

2.3.1 Les avantages du test proposé par De alba et Van Ryzin.

Ils testent chaque valeur de l'échantillon ce qui permet de éviter le problème d'effet de masquage. En outre, contrairement à beaucoup d'autres tests, le test détecte l'outlier sans connaître au préalable le lieu de contamination et sans même connaître le nombre d'outliers existants.

2.3.2 Les inconvénients du test proposé par De alba et Van Ryzin.

Le test ne détecte pas toutes les valeurs aberrantes de l'échantillon c'est à dire certaines valeurs contaminées ne sont pas identifiées pas comme outliers .Par contre, il identifie certaines valeurs comme aberrantes alors qu'elles ne sont pas contaminées.

3 Nouveau test de détection des valeurs aberrantes dans un échantillon Gaussien

3.1 Le modèle

Comme le test de De alba et Van Ryzin, on suppose que dans l'échantillon de taille n , $(n - k)$ observations ont été générées par la loi normale $X_r \sim N(\mu, \sigma^2)$ tandis que les k observations restantes suivent $X_r \sim N(\mu, \sigma^2 \lambda^2)$ ($\lambda > 1$). Ce modèle peut encore s'écrire mathématiquement :

$$\begin{aligned} x_{i_1}, \dots, x_{i_{(n-k)}} &\sim N(\mu, \sigma^2) \\ x_{i_j} &\sim N(\mu, \sigma^2 \lambda^2) \quad j = n - k + 1 \dots n \end{aligned}$$

3.2 Description du test

On considère n variables aléatoires X_1, \dots, X_n , où pour $\Lambda_r = \lambda^2$, les X_r suivent la loi normale de moyenne μ et de variance $\sigma^2 \lambda^2$, où μ et σ sont supposés connus. Et les Λ_r ont une distribution a priori G définie de la manière suivante :

$$P(\Lambda_r = 1) = p$$

$$P(\Lambda_r = \lambda_0^2) = 1 - p$$

Pour chaque X_r , on teste $H_0 : X_r \sim N(\mu, \sigma^2)$ vs $H_1 : X_r \sim N(\mu, \sigma^2 \lambda_0^2)$

La statistique de test.

Notons par S la nouvelle statistique de test définie comme suit,

$$S(x) = (1 - p)\alpha f_{\lambda_0}(x) - p\beta f_0(x)$$

telle que $f_\lambda(x)$ représente la densité de x quand $\lambda_r = 1$ ou λ_0^2 , et α et β des constantes positives.

*Si $S(x) \leq 0$ x n'est pas une valeur aberrante
Sinon x est une valeur aberrante*

L'algorithme.

1. Poser Rep le nombre de répétitions, n la taille de l'échantillon, α et β sont des constantes positives.

2. Générer les λ_r qui ont une fonction de répartition G définie comme suit

$$P(\Lambda_r = 1) = p$$

$$P(\Lambda_r = \lambda_0^2) = 1 - p$$

3. Pour $Rep = 1, \dots, n$, générer X_1, \dots, X_n qui suivent la loi $X_r \sim N(\mu, \sigma^2 \lambda_r^2)$

4. Calculer

$$S(x) = (1 - p)\alpha f_{\lambda_0}(x) - p\beta f_0(x)$$

5. Calculer la probabilité $p_1 = p(S(x) > 0)$

3.3 Etude de simulation

Dans ce qui suit, nous allons appliquer l'algorithme cité ci dessus. Nous générons un échantillon de taille $n = 30$ de variables aléatoires Gaussiennes de moyenne $\mu = 0$ et de variance σ^2 , nous considérons $p = 0.8$, $\alpha = 7$ et $\beta = 0.09$, afin de calculer la probabilité p_1 . Deux cas sont considérés ; $\lambda_0 = 4$

λ_r	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	4	1	1	1	1
p_1	0.0546	0.0531	0.0505	0.0545	0.0542	0.3402	0.0536	0.0553	0.0541	0.0516	0.3362	0.0589	0.0565	0.0537	0.0499

λ_r	1	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1
p_1	0.0545	0.0553	0.0541	0.0547	0.3289	0.0539	0.0589	0.0495	0.3396	0.0567	0.0542	0.0498	0.0570	0.0560	0.0545

$$\lambda_0 = 10$$

λ_r	10	1	10	1	1	1	1	10	1	1	1	10	1	1	1
p_1	0.5233	0.0421	0.5310	0.0391	0.0417	0.0410	0.0419	0.5217	0.0427	0.0416	0.0455	0.5212	0.0399	0.0406	0.0410

λ_r	1	10	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	10	1	10
p_1	0.0465	0.5199	0.0421	0.0423	0.0403	0.0423	0.0450	0.0392	0.0413	0.0416	0.5263	0.0465	0.5213	0.0423	0.5264

3.3.1 Interprétations des tables

Nous remarquons que lorsque $\lambda = 1$ la probabilité p_1 , que nous considérerons comme une puissance, est très proche de 0.05. Par contre si $\lambda = \lambda_0 > 1$ alors $p_1 > 0.05$, plus λ_0 augmente et plus la valeur de p_1 croît, p_1 tend à converger vers 1.

4 Comparaison des procédures de détection

Pour mesurer la performance du nouveau test proposé, trois procédures de détection des valeurs aberrantes vont maintenant être comparées en termes de capacité à détecter une seule valeur aberrante.

La comparaison des performances des différentes règles de détection des valeurs aberrantes est donnée dans le tableau suivant. Afin de rendre la comparaison équitable, nous avons adapté la procédure de notre test aux deux autres procédures. Les procédures de détection des valeurs aberrantes considérées sont les suivantes :

- Le test proposé par Ferguson (1961a) [4]

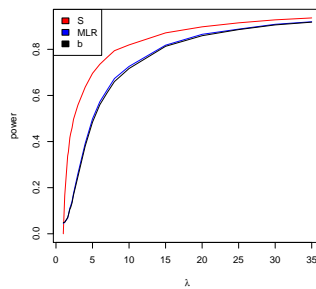
$$b = n \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^2}$$

- Le test du rapport de maximum de vraisemblance proposé par Barnett et Lewis [2]

$$MLR = \max\left(\frac{|X_{(n)} - \mu|}{s(\mu)}, \frac{|\mu - X_{(1)}|}{s(\mu)}\right)$$

où $s^2(\mu) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$, $X_{(n)} = \max(X_i)$, $X_{(1)} = \min(X_i)$

Le graphe au-dessous représente les courbes des puissance des 3 tests



λ	Puissance des 3 tests		
	b	MLR	S
1.0	0.0500	0.0470	0.0000
1.2	0.0489	0.0495	0.0647
1.4	0.0578	0.0585	0.1642
1.6	0.0714	0.0717	0.2499
1.7	0.0764	0.0795	0.2773
1.9	0.1091	0.1106	0.3362
2.0	0.1104	0.1118	0.3592
2.2	0.1387	0.1419	0.3910
2.4	0.1693	0.1774	0.4333
3.0	0.2526	0.2627	0.5114
4.0	0.3878	0.4024	0.6105
5.0	0.4789	0.4919	0.6711
6.0	0.5620	0.5726	0.7169
7.0	0.6109	0.6198	0.7376
8.0	0.6636	0.6719	0.7762
10.0	0.7273	0.7332	0.8097
15.0	0.8080	0.8117	0.8608
20.0	0.8588	0.8648	0.8930
25.0	0.8853	0.8875	0.9107
30.0	0.9088	0.9120	0.9258

4.1 Les avantages de la statistique de test S

Comme avec le test de De alba et Van Ryzin, notre statistique teste chaque valeur de l'échantillon ce qui permet d'éviter le problème d'effet de masquage. En outre, contrairement aux autres tests, notre test détecte l'outlier sans connaître au préalable le lieu de contamination et sans connaître le nombre d'outliers existants.

5 Conclusion

Dans notre travail, nous avons évoqué le test Bayésien empirique de De alba et Van Ryzin qui permet la détection de valeurs aberrantes dans un échantillon Gaussien où peut survenir une dilatation de la variance. Par la suite, nous avons proposé un nouveau test en nous inspirant du test précédent, et en l'appliquant avec une approche classique.

Références

- [1] De Alba, E. and Van Ryzin, J. : An empirical Bayes Approach to Statistics. shifted mean case. In : K. Matusita, cd., Recent Developments in Statistical Inferences and Data Analysis. North-Hollandi, Amsterdam, 33-44.(1980)
- [2] V. Barnett and T. Lewis. Outliers in Statistical Data, JohnWiley & Sons, Chichester, UK, 3rd edition, (1994)
- [3] Hawkins D.M. Identification of outliers. London : Chapman and Hall. p. 19–20.(1980)
- [4] Ferguson, T .S. : On the rejection of outliers, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 253-287.(1961 a)
- [5] Robbins, H. : An empirical Bayes Approach to Statistics. Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob. Univ. of California Press 157-163.(1955)
- [6] Robert, C.P. : Le choix bayésien. Paris : Springer-Verlag France. (2006).



Un algorithme pour le block clustering des séries temporelles

Yamina Khemal Bencheikh^{*1} and Welid Grimes²

¹Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Numériques LMFN, Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences-Université Sétif 1 El Bez
bencheikh-00@univ-setif.dz

²Département de Mathématiques, Faculté des Sciences-Université Sétif 1 El Bez
Grimeswalid1962@yahoo.com

Résumé Le clustering des séries temporelles nous met face à deux grandes problématiques : le choix d'une mesure de comparaison des séquences à analyser d'une part et le choix d'un algorithme de groupement des séries temporelles d'autre part. Un choix efficace de ces deux paramètres permet d'assurer une bonne qualité des partitions obtenues. L'algorithme proposé dans ce papier pour le block clustering fournit une double partition des données, il détecte des groupes ignorés par une simple partition sur les variables. De plus il permet d'exclure les blocs intégralement homogènes, ce qui peut se révéler très utile sur des données de taille importante en particulier sur des séries temporelles.

Mots clés : Séries temporelles, Block clustering , mesure de dissimilarité.

1 Introduction

Dans le domaine du clustering, bien que la plupart des méthodes utilisées cherchent à construire des partitions soit sur l'ensemble des objets soit sur celui des variables séparément, il existe d'autres méthodes du clustering croisé qui considèrent simultanément les deux ensembles. Comparé au clustering classique, en ne privilégiant pas un ensemble sur un autre le clustering croisé est plus efficace pour découvrir des blocs homogènes dans une matrice de données. Ces dernières années, cette approche a suscité un grand intérêt dans différentes communautés scientifiques et dans des domaines variés tels que la fouille de données textuelles, l'analyse des habitudes de consommation, les systèmes de recommandation et la bioinformatique. Dans ce dernier, l'analyse de données transcriptomiques décrivant les expressions de gènes à travers différentes conditions expérimentales, le clustering croisé permet d'identifier des sous-ensembles de gènes co-exprimés uniquement à travers un sous-ensemble de conditions. Il a d'ailleurs été l'objet d'un challenge : la société Netix, dont l'un des objectifs était de réussir à classer simultanément les utilisateurs de cette société de location de dvd et les lms [1].

*Corresponding Author

TABLE 1 – Tableau 1

	1	...	j	...	p
1	X_1^1	...	X_1^j	...	X_1^p
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
i	X_i^1	...	X_i^j	...	X_i^p
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
n	X_n^1	...	X_n^j	...	X_n^p

Différentes approches existent, celles-ci diffèrent dans le type et la structure des blocs recherchés. On distingue le clustering croisé par blocs, le clustering croisé imbriqué et le clustering croisé avec chevauchement. Dans la suite de notre travail, nous nous concentrerons sur le clustering croisé par blocs ou simplement le block clustering [5].

2 Block clustering

L'objectif de la méthode du block clustering est la recherche d'un couple de partitions, l'une sur les individus (les lignes du tableau étudié), l'autre sur les variables (colonnes), tel que la perte d'information due au regroupement soit minimale ; c'est-à-dire telle que la différence entre l'information apportée par le tableau initial et celle apportée par le tableau obtenu après regroupement soit minimale.

Soit I un ensemble de n individus décrits par variables. Les données sont rangées dans un tableau de description (Tableau 1) à n lignes et p colonnes, $X = (X_i^j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

- X_i^j est la valeur prise par l'individu i pour la variable j
- I est un sous ensemble fini contenant n individus.
- J est un sous ensemble fini contenant p variables.
- $P = (P_1 \dots, P_K)$ représente une partition de I en K clusters. $Q = (Q^1 \dots, Q^M)$ représente une partition de J en M clusters.
- $L = \{(\lambda_k^m), k = 1, \dots, K \text{ et } m = 1, \dots, M\}$, l'ensemble des noyaux (dans notre cas des représentants), ces noyaux seront associés aux partitions des deux ensembles I et J .

2.1 Le problème posé

Il s'agit de trouver une partition $P = (P_1 \dots, P_K)$ I en K clusters, une partition $Q = (Q^1 \dots, Q^M)$ de J en M clusters et un ensemble L des représentants à partir d'un tableau de données, tel que le critère d'inertie intra-cluster suivant soit minimum.

$$W(P \times Q, L) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \sum_{i \in P_k} \sum_{j \in Q^m} D(X_i^j, \lambda_k^m)$$

- D Représente la mesure de dissimilarité utilisée pour classer les données.
- λ_k^m Représentant du block de clusters $P_k \times Q^m$.
- $P \times Q = \{P_k \times Q^m, k = 1, \dots, K \text{ et } m = 1, \dots, M\}$
- $P_k \times Q^m = \{X_i^j, i \in P_k, j \in Q^m\}$

3 L'algorithme proposé

L'algorithme utilisé est le suivant : partant d'un élément $(P \times Q, L)$ initial, on fixe Q et on cherche à améliorer P et L , puis on fixe P et on cherche à améliorer Q et L ; on construit ainsi une suite $(P^{(n)}, Q^{(n)}, L^{(n)})$ qui fait décroître le critère W . L'algorithme est donc construit à partir de deux étapes intermédiaires que nous allons préciser.

3.1 Étapes intermédiaires

Soit P et Q un couple de partitions et L le représentant. Fixons Q et cherchons à améliorer la partition P et le représentant L , c'est-à-dire cherchons une partition P' et un représentant L' tels que : $W(P \times Q, L) > W(P' \times Q, L')$.

On peut écrire

$$W(P \times Q, L) = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in P_k} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j \in Q^m} D(X_i^j, \lambda_k^m) \right)$$

Considérons l'algorithme des Nuées Dynamiques [3] suivant :

- Cette fois-ci le tableau de données est défini comme suit :
- X_i^j est une série temporelle correspondant à l'individu i et la variable j .
 - I est un sous ensemble fini contenant n séries temporelles.
 - J est un sous ensemble fini contenant p séries temporelles.

On notera L l'ensemble des séries λ_k^m qui définissent l'ensemble des représentants précédents.

-La mesure D utilisée pour mesurer la proximité entre deux séries temporelles R et C est la mesure Multiscale Dynamic Time Warping (IMs-DTW) [2] définie comme suit :

$$D_{IMS-DTW}(R, C) = \sqrt{\frac{2}{h+h'} \sum_{(i,j) \in CH} (r_i - c_j)^2}$$

$R = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_h)$ et $C = (c_1, \dots, c_j, \dots, c_{h'})$

- h et h' représentent respectivement les longueurs des séries temporelles R et C .
- CH représente le path retenu ou le chemin retenu[4].

Le critère W s'écrit alors de la manière suivante :

$$W(P \times Q, L) = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in P_k} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j \in Q^m} \sqrt{\frac{2}{\text{len}(X_i^j) + \text{len}(\lambda_k^m)} \sum_{(d,l) \in CH} ((X_i^j)_d - (\lambda_k^m)_l)^2} \right)$$

- $\text{len}(X_i^j)$ et $\text{len}(\lambda_k^m)$ représentent respectivement les longueurs des séries temporelles X_i^j et λ_k^m .
- $1 \leq d \leq \text{len}(X_i^j)$ et $1 \leq l \leq \text{len}(\lambda_k^m)$

– CH représente le path retenu [4].

Le critère habituel de la méthode des Nuées Dynamiques défini à partir des éléments que l'on vient de donner est alors la fonction $W(P \times Q, L)$ que l'on cherche à optimiser. Il suffit de préciser ce que deviennent les fonctions f et h d'affectations et g de représentation.

3.2 Fonctions d'affectations f et h (recherche des clusters) et fonction de représentation g (recherche des représentants) :

Le tableau de données est le tableau $X(I, Q)$ défini par les X_i^m :

$$X_i^m = \sum_{j \in Q^m} X_i^j$$

Les individus sont en lignes et les variables en colonnes. On a donc un ensemble de n séries temporelles et M variables (séries). La mesure associée à ce nouveau tableau $X(I, Q)$ est définie par $D_{IMS-DTW}(X_i^m, \lambda_k^m)$, la fonction d'affectation f range alors chaque individu en ligne dans le cluster ayant le représentant le plus proche au sens de la mesure IMS-DTW, en minimisant la quantité :

$$\sum_{m=1}^M D_{IMS-DTW}(X_i^m, \lambda_k^m)$$

Dans la pratique à Q fixée, on obtient donc M matrices de dissimilarités [6] des individus par rapport à chaque cluster Q^m , on regroupe ces M matrices de dissimilarités pour obtenir la matrice finale de dissimilarités des n individus décrits par les M variables, cette dernière permet d'obtenir une nouvelle partition des individus.

De manière symétrique à P fixée, on peut améliorer la partition Q , en calculant K matrices de dissimilarités des P variables sur les K représentants $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_K)$ puis on regroupe ces K matrices pour obtenir la matrice finale (P variables décrites par K individus), cette dernière permet d'améliorer la partition Q des variables.

Quant à la fonction de représentation g , les représentants λ_k^m sont obtenus en sélectionnant à chaque fois le couple (k, m) correspondant au croisement du $k^{\text{ème}}$ représentant en ligne avec le $m^{\text{ème}}$ représentant en colonne.

3.3 Convergence de l'algorithme

L'algorithme est le suivant : A partir d'un triplet $(P^{(0)}, Q^{(0)}, L^{(0)})$ on applique alternativement les deux étapes intermédiaires ; on définit ainsi une suite $(P^{(n)}, Q^{(n)}, L^{(n)})$ qui vérifie :

$$W(P^{(0)} \times Q^{(0)}, L^{(0)}) \geq W(P^{(1)} \times Q^{(1)}, L^{(1)}) \geq \dots \geq W(P^{(n)} \times Q^{(n)}, L^{(n)}) \geq \dots$$

On peut établir à partir de là les propriétés de convergence habituelles. La suite $(P^{(n)}, Q^{(n)}, L^{(n)})$ est stationnaire et la valeur du critère associé $W(P^{(n)} \times Q^{(n)}, L^{(n)})$ décroît strictement jusqu'à la stationnarité. On obtient ainsi une solution localement optimale qui dépend de l'élément de départ choisi. De plus on a proposé qu'à chaque étape le noyau $L^{(n)}$ utilisé est obtenu en sélectionnant à chaque fois le couple (k, m) correspondant au croisement du $k^{\text{ème}}$

représentant en ligne avec le $m^{\text{ème}}$ représentant en colonne. On utilise cette propriété pour simplifier la détermination de l'élément $(P^{(n)} \times Q^{(n)}, L^{(n)})$: il suffit en effet d'avoir un couple $(P^{(0)} \times Q^{(0)})$, le noyau $L^{(0)}$ est alors construit à partir de ces partitions.

Références

- [1] Bennett, J. and Lanning, S. (2007), The netflix prize. In proceedings of KDD cup and workshop, volume 2007, page 35.
- [2] Berndt, D. J. and Clifford, J. (1994), Using dynamic time warping to find patterns in timeseries. AAAI-94 Workshop on Knowledge Discovery in Data bases.
- [3] Diday, E., (1972), Nouvelles méthodes et nouveaux concepts en classification automatique et reconnaissance des formes, Thèse d'état, Université Paris 6.
- [4] Dilmi, M. D., Barthes, L., Mallet, C., (2018), Iterative Multi-Scale Dynamic Time Warping (IMS-DTW) : Estimation de la dissimilarité entre des séries temporelles de précipitation et application à la classification des événements pluvieux. Présentation SAMA 13 mars 2018, Paris-Saclay.
- [5] Govaert, G., (1983), Classification croisée, Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie Paris 6.
- [6] Kaufman, L., Rousseeuw, P.J., (1987), Clustering by means of medoids. In : Dodge Y (ed) Statistical Data Analysis Based on the L1 Norm and Related Methods, pp 405–416.



INFORMATIQUE

Sommaire

V.1	A Reputation, Vehicles and Messages Types Trust Management System in Intelligent Transportation System	434
V.2	Intelligent Cloud Computing Resource Allocation Framework	440
V.3	Towards an Effective Utilization of Resource Units in Multi-User OFDMA Communications	446
V.4	A Study on the Factors Affecting the Quality of Learning Content in the Context of e-learning	452
V.5	Averaging Ensemble Models for Blood Glucose Level Prediction in Type 1 Diabetes	459
V.6	Machine Learning with CBC Test for Early Response Prediction to Neoadjuvant Chemotherapy	466
V.7	Optimisation du Placement des Fonctions Réseaux Virtuelles dans un Environnement Cloud	474
V.8	Classification des Styles d'Apprentissage à base des Machines à Vecteurs de Supports	481
V.9	Système Efficace de Filtrage des Spomments Maghrébins basé sur l'Apprentissage Profond Récurrent	489
V.10	Proposition d'une Architecture GAN pour le Prétraitement et la Classification des Images de la Rétinopathie Diabétique	496



A reputation, vehicles and messages types trust management system in Intelligent Transportation System

Sid Ali Belhocine ^{*1}, Sofiane Aissani ², Abdelkader Chettab³, and Yasmine Chettab⁴

¹LIMED laboratory, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, Bejaia, Algeria.,
sidai.belhocine@univ-bejaia.dz

²LIMED laboratory, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, Bejaia, Algeria.,
sofiane.aissani@univ-bejaia.dz

³LIMED laboratory, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, Bejaia, Algeria.,
abdelkader.chettab@univ-bejaia.dz

⁴LIMED laboratory, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, Bejaia, Algeria.,
yasmine.chettab@univ-bejaia.dz

Abstract : In this paper, we propose a new trust management solution for Intelligent transportation Systems that evaluate the truthfulness degree of a message. Our solution is the only one that takes into consideration message and vehicle type to calculate trust and decide whether we trust the message enough to take it into consideration or not. We define and compute several types of trust along with their reliability to assure that the final trust value is trustworthy and accurate.

Keywords : Trust management, Intelligent transportation system, Vehicle types, Messages types

1 Introduction

Intelligent Transportation System (ITS) is an emerging transportation system that makes use of the advanced technologies that development and research has brought us, such as advanced sensors, information processing, communication and automatic control systems as a way to sense and communicate important and up-to date information regarding the surrounding we humans can't see or acquire when we're on the road, with the purpose of giving us a real-time, accurate and efficient transportation management system, that serves as a safety precautions to navigate and avoid any collision or traffic that could delay us any moment [1].

*Corresponding Author

During its activity a vehicle receives several messages, the problem is how to decide if a message is trustworthy or not. There are several solutions to this problem in the literature, the works [2] [3] [6] used blockchain which helps assure the safety of the data and bringing robustness to the structure. The method based on deep learning in paper [7] offers a better independence from humans to select features, but it requires a lot of computation power and more data to be as equally or more efficient than the usual neural networks. The fake position falsification method used in [8] appears to be super-efficient when it comes to position falsification type of attacks, but not very useful for any other type of attacks, which makes it non reliable in other situations and scenarios. The authors of [4] [5] and [9] follow a reward/punishment strategy which shows very good results in encouraging selfish nodes to adapt cooperative behaviors.

None of the existing solutions takes into consideration the type of vehicle who is sending the message, or the type of message itself, yet this kind of information is essential to know if the message is trustworthy. For example, if a police car sends us a message about congestion, we tend to believe it. It is on this idea that our solution is based. So we propose a confidence calculation method based on the reputation of a vehicle. We break vehicles and messages down into several types, and then we look at the lie rates of vehicle types in each message type.

The rest of this paper is organized as follows. we define the context of our work in the section 2. We present, afterward in Section 3, the proposed solution, In 4 how we plan to evaluate our proposal through simulations. Finally, Section 5 concludes this paper.

2 Context and assumptions

In an intelligent transportation system, the different nodes send several types of message, on congestion, on operational safety, on digital keys and certificates, etc. The problem that arises is that the various vehicles can send false messages, either to clear the road, to be elected leader of a group, etc. When a vehicle A send a message M to a vehicle B, B have to decide if it takes it in consideration or no, so B needs to compute the trust degree of the message, it is in this perspective that our work fits.

In this paper, we assume that there are central entities which determine whether the messages are false, true or unclassifiable, this information is then communicated to the RSUs which are responsible for communicating it to the concerned vehicles.

3 The proposed solution

In this section, we present the necessary steps to calculate the trust degree of message. When a node A send a message M to a node B, B have to compute the trust degree of the message $M(T)$. In order to achieve this, we need to go through different steps and obtain different values. First, we calculate three types of malice degrees of vehicles : Local malice degree $MD(BinA)$ which is based on the experience of B with A. Friend based malice degree $FMD(BinA)$, which is based on the experience with the vehicle A of the vehicles that B trusts. A global malice degree $GMD(inA)$ which is based on the reputation of the node A in the network.

We also take into consideration the message and vehicle type in order to compute these malice degrees, this information are very useful to obtain a more reliable value.

3.1 Local malice degree

The local malice degree is based on the personal experience that a vehicle has towards an another vehicle, we only use the messages exchanged between them to compute it value.

$$MD(BinA) = \frac{LN(BinA)}{MN(BinA)}$$

With :

- LN(B in A) : the number of lies in the messages sent from A to B.
- MN(B in A) : the number of messages sent from A to B.

3.2 Friends based malice degree

The friend based malice degree uses the malice degree that the friends of the receiving vehicle (B) have towards the sending vehicle (A).

The friends of a vehicle are those for which it has a malice degree less than or equal to a threshold.

May :

- Frds : the friends of the vehicle B.
- MDFrds : the malice degrees that the friends have towards A.
- FrdsMsgNbr : the number of messages that A have sent to each friend of B.
- RC : the reliability coefficient of the malice degree.

The friends based malice degree that B has towards A is :

$$\forall i \in [1, Frds] : FMD(BinA) = \frac{\sum_{i=1}^{Frds} (MDFrds_i * RC_i)}{\sum_{i=1}^{Frds} (RC_i)}$$

3.3 Global malice degree

The global malice degree $GMD(inA)$ is computed the same way as the local malice degree $MD(BinA)$ but we use all the messages that A has sent to all vehicles and not only B.

3.4 Final malice degree

To compute the final malice degree, we will use all the above computed type of malice degrees as the following :

May :

$MD(BinA)$: the local malice degree

$FMD(BinA)$: the friends based malice degree

$GMDinA$: the global malice degree

Neutral : the Neutrality (0.5)

And their respective reliability :

R_L : the reliability of the local malice degree

R_F : the reliability of the friends based malice degree

R_G : the reliability of the global malice degree

The formulas (1) (2) (3) represent the reliability of the new computed trust :

$$R_L \times R_L + R_F \times (1 - R_L) \dots(1)$$

$$(1) \times (1) + R_G \times (1 - (1)) \dots(2)$$

$$(2) \times (2) + 0.5 \times (1 - (2)) \dots(3)$$

The formulas (A) (B) (C) represent the final malice degree :

$$MD(BinA) \times R_L + FMD(BinA) \times (1 - R_L) = (A)$$

$$(A) \times (1) + GMD(inA) \times (1 - (1)) = (B)$$

$$(B) \times (2) + Neutral \times (1 - (2)) = (C)$$

3.5 Message trust degree

The message trust degree is the value attributed to the chosen truth value (lie or truth) of the message. To compute it, we first need to have the lie percentage value for the message type in the lies made.

We have the following statement :

$$M(T) = 1 - lpi$$

$$\sum_{i=1}^{nbrMT} lpi.ri = FinalMD(BinA) \dots(1)$$

With :

- lpi : the lie probability of each message type for the sender vehicle type.
- ri : the different message ratios for the sender vehicle type.
- FinalMD(B in A) : the final malice degree of the vehicle sender at the current time.
- nbrMT : the number of message types

May lri be the percentage of message type i of the lies made

$$\sum_{i=1}^{nbrMT} lri = 1$$

$$\sum_{i=1}^{nbrMT} lri.FinalMD(BinA) = FinalMD(BinA) \dots(2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{nbrMT} (Lpi.ri) &= FinalMD(BinA) \dots (1) \\ \sum_{i=1}^{nbrMT} (Lri.FinalMD(BinA)) &= FinalMD(BinA) \dots (2) \end{aligned} \right\} \sum_{i=1}^{nbrMT} (Lpi.ri) = \sum_{i=1}^{nbrMT} (lri).FinalMD(BinA)$$

$$\sum_{i=1}^{nbrMT} (Lpi.ri) = \sum_{i=1}^{nbrMT} (lri).FinalMD(BinA)$$

Since each lpi defines its respective lri (type wise), we have :

$$\forall i \in [1, nbrMT] / nbrMT \in \mathbb{N} \quad lpi.ri = lri.FinalMD(BinA)$$

$$lpi = \frac{lri.FinalMD(BinA)}{ri}$$

$$\implies M(T) = 1 - \frac{lri.FinalMD(BinA)}{ri}$$

4 Simulations

During our researches we came across many data-sets, where most of them were either too detailed or poor, as we were unable to find a data-set that could fit both our goal and needs, we decided to generate our own data-set in order to achieve the abstractions we wanted to have.

The data-set we generated includes 2 sub-data-sets : **1) Vehicles data-set** : a specific number of vehicles (around 400 to 600) that are going to roam and communicate with nearby vehicles. **2) Messages data-set** : a collection of messages of different types that a vehicle sends to other vehicles during communications (the size of the data-set can vary from 500000 to 600000 messages).

5 Conclusion

In this paper, trust management in intelligent transportation system is considered. The main contribution of this paper is a solution based on multiple malice degrees computation which helps to properly define a reliable trust value, we also used the vehicle and message type to obtain a more reliable value and also took different alternatives for all the possible scenarios. In the future work we have to compare the results of our solution to some other existing solutions.

Acknowledgment

This work has been sponsored by General Directorate for Scientific Research and Technological Development, Ministry of Higher Education and Scientific Research (DGRSDT), Algeria.

References

- [1] G. Dimitrakopoulos and P. Demestichas, "Intelligent Transportation Systems," in *IEEE Vehicular Technology Magazine*, vol. 5, no. 1, pp. 77-84, March 2010, doi : 10.1109/MVT.2009.935537.
- [2] F. Kandah, B. Huber, A. Altarawneh, S. Medury and A. Skjellum, "BLAST : Blockchain-based Trust Management in Smart Cities and Connected Vehicles Setup," 2019 IEEE High Performance Extreme Computing Conference (HPEC), pp. 1-7, 2019, doi : 10.1109/HPEC.2019.8916229.
- [3] G. Baldini, J. L. Hernández-Ramos, G. Steri and S. N. Matheu, "Zone Keys Trust Management in Vehicular Networks based on Blockchain," 2019 Global IoT Summit (GloTS), pp. 1-6, 2019, doi : 10.1109/GIOTS.2019.8766375.
- [4] X. Chen, J. Ding and Z. Lu, "A Decentralized Trust Management System for Intelligent Transportation Environments," in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 1, pp. 558-571, Jan. 2022, doi : 10.1109/TITS.2020.3013279.
- [5] P. K. Singh, R. Singh, S. K. Nandi, K. Z. Ghafoor, D. B. Rawat and S. Nandi, "Blockchain-Based Adaptive Trust Management in Internet of Vehicles Using Smart Contract," in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 3616-3630, June 2021, doi : 10.1109/TITS.2020.3004041.
- [6] N. Malik, P. Nanda, X. He, et R. P. Liu, "Vehicular networks with security and trust management solutions : proposed secured message exchange via blockchain technology", in *Wireless Netw.*, vol. 26, no 6, p. 42074226, August 2020, doi : 10.1007/s11276-020-02325-z.
- [7] Y. Zeng, M. Qiu, D. Zhu, Z. Xue, J. Xiong and M. Liu, "DeepVCM : A Deep Learning Based Intrusion Detection Method in VANET," 2019 IEEE 5th Intl Conference on Big Data Security on Cloud (BigDataSecurity), IEEE Intl Conference on High Performance and Smart Computing, (HPSC) and IEEE Intl Conference on Intelligent Data and Security (IDS), pp. 288-293, 2019, doi : 10.1109/BigDataSecurity-HPSC-IDS.2019.00060.
- [8] P. K. Singh, S. Gupta, R. Vashistha, S. K. Nandi, et S. Nandi, "Machine Learning Based Approach to Detect Position Falsification Attack in VANETs ", in *Security and Privacy*, vol. 939, S. Nandi, D. Jinwala, V. Singh, V. Laxmi, M. S. Gaur, et P. Faruki, Éd. Singapore : Springer Singapore, p. 166178, 2019, doi : 10.1007/978-981-13-7561-3.13.
- [9] N. Fan et C. Q. Wu, "On trust models for communication security in vehicular ad-hoc networks ", in *Ad Hoc Networks*, vol. 90, p. 101740, July 2019, doi : 10.1016/j.adhoc.2018.08.010.



Intelligent Cloud Computing Resource Allocation Framework

Djamila Boukredera ¹, Karima Adel-Aissanou ², Lydia Bechroune³, and Zidane Aghouiles³

¹Laboratory of Applied Mathematics, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria,
djamila.boukredera@univ-bejaia.dz

²Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
karima.aissanou@univ-bejaia.dz

³Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria

Abstract : In this paper, we present a new agent-based resource allocation approach for Cloud Computing environment. Our objective is to design an allocation strategy that aims to increase the profit of the resource providers while minimising the loss rate of impatient clients. To do so, the main entities of our system are defined as agents that interact with each other in order to deliver the requested cloud services with the required quality of service. In addition, to deal with impatient clients, we introduce the concept of a VIP treatment that gives its beneficiary a priority access to service providers. A negotiation protocol is hence proposed that allows an impatient client to negotiate a VIP treatment in order to be served as soon as possible. In return, these clients have to pay a premium.

Keywords : Resource Allocation ; Cloud Computing ; Multi-Agent Systems ; Queuing systems ; Negotiation protocol

1 Introduction

Cloud Computing is a computing paradigm that allows remote access to real-time scalable resources. In cloud computing, resources are often scarce and leased by providers on demand by the consumers. The cloud has then to avail all the demanded services to end-users through an efficient resource allocation mechanism that has to be fair between clients and achieve profits. But due to the dynamic availability of finite resources, and the increasing demand of cloud end-users, it is very difficult for cloud providers to provide all the requested services in the given time. This can lead to long waiting times, lower quality of service, and a significant loss of so-called impatient clients. The proposal of this paper seeks to build an agent-based model for an efficient distributed resource allocation strategy that prices resource usage and maximizes provider profit while limiting the loss of impatient clients. A

*Corresponding Author

negotiation protocol is devised to allow impatient clients to benefit from a VIP treatment for an additional premium. An impatient client who accepts the deal would not join the queue and could be served as soon as any of the servers becomes available. However, a client who does not accept this concept may join a FIFO (First In First Out) queue with a certain probability or leave the system definitively. The VIP client has a non preemptive priority over the queued clients.

2 Related Works

Resource allocation in cloud computing is a tremendous challenging problem that has been extensively studied in several research works. Queuing theory have widely been used in cloud computing environment. In [6], authors have proposed a cloud architecture that consists of connecting two serially queues based on the non-preemptive priority discipline. The aim of this work is to reduce the total waiting time. In [5], authors have considered a Markovian bulk-service queue for cloud computing architecture to model different types of customers requesting a public cloud-based service, with the aim of improving quality of service in terms of waiting time. Furthermore, agent-based cloud computing is an emergent discipline whose goal is to provide cloud computing solutions built on a set of software agents that can improve cloud resource utilization and service management. Indeed, autonomous agents could make clouds more efficient in allocating resources. In [2], a multi-agent system is proposed to assist in determining the best resources for consumers and to create negotiation method among cloud providers and users for fully exploiting the cloud's capabilities. In [1], a distributive approach based on a multi-agent system is proposed for finding trustworthy cloud services and ensuring intelligent cloud service discovery from trusted providers. In [4], authors have proposed a multi-agent system to improve the resource utilisation by optimising the resource provisioning. In [3], a new resource allocation model based on an intelligent multi-agent system and reinforcement learning method is presented to optimize resource allocation in the cloud. In our model, we propose to couple the two approaches, namely queuing systems for performance evaluation of our proposal and multi-agent systems for an intelligent resource management.

3 Intelligent Cloud Resource Allocation Framework

In our model, we consider three main roles : cloud clients, the broker and service providers. In the following, we describe in detail the structure and operation of our model.

3.1 System Model Description

We consider a cloud environment with N servers assumed to be identical and any request could be served by any idle server. Upon its arrival, a client submit a service request to the cloud provider. If there is a free server then the client is immediately served. Otherwise, he is informed about the estimated waiting time to be served and should then choose to join the queue or leave the system definitively. On the other hand, in order to reduce the loss rate of impatient clients, a VIP treatment is proposed to them to be given priority over the

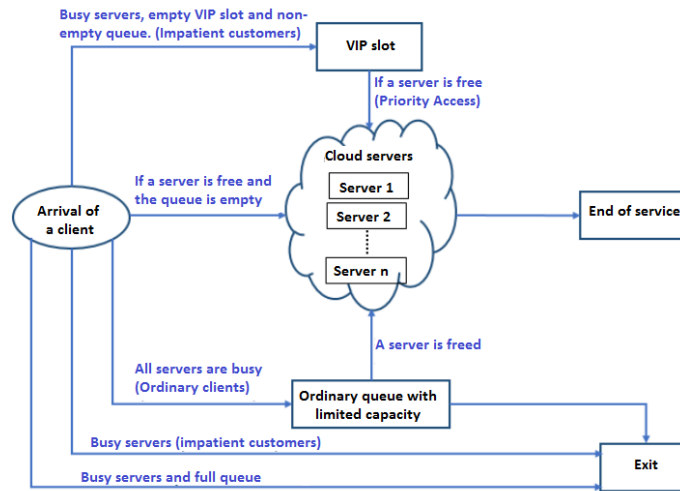


FIGURE 1 – System Model Description

queued clients. However, only one client can benefit from this type of treatment at a time. The impatient client can either accept or refuse such offer. In the first case, a higher price is then negotiated and in case of agreement the VIP client will be served as soon as one of the servers becomes available. Clients in the queue are only able to access servers when they are available. They may leave after joining the queue without getting the service due to their impatience and may return as new clients for a VIP offer. The cloud computing environment studied in this paper appears in Figure 1 where the different possible scenarios that can occur are illustrated.

3.2 Queuing Model

In this section, we consider an $M/M/N/R$ queue with server failures to model cloud management under our proposal. In the following, jobs represent the client requests as described in the above sections.

Jobs arrive at servers, from different clients independently according to the Poisson distribution of rate λ . The service times for each job are independent and identically distributed random variables with an exponential distribution with rates μ . There are N number of servers in the cloud system and the total capacity of the system is R , i.e. the buffer size for waiting jobs is equal to $R - N$. If a job arrives at the cloud system and finds at least one of the servers is free, the work is directly taken over by one of the free servers; otherwise, if all the servers are busy and the queue is sufficient to accept incoming work, it can join the queue with probability p or decide to leave the system with probability $(1 - p)$ (impatient customer). The arrival of a VIP client is considered as a server failure. Servers are subject to downtime when free. As soon as a server breaks down, it is immediately sent for repair which correspond to serving a VIP client. The failures take place according to a Poisson process with parameter β : The repair time of the servers, has an exponential law α . This modeling

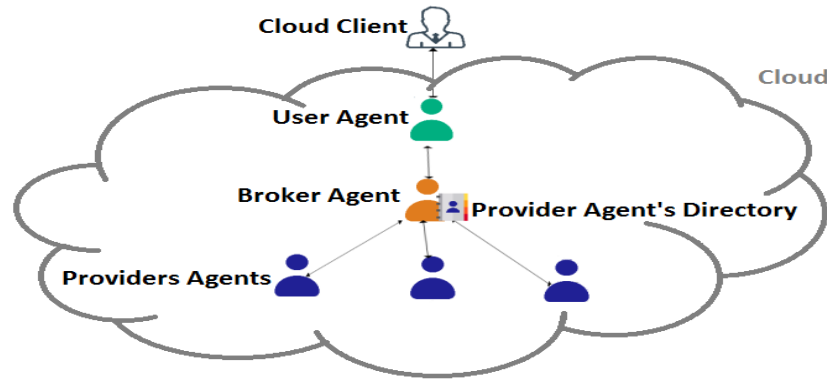


FIGURE 2 – Multi-agent architecture for resource allocation in cloud computing

is given here to allow the performance evaluation of our proposal and to compare it with the numerical results of the simulation. It also allows to obtain exact expressions showing the relation between the various parameters of the system and the performances, thus, to have the possibility of managing them.

3.3 Multi-Agent Model Architecture

Agent technology is a growing methodology in cloud computing environment. Multi-agent systems (MAS) are very recommended for the modeling of evolving and open systems that are dynamically modified. We propose a MAS architecture based on three main roles of agents : *Client agent*, *Provider Agent* and *Broker Agent* as illustrated in Figure 2. The agents of our resource allocation model are as follows :

- **Client Agent** : It represents the human cloud user in the cloud environment. It is responsible for identifying the resources and services demanded by the user and submitting the resulting request to the Broker Agent. It is also responsible to return allocation results to the corresponding user.
- **Provider Agent** : It represents the service provider in the cloud environment. It is responsible for maintaining information on the state of the resource and its characteristics. It is also responsible for managing the resource (allocation, release). For each physical server, there is a service provider agent. It keeps the Broker Agent informed about its server's availability.
- **Broker Agent** : It is the key entity of our system who supervises the whole allocation process. It manages the client waiting queue and tracks the status of resources to keep up to date the resources directory that stores all information about all physical servers. Its main role is to process client demands by allocating them the requested resources if they are available, otherwise it offers them the choice to wait in the queue or to leave the system. It is also responsible for initiating a negotiation protocol with impatient clients to discuss a VIP treatment against a premium to be paid. The broker agent is in permanent interaction with the other two types of agents in order to ensure an efficient and real time management of the cloud resources.

3.3.1 Operation of the Proposed Multi-Agent System

There are several scenarios but for the sake of space we will limit ourselves to the description of the scenario where the broker agent negotiates a VIP treatment with an impatient customer. Initially, the cloud client agent sends a request to the broker agent asking for a service. The broker agent checks the availability of the servers, the number of the waiting clients and the status of the VIP place. In this scenario, all the servers are occupied, the queue is not empty and the VIP place is free. The Broker Agent informs the corresponding client Agent about the situation and lets him choose to join the queue or to negotiate a VIP treatment. In case the client is impatient and interested in this offer then a negotiation protocol is established and a service premium is negotiated. If the negotiation ends successfully the concerned client joins the VIP slot waiting for the next free server. Otherwise it leaves the system definitely. With this strategy, we ensure to minimize the loss of impatient customers while increasing the broker agent profit.

4 Experiment and Results

In order to implement our MAS model, we use JADE platform. Several scenarios were conducted but the main important one concerns the negotiation protocol between the broker and an impatient client. Figure 3 illustrates the message exchange between the three types of agents in our system. It is assumed that all servers are busy, the queue is not empty and the VIP slot is free. After receiving a REQUEST message from a client agent, the broker agent replies by an INFORM message to inform him about the waiting time for its service to be processed. As the waiting time is quite long, the broker agent sends a PROPOSE message to the client agent to propose him a VIP treatment allowing to be served as soon as a server becomes free for a premium payment. In this scenario, the client agent accepts the proposal by sending an ACCEPT message. In another scenario, the client agent may refuse the proposal by sending a REJECT-PROPOSAL message, deciding either to join the waiting queue or to leave the system. All the experiment scenarios carried out on JADE platform indicates that the proposed architecture is feasible and efficient.

5 Conclusion

In this paper, we have presented an intelligent cloud resource allocation framework, based on a set of intelligent communicating agents and relying on a negotiation mechanism, aiming to reduce the loss rate of impatient clients while increasing the profit of the providers agents. Our contribution involves three types of agents : client agent, broker agent, and provider agent. To implement our system, we used the Java programming language, to design the human-machine interfaces, and the JADE platform to build the agents. Several experiments were carried out on Jade platform and the obtained results state that the proposed model is sound and meets the target objectives. For future works, we intend to improve our proposal by considering the impatient clients as queuing system with an optimal scheduling algorithm.

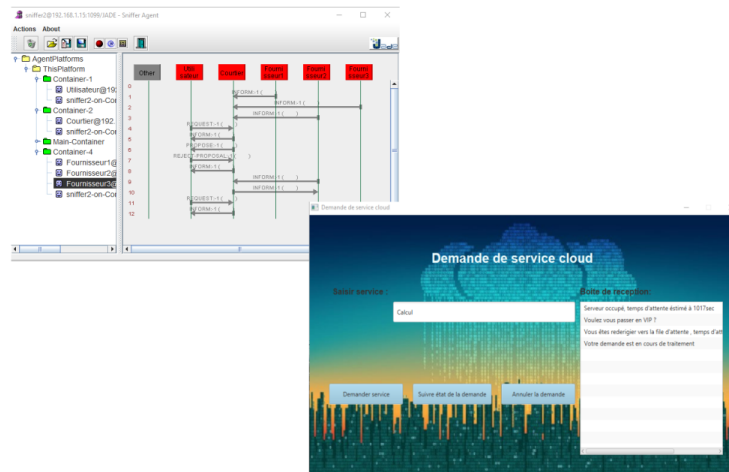


FIGURE 3 – The messages exchange between the three agents of the system in the case when the server is busy, the queue is not empty and the VIP slot slot is free.

Acknowledgements

This work has been sponsored by General Directorate for Scientific Research and Technological Development, Ministry of Higher Education and Scientific Research (DGRSDT), Algeria.

References

- [1] Akinwunmi, A.O., Olajubu, E.A., Aderounmu, G.A. : A multi-agent system approach for trustworthy cloud service discovery. *Cogent Engineering* **3**(1), 1256084 (2016)
- [2] Alwadan, T. : Cloud computing and multi-agent system : Monitoring and services. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology* **96**(05) (2018)
- [3] Belgacem, A., Mahmoudi, S., Kihl, M. : Intelligent multi-agent reinforcement learning model for resources allocation in cloud computing. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences* (2022)
- [4] Mahmoud, A.A., Mustafa, D., Yaser, J., Qutaibah, A. : Towards improving resource management in cloud systems using a multi-agent framework. *International Journal of Cloud Computing* **5**(1-2), 112–133 (2016)
- [5] Santhi, K., Saravanan, R. : Performance analysis of cloud computing bulk service using queueing models. *International Journal of Applied Engineering Research* **12**(17), 6487–6492 (2017)
- [6] Santhi, K., Saravanan, R. : Performance analysis of cloud computing using series of queues with erlang service. *International Journal of Internet Technology and Secured Transactions* **9**(1-2), 147–162 (2019)



Towards an Effective Utilization of Resource Units in Multi-User OFDMA Communications

Saloua Brahmi*¹ and Mohand Yazid²

^{1,2}LaMOS Research Unit, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, Algeria,
saloua.brahmi@univ-bejaia.dz , mohand.yazid@univ-bejaia.dz

Abstract : The Orthogonal Frequency Division Multiple Access (OFDMA) technology is now available in the newest version (ax) of the IEEE 802.11 standard to enable Multi-user (MU) communications in High Efficiency (HE) Wireless Local Area Networks (WLANs). The main characteristic of this technology is the division of a single 20 MHz transmission channel into numerous smaller transmission sub-channels known as Resource Units (RUs), which will be allocated by the Access Points (AP) to the stations (STAs) that are associated with it in order to ensure MU OFDMA communications. Because the data are of different sizes and the RUs are of different types, synchronization of multiple data streams becomes an issue. In this paper we propose an Effective Utilization of Resource Units (EU-RUs) in WLAN networks-based OFDMA MU transmission technique. In order to use RUs efficiently and prevent wasting bandwidth, we incorporate data aggregation in the simultaneous transmission of several data streams, as well as the inclusion of padding bits if necessary. The performance evaluation of the proposed EU-RUs protocol demonstrates that our protocol improves the UL throughput as well as it reduces the UL loss rate.

Keywords : High Efficiency WLANs ; IEEE 802.11ax Standard ; OFDMA Transmission Technique ; Multi-User Communications ; effective utilisation ; Performance Evaluation and Comparison.

1 Introduction

802.11ax is a new IEEE standard that was released in 2014 for High Efficiency (HE) Wireless Local Area Networks (WLANs) with the goal of establishing a large user connection, enhanced throughput, and effective utilization of radio channel [1]. To deal with intensive WLAN deployment, the 802.11ax task group has worked hard to improve overall spectrum efficiency by adopting the physical layer technique of Orthogonal Frequency Division Multiple Access (OFDMA) [2].

OFDMA is one of the new transmission techniques adopted in the 802.11ax standard to support MU communications [3]. Its primary premise is to divide a 20 MHz transmission channel into several sub-carriers ; each set of sub-carriers generates a small sub-channel

*Corresponding Author

known as Resource Unit (RU). In fact, depending on the type of RUs used, there are multiple alternative configurations for a 20 MHz transmission channel : 26-RU, 52-RU, 106-RU, and 242-RU [4], which are assigned by the Access Points (AP) to the stations (STAs) connected with it for transmitting multiple data streams simultaneously [5].

According to the transmission sense of the communication, there are two types of traffic in MU OFDMA communications : downlink and uplink MU OFDMA. In the first type, the AP simultaneously sends several data streams to several stations of the same Basic Service Set (BSS) through different RUs. In the second type, by contrast, several stations simultaneously send several data streams to the AP on different RUs which are allocated to them [6]. In our study, we focused on MU OFDMA communication in the uplink sense .

The RUs and data in MU OFDMA transmissions are of different sizes [7], resulting in differing simultaneous data transmission timings, which creates a synchronization problem. The challenge then is how to effectively use these allocated RUs during the simultaneous data transmission.

The remainder of this work is structured as follows : first, we offer a quick description of some existing studies in the literature, second, we describe our proposition, followed by an evaluation of the proposal's performance, and finally, we conclude.

2 Related work

Recently, numerous research involving the combination of OFDMA and Medium Access Control (MAC) has been done. In [8] the authors propose the OFDMA-based Multiple Access for IEEE 802.11ax (OMAX) protocol, in which they propose the notion of fast backoff to decrease the waiting backoff time inherent in competitive access. The OMAX is based on the Distributed Coordination Function (DCF) protocol and the enhanced Request To Send/Clear To Send (RTS/CTS) mechanism for reducing overheads. Despite this, data loss remains since collisions are unavoidable. In [9] the competition is less increased because it suggests a hybrid access to gather UpLink (UL) requests, but it makes no modifications in terms of employing RUs compared to the old protocol.

Among the first protocol which is interested in the use of the different RUs as well as it considers the variable length of the data, [10] proposes the high throughput RU assignment scheme (HiTRAS). To allocate the RUs to the different STAs in the UL transmission, it uses the different RU allocation scheme that composes the 20MHz transmission channel, but to synchronize the transmission of the different UL data streams, it first proposes the degradation of the transmission rate, then adds padding bits if necessary, which implies an underuse of RUs. To ensure quality of service, the authors of [11] suggest a Double Random Access QoS Oriented OFDMA (DRA-OFDMA) MAC Protocol, this protocol is an improvement of the OMAX protocol. It works as follows : The first random stage is used to gather UL requests from all STAs, while the second random stage is reserved for STAs having video data to send their data through RU-26. Since this protocol it only uses RU-26 for data transmission this generates a waste of RU not use.

3 Proposal

In this section, we propose an Effective Utilization of Resource Units (EU-RUs) protocol for IEEE 802.11ax WLAN networks-based OFDMA Multi-User communications, in order to efficiently use RUs when transmitting different data streams in UL MU OFDMA communications. The EU-RUs protocol contains two main phases, which are depicted in Figure 1 : signaling phase and UL transmission and acknowledgment phase.

During the signaling phase, the AP transmits a Buffer Status Report Poll (BSRP) Trigger frame (TF) after getting access to the transmission channel to enable the STAs to communicate their request. After SIFS, each STA with non-empty queue randomly chooses a RU-26 and sends it BSR request. The AP then allocates the various RUs to the STAs that successfully transmitted their BSRs and sends a TF to notify them.

During the UL transmission phase, the STAs designated in TF simultaneously send their data streams with data aggregation in order to effectively use their assigned RUs, then they add padding bits if necessary to synchronize the simultaneous transmission of different data streams. When the AP receives the various data streams, it acknowledges them with a block ACK.

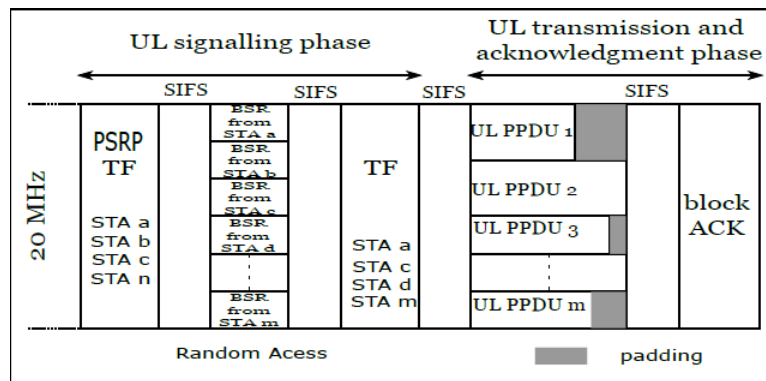


FIGURE 1 – EU-RUs protocol

4 Performance evaluation

In this part, we evaluate and compare the proposed EU-RUs protocol's performance with that of the HiTRAS protocol. To do this, we track the following performance metrics :

- The UL throughput : it represents the average amount of UL data sent (in Kilobits) per communication cycle.
- The UL loss rate : it represents the average amount of UL padding bits added (in Kilobits) per communication cycle.

We used the Matlab programming language to implement the operation rules of the EU-RUs and HiTRAS protocols in order to get the above-mentioned measurements. We utilized the parameters indicated in Table 1 as input data to perform the simulations.

TABLE 1 – Simulation parameters.

Parameter	Value	Parameter	Value
Data Packet PHY rates (Mb/s)	11.8, 23.5, 50, 114.7	Channel Bandwidth	20 MHz
Control Packet PHY rates (Mb/s)	0.9, 1.8, 3.8, 8.6	type of RU	26, 52, 106, 242
Short Inter-Frame Space (SIFS)	16 μ s	Gard interval	0.8 μ s

In figure 2, we compare the UL throughput of the EU-RUs protocol to that of the HiTRAS protocol based on the number of stations in the network. We note that until 25 STAs in the network, the UL throughput grows with the number of STAs for both protocols; after that, we see a decline in the UL throughput due to a decrease in the number of STAs that randomly access the channel to submit their UL request. However, because to the use of data aggregation, our approach still provides higher UL throughput.

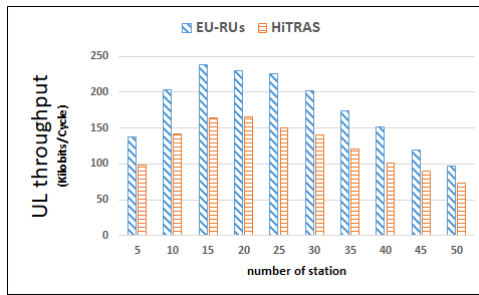


FIGURE 2 – UL throughput versus number of stations.

In figure 3, we evaluate the UL loss rate of EU-RUs protocol and compare it with HiTRAS protocol according to the number of stations in the network. We show that the HiTRAS protocol's UL loss rate is high and follows the growth of its UL throughput, but our protocol adds minimal padding bits regardless of network size, which is related to the usage of data aggregation.

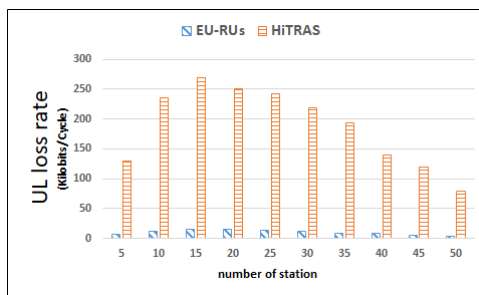


FIGURE 3 – UL loss rate versus number of stations.

5 Conclusion

In this paper, we focus our contribution on effective utilization of resource units in IEEE 802.11ax WLAN networks-based OFDMA Multi-User communications, since the simultaneous transmission of several data streams occurs in OFDMA MU communications through the various RUs.

In this paper, we have proposed a protocol that uses data aggregation to efficiently use the RUs during the transmission of the various data streams, then adds the padding bits if necessary to assure the latter's synchronization. The performance evaluation of the proposed EU-RUs protocol demonstrates that our protocol improves the UL throughput as well as it reduces the UL loss rate compared with those of HiTRAS protocol.

References

- [1] Brahmi, S., Yazid, M., Omar, M. : Multiuser access via OFDMA technology in high density IEEE 802.11 ax WLANs : a survey. In 2020 Second International Conference on Embedded & Distributed Systems, IEEE, November 2020, pp. 105-110.
- [2] IEEE standard for information technology-telecommunications and information exchange between systems-local and metropolitan area networks-specific requirements, part 11 : Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications : Amendment 6 : Enhancements for High Efficiency WLAN, IEEE Standard 802.11ax draft 3.0, 2018.
- [3] Brahmi, S., Yazid, M. : Towards a Hybrid Access to Resource Units in Multi-user OFDMA Communications. In International Conference on Artificial Intelligence in Renewable Energetic Systems, Springer, Cham., November 2021, pp. 421-429.
- [4] Brahmi, S., Yazid, M. : Towards an Efficient Allocation of Resource Units in Multi-user of DMA Communications. In International Conference on Artificial Intelligence in Renewable Energetic Systems, Springer, Cham., November 2021, pp. 536-544.
- [5] Deng, D. J., Lin, Y. P., Yang, X., Zhu, J., Li, Y. B., Luo, J., Chen, K. C. : IEEE 802.11 ax : highly efficient WLANs for intelligent information infrastructure. IEEE Communications Magazine, **55**, 12, 52-59 (2017).
- [6] Afaqui, M. S., Garcia-Villegas, E., Lopez-Aguilera, E. : IEEE 802.11 ax : Challenges and requirements for future high efficiency WiFi. IEEE wireless communications, **3**, 24, 130-137 (2016).
- [7] Moktefi, M., Yazid, M., Bouallouche-Medjkoune, L., Benlala, W. : An OFDMA MAC Protocol Aggregating Variable Length Data in the Next IEEE 802.11 ax Standard. In CITSC, November 2019, pp. 9-13.
- [8] Qu, Q., Li, B., Yang, M., Yan, Z. : An OFDMA based concurrent multiuser MAC for upcoming IEEE 802.11 ax. In 2015 IEEE wireless communications and networking conference workshops, IEEE, march 2015, pp. 136-141.
- [9] Lee, J., Kim, C. : An efficient multiple access coordination scheme for OFDMA WLAN. IEEE Communications Letters, **21**, 3, 596-599 (2016).

- [10] Wu, M., Wang, J., Zhu, Y. H., Hong, J. : High throughput resource unit assignment scheme for OFDMA-based WLAN. In 2019 IEEE Wireless Communications and Networking Conference, IEEE, April 2019, pp. 1-8.
- [11] Zhou, R., Li, B., Yang, M., Yan, Z., Yang, A. : DRA-OFDMA : double random access based QoS oriented OFDMA MAC protocol for the next generation WLAN. *Mobile Networks and Applications*, **24**, 5, 1425-1436 (2019).



A study on the factors affecting the quality of learning content in the context of e-learning

Youssef Abda , Zohra Mehenaoui , Rochdi Boudjehem , and Yacine Laffi 

¹LabSTIC Laboratory, University of 8 Mai 1945, Guelma, Algeria,
abda.youcef@univ-guelma.dz

²LabSTIC Laboratory, University of 8 Mai 1945, Guelma, Algeria,
mehenaoui.zohra@univ-guelma.dz

³LabSTIC Laboratory, University of 8 Mai 1945, Guelma, Algeria,
boudjehem.rochdi@univ-guelma.dz

⁴LabSTIC Laboratory, University of 8 Mai 1945, Guelma, Algeria,
laffi.yacine@univ-guelma.dz

Abstract : In this paper, we present an approach for assessing the quality of learning content based on factors affecting its quality. Teachers can examine the quality of their learning content and then work to improve its quality if it is poor. The proposed approach is included in a system consisting of four main parts : the learning environment, the learning content analysis manager, the learning content assessment manager, and the visualization and intervention manager. Understanding how quality factors affect learning content in e-learning is essential for success in implementing e-learning. We collected 122 answers from university professors at the University of 8 May 1945 from Guelma in Algeria, which applies the e-learning platform based on Moodle. Out of several quality factors for learning content, we found only 3 (three) significantly affecting the quality of educational content - the description, the path of presentation, and the information provided. The results show that working to provide these factors correctly will increase the value of the quality of learning content and thus improve the quality of the e-learning platform.

Keywords : Quality of learning ; Adaptive Learning ; e-Learning ; Learning content

1 Introduction

Quality is a measure of the evaluation of the product or service provided and the estimation of its degree of deviation from possible defects or deficiencies, and is achieved through a serious commitment to the criteria that are measured and approved to achieve them. The quality was defined according to the ISO criterion. ([1,2]). Educational service is one of the most important areas of service in the services sector. In this regard, the increase in the quality of higher education in universities serves the purpose of training learners individually to provide society with the maximum benefit in their professional field. Considering that e-learning

is one of the most important services provided to the learner, the product it provides to the learner is the educational content. The educational content is designed according to specific criteria and uses technological tools to enhance and interact with the learning process to develop the learner's skills. The wide spread of e-learning sites has resulted in a large amount of educational content. It has become difficult for learners to choose the best educational product, which has led to the concept of evaluating the quality of educational content. Which led us to ask the research question, what are the factors affecting the quality of educational content in electronic education platforms ? To answer this question, we conducted this study, which aims to analyze the perceptions of university professors towards the implementation of e-learning and evaluate the success of the implementation of e-learning and analysis of factors that affect the quality of e-learning at the University of 8 May 1945. This paper is organized as follows. Section 2 presents a review of the literature in the area of learning content quality. The research methodology is presented in Section 3. The description of the proposed approach is discussed in Section 4. Finally, the conclusion of the article is presented in Section 5.

2 Literature review

Several studies have shown that learning content can influence the quality of learning if we take into account the learner's motivation as a constraint for success. [2] has shown that the quality of learning content influences learning activity, whether during a course, an exam, or while studying at home. In general, this research examines the role of learning content in the training of learners. [3] Also, explains the important role of learning content in cognitive processes, especially in learning tasks and more specifically in distance learning. Therefore, many works in the field of learning take into consideration the quality of the learning content. Baradaran V. & Ghorbani E. (2020) [4] proposed a model to be used to evaluate the quality of this e-learning service from different perspectives. Based on the students' views, 44 qualitative variables were detected. The identified variables were confirmed by 13 experts. From another perspective, Almulhem A.(2020) [5] developed a research model starting from the Delone and Mclean information systems success model to investigate the effects of quality and organizational factors on students' satisfaction with the quality of the online learning system. Data collected from 250 university students at King Faisal University were examined using the structural equation modeling technique as a means to validate the research model. In another context, and in the field of influencing factor analysis, Neni S. & Al. (2020) [6], Feby AM & Al. (2020) [7], Pham CH & Al. (2020) [8], Shahzad A. & Al. (2020) [9] and Susilowati H. & Al. (2020) [10] analyze the impact of quality factors in the e-learning service (quality of information, quality system, and quality of service) on student satisfaction in e-learning platforms. As for the implementation, Dursun T. & Al. (2013) [11] is interested in applying a service quality assessment model to an online learning system at the university.

In summary, we can state that :

1. It is important to integrate the concept of quality into learning environments.
2. Several works try to propose e-Learning quality, evaluation models.
3. Several works are interested in the evaluation of e-Learning quality based on learning content.

4. Learning content characteristics are often used by others as indicators of e-learning quality.

For this purpose, we propose a new approach to generate graphical visualizations based on the data collected from the learning content.

3 Methodology

The purpose of this work is to extract the most influencing factors on the quality of educational content for e-learning platforms in general. With the extraction of these factors affecting the quality of educational content, we have the opportunity to raise the value of the quality of e-learning by adhering to the provision of this group of factors. To test the extent of these factors, we suggest a distance learning system that will embody these proposed factors.

First, we reviewed the literature on the quality of service in e-learning. We have also had research on the already proposed quality evaluation criteria that have been proposed to work to improve quality. After that, we conducted a field study aimed at extracting the views of university professors about the factors that improve the quality of educational content in the context of e-learning.

Our work plan in this research was simple :

1. Design a questionnaire containing a set of proposed factors that could affect the quality of e-learning ;
2. Collect data, the questionnaire was placed online and distributed to all university professors ;
3. Analyze the statistical results of the professors' responses ;
4. Propose a model for measuring the quality of learning content in e-learning systems by interpreting the research results ;
5. Design a system that adopts this new model to measure the quality of learning content.

3.1 University professors' perceptions about the factors affecting the quality of learning content

To collect the opinions of university professors about the quality factors in educational content, we prepared an online reconnaissance to collect data. While preparing this poll, we followed the Likert scale guidelines for most of our questions, using accurate and detailed answers to obtain more reliable answers. This section offers results regarding some interesting questions raised in this poll (Example, see figure. 1).

3.2 Analysis of the statistics obtained

By analyzing the results obtained from this poll between 119 university professors in various disciplines, we can see the following facts :

- In general, the majority of university professors agree that the evaluation of the quality of the lesson is through three factors : the results of the student evaluation, the method, and the learning content ;

Question 10. The presence of keywords in a "chapter" of an important learning subject as a factor in assessing the quality of learning content, what do you think ?

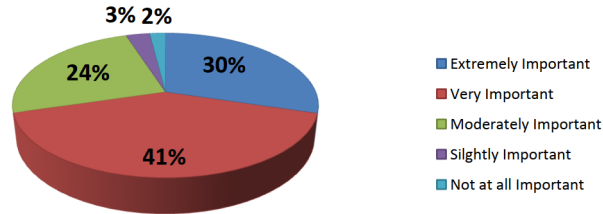


FIGURE 1 – Graphical representation of a question from a questionnaire

- In particular, the majority of university professors unite that the quality of the lesson depends primarily on the quality of learning content ;
- 61% of professors agree that the language preparation language is fundamental in assessing the quality of learning content ;
- 44% of professors believe that describing chapter content is very important in assessing the quality of learning content, while 27% believe it is imperative ;
- Regarding the student's satisfaction at the end of the school year, 43% of professors agree to some extent, as it reflects the quality of distance learning. In contrast, 25% of the professors agree ;
- Regarding the student's interaction rate during the educational process, 49% of professors agree to some extent, as it reflects the quality of distance learning, while 34% of the professors agree.

4 Description of the proposed approach

The main objective of our work is to propose a model for evaluating the quality of learning content. The data associated with the model are collected implicitly from the learning content created by the teacher. (See fig 2).

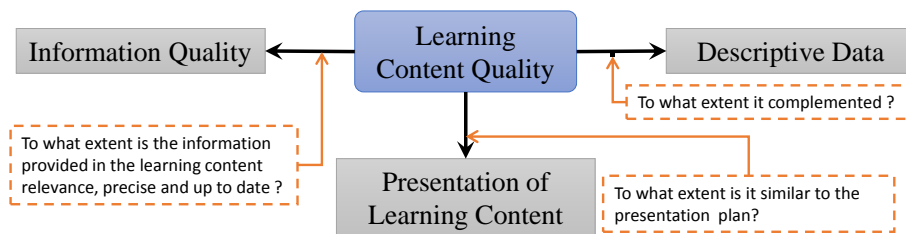


FIGURE 2 – Proposed model for assessing the quality of learning content

4.1 Descriptive Data of learning content

The system considers that the completeness of descriptive content data is one of the criteria to measure the quality of this content. It must answer the following question : to what extent is the descriptive data of the learning content supplemented in the Classes ? (example : there is a small textual description associated with the course)

4.2 Information quality of learning content

The system considers that the quality of the information provided by the learning content is one of the criteria to measure the quality of this content, and it must answer the following questions :

- **Relevance of learning content information** : To what extent is the information provided in the learning content relevant to the course ? (example : the frequency of use of keywords of the course subject in the content)
- **Extended precision of learning content information** : To what extent is the information provided in the learning content precise ? (Example : there are references and links to check the accuracy of the information).
- **Learning content news** : To what extent is the information provided in the learning content up to date ? (Example : the last date of update about the current date).

4.3 Presentation of learning content

The system considers that the learning content presentation method is one of the criteria to measure the quality of this content. He must answer the following question : to what extent is the presentation plan for the learning content of the course respected ? (Example : the number of chapters of the courses is in the identified interval).

4.4 QLC System

In this work, we propose a learning content-based quality assessment approach. This approach has been integrated into a learning system, called QLC (Quality meter Learning Content , Fig 3). The latter considers the quality status of the learning content and provides a visualization on the data associated with the quality of the learning content to improve. Our system consists of a learning platform and three managers :

- A manager who serves the data of indicators associated with quality criteria from the learning content model ;
- A quality assessment manager uses the indicators calculated from the first manager to provide digital values for each criterion and a value on the quality of learning content ;
- A visualization and intervention manager, the latter used the values of the criteria and quality to generate graphic representations and recommendations to increase quality value.

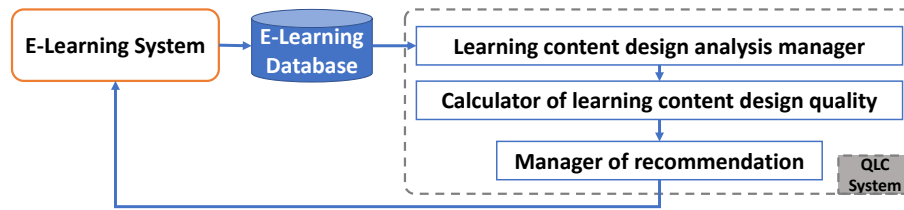


FIGURE 3 – General architecture of our QLC system

5 Conclusion

In this paper, we presented a new approach to examining the quality of learning content. This method has been applied to a system called QLC (QLC : for Qualitymeter Learning Content). This system is in the form of an e-learning platform. In the article's final version, we will present the design of our learning content quality examination form consisting of a set of criteria and indicators in addition to calculation and classification methods. This is to define bad quality learning content on our platform, providing its weaknesses to professors to work to improve the quality of learning content. In addition, our system was tested by professors and students of the Department of Economics at Guelma University (Algeria). The results obtained are very encouraging and promising.

References

- [1] H. S. Gitlow, *Quality Management Systems : A Practical Guide*. St. Lucie Press, 2000.
- [2] V. Nanda, *Quality management system handbook for product development companies*, 1st ed. New York : CRC Press, 2005.
- [3] D. Kamal and F. Alnagar, "Using Artificial Neural Network to Predicted Student Satisfaction in E-learning," *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 8, no. 3, pp. 90–95, 2020.
- [4] V. Baradaran and E. Ghorbani, "Development of Fuzzy Exploratory Factor Analysis for Designing an E-Learning Service Quality Assessment Model," *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 1772–1785, sep 2020.
- [5] A. Al Mulhem, "Investigating the effects of quality factors and organizational factors on university students' satisfaction of e-learning system quality," *Cogent Education*, vol. 7, no. 1, p. 1787004, jan 2020.
- [6] N. Seliana, A. I. Suroso, and L. N. Yuliaty, "Evaluation of E-Learning Implementation in The University Using Delone and Mclean Success Model," *Jurnal Aplikasi Manajemen*, vol. 18, no. 2, pp. 345–352, jun 2020.
- [7] F. A. Muqtadiroh, A. Herdiyanti, and N. Puspitasari, "The e-Learning Quality Model to Examine Students' Behavioral Intention to Use Online Learning Platform in a Higher Education Institution," *Khazanah Informatika : Jurnal Ilmu Komputer dan Informatika*, vol. 6, no. 2, pp. 176–183, 2020.

- [8] C. H. Pham, N. H. Vu, and G. T. H. Tran, "The role of e-learning service quality and e-trust on e-loyalty," *Management Science Letters*, vol. 10, no. 12, pp. 2741–2750, 2020.
- [9] A. Shahzad, R. Hassan, A. Y. Aremu, A. Hussain, and R. N. Lodhi, "Effects of COVID-19 in E-learning on higher education institution students : the group comparison between male and female," *Quality & Quantity*, vol. 55, no. 3, pp. 805–826, jun 2021.
- [10] H. Susilowati, "Use E-learning systems : System Quality, Information Quality and Service Quality on User Satisfaction," *Journal of Business Management Review*, vol. 1, no. 3, pp. 208–222, sep 2020.
- [11] T. Dursun, K. Oskaybaş, and C. Gökmen, "The Quality Of Service Of The Distance Education," *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, vol. 103, pp. 1133–1151, nov 2013.



Averaging Ensemble Models for Blood Glucose Level Prediction in Type 1 Diabetes

Abdelaziz Mansour , Kamal amroun ², Zineb Habbas , and Fayçal Ykhlef ⁴

¹LIMED Laboratory, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, Algeria,
abdelaziz.mansour@univ-bejaia.dz

²LIMED Laboratory, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, Algeria,
kamal.amroun@univ-bejaia.dz

³LORIA Laboratory, Lorraine University, France,
zineb.habbas@univ-lorraine.fr

⁴Multimedia & Syst. Architect Dept., CDTA, Algiers, Algeria,
fykhlef@cdta.dz

Abstract : The ability to forecast future Blood Glucose Levels (BGL) will enable Type 1 Diabetes (T1D) patients to take preventive actions against impending and undesired events like hypoglycemia or hyperglycemia. In this paper, we aim to improve the daily lives of T1D patients by designing Machine Learning (ML) models for predicting BGL in 15, 30, 45, and 60 minutes Prediction Horizons (PHs). We propose a methodology that consists in averaging BGL predictions obtained by applying two ensemble algorithms : (i) eXtreme Gradient Boosting Regressor (XGBR) and (ii) Gradient Boosting Regressor (GBR). A dataset created in real life (Called OH1OT1DM) is used to train and validate these models. According to averaging approach results, the outcomes in terms of Root Mean Squared Error (RMSE) and Clarke Grid Error Analysis (CEGA) are very satisfactory and competitive compared to previous research that uses real data.

Keywords : Type 1 diabetes ; BGL prediction ; Machine learning ; Ensemble methods.

1 Introduction

The ability to predict accurately Blood Glucose Level (BGL) in a short-term Prediction Horizon (PH) could improve the health and wellbeing of Type 1 Diabetes (T1D) patients by enabling them to take preventive actions to keep their BGL in the normal range (70 mg/dl – 180 mg/dl) [1]. This is particularly useful to avoid unwanted periods of hypoglycemia and hyperglycemia. However, the task of BGL prediction is not trivial due to several factors. One can mention the amount of carbohydrates, proteins and fats contained in the meal, daytime, physical activity, stress, illness and possible nonlinearities in BGL evolution [2].

*Corresponding Author

Several schemes for BGL prediction have been reported in the literature. These latter can be roughly divided into three main models : (i) Physiological, (ii) Data-driven, and (iii) hybrid [3].

The use of ML techniques has proven to be effective for solving complex tasks in health care and chronic diseases like diabetes [4]. For the BGL forecasting problem, several ML approaches (Which follow the data driven scheme) have been suggested. One can mention : Artificial Neural Network [19], Grammatical Evolution [3], and ensemble methods [6].

In this paper, we propose to average BGL predictions obtained by applying two ensemble algorithms : (i) eXtreme Gradient Boosting Regressor (XGBR) and (ii) Gradient Boosting Regressor (GBR). The models we are proposing are patient dependent. We use OHIoT1DM dataset [7] to assess the performance of the proposed methodology.

2 Material and methods

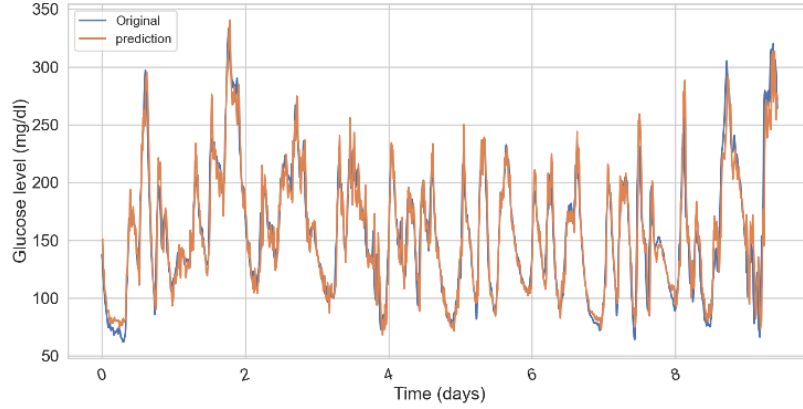
2.1 Data processing

This research relied on the OhioT1DM dataset to assess the performance of the proposed methodology. Information about this dataset can be found in [7]. The OHIoT1DM dataset features have a heterogeneous nature. The dataset contains features with no fixed sampling frequency and features with values aggregated every 5 minutes. The first group includes finger-stick glucose measurements, meal-information, insulin bolus, sleep-information, exercise intensity, time of self-reported stress, time of self-reported hypoglycemic events and time of self-reported illness. The second group includes Continuous Glucose Monitoring (CGM) readings, basal insulin rate, HR, galvanic skin response, air and skin temperature, and steps counter. In addition to the initial features, we created new ones based on CGM signals, insulin pump data, and meal information. Indeed, some of these features were selected based on the results obtained from feature engineering in previous works [8].

2.2 Prediction model building

Ensemble algorithm is a machine learning paradigm in which two or more single models are trained to handle a same problem and then combined to produce more accurate and reliable predictions. Single models are usually generated from a base learning algorithm such as neural networks and decision trees. It is demonstrated that ensemble models provide more accurate results than their constituent models [11]. Ensemble models are built in two stages. The first one aims at defining constituent models while the second one is devoted to the choice of combination schemes such as majority voting for classification and averaging for regression. In this research, our methodology is based on the idea that the combination of two ensemble models leads to more accurate results than those obtained using a single ensemble model. This has been demonstrated in the work of [12]. GBR and XGBR are the ensemble models used in this paper since they have demonstrated their efficacy in the prediction of blood glucose levels in type 1 diabetes [6, 9]. The combination scheme we have designed is averaging (we assigned equal importance to each single ensemble model). According to how constituent models are generated, many ensemble methods have been proposed. One can mention boosting [13] and bagging [11, 14]. GBR and XGBR belong to

FIGURE 1 – Comparison between real and predicted BGLs for PH=30 min, in patient 544.



the family of boosting algorithms that aim to convert weak models to strong models. They train a collection of single models sequentially. They try to add new models that do well compared to the previous models [13, 11, 14]. GBR is a generalization of gradient boosting. It uses decision tree regressor base learner models. The term “gradient” comes from the use of gradient descent to solve the minimization problem. XGBR is an efficient and scalable implementation of gradient boosted decision trees. It is designed to improve computational speed and performance [15]. In this research, for each PH, we averaged the prediction results obtained from the GBR-based model and those obtained from the XGBR-based model as follows.

$$XGBRmodel(F_1, F_2, \dots, F_n) \times w_1 = P_1 \quad (1)$$

$$GBRmodel(F_1, F_2, \dots, F_n) \times w_2 = P_2 \quad (2)$$

$$Average(F_1, F_2, \dots, F_n) = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (3)$$

Where F_1, \dots, F_n are the features values, P_1 and P_2 are the predicted values, w_1 is the weight of XGBR model and w_2 is the weight of GBR model. We have assigned the same weight for the two models ($w_1 = 1$).

Indeed, one of the benefits of averaging scores is that it reduces the overall prediction error. Also, it is known that averaging predictions often reduces overfitting [16]. For each patient in the OH1OT1DM dataset, 7 weeks of data are used for training and the last week are used for testing. The models are trained with different hyper-parameters and they are tuned using the grid search approach [17].

3 Results

Table 1 represents the mean values of RMSE and CEQA [21] obtained from the models evaluated on 12 patients of OH1OT1DM dataset. The averaging of the predictions, AVG

(XGBR, GBR), shows the best RMSE for all PHs, with a notable reduction compared to the RMSE of XGBR-based and GBR-based models. In terms of CEGA, the percentage of predictions that fell in the acceptable zones A and B is slightly better for the AVG (XGBR, GBR) compared to the two other models for all PHs. It is worth noting that the majority of wrong predictions are included in zone D while a minority of them are comprised in zone C and no single prediction is included in zone E.

The RMSE results according to each patient reveal that AVG (XGBR, GBR) outperformed XGBR-based and GBR-based models for almost all patients and PHs. Notably, the GBR models shows better results than the XGBR models for almost all patients and PHs. The AVG (XGBR, GBR) predictions and the real BGL of patients 544 for PH = 30 min are illustrated in figure 1. Though there exist some prediction errors, we can see that the two curves are relatively similar, and they tend to have often the same trend most of the time. The CEGA of the patient 588 based on the AVG (XGBR, GBR) results and PH = 30 min are displayed in figure 2. It can be observed that almost all of the predictions are scattered in zones A and B which represents 99.86% of all predictions.

4 Other works

Table 2 presents some previous studies on short-term BGL prediction that has been performed on real data. It is shown that the prediction results obtained from the ensemble models developed in this work are comparable to state-of-the-art approaches that used the OH1OT1DM dataset. The comparison is made in terms of RMSE and CEGA (Percentage of predictions that fall in acceptable zones A and B).

TABLE 1 – Comparison between our T1D BGL prediction models and previous works.

1*Référence	1*Year	1*Dataset size	1*Method	1*PH (min)	1*RMSE (mg/dl)	1*A + B (%)
2*[9]	2*2018	2*6 patient	2*XGBoost	45	20.377	-
				60	-	-
4*[3]	4*2018	4*6 patient	4*Grammatical Evolution	30	21.19	98.6 %
				45	-	-
				60	31.34	97.8 %
3*[19]	3*2021	3*6 patients	3*Artificial Neural Network	30	18.81	-
				45	-	-
				60	30.89	-
3*[20]	3*2020	3*6 patients	3*Fully Convolutional Neural Network.	30	19.27	-
				45	-	-
				60	-	-
4*Ourselves	4*2022	4*12 patients	4*AVG(XGBR, GBR)	15	10.661	99.72%
				30	19.234	98.50%
				45	26.183	97.38%
				60	32.079	96.64%

5 Conclusion

This work aims to design a short-time BGL prediction models. We introduced a methodology based on averaging predictions of BGLs obtained by applying two ensemble algorithms, namely XGBR and GBR. For PHs of 15, 30, 45, and 60 minutes, the mean RMSE of the 12 patients of the OH1OT1DM dataset are 10.66 mg/dl, 19.23 mg/dl, 26.183, and 32.07 mg/dl,

h

PH	Model	RMSE	A+B
3*15	XGBR	11.437	99.56%
	GBR	10.783	99.72%
	AVG	10.661	99.72%
3*30	XGBR	19.926	98.27%
	GBR	19.494	98.48%
	AVG	19.234	98.50%
3*45	XGBR	26.908	97.25%
	GBR	26.823	97.36%
	AVG	26.183	97.38%
3*60	XGBR	32.652	96.63%
	GBR	33.146	96.62%
	AVG	32.079	96.64%

FIGURE 2 – The mean results obtained from the 12 patients of the OHOT1DM dataset for PHs of 15, 30, 45, and 60 minutes.

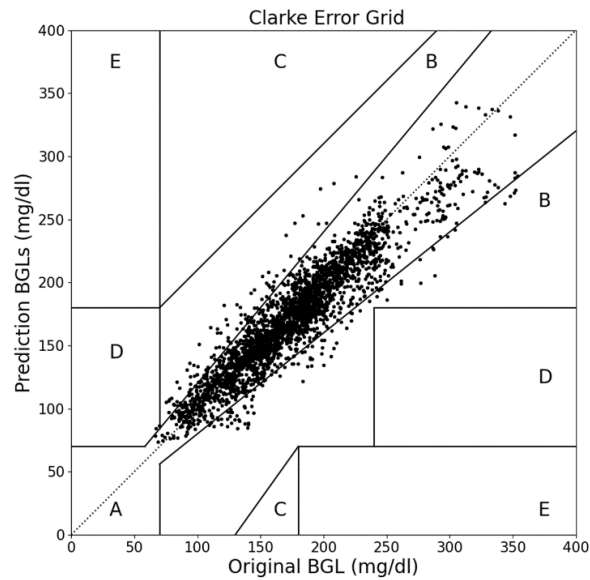


FIGURE 3 – CEGA results for PH of 30 minutes, obtained from patient 588.

respectively. These results are better than those obtained by applying XGBR or GBR individually. Likewise, they are very satisfactory and competitive to previous research studies that use real data. From a therapeutic point of view, the great majority of the prediction results fell inside regions A and B which demonstrate the safety of these predictions. In fact, the CGM data and its derived features are the strongest predictors of the BGL.

Acknowledgements

This work has been sponsored by General Directorate for Scientific Research and Technological Development, Ministry of Higher Education and Scientific Research (DGRSDT), Algeria.

References

- [1] The big picture : Checking your blood glucose american diabetes association [<https://www.diabetes.org/diabetes/medication-management/blood-glucose-testing-and-control/checking-your-blood-glucose/>]; 2021. [Online; accessed 12-October-2021].
- [2] Schmidt S, Nørgaard K. Bolus calculators. *Journal of diabetes science and technology*. 2014 ;8(5) :1035–1041.
- [3] Contreras I, Bertachi A, Biagi L, et al. Using grammatical evolution to generate short-term blood glucose prediction models. In : *KHD@ IJCAI* ; 2018. p. 91–96.
- [4] Deo RC. Machine learning in medicine. *Circulation*. 2015 ; 132(20) :1920–1930.
- [5] Zarkogianni K, Mitsis K, Arredondo MT, et al. Neuro-fuzzy based glucose prediction model for patients with type 1 diabetes mellitus. In : *IEEE-EMBS International Conference on Biomedical and Health Informatics (BHI)* ; 2014. p. 252–255.
- [6] Ståhl F. Diabetes mellitus glucose prediction by linear and bayesian ensemble modeling [dissertation]. Department of Automatic Control, Lund University Sweden ; 2012.
- [7] Marling C, Bunescu R. The ohiot1dm dataset for blood glucose level prediction : Update 2020. *KHD@ IJCAI*. 2020.
- [8] Jeon J, Leimbigler PJ, Baruah G, et al. Predicting glycaemia in type 1 diabetes patients : experiments in feature engineering and data imputation. *Journal of Healthcare Informatics Research*. 2020 ;4(1) :71–90.
- [9] Midroni C, Leimbigler PJ, Baruah G, et al. Predicting glycemia in type 1 diabetes patients : Experiments with xgboost. *heart*. 2018 ;60(90) :120.
- [10] Schmidt MI, Hadji-Georgopoulos A, Rendell M, et al. The dawn phenomenon, an early morning glucose rise : implications for diabetic intraday blood glucose variation. *Diabetes care*. 1981 ;4(6) :579–585.
- [11] Zhou ZH. Ensemble methods : foundations and algorithms. Chapman and Hall/CRC ; 2019.
- [12] Zhang Y. Strategies for combining tree-based ensemble models [dissertation]. Nova Southeastern University ; 2017.

- [13] Schapire RE. The strength of weak learnability. *Machine learning*. 1990 ;5(2) :197–227.
- [14] Breiman L. Random forests. *Machine learning*. 2001 ;45(1) :5–32.
- [15] Chen T, Guestrin C. Xgboost : A scalable tree boosting system. In : *Proceedings of the 22nd acm sigkdd international conference on knowledge discovery and data mining* ; 2016. p. 785–794.
- [16] Freund Y, Mansour Y, Schapire RE. Why averaging classifiers can protect against overfitting. In : *International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics* ; PMLR ; 2001. p. 98–105.
- [17] Géron A. *Hands-on machine learning with scikit-learn, keras, and tensorflow : Concepts, tools, and techniques to build intelligent systems*. O'Reilly Media ; 2019.
- [18] Zhu T, Li K, Herrero P, et al. A deep learning algorithm for personalized blood glucose prediction. In : *KHD@ IJCAI* ; 2018. p. 64–78.
- [19] Şahin A, Aydın A. Personalized advanced time blood glucose level prediction. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2021 ; :1–12.
- [20] De Bois M, El Yacoubi MA, Ammi M. Adversarial multisource transfer learning in healthcare : Application to glucose prediction for diabetic people. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021 ;199 :105874.
- [21] Clarke, William L., et al. "Evaluating clinical accuracy of systems for self-monitoring of blood glucose." *Diabetes care* 10.5 (1987) : 622-628.



Machine Learning with CBC test for early response prediction to neoadjuvant chemotherapy

AbdelHakim Ziani*¹ and Oualid Yakoubi²

¹Faculty of Computer Science, University of Science and Techlogy Houari Boumediene, Algiers, Algeria
zianianakim@gmail.com

²Faculty of Computer Science, University of Science and Techlogy Houari Boumediene, Algiers, Algeria
Oualidjacobi@gmail.com

Abstract : In this paper, a new and efficient method for predicting the 5Fu chemotherapy response in patients with colorectal cancer is discussed, which main goal is to help the decision making process of starting a chemotherapy treatment. The prediction is based on the results of the Complete Blood Count (CBC) lab test and the patient's clinical data introduced to a machine learning model. The main contribution of this paper is : (i) It establishes the state of the art in neoadjuvant chemotherapy (NAC) for colorectal tumor response prediction using the CBC test. To our knowledge, this is the first study on the subject. (ii) It evaluates the impact of clinical data on the prediction process. (iii) It gives a comparison of four different machine learning models : SVM, LR, and two NNs. (iv) It also proposes a model capable of predicting NAC response with pretty satisfactory accuracy regarding the size of the training set. The results have proved that the shallow neural network has best performed in terms of prediction accuracy (0.81 AUC). This work has proved the effectiveness of the CBC test in classifying good from bad responders and intends to initiate more studies on the subject with bigger and more scalable datasets.

Keywords : Machine Learning ; Healthcare ; Colorectal Cancer ; NAC prediction ; Neural Networks ; SVM ; LR.

1 Introduction

According to the World Cancer Research Fund Internationa, colorectal cancer is the third most common cancer diagnosed worldwide [1], The American Cancer Society's estimates for the number of colorectal cancer cases in the United States for 2022 are : 106,180 new cases of colon cancer and 44,850 new cases of rectal cancer [2]. Colorectal cancer (CRC) is considered to be the second most common cause of cancer deaths when numbers for men and women are combined. It's expected to cause about 52,580 deaths by 2022 [2]. Based on

*Corresponding Author

the projection of aging, population growth and human development, according to [3], the global number of new CRC cases is predicted to reach 3.2 million in 2040. Although advances in understanding colorectal cancer pathogenesis have resulted in more therapeutic choices including radiation, surgery and embolization an ablation surgery [21], which leads to effectively suppressing cancer progression and prolonging overall survival [4]. However, CRC is still a leading death cause worldwide[5].

Chemotherapeutic intervention paired with surgery is the principal and most common CRC therapy and the sole route to increased survival [6]. 5-Fluorouracil (5-FU) is the key component of systemic chemotherapy for colorectal cancer (CRC) in both palliative and adjuvant situations. Several modulation techniques, including the use of 5-FU-based combination regimens and 5-FU pro-drugs, have been developed and used during the last four decades to boost the anti-tumor efficacy of 5-FU and overcome clinical resistance [7].

Despite hopeful advancements in CRC therapy to date, patient response rates remain modest, and the benefit of 5-FU-based therapy is usually hampered by the development of chemoresistance. Inter-individual variability in therapy response in CRC patients may arise from each person's unique genomic make-up [7], and Even though 5-FU has proven to be one of the safest chemotherapy drugs, some CRC patients still experience significant side and toxic consequences [8].

Many parameters are gathered during therapy treatment of colorectal cancer patients such as gender, age, tumor origin site, tumor stage, and diverse lab tests like Complete Blood Count (CBC) considered to be part of the main protocol[23]. Using these parameters many machine learning approaches can be applied to datasets of CRC patients with the main purpose of helping the decision-making during therapy treatment [9, 22].

In this study, we aimed to predict the patient's response possibility to 5-FU neoadjuvant chemotherapy using data collected during the examination process. For this purpose, we used several machine learning classifiers and architectures such as SVM, Logistic Regression, and Neural Networks trained with the TCGA Chemotherapy Response Dataset consisting of 97 patients with different colorectal cancer stages, in which each patient presents a good or bad(good meaning diminution of tumor size leading to downstaging or bad meaning the increase of tumor size) response to the treatment.

2 Related Work

Numerous studies have looked into the ability of machine learning combined with different patient information like multiparametric MRI and lab tests to predict NAC response at an early stage, when adaptive treatment may be initiated.

Subramani Mani and all, proposed a machine learning approach consisting of a Bayesian logistic regression model combined with feature selection to predict response after a single cycle of neoadjuvant chemotherapy [10]. The authors trained their model on 28 patients with breast cancer. Quantitative dynamic contrast-enhanced MRI and diffusion-weighted MRI data

were collected before and after one cycle of NAC, 118 semiquantitative and quantitative features combined with 11 clinical features. After getting an AUC of 0.86, an accuracy of 0.86 and a specificity of 0.82, Mani and all showed the efficacy of machine learning models to predict patient response to NAC therapy.

Deep learning (DL) is certainly a leading model in today's literature, despite the difficulty of training with small datasets. Authors have tried implementing DL for predicting patient response to NAC like Hai-Bin Zhu and all who proposed a deep learning model capable of predicting patient chemotherapy response with colorectal liver metastases (CRLM) [11]. In order to train their CNN models, authors have collected 108 MRI of Participants with CRLM and expected to receive preoperative chemotherapy followed by liver resection. After training they obtained best AUC of 0.831 which outperformed CERIST criteria with AUC 0.619. Another deep learning approach has been implemented by Wei and all [13], authors trained a ResNet10-based DL radiomics model using a dataset consisting of 192 patients with colorectal liver metastases, results have shown a good AUC value of 0.745 on the test set.

Shayesteh and all [12] also studied the feasibility of predicting treatment response using MRI-based pre-, post-, and delta-radiomic characteristics in patients with locally advanced rectal cancer (LARC) treated with neoadjuvant chemoradiation therapy (nCRT), their study included 53 LARC patients before and after nCRT. 96 radiomic features were extracted from T2W MRIs. As classifiers, the k-nearest neighbors (KNN), Naive Bayes (NB), Random forests (RF), and eXtreme Gradient Boosting (XGB) techniques were utilized. Authors obtained where RF and KNN achieved the best results with an AUC of 0.85 ± 0.04 and 0.81 ± 0.14 , respectively. Lu and all [14] trained different machine learning models in order to predict patient response to FOLFOX treatment.

3 Material and Methods

Our research tries to predict patients' therapy response to NAC using machine learning methods. In this section, we describe our methodological procedure as well as a brief overview of the dataset used.

3.1 Data Description

For our particular study, datasets are very hard to collect and prepare, To be able to train a learning algorithm, we need to monitor and save a considerable number of patients with colorectal cancer before and after state of entering into NAC therapy with 5-FU medication. Most similar research studies, such as [11,12,13,14], use MRI scans to train models; however, in this work, we wanted to investigate the feasibility of training a model exclusively using the Complete Blood Count (CBC).

TABLE 1 – Feature Space Description

	Count	Mean	Std	Min	Max
Gender	97	0.598	0.493	0	1
Site_of_resection_or_biopsy	97	3.526	2.218	0	7
Tissue_or_organ_of_origin	97	3.526	2.222	0	7
Tumor_stage	97	6.371	2.740	0	10
Response	97	0.608	0.491	0	1
Age_clean	97	22824.546	3995.220	12526	31329
Therapy_start_clean	97	125.813	214.369	0	1277
Therapy_end_clean	97	326.872	266.441	41	1369
B Cells - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.005	0.005	0	0.0414
CD4 T Cells - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.019	0.018	0	0.0868
CD8 T Cells - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.005	0.012	0	0.0985
Dendritic Cells - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.000	0.000	0	0.0026
Macrophage M1 - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.045	0.022	0.0118	0.1262
Macrophage M2 - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.021	0.012	0	0.0675
Monocyte - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.000	0.000	0	0
Natural Killer Cells - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.014	0.008	0	0.0407
Neutrophil - QuantIseq_lsei_TIL10	97	0.058	0.021	0.0147	0.1388

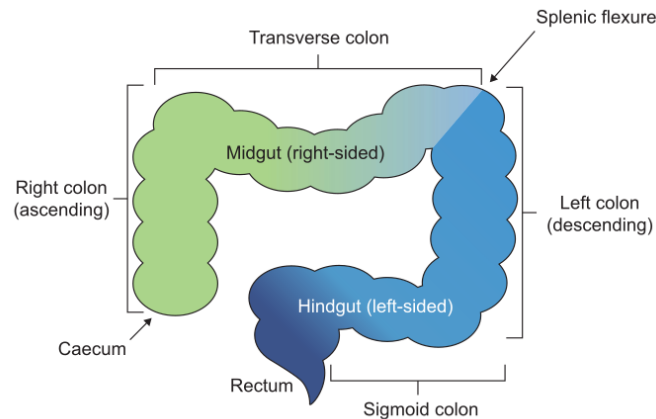


FIGURE 1 – Different part of colorectal

combined with basic patient clinical information such as age, gender, therapy duration, and so on, at which CBC results parameters are highly correlated with the state of a cancer patient. The dataset used in this work is the The Cancer Genome Atlas (TCGA) Chemotherapy Response Dataset [15], it consists of 97 patients with colorectal tumors, each in a different area of the colon Fig 1 show these areas[16], with CBC test results and NAC response.

Before implementing the learning algorithms data have been passed to Standard Scaler (SC)

to standardize features by removing the mean and scaling to unit variance.

3.2 Learning Methods

The development of a learning algorithm is the second step in a machine learning project. In this research study, we had a particular interest in using the best and most known learning algorithms which the literature clearly designate the quality classification. The first used algorithm is Support Vector Machine (SVM). In the feature space, an SVM finds the optimal separating (maximal margin) hyperplane between two classes of training data [17]. The second used classification is the logistic regression (LR) model, which estimates the probability of inclusion to each class [18], the third model implemented in this study is the neural network (NN) [20], with different architectures, the first network consists of 16 input neurons, 1 hidden layer of 5 neurons and 2 output neurons and the second architecture consists of 16 input neurons, 2 hidden layers of 7 and 4 neurons and one output neurons. During training, many optimization techniques have been used like L1 and L2 regularization and adam optimizer to update weights. The overall study process is illustrated in Figure 2.

The three models used in this work have been chosen due to their high efficiency with medical data as explained and proved by Jiang and all [20] after searching machine learning algorithms within healthcare on PubMed.

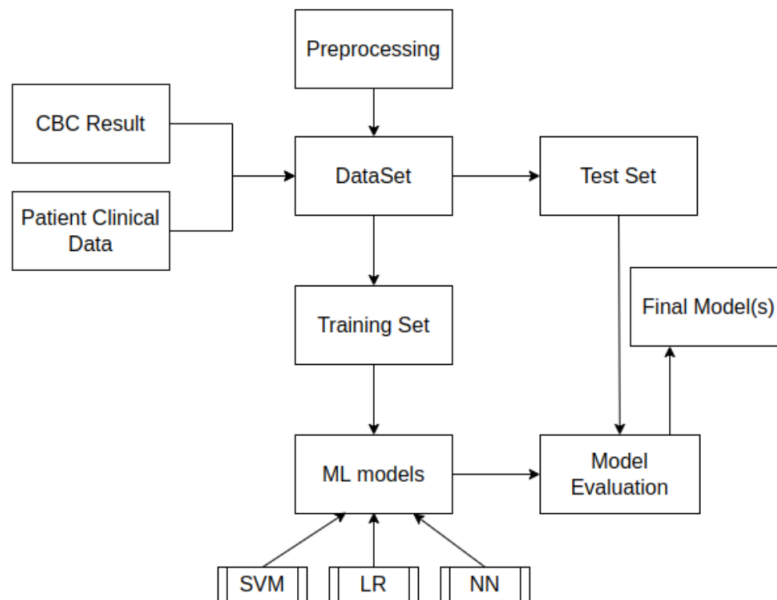


FIGURE 2 – Global Project Methodology

3.3 Experimental Results and Evaluation

The last section of this work is testing the implemented models with data never-seen-before, we have used different metrics like MSE, Precision, Recall, f1-score and Receiver operating characteristic (ROC) curve, which quantitive the binary classifier system's diagnostic capabilities. Below are the ROC curve for each algorithm.

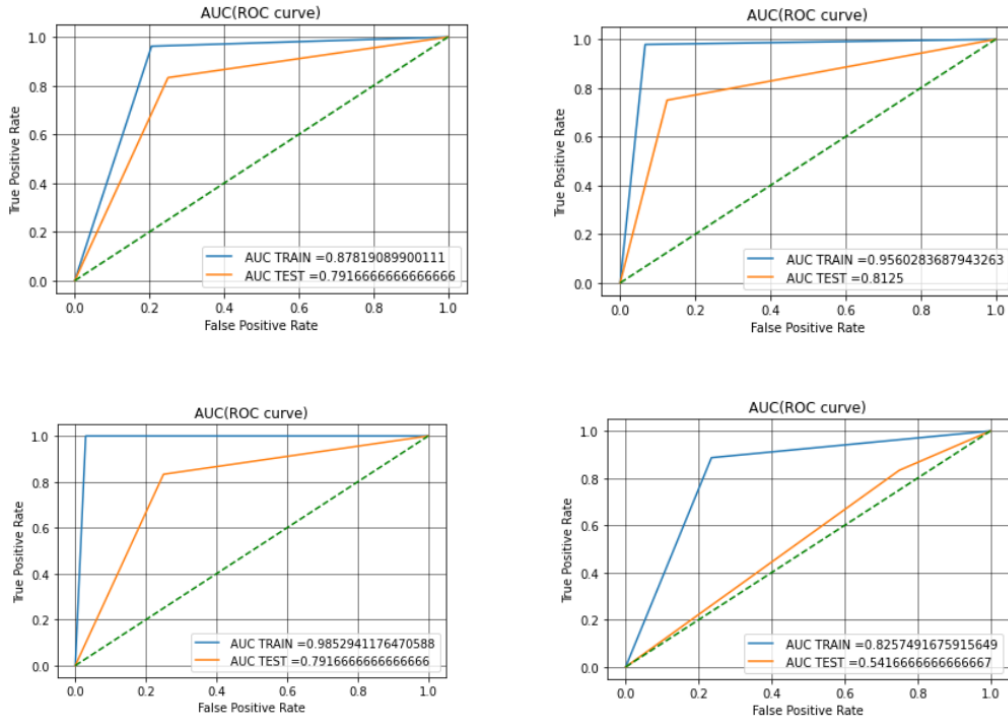


FIGURE 3 – Training/Test ROC curve of the four models

Following experiments, we found that the shallow neural network with one hidden layer of 5 neurons outperformed the quite deeper network and SVM with an AUC of 0.81, and the LR model with 0.5.

4 Conclusion

In this paper, we studied the feasibility of constructing a machine learning model capable of predicting patients with colorectal cancer chemotherapy response using CBC test results. We implemented four models : SVM, LR, and two neural network architectures. Then we trained these models on the dataset provided by TCGA. The preprocessing stage included data transformation, data standardization, and data codification. After training, we have noticed a better classification performance using the shallow neural network with one hidden layer of 5 neurons, giving an AUC of 0.81 compared to the slightly deeper network and SVM, which

gave a 0.91 AUC score and the LR model with 0.5 AUC. In consideration of the size of the training dataset, the experimental test results are quite satisfactory.

The first biggest issue with this research study is the lack of data and the difficulties in obtaining it, despite the fact that there is a need to follow the entire patient's therapy and observe his response. The second "big" concern is human involvement in determining patient response by viewing mainly tumor size and other parameters. For better outcomes and to reduce human error, more medical specialists must be consulted on each patient file. A good future work perspective is to give the decision task to a machine and rate the patient response on a continuous scale.

References

- [1] Colorectal cancer statistics. WCRF International. (2022, April 14). Retrieved October 7, 2022, from <https://www.wcrf.org/cancer-trends/colorectal-cancer-statistics/>
- [2] Colorectal cancer statistics : How common is colorectal cancer? American Cancer Society. (n.d.). Retrieved October 7, 2022, from <https://www.cancer.org/cancer/colon-rectal-cancer/about/key-statistics.html> : :text=It's%20expected%20to%20cause%20about,of%20likely%20reasons%20for%20this.
- [3] Yue Xi, Pengfei Xu, Global colorectal cancer burden in 2020 and projections to 2040, *Translational Oncology*, Volume 14, Issue 10, 2021, 101174, ISSN 1936-5233, <https://doi.org/10.1016/j.tranon.2021.101174>.
- [4] Xi, Y., Xu, P. (2021). Global colorectal cancer burden in 2020 and projections to 2040. *Translational Oncology*, 14(10), 101174. doi :10.1016/j.tranon.2021.101174
- [5] Ferlay J, Soerjomataram I, Dikshit R, Eser S, Mathers C, Rebelo M, Parkin DM, Forman D, Bray F. Cancer incidence and mortality worldwide : sources, methods and major patterns in GLOBOCAN 2012. *Int J Cancer*. 2015 Mar 1 ;136(5) :E359-86. doi : 10.1002/ijc.29210. Epub 2014 Oct 9. PMID : 25220842.
- [6] Rachel M. McQuade, Vanesa Stojanovska, Joel C. Bornstein and Kulmira Nurgali* Colorectal Cancer Chemotherapy : The Evolution of Treatment and New Approaches Volume 24, Issue 15, 2017 10.2174/092986732466617011152436
- [7] Sona Vodenkova, Tomas Buchler, Klara Cervena, Veronika Veskrnova, Pavel Vodicka, Veronika Vymetalkova, 5-fluorouracil and other fluoropyrimidines in colorectal cancer : Past, present and future, *Pharmacology Therapeutics*, Volume 206, 2020, 107447, ISSN 0163-7258, <https://doi.org/10.1016/j.pharmthera.2019.107447>.
- [8] Zhang, L., Xing, X., Meng, F., Wang, Y., Zhong, D. (2018). Oral fluoropyrimidine versus intravenous 5-fluorouracil for the treatment of advanced gastric and colorectal cancer : Meta-analysis. *J Gastroenterol Hepatol*, 33, 209-225.
- [9] Gupta, P., Chiang, S.-F., Sahoo, P. K., Mohapatra, S. K., You, J.-F., Onthoni, D. D., ... Tsai, W.-S. (2019). Prediction of Colon Cancer Stages and Survival Period with Machine Learning Approach. *Cancers*, 11(12), 2007. doi :10.3390/cancers11122007
- [10] Subramani Mani, Yukun Chen, Xia Li, Lori Arlinghaus, A Bapsi Chakravarthy, Vandana Abramson, Sandeep R Bhave, Mia A Levy, Hua Xu, Thomas E Yankeelov, Machine

- learning for predicting the response of breast cancer to neoadjuvant chemotherapy, *Journal of the American Medical Informatics Association*, Volume 20, Issue 4, July 2013, Pages 688–695, <https://doi.org/10.1136/amiajnl-2012-001332>
- [11] Zhu, H-B, Xu, D, Ye, M, et al. Deep learning-assisted magnetic resonance imaging prediction of tumor response to chemotherapy in patients with colorectal liver metastases. *Int. J. Cancer*. 2021 ; 148 : 1717– 1730. <https://doi.org/10.1002/ijc.33427>
- [12] Shayesteh, S., Nazari, M., Salahshour, A., Sandoughdaran, S., Hajianfar, G., Khateri, M., Yaghobi Joybari, A., Jozian, F., Fatehi Feyzabad, S.H., Arabi, H., Shiri, I. and Zaidi, H. (2021), Treatment response prediction using MRI-based pre-, post-, and delta-radiomic features and machine learning algorithms in colorectal cancer. *Med. Phys.*, 48 : 3691-3701. <https://doi.org/10.1002/mp.14896>
- [13] Wei, J., Cheng, J., Gu, D., Chai, F., Hong, N., Wang, Y. and Tian, J. (2021), Deep learning-based radiomics predicts response to chemotherapy in colorectal liver metastases. *Med. Phys.*, 48 : 513-522. <https://doi.org/10.1002/mp.14563>
- [14] Lu, W, Fu, D, Kong, X, et al. FOLFOX treatment response prediction in metastatic or recurrent colorectal cancer patients via machine learning algorithms. *Cancer Med*. 2020 ; 9 : 1419– 1429. <https://doi.org/10.1002/cam4.2786>
- [15] Dalibor Hrg, Balthasar Huber, Lukas A. Huber. (2020). TCGA Chemotherapy Response Dataset. Zenodo. <http://doi.org/10.5281/zenodo.3719291>
- [16] Stintzing, S., Tejpar, S., Gibbs, P., Thiebach, L., Lenz, H.-J. (2017). Understanding the role of primary tumour localisation in colorectal cancer treatment and outcomes. *European Journal of Cancer*, 84, 69–80. doi :10.1016/j.ejca.2017.07.016
- [17] Stintzing, Sebastian et al. *European Journal of Cancer*, Volume 84, 69 - 80 <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejca.2017.07.016>
- [18] M. E. Mavroforakis and S. Theodoridis, "A geometric approach to Support Vector Machine (SVM) classification," in *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 17, no. 3, pp. 671-682, May 2006, doi : 10.1109/TNN.2006.873281.
- [19] Dreiseitl S, Ohno-Machado L. Logistic regression and artificial neural network classification models : a methodology review. *J Biomed Inform*. 2002 Oct-Dec ;35(5-6) :352-9. doi : 10.1016/s1532-0464(03)00034-0. PMID : 12968784.
- [20] Jiang F, Jiang Y, Zhi H, et al Artificial intelligence in healthcare : past, present and future *Stroke and Vascular Neurology* 2017 ;2 :doi : 10.1136/svn-2017-000101
- [21] Krasteva N, Georgieva M. Promising Therapeutic Strategies for Colorectal Cancer Treatment Based on Nanomaterials. *Pharmaceutics*. 2022 Jun 7 ;14(6) :1213. doi : 10.3390/pharmaceutics14061213. PMID : 35745786 ; PMCID : PMC9227901.
- [22] Shayesteh, S., Nazari, M., Salahshour, A., Sandoughdaran, S., Hajianfar, G., Khateri, M., Yaghobi Joybari, A., Jozian, F., Fatehi Feyzabad, S.H., Arabi, H., Shiri, I. and Zaidi, H. (2021), Treatment response prediction using MRI-based pre-, post-, and delta-radiomic features and machine learning algorithms in colorectal cancer. *Med. Phys.*, 48 : 3691-3701. <https://doi.org/10.1002/mp.14896>
- [23] Virdee, P.S.; Marian, I.R.; Mansouri, A.; Elhoussein, L.; Kirtley, S.; Holt, T.; Birks, J. The Full Blood Count Blood Test for Colorectal Cancer Detection : A Systematic Review, Meta-Analysis, and Critical Appraisal. *Cancers* 2020, 12, 2348. <https://doi.org/10.3390/cancers12092348>



Optimisation du placement des fonctions réseaux virtuelles dans un environnement Cloud.

Imadeddine SAID , Lamri SAYAD ², and Djamil Aïssani ³

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria.,
imadeddine.said@univ-bejaia.dz

²Laboratoire d'Informatique et ses Applications de M'sila (LIAM), University of M'sila, Algeria.,
lamri.sayad@univ-msila.dz

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé La virtualisation des fonctions réseaux (Network Functions Virtualization NFV) est l'un des outils technologiques clés qui caractérisent les environnements Cloud, notamment les réseaux de future génération (la 5G par exemple). la définition d'un schéma de déploiement définissant pour chaque fonction réseau virtuelle (Virtual Network Functions VNF) le serveur adéquat dans le but de répondre aux exigences de qualité de service (Quality of Service QoS). Ce problème est connu dans la littérature sous le nom de placement des fonctions réseaux. Dans cet article nous proposons une formulation linéaire multi objectif en nombres entiers afin de réduire la latence totale d'un réseau, et minimiser le nombre des serveurs utilisés, tous en maximisant le nombre de VNFs peuvent être connectés dans le système. Ainsi, Nous avons proposé un algorithme basé sur l'algorithme d'essaim de particules (Particle Swarm Optimization PSO) pour résoudre le modèle mathématique, et nous avons montré par des résultats expérimentaux pour un simple problème du déploiement des VNFs que notre algorithme propose des résultats efficaces.

Mots clés : Cloud, Virtualisation, Placement des fonctions réseaux , Optimisation, Métaheuristiques.

1 Introduction

Jusqu'à l'heure actuel, le modèle du cloud computing a joué un rôle crucial et major dans les milieux universitaires et industriels depuis sa création, et dans le monde de l'informatique et des ordinateurs d'une façon générale. Ce modèle offre des services d'accès à distance sur des serveurs au travers du réseau Internet [1]. Le Cloud fournit des services virtualisés, la NFV vise à dématérialiser les fonctions de réseaux traditionnels et en les mettant en œuvre sous forme des programmes exécutés sur des machines, appelés fonction réseau virtuelles,

*Corresponding Author

tels que : firewalls, Nat, switching...etc. Elle permet une grande flexibilité liée à l'aspect dynamique de leur déploiement, et une indépendance par rapport à la localisation du service, notamment la réduction des dépenses d'investissement (CAPEX) et des dépenses d'exploitation (OPEX) [2].

Les VNFs sont hébergées dans des centres de données (data centres) sur des serveurs plus précisément [2]. Des études approfondies ont montré que les données recueillies auprès de 5000 serveurs montrent que seuls 10 à 15 % de leur capacité totale sont utilisés, et qu'une machine inactive consomme inutilement 70 % de l'énergie des centres de données [3]. c'est pour cette raisons mentionnée, un de nos objectifs de recherche était de se consacrer sur la distribution efficace des VNFs aux serveurs d'hébergement afin de minimiser le nombre de serveurs utilisés dans les Data-Centers. Nous notons que l'optimisation de l'utilisation de serveurs permet de réduire également la consommation électrique, le coût du refroidissement et la surface nécessaire [4].

Les futurs réseaux devraient prendre en charge les services et les applications à faible latence et satisfaire efficacement les exigences de l'utilisateur et la QoS. En outre, gérer soigneusement le placement des VNFs en termes de latence sur les serveurs permet de trouver une affectation appropriées des VNFs à latence totale optimale du système [5].

Dans cet article, nous traitons le problème de placement des VNFs comme un problème de décision multicritère qui consiste à minimiser simultanément le nombre de serveurs utilisés et la latence totale du réseau tout en maximisant le nombre de VNFs qui peuvent être connectés aux serveurs d'hébergement. Il s'agit de proposer un modèle de programmation mathématique multi objective en nombre entiers. On a proposé un algorithme à base méta heuristique pour la résolution du modèle proposé en temps polynomial.

Le reste de ce document est organisé comme suit. La section 2 contient la formulation du problème et la définition du problème. La section 3 présentes l'algorithme d'optimisation qu'on a proposé. La section 4 discute des résultats expérimentaux pour un problème simple de l'affectation de VNFs. Enfin, la section 5 conclut l'article et présente les travaux futurs.

2 Modèle du système et notations

Comme nous avons montré dans la section 1, les demandes élevées des services des fonctions réseaux virtualisés et d'infrastructures dans des environnements cloud computing, malgré tous ses avantages, peuvent provoquer des conséquences Indésirables. En revanche, une bonne gestion de ces services joue un rôle majeur dans la réduction du nombre de serveurs utilisés qui implique la réduction de la consommation d'énergies des centres des données [4, 6]. D'autre part, la réduction du nombre des serveurs utilisés peut entraîner une surutilisation des ressources du serveur, ce qui peut avoir un effet important sur la latence totale du réseau [7]. Donc il est important de trouver la solution efficace de meilleur compromis entre la réduction de latence du réseau et le nombre des serveurs, et cela selon les priorités des fournisseurs de services réseau et les exigences de services.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à proposer une modélisation mathématique du problème sous la programmation linéaire entière multi objectifs pour proposer aux fournisseurs de services du cloud les solutions de meilleurs compromis entre les critères du problème définit ci-dessous. Selon nos connaissances, aucun des travaux précédents n'a étudié ce problème comme un problème de programmation multi objectif pour optimiser si-

multanément le nombre de serveurs utilisés et la latence totale du réseau tout en maximisant le nombre de VNFs qui peuvent être connectés dans le système.

On a considéré un scénario de problème similaire à celle qui décrit dans [5, 8]. Et nous avons développé leurs modèles par un seul modèle qui englobe toutes les cas critiques importants du problème et de l'est renforcé et l'est rendre plus générale.

Alors, soit un système de n VNFs doivent être connectés aux h serveurs d'hébergement où n est le nombre de VNF et h est le nombre de serveurs. L'ensemble des VNF est représenté par : $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_i\}$ et $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_j\}$ comme ensemble de serveurs. Chaque serveur j a sa propre capacité (C_j) et de même, une vNF i a l'exigence (R_i) par exemple CPU, mémoire, IO etc. ML_i est la valeur de latence maximale qu'un VNF peut prendre en charge. Une matrice de latence I est calculée par la position des utilisateurs des serveurs et de la topologie du réseau, tel que chaque élément I_{ij} de la matrice donne la latence entre l'utilisateur du VNF n_i au cas où le VNF est situé à h_j . De plus, Soit U l'ensemble de tous les utilisateurs. Chaque u_i a un ensemble de VNF assignées.

Compte tenu les données ci-dessus, on doit trouver une affectation optimale de toutes les VNFs de N à l'ensemble des serveurs H . Pour ce faire, on considère les variables de décisions binaires x_{ij} et y_j , tel que :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_i \text{ alloué à } h_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad y_j = \begin{cases} 1 & \text{si le serveur } j \text{ est utilisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la latence attendue de tous les utilisateurs vers ses VNFs est formulé par :

$$Z_1 = \sum_{n_i \in N} \sum_{h_j \in H} I_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Et le nombre des serveurs utilisés est formulé par :

$$Z_2 = \sum_{h_j \in H} y_j \quad (2)$$

En fin, la dernière fonction qui représente le nombre des VNFs peuvent connectés aux serveurs, et qu'on veut la maximiser est la suivantes :

$$Z_3 = \sum_{n_i \in N} \sum_{h_j \in H} x_{ij} \quad (3)$$

Les objectifs précédent doit être soumis aux certains contraintes des capacités des ressources et le degré de satisfaction des services fourni aux clients . Tel que :

$$\sum_{n_i \in N} R_i \cdot x_{ij} \leq C_j \cdot y_j \quad \forall h_j \in H \quad (4)$$

Cette contrainte garantit que les VNF sont placés sur un serveurs de capacité suffisante dans le cas où le serveur est sélectionné.

Nous avons encore deux contraintes, sont les suivantes :

$$\sum_{h_j \in H} I_{ij} \cdot x_{ij} \leq ML_i \quad \forall n_i \in N \quad (5)$$

$$\sum_{h_i \in H} x_{ij} \leq 1 \quad \forall n_i \in N \quad (6)$$

Dans lesquels, la contrainte (5) garantit que les VNF sensibles à la latence sont placés sous réserve de ne pas violer l'exigence de latence maximale de leurs utilisateurs. La dernière contrainte (6) garantit que chaque VNFs ne peut pas allouer dans deux serveurs différents en même temps.

3 Algorithme proposé

Dans cette section, nous présentons brièvement notre approche de résolution. Vue la complexité de notre modèle, nous avons construit notre algorithme à base méta heuristique tel que l'optimisation par essais particuliers. Pour plus de détail sur cette algorithme nous invitons le lecteur à consulter cette référence [9]. On a considéré la dimension de l'espace de recherche de notre problème d'optimisation d'écrite dans la section précédente est n le nombre totale de VNFs dans le réseau. Comme les solutions réalisables dans notre modèle ne sont pas des vecteurs réels, ce sont des matrices binaires de n ligne et h colonne, alors l'application de l'algorithme PSO nécessite une phase d'adaptation de modèle d'équations. Pour ce faire, chaque particule i de l'essaim est modélisée par son vecteur de position \vec{x}_i de n composante, chaque composante x_{ij} représente une affectation d'une VNFs j au serveur x_{ij} , avec $x_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, h\}$. $x_{ij} = 0$ signifie que la VNF j n'a affecté à aucun serveur. Il est évident qu'à l'aide des équations de déplacement des particules de l'algorithme original PSO décrit dans [9] produisent des vecteurs de positions à composantes réelles. Pour cela, Nous connectons la fonction j à l'un des serveurs $E(x_{ij})$ ou $E(x_{ij}) + 1$ où $E(x_{ij})$ est la partie entière de x_{ij} . Ainsi, nous avons fixé une vitesse maximale V_{max} sur chaque dimension de chaque particule, car la vitesse de cette dernière peut être exposée à d'énormes oscillations et provoque la divergence de l'algorithme[10].

Dans notre algorithme d'optimisation, nous avons considéré l'utilisation d'un nombre maximale de fonctions réseaux virtualisés connectés aux serveurs comme une restriction conditionnelle dans la résolution.

4 Evaluation des résultats

Afin d'évaluer la performance de notre algorithme d'optimisation et montrer l'efficacité de notre solution proposée, nous avons effectuait des simulations de certains scénarios du problème de déploiement VNF de différentes tailles. Nous avons implémenté l'algorithme en C++, où la plateforme des expériences est un PC équipée de Windows 10, 64 bits dont le processeur est un i3 1,9 Ghz et la RAM est de 12.00 Go.

En utilisant le solveur IBM CPLEX, nous pouvons calculer la solution optimale exacte d'un seul critère pour seulement un réseau de petite taille (ne dépasse pas 60 VNFs avec 15 serveurs) à cause de la complexité du modèle mathématique. C'est pour cela, nous avons fait en premier lieu une comparaison de nos solutions proposées avec les solutions optimales exactes du problème calculé par le solveur IBM CPLEX. Nous avons utilisé la moyenne des valeurs des solutions atteintes durant 100 exécutions (Avg) comme une mesure de comparaison, et nous enregistrons les meilleures valeurs obtenues entre eux. Concernant les pa-

ramètres du modèle, leurs valeurs ont pris aléatoirement dans un intervalle de valeurs réelles pour chaque simulation, tels que : les capacités des serveurs et les exigences de capacités des VNFs sont respectivement dans l'intervalle 35-80 et 1-15. La latence maximale qu'un VNFs peut tolérer et les latences entre les VNF et les serveurs hébergés sont respectivement dans l'intervalle 35-60 et 15-25. Ainsi, pour mieux ajuster les paramètres de l'algorithme avec notre problème de placement des VNFs, nous avons varié les paramètres de l'algorithme PSO pour les différents scénarios. Dans cet article, nous allons présenter les résultats obtenus par la configuration standard de l'algorithme PSO (les coefficients d'accélération égale à 2.0) [11]. Une synthèse des exécutions pour différents scénarios de VNFs et de serveurs, est présentée dans le tableau 1.

TABLE 1 – Comparaisons des résultats

VNFs	Serveurs (HD)	Taille de population	Nombre d'itérations	Latence optimale	Avg	Meilleur sol	HD optimal	HD utilisé
20	5	10	150	380	380.45	380	5	5
	10	7	40	322	322	322	8	8
	15	7	40	326	326	326	10	10
	20	5	30	318	318	318	11	12
30	5	25	250	564	565.03	564	5	5
	10	10	50	498	498	498	9	9
	15	10	50	480	480	480	12	12
	20	10	50	475	475	475	10	11
50	10	25	150	827	827.21	827	10	10
	15	20	100	798	798	798	11	12
	20	20	100	793	793	793	/	18
60	10	30	250	993	993.15	993	10	10
	15	30	250	951	951.634	951	15	15

Nous constatons dans le tableau 1, que notre algorithme donne des résultats presque tous identiques aux solutions optimales exactes fournies par le programme CPLEX en terme de latence. Et ces résultats sont encore meilleurs que ceux de Ghai et al dans [8, 12] pour les scénarios de problème qui ne dépasse pas 60 VNFs. Le tableau représente également les comparaisons en termes de nombre de serveurs utilisés. Nous avons également utilisé le logiciel CPLEX pour trouver le nombre minimum de serveurs pouvant être utilisés en fixant la valeur optimale exacte de la latence trouvée précédemment comme une contrainte du problème. Nous constatons que notre algorithme atteint le nombre minimum exact de serveurs pouvant être utilisés tous en conservant la même latence optimale trouvée précédemment. Par conséquent, on peut considérer que nos solutions proposées sont plus importantes en comparaison avec les solutions optimales exactes calculées en considérant seulement le critère de la minimisation de la latence, car la réduction du nombre de serveurs est également un facteur très important pour réduire la consommation électrique, le coût du refroidissement, la surface nécessaire pour l'équipement, et les émissions de gaz Co2, Comme nous l'avons montré dans la section 2 de ce article. Il convient de noter que ces solutions proposées par notre algorithme sont produites dans un délai très raisonnable.

5 Conclusion





Dans cet article, nous avons traité le problème d'optimisation de placement des VNFs dans les serveurs comme un problème d'affectation multi objective en nombre entier afin de minimiser la latence totale d'un réseau et minimiser le nombre de serveurs utilisé, en maximisant le nombre des VNFs pourrait être connectés. Nous avons proposé la formulation du problème et un algorithme basé sur l'algorithme d'essaim de particules PSO pour résoudre le modèle mathématique. Et compte tenu les résultats expérimentaux, On conclut que notre algorithme proposé fournit des résultats presque identiques aux solutions optimales exactes dans un délai très raisonnable, pour différents scénarios de VNFs et de serveurs d'un réseau à petite échelle. Dans le proche avenir, nous prévoyons d'améliorer notre algorithme pour fournir encore de meilleurs résultats, et comparer nos résultats avec les méthodes existant dans la littérature.

Références

- [1] Sadiku, MN, Musa, SM et Momoh, OD (2014). Cloud computing : opportunités et défis. Potentiels IEEE , 33 (1), 34-36.
- [2] Bo Yi, Xingwei Wang, Keqin Li, Sajal k. Das, Min Huang, A comprehensive survey of Network Function Virtualization, Computer Networks, Vol. 133, pp. 212-262, 2018.
- [3] Sinha, R., Purohit, N., Diwanji, H. (2011). Power aware live migration for data centers in cloud using dynamic threshold.
- [4] Safieddine, I. (2015). Optimisation d'infrastructures de cloud computing sur des green datacenters (Doctoral dissertation, Université Grenoble Alpes).
- [5] Cziva R, Pezaros DP (2017b) On the latency benefits of edge nfv. In : 2017 ACM/IEEE symposium on architectures for networking and communications systems (ANCS), pp 105–106. <https://doi.org/10.1109/ANCS.2017.23>.
- [6] R. Cziva, C. Anagnostopoulos and D. P. Pezaros, "Dynamic, Latency-Optimal vNF Placement at the Network Edge," IEEE INFOCOM 2018 - IEEE Conference on Computer Communications, Honolulu, HI, USA, 2018, pp. 693-701, doi : 10.1109/INFOCOM.2018.8486021.
- [7] Leivadeas, A., Kesidis, G., Ibnkahla, M. et Lambadaris, I. (2019). Optimisation du placement VNF à la périphérie et dans le cloud. Internet du futur , 11 (3), 69.
- [8] Ghai K, et all (2020) Efcient algorithms to minimize the end to end latency of edge network function virtualization. <https://doi.org/10.1007/s12652-019-01630-6>
- [9] Kennedy, J., Eberhart, R. (1995, November). Particle swarm optimization. In Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks (Vol. 4, pp. 1942-1948). IEEE.
- [10] M.Clerc : L' optimisation par essaim particulaire : versions paramétriques et adaptatives. Ed. Hermes science publications, Lavoisier, Paris.2005
- [11] A. M. Abdelbar and S. Abdelshahid, "Instinct-based PSO with local search applied to satisfiability," 2004 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE Cat. No.04CH37541), 2004, pp. 2291-2295 vol.3, doi : 10.1109/IJCNN.2004.1380982.

- [12] K.Ghai and Choudhury, Salimur and Yassine, Abdulsalam : A stable matching based algo-rithm to minimize the end-to-end latency of edge nfv. Volume 151, pages 377–384, Procedia Computer Science, Elsevier 2019.

Classification des styles d'apprentissage à base des machines à vecteurs de support

Zohra Mehenaoui , Houda Tadjer ², Safia Bendjebar , and Yacine Laffi ⁴

¹Laboratoire LabSTIC, Université 8 Mai 1945, Guelma, Algérie,
mehenaoui.zohra@univ-guelma.dz

²Laboratoire LabSTIC, Université 8 Mai 1945, Guelma, Algérie,
tadjer.houda@univ-guelma.dz

³Laboratoire LabSTIC, University 8 Mai 1945, Guelma, Algérie,
bendjebar.safia@univ-guelma.dz

⁴Laboratoire LabSTIC, Université 8 Mai 1945, Guelma, Algérie,
laffi.yacine@univ-guelma.dz

Résumé Les styles d'apprentissage des apprenants constituent une des caractéristiques importantes lors de la modélisation de l'apprenant dans les environnements d'apprentissage humain ou les systèmes e-Learning. Ils peuvent être utilisés pour adapter ou personnaliser le contenu d'apprentissage ou même pour suggérer des recommandations en fonction des préférences des apprenants. L'objectif de ce travail est de proposer une méthode pour la classification des styles d'apprentissage des apprenants en utilisant une des techniques de l'intelligence artificielle, qui est les machines à vecteurs de support (SVM : pour Support Vector Machines). Cette méthode est basée sur l'analyse du comportement des apprenants dans un environnement d'apprentissage en ligne. La méthode proposée a été testée sur un échantillon réel des étudiants et quatre noyaux de la méthode proposée ont été testés. Les noyaux "polynomial" et "linéaire" ont fait preuve d'une grande capacité à classer les styles d'apprentissage.

MSC: MSC code1 ; MSC code2 ; more

Mots clés : Style d'Apprentissage ; classification ; Détection Automatique ; Machines à Vecteurs de Support ; SVM ; Modèle de Felder et Silverman

1 Introduction

Les apprenants acquièrent et traitent l'information de différentes manières [6] en voyant et en écoutant ; réfléchissant et agissant ; raisonnant logiquement et intuitivement ; mémorisant et visualisant ; établissant des analogies et construisant des modèles mathématiques. La

*Corresponding Author

notion de style d'apprentissage repose sur ces différences individuelles d'apprendre. Le style d'apprentissage d'un individu est son mode personnel de saisie et de traitement de l'information. En pratique, et en d'autres termes, le style d'apprentissage est la manière préférentielle d'aborder et de résoudre un problème [5]. Les recherches et les théories éducatives confirment que la prise en considération des styles d'apprentissage dans les environnements d'apprentissage à distance peut améliorer la performance académique et la satisfaction des apprenants[6]. L'approche traditionnelle de détermination des styles d'apprentissage est basée sur des questionnaires élaborés par les psychologues. Dans ces questionnaires, les apprenants sont appelés à répondre à un ensemble de questions correspondant à un modèle de styles d'apprentissage pour identifier leurs styles d'apprentissage. Bien que cette approche soit assez simple, elle présente plusieurs faiblesses notamment le manque de conscience des apprenants de leurs propres préférences. De plus, l'approche traditionnelle suppose que les styles d'apprentissage sont fixes et ne changent pas avec le temps. Afin de pallier ces limitations, plusieurs recherches s'intéressent à la détection automatique des styles d'apprentissage en analysant le comportement d'apprentissage des apprenants dans les environnements d'apprentissage en ligne [12, 15, 4, 17]. A ce stade, la question qui se pose est la suivante : quelles sont les caractéristiques du comportement d'apprentissage qui permettent de détecter automatiquement les styles d'apprentissage des apprenants dans un environnement d'apprentissage en ligne ?

Dans ce travail, nous proposons une approche à base de noyaux pour la détection automatique des styles d'apprentissage des apprenants. L'approche proposée est basée sur l'investigation du comportement d'apprentissage des apprenants dans un environnement d'apprentissage en ligne.

Dans notre travail, nous nous intéressons au Modèle de Styles d'Apprentissage de Felder et Silverman (MSAFS). Le MSAFS est le modèle le plus utilisé et le plus approprié pour les environnements d'apprentissage à distance. Le reste de cet article est organisé comme suit : dans la section 2, nous présentons la revue de littérature sur les méthodes de détection automatique des styles d'apprentissage. Dans la section 3, nous décrivons la démarche suivie par l'approche proposée. La section 4 est réservée à l'expérimentation effectuée et les résultats obtenus. Finalement, la conclusion générale et les travaux futurs sont présentés dans la section 5.

2 Travaux connexes

Dans la littérature, plusieurs modèles de style d'apprentissage existent : Kolb [9] , Honey et Mumford [13], Dunn et Dunn [2], Felder-Silverman [6] et le modèle de VARK [7]. Avant d'aborder les méthodes utilisées pour identifier les styles d'apprentissage automatiquement, nous donnons un aperçu sur le MSAFS pour lequel nous avons opté dans ce travail.

2.1 Le modèle de style d'apprentissage de Felder et Silverman

Le modèle de style d'apprentissage de Felder et Silverman (MSAFS) fait référence à quatre dimensions et chaque dimension définit deux styles d'apprentissage opposés : traitement (actif / réflexif), perception (sensoriel / intuitif), entrée (visuel / verbal) et compréhension (séquentiel / global)[6]. Ces quatre dimensions sont définies comme suit :

- **Traitement de l'information** : concerne la manière préférée par l'apprenant pour traiter l'information. Un apprenant actif préfère les activités physiques et le travail en groupe, alors que le réflexif préfère la réflexion, l'analyse et travailler seul ;
- **Perception de l'information** : cette dimension s'intéresse au type d'informations que l'apprenant préfère percevoir. Les apprenants sensoriels sont concrets, pratiques et orientés vers les faits et les procédures, alors que les intuitifs préfèrent les concepts abstraits, ils sont innovateurs et orientés vers les théories ;
- **Entrée de l'information** : concerne le format de présentation et d'encodage des informations préféré par les apprenants. Un apprenant visuel préfère les présentations visuelles avec des vidéos, images, démonstrations, diagrammes, alors que le verbal préfère les explications écrites ou verbales ;
- **Compréhension de l'information** : concerne la manière de progression des apprenants pour comprendre. Séquentiel avec des petits pas dans un ordre linéaire, ou globale avec des grands pas avec un ordre aléatoire.

2.2 Les techniques de détection automatique des styles d'apprentissage

Différentes méthodes ont été utilisées pour identifier les styles d'apprentissage automatiquement. Ces méthodes sont différentes les unes des autres en fonction de : (i) les attributs utilisés (les facteurs de personnalités, les facteurs de comportement, etc) ; (ii) les techniques utilisées (les arbres de décisions (Decision Tree : DT), les réseaux bayésiens (Bayesian Network : BN), la classification bayésienne (Naive Bayes : NB), l'analyse discriminante linéaire (Linear Discriminant Analysis : LDA), la régression logistique (Logistic regression : LR), les k plus proches voisins (K Nearest Neighbors : KNN), les chaînes de markov cachés (Hidden Markov Model : HMM), le Forêt d'arbre décisionnels (Random Forest : RF), les réseaux de neurones (Neural Networks : NN), les machines à vecteurs de support (Support Vector Machines : SVM), etc) ; et (iii) les plateformes d'apprentissage utilisées (Learning Management System : LMS). Le tableau 1 présente quelques travaux récents dans ce domaine.

3 Une approche automatique à base de noyaux pour la détection des styles d'apprentissage

L'objectif de ce travail est de proposer une approche automatique pour la détection automatique des styles d'apprentissage basée sur l'analyse du comportement d'apprentissage des apprenants. La figure 1 illustre la méthodologie que nous avons adoptée pour la classification automatique des styles d'apprentissage.

3.1 Préparation des données pour la construction du modèle

Toute action issue d'une interaction avec le système d'apprentissage (accès aux objets d'apprentissage (OB) : cours, exercices, exemples, accès aux outils de communication (forum, chat), les auto-évaluations, etc) est sauvegardée par le module de collection de traces dans

	Modèle de SA choisi	La méthode de détection utilisée	Le LMS utilisé
Rasheed et al [15]	MSAFS	DT, RF, SVM, LR, LDA, KNN, NB	
Dutsinma et Temde [3]	VARAK	DT	-
Troussas et al [17]	MSAFS	Multi classifieur : KNN-SVM-NB	
El Aissaoui et al [4]	MSAFS	Fuzzy C-Means	Sup'Management
Nafea et al [14]	MSAFS	-	Moodle
Sheeba et Krishnan [16]	MSAFS	DT	Moodle
Hasibuan et al [8]	VARAK	NN	-
Liyange et al [10]	MSAFS	DT (J48), BN, NB, RF	Moodle
Bousbia et al [1]	MSAFS	KNN, DT, BN	eFAD
Maaliw III [11]	MSAFS	NB, BN, DT (J48, NB)	Moodle

TABLE 1 – Quelques travaux relatifs à la détection automatique des styles d'apprentissage

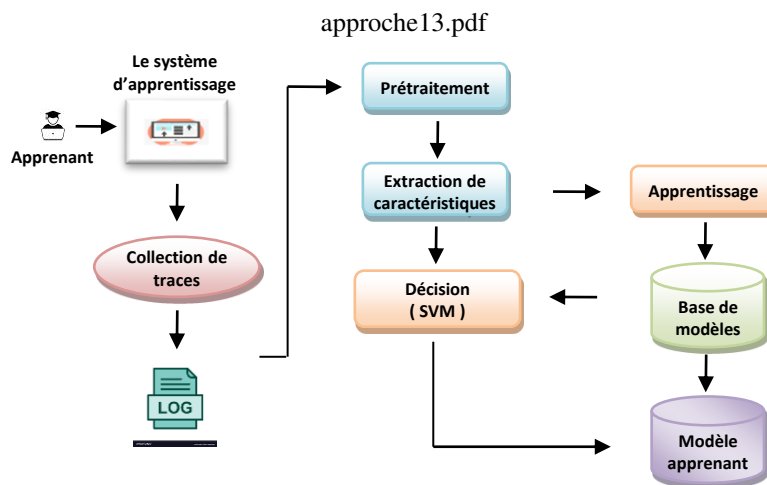


FIGURE 1 – Description de l'approche proposée

des fichiers log. Le processus de traitement et d'analyse de données passe par la phase de prétraitement de données et la phase d'extraction de caractéristiques. Le prétraitement est appliqué sur les fichiers log pour éliminer les actions inutiles, irrégulières et manquantes, et ne garder que les traces utiles servant comme caractéristiques pertinentes pour le processus de détection automatique des styles d'apprentissage.

La phase d'extraction de caractéristiques est basée sur les caractéristiques distinctives entre les quatre dimensions des styles d'apprentissage selon le MSAFS (Actif/Réfléctif (A/R), Sensoriel/Intuitif (S/I), Visuel/Verbal (V/G) et Séquentiel/Global (S/G)). Le tableau 2 présente

les caractéristiques que nous avons choisi pour identifier automatiquement les styles d'apprentissage. Nous proposons une correspondance entre les styles d'apprentissage et le comportement d'apprentissage pertinent dans un environnement d'apprentissage en ligne. Le signe + (Respectivement le signe -) indique une forte (Respectivement une faible) préférence pour la caractéristique correspondante du point de vue actif, sensoriel, visuel et séquentiel.

	Les caractéristiques	A/R	S/I	V/R	S/G
OB	Le taux de visite des objets d'apprentissage	-	-		
	Le temps passé sur les objets d'apprentissage	-	-		
	Le taux de visite des objets d'apprentissage visuels			+	
	Le taux de visite des vidéos			+	
	Le taux de visite des objets d'apprentissage verbaux			-	
Forum	Nombre de messages sur le forum (par rapport au taux de visite moyen)	-	-		
	Le taux de visite des objets d'apprentissage visuels	+	+	-	
	Le taux de visite du forum par rapport à la moyenne	-		-	
	Le temps passé dans le forum			-	
Test	Le taux des tests effectués (basé sur le nombre total des tests disponible)	+	+		
	Le temps passé dans les tests (basé sur le temps consacré aux tests)	-	+		
Exercices	Le taux des exercices effectués (basé sur les exercices disponibles)	+	+		
	Le temps émis pour les exercices (basé sur le temps consacrés aux exercices)	+			
Exemples	Le taux des exemples effectués (basé sur les exemples disponibles)		+		
	Le temps émis pour les exemples (basé sur le temps consacré)		+		
Résumés	Le temps passé aux résumés			-	
	Le taux de visite des résumés				-
Navigation	Le nombre de fois où un objet d'apprentissage a été ignoré via le menu de navigation (ou les boutons suivant et précédent)				-

TABLE 2 – Les caractéristiques pertinentes pour les quatre dimensions du MSAFS

3.2 Classification des styles d'apprentissage

3.2.1 Apprentissage

Les vecteurs de caractéristiques construits pendant les deux phases précédentes seront exploitées par les SVMs pendant la phase de décision. Pour ce faire, nous devons passer

par la phase d'apprentissage pour estimer un modèle à partir des caractéristiques choisies (voir 2) et les règles de classification construites. Des fichiers modèles sont générés à la fin de l'apprentissage (voir la figure 1).

3.2.2 Décision

La dernière étape dans le processus de détection automatique des styles d'apprentissage est la décision. Les SVMs ont été choisis comme modèle de classification. Le SVM est un modèle discriminant qui tente de minimiser les erreurs d'apprentissage tout en maximisant la marge séparant les données d'apprentissage. L'idée essentielle des SVMs consiste à utiliser des fonctions noyaux (kernel function) et projeter les données de l'espace d'entrée dans un espace de plus grande dimension, où les données deviennent linéairement séparables.

Les classes de sortie des classifieurs sont les styles d'apprentissage des apprenants selon le MSAFS.

4 Expérimentation

4.1 Participants

L'approche proposée a été expérimentée sur un échantillon d'étudiants du département d'informatique de l'université 8 Mai 1945 Guelma (Algérie). Cet échantillon est composé de 73 étudiants. Les données de 25 étudiants ont été utilisées pour le test, alors que les données de 48 étudiants ont été utilisées pour l'apprentissage. Les caractéristiques de classification ont été extraites en se basant sur le comportement d'apprentissage des 73 étudiants sur le système d'apprentissage en ligne ADLS (ADLS : Automatic Detection of Learning Styles), que nous avons implémenté, pendant le semestre 1 de l'année universitaire 2020-2021 sur trois cours en ligne : « Systèmes Experts », « Techniques de l'intelligence artificielle » et « Compilation ».

4.2 Résultats obtenus

Les résultats obtenus après l'utilisation de quatre noyaux (Linéaire, Polynomial, RBF, Sigmoïde) du modèle SVM sont présentés dans le tableau ??résultatstabelle des résultatsangage de programmation utilisé est python. Ce choix se justifie par la richesse de ses bibliothèques dans le domaine de l'apprentissage machine (Machine Learning). Les taux de classification obtenus auprès des quatre noyaux sont présentés dans le tableau suivant :

Les styles d'apprentissage	Linéaire	Polynomial	RBF	Sigmoïde
A/R	92%	92%	92%	88%
S/I	92%	92%	88%	88%
V/R	92%	92%	88%	92%
S/G	88%	92%	72%	84%
Taux de classification	91%	92%	85%	88%

TABLE 3 – Les taux de classification obtenus

5 Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans ce papier constitue une partie d'une étude qui vise à personnaliser un environnement d'apprentissage en ligne en fonction de plusieurs critères. Les styles d'apprentissage font partie de ces critères. Dans ce travail, nous avons proposé une méthode de détection automatique des styles d'apprentissage à base de noyaux et selon le MSAFS. D'après les résultats obtenus, nous remarquons que le noyau polynomiale donne le meilleur taux de classification (moyenne = 92%). Le noyau linéaire présente un taux de classification assez proche de celui obtenu par le noyau polynomiale (moyenne = 91%). Ces résultats confirment la possibilité de détecter automatiquement les styles d'apprentissage en analysant le comportement d'apprentissage des apprenants, dans un environnement d'apprentissage en ligne.

Cette étude peut aider les éducateurs à améliorer la performance de l'apprentissage en prenant en compte les styles d'apprentissage des apprenants d'une manière automatique et dynamique au même temps. Pour les travaux futurs, l'approche proposée peut être utilisée pour adapter le contenu d'apprentissage en fonction des styles d'apprentissage de chaque apprenant. En outre, des règles de recommandation peuvent être utilisées pour personnaliser l'environnement d'apprentissage, en prenant en considération les préférences des apprenants.


Références

- [1] Nabila Bousbia, Jean-Marc Labat, Amar Balla, and Issam Rebai. Supervised classification on navigational behaviours in web-based learning systems to identify learning styles. *International Journal of Learning Technology*, 6(1) :24–45, 2011.
- [2] Rita Dunn and Kenneth Dunn. Learning style as a criterion for placement in alternative programs. *The Phi Delta Kappan*, 56(4) :275–278, 1974.
- [3] Lawal Ibrahim Faruk Dutsinma and Punnarumol Temdee. Vark learning style classification using decision tree with physiological signals. *Wireless Personal Communications*, 115(4) :2875–2896, 2020.
- [4] Ouafae El Aissaoui, Yasser El Alami El Madani, Lahcen Oughdir, and Youssef El Alioui. A fuzzy classification approach for learning style prediction based on web mining technique in e-learning environments. *Education and Information Technologies*, 24(3) :1943–1959, 2019.
- [5] Richard M Felder. Reaching the second tier. *Journal of college science teaching*, 23(5) :286–290, 1993.
- [6] Richard M Felder, Linda K Silverman, et al. Learning and teaching styles in engineering education. *Engineering education*, 78(7) :674–681, 1988.
- [7] Neil D Fleming. I'm different; not dumb. modes of presentation (vark) in the tertiary classroom. In *Research and development in higher education, Proceedings of the 1995 Annual Conference of the Higher Education and Research Development Society of Australasia (HERDSA)*, HERDSA, volume 18, pages 308–313, 1995.

- [8] Muhammad Said Hasibuan, Lukito Edi Nugroho, and Paulus Insap Santosa. Model detecting learning styles with artificial neural network. *Journal of Technology and Science Education*, 9(1) :85–95, 2019.
- [9] DA Kolb. *Experiential learning*. Englewood cliffs, nj : Prenticehall, 1984.
- [10] Madura Prabhani Pitigala Liyanage, Lasith Gunawardena KS, and Masahito Hirakawa. Detecting learning styles in learning management systems using data mining. *Journal of Information Processing*, 24(4) :740–749, 2016.
- [11] Renato Racelis Maaliw III. Classification of learning styles in virtual learning environment using data mining : A basis for adaptive course design. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 3(7) :56–61, 2016.
- [12] zohra Mehenaoui, Yacine Lafifi, and Layachi Zemmouri. Learning behavior analysis to identify learner's learning style based on machine learning techniques. *J. Univers. Comput. Sci.*, To appear, 2022.
- [13] Alan Mumford and Peter Honey. *The manual of learning styles*. P. Honey, Maidenhead, 1992.
- [14] Shaimaa M Nafea, François Siewe, and Ying He. A novel algorithm for dynamic student profile adaptation based on learning styles. In *Proceedings of SAI Intelligent Systems Conference*, pages 29–51. Springer, 2019.
- [15] Fareeha Rasheed and Abdul Wahid. Learning style detection in e-learning systems using machine learning techniques. *Expert Systems with Applications*, 174 :114774, 2021.
- [16] T Sheeba and Reshmy Krishnan. Prediction of student learning style using modified decision tree algorithm in e-learning system. In *Proceedings of the 2018 International Conference on Data Science and Information Technology*, pages 85–90, 2018.
- [17] Christos Troussas, Akrivi Krouska, Cleo Sgouropoulou, and Ioannis Voyiatzis. Ensemble learning using fuzzy weights to improve learning style identification for adapted instructional routines. *Entropy*, 22(7) :735, 2020.



Système Efficace de Filtage des Spomments Maghrébins basé sur l'Apprentissage Profond Récurrent

Marouane Kihal  and Lamia Hamza ²

¹ Laboratoire d'Informatique Médicale (LIMED), Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie, marouane.kihal@univ-bejaia.dz

² Laboratoire d'Informatique Médicale (LIMED), Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie, lamia.hamza@univ-bejaia.dz

Résumé Malgré l'évolution rapide des services des réseaux sociaux, les commentaires acceptent de plus en plus de spams. Plus précisément, les commentaires contenant des dialectes dérivés comme l'arabe occidental utilisé dans la région du Maghreb. Cet article, propose un système multilingue efficace pour la détection des spomments, qui sont des commentaires non pertinents publiés sur un réseau social et pouvant être dangereux aux utilisateurs. Nos expériences sont effectuées sur un dataset collecté par les auteurs vu qu'il n'existe pas de datasets auparavant. Notre système est basé sur l'algorithme d'apprentissage profond récurrent LSTM (Long Short-Term Memory) qui a montré son efficacité de classification des spomments Maghrébins en surmontant tous les algorithmes d'apprentissage automatique par une justesse égale à 95.29% et un score F1 égale à 94.87%.

Mots clés : Filtrage des Spams ; Machine learning ; Deep learning ; LSTM ; Maghreb

1 Introduction

Le Maghreb est une région qui comprend l'Algérie, la Tunisie, le Maroc, la Mauritanie et la Libye. Egalement connue sous le nom d'Afrique du Nord-Ouest, Northwest Africa en anglais.

L'arabe maghrébin est un mélange de dialectes arabes qui se distinguent clairement des autres dialectes [6]. La langue arabe est connue par sa délicatesse et sa complexité morphologique [11]. En outre, plusieurs mots arabes peuvent être écrits à partir du même radical en ajoutant des préfixes, des affixes et des suffixes. Un même mot arabe peut avoir plusieurs significations en même temps. Les lettres aussi peuvent être écrites sous différentes formes en changeant leurs positions dans le mot.

*Corresponding Author

La plupart des internautes Maghrébins affirment que les commentaires dans les réseaux sociaux sont devenus insupportables à cause des spams commentaires connus sous le nom de "Spomment" qui est une combinaison des deux mots "spam" et "comment". Les spomments sont des commentaires non pertinents publiés sur un réseau social par des spammeurs pour atteindre différents objectifs comme le détournement de l'opinion publique, le partage de virus, etc. Ils sont généralement identifiés par la présence de réponses sans rapport avec le contenu de la publication[4]. Les spomments en arabe et en arabe et Français mélangés dans les pays du Maghreb sont difficiles à traiter en raison du manque de filtre anti-spam efficace.

Les méthodes d'apprentissage automatique et d'apprentissage profond se révèlent efficaces pour la classification des textes, tels que l'analyse des sentiments et la détection des spams. Cependant, les chercheurs intéressés par la langue arabe ou l'arabe maghrébin sont encore très minoritaires par rapport à son usage sur le web. Nous avons lancé des recherches dans google Scholar en utilisant les termes : Spam détection avec les mots English, Chinese, French, Arabic ou Maghreb. Les résultats obtenus sont illustrés dans la Figure 1 qui montre un grand écart entre les travaux de détection des spams du dialecte Maghrébin par rapport à d'autres langues.

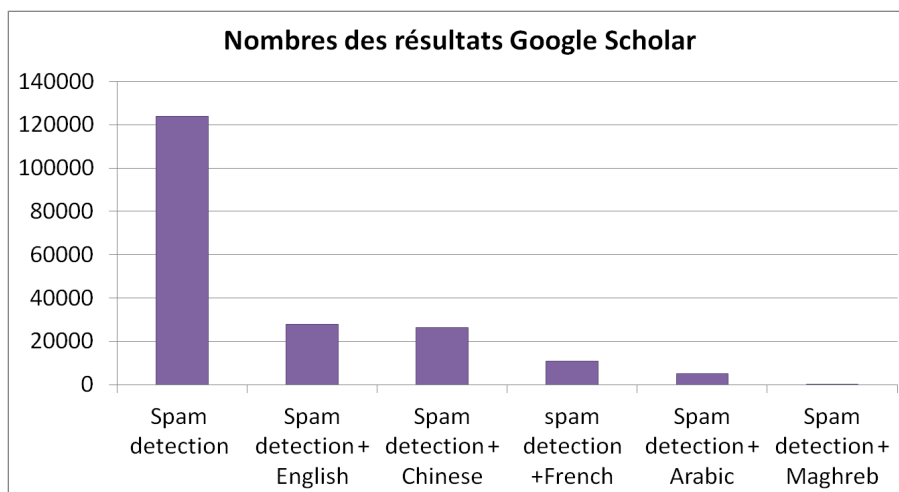


FIGURE 1 – Diagramme à bâtons des recherches dans Google Scholar

Notre principal défi est de trouver une solution pour les millions d'utilisateurs de réseaux sociaux en langue arabe qui se battent avec des centaines de spomments reçu chaque jour dans leur compte Facebook, Twitter, etc. Précisant que, l'absence de Datasets de commentaires spam (spomments) en arabe rend notre contribution novatrice. Les contributions de notre article, se résume en :

- Un système multilingue efficace de détection des spomments destiné pour les utilisateurs Maghrébins. Notre système traite les commentaires en Français, en Arabe et en

Arabe occidental .

- Une comparaison entre les algorithmes d'apprentissage automatique et notre modèle en terme de trois métriques d'évaluation.
- Un nouveau mini-dataset composé des commentaires étiquetés spams et légitimes, pour entraîner les classificateurs à contrer les spomments dans la région du Maghreb.

Ce travail est structuré comme suit : la Section 2 présente les travaux connexes. La Section 3 présente l'architecture de notre système de filtrage des spomments. La Section 4 présente les expériences et les résultats obtenus. La Section 5 conclut notre article et donne quelques perspectives pour les travaux à venir.

2 Travaux Connexes

La plupart des travaux liés à la détection des spams sont basés sur l'apprentissage automatique [10, 13] et l'apprentissage profond [15, 3]. Adel et al.[1] ont proposé un filtrage bilingue de Short Message Service (SMS). Ce filtre est destiné à détecter les spams en anglais et en arabe sur la base du contenu du SMS. Les auteurs ont utilisé Naïve Bayésien sur quatorze caractéristiques extraites tels que la longueur du message, les mots spams, la présence d'URL, etc. Alharthi et al.[2] ont proposé un détecteur de tweets arabes de faible qualité (spam) en temps réel. Cet outil léger est composé de deux modèles : le premier est basé sur le filtrage du contenu textuel des tweets arabe, en utilisant des algorithmes d'apprentissage profond, CNN (convolutional neural networks) [9] et LSTM(Long Short-Term Memory) [5], afin de classer les publications en faible qualité ou non. Le second modèle est basé sur la classification du compte utilisateur par l'utilisation de ses derniers tweets afin de les classer comme malveillants ou authentiques. Sonowal et al.[12] ont proposé un modèle, pour la détection des messages spams. Ils ont choisi d'utiliser des algorithmes de corrélation pour extraire les 39 caractéristiques les plus pertinentes des messages. Ensuite, ils ont appliqué des classificateurs tels qu'AdaBoost, Arbre de décision et Random Forest.

L'étude des travaux antérieurs a montré qu'il y a eu beaucoup d'études sur le filtrage des spams pour la langue anglaise [14, 8] mais très peu pour la langue arabe. Parmi les travaux traitant les spams arabes il n'y a aucun travail permettant de filtrer les commentaires utilisant le dialecte Maghrébin. Pour cela, notre principale contribution consiste à développer un système de filtrage des commentaires Maghrébins.

3 Approche proposée

Pour entraîner notre filtre anti-spomment, nous avons commencé par le nettoyage et le prétraitement des données. Ensuite, un modèle d'apprentissage en se basant sur les algorithmes de classification est construit. Ce modèle est utilisé en phase de test pour décider si le commentaire est légitime ou spam. La Figure 2 illustre l'architecture de notre système de filtrage des spomments.

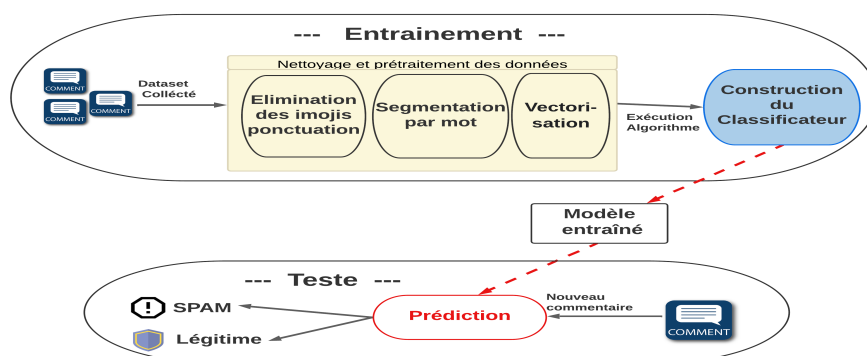


FIGURE 2 – Architecture de notre système de filtrage des spomments

3.1 Nettoyage et prétraitement des données

Dans la phase de nettoyage et prétraitement, nous avons opté pour un nettoyage léger qui se résume sur l'élimination des emojis et les signes de ponctuation dans le texte du commentaire, ensuite nous avons utilisé l'outil de segmentation Keras [7] pour fragmenter les mots en jetons basés sur l'espace. Par exemple, [" Madouli compte netflix gratuit !! :D "], sera nettoyé et segmenté comme suit : ["Madouli", "compte", "netflix", "gratuit"]. Après cette étape, chaque mot est codé en vecteur à l'aide de Tf-idf Vectorizer de Keras, ces vecteurs seront l'entrée des classificateurs. Ainsi, chaque commentaire de test passera par le nettoyage et le prétraitement avant la phase de classification.

3.2 Algorithme de classification

L'apprentissage Automatique (en anglais Machine Learning), est un ensemble de techniques et d'algorithmes pour entrainer la machine à apprendre et faire des prédictions à partir des données appelées données d'entrainement. Parmi ces algorithmes on trouve :

- Machine à vecteurs de support (SVM pour Support Vector Machines) qui cherche un hyperplan entre deux différentes catégories,
- Arbre de décision (DT pour Decision Tree), il est appelé arbre de décision à cause de sa forme graphique commençant par une racine suivie des noeuds fils,
- K plus proches voisins (KNN pour K-Nearest Neighbors) son idée principale est de prédire que l'individu appartient à la même catégorie qui a le plus d'occurrence dans les K plus proches voisins en terme de distance,
- Forêt d'arbres décisionnels (RF pour Random Forest), il est basé sur une forêt d'arbres de décision.

Aujourd'hui l'apprentissage profond (en anglais Deep Learning) est l'un des plus efficaces méthodes de classification il est basé sur les réseaux de neurones. Ainsi, pour pouvoir classifier automatiquement les commentaires, nous avons entrainé un modèle d'apprentissage profond récurrent (RNN) possédant une mémoire interne (LSTM), il est connu aussi par son efficacité en classification des textes. Notre modèle RNN est composé de deux couches Bidirectionnelles du type Long Short-Term Memory (LSTM), une de taille 64 et l'autre 32,

suivie par des couches entièrement connectées. Notre classificateur a une seule sortie avec une fonction d'activation Sigmoid, sa formule est représenté par l'équation 1.

$$\text{Sigm}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (1)$$

Où : x est la somme pondérée des entrées du neurone formel.

La sortie de notre réseau représente la probabilité d'appartenance à la classe spam. Si la sortie est plus grande que 0.5 le commentaire est considéré comme spomment. Pour vérifier l'efficacité de notre algorithme nous avons entraîné plusieurs algorithmes d'apprentissage automatique et nous avons comparé les performances de ces classificateurs avec notre modèle dans la Section 4.

4 EXPÉRIENCES ET RÉSULTATS

Aucune ressource publique n'a été trouvée pour les expériences. Afin de fournir un ensemble de données de commentaires Maghrébins, nous avons collecté manuellement 425 commentaires depuis des pages Facebook Maghrébines tel que Hafid Derradji, Nessma Tv, etc. Nous avons étiqueté par 1 le spomment et par 0 le commentaire légitime. Les données de formation sont composées de 203 Spomments et 222 commentaires légitimes. Ensuite ces données ont été divisées en 80% pour l'entraînement et 20% pour la validation. Le langage de programmation Python a été choisi pour entraîner nos classificateurs. Pour l'évaluation, la justesse, le score F1, et l'AUC sont les métriques utilisées.

D'après le résultat illustré dans le Tabaleau 1 le modèle d'apprentissage profond LSTM obtient de meilleurs résultats que les autres classificateurs de ML (Machine Learning), cela est dû à la capacité de LSTM à apprendre les caractéristiques cachées des données.

Classificateur	Justesse	Score F1	AUC
K plus proches voisins	87.05%	86.41%	80.85%
Régression logistique	71.76%	61.29%	64.75%
Machine à vecteurs de support	77.64%	71.64%	74.21%
Arbre de décision	92.94%	91.89%	93.24%
Naïve bayésien	67.05%	48.14%	58.10%
Forêt d'arbres décisionnels	91.76%	91.76%	90.11%
Gradient Boost	92.94%	92.85%	89.18%
Ada Boost	92.94%	93.02%	91.89%
Apprentissage profond récurrent (LSTM)	95.29%	94.87%	95.83%

TABLE 1 – Les résultats des classificateurs

La Figure 3 montre les performances (justesse et perte) atteintes par notre modèle LSTM. D'après cette figure nous observons que la justesse de validation (validation accuracy en anglais) monte régulièrement en parallèle avec la justesse d'entraînement (training accuracy

en anglais) après chaque époque jusqu'à la stabilisation sur 95.29%. De l'autre coté, la courbe de perte est décroissante d'une façon irrégulière.

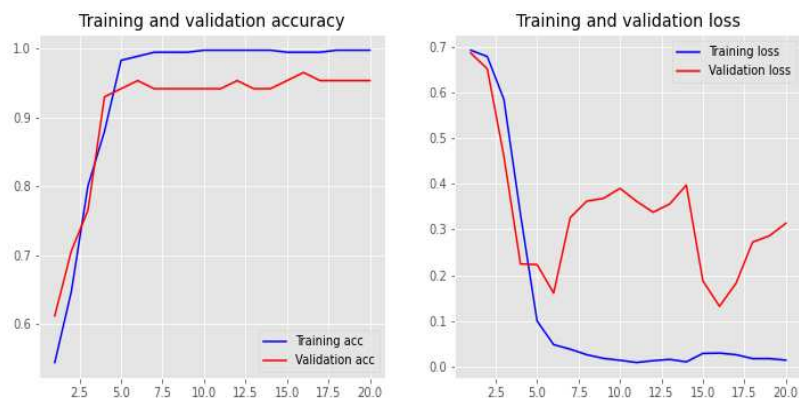


FIGURE 3 – Performances justesse et perte du model DL (LSTM)

5 Conclusion

La diversité de langues du dialecte maghrébin (français, kabyle et d'autres dialectes arabes), nécessite un système de filtrage des commentaires dans les réseaux sociaux. Dans cet article, nous avons proposé un modèle basé sur l'apprentissage profond récurrent du type LSTM pour détecter les spomments Maghrébins. Les résultats obtenus montrent que notre modèle est le meilleur avec une justesse de 95.29% et un score F1 de 94.87%. Il surmonte d'autres algorithmes tels que l'arbre de décision, K plus proches voisins, Gradient Boost, etc. Comme perspectives, nous envisageons d'augmenter la taille de notre dataset et d'inclure le filtrage des spomments kabyles.

Remerciements

Ce travail a été sponsorisé par la Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique (DGRSDT), Algérie.

Références

- [1] Adel, H., Bayati, M. A. : Building bi-lingual anti-spam SMS filter. International Journal of New Technology and Research, **4**, 1, 263147 (2018).

- [2] Alharthi, R., Alhothali, A., Moria, K. : A real-time deep-learning approach for filtering Arabic low-quality content and accounts on Twitter. *Information Systems*, **99**, 101740 (2021).
- [3] Alom, Z., Carminati, B., Ferrari, E. : A deep learning model for Twitter spam detection. *Online Social Networks and Media*, **18**, 100079 (2020).
- [4] Alsaleh, M., Alarifi, A., Al-Quayed, F., Al-Salman, A. : Combating comment spam with machine learning approaches. 14th International Conference on Machine Learning and Applications, ICMLA'15. Miami, Florida, USA, December 09-11, pp. 295-300.
- [5] Eryilmaz, E. E., Sahin, D. Ö., Kiliç, E. : Filtering turkish spam using LSTM from deep learning techniques. 8th International Symposium on Digital Forensics and Security, ISDFS'20. Beirut , Lebanon, June 01-02 , pp. 1-6.
- [6] Grandguillaume, G. : L'arabisation au Maghreb. *Revue d'aménagement linguistique*, **107**, 15-40 (2004).
- [7] Ketkar, N. : Introduction to keras. Deep learning with Python. Apress, Berkeley, CA. pp. 97-111 (2017).
- [8] Li, M., Wu, B., Wang, Y. : Comment spam detection via effective features combination. International Conference on Communications, ICC'19. Shanghai, China, may 20-24, pp. 1-6 (2019).
- [9] Liu, D., Lee, J. H. : CNN based malicious website detection by invalidating multiple web spams. *IEEE access*, **8**, 97258-97266 (2020).
- [10] Makkar, A., Garg, S., Kumar, N., Hossain, M. S., Ghoneim, A., Alrashoud, M. : An efficient spam detection technique for IoT devices using machine learning. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **17**, 2, 903–912 (2020).
- [11] Saeed, R. M., Rady, S., Gharib, T. F. : An ensemble approach for spam detection in Arabic opinion texts. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, **34**, 1, 1407-1416 (2022).
- [12] Sonowal, G., Kuppusamy, K. S. : SmiDCA : an anti-smishing model with machine learning approach. *The Computer Journal*, **61**, 8, 1143-1157 (2018).
- [13] Sun, N., Lin, G., Qiu, J., Rimba, P. : Near real-time twitter spam detection with machine learning techniques. *International Journal of Computers and Applications*, **44**, 4, 338-348 (2022).
- [14] Uysal, A. K. : Feature selection for comment spam filtering on YouTube. *Data Science and Applications*, **1**, 1, 4-8 (2018).
- [15] Wu, T., Liu, S., Zhang, J., Xiang, Y. : Twitter spam detection based on deep learning. Proceedings of the australasian computer science week multiconference. Canberra Australia, ACSW'17 . Geelong, Australia, February 1 - 5, pp. 1-8.



Proposition d'une Architecture GAN pour le Prétraitement et la Classification des Images de la Rétinopathie Diabétique

Samira Ait Kaci Azzou^{*1}, Djamila Boukredera², and Imene Benadjaoud¹

¹LIMED Laboratory of Informatic and Medical, Informatic Department, University of Bejaia, Algeria,
samira.aitkaciazzou@univ-bejaia.dz

²Laboratory of Applied Mathematics, Faculty of Exact Sciences, University of Bejaia, 06000 Bejaia,
Algeria,
Djamila.Boukredera@univ-bejaia.dz

Résumé Les méthodes d'apprentissage profond, et en particulier les réseaux de neurones convolutifs (CNN), ont permis de réaliser d'énormes progrès dans le domaine de reconnaissance des formes. Cependant la majorité des méthodes d'analyse d'images médicales sont des méthodes supervisées, ce qui requiert une grande quantité de données étiquetées. Le nombre d'images médicales disponible est usuellement petit et son acquisition étiquetée est un processus très couteux. C'est pourquoi, au cours de ces dernières années, le réseau antagoniste génératif (Generative Adversarial Network (GAN)) est devenu la technique de choix pour la génération et la conversion d'images dans le domaine de l'imagerie médicale. Dans cet article, nous allons exploiter les GANs pour diagnostiquer une Rétinopathie Diabétique (RD), en proposant une architecture qui permettra en plus d'augmenter les données à partir d'une image réelle, de la prétraiter pour améliorer sa qualité visuelle pour une meilleure classification et un bon diagnostic.

Mots clés : Réseaux neurones ; Generative Adversarial Network (GAN) ; Rétinopathie Diabétique ; Augmentation de données

1 Introduction

Le GAN a été proposé en 2014 [1] avec l'intention initiale d'imiter des données réelles. Le GAN repose sur la mise en compétition de deux réseaux de neurones. Ces deux réseaux sont appelés générateur et discriminateur. Le générateur est entraîné à créer de nouvelles images qui ressemblent aux images réelles à partir d'un bruit alors que le discriminateur détermine l'authenticité des images générées. Le plus grand défi dans le domaine de l'imagerie médicale est de faire face aux petits ensembles de données et à la quantité limitée

^{*}Corresponding Author

de données étiquetées. La collecte de données médicales est une procédure complexe et coûteuse qui nécessite la collaboration de chercheurs et de radiologues. C'est pourquoi, l'une des applications majeures des GANs en imagerie médicale est l'augmentation des données des ensembles contenant des quantités insuffisantes d'images. Les GANs ont été très utilisés pour la segmentation d'images [5]. Cependant on retrouve d'autres applications comme, par exemple, la détection, la classification, la reconstruction, et le débruitage des images [6]. Comparé à d'autres techniques d'analyse d'images médicales, le GAN n'en est encore qu'à ses débuts et le nombre de travaux connexes disponibles dans la littérature est relativement faible dans le domaine Ophtalmologique et plus particulièrement dans le cas de la rétinopathie diabétique (RD) [9]. La rétinopathie diabétique (RD) est une maladie fréquente qui provoque une perte de vision, chez les personnes atteintes de diabète. La gravité de la RD peut être classée en cinq niveaux : normal, modéré, sévère, rétinopathie diabétique non proliférante (NPDR) et proliférante (PDR). Le diagnostic de la RD est long et difficile, même pour les ophtalmologistes, c'est pourquoi les modèles de classification automatique de la RD en utilisant les réseaux de neurones ont commencé à être explorés au cours des dernières décennies [3]. Entraîner un modèle CNN profond efficace nécessite généralement une grande quantité de données diverses et équilibrées. Cependant, la distribution des données de RD sur les différents stades est extrêmement déséquilibrée, car les images anormales du fond de l'œil ne représentent qu'une petite partie. En plus du manque de données, les images du fond d'œil souffrent généralement des limites de l'appareil, de l'habileté de l'examineur, des variations de l'anatomie oculaire et de la transparence de l'axe visuel. La qualité de l'image peut influencer sur les performances diagnostiques des images oculaires. C'est pour cela que nous avons pensé à exploiter les GANs pour l'amélioration de la qualité de l'image acquise. La majorité des GANs ont comme entrée un bruit ou une image à qui on a subi des déformations pour créer des images de synthèses qui sont proches de la réalité. Dans notre modèle nous proposons une architecture GAN qui permet de résoudre deux types de problèmes à savoir le prétraitement et la classification des images. La résolution du premier problème consiste à fournir en entrée une image réelle au lieu d'un bruit au générateur qui va l'améliorer donc la prétraiter et la soumettre au discriminateur, quant au second problème le discriminateur va classer l'image générée selon les différents stades de la RD. Les images intermédiaires seront exploitées pour l'augmentation des données.

2 Les GANs en Imagerie Ophtalmologique

La plupart des travaux sur les images ophtalmologiques ont utilisé le GAN à croissance progressive (PGGAN), le GAN conditionnel, et le GAN à cohérence cyclique (CycleGAN) [4]. En ophtalmologie les GANs ont été surtout exploités pour la segmentation et l'augmentation de données [9]. Le GAN conditionnel et ses variants (pix2pix) ont été utiles dans la majorité des cas pour la segmentation des vaisseaux rétinien à partir des images de fond d'œil. Par contre pour l'augmentation des données, nous retrouvons essentiellement, le DCGAN pour la génération des images de synthèses du disque Optique ; le PGGAN pour la génération des images OCT (optical Coherence Tomography) et le diagnostic du glaucome ; par contre le CycleGAN a été appliqué à l'augmentation des données d'OCT pour les maladies rétinien rares. Dans le domaine de la rétinopathie les GANs n'ont pas encore été

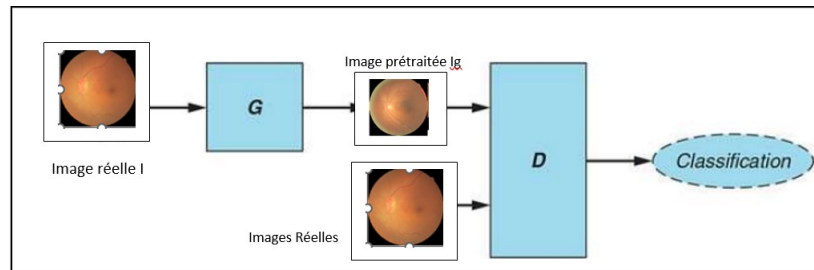


FIGURE 1 – Modèle Proposé du GAN

très exploités. Nous les retrouvons dans la segmentation pour l'extraction des vaisseaux sanguins [5] et dans la synthèse des images de fond d'œil. Malgré un certain succès, les lésions liées à la RD et les détails physiologiques de la rétine ne peuvent pas être synthétisés clairement. Une application DR-GAN a pris en considération les différents grades de la RD [10] en générant des images de synthèses de haute résolution proche de la réalité pour chaque stade de cette maladie. Ainsi, les données générées à grande échelle peuvent être utilisées pour une augmentation plus significative du dataset nécessaire pour entraîner un modèle de classification de RD. Notre modèle ne consiste pas en la création de données de synthèses mais en l'exploitation des données réelles, de leurs prétraitements pour une bonne classification et pour un enrichissement de la base de données avec des images réelles débruitées.

3 Architecture du GAN Proposée

L'objectif est d'utiliser les GANs pour la classification de la RD. Pour cela nous allons proposer une architecture d'un réseau GAN qui permet d'améliorer la qualité des images du fond d'œil. Notre modèle a été inspiré des GANs utilisés pour la segmentation dans [5] et de ceux utilisés pour l'augmentation de la résolution de l'image [7]. L'idée est d'introduire une image réelle d'un fond d'œil au générateur qui va la prétraiter pour améliorer sa qualité visuelle et le discriminateur va la classer selon les différents stades de la RD ou la rejeter si l'image ne fait partie d'aucune des classes prédéfinies. La figure 1 présente le schéma général du modèle proposé.

3.1 Architecture du Générateur G

Notre objectif est que le générateur transforme une image réelle d'un fond d'œil en une autre image de meilleure qualité visuelle. C'est pourquoi l'architecture utilisée pour le générateur G est l'architecture de type Encodeur-Décodeur inspiré du modèle RealESRGAN [8] car il permet de transformer une image à faible résolution en une image haute résolution. Le modèle de notre générateur G est composé de 2 parties (voir figure 2). L'Encodeur est un réseau de neurones convolutif qui permet d'extraire les caractéristiques de l'image en passant par plusieurs couches de convolution. La seconde partie est le Décodeur qui va reconstruire l'image tout en la prétraitant et améliorant sa qualité visuelle en éliminant tous les bruits et artéfacts mettant en évidence les petites régions et les microanévrismes difficilement

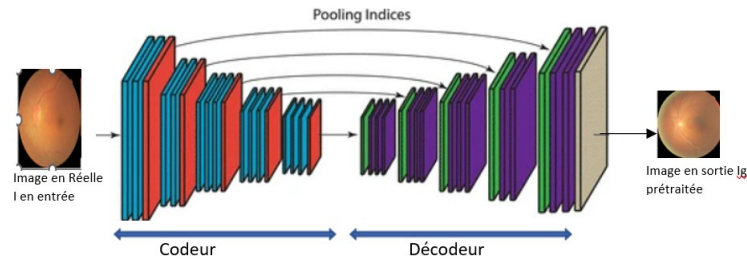


FIGURE 2 – Modèle Proposé du Générateur G

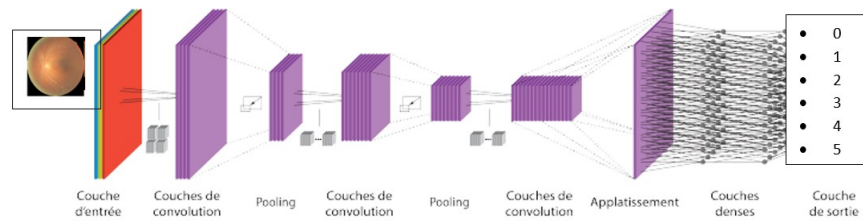


FIGURE 3 – Modèle Proposé du Discriminateur D

visible à l'œil nu. Chaque couche de l'Encodeur est composée d'une convolution, normalisation, un maxpooling et une fonction d'activation LeakRelu. Dans le cas du Décodeur, on effectue une déconvolution suivie d'un réechelonnement par un pooling inverse dont l'indice a été sauvegardé lors du codage et une dernière couche pour afficher la nouvelle image obtenue.

3.2 Architecture du Discriminateur D

Le rôle du discriminateur D est de classer l'image générée selon les différents stades de la RD. Contrairement aux discriminateurs des GANs classiques à 2 sorties, l'architecture de D que nous proposons est un réseau de neurones convolutif profond à 6 sorties. D aura comme entrée l'image I_g généré par G . I_g passe par un ensemble de traitement de convolution pour l'extraction des paramètres caractéristiques puis par un réseaux de neurones dense pour la classification. Les sorties (0,1,2,3,4) donnent la classe ou le degré de gravité de la RD et la sixième sortie (5) permet de déclasser l'image si elle est méconnaissable (voir figure 3). Chaque classe est représentée par un neurone au niveau de la couche de sortie. La valeur produite par ces neurones est normalisée via une fonction Softmax. Le résultat final est interprété comme la probabilité d'appartenance à chaque classe.

3.3 Fonction Coût

Le but du générateur G est d'obtenir une image $I_g = I_c$ (I_c : Image classifiable). Le discriminateur D est entraîné à maximiser la probabilité $D(I)$ pour des images $I \sim I_c$ et à mini-

miser $D(I)$ pour les images $I \neq I_c$. Les réseaux antagonistes sont entraînés généralement en optimisant la fonction de perte, l'entropie croisée, suivant un jeu minimax (voir formule 1) [2]) :

$$\min_G \max_D V(D, G) = E_{I \sim p_{data}(I)} [\log D(I)] + E_{z \sim p_z(z)} [\log(1 - D(G(z)))] \quad (1)$$

Le générateur produit des images $I_g = G(z)$ à partir d'une image initiale z de sorte que pendant l'entraînement $D(G(Z)) \sim I_c$. Le générateur est entraîné à maximiser $D(G(z))$, ou de manière équivalente, à minimiser $1 - D(G(z))$.

3.4 Apprentissage

Le discriminateur D sera entraîné au préalable pour un bon apprentissage des différents degrés de la RD. Le processus d'entraînement sera effectué de manière itérative pour le générateur et le discriminateur. Durant l'apprentissage, le générateur G améliore sa capacité à prétraiter les images du fond d'œil pour ne pas créer d'images erronées à partir d'images réelles alors que le discriminateur apprend à distinguer les différentes classes de RD et d'arriver à bien classer l'image générée par G . Les images intermédiaires obtenues par G et reconnues par D seront utilisées pour augmenter les bases de données par grade de RD qui souffrent d'un déséquilibre du contenu selon les différents stades de RD.

3.5 Expérimentation

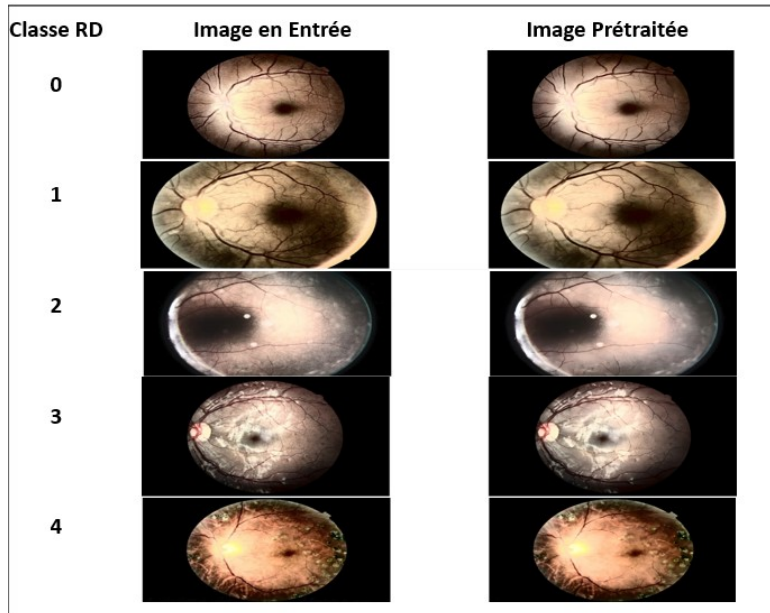


FIGURE 4 – Résultats d'expérimentation

Des images réelles de différentes classes ont été testées et nous pouvons remarquer que les images obtenues sont plus nettes (voir figure 4)

4 Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés aux problèmes des images du fond d'œil bruitées et à celui de la classification de la RD. Pour cela, nous avons proposé une architecture GAN pour l'amélioration de la qualité visuelle des images réelles et leur prétraitement afin de garantir une meilleure classification de la RD. Par ailleurs les images générées sont utilisées pour l'augmentation des bases de données afin de pallier au problème de déséquilibre des données dans les datasets médicaux. Le modèle a été testé sur différentes images réelles et les résultats sont prometteurs.

Acknowledgements

Ce travail a été sponsorisé par la Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique (DGRSDT), Algérie.

Références

- [1] IGoodfellow, I., Pouget-Abadie,., Mirza, M., Xu, B., Warde-Farley, D., Ozair, S., Courville, A., and Bengio, Y. : "Generative adversarial nets," in *Advances in neural information processing systems*, pp. 2672–2680 (2014).
- [2] IGoodfellow, I., NIPS : Tutorial : Generative Adversarial Networks, Cs.LG (2016).
- [3] He, X., Zhou, Y., Wang, B., Cui, S., and Shao, L. : "Dme-net : Diabetic macular edema grading by auxiliary task learning," in *MICCAI*. Springer, 2019, pp. 788–796.
- [4] Kazemina, S., Baur, C., Kuijper, A., van Ginneken, B., Navab, N., Albarqouni, S., Mukhopadhyay, A. : *GANs for Medical Image Analysis*, (2020), doi : <https://doi.org/10.1016/j.artmed.2020.101938a>
- [5] Klang, E., Amitai, M., Goldberger, J. and Greenspan, H. : *RV-GAN : Segmenting Retinal Vascular Structure in Fundus Photographs using a Novel Multi-scale Generative Adversarial Network*, EESS.IV, May 2021
- [6] Krithika, M., AnbuDevi, A., Suganthi, K. : *Review of Medical Image Synthesis using GAN Techniques*, ITM Web of Conferences 37, 01005 (2021) ICITSD-2021 <https://doi.org/10.1051/itmconf/20213701005>
- [7] Santosh, K.C., Ghosh, S., Bose, M. : *Ret-GAN : Retinal Image Enhancement using Generative Adversarial Networks*, 2021 IEEE 34th International Symposium on Computer-Based Medical Systems (CBMS)
- [8] WANG, Xintao, XIE, Liangbin, DONG, Chao, et al. *Real-esrgan : Training real-world blind super-resolution with pure synthetic data*. In : *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. 2021. p. 1905-1914.

- [9] You1 ,A., Kim,J.K., Ryu,I.H. and Yoo,T.K. : Application of generative adversarial networks (GAN) for ophthalmology image domains : a survey , Eye and Vision (2022) <https://doi.org/10.1186/s40662-022-00277-3>
- [10] Zhou, Yi ., Wang, B., He, X., Shanshan,C., and Ling ,S. :DR-GAN : Conditional Generative Adversarial Network for Fine-Grained Lesion Synthesis on Diabetic Retinopathy Images, SUBMITTED TO IEEE JOURNAL BIOMEDICAL AND HEALTH INFORMATICS, VOL. 2020

VI

MAINTENANCE ET SÛRETÉ DE FONCTIONNEMENT

Sommaire

VI.1	Étude Paramétrique du Modèle de Maintenance Préventive selon l'Âge	504
VI.2	Evaluation Quantitative de la Disponibilité Opérationnelle de la Pomperie Anti-incendie dans les Unités Pétrolières et Gazières	510
VI.3	Optimisation de la Configuration des Dispositifs de Dépressurisations des Gazoducs par Analyse RAMS	516

Étude paramétrique du modèle de maintenance préventive selon l'âge

Lamia May¹, Radouane Laggoune², and Youcef Khelfaoui³

¹Laboratoire de Mécanique, Matériaux et Énergie, Faculté de Technologie, Université de Bejaia, Algerie,
lamia.may@univ-bejaia.dz

²Unité de recherche LaMOS, faculté de technologie, Université de Bejaia, Algerie,
redouane.laggoune@univ-bejaia.dz

³Laboratoire de Mécanique, Matériaux Énergie, Faculté de Technologie, Université de Bejaia, Algerie,
youcef.khelfaoui@univ-bejaia.dz

Résumé Plusieurs politiques de maintenance préventive peuvent être mises en place selon le système étudié et les objectifs recherchés. Nous pouvons citer la maintenance préventive basée sur l'âge, une politique qui semble être réaliste, puisque lorsque un composant est remplacé suite à une défaillance son prochain remplacement préventif sera décalé jusqu'à ce qu'il atteigne l'âge T .

Ce travail consiste en une étude de l'influence du paramètre β , le rapport C_p/C_c ainsi que la corrélation entre β et η sur le temps optimum dans notre politique. L'étude a été illustrée par un exemple d'application numérique où nous avons effectivement pu montrer la sensibilité du temps optimum à ces paramètres.

Mots clés : maintenance préventive ; politique selon l'âge ; étude paramétrique ; optimisation.

1 Introduction

Il a été montré que les dépenses de maintenance varient selon le type d'industrie, les chiffres généralement rencontrés sont de l'ordre de 15 à 40% des coûts de production [1], d'où l'importance capitale de la maintenance. La détermination de la fréquence optimale pour le remplacement préventif des composants s'avère une étape primordiale pour l'efficacité du plan de maintenance. De nombreux travaux ont été développés sur la détermination du moment le plus avantageux pour effectuer cette opération de remplacement préventif. A cet effet, plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature [4, 5]. La politique de maintenance préventive (MP) selon l'âge compte parmi les politiques de MP les plus connues. Elle a été proposée par Barlow et porchan [2], elle consiste à remplacer le composant par un neuf lorsque il atteint l'âge T ou à la défaillance selon l'évènement qui se produit en premier. Dans ce modèle la variable de décision est l'âge T au bout duquel la MP doit être effectuée. En plus de la fiabilité, les paramètres $C_p/C_c, \beta, \eta$ gouvernent le modèle, d'où l'intérêt d'explorer

comment l'âge optimum T varie en fonction de la variation de ces paramètres. Ce travail est organisé comme suit. La section 2 donne une définition de la politique selon l'âge. La section 3 traite un exemple d'application pour illustrer l'influence des différents paramètres sur le temps optimum. La section 4 présente les conclusions tirées à travers la présente étude.

2 Position du problème et définitions

Suivant la politique de MP selon l'âge un composant élémentaire est remplacé quand il atteint l'âge T ou à la défaillance selon l'événement qui se produit en premier [2]. Le coût moyen par unité de temps est donné par [3] :

$$C(T) = [C_p R(T) + [1 - R(T)]C_c] / \int_0^T R(t) dt \quad (1)$$

Où : Le numérateur représente l'espérance du coût total du cycle et le dénominateur représente l'espérance de la longueur du cycle.

T est l'âge du remplacement préventif (variable de décision)

C_p le coût du remplacement préventif

C_c le coût de défaillance incluant le coût de remplacement

$R(t) = 1 - F(t)$ est la fonction de fiabilité ou de survie

Rappelons que cette politique n'est efficace que lorsque le taux de défaillance est croissant. Plusieurs variantes de cette politique existent dans la littérature [4].

Dans le modèle précédent, en plus du coût du préventif C_p et celui du correctif C_c la loi de fiabilité $R(t)$ joue un rôle important dans le comportement du modèle.

Pour un composant dont la loi de fiabilité est de type Weibull la fiabilité $R(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Si } t > \gamma & \quad R(t) = p(t | T) = e^{-((t-\gamma)/\eta)^\beta} \\ \text{Si } t \leq \gamma & \quad R(t) = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

β : Paramètre de forme ($\beta > 0$)

γ : Paramètre de position ($-\infty > \gamma > +\infty$)

η : paramètre d'échelle ($\eta > 0$)

Notons que la forme des courbes des fonctions statistiques de la loi de Weibull changent en fonction de la valeur du paramètre de forme β comme suit :

- Lorsque $\beta = 1$ et $\gamma = 0$ la loi devient une loi exponentielle.
- Lorsque $\beta \simeq 3.65$ l'allure de la courbe de densité de probabilité est identique à celle de la loi normale.

C'est ainsi que :

- Lorsque $\beta = 1 \implies$ le taux de défaillance $\lambda(t)$ est constant.
- Lorsque $\beta < 1 \implies$ le taux de défaillance $\lambda(t)$ est décroissant.
- Lorsque $\beta > 1 \implies$ le taux de défaillance $\lambda(t)$ est croissant.

Il serait intéressant d'explorer le comportement de l'optimalité de notre modèle en fonction des différents paramètres le gouvernant à savoir : $C_p/C_c, \beta, \eta$ c'est ce que nous allons voir dans la section suivante.

3 Exemple d'application

3.1 Comportement du temps optimum en fonction des paramètres

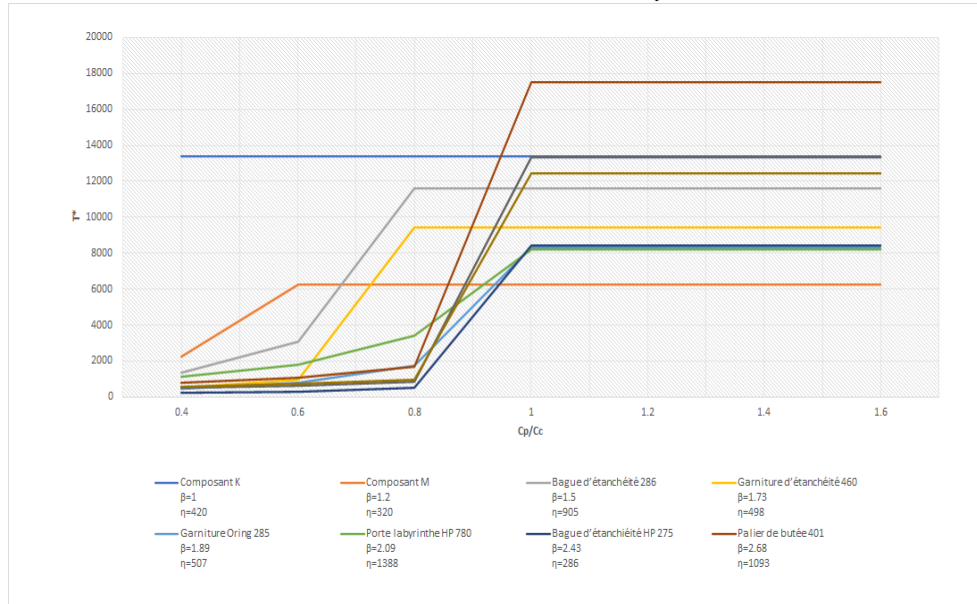
Étudions le temps optimal de remplacement préventif pour différentes valeurs de $C_p/C_c, \beta, \eta$.

En variant le rapport C_p/C_c on calcule le temps optimum pour plusieurs composants avec des fiabilités différentes (paramètres β et η différents); les résultats sont contenus dans le tableau suivant :

Tableau 1 : T optimum en fonction de C_p/C_c

<i>Composants</i> C_p/C_c		0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
Composant K $\beta = 1, \eta = 420$	T*	13392	13392	13392	13392	13392	13392	13392
	C*	34.52	42.86	53.1	47.62	22.62	47.79	32.14
Composant M $\beta = 1.2, \eta = 320$	T*	2247	6240	6240	6240	6240	6240	6240
	C*	91.13	109	162.8	170.1	57.63	100.7	131.5
Bague d'étanchéité 286 $\beta = 1.5, \eta = 905$	T*	1339	3085	11622	11622	11622	11622	11622
	C*	61.02	60.45	73.07	83.24	17.37	78.71	50.3
Garniture d'étanchéité 460 $\beta = 1.73, \eta = 498$	T*	524	963	9429	9429	9429	9429	9429
	C*	181.8	84.23	115.3	9.914	123.3	168.7	63.8
Garniture Oring 285 $\beta = 1.89, \eta = 507$	T*	467	789	1731	8324	8324	8324	8324
	C*	119.3	90.64	133.1	143.81	110.8	165.52	88.45
Porte labyrinthe HP 780 $\beta = 2.09, \eta = 1388$	T*	1147	1775	3411	8185	8185	8185	8185
	C*	7.936	68.11	77.87	34.07	40.11	52.72	13.86
Bague d'étanchéité HP 275 $\beta = 2.43, \eta = 286$	T*	215	311	515	8431	8431	8431	8431
	C*	149.4	64.56	93.94	196.65	202.7	293.32	281.1
Palier de butée 401 $\beta = 2.86, \eta = 1093$	T*	790	1096	1699	17530	17530	17530	17530
	C*	11.77	53.88	24.16	86.55	56.99	82.57	34.42
Palier portant 419 $\beta = 3.55, \eta = 736$	T*	508	645	875	13329	13329	13329	13329
	C*	69.91	44.76	67.53	113.2	97.82	86.48	68.28
Composant N $\beta = 3.8, \eta = 840$	T*	580	723	957	12427	12427	12427	12427
	C*	43.4	58.06	48.59	82.29	69.84	45.87	57.89

FIGURE 1 – T optimum en fonction de C_p/C_c



Nous remarquons que le temps optimum tend vers une valeur asymptotique et ce à partir d'une certaine valeur de C_p/C_c , c'est à dire le temps optimum varie avec la variation de C_p/C_c jusqu'à une certaine valeur de ce dernier. Ensuite il devient constant. C'est ainsi que nous constatons que pour $\beta = 1.2$ et $\beta = 1.5$ le temps optimum devient constant à partir du rapport $C_p/C_c = 1.6$. Pour $\beta = 1.73$ et $\beta = 1.89$ il devient constant à partir du rapport $C_p/C_c = 0.8$ et à partir $\beta = 2.09$ il devient constant à partir de $C_p/C_c = 1$. Pour $\beta = 1$ le temps optimum devient très grand et constant quelque soit la valeur de C_p/C_c . Ce qui est logique puisque nous sommes en présence d'un taux de défaillance constant, ce qui suggère de recourir à la maintenance corrective.

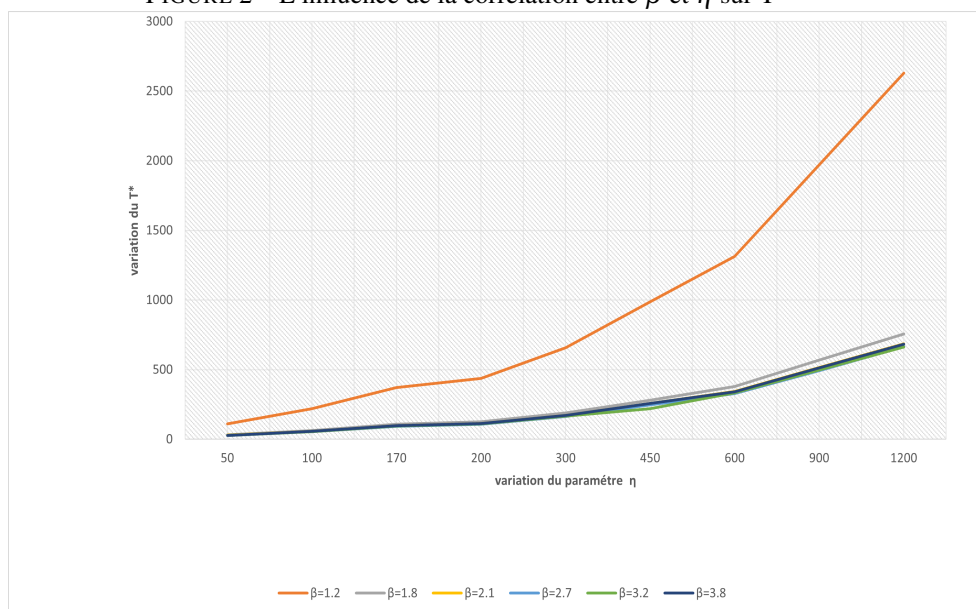
Nous constatons que plus β augmente plus la valeur de temps optimum s'éloigne vers des valeurs de C_p/C_c plus grandes, ce qui peut-être expliqué par le fait que lorsque β est petit, c'est à dire le composant se dégrade lentement, il est plus profitable de favoriser le correctif même si le coût du préventif est petit. Par contre pour des grandes valeurs de β c'est à dire le composant se dégrade plus rapidement, il vaut mieux opter pour le préventif. Par ailleurs, il semble que la corrélation entre les valeurs des paramètres β et η à une influence sur la valeur asymptotique du temps optimum en fonction de C_p/C_c , c'est ce que nous allons explorer dans la section suivante.

3.2 Corrélation entre β et η et son influence sur le temps optimum

Étudions à présent la corrélation entre β et η et son influence sur le temps optimum. Fixons $C_p/C_c = 0.1367$, ensuite calculons le temps optimum pour différentes valeurs de β et η . Les résultats sont contenus dans le tableau suivant :

Tableau 2 : T^* et la corrélation entre β et η

$\beta\eta$		50	100	170	200	300	450	600	900	1200
1	T^*	2911	2845	3311	3951	19573	30072	40769	62574	84774
	C^*	297.36	148.69	87.45	73.34	49.56	33.04	24.78	16.52	12.39
1.2	T^*	110	219	372	438	657	986	1314	1971	2628
	C^*	315.24	157.62	92.71	78.81	52.54	35.02	26.27	17.51	13.13
1.8	T^*	32	63	107	126	189	281	378	568	757
	C^*	279.62	139.8	82.23	69.9	46.68	31.07	23.3	15.53	11.65
2.1	T^*	29	57	97	114	172	257	343	515	686
	C^*	255.01	127.49	63.75	42.5	75	28.73	21.24	14.16	10.62
2.7	T^*	27	55	93	109	164	246	328	492	665
	C^*	217.08	108.53	63.84	54.26	36.17	24.11	18.08	12.05	9.04
3.2	T^*	28	55	94	111	166	219	332	497	663
	C^*	194.97	97.47	57.33	48.73	32.48	21.65	16.24	10.82	8.12
3.8	T^*	28	57	97	114	171	256	341	512	682
	C^*	175.81	87.88	51.69	43.94	29.29	19.52	14.64	9.76	7.32

FIGURE 2 – L'influence de la corrélation entre β et η sur T^* 

Nous constatons que le temps optimum augmente avec l'augmentation de β . Autrement dit plus l'écart entre β et η est grand plus le temps optimum augmente.

Ceci semble logique puisque η est la durée de vie caractéristique, elle représente le temps au bout duquel la probabilité de défaillance est égale à 63.2%. Autrement dit plus η est grand plus le composant est fiable, ce qui nous permet de prolonger l'âge de son remplacement préventif.

4 Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence des paramètres β et le rapport C_p/C_c ainsi que la corrélation entre les deux paramètres β et η sur le temps optimum de la politique de MP selon l'âge. Les résultats d'étude montrent que effectivement le temps optimum de cette politique est sensible a ces paramètres, nous avons donc remarqué que le temps optimum varie avec la variation du rapport C_p/C_c jusqu'à une certaine valeur de ce dernier (il tend vers une valeur asymptotique), c'est ainsi que nous avons pu voir que plus β augmente plus la valeur de temps optimum s'éloigne vers des valeurs de C_p/C_c plus grandes. Nous avons aussi remarqué que la corrélation entre les valeurs des paramètres β et η a une influence sur la valeur asymptotique du temps optimum en fonction de C_p/C_c de sorte que, plus l'écart entre les deux paramètres est grand plus le temps optimum augmente.

Références

- [1] Al-Najjar,B., Alsyouf,I. : Selecting the most efficient maintenance approach using fuzzy multiple criteria decision making, Int. J. Prod. Econ. 84 (2003) 85– 100.
- [2] Barlow,R.E., Proschan,F. : Mathematical theory of reliability, Wiley, New York (1965).
- [3] Barlow, R.E. ; Hunter, L.C. : Optimum preventive maintenance policies. Operation Research, Vol.8, pp.90-100, (1960).
- [4] Laggoune, R. : optimisation de la maintenance par la fiabilité opérationnelle des systèmes mécaniques multi-composants.thèse de doctorat,univrsité de bejaia,(2009).
- [5] Alsyouf, I., Hamdan, S., Shamsuzzaman, M., Haridy, S. and Alawaysheh, I. : On preventive maintenance policies : a selection framework, Journal of Quality in Maintenance Engineering, Vol. 27 No. 1, pp. 225-252, (2021).

Evaluation Quantitative de la Disponibilité Opérationnelle de la Pomperie Anti-incendie dans les Unités Pétrolières et Gazières

Karim Younsi *¹ and Abdelnacer Smati²

¹ Laboratoire de fiabilité des équipements pétroliers, Faculté des hydrocarbures et de la chimie, Université de Boumerdes, Algérie
karim_zd@yahoo.fr

² Pegaz Engineering, Algérie
a_smati@yahoo.com

Résumé En raison de la nature inflammable et potentiellement explosive des produits traités dans les unités pétrolières et gazières, les risques d'incidents catastrophiques sont particulièrement élevés. La législation en vigueur exige la présence sur ces sites de systèmes fixes de luttés anti-incendie performants.

Il ressort donc que les critères de performance ne sont pas clairement établis et restent qualitatifs. Il serait donc judicieux de disposer d'une méthodologie permettant une évaluation quantitative de la disponibilité opérationnelle de systèmes existants mais également d'un outil d'optimisation de ce type de système en phase de conception.

Mots clés : Disponibilité, Pomperie, Anti-incendie

1 Introduction

Les unités pétrolières et gazières présentent des risques d'incidents catastrophiques particulièrement élevés. La législation en vigueur exige la disponibilité sur ces sites de systèmes fixes de luttés anti-incendie performants. En règle générale, il est considéré que mise en œuvre des actions suivantes permet de garantir un niveau de performance suffisant :

- disposer de pompes en redondance de manière à ce que les performances du système ne soient pas affectées lorsque l'une des pompes est hors service,
- disposer de pompes avec deux sources d'alimentation différentes (électrique + diesel) pour diminuer la vulnérabilité du système (NFPA 20),
- procéder à des tests réglementaires périodiques.

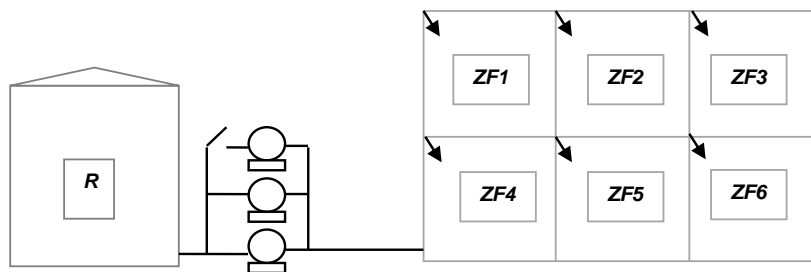


Figure 1 : Schéma de principe d'un système fixe de lutte anti-incendie

Les systèmes fixes de lutte anti-incendie dans les unités pétrolières et gazières se composent principalement de quatre (04) sous-systèmes (Figure.1) :

- Un réservoir de stockage d'eau (**R**)
- Un système de pompage redondant composé d'au moins deux pompes centrifuges en parallèle,
- Un réseau maillé de canalisations le plus souvent en acier permettant d'acheminer l'eau vers les zones potentiels de localisation des sinistres (**ZF**),
- Des moyens de projection d'eau ou de mousse vers les installations en cas de feu.

Les stations de pompage des systèmes fixes de lutte anti-incendie doivent être dotées d'une redondance telle que les performances du système ne soient pas affectées lorsque l'une des pompes est hors service ou en raison d'une panne ou d'un entretien de routine.

2 Particularités des Systèmes de Pompage Anti-incendie

La pomperie des systèmes anti-incendie n'est sollicitée que lors de l'occurrence des incidents de feu ou pendant les tests réglementaires périodiques. Les pompes anti-incendie font l'objet d'un certain nombre de particularités par rapport aux pompes de process classiques :

- les durées cumulées de fonctionnement sont assez réduites,
- le nombre d'arrêts/démarrages est relativement important,
- la disposition de pompes avec deux sources d'alimentation différentes (diesel + électrique par exemple) [2],
- Le retour d'expérience en termes de fiabilité est très limité.

Selon NFPA 25 [1], durant les tests périodiques, les pompes à entraînement électrique doivent fonctionner un minimum de 10 minutes alors que les pompes à entraînement diesel doivent fonctionner un minimum de 20 minutes. Pour chaque pompe, en considérant une planification hebdomadaire des tests, le nombre d'heures de fonctionnement cumulé sur une période de 20 ans est d'environ 500 heures. Par comparaison avec une pompe de process classique, 500 heures correspondent à un nombre d'heures de fonctionnement cumulé sur une période d'environ un seul mois. Cependant, cette durée cumulée réduite, qui peut sembler constituer un paramètre favorable contre le vieillissement de ces pompes, et contrebalancé par le nombre d'arrêts/démarrages relativement important en raison des tests périodiques. Un nombre d'arrêts/démarrages élevé, accélère les processus de dégradation et réduit la durée de vie. D'autre part, NFPA 20 [2] ne donne aucune indication sur la configuration de redondance. Les pratiques d'ingénierie recommandent, sans fournir de détails, le choix entre les configurations suivantes [3]:

- 2 x 100% (1+1 pompes)
- 3 x 50% (2+1 pompes) ;
- 2 x (2 x 50%) (2+2 pompes)

3 Méthodologie d'Analyse

Calculer les probabilités de défaillance à la sollicitation :

- pour chaque type de scénario feu identifié par l'Etude de danger (EDD),
- pour chaque configuration de redondance analysée,
- pour 02 périodicités des tests (hebdomadaire et mensuelle).

Les probabilités de défaillance des pompes électriques et diesel étant différentes on aura recours à l'usage de la fonction génératrice de probabilité [4]

$$\zeta_n(z) = \prod_{i=1}^n [P_i + (1 - P_i)z] \quad (1)$$

P_i : probabilité de défaillance de la pompe i parmi les n disponibles ;

Z : variable de la fonction génératrice

Le développement de l'expression (1) permettra de d'obtenir un polynôme de quatrième degré de la forme :

$$\zeta_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i Z^i \quad (2)$$

Avec

$$P(E_{1i}) = a_i \quad (3)$$

- $P(E_{1i})$: Probabilité de l'événement E_{1i}
- E_{1i} : Événement consistant en i pompes en état de défaillance

La probabilité d'avoir au moins k pompes disponibles à la sollicitation

$$P(D_k) = 1 - \sum_{k+1}^n P(E_{1i}) \quad (4)$$

Cette approche permettra de définir la disponibilité à la sollicitation de la pomperie en fonction du nombre de pompes installées n et du nombre k de pompes à activer. Le risque d'une défaillance de la pomperie au moment de la survenance d'un incident se calcule comme suit :

$$P(A_j) = P(I_j)\{1 - P(D_k)\} \quad (5)$$

- $P(A_j)$: Probabilité de défaillance de la pomperie simultanément avec la survenance de l'incident I_j
- $P(I_j)$: Fréquence estimée de survenance de l'incident feu I_j

4 Taux de Défaillance Génériques des Pompes Incendie

En utilisant les résultats recueillis dans le cadre du rapport de collecte et d'analyse de données sur le terrain des pompes à incendie de 2012 [5], les inspections hebdomadaires des pompes à incendie à moteur électrique et diesel se sont avérées être respectivement de 99,4 % et 99,0% fiable. En extrapolant à une fréquence de test mensuelle, des fiabilités annuelles de 97,3 % pour les pompes électriques et de 95,6 % pour les pompes diesel ont été élicitées.

5 Etude de Cas : Station de Stockage et de Pompage de Hassi Berkine (HBN)

5.1 Problématique

La station de pompage de HBN dispose de 4 pompes, 02 pompes à entraînement par moteur électrique et 02 pompes à entraînement par moteur diesel, en configuration (2+2). Cependant, l'état du moteur d'entraînement d'une des pompes diesel est très dégradé. En conséquence, cette étude cherche à vérifier si la configuration de redondance actuelle (2+2) peut être ramenée à une configuration (2+1) sans altérer significativement les performances du système de lutte anti-incendie.

5.2 Description Sommaire de la Pomperie HBN

- Deux (02) électropompes incendie de débit 500 m³/h ;
- Deux (02) pompes diesel incendie de débit 500 m³/h ;
- Deux (02) pompes jockey de débit 30 m³/h
- Deux (02) bacs d'eau anti-incendie d'une capacité unitaire de 12 000 m³.

5.3 Fréquences d'Occurrence des Scenarios Feux

- Les fréquences d'occurrence des scénarios feux sont issues de l'étude de danger (Tableau.1) [6],
- Les débits d'eau nécessaires sont issus du document [7]
- Si pour un scénario, le débit d'eau nécessaire est supérieur à 500 m³/h, 02 pompes anti-incendie (A-I) devront être actives,
- Si le débit d'eau nécessaire est inférieur à 500 m³/h, 01 seule pompe anti-incendie (A-I) devra être active.

Tableau.1. fréquences d'occurrence des scenarios feux

Type d'incident	Fréquence par an $P(I_j)$	Q-eau m3/h	Pompes A-I actives k
Feux de cuvette (I1)	6,30E-02	720	02
Feux de joint (I2)	9,60E-03	360	01
Feu sur manifold (I3)	1.80E-02	396	01
Feux sur réservoir de détente (I4)	9.12E-03	112	01
Feu sur pompes process (I5)	1.24E-02	355	01

5.4 Résultats

5.4.1 Tests mensuels

Dans Les tableaux ci-dessous tableau2, tableau3, et tableau 4 sont mentionnés l'ensemble des résultats en considérant les tests mensuels

Tableau.2. Probabilité des différents états possibles du système de pompage pour deux Configurations

$P(E_{1i})$	Désignation	2+2	2+1
$P(E1-0)$	toutes les pompes disponibles	0,8652	0,9051
$P(E1-1)$	01 pompe indisponible	1,28E-01	9,19E-02
$P(E1-2)$	2 pompes indisponibles	6,92E-03	3,01E-03
$P(E1-3)$	3 pompes indisponibles	1,63E-04	3,21E-05
$P(E1-4)$	4 pompes indisponibles	1,41E-06	
Somme		1,0000	1,00E+00

Tableau.3. Disponibilité du système de pompage pour deux configurations

$P(D_k)$	2+2	2+1
disponibilité d'au moins 02 pompes $P(D2)$	0,99984	0,99696
disponibilité d'au moins 01 pompes $P(D1)$	1,00000	0,99997

Tableau.4. Probabilité de défaillance de la pomperie simultanément avec la survenance de l'incident

Type d'incident	$P(A_j)$	2+2	2+1
feu de cuvette	07 cuvettes	1,04E-05	1,92E-04
feu de joint	06 bacs	1,35E-08	3,08E-07
Feu sur manifold	01 manifold	2,53E-08	5,76E-07
Pompes process	03 pompes	3,50E-08	7,96E-07
Bac de détente	01 bac	1,29E-08	2,93E-07

5.4.2 Tests Hebdomadaires

Dans Les tableaux ci-dessous tableau5, tableau6, et tableau 7 sont mentionnés l'ensemble des résultats en considérant les tests hebdomadaires

Tableau.5. Probabilité des différents états possibles du système de pompage pour deux configurations

$P(E_{1i})$	Désignation	2+2	2+1
$P(E1-0)$	toutes les pompes disponibles	0,9354	0,9614
$P(E1-1)$	01 pompe indisponible	6,32E-02	3,83E-02
$P(E1-2)$	2 pompes indisponibles	1,38E-03	3,57E-04
$P(E1-3)$	3 pompes indisponibles	1,06E-05	9,72E-07
$P(E1-4)$	4 pompes indisponibles	2,62E-08	
Somme		1,0000	1,00E+00

Tableau.6. Disponibilité du système de pompage pour deux configurations

$P(D_k)$	2+2	2+1
disponibilité d'au moins 02 pompes	0,99999	0,99964
disponibilité d'au moins 01 pompe	1,00000	1,00000

Tableau.7. Probabilité de défaillance de la pomperie simultanément avec la survenance de l'incident

Type d'incident	$P(A_j)$	2+2	2+1
feu de cuvette	07 cuvettes	6,69E-07	2,26E-05
feu de joint	06 bacs	2,52E-10	9,33E-09
Feu sur manifold	01 manifold	4,71E-10	1,75E-08
Feu sur pompes	03 pompes	6,51E-10	2,41E-08
Feu bac détente	01 bac	2,39E-10	8,86E-09

5.5 Synthèse de l'étude de cas

La station de pompage de HBN dispose de 4 pompes, 02 pompes à entraînement par moteur électrique et 02 pompes à entraînement par moteur diesel, en configuration (2+2). Cependant, l'état du moteur d'entraînement d'une des pompes diesel est très dégradé. Les résultats de cette étude montrent que la configuration de redondance actuelle (2+2) peut être ramenée à une configuration (2+1) sans altérer significativement les performances du système de lutte anti-incendie en adoptant une planification hebdomadaire des tests.

6 Conclusion

Les critères de performance en vigueur des systèmes fixes de lutte anti-incendie ne sont pas clairement établis et restent qualitatifs. Le modèle présenté dans ce travail autorise une estimation quantitative des performances des systèmes fixes de lutte anti-incendie via leur disponibilité opérationnelle. Il peut servir également comme outil d'optimisation de ce type de système en phase de conception.

References

- [1] Standard for the Inspection, Testing, and Maintenance of Water-based Fire Protection Systems. National Fire Protection Association. NFPA 25 (2017).
- [2] Standard for the Installation of Stationary Pumps for Fire Protection. National Fire Protection Association. NFPA 20 (2019).

- [3] Moyens fixes de lutte contre l'incendie. DRA-16-156884-04985B INERIS Novembre (2016).
- [4] Ventsel, H.: Théorie des probabilités. Mir, Moscou (1973).
- [5] Pennel, G.: Fire Pump Field Data Collection and Analysis. Fire Protection Research Foundation (2012).
- [6] Etude de Danger Station de stockage et de pompage de HassiBerkine. Document Sonatrach.
- [7] Diagnostic normatif et dimensionnel du système de refroidissement et d'extinction eau/mousse du CSTH HBN. Document Sonatrach (2022).
- [8] Applying reliability based decision making to ITM frequency. Fire Protection Research Foundation (2018).

Optimisation de la Configuration des Dispositifs de Dépressurisations des Gazoducs par Analyse RAMS

Mohamed chérif AbdelFettah TOUABTI¹, and Abdelnacer SMATI²

¹Laboratoire de Génie des Procédés Chimiques, Université Ferhat ABBAS Sétif 1, Algérie,

touabtif@yahoo.fr

²Pegaz Engineering, Algérie

a_smati@yahoo.com

Résumé L'Analyse RAMS est de plus en plus utilisée au stade de l'ingénierie pour la sélection des meilleures solutions de conception des systèmes. Dans ce travail, le choix de la configuration optimale des dispositifs de dépressurisation des gazoducs est abordé sous l'aspect d'une analyse RAMS. Les résultats de cette étude ont été obtenus lors de la phase de conception d'un gazoduc algérien.

Mots clés : Analyse RAMS ; Gazoduc ; Dépressurisation ; Simulation

1 Introduction

L'analyse RAMS (ou FMDS en terminologie française) se compose de deux axes d'analyse : Un axe fiabilité et un axe de sécurité. Elle peut être mise à profit pour comparer des variantes de conception différentes en vue de sélectionner les solutions les plus pertinentes. D'autre part, le haut niveau de sécurité et une des exigences fondamentales de l'exploitation des ouvrages de transport de gaz naturel par canalisation. Les systèmes de dépressurisation par mise à l'évent (fig1), sont des dispositifs de sécurité destinés, en cas de nécessité, à l'évacuation vers l'atmosphère du gaz naturel contenu dans la conduite. Les opérations de mise à l'évent sont réalisées en cas d'incident (rupture de canalisation, feux, etc.) ou avant les travaux de réparation des canalisations pour éviter les risques d'incident.

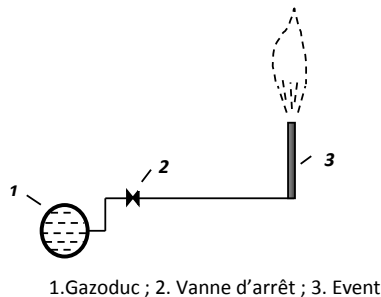


Figure 1. Schéma de principe d'un système de mise à l'évent

* Corresponding Author:

Optimisation de la Configuration des Dispositifs de Dépressurisations des Gazoducs par Analyse RAMS

Sur un gazoduc (fig2), les systèmes de mise à l'évent sont installés à intervalles réguliers au niveau de tous les postes de sectionnement (PS) et de tous les postes de coupure (PC).

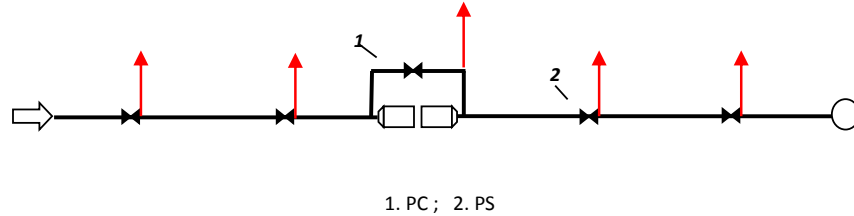


Figure 2. Disposition des événements le long d'un gazoduc.

2 L'Analyse RAMS

L'acronyme RAMS signifie Reliability [R], Availability [A], Maintainability [M] et Safety [S]. Il s'agira donc de comparer l'influence des différentes configurations de système de dépressurisation sur chaque composante de l'analyse RAMS. La figure 3 représente les différentes configurations de systèmes de dépressurisation installés sur les gazoducs algériens. La présence de vannes de régulation est parfois souhaitée en vue de contrôler le débit de mise à l'évent. L'incorporation d'un arrête-flamme sur l'évent est parfois préconisée pour prévenir les risques d'inflammation du gaz à la sortie. Cependant, ces dispositifs peuvent augmenter significativement la durée de vidange, ce qui peut être préjudiciable en situation d'urgence et en termes d'indisponibilité prolongée de l'ouvrage.

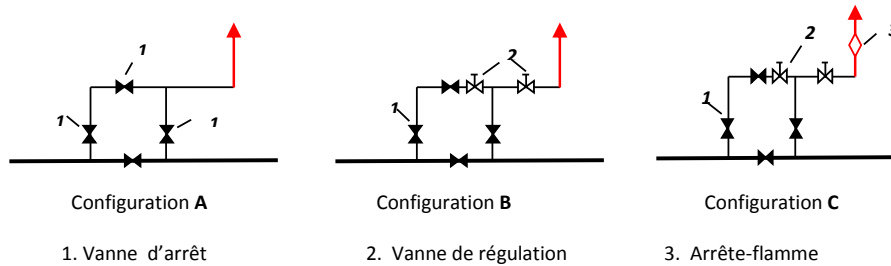


Figure 3. Différentes configuration de raccordement des événements à la canalisation.

3 Durée de Vidange d'un Tronçon

Durant les réparations de la canalisation, inopinées (suite à un incident) ou planifiées, la durée de réparation est un paramètre très important. Une durée de réparation trop longue peut affecter sérieusement les livraisons de gaz aux clients. La durée de vidange (fig4), fait partie de la durée d'indisponibilité de l'ouvrage. Il y a lieu de noter, qu'à l'évidence, le processus de mise à l'évent est un processus dynamique dans le sens où la pression du gaz dans le tronçon de canalisation diminue assez rapidement au fur et à mesure du déroulement de l'opération. Le développement d'approches d'estimation de la durée de vidange a fait l'objet d'un certain nombre de travaux [1,2,3] avec des résultats plus ou moins contradictoires. Dans ce travail, une démarche à celle développée dans [5] est mise à profit.

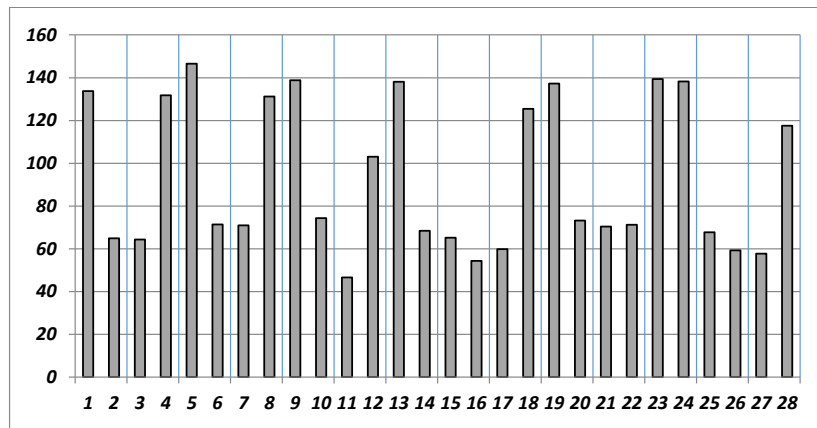


Figure 4 : Durées de vidange simulées des tronçons du gazoduc

4 Etude de Cas

Le gazoduc relie Rhourde-Nouss à Hassi R'Mel sur une distance de 530 km. La canalisation de diamètre 48 pouces transporte 2 000 000 de Sm³/h de gaz et dispose de 29 PS et 06 PC.

- Taux de défaillance canalisation : $\lambda' = 1.10 \cdot 3 \text{ km} \cdot 1.\text{année}^{-1}$
- Fréquence de mise à l'événement pour des opérations de maintenance préventive: 02 par année équivalent à $\lambda'' = 4.10 \cdot 3 \text{ km} \cdot 1.\text{année}^{-1}$;
- Durée moyenne de réparation : 48 heures
- Diamètre de l'événement : 16''
- Cout estimé du gaz non transporté : 1 \$ le M BTU,
- Densité de population (travailleurs) : 3 trav/ha.

4.1 Fiabilité

La fonction de fiabilité ne dépend que du taux de défaillance λ_i de la canalisation dans sa totalité :

$$R(t) = e^{-\lambda_i t} \quad (1)$$

$$\lambda_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda L \quad (2)$$

La fonction de fiabilité de l'ensemble du gazoduc est donc indépendante de la configuration technique adoptée pour les systèmes de mise à l'événement. Elle est donc identique pour toutes les variantes.

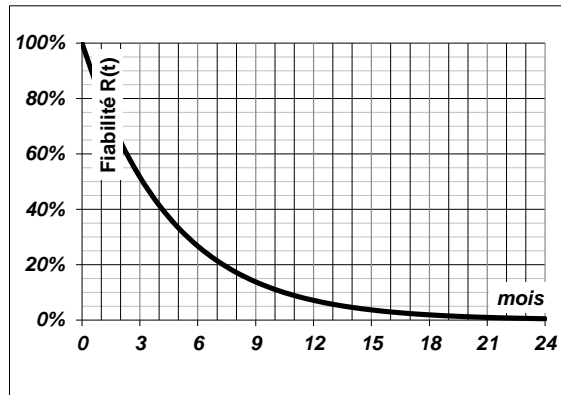


Figure 5. Distribution de la fiabilité du gazoduc GR6.

Pour une durée de fonctionnement t fixée, la courbe de fiabilité donne la probabilité d'un fonctionnement sans défaillance de l'ensemble de la canalisation.

4.2 Maintenabilité

La maintenabilité dépend du taux de réparation μ_i :

$$M(t) = 1 - e^{-\mu_i t} \quad (3)$$

La durée de réparation effective est la somme de la durée de vidange T_{Vi} du tronçon et de la durée de réparation technique proprement dite. De ce fait :

$$\mu_i = \frac{1}{MTTR_i + T_{Vi}} \quad (4)$$

Il ressort donc que la maintenabilité est fortement dépendante de la configuration technique adoptée pour les systèmes de mise à l'évent (fig6),

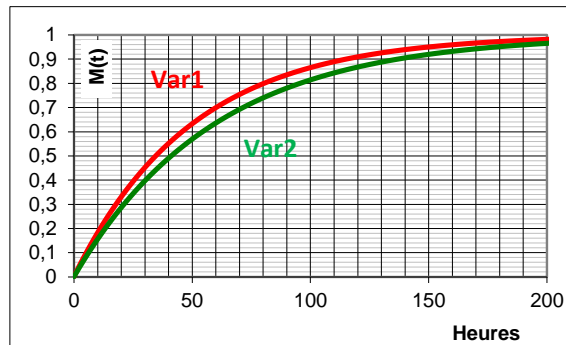


Figure 6. Distribution de la maintenabilité pour les configurations 1 et 2.

4.3 Disponibilité

La disponibilité peut être comprise comme la fraction de temps durant laquelle le gazoduc accomplit sa mission aux conditions nominales. La disponibilité dépend du taux de défaillance de la canalisation λ_1 et du taux de réparation μ_1 (et donc de la durée de vidange). De ce fait, la disponibilité est dépendante de la configuration technique adoptée (Tableau1), pour les systèmes de mise à l'évent.

Pour une meilleure lisibilité, il est parfois préférable d'utiliser la notion d'indisponibilité :

$$A' = 1 - A = 1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \tag{5}$$

L'indisponibilité peut être comprise comme la fraction de temps durant laquelle le gazoduc est à l'arrêt pour des raisons de maintenance.

	Disponibilité	Quantités	Quantités	Gains	Gains estimée
		Annuelles transportées en	Transportées sur la durée de vie en	estimées sur la durée de vie en	par année en \$
Variante 1	0,9821	16 500 682 183	412 517 054 584	0	0
variante 2	0,9849	16 547 620 711	413 690 517 775	43 461 600	1 738 464
variante 3	0,9850	16 549 594 007	413 739 850 183	45 288 726	1 811 549

Tableau.1 Disponibilité et gains estimés pour les différentes configurations.

4.4 Sécurité

L'aspect sécurité est traité sous le prisme d'une analyse QRA (Quantitative Risk Assessment) avec simulations sous logiciel Phast 7.1 pour les différentes configurations (Tableau2),

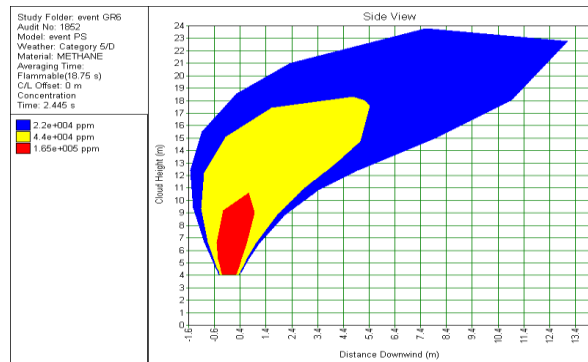


Figure. 7 Exemple de Dispersion du nuage de gaz (phase initiale, configuration1, V= 5m/s)

Optimisation de la Configuration des Dispositifs de Dépressurisations des Gazoducs par Analyse RAMS

	Phase	Vitesse Du vent	Distance des niveaux de radiation en m			Risque Individuel par année		Risque collectif par année		
			4 kw/m ²	8 kw/m ²	12,5 kw/m ²	Intérieur clôture	Extérieur clôture	1 décès	2 décès	3 décès
Var 1	Début	1 m/s	39			1,5 E-6	7,0. E-7	2,0 E-6	2,0 E-6	1,8E-7
		5 m/s	58	40	28					
	Fin	1 m/s	16			4,0 E-6	1,6 E-7	5,0 E-6	3,0 E-6	
		5 m/s	31	23	17					
Var 2 & 3	Début	1 m/s	175	75		1,9 E-6	1,9 E-6	1,05 E-5	1,05 E-5	1,05 E-5
		5 m/s	220	145	102					
	Fin	1 m/s	16			4,0 E-6	1,6 E-7	5,0 E-6	3,0 E-6	
		5 m/s	31	23	17					

Tableau 2. Synthèse des résultats de l'analyse des risques

A la lumière de ces résultats, la configuration 2, caractérisée par la suppression des vannes de régulation au niveau des PS et leur maintien au niveau des PC, apparait comme la plus rationnelle. Cette variante permet une amélioration de la maintenabilité et de la disponibilité de l'ouvrage et une augmentation du risque individuel et du risque collectif mais ces derniers restent très largement dans la limite des seuils de risque limites internationalement admis.

5 Conclusion

La sélection de la configuration optimale des dispositifs de dépressurisation des gazoducs a été abordée sous l'aspect d'une analyse RAMS. La configuration caractérisée par la suppression des vannes de régulation au niveau des PS et leur maintien au niveau des PC, apparait comme l'option la plus rationnelle.

References

- [1] Wei, L.: Calculation of gas pressure relief headers. China Oil and Gas Engineering, P.7-13, (1991).
- [2] Menon, S.: Gas Pipeline hydraulics, (2005).
- [3] Xueli, Y.: Hydraulic calculation of natural gas vent line. Natural Gas Industry, P. 77-81, (1999).
- [4] Jimin, K.: The discussing on gas venting amount in natural gas pipeline. Petrochemical Industry Application, P. 16-18, (2009).
- [5] Xiong Yi, Zhong Liping, Zhu Tingting, Research of emergency venting time in natural gas pipeline accidents with SPS. Procedia Engineering, P.927-932, (2014).
- [6] CENELEC, Railway applications. The specification and demonstration of RAMS. Part 1. EN 50126-1, (1999).
- [7] Markeset T., Kumar U.: Integration of RAMS and risk analysis in product design and development work processes. Journal of Quality in Maintenance Engineering. pp.393-410, (2003).
- [8] Smith D.J: Reliability, Maintainability and Risk: Practical Methods for Engineers. Butterwoth-Heinmann, (2005).

VII

APPLICATIONS À L'INGÉNIERIE

Sommaire

VII.1	Influence of Space Charge on Electric Field Distribution in Point-Barrier-Plane Air Gaps using Comsol Multiphysics Based on Finite Element Method	523
VII.2	Optimization of the Flow Rack AS/RS Configuration under a Specific Random Retrieving	531
VII.3	Using GIS in Seismic Hazard Analysis and Data Combination for Disaster Risk Management	538
VII.4	Estimation d'Erreur à Postérieur et Optimisation de Maillages pour Modèles Mécaniques à Comportements Endommageables	544
VII.5	Optimisation des Dimensions des Coursiers en Marches d'Escalier	552
VII.6	Modélisation et Optimisation d'une Station d'Elaboration du Sable Concassé en utilisant la Méthode des Plans d'Expériences	558
VII.7	Modélisation et Simulation du Flux des Patients au Service des Urgences de Tlemcen	566



Influence of Space Charge on Electric Field Distribution in Point-Barrier-Plane Air Gaps Using Comsol Multiphysics Based on Finite Element Method

Mohamed Abdelghani Benziada ^{*1}, Ahmed Boubakeur ^{*2}, and Abdelouahab Mekhaldi ³

¹ Laboratoire de Recherche en Electrotechnique, Ecole Nationale Polytechnique, Algeria,

mohamed_abdelghani.benziada@g.enp.edu.dz

² Laboratoire de Recherche en Electrotechnique, Ecole Nationale Polytechnique, Algeria

ahmed.boubakeur@g.enp.edu.dz

³ Laboratoire de Recherche en Electrotechnique, Ecole Nationale Polytechnique, Algeria,

abdelouahab.mekhaldi@g.enp.edu.dz

Abstract. The aim of this paper is to study the influence of the space charge on the electric field distribution under AC voltage, in a point-barrier-plane electrode system. A new approach to numerical simulation has been applied using COMSOL Multiphysics® based on finite element method. This model has been developed for a distance between electrodes equal to 5 cm. Simulation results show that both the insulating barrier and the space charge have a reducing effect of the electric field and consequently the increase of the rigidity of the point-plane system. It was also observed from simulations that the nature and the dimensions of the barrier plays an important role on the electric field distribution. We finish our work by representing the variations of the distributions of the charge carrier densities and the resulting space charge.

Keywords : space charge, electric field, barrier, point-plane system, numerical method.

1 Introduction

Dielectric materials are widely used as electrical insulators in a wide variety of applications, from electronic components to electrical machines. In order to guarantee the reliability of these components and machines, it is necessary to know the limits of use of the insulation used and their long-term evolution especially when they have to withstand high voltage gradients.

During the last three decades, numerous techniques for measuring space charge and polarization have been developed [1-5]. They have been used in many studies dealing with the aging processes of piezoelectric materials, breaking phenomena in cables or dielectric coatings.

The complexity of the tests performed in the laboratory makes them of limited use, because of the influence of different parameters on these studies. For this reason, the researchers have moved towards the use of computer tools where numerical solutions of these equations remain possible.

* Corresponding Author:

Among these methods, we have used the finite element method, which has now reached a degree of maturity and is, in fact, one of the most widely used analytic tools in the engineering disciplines.

In this study, we determined the distribution of the electric field in the point-barrier-plane air gap with an AC voltage. The COMSOL Multiphysics was used for modeling and the finite element method was used for simulations. We are interested to study the influence of space charge and the barrier (insulating and conductive) on the electric field distribution. The simulation results were verified with the experimental results obtained in the laboratory to validate the accuracy of the model.

2 Simulation model

There are several approaches for modelling the physical processes in non-thermal gas discharges. The hydrodynamic approach is the most widely used and it is therefore presented in detail below.

2.1 Governing Equations

To simulate the electric field in the air, a hydrodynamic model is used. This model describes the generation, the annihilation and the movement of three species (electrons, positive ions, and negative ions) [6]. It includes a set of mass conservation equations for the charge carriers in the gas coupled with the Poisson's equation for the calculation of the electric field and is described by the equations (1) to (4) [6]:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (-N_e W_e - D_e \nabla N_e) = R_e \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_p}{\partial t} + \nabla \cdot (-N_p W_p - D_p \nabla N_p) = R_p \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} + \nabla \cdot (-N_n W_n - D_n \nabla N_n) = R_n \quad (3)$$

$$(-\varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla V) = q(N_p - N_e - N_n), \quad E = -\nabla V \quad (4)$$

Here, subscripts e , p , and n indicate the quantities related to electrons, positive ions, and negative ions, respectively. N stands for the charge carrier density, [m^{-3}]; D is the diffusion coefficient, [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]; μ is the mobility, [$\text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$]; \mathbf{E} is the vector of electric field, [Vm^{-1}]; V is the electric potential, [V]. t stands for time, [s]; and R specifies source terms (rates of the processes in discharge plasma), [$\text{m}^{-3} \text{s}^{-1}$]; $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ [C] is the elementary charge, and $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ [Fm^{-1}] is the permittivity of vacuum.

The mobility of ions is much lower than that of electrons; hence, the ions are assumed immobile.

The so-called source terms on the right-hand side of (1)-(3) include rates of processes taking place in the discharge volume. Thus, background ionization, electron impact ionization, electron attachment, electron-ion recombination and ion-ion recombination are the main phenomena to be considered when (1)-(3) are used to describe the development of electron avalanches in air.

Note that the shown source terms are dependent on the local electric field strength, which is obtained by solving equation (4) taking into account the density of the space charge (right-hand side of the equation).

The resulting process rates for the different charged particles can be expressed as follows [6]:

$$\begin{aligned} R_e &= R_{ion} + R_{det} + R_0 - R_{att} - R_{ep} \\ R_p &= R_{ion} + R_0 - R_{pn} - R_{ep} \\ R_n &= R_{att} - R_{det} - R_{pn} \end{aligned} \quad (5)$$

Where R_0 represents the rate of background ionization in zero field limit; $R_{ion} = \alpha N_e W_e$ is the rate of electron impact ionization (α stands for Townsend's ionization coefficient, m^{-1}); $R_{att} = \eta N_e W_e$ is the rate of electron attachment to electronegative

molecules (η is attachment coefficient, m^{-1}); and $R_{det} = k_{det}N_eN_n$ is the rate of detachment of electron from negative ions (k_{det} is detachment coefficient, m^3/s).

Two types of recombination are considered, electron-ion and ion-ion, with the rates $R_{ep} = \beta_{ep}N_eN_p$ and $R_{pn} = \beta_{pn}N_pN_n$, respectively (β stands for corresponding recombination coefficient, m^3/s).

The model parameters used in the present study are adopted from [6,7] and are:

$$\begin{aligned}
 \mu_p &= 2 \cdot 10^{-4} && [m^2/V \text{ s}] \\
 \mu_n &= 2.2 \cdot 10^{-4} && [m^2/V \text{ s}] \\
 D_p &= 5.05 \cdot 10^{-6} && [m^2/s] \\
 D_n &= 5.56 \cdot 10^{-6} && [m^2/s] \\
 \beta_{ep} &= 5 \cdot 10^{-14} && [m^3/s] \\
 \beta_{pn} &= 2.07 \cdot 10^{-12} && [m^3/s] \\
 k_{det} &= 10^{-18} && [m^3/s] \\
 R_0 &= 1.7 \cdot 10^9 && [1/m^3 \text{ s}]
 \end{aligned} \tag{6}$$

Drift velocity and diffusion coefficient of electrons as a function of the electric field are approximated as [6,7]:

$$W_e = 3200 \left(\frac{E}{N}\right)^{0.8} \tag{7}$$

$$D_e = 0.07 + 8 \left(\frac{E}{N}\right)^{0.8} \tag{8}$$

With $N = 2,5 \cdot 10^{25} [1/m^3]$ is the gas density.

The equations of the model have been complemented with boundary conditions and initial conditions given in [6] and are implemented in the COMSOL Multiphysics software.

2.2 Implementation

The geometry of the used electrodes systems is presented in figure 1.

The model is implemented in COMSOL Multiphysics package. The package's "Convection and diffusion, transient analyzes" and "Electrostatics" application modes are used to implement the system of Equations (1)-(4) together with boundary conditions shown in figure 2. To accelerate the convergence, a few initial conditions and simplifying appropriate assumptions are used. A user-controlled mesh is applied; the meshes dimension varies by adapting to the geometry of the arrangement.

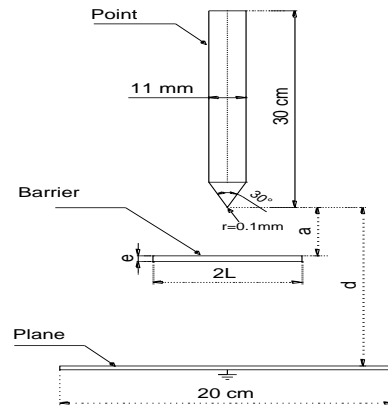


Fig1. Point-barrier-plane configuration.

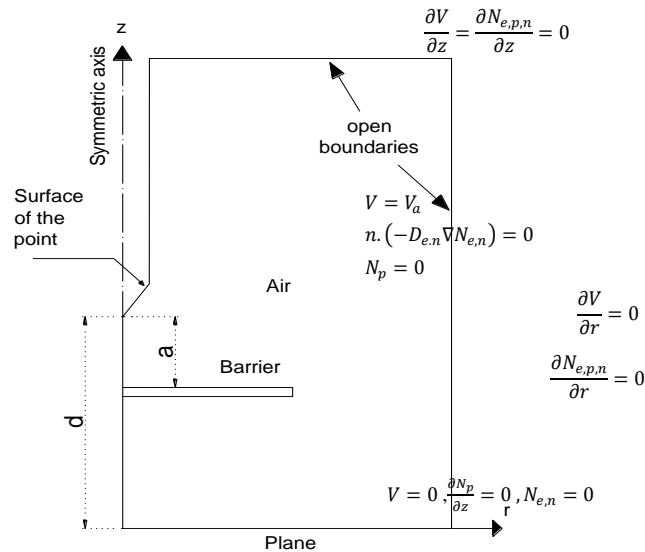


Fig2. Computational domain, n is the unit vector normal to the boundary.

2.3 Validation of the model

To validate our model, we compared it with experimental results of investigations already performed using a capacitive probe carried out at the University of Cardiff (Great Britain) by Mouhoubi and Boubakeur [8].

The experimental model is composed of a point, a barrier, and a plane. The various elements of this arrangement are described below.

The point-barrier-plane arrangement consists of two electrodes. The high voltage electrode (point) consists of a cylindrical tube with a diameter of 11 mm, terminated by a conical tip, having an angle of 30° , which terminates in a hemispherical surface with a curvature radius 0.1 mm [8]. The grounded electrode consists of a 20 cm wide plane. The nature of the barriers used are insulating and conductive.

The insulating barrier of square form in made of Bakelite with relative permittivity $\epsilon_r = 5.8$ measured using a Schering bridge. Its width is $2L = 15$ cm and thickness $e = 2.1$ mm and it is in contact with the point, i.e. ($a/d = 0\%$) with: 'a' the point-barrier distance and, 'd' the point-plane distance [8].

The second type of barrier is a copper conductive barrier that has the same dimensions as the insulating barrier in Bakelite. The electrical conductivity of this barrier is given by COMSOL and is equal to: $\sigma = 58.1 \times 10^6$ [S/m]. The user, for our simulation we took, defines the relative permittivity: $\epsilon_r = 1$.

3 Results and discussions

The electric field distribution along symmetry axis taking into account the presence of a space charge in the medium is determined in this paper. Then, we show the effect of the barrier (insulating and conductive) and the space charge on the intensity of the electric field and we finish our results by representing the variations of the distributions of the charge carrier densities and the resulting space charge.

3.1 Electric field with and without space charge

We start our results by observing the shape and magnitude of the electric field on the axis of the high-voltage electrode and discussing the space charge effect.

First, we will begin by studying the influence of inserting an insulating barrier in the air gap between a point and a grounded plane (figure 3). We note that the introduction of the barrier has altered the shape and the value of the field in the point-plane air gap. The field with the barrier is lower than without barrier (with or without space charge). These results confirm that the barrier acts as a geometric and electrostatic obstacle to the evolution of the discharge [9]

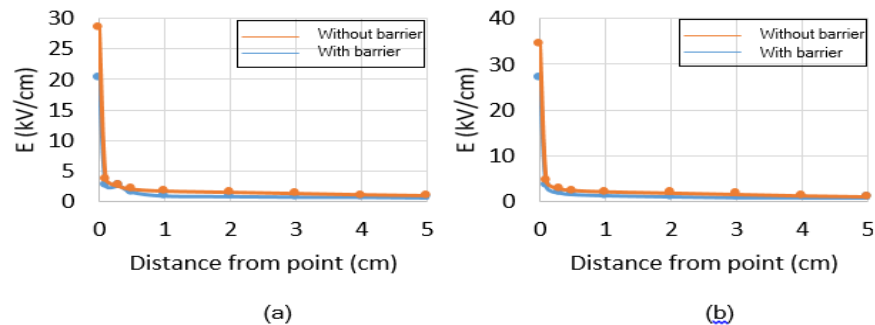


Fig3. Influence of insulating barrier on the electric field along symmetry axis:
(a) without space charge, (b) with space charge
($V=17$ kV, $a/d = 20\%$, $d = 5$ cm, $2L = 15$ cm).

Then, we studied the influence of the space charge on the electric field distribution in presence or absence of an insulating barrier (figure 4).

We observe from figure 4 that the electric field in the presence of space charge is reduced by comparing with the field without space charge. It can be explained by the presence of a superficial charge on the barrier, which is the main cause of the improvement of the rigidity of the point-plane systems. Thus, the field in the interval is reduced because the charge, which accumulates on the barrier, is positive, then it produces a divergent field on the barrier surface (in the opposite direction to the applied field).

We can observe that the space charge has a reducing effect and that the barrier plays a role of an electrostatic obstacle. In conclusion, both the insulating barrier and the space charge have a reducing effect of the electric field and consequently the increase of the rigidity of the point-plane system.

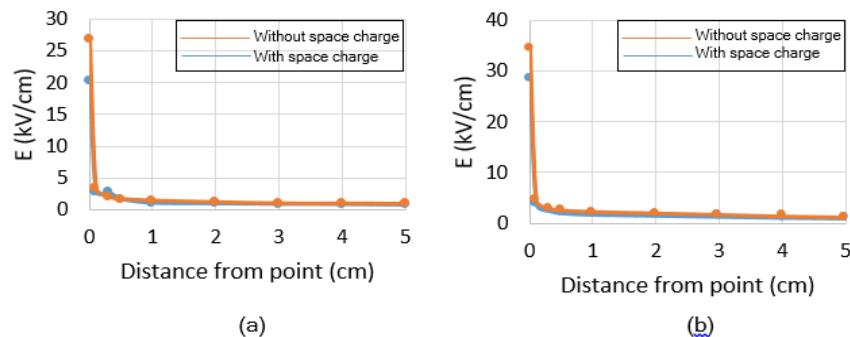


Fig4. Influence of space charge on the electric field along symmetry axis:
(a) with barrier, (b) without barrier
($V=17$ kV, $a/d = 20\%$, $d = 5$ cm, $2L = 15$ cm).

3.2 Effect of the nature of the barrier

From the figure 5, we note that the introduction of the barrier in the air gap between the electrodes changes the field distribution. The field with the barrier is lower than without barrier. These results confirm that the barrier acts as a geometric obstacle to the evolution of the discharge [10].

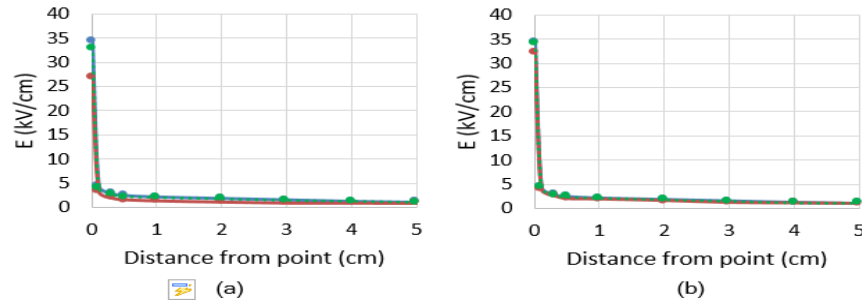


Fig5. Influence of the nature of the barrier on the electric field on the symmetric axis: (a) $a/d = 0\%$, (b) $a/d = 80\%$ ($V = 17$ kV, $d = 5$ cm, $2L = 15$ cm).

The electric field intensity has a relation with the position of the barrier in the interval, so it is necessary to choose optimal positions (near the HV electrode) to increase the dielectric strength of the point-plane system [10].

The nature of the barrier plays an important role on the electric field distribution. The introduction of a conductive barrier near the point electrode (figure 5a) slightly decreases the intensity of the electric field, but when one moves away from this electrode, the conductive barrier has no remarkable influence and the rigidity of the system becomes similar to that of the point-plane system without a barrier (figure 5b).

3.3 Effect of the dimensions of the barrier

We observe in Figure 6 that the electric field at the plane on the symmetric axis decreases when increasing the width of the barrier. Indeed, this result confirms once more the hypothesis of geometric obstacles related to the width of the barrier [11]. As for the influence of the barrier's thickness, we observe a slight modification of the electric field on the symmetric axis when barriers of greater thicknesses are used (Figure 7). Therefore, we can say that the thickness has practically only a slight influence [11].

This result shows that the barrier's width remains the most influential dimension on the dielectric strength of the point-barrier-plane system and not its thickness. The experimental and the simulation data are within an error tolerance of $\pm 10\%$.

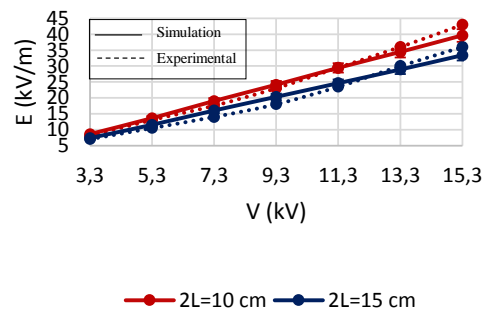


Fig6. Influence of the width of the barrier on the variation of the electric field as a function of the voltage V ($a/d = 0\%$, $d = 5$ cm, $e = 2.1$ mm).

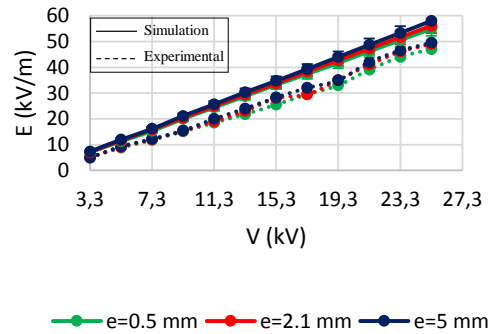


Fig7. Influence of the thickness of the barrier on the electric field as a function of the voltage V ($a/d = 0\%$, $d = 5$ cm, $2L = 15$ cm).

3.4 Densities of charge carriers

We finish our results by presenting the variations of the distributions of the densities of electrons, positive ions, negative ions, and resulting space charge depending on the distance from the point.

From figure 8a, we note that the concentrations of the charge carriers depend on both the field configuration and the applied voltage. The increasing voltage causes an increase in the electron density in the vicinity of the high voltage electrode due to the increase of the field strength and, consequently, the intensity of the ionization [11].

However, as observed in figure 8b, the levels of the electron concentrations are much lower than the densities of the positive ions at the corresponding voltages. We can explain this by the loss of electrons at the surface of the point electrode by their attachment to the electronegative components of the air [11].

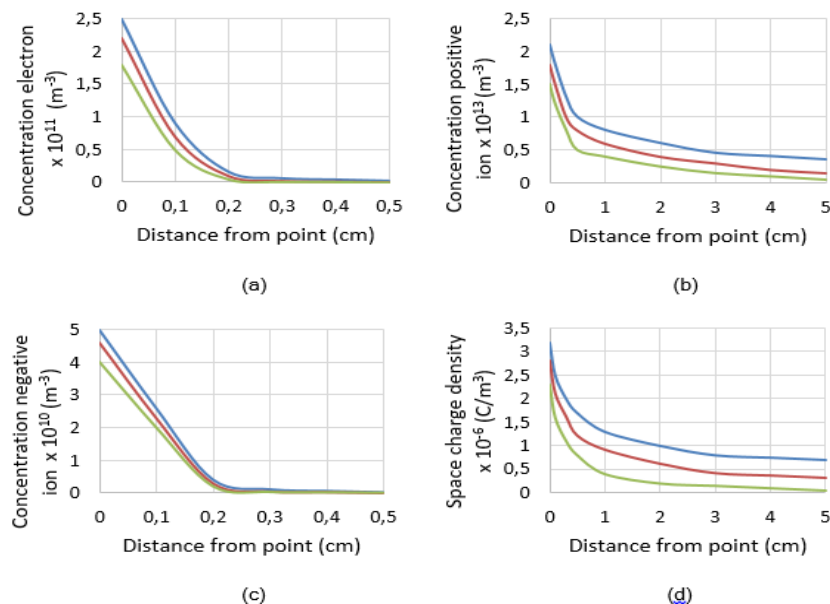


Fig8. Variations of densities of charge carriers along symmetry axis: (a) electrons, (b) positive ions, (c) negative ions and (d) resulting space charge. ($d = 5$ cm, $2L = 15$ cm, $a/d = 0\%$).

In figure 8c, we present the variation of the negative ion density in the medium between electrodes that will take place when the free electrons in the air are attached to the electronegative components of the air. This attachment gives rise to increased densities of negative ions (figure 8c), which however remain even lower than those of electrons. As a result, the positive space charge dominates throughout the discharge space (figure 8d) except for a very thin layer around the surface of the high voltage electrode where the concentration of the positive ions is set to zero [11].

4 Conclusion

In this work, a numerical simulation of the electric field is performed using a hydrodynamic model in the COMSOL Multiphysics simulation software. It was concluded that the electric field distribution on the symmetry axis decreases by inserting an insulating barrier in the gap. We also observed from the simulation results that the space charge has a reducing effect and that the barrier plays a role of an electrostatic obstacle. A comparison between the insulating barrier and the conductive barrier was made. The representation of the charge carrier densities allows understanding better the distribution of the space charge in the medium between the electrodes.

References

- [1] A.Boubakeur, L.Mokhnache, S.Boukhtache, "Theoretical investigation on barrier effect in point-plane air gap using finite elements method in presence of space charge", POWERCOM'98, International conference on Power System Technology, Vol.1, pp.116-121, Beijing, 1998.
- [2] G. Damamme, C. Le Gressus, and A. S. De Reggi, "Space charge characterization for the 21th century," Dielectrics and Electrical Insulation, IEEE Transactions on, vol. 4, pp. 558-584, 1997.
- [3] S. Agnel, P. Notinger, Jr., and A. Tourelle, "Space charge measurements under applied DC field by the thermal step method," presented at Electrical Insulation and Dielectric Phenomena, 2000 Annual Report Conference on, 2000.
- [4] B. Khaddour. "Modélisation du champ électrique modifié par la charge d'espace injectée. Modélisation et simulation", Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2006.
- [5] O. Hennane, " Etude de l'influence de la charge d'espace sur la dynamique des particules neutres dans une décharge pointe-plan", Mémoire de Magister, Université -Abou Bakr Belkaïd- Tlemcen, 2012.
- [6] Y. V. Serdyuk, "Numerical simulations of non-thermal electrical discharges in air: Lightning electromagnetics", IET power and energy series, pp. 87-138, 2012.
- [7] M. A. Benziada, A. Boubakeur, A. Mekhaldi, "Numerical Simulation with Experimental Validation of the Electric Field Distribution in Point-Barrier-Plane Air Gaps", IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., vol. 25, no. 6, pp. 2093–2102, 2018.
- [8] S.Mouhoubi, A.Boubakeur, "Partial discharges behaviour in a rod-plane arrangement with an insulating barrier ", Archives of Elect Eng. Vol. I.VI. N° 3-4, pp. 187-196, 2007.
- [9] M.A.Benziada, A.Boubakeur, A.Mekhaldi, "Numerical Simulation of the Barrier Effect on the Electric Field Distribution in Point-Plane Air Gaps using COMSOL Multiphysics", The 5th International Conference on Electrical Engineering, Algeria, 2017.
- [10] M.A. Benziada, A. Boubakeur, A. Mekhaldi, " Polluted Barrier Effect on the Electric Field Distribution in Point-Plane Air Gaps under AC Applied Voltage: Based on Experimental Model ", ENP Engineering Science Journal, Vol. 1, No. 2, December 2021.
- [11] M. A. Benziada, "Influence de la charge d'espace sur la distribution du champ dans les intervalles d'air pointe-barrière-plan", PhD Thesis – Ecole Nationale Polytechnique, Algeria, 2020.



Optimization of the Flow rack AS/RS configuration under a specific random retrieving

Khadidja Bakdi ^{*1}, Thiziri Boumezirene ², and Latéfa Ghomri ³

^{1,2,3}Manufacturing Engineering Laboratory of Tlemcen, Faculty of Technology, University of Tlemcen, Algeria

¹khadidja.bakdi@univ-tlemcen.dz

²boumezirene.thiziri@univ-tlemcen.dz

³latefa.ghomri@univ-tlemcen.dz

Abstract : The change in the environment and the increase in competition appeal to the need for the industry to improve or find new ways to perform its different sectors, especially the storage sector. A specific Material handling called automated storage/retrieval system (AS/RS) is recommended to maintain perfect storage/retrieval operations. In this paper, in order to drive these systems with high degree of performance, we are interested to study the classical configuration of compact AS/RS system flow-rack. This system has only one rack and differs in that a bin can hold a plenty of goods. We aim to optimize its configuration under a specific random retrieving. The model of retrieval time given in this study is based on a discrete approach and validate through simulation.

Keywords : AS/RS system ; compact AS/RS ; mathematical modelling ; optimization

1 Introduction

The automated storage/retrieval systems (AS/RS) are the one of the technologies that answer to the demand for just-in-time delivery. They are used not only in warehousing but also in manufacturing and distribution areas, they have a plenty of advantages, accuracy, precision, speed as well a better use of the storage space [1]. However, they are quite expensive. In this paper we are interested to study the compact (multi-deep) AS/RS systems. These systems have only one rack, and differ by the depth of its bins. Every single bin can contain a plenty of goods. In general, the performance of this system is measured by its response time, hence, in order to improve its performance, we aim in this study to propose a new proposal method to retrieve the goods. In addition, we propose an analytical model of the retrieval time. This paper is organized as follow : first section is the introduction above. Section two presents a short literature review that done in the concern of compact AS/RS system.

*Corresponding Author

The proposal method of retrieving and the analytical model of the retrieval time are presented in section three. section four shows the optimization procedure. Finally, we summarize the purpose and the results of this study in section five.

2 Literature review

This section is devoted to the presentation of some works that are focused only in the study of the multi-deep AS/RS systems. The first study was realized by ([2], [3]), they proposed a model that carry on the design of the system. [4] proposed an analytical model of the retrieval time for a flow-rack AS/RS without considering the proportion of existence of the loads in the system. The same model was optimized by [5] and [6] applied two metaheuristics (taboo search and simulated annealing) to optimize the average retrieval time. Moreover, for the same system [7] presented another analytical model of the retrieval time but here by considering the proportion of existence of goods in the system. another configuration of a flow rack AS/RS was proposed by [8], it has only one crane and the bins has a U shape, also the authors proposed an analytical model of the dual command and used it to optimize the system dimensions. Moreover, this model was improved by [9] by considering a compact AS/RS with a full turnover-based storage policy. [10] proposed another analytical models by taking into account the acceleration and deceleration based on non-approximate speed model of S/R machine and used it in the optimization process. Furthermore ; [11] optimized the dimension of the system by using the enumeration technique and [12] in order to optimize the dual travel time, the authors used the new metaheuristic LSH (Less-Shelves Hungarian) to chose the best storage and retrieval emplacements.

Another configuration called Bi-directional was proposed in [13], they consider the cranes work separately, the authors gave an analytical model for the retrieval and dual cycle time. For the same system [14] proposed another analytical model by considering the cranes work in collaborative operation modes.

3 Analytical modelling

We are interested to study flow-rack AS/RS presented in [7]. To retrieve a good of type i from the cell m ; the retrieval machine carry out all the goods that precede the desired one and put them in the gravitational conveyor one at time. These goods will then be restored in the other face. Indeed, to retrieve a load from a bin j stored in the cell m the retrieval machine performs three basic travel, first the retrieval machine moves from its dwell point to the bin that hold the desired good, we call this travel by E_1^R and its discrete model could be write as follow :

$$E_1^R = \max \left(t'_h \left(\left| i - \frac{L+1}{2} \right| \right); t'_v \left(\left| j - \frac{N-1}{2} \right| \right) \right) \quad (1)$$

Once the retrieval machine reaches this bin, it will pick up all the loads $m - 1$ that precede the desired good one by one and transport them to the gravitational conveyor. Thus, this travel is called E_2^R and it is repeated $2m$ times. its discrete model could be write as follow :

$$E_2^R = \max (t'_h(L + 1 - i); t'_v(j - 1)) \quad (2)$$

The third and last elementary travel consists of the moving of the retrieval cranes from the bin j to the drop-off station. this travel is called by E_3^R . its discrete model is :

$$E_3^R = \max \left(t'_h \cdot i; t'_v(j-1) \right) \quad (3)$$

The average time required to retrieve the load stored in the bin j and in a cell m can be expressed as follow :

$$\overline{E^R}(i) = \overline{E_1^R} + 2m\overline{E_2^R} + \overline{E_3^R} \quad (4)$$

From this and based on a discrete approach, we can write the exact average retrieval time as follow :

$$\overline{E^R}(i) = \frac{1}{NL} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \left(E_1^R + \max \left(t'_h \cdot i; t'_v(j-1) \right) \right) + 2m \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L E_2^R \right) \quad (5)$$

By replacing (1), (2) and (3) in (5), we obtain :

$$\overline{E^R}(i) = \frac{1}{NL} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \max \left(t'_h \left(\left| i - \frac{L+1}{2} \right| \right); t'_v \left(\left| j - \frac{N-1}{2} \right| \right) \right) + 2m \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \max \left(t'_h (L+1-i); t'_v(j-1) \right) \right) \quad (6)$$

The retrieval process consists of choosing randomly a bin from a set of bins which hold at least a good of type i . Indeed, many scenarios could be considered in the process of retrieving the desired good of type i from a cell m .

1. To retrieve a good of type i from the the bin j required that at least one good of this type is stored in this bin, and to retrieve it from a layer 0 required that at a good of the desired good is stored in the layer 0. The probability to retrieve from the first layer is :

$$P(\text{layer} == 0) = \frac{\alpha_i}{1 - (1 - \alpha_i)^{\rho M}} \quad (7)$$

2. To retrieve a layer from a bin j required that this bin hold at least one load of type i , and to recover it from layer 1 of this bin, required that a good of type i is stored in the layer 1 and a good of different type is stored in layer 0. The probability to retrieve from the layer 1 is :

$$P(\text{layer} == 1) = \frac{\alpha_i(1 - \alpha_i)}{1 - (1 - \alpha_i)^{\rho M}} \quad (8)$$

3. To retrieve a good from a bin j required that this bin hold at least one load of type i , and to recover it from layer 2 of this bin, required that a good of type i is stored in the layer 2 and a good of different type is stored in both of layers 0 and 1. The probability to retrieve from the layer 2 is :

$$P(\text{layer} == 2) = \frac{\alpha_i(1 - \alpha_i)^2}{1 - (1 - \alpha_i)^{\rho M}} \quad (9)$$

in general ;to retrieve a good of type i from a layer j required that a good of this type is stored in the layer j and goods of different type are stored from layer 0 to layer $j - 1$. the probability to retrieve from the layer j is :

$$P(\text{layer} == j) = \frac{\alpha_i(1 - \alpha_i)^j}{1 - (1 - \alpha_i)^{\rho M}} \quad (10)$$

The average rank, could be calculate as follow :

$$\bar{m} = \sum_{j=0}^{\rho M-1} j \cdot P(\text{layer} == j) \quad (11)$$

Replacing (18) in (19) :

$$\bar{m} = \sum_{j=0}^{\rho M-1} j \cdot \frac{\alpha_i(1 - \alpha_i)^j}{1 - (1 - \alpha_i)^{\rho M}} \quad (12)$$

Knowing that :

$$\sum_{j=0}^N jx^j = \frac{Nx^{N+2} - (N+1)x + x}{(x-1)^2} \quad (13)$$

The equation (2) becomes :

$$\bar{m} = \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i(1 - (1 - \alpha_i)^{\rho M})} \quad (14)$$

By studying the limits of the average retrieval layer \bar{m} on the extreme points, we find :

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow 1} \bar{m} = 1 \quad (15)$$

$$\lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \bar{m} = \frac{\rho M}{2} \quad (16)$$

This means, in case the proportion of load is one ($\alpha_i \approx 1$), we usually retrieve a load from the first layer.

However, if the proportion of existence of the goods in the system is nearly 0 ($\alpha_i \approx 0$) and stored under a random and uniform manner in the system. The load is usually retrieved from the middle of the bin.

the general discrete model of the retrieval time required to retrieve all loads existing in the system is obtained by replacing formula (14) in formula (6), and could be write as follow :

$$\overline{ER}(i) = \frac{1}{NL} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \max \left(t'_h \left(\left| i - \frac{L+1}{2} \right| \right); t'_v \left(\left| j - \frac{N-1}{2} \right| \right) \right) + 2 \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i(1 - (1 - \alpha_i)^{\rho M})} \times \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \max \left(t'_h (L+1-i); t'_v (j-1) \right) \right) \quad (17)$$

Thus, we can write the average retrieval time of an AS/RS system, containing K type of loads, where their proportions are respectively $\alpha_1 ; \alpha_2, \dots \alpha_K$ as :

$$\overline{E^R} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \overline{E^R}(i) \quad (18)$$

So;the discrete model of the average retrieval time for an AS/RS filled to ρM and contains K types of loads where their proportion are respectively $\alpha_1 ; \alpha_2, \dots \alpha_K$, is :

$$\overline{E^R} = \frac{1}{NL} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \max \left(t'_h \left(\left| i - \frac{L+1}{2} \right| \right); t'_v \left(\left| j - \frac{N-1}{2} \right| \right) \right) \right) + 2 \sum_{k=1}^K \frac{1 - \alpha_k}{(1 - (1 - \alpha_k)^{\rho M})} \times \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \max \left(t'_h (L+1-i); t'_v (j-1) \right) \right) \quad (19)$$

4 Analytical model validation and optimization

Our model is validate through simulation. it consists of tow phases, storage and retrieval phases. first the system is filled to ρM of its capacity. then, the retrieval phase begin by selection randomly a bin from all the bins that contain at least one good of type i . furthermore, retrieve the first load of the desired type found in this chosen bin. A system with 10 bins is simulated in this part. The capacity of the bins is varied from 100 to 500. This gives overall systems capacity varied from 1000 to 5000. The proportions of the various types of loads are varied from 0.1 to 1. see table 2. We compared the results found by our model to those obtained by simulations. The results show minor errors which prove the accuracy of our model.

To find the optimal configuration of the flow-rack AS/RS, we apply the enumeration technique on the discrete model of retrieval time. This technique is exact for reason that it went through all the possible case. The process is composed of two phases, the storage phase and the retrieval phase. first, the capacity of the system is defined. Next, filled the system to ρ of its capacity by considering the proportion of existence of the goods in the system. After that, we retrieve goods according to the specific retrieving method proposed in this work i.e, select randomly a bin that hold at least a load of type i between all the bins that contain a good of this type, than retrieve it. Many configuration of AS/RS are studied here, varied from 10 to 1000 as well the proportion of existence of goods in the whole of system is varied from 0.1 to 1. See table , 1 The results of this part are presented in the table.1. It shows that the best configuration of the flow-rack AS/RS based on this retrieval methodology is $N_l = 1 ; N_c = 2$ and $M = \frac{N}{2}$. Otherwise, it is preferable to increase the depth of the bins than increase the horizontal and vertical dimensions of the rack.

5 Conclusion

In this paper, we are interested to study a specific type of compact AS/RS system, called Flow-rack AS/RS. This system has only one rack, and each bin can hold more than one

good. This offer a better use of storage area. To improve the performance of this AS/RS, we build in this work a method to optimize the configuration of the AS/RS. this mean give the optimal configuration that minimize the travel time, in our case we minimize the retrieval time based on a specific way of retrieving. The model of retrieval time is given basing on a discrete approach and have been validated with a high degree of accuracy.

References

- [1] 'Automated Storage and Retrieval Systems'. <https://www.mhi.org/fundamentals/automated-storage> (accessed Sep. 01, 2021).
- [2] Y. H. Park and D. B. Webster, 'Modelling of three-dimensional warehouse systems', *International Journal of Production Research*, vol. 27, no. 6, pp. 985–1003, Jun. 1989, doi : 10.1080/00207548908942603.
- [3] Y. H. Park and D. B. Webster, 'Design of class-based storage racks for minimizing travel time in a three-dimensional storage system', *International Journal of Production Research*, vol. 27, no. 9, pp. 1589–1601, Sep. 1989, doi : 10.1080/00207548908942641.
- [4] Z. Sari, C. Saygin, and N. Ghoulali, 'Travel-time models for flow-rack automated storage and retrieval systems', *Int J Adv Manuf Technol*, vol. 25, no. 9, pp. 979–987, May 2005, doi : 10.1007/s00170-003-1932-3.
- [5] A. Azzouz, 'Optimisation des dimensions d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel pour un temps de cycle minimum', PhD Thesis, Université de Tlemcen-Abou Bekr Belkaid, 2001.
- [6] H. N. Bessenouci, Z. Sari, and L. Ghomri, 'Metaheuristic based control of a flow rack automated storage retrieval system', *J Intell Manuf*, vol. 23, no. 4, pp. 1157–1166, Aug. 2012, doi : 10.1007/s10845-010-0432-1.
- [7] L. Ghomri and Z. Sari, 'Mathematical modeling of retrieval travel time for flow-rack automated storage and retrieval systems', *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 3, pp. 1906–1911, 2015.
- [8] R. de Koster, T. Le-Duc, and Y. Yugang, 'Optimal storage rack design for a 3-dimensional compact AS/RS', *International Journal of Production Research*, vol. 46, no. 6, pp. 1495–1514, Mar. 2008, doi : 10.1080/00207540600957795.
- [9] P. Yang, L. Miao, Z. Xue, and L. Qin, 'Optimal storage rack design for a multi-deep compact AS/RS considering the acceleration/deceleration of the storage and retrieval machine', *International Journal of Production Research*, vol. 53, no. 3, pp. 929–943, Feb. 2015, doi : 10.1080/00207543.2014.942441.
- [10] P. Yang, K. Yang, M. Qi, L. Miao, and B. Ye, 'Designing the optimal multi-deep AS/RS storage rack under full turnover-based storage policy based on non-approximate speed model of S/R machine', *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review*, vol. 104, no. C, pp. 113–130, 2017.
- [11] M. A. Hamzaoui and Z. Sari, 'Optimal dimensions minimizing expected travel time of a single machine flow rack AS/RS', *Mechatronics*, vol. 31, pp. 158–168, Oct. 2015, doi : 10.1016/j.mechatronics.2014.10.006.

- [12] T. Zhang, Z. Chen, and L. Li, 'A Hungarian-based Heuristic for Dual-command Storage/Retrieval in Single-machine Flow-rack AS/RS with Determined Locations', in 2021 11th International Conference on Information Science and Technology (ICIST), May 2021, pp. 251–260. doi : 10.1109/ICIST52614.2021.9440613.
- [13] Z. Chen, X. Li, and J. N. D. Gupta, 'A bi-directional flow-rack automated storage and retrieval system for unit-load warehouses', International Journal of Production Research, vol. 53, no. 14, pp. 4176–4188, Jul. 2015, doi : 10.1080/00207543.2014.980459.
- [14] A. Hamzaoui and S. Zaki, 'Cycle time models for the bidirectional flow-rack AS/RS', 2020, doi : 10.5937/fmet2001211h.

TABLE 1 – The optimal dimensions of different system dimensions ; N=4

K type	System size	α_i				N_l	N_c	ρM
		α_1	α_2	α_3	α_4			
4	50	0.1	0.1	0.1	0.7	1	1	50
		0.25	0.25	0.25	0.25	1	1	50
	100	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	50
		0.25	0.25	0.25	0.25	1	2	50
	500	0.1	0.1	0.1	0.7	1	2	250
		0.25	0.25	0.25	0.25	1	2	250
	1000	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	500
		0.25	0.25	0.25	0.25	1	2	500

TABLE 2 – Performance comparison of the analytical model vs. simulation. M=300/M=400

M	α_i	300			400		
		$\bar{m}(analytic)$	$\bar{m}(sim)$	$\bar{m}errors$	$\bar{m}(analytic)$	$\bar{m}(sim)$	$\bar{m}errors \%$
0.1	9	9,0504	0,56	9	9,208	2,3111	
0.2	4	3,9984	0,04	4	4,0428	1,07	
0.3	2,3333	2,3423	0,3842	2,3333	2,3712	1,6228	
0.4	1,5	1,5499	3,3266	1,5	1,5162	1,08	
0.5	1	1,0009	0,09	1	0,9816	1,84	
0.6	0,6666	0,6643	0,355	0,6666	0,6611	0,835	
0.7	0,4285	0,4292	0,1466	0,4285	0,4281	0,11	
0.8	0,25	0,2441	2,36	0,25	0,2455	1,8	
0.9	0,1111	0,1127	1,43	0,1111	0,1136	2,24	
1	0	0	0	0	0	0	

Using GIS in seismic hazard analysis and data combination for disaster risk management

Hamidatou Mouloud^{*1}, Nassim Hallal², and Saad Lebdioui³

¹Research Center in Astronomy, Astrophysics and Geophysics, BP 63, Bouzaréah, 16340 Algiers, Algeria.
mouloudh83@yahoo.com

²Research Center in Astronomy, Astrophysics and Geophysics, BP 63, Bouzaréah, 16340 Algiers, Algeria.
n.halla@craag.dz

³Faculty of Technology, 20 August 1955- Skikda university Skikda, Algeria.
s.lebdioui@yahoo.com

Abstract. Among the many kinds of multi-hazards and man-made disasters, earthquakes dominate with regard to their social and economic impact on the urban environment. Seismic hazard assessment for infrastructure objects is of substantial importance because it provides valuable information for seismic safety and disaster mitigation. The main objective of the study is to integrate basic geo-datasets in thematic mapping products and to assess the seismic hazard using GIS techniques to provide a basis for disaster management in the case study of the Constantine region in Algeria. GIS is applied as a valuable tool to support effective decision-making by managing, structuring, and utilizing comprehensive data for disaster prevention. Web GIS is of interest to us in future work because it is provided the ease for real-time access and a simultaneous informed decision-making process for all stakeholders involved.

Keywords : Geographic information system (GIS), Data integration, Seismic hazard assessment, Disaster risk management.

1. Introduction

Seismic activity are the most lethal catastrophes influencing the human environment; fact, catastrophic events have defined human history throughout. Global seismic risk, particularly susceptibility, is constantly growing as urbanization and development occupy more regions vulnerable to the consequences of major earthquakes. Furthermore, unrestrained urban expansion in seismically active places is frequently coupled with the construction of seismically dangerous buildings and infrastructures, which is typically performed with insufficient understanding of regional seismicity features and seismic hazard. The assessment of seismic hazard is the initial stage in the evaluation of seismic risk and the first link in the preventative chain. The incorporation of earthquake risk assessments into seismic risk reduction programs will allow us to focus on preventing earthquake impacts rather than overcoming/following tragedies. The primary goal of this research is to combine fundamental spatial geo-datasets into thematic mapping products and to estimate seismic hazard using GIS techniques in order to offer a foundation for disaster management in the Constantine area of Algeria. The GIS technique used for hazard assessment is based on the analysis and processing of the source-geometry, earthquake occurrence model, seismicity characteristics and statistics in each source, and suitable attenuation relations. Thus, the seismic hazard at the Constantine site is calculated by combining the effects of ground motion caused by earthquakes of various sizes that occur at different places within distinct seismic sources and with varying frequency of occurrence. Several studies have assessed seismic hazards in Algeria using deterministic and probabilistic methods (Mortgat et shah 1978; Hamdache et al. 1998-2001; Pelàez et al. 2004-2005-2006; Bouhadad 1998-2001-2002; Ayadi 2002-2003; Aoudia 2000; Benouar 1994-1996; Harbi et al. 2004; Boughacha 2004; Laouami et al. 2006; Farsi et al. 2007; Bensaïbi et al. 2007; Hamidatou et al 2016-2017-2019-2021). This study provides a probabilistic assessment of urban area seismic risks based on zoning and seismotectonic data. The results suggest that previous studies have underestimated the seismic risks in the Constantine region. The probabilistic approach suggests that significant ground movements will occur due to seismic hazards (Cornell 1968). (McGuire 1978) presented five hazard analysis steps: (i) identification of potential earthquake sources, (ii) assessment of geological, geophysical and geometric source parameters, (iii) identification of the seismic motion attenuation patterns, (iv) site specific hazard calculations and (v) regional hazard mapping. This study uses the earthquake hazard evaluation procedure developed by (Kijko and Sellevoll 1992) to estimate seismic hazard parameters in northern Algeria. Seismogenic sources and parameters are established based on field data (CGS 2003) and geological maps (Vila 1980; Coiffait 1992).

* Corresponding Author:

2. Case study

The study area is in the Constantine region in Northeast of Algeria about 430 km east of the capital city of Algiers (Fig. 1). The study area extends on about 150 km radius from the center of agglomeration of the Constantine city.

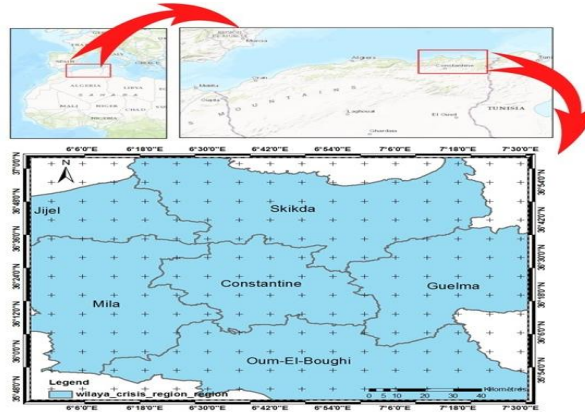


Fig. 1 The study area of Constantie, Northeast Algeria.

3. Materials and methods

The method of probabilistic seismic hazard analysis (PSHA) as formulated by (Cornell 1968) requires a compiled earthquake catalogue, the models of seismicity and ground-motion prediction equations (GMPEs). The seismicity model includes three main steps (Fig 2). The initial step requires the delineation of all the seismic sources that might have an effect on the area of interest. Second step includes determination of the seismicity parameters for each zone. These seismicity parameters are; seismic activity rate λ , the maximum expected earthquake magnitude M_{max} , and the Gutenberg-Richter parameter b . A homogeneous earthquake catalog is an important input for estimation of seismic hazard study. The preparation of a homogeneous earthquake catalogue for a seismic region needs regressed relations for conversion of different magnitudes types, e.g., m_b , M_l , to the unified surface magnitude M_s . The last step consists of declustering the earthquake catalogue, which involves removal of aftershocks and foreshocks. For this purpose, the earthquake catalogue was analysed and dependant events were removed based on Gardner and Knopoff (1974) approach considering 100 days' time window (Musson 1999). Declustering eliminated 40% events from the catalogue. The declustered catalogue includes 3936 earthquakes with $M_s \geq 2.0$ for the study region. The incomplete earthquake data may lead to underestimation of the mean rate of earthquake occurrence. Hence, for reliable mean rate of earthquake occurrence for the given magnitude range, the analysis of completeness has been carried out by adopting the procedure given by Stepp (1972), which gave the extent to which all the reported earthquakes in a catalogue for a given magnitude range and time period are complete. The completeness analysis has been performed by grouping the earthquakes in six magnitude classes: $1.0 \leq M_s \leq 1.9$, $2 \leq M_s \leq 2.9$, $3.0 \leq M_s \leq 3.9$, $4.0 \leq M_s \leq 4.9$, $5.0 \leq M_s \leq 5.9$ and $6.0 \leq M_s \leq 6.9$.

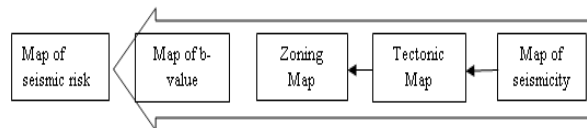


Fig. 2 The earthquake catalogue and seismic hazard methodology

The geodatabase data model was developed to ensure an integral and comprehensive data structure and to integrate GIS solutions in seismic hazard assessment. It includes the following components: geo-datasets, relationships, and seismic hazard assessment models. A data dictionary was constructed in order to create an efficient repository of information that supports different stakeholders for disaster management. The data dictionary contains description of all the features

and attributes currently used. It describes the collection of datasets and includes information about object type, feature definition, attribute type, attribute case, data accessibility, valid values and any rules or comments regarding the feature. It is important to note that the data layers listed in the data dictionary are captured in geodatabase format. The geodatabase data model was implemented in a physical ArcGIS file geodatabase “SHA—Seismic Hazard Assessment” (Fig. 3).

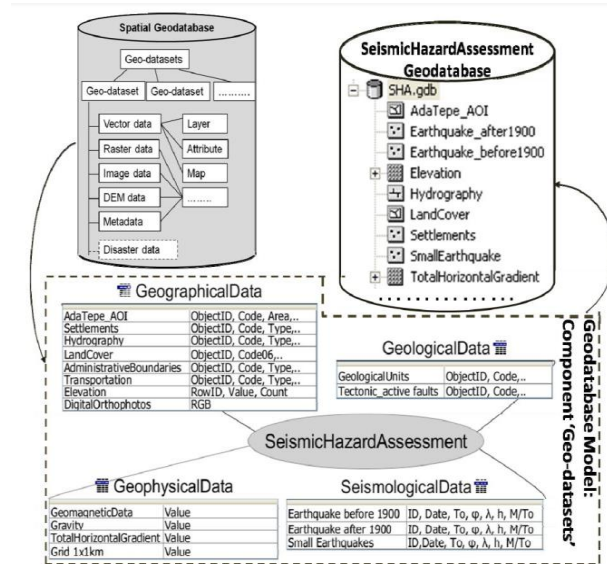


Fig 3. Geodatabase schema.

Figure 4 depicts the regional seismicity pattern. The graphic indicates that seismicity in the region (within a radius of 200 km) is not distributed equally in space. As a result, seismicity is characterized in geographical zones. Each zone is distinguished by distinct tectonic, seismic, and geological properties. The suggested seismic zonation corresponds to the seismotectonic model of the Constantine basin and Northern Algeria as a single seismotectonic unit and may be used to affect seismic hazard at the Constantine location. A geodatabase was created to analyze seismic hazards. Identification of data themes, definition of the contents and representation of each thematic layer, extra spatial and database features, such as spatial and attribute linkages, are all part of the geodatabase design. The design process of a geodatabase data model for seismic hazard assessment in this work includes developing a data structure, defining connection classes and domains, constructing spatial relations, connectivity, relation rules, and creating a methodological reference document. An ArcGIS file geodatabase was used to hold the geo-datasets.

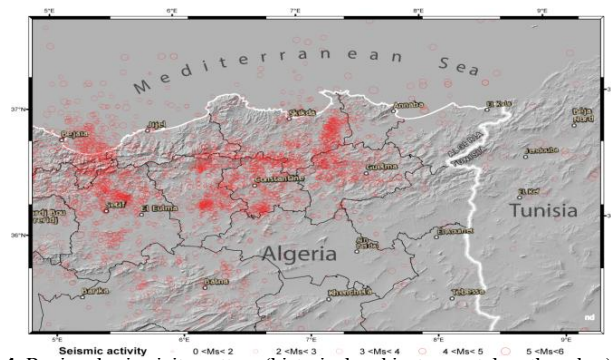


Fig 4. Regional seismicity pattern (historical and instrumental earthquakes).

4. Results and discussion

The probabilistic seismic hazard estimation software CRISIS-2007 developed by (Ordaz et al. 2012) has been used, to produce seismic hazard curves, uniform hazard spectra (UHS) and hazard maps that showing peak ground acceleration (PGA), in addition to the six spectral periods (0.1, 0.8, 0.9, 1.0, 1.5

and 2.0 s) for three levels of ground shaking (50%, 10%, 2% probability of exceedance in 50 year). These spectral periods and the different levels of ground shaking are commonly applied in Algerian building codes. For the purpose of estimating ground motion at different points as close as possible, the study area has been divided into 144 small grids of size $0.1^{\circ} \times 0.1^{\circ}$. In the computational scheme, parameters such as a , b , m_c , M_{max} and attenuation models are the input parameters in the CRISIS programme and PGA and PSA are the output. Results obtained have been prepared in tabular format and used in CRISIS programme to introduce effects of user attenuation model. The estimated PGA has been presented in the form of zone maps for different return periods.

The likelihood that certain levels of intense ground motion will be surpassed at a place within a specific time period is referred to as seismic hazard. For a given frequency range, ground motion levels (quantity measures used to define ground motion) can be represented in terms of peak ground acceleration (velocity, displacement) and/or peak response spectral amplitudes. The hazard analysis yields probabilistic estimates of design ground motion levels. The construction of a seismic source model (Harbi et al. 1999; Aoudia et al. 2000; CGS 2003; Harbi 2003), which offers seismotectonic information a (Meghraoui 1988) as a spatial approximation of earthquake location and recurrence, was a major component of this study's seismic hazard assessment (Fig. 5).

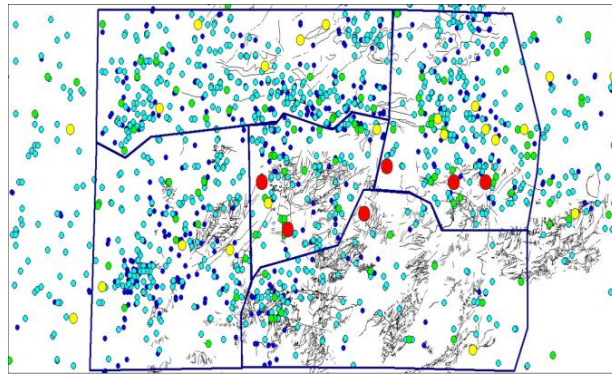


Fig 5. The proposed seismic source model, which can be used to assess seismic hazards in Northeast Algeria based on geology, tectonics and seismicity.

A homogenized catalogue for the region with surface-wave magnitude (M_S) was used for evaluation of a and b values. The period of completeness of the catalogue for different magnitude intervals was calculated using Stepp's method (Stepp 1971).

Seismic hazard analysis for the Constantine region was performed using a combination of a logic tree (Kulkarni et al. 1994; Coppersmith et al. 1986) and Monte Carlo (Bungun et al. 1986) approaches. As a result, a set of 200 hazard curves was obtained. On the base of the calculated 200 hazard curves were estimated mean, median 15 and 85 % values for PGA (peak ground acceleration), and different spectral ordinates under assumption for Log normal distribution of the probability of exceedance. Results that are more detailed are presented. In Fig. 6 are presented the mean, median, 15 and 85 % uniform hazard spectra for probabilities of exceedance $2.119 \cdot 10^{-3}$ (return period of 475 years).

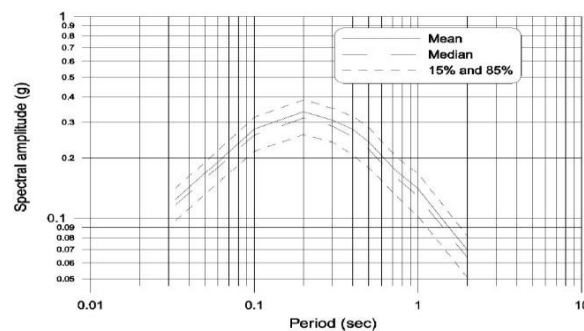


Fig 6. Uniform hazard spectra for probability of exceedance.

The results of this study were obtained for a rock soil with 5% damping. The Constantine region displayed higher values, specifically around the October 27, 1985 (Ms 6.0) earthquake location. Values of 0.2 g and 0.33 g were calculated for a 0.9 s period with return periods of 100 and 475 years, respectively. Seismic hazard assessments results are presented as zoning maps for return periods of 475 and 1000 years based on mean acceleration values for different urbane sites (El-Khroub, Tamlouka, El-Harrouch, Ain Smara and Chelghoum-Laid). For major parts of the sites, PGA varies from 0.10 to 0.29 g. However, small segments in the south part of the region have hazard level varies from 0.08g to 0.10 g. Areas located in northern Constantine zone and Mila zone, in general, the PGA varies from 0.068 to 0.25 g for 475 years return period.

5. Conclusion

Hazard and seismic risk assessments are necessary in all countries. The ultimate goal of these assessments is to ensure public safety in the case of a major event, that is, to avoid major structural damage and significant loss of lives. This study presents a theoretical process and probabilistic assessment of seismic hazards for a given region based on the methodology proposed by Cornell (1968). This process was then applied to the study area. The study results suggest that the cities of Constantine and Guelma are subject to lesser seismic hazards than Skikda and Mila, but statistical vulnerabilities limit the significance of the conclusions. The calculated acceleration is relatively low because the large earthquake epicentres are located near the Constantine city, representing a reduced seismic hazard.

This study presents a theoretical process and probabilistic assessment of seismic hazards for a given region based on the methodology proposed by Cornell (1968). This process was then applied to the study area. The study results suggest that the cities of Constantine and Guelma are subject to lesser seismic risks than Skikda and Mila, but statistical vulnerabilities limit the significance of the conclusions. The calculated acceleration is relatively low because the large earthquake epicentres are located near Mila, representing a reduced seismic risk. However, the number of earthquakes and time period are limited in this study, and a more representative sample would be beneficial for identifying seismic hazards and risks in the Constantine region. Although many seismic hazard estimation methods exist, they can be combined to implement a first phase of seismic risk reduction and prevention in earthquake prone regions. In this study seismic hazard parameters in terms of PGA has been estimated considering: (i) compile the earthquake catalogue, Northeast Algeria 1357 to 2014 (ii) estimated in terms of spectral acceleration (SA) at many periods (iii) estimated b-value for each seismogenic source zone, and (iv) constant b-value obtained considering entire earthquake catalog.

References

- [1] Aoudia A, Vaccari F, Suhadolc P, Meghraoui M (2000) Seismogenic potential and earthquake hazard assessment in the Tell Atlas of Algeria. *J Of seismology* 4:79–98.
- [2] Ayadi A (2003) Strong Algerian Earthquake Strikes Near Capital City. *Eos*, Vol. 84, No. 50, 16.
- [3] Benouar D (1996) Seismic hazard evaluation at Algiers using Benouar's earthquake catalogue. *Nat. Hazards* 13, 119-131.
- [4] Bensaïbi M, Tadjer K, Brahim Mezazigh B (2007) Scénario catastrophe de la ville de Blida. 7th National Conference AFPS Ecole Centrale Paris, 2007.
- [5] Boughacha MS, Ouyed M, Ayadi A & Benhallou H (2004) Seismicity and seismic hazard mapping of northern Algeria: Map of Maximum Calculated Intensities (MCI). *Journal of Seismology* 8:1–10.
- [6] Bouhadad Y and Laouami N (2002) Earthquake Hazard Assessment in the Oran Region (Northwest [7] Algeria). *Natural Hazards* 26: 227–243.
- [8] Coiffait PhE (1992) Un bassin post-nappe dans son cadre structural : l'exemple du bassin de Constantine (Algérie nord-orientale). PhD Thesis, University of Nancy.
- [9] Cornell CA (1968) Engineering seismic risk analysis. *Bull Seismol Soc Am* 58:1583–1606.
- [10] Farsi M, Belazougui M (2007) Microzonage du risque sismique de la wilaya d'Alger», 7th National Conference AFPS Ecole Centrale Paris, 2007.
- [11] H. Bungum P. Swearingen G. Woo (1986). Earthquake hazard assessment in the North Sea. *Phys. Earth Planet. Inter.* 44, 201–210.
- [12] Hamidatou M. Sbartai, B (2016) Deterministic assessment of seismic risk in Constantine city. Northeast Algeria *Nat Hazards*. <https://doi.org/10.1007/s11069-016-2693-2>.
- [13] Hamidatou M. Sbartai B (2017). Probabilistic seismic hazard assessment in the Constantine region, Northeast of Algeria. *Arabian Journal of Geoscience*. <https://doi.org/10.1007/s12517017-2876-5>.
- [14] Hamidatou M. Mohammedi Y. Hallal N. Yelles-Chaouche A. Lebdioui S. Thallak I. Stromeyer D. Khemici O (2021) Reply to the Comment on the Paper "Seismic Hazard Analysis of Surface Level, Using Topographic Condition in Northeast of Algeria" by Mohamed Hamdache and José A. Peláez. *Pure Appl. Geophys.* 178, 305–312. <https://doi.org/10.1007/s00024-020-02644-4>.

- [15] Hamidatou, M., Mohammedi, Y., Yelles-Chaouche, A., Thallak, I., Stromeyer, D., Lebdioui, S., Cotton, F., Hallal, N., & Khemici, O. (2019). Seismic hazard analysis of surface level, using topographic condition in the Northeast of Algeria. *Pure and Applied Geophysics*. <https://doi.org/10.1007/s00024-019-023104>.
- [16] Harbi A (1996) La marge algérienne orientale: résultats d'une étude par sismique réflexion, C.R.A.A.G Publications (internal report), Alger, n_762, 124 pp.
- [17] Harbi A (2001) Analyse de la sismicité et mise en évidence d'accidents Actifs dans le Nord-Est Algerien. PhD Thesis, University of Algiers.
- [18] Harbi A, Maouche S and Ayadi A (1999) Neotectonics and associate seismicity in the Eastern Tellian Atlas of Algeria, *J. Seismol.* 3, 95–104.
- [19] Harbi A, Maouche S, Ayadi A, Benouar D, Panza GF and Benhallou H (2004) Seismicity and tectonic structures in the site of Algiers and its surroundings: a step towards microzonation, *PAGEOPH* 161, 949–967.
- [20] J. Stepp, 1971. Dissertation. An investigation of earthquake risk in the Puget sound area by use of the type I distribution of large extremes, Pennsylvania University.
- [21] K. Coppersmith, R. Youngs, 1986. Capturing uncertainty in probabilistic seismic hazard assessments within intraplate environments, in *Proceedings of the 3rd World Conference on Earthquake Engineering*, vol. 1 (Charleston, 1986), p. 301.
- [22] Kijko A, Sellevoll MA (1992) Estimation of earthquake parameters from incomplete data files, Part II. Incorporation of magnitude heterogeneity. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 82, 120-134.
- [23] Laouami N, Slimania A, Bouhadada Y, Chatelaina JL, Noura A (2006) Evidence for fault-related directionality and localized site effects from strong motion recordings of the 2003 Boumerdes (Algeria) earthquake: Consequences on damage distribution and the Algerian seismic code. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26, 991–1003.
- [24] McGuire RK (1978) FRISK: computer program for seismic risk analysis using faults as earthquake sources. U.S. geological survey. Open file report 78-1007.
- [25] Meghraoui M (1988) Géologie des zones sismiques du nord de l'Algérie, tectonique active, paléosismologie, et synthèse sismotectonique, PhD Thesis, University of Paris-Orsay, 356 pp.
- [26] Mortgat CP & Shah HC (1978) Seismic hazard analysis of Algeria, technical report, the John A. Blume Earthquake Engineering Center, California, pp. 97.
- [27] Musson R (1999) Probabilistic seismic hazard maps for the North Balkan region; *Ann. Geofis.* 42(6) 1109–1124.
- [28] Ordaz M, Martinelli F, Aguitar A, Arboleda J, Meletti C and Amico V D (2012) CRISIS 2007: Program for computing seismic hazard, Ver. 4.4, Instituto de Ingenieria, UNAM, Mexico.
- [29] Kulkarni R. Youngs, K. Coppersmith (1984) Assessment of confidence intervals for results of seismic hazard analysis, in *Proceedings of the 8th World Conference on Earthquake Engineering*, vol. 1 (San Francisco, 1984), p. 263
- [30] Sbartai B, Hamidatou M (2013) Seismic risk assessment of the Constantine city, Algeria. *Intelligent systems and Decision Making for Risk Analysis and Crisis Response*. *Proceedings of the 4th International Conference on Risk Analysis and Crisis Response*, Istanbul, Turkey, 27-29 August 2013. EBook ISBN: 978-0-203-77147-1.
- [31] Stepp JC (1972) Analysis of the completeness of the earthquake sample in the Puget Sound area and its effect on statistical estimates of earthquake hazard; *Proc. Inter. Conf. Microzonation*, Seattle Washington, USA 64 1189–1207.
- [32] Vila JM (1980) La chaîne alpine d'Algérie orientale et des confins algéro-tunisiens, PhD-Thesis, Univ. Paris VI, 633 pp.



Estimation d'Erreur A Postériori Et Optimisation De Maillages Pour Modèles Mécaniques A Comportements Endommageables

Abdelhamid BECHEUR ^{1*}

¹Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement LRHAE.
Université de Bejaia. Algérie
abdelhamid.becheur@univ-bejaia.dz

Résumé Les modèles d'endommagement sont souvent utilisés dans les simulations des structures par la méthode des éléments finis. L'évaluation de la qualité numérique de ces calculs consiste en une tâche importante qui peut être effectuée en utilisant un estimateur d'erreur. Cependant, dans le cadre de la théorie de la mécanique de l'endommagement, ces estimateurs semblent être beaucoup moins abondants dans la littérature. Par ailleurs, leur implantation dans un code de calcul, nécessite des efforts considérables. Dans cet article, un nouvel indicateur d'erreur avec relativement moins de difficultés pour sa mise en œuvre est proposé. En effet, l'idée de sa construction est basée essentiellement sur une technique de lissage local au sens des moindres carrés. Les résultats obtenus semblent être en bon accord avec ceux obtenus par l'utilisation de la méthode dite «des résidus». Additivement, les propriétés de l'indicateur développé, sont étudiées. En effet, vu la forte non linéarité du problème, des analyses du taux de convergence de l'erreur obtenue en fonction du pas de chargement, ont été discutées. Ceci a permis de constater une forte variabilité de ce taux entre pas successifs. Ainsi, une difficulté majeure a pu être mise en évidence. Elle se situe au niveau de l'optimisation automatique ou bien de l'adaptation automatique des maillages pour tous les pas de chargements. Néanmoins pour un pas de chargement préalablement choisi par l'utilisateur, des calculs optimisés peuvent être effectués. Un exemple test est présenté.

Mots clés : éléments finis, endommagement, indicateur d'erreur, lissage, méthode des moindres carrés, taux de convergence de l'erreur, optimisation du maillage

1 Introduction

Les dommages dans les structures sont généralement analysés à l'aide de la théorie de la mécanique de l'endommagement. Cette approche décrit l'influence de la perte progressive de l'intégrité du matériau due à la propagation et à la coalescence des microfissures et des microcavités. En effet, ces modifications de la microstructure conduisent à une dégradation de la rigidité du matériau, observée à l'échelle macroscopique. Pour caractériser la densité et l'orientation de ces microdéfauts, l'idée de l'introduction d'une variable interne, représentant localement l'état d'endommagement, a permis à [10] d'établir son premier modèle. Celui-ci a, par la suite, été amélioré par [15]. Depuis, de nombreux autres modèles isotropes et anisotropes ont été développés. Pour les modèles isotropes auxquels nous nous limiterons, nous pouvons citer les deux modèles [13], [14]. Ces derniers sont très utilisés pour les cas de charges monotones. Pour sa part, le modèle de Von Mises modifié (MVM) introduit par [5] semble être très utilisé dans la littérature. Le modèle nommé RICRAG, développé par [17], sera utilisé dans le cadre de nos simulations numériques. Il sera brièvement exposé dans la section suivante. La justification du choix de ce modèle réside non seulement dans le fait qu'il soit relativement récent mais surtout en raison de son efficacité.

Par ailleurs, il est important de signaler que le comportement simulé est fortement influencé par les erreurs de discrétisation, qui doivent être quantifiées et contrôlées. Dans le cas contraire, l'effet de

* Corresponding Author:

Estimation d'erreur a posteriori et optimisation de maillages

ces erreurs sur les résultats pourrait être interprété de manière erronée. Pour assurer la qualité de la solution EF, une tâche importante consiste à évaluer la qualité numérique de la solution en utilisant un estimateur d'erreur après analyse ou bien «à posteriori». Pour les problèmes linéaires, différentes approches conduisant à divers estimateurs ont été développées. Citons en particulier l'estimateur introduit par [1] et basé sur les résidus des équations d'équilibre; les estimateurs liés au lissage effectué par [18] et [19] des champs de contraintes; et enfin l'estimateur développé par [11]. Celui-ci est basé sur la notion de l'erreur établie au niveau de la relation de comportement. Pour les problèmes non linéaires et en particulier, pour la non linéarité due à la mécanique de l'endommagement, les travaux disponibles sont beaucoup moins abondants. Cependant, un estimateur basé à la fois sur les résidus des équations d'équilibre et des calculs locaux, a été développé par [16]. De plus, cette méthode a été améliorée par les contributions récentes de [8]. D'autre part, [3] ont adapté l'erreur en relation de comportement citée ci-dessus à un modèle d'endommagement non local qu'ils ont développé. Cependant, en raison de sa difficulté, la mise en œuvre de cet estimateur semble nécessiter des efforts considérables.

Dans cet article, un nouvel indicateur d'erreur, basé sur une technique de lissage local au sens des moindres carrés, est présenté. En effet, les solutions éléments finis des champs de contraintes et d'endommagement sont lissées et considérées comme des solutions de référence. Cette méthode a été développée initialement par [6] et [7]. En effet, bien qu'ancienne, cette technique de lissage que nous utilisons semble être non seulement simple mais également efficace. De plus, le présent indicateur d'erreur est construit par la combinaison explicite de deux termes. Le premier est basé sur l'erreur en normes d'énergies portées par l'écart entre la contrainte lissée et celle obtenue par éléments finis. De la même manière, le second terme considère l'erreur obtenue par la différence entre la solution d'endommagement lissée et celle obtenue numériquement (non lissée).

D'autre part, afin d'obtenir une optimisation des calculs obtenue grâce à une adaptation du maillage par rapport à une erreur prescrite préalablement fixée par l'utilisateur et en vue de réduire ainsi les coûts en termes de temps de calculs CPU, la connaissance des propriétés de l'indicateur développé est nécessaire. Pour cela, une analyse des propriétés de convergence du présent indicateur, mais également de son indice d'efficacité doit être réalisée et discutée. Cette adaptation est basée sur l'utilisation par le mailleur d'une "carte de tailles" issue elle-même du calcul d'une «carte d'erreurs» ou bien d'une carte de contributions à l'erreur globale fournie par l'indicateur utilisé. Par la suite, en utilisant à la fois cet indicateur et des procédures d'adaptation de maillages, un exemple test de calculs optimisés sera présenté.

2 Présentation du modèle d'endommagement utilisé

Dans cet article, le modèle nommé RICRAG, développé par [17], est celui que nous avons choisi pour de la mise en œuvre du présent indicateur d'erreur. Bien connu pour son efficacité et sa robustesse, ce modèle est implanté dans le code éléments finis CAST3M développé par le CEA en France [2]. A cet effet, il sera utilisé dans toutes nos simulations. Cette section consiste en une brève présentation des principes de base de ce modèle et de sa formulation. La présentation exhaustive de ce modèle dépasse le cadre de cet article et peut être trouvée dans [17]. Formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, un potentiel d'état a été introduit tel qu'il prend en compte l'élasticité, l'endommagement, le glissement entre les surfaces fissurées et les écrouissements comme suit :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa}{3} ((1-d)\langle \varepsilon_{kk} \rangle_+^2 - \langle -\varepsilon_{kk} \rangle_+^2) + 2(1-d)\mu \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D + 2d\mu (\varepsilon_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^\pi) (\varepsilon_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^\pi) + \gamma \alpha_{ij} \alpha_{ij} \right\} + H(z). \quad (1)$$

En couplant l'endommagement à l'élasticité, les premier et deuxième termes de l'équation (01) ci-dessus introduisent une seule variable scalaire d'endommagement d afin de représenter la diminution de la rigidité. ρ est la densité du matériau, κ et μ sont respectivement les modules de compressibilité volumique et de cisaillement. ε_{ij} est le tenseur des déformations du second ordre et ε_{ij}^D est le tenseur déviatorique des déformations du second ordre tel que $\varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le tenseur de Kronecker du second ordre. Rappelons que la variable scalaire d'endommagement d évolue de 0 à 1 c'est-à-dire : du matériau vierge à l'état rompu respectivement. Il convient également de noter que l'effet unilatéral est pris en compte par la séparation du tenseur de déformation total en parties

positives et négatives comme le montre le premier terme. Le symbole $\langle + \rangle$ désigne la partie positive du tenseur. Le troisième terme $(2d\mu(\varepsilon_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^\pi)(\varepsilon_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^\pi))$ représente le mécanisme de glissement par contact avec frottement où ε_{ij}^π est le tenseur de glissement du second ordre.

Finalement, les derniers termes $(\gamma\alpha_{ij}\alpha_{ij})$ et $\mathbf{H}(z)$ sont introduits pour tenir compte de la part de l'énergie de déformation restituée. Ce sont respectivement les taux de restitution d'énergie dus aux frottements et à l'écroutissage. Les écroutissages cinématiques et isotropes sont pris en compte. En effet, γ est un paramètre matériel, α_{ij} le tenseur du second ordre associé à l'écroutissage cinématique, z la variable interne liée à l'écroutissage isotrope et \mathbf{H} la fonction de consolidation.

Après développement (voir [17]), on peut déduire les premières équations d'état telles que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\kappa}{3} ((1-d)\langle \varepsilon_{kk} \rangle_+ - \langle -\varepsilon_{kk} \rangle_+) \delta_{ij} + 2(1-d)\mu \varepsilon_{ij}^D + 2d\mu(\varepsilon_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^\pi). \quad (2)$$

La deuxième équation d'état dans (03) permet d'obtenir le taux de restitution d'énergie Y lié à l'endommagement. Il peut être obtenu en différenciant le potentiel d'état par rapport à la variable scalaire d'endommagement d :

$$Y = -\frac{\partial \rho \Psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa}{3} \langle \varepsilon_{kk} \rangle_+^2 + 2\mu \varepsilon_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D + 2\mu(\varepsilon_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^\pi)(\varepsilon_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^\pi) \right\} \quad (3)$$

Une surface seuil d'endommagement et notée f_d est introduite :

$$f_d = \bar{Y} - (Y_0 + Z) \quad \text{telle que} \quad \dot{d} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial \bar{Y}}. \quad (4)$$

où $\dot{\lambda}_d$ est un multiplicateur de Lagrange et Z une force thermodynamique associée à l'écroutissage isotrope. Finalement, l'expression de la variable d'endommagement d peut être écrite comme suit :

$$d = 1 - \frac{1}{1 + (A_{Dir} H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ + \langle \sigma_{ij} \rangle_+) + A_{Ind} (1 - H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ + \langle \sigma_{ij} \rangle_+)))^{(Y^{nl} - Y_0)}}. \quad (5)$$

A_{Dir} et A_{Ind} sont des paramètres matériaux qui peuvent être interprétés comme des coefficients de fragilité, respectivement, en traction et en compression et H la fonction de Heaviside.

3 L'Indicateur d'erreur développé

Considérons le domaine Ω muni d'une frontière Γ telle que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$ où Γ_D et Γ_F sont à la fois deux parties complémentaires et disjointes. Sur Γ_D le champ de déplacements est supposé connu. Pour simplifier nous supposons que Ω est encastré sur Γ_D . Une densité de forces surfaciques notée \mathcal{F} est appliquée sur la frontière Γ_F . Ω est soumise à une densité de forces volumiques \mathbf{f} (figure 01). La notation \mathbf{n} désigne le vecteur normal unitaire sortant de Γ .

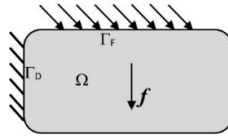


Figure 01: Position du problème

Le problème consiste à trouver le champ d'endommagement scalaire d , le champ de vecteurs déplacements \mathbf{u} et le champ des tenseurs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans Ω satisfaisant les équations (01) à (05) et les conditions cinématiques (06) et d'équilibre (07) et (08) comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (6)$$

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathcal{F} \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (8)$$

Estimation d'erreur a posteriori et optimisation de maillages

En considérant les champs de triplets suivants (σ, \mathbf{u}, d) et $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, d_h)$ représentant respectivement les solutions exactes et approchées définies sur Ω , définissons la quantité :

$$e = \left[\|\sigma - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + C_d \int_{\Omega} (d - d_h)^2 d\Omega \right]^{1/2} \quad (9)$$

avec C_d un paramètre constant et non nul qui a la même dimension que l'erreur en norme d'énergie $\|\sigma - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}$ telle que :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega} = \left(\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T \mathbf{C}^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (10)$$

\mathbf{C} est un tenseur d'élasticité symétrique d'ordre quatre. Par définition, la quantité e représente la définition exacte de l'erreur associée à la solution obtenue $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, d_h)$.

La solution exacte est généralement inconnue. L'idée consiste à calculer un indicateur de l'erreur sur la solution éléments finis en substituant les champs de contraintes exactes que sont les inconnues σ et d'endommagements d dans (09) par un champ de contraintes et d'endommagements lissés $\tilde{\sigma}_h$ et \tilde{d}_h possédant de meilleures propriétés de régularités et de continuité entre éléments. Cette idée est complétée par l'utilisation de certaines propriétés de super convergence au niveau des points d'intégration sur lesquels les contraintes sont obtenues avec une grande précision [6]. Par la suite, l'erreur peut être définie par la différence en termes de normes d'énergie entre cette solution à haut degré de précision et celle fournie par éléments finis. Cette erreur est donc estimée en substituant le premier terme de (09) $\|\sigma - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}$ par $\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}$ telle qu'une approximation de l'erreur sera notée e_s , peut être calculée par l'expression suivante :

$$e_s = \left[\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + C_d \int_{\Omega} (\tilde{d}_h - d_h)^2 d\Omega \right]^{1/2} \quad (11)$$

La technique de lissage utilisée est celle utilisant la méthode locale des moindres carrés telle que présentée par [6]. Par ailleurs, on associe à la mesure d'erreur dans (11) l'erreur relative globale définie par :

$$\varepsilon = \left[\frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + \int_{\Omega} (\tilde{d}_h - d_h)^2 d\Omega}{\|\tilde{\sigma}_h + \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + \int_{\Omega} (\tilde{d}_h + d_h)^2 d\Omega} \right]^{1/2} \quad (12)$$

Ainsi ε consiste en une précision globale qui permet d'évaluer la qualité globale de la solution par éléments finis. Constitué de la somme de deux termes indépendants, la particularité de cet indicateur est que ε peut être décomposé en deux types d'erreur. Ce qui constitue un avantage. En effet, le premier terme :

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}}{\|\tilde{\sigma}_h + \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}} \quad (13)$$

est appelé "l'erreur relative en contraintes". Il consiste en est l'erreur portée par le champ solution de contraintes. Le second terme noté ε_d , désigne "l'erreur relative d'endommagement" portée par le champ solution scalaire d'endommagement telle que :

$$\varepsilon_d = \left(\frac{\int_{\Omega} (\tilde{d}_h - d_h)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (\tilde{d}_h + d_h)^2 d\Omega} \right)^{1/2} \quad (14)$$

Finalement, la relation entre ε , ε_{σ} et ε_d , peut être écrite sous la forme suivante :

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{\sigma}^2 + \varepsilon_d^2 \quad (15)$$

D'autre part, considérons E une partie de Ω . Ainsi, on définit la contribution locale de E à l'erreur relative globale ε grâce à la quantité ε_E , telle que :

$$\varepsilon_E = \left[\frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma, E}^2 + \int_E (\tilde{d}_h - d_h)^2 dE}{\|\tilde{\sigma}_h + \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + \int_{\Omega} (\tilde{d}_h + d_h)^2 d\Omega} \right]^{1/2} \quad (16)$$

En pratique, E est un élément de la discrétisation du maillage associé à Ω . Les contributions locales permettent d'obtenir des informations concernant les erreurs localisées sur la structure. Par construction, on a :

$$\varepsilon^2 = \sum_E \varepsilon_E^2 \quad (17)$$

4 Propriétés de l'indicateur développé

Après avoir développé le présent indicateur d'erreur, la connaissance de ses propriétés est nécessaire. A cet effet, un test numérique de référence largement utilisé dans la littérature est réalisé. Il s'agit d'un test à poutre entaillée par un seul bord ou SENB test (figure 2). En effet, soumise à un chargement antisymétrique appliqué en quatre points, les charges appliquées $F_1 = 10F/11$ et $F_2 = F/11$ sont illustrées en figure 2 telles que F augmente par incréments de (0) zéro à (138F) avec $F = 0,7$ KN. Les deux autres charges sont les réactions d'appuis. Par ailleurs, il est à noter que la mise en œuvre de cet indicateur d'erreur est réalisée à l'aide du code éléments finis CAST3M développé par le CEA en France. Les essais sont effectués avec l'utilisation du modèle d'endommagement de RICRAG [17] présenté en section 2 ci-dessus et dont les paramètres matériau sont illustrés dans le tableau 1 ci-dessous.

Table 1: Paramètres matériau

Module de Young E (GPa)	Coefficient de Poisson ν	Fragilité en traction A_{Dir}	Fragilité en compression A_{Ind}	Résistance à la traction F_t (Pa)
28	0.2	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-4}	3.6×10^6

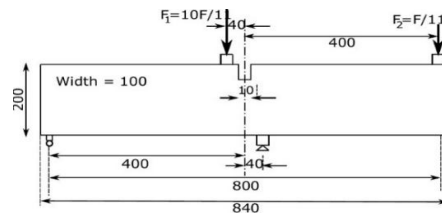


Figure 2: test de poutre entaillée par un seul bord (SENB test)

En utilisant des maillages composés d'éléments de type quadrilatères à quatre nœuds QUA4, Les calculs effectués ont permis d'obtenir la distribution des dommages telle qu'illustrée dans les figures 03 ci-dessous. La forme arquée de la zone endommagée sous l'entaille est identique à celle obtenue par plusieurs auteurs tels que [8], [9] et autres.

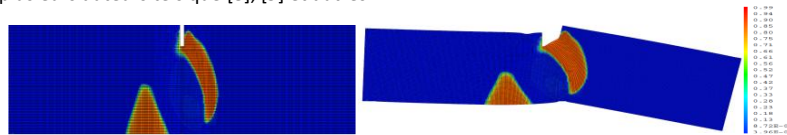
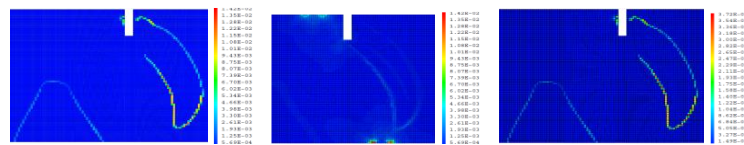


Figure 3: Distribution de l'endommagement pour la forme non déformée et déformée.

Par ailleurs, l'avantage et l'originalité du présent indicateur résident dans sa capacité à dissocier entre l'erreur portée par le champ de contraintes ε_σ et l'erreur portée par le champ d'endommagement ε_d . Par conséquent, cela offre la possibilité d'obtenir trois représentations différentes des cartes d'erreurs. La première concerne la représentation des contributions des éléments à l'erreur relative globale ε ou carte d'erreur globale (figure 4-a). La deuxième carte représente les contributions des éléments à l'erreur relative en contrainte ε_σ ou carte d'erreur en contraintes (figure 4-b). Enfin la troisième montre la contribution des éléments à l'erreur relative d'endommagement ε_d ou carte d'erreur d'endommagement (figure 4-c). Par ailleurs, en observant les figures (4-a) et (4-c), il est aisé de constater que les erreurs globales et d'endommagement sont particulièrement marquées dans la zone située au voisinage des frontières des zones endommagées. Ce résultat est en parfait accord avec la carte de distribution des erreurs obtenue par [16] qui ont utilisé un estimateur d'erreur de type résiduel basé sur des calculs locaux.



a) carte d'erreur globales b) carte d'erreurs en contraintes c) carte d'erreurs d'endommagement

Estimation d'erreur a posteriori et optimisation de maillages

Figure 4 : maillage de 26816 éléments tels que $\varepsilon = 4.89\%$ $\varepsilon_\sigma = 4.37\%$ et $\varepsilon_d = 2.20\%$

En ce qui concerne l'étude de convergence de notre indicateur, celle-ci sera essentiellement réalisée avec la méthode de raffinement de type $-h$ qui consiste en réduction des tailles uniformes des éléments des maillages à subdivisions uniformes et successifs comme le montre l'exemple de la figure 5 ci-dessous.

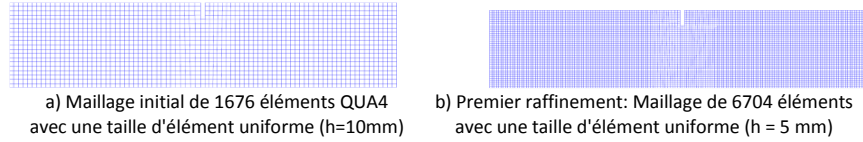


Figure 5: Exemple de raffinement de maillages pour un test SENB

Cela étant dit, afin d'effectuer une adaptation automatique pas à pas du maillage, la connaissance de l'évolution du taux de convergence d'erreur reste essentielle. Rappelons en effet la relation a priori bien connue entre l'erreur globale relative ε et la taille des éléments finis du maillage h telle que :

$$\varepsilon = C \cdot h^p \quad (18)$$

où C est une constante positive non nulle et p le taux de convergence de l'erreur. L'exposant p est égal à 1 pour les solutions à allures régulières et reste inférieur à 1 en présence de singularités ou en présence de zones à forts gradients. Cela étant dit, pour certains pas de chargements que nous avons choisis, les évolutions de ces trois erreurs en fonction des tailles h des éléments sont représentées sur les figures 6 à 8.

Ces courbes montrent bien la propriété de convergence pour les trois erreurs ε , ε_σ et ε_d . Toutefois, ces figures (6 à 8) montrent également l'influence de l'intensité de la charge appliquée sur les taux de convergence d'erreur p . Plus précisément, on peut facilement relever avec la représentation en échelles logarithmiques de ces figures un autre résultat plus important. Il consiste en la forte variation des taux de convergence de l'erreur d'endommagement au fur et à mesure que l'intensité du chargement augmente. Ce résultat important est également montré pour chaque pas de chargement sur la figure 9.

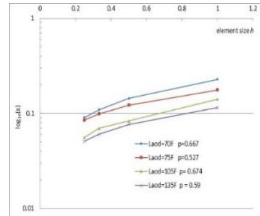


Figure 6: évolutions de l'erreur globale avec le raffinement uniforme du maillage pour quatre valeurs différentes du chargement

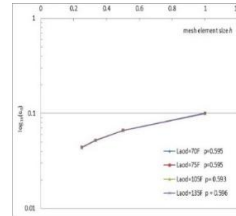


Figure 7: évolutions de l'erreur en contraintes avec le raffinement uniforme du maillage pour quatre valeurs différentes du chargement

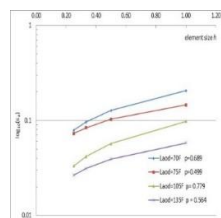


Figure 8: évolutions de l'erreur d'endommagement avec le raffinement uniforme du maillage pour quatre valeurs différentes du chargement

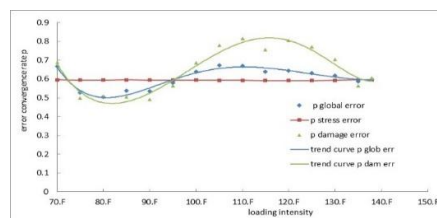


Figure 9: SENB test évolutions des taux de convergences p des trois erreurs ε , ε_σ et ε_d en fonction du chargement

5 Optimisation ou adaptation des maillages

L'objectif d'une procédure d'adaptation de maillage est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision tout en minimisant les coûts de calcul. En utilisant la h -génération qui est la procédure la plus utilisée : on modifie la taille et la topologie des éléments, mais on conserve le même type de fonctions de forme pour les

différents maillages. Pour cela, on utilise la méthode adoptée par [12] où un maillage T^* est considéré comme optimal pour une mesure d'erreur ε si :

$$\begin{cases} \text{Pour } \varepsilon = \varepsilon_0, \text{ erreur fixée par l'utilisateur} \\ N^* \text{ est minimum (nombre d'éléments du maillage } T^*) \end{cases} \quad (19)$$

En utilisant le code de calcul CAST3M [2], la résolution du problème s'effectue en adoptant la procédure suivante [4]:

- Calcul sur un premier maillage T relativement grossier
- Calcul sur T de l'erreur relative globale ε et des contributions locales ε_E
- Détermination des caractéristiques du maillage optimal T^*
- Second calcul éléments finis sur le maillage T^* .

Soit l'exemple d'un calcul en comportement endommageable utilisant le modèle RICRAG pour la poutre illustrée en figure 02. Les propriétés matérielles sont celles du tableau 01. Les conditions aux limites sont celles de la figure 02 avec les mêmes charges que celles expliquées en section 4. En appliquant le présent indicateur à un maillage initial, grossier et composé de 765 éléments quadrilatéraux à quatre nœuds (figure 10), une précision globale ε de 12,20 % est d'abord obtenue. La déformée et une carte de distribution du champ d'endommagement sont également représentées sur la figure 11. Les cartes d'erreurs relatives en contraintes, en endommagements et globales obtenues avec ce maillage grossier sont respectivement visibles sur les figures 12 à 14. Pour une erreur prescrite $\varepsilon_0=5\%$, la résolution du problème (19) donne une carte de tailles d'éléments à prescrire au meilleur EF telle qu'illustrée sur la figure 15. Après résolution, un maillage optimisé composé de 5958 (figure 16) est fourni. L'indicateur développé fournit également une précision globale $\varepsilon=4,86\%$ avec une erreur relative de contrainte $\varepsilon_\sigma=3,39\%$ et une erreur relative d'endommagement $\varepsilon_d=3,48\%$. Les cartes d'erreurs globales, en contraintes et en endommagements obtenues avec ce maillage adapté sont visibles sur les figures 17 à 19.

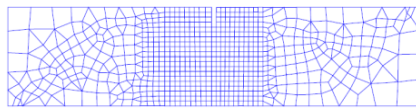


Figure 10: Maillage grossier initial composé de 765 éléments

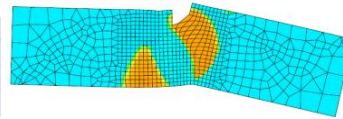


Figure 11: déformée et distribution de l'endommagement (amplifié 63 fois)

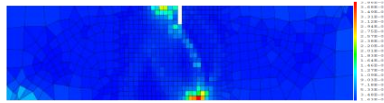


Figure 12: Carte d'erreurs en contraintes sur maillage initial avec $\varepsilon_\sigma = 11.37\%$

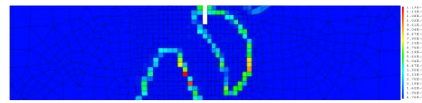


Figure 13: Carte d'erreurs en endommagements sur maillage initial avec $\varepsilon_d = 4.43\%$

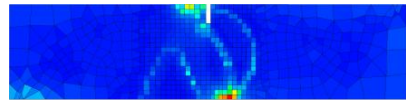


Figure 14: Carte de contributions à l'erreur relative globale sur maillage initial $\varepsilon = 12.20\%$

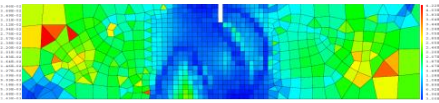


Figure 15: Carte des tailles des éléments à prescrire pour une erreur prescrite $\varepsilon_0 = 5\%$.

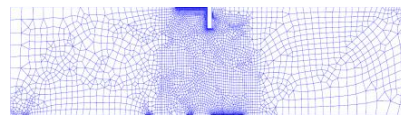


Figure 16: maillage optimisé à 5958 éléments QUA4 avec une précision finale $\varepsilon = 4.86\%$

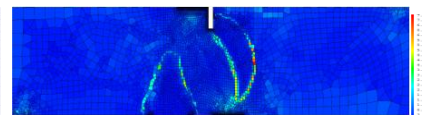


Figure 17: carte de contributions à l'erreur relative globale du maillage optimisé $\varepsilon = 4.86\%$

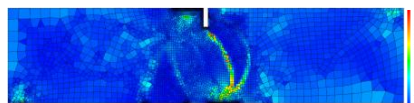


Figure 18: Carte d'erreurs en contraintes sur maillage optimisé avec $\varepsilon_\sigma = 3.39\%$

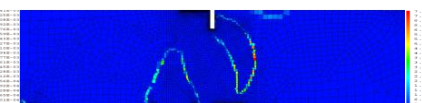


Figure 19: Carte d'erreurs en endommagements sur maillage optimisé avec $\varepsilon_d = 3.48\%$

6 Discussion et Conclusion

Basé sur des techniques de lissage local au sens des moindres carrés, un nouvel indicateur d'erreur avec relativement moins de difficultés pour sa mise en œuvre et avec un temps CPU significativement réduit est développé. Pour les champs de distributions des erreurs, les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus par l'utilisation de la méthode dite «des résidus». Cependant, pour l'erreur relative globale, les valeurs obtenues sont plus grandes que celles fournies par celle des résidus. Ceci peut s'expliquer par le fait que cette erreur globale soit composée de deux termes (erreur d'endommagement et erreur en contraintes) qui ont les mêmes ordres de grandeur. D'autre part, les analyses de convergence ont mis en évidence une forte variation du taux de convergence de l'erreur d'endommagement avec le pas de chargement. Ce qui constitue une difficulté majeure pour obtenir une adaptation automatique pas à pas du maillage. En effet, dans le cadre de calculs non linéaires et devant les besoins actuels de développer des programmes utilisant des adaptations automatiques des maillages, cette forte variation constituerait une difficulté majeure dans le sens où il devient nécessaire de calculer ce taux de convergence p de l'erreur et ce, pour chaque pas de chargement. Ce qui rend les calculs assez coûteux en termes de temps CPU. Néanmoins, pour un pas préalablement choisi, des calculs optimisés peuvent être effectués par le présent indicateur. Son amélioration doit faire l'objet de recherches futures.

Références

- [1]. Babuska, I., Rheinboldt, W.C.: Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.* vol. 15, n°4: 736-754. (1978)
- [2]. www-cast3m.cea.fr
- [3]. Comi, C., Perego, U.: Finite element strategies for damage assessment up to failure. In *Proceedings of the 6th National Congress SIMAI, Laguna, Italy.* (2002)
- [4]. Coorevits, P., Ladeveze, P., Pelle, J. P.: Mesh optimization for problems with steep gradient areas. *Engineering computations.* 11: 129-144. (1994).
- [5]. De Vrie, J.H.P., Brekelmans, W.A.M., Gils, M. A. J.: Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Comp and Struct* 55: 581-588. (1995).
- [6]. Hinton, E., Campbell, J. S.: Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 8: 461-480. (1974).
- [7]. Hinton E., Scott F.C., Ricketts R. E.: Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements - *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* 9: 235 – 256. (1975)
- [8]. Gerasimov, T; Stein E. and Wriggers P.: Constant-free explicit error estimator with sharp upper error bound property for adaptive FE analysis in elasticity and fracture *Int. J. Numer. Meth. Engrg;* 101:79–126 (2015)
- [9]. Jirasek, M. and Grassl, P.: Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics,* 75:1921-1943. (2008)
- [10]. Kachanov, L. M.: On the time to failure under creep conditions. *Izv. AN SSSR, Otd. Tekhn. Nauk* 8: 26-31 (1958).
- [11]. Ladeveze, P., Leguillon, D.: Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM J. Num. Anal.* Vol. 20 N° 3: 483-509 (1983).
- [12]. Ladeveze, P., Coffignal, G., Pelle, J.P.: Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis, in *Accuracy estimates and adaptative refinements in Finite Element computations.* Chapter 11, 181-203, Babuska, Gago, Oliveira, Zienkiewicz Editors, J. Wiley (1986).
- [13]. Mazars, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VI (1984).
- [14]. Mazars J., Hamond F., Grange S.: A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings, *Materials and Structures,* (2014).
- [15]. Rabotnov, YN. Creep problem in structural members., Amsterdam. (1969)
- [16]. Rodriguez -Ferran, A., Huerta, A.: Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models. *Int. J. Solids Struct.* 37:7501-7528. (2000)
- [17]. Richard, B, Ragueneau, F., Cremona, C., Adelaide L. : Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading: Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. *Engineering Fracture Mechanics,* Elsevier, 77 (8):1203-1223. (2010)
- [18]. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z.: A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.* 24, 337-357 (1987).
- [19]. Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z.: The Superconvergent Patch Recovery and adaptive F E refinement. *Comp Meth in Appl Mech and Eng,* 101, Iss 1-3: 207-224. (1992).



Optimisation des dimensions des coursiers en marches d'escalier

Fatiha Lebdiri¹ and Abdelghani Seghir²

¹Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement, Faculté de Technologie,
Université de Bejaia, 06000, Bejaia, Algérie,
lebdiri.fatiha@gmail.com

²Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement, Faculté de Technologie,
Université de Bejaia, 06000, Bejaia, Algérie,
a.seghir@univ-bejaia.dz

Résumé Les coursiers en marches d'escalier sont des ouvrages hydrauliques spéciaux conçus pour une dissipation efficace de l'énergie cinétique de l'écoulement afin d'éviter l'érosion du lit aval des barrages. La détermination des dimensions du coursier en marches d'escalier est un problème majeur dans la construction des barrages vue le grand nombre de variables qui rentre en jeux, la non-linéarité de la fonction objectif ainsi que la présence des contraintes. Dans ce document, l'algorithme à essaim de particules (PSO) est utilisé pour déterminer la meilleure géométrie de coursier en marches d'escalier pour maximiser le taux de dissipation d'énergie. Les résultats obtenus ont été comparés avec les résultats précédemment obtenues en utilisant les algorithmes génétiques.

Mots clés : Coursier en marches d'escalier ; Optimisation ; PSO.

1 Introduction

Les ouvrages de dissipation d'énergie sont vitaux pour la protection des barrages contre l'énergie provenant de l'eau acheminée à travers l'évacuateur de crues. Ces ouvrages permettent d'assurer la stabilité des barrages et de lutter contre l'érosion du lit en aval de celui-ci. Parmi ces ouvrages, on trouve les coursiers en marches d'escalier qui ont l'avantage de dissiper une grande énergie de l'écoulement qui peut atteindre 90% de l'énergie totale ce qui permet ainsi de réduire les dimensions du bassin de dissipation d'énergie en aval.

Plusieurs paramètres conditionnent la dissipation d'énergie dans les coursiers en marches d'escalier à savoir le débit d'écoulement, la hauteur et la longueur des marches, la largeur du coursier ainsi que la pente de coursier [1]. Pour quantifier le taux de dissipation d'énergie plusieurs formules empiriques ont été proposées en se basant sur des données expérimentales comme le cas de [2] et [3] ou sur d'autres techniques telles que les méthodes d'intelligence artificielle présentées par [6], [4] et [5]. La détermination des dimensions du coursier en marches d'escalier est un problème majeur dans la construction des barrages qui est reliée à un grand nombre de variables. En plus les équations qui existent dans la littérature

pour quantifier le taux de dissipation d'énergie sont non-linéaires et souvent présentent des contraintes. Dans ce contexte, quelque travaux d'optimisation ont été réalisés dans le but de trouver la meilleur géométrie de coursier en marche d'escalier afin de maximiser le taux de dissipation d'énergie à savoir ceux de [9] en utilisant la méthode dite "the Feasible Direction Method" (FDM) et [7] en utilisant les algorithmes génétiques (GA).

Récemment, l'utilisation et le développement des méthodes d'optimisation basées sur l'heuristique ont considérablement augmenté. Ces méthodes peuvent éliminer la plupart des difficultés des méthodes classiques. Les algorithmes d'optimisation les plus populaires utilisés pour résoudre ces problèmes sont les algorithmes génétiques (GA) et la méthode à essaim de particules (PSO : Particle Swarm Optimisation). Ils sont appliqués avec succès à différentes applications d'optimisation d'ingénierie. PSO est l'un des algorithmes les plus populaires capables de trouver des résultats précis et efficaces avec un faible temps de calcul.

Dans ce travail, l'algorithme PSO est utilisé pour déterminer les dimensions optimales du coursier en marches d'escalier afin de maximiser le taux de dissipation d'énergie. Les variables de décision comprennent la pente de coursier, la largeur du coursier, la hauteur des marches ainsi que la charge sur la crête. Les résultats obtenus sont comparés à ceux précédemment obtenus par [7] en utilisant les algorithmes génétiques.

2 Estimation du taux de dissipation d'énergie

Les coursiers en marches d'escalier sont caractérisés par le taux élevé de la dissipation d'énergie. Les marches agissent comme de grands éléments rugueux qui augmentent la résistance de l'écoulement et conduisent à un taux de dissipation d'énergie plus élevé par rapport aux coursiers lisses. Ce taux de dissipation est donné comme suit :

$$\frac{\Delta E}{E_{max}} = \frac{E_{max} - E_{res}}{E_{max}} = 1 - \frac{E_{res}}{H_{dam} + 1.5y_c} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta E}{E_{max}} = 1 - \frac{E_{res}}{y_c} \left(\frac{H_{dam}}{y_c} + 1.5 \right)^{-1} \quad (2)$$

avec, $\Delta E/E_{max}$ le taux de dissipation d'énergie, E_{max} l'énergie maximale disponible à la crête du barrage, y_c la hauteur critique d'écoulement, H_{dam} la hauteur du barrage.

L'écoulement turbulent dans un coursier en marches d'escalier est subdivisé en deux types, l'écoulement quasi-uniforme qui se produit pour $H_{dam}/y_c > H_e/y_c$ et l'écoulement non uniforme qui se produit pour $0.5 \leq H_{dam}/y_c \leq H_e/y_c$ avec H_e est la hauteur ...

Pour le cas d'écoulement quasi-uniforme le terme E_{res}/y_c est calculé comme suit[8] :

$$\left(\frac{E_{res}}{y_c} \right)_u = \cos \alpha \left(\frac{f}{8 \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{8 \sin \alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

$$\left(\frac{E_{res}}{y_c} \right)_u = \left(\frac{f}{8 \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{8 \sin \alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4)$$

où, f est le coefficient de frottement

L'équation 3 est valable pour $19 \leq \alpha \leq 55$ ainsi que pour $5.7 \leq \alpha \leq 19$ et $h/y_c < 13(\tan \alpha)^2 - 2.73(\tan \alpha) + 0.373$ et l'équation 4 est valable pour $5.7 \leq \alpha \leq 19$ et $h/y_c > 13(\tan \alpha)^2 - 2.73(\tan \alpha) + 0.373$

pour le cas d'écoulement non uniforme, E_{res}/y_c est calculé comme suit [8] :

$$\left(\frac{E_{res}}{y_c}\right)_{non-uniform} = 1.5 + \left(\left(\frac{E_{res}}{y_c}\right)_u - 1.5\right) \left(1 - \left(1 - \frac{H_{dam}}{H_e}\right)^m\right) \quad (5)$$

avec, $m = -\frac{\alpha}{25} + 4$

3 Algorithme à essaim de particules

Les algorithmes à essaim de particules ont été introduits par Kennedy et Eberhart en 1995. Ces algorithmes sont inspirés du comportement social des animaux (essaims d'insectes, bancs de poissons ou des nuées d'oiseaux) dans le but de simuler des interactions sociales. PSO est un algorithme de recherche basé sur la population dans lequel les particules changent de position avec le temps en combinant trois tendances : la propension à suivre son propre chemin, la tendance à revenir vers sa meilleure position, et la tendance à aller vers la meilleure position trouvée par l'essaim.

Considérant un espace de recherche avec n particules, chaque particule de la population est modélisée par une position X_i et une vitesse V_i . La qualité de la position d'une particule est déterminée par la valeur de la fonction objectif en ce point. La meilleure position d'une particule i est notée P_i^{best} . La meilleure position globale de l'essaim correspond à la meilleure position enregistrée par toutes les particules. Cette position globale est notée G^{best} .

Au départ de l'algorithme, les particules de l'essaim sont initialisées de manière aléatoire dans l'espace de recherche. A chaque itération, chaque particule se déplace en combinant linéairement les trois composantes à savoir, sa vitesse et sa meilleure position actuelle ainsi que la meilleure performance de ses voisines. En effet, à l'itération $t + 1$, la vitesse et la position des particules sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} V_i^{t+1} = W V_i^t + c_1 r_1 (P_i^{best} - X_i^t) + c_2 r_2 (G^{best} - X_i^t) \\ X_i^{t+1} = X_i^t + V_i^{t+1} \end{cases} \quad (6)$$

avec, $i = 1, 2, \dots, n$. W est le poids d'inertie, c_1 et c_2 sont des paramètres constants appelés coefficients d'accélération. r_1 et r_2 sont des valeurs aléatoires variant entre 0 et 1. X_i^t et V_i^t sont la position et la vitesse actuelles de la particule i à l'itération t .

4 Etude de cas

Pour tester les performances de l'algorithme PSO, un coursier lisse d'un barrage en Iran a été considéré pour l'étude de cas. L'objectif est d'optimiser les dimensions d'un coursier en marches d'escalier comme alternative au coursier lisse existant. Ce problème a été introduit pour la première fois et résolu à l'aide des algorithmes génétiques par [7]. La hauteur du coursier de ce barrage est de 28m et les débits totaux considérés sont : 422 m³/s, 560.2 m³/s et 776,9 m³/s.

L'objectif de cette étude est de déterminer les dimensions optimales des coursiers en marches d'escalier (la pente du coursier et sa largeur de coursier, la hauteur des marches ainsi que la charge sur la crête) pour maximiser le taux de dissipation d'énergie, donc minimiser le taux d'énergie résiduelle. La fonction objectif utilisée est donnée par :

$$\frac{E_{res}}{E_{max}} = \frac{E_{res}}{y_c} \left(\frac{H_{dam}}{y_c} + 1.5 \right)^{-1} \quad (7)$$

sous les contraintes suivantes :

$$g(1) = h - y_c \left(\frac{7}{6} (\tan \alpha)^{1/6} \right) \leq 0 \quad (8)$$

$$g(2) = 0.25 y_c - h \leq 0 \quad (9)$$

$$g(3) = Q - 30b \leq 0 \quad (10)$$

$$g(4) = Q - Cb(H_d)^{3/2} \leq 0 \quad (11)$$

$$g(5) = H_{chute} - L \tan(\alpha) \leq 0 \quad (12)$$

Les limites des variables de décision sont données dans le tableau 1.

TABLE 1 – Limites des variables

Variables	Limite inférieure	Limite supérieure
α	10.33	17.63
b(m)	20	26
h	0.2	3
H_{chute}	24	26
H_d	4	5.8

La résolution du problème d'optimisation en utilisant PSO permet d'avoir les résultats représentés dans les tableaux 1 et 2. Ces résultats montrent bien que la géométrie obtenue en utilisant PSO permet de dissiper une énergie plus importante que celle présentée par [7]. Les géométries données par PSO fournissent un gain de dissipations d'énergie de 4.78%, 4.41% et 5.08% pour les trois valeurs des débits 422m³/s, 560.2m³/s, 776.9m³/s respectivement.

TABLE 2 – Résultats d'optimisation pour $Q = 422 \text{ m}^3/\text{s}$

Paramètre	Coursier lisse	Optimisation avec GA [7]	Optimisation avec PSO
α	10.66	13.04	10.33
b(m)	26	23.8	26
h(m)	-	1.63	2.19
H_{chute}	25.14	26	26
H_d	5.6	2.46	5.48
E_{res}/E_{max}	58.76	23.86	19.08
$\Delta E/E_{max}$	41.23	76.14	80.92

TABLE 3 – Résultats d'optimisation pour $Q = 560.2\text{m}^3/\text{s}$

Paramètre	Coursier lisse	Optimisation avec GA [7]	Optimisation avec PSO
α	10.66	13.00	10.33
$b(\text{m})$	26	25.9	26
$h(\text{m})$	-	1.85	3
H_{chute}	25.14	26	26
H_d	5.6	4.67	5.8
E_{res}/E_{max}	58.76	26.82	22.41
$\Delta E/E_{max}$	41.23	73.18	77.59

TABLE 4 – Résultats d'optimisation pour $Q = 776.9\text{ m}^2/\text{s}$

Paramètre	Coursier lisse	Optimisation avec GA [7]	Optimisation avec PSO
α	10.66	13	10.33
$b(\text{m})$	26	25.99	26
$h(\text{m})$	-	2.28	3
H_{chute}	25.14	26	26
H_d	5.6	5.78	5.8
E_{res}/E_{max}	58.76	31.88	26.8
$\Delta E/E_{max}$	41.23	68.12	73.2

5 Conclusion

Dans cette étude, la capacité de l'algorithme PSO en tant qu'outil efficace pour l'optimisation des dimensions des coursiers en marche d'escalier a été étudiée. L'algorithme a été appliqué à un problème précédemment analysé à l'aide de GA. Les résultats obtenus ont montré que la PSO peut résoudre efficacement ce type de problème de conception et atteindre facilement l'optimum global.

Références

- [1] Rassaei, M., Rahbar, S. : Numerical flow model stepped spillways in order to maximize energy dissipation using FLUENT software, IOSR Journal of Engineering, **4**, 6, 17-25 (2014).
- [2] Chanson, H. : Hydraulics of nappe flow regime above stepped chutes and spillways. Australian Civil Engineering Transactions, **36**, 1, 69-76 (1994).
- [3] Boes, R. M., Hager, W. H. : Hydraulic design of stepped spillways. Journal of Hydraulic Engineering, **129**, 9, 671-679 (2003).
- [4] Parsaie, A., Haghiabi, A. H., Saneie, M., Torabi, H. : Prediction of energy dissipation on the stepped spillway using the multivariate adaptive regression splines. ISH Journal of Hydraulic Engineering, **22**, 3, 281-292 (2016).

- [5] Parsaie, A., Haghiabi, A. H., Saneie, M., Torabi, H. : Applications of soft computing techniques for prediction of energy dissipation on stepped spillways. *Neural Computing and Applications*, **29**, 12, 1393-1409 (2016).
- [6] Salmasi, F., Özger, M. : Neuro-Fuzzy Approach for Estimating Energy Dissipation in Skimming Flow over Stepped Spillways. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **39**, 8, 6099-6108 (2014).
- [7] Salmasi, F., and Abrahamb, J. :Genetic algorithms for optimizing stepped spillways to maximize energy dissipation. *Water Supply*, **22**, 2, 1255-1274 (2022).
- [8] Ohtsu, I., Yasuda, Y., Takahashi, M. :Flow characteristics of skimming flows in stepped channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, **130**, 9, 860-869 (2004).
- [9] Barani, G. A., Rahnama, M. B., Bagheri, H. :Optimization of stepped spillways dimensions and investigation of flow energy dissipation over a physical model. *Journal of Applied Sciences*, **15**, 5, 878-882 (2005)



Modélisation et optimisation d'une station d'élaboration du sable concassé en utilisant la méthode des plans d'expériences.

Djamel Benyessad ^{*1}, Hamid Arkoub², and Abdelghani Seghir 

¹Laboratoire de Technologie des Matériaux et de Génie de Procédés, Faculté de Technologie, Université de Bejaia 06000 Algérie ,
bdjamelgc@gmail.com

²Laboratoire de Technologie des Matériaux et de Génie de Procédés, Faculté de Technologie, Université de Bejaia 06000 Algérie,
hamid.arkoub@gmail.com

³Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement, Faculté de Technologie, Université de Bejaia, Bejaia, Algérie,
a.seghir@univ-bejaia.dz

Résumé Dans le but de valoriser les sables concassés, d'encourager et d'orienter leurs utilisations dans la composition des bétons, une nouvelle et différente approche optimisée d'une station de concassage est proposée, afin de prédire la teneur en fillers TF des sables concassés.

Une étude de cas concernant l'unité de traitement de sable concassé de l'ENG EL-HACHIMIA, située au nord de l'Algérie, est prise comme exemple d'application à l'approche proposée. La teneur en fillers est principalement régie par trois paramètres : l'ouverture de sortie du concasseur secondaire (OSCS), ouverture de sortie du concasseur tertiaire (OSCT) et la vitesse de rotation du concasseur tertiaire (VRCT). Après avoir délimité leurs domaines de variation, des expériences in-situ sont lancées avec un impact minimal sur les perturbations de fabrication. Un modèle mathématique, basé sur la méthode des plans d'expériences, est élaboré afin de représenter l'évolution de la teneur en fillers en fonction des trois paramètres. Le modèle est validé par des tests statistiques puis confronté à d'autres mesures expérimentales. A partir de l'exploitation de modèle on a pu mettre au point des abaques pratiques permettant au fabricant le repérage visuel de la réponse dans la région du domaine expérimental, et aussi de connaître les différentes combinaisons des facteurs opératoires permettant de conduire à une teneur en fillers désirée.

Mots clés : : Sables concassés ; fillers ; modélisation et optimisation ; méthode des plans d'expérience

*Corresponding Author

1 Introduction

Les développements remarquables dans les secteurs du Bâtiments et Travaux Publics ont induit, au cours des trois dernières décennies, une augmentation considérable de la consommation de granulats en Algérie, environ 445 millions de tonnes par an dont 159 millions de tonnes de sable, et les stocks disponibles ne satisfont plus la demande. Cette insuffisance de matériaux, risque de compromettre beaucoup de chantiers dans les secteurs de l'habitat, des travaux publics et de l'hydraulique. Compte tenu de cette forte croissance de la demande de sable et des lois interdisant l'extraction de matières alluviales des lits des rivières, le remplacement du sable des rivières et de la mer par le sable concassé dans la composition du béton constitue une alternative pour limiter l'extraction sauvage et illégale de ce matériau, et contribuer aussi à la protection de l'environnement.

Parallèlement à cette situation, des carrières de granulats, généralement d'origine calcaire, produisent du sable résultant des opérations de concassage. Ces sables étaient utilisés beaucoup plus dans le secteur des travaux publics et non pas dans la confection des bétons. La limitation du taux de fillers (éléments passant à $63 \mu\text{m}$) des sables pour les bétons ordinaires par rapport aux normes en vigueur est une démarche très coûteuse en termes de technologie (processus d'élaboration) et de consommation d'énergie. Les fines de sable concassé ont un effet prononcé sur les propriétés rhéologiques du béton frais. Des études [8, 11, 10, 6] montrent que la présence des éléments fins en quantité non contrôlées dans une formulation d'un mortier ou d'un béton est à l'origine de nombreuses défaillances, telles que des résistances mécaniques faibles et des retraits importants qui sont à l'origine des fissurations.

S'inscrivant dans un courant de recherche de solutions plus rationnelles, le présent travail propose une nouvelle et différente approche optimisée qui consiste à valoriser l'utilisation du sable concassé dans la composition des bétons par la maîtrise de sa qualité, précisément, sa teneur en fillers (TF), par la modélisation et l'optimisation du processus d'élaboration des sables concassés en utilisant la méthode des plans d'expériences.

Afin de produire un sable concassé, il est nécessaire d'utiliser un ensemble de plusieurs stages de concassage assurés par différents types de concasseurs dont le but principal est de réduire la taille de la roche aux dimensions souhaitées. Le type, la position et le réglage de certains paramètres de ces concasseurs influencent largement la qualité des sables concassés.

Une étude de cas concernant l'unité de traitement de sable concassé d'ENG EL-HACHIMIA, située au nord de l'Algérie, est prise comme exemple d'application à l'approche proposée. Le processus dans cette usine est principalement régi par trois paramètres, à savoir l'ouverture de sortie du concasseur secondaire (OSCS), ouverture de sortie du concasseur tertiaire (OSCT) et la vitesse de rotation du concasseur tertiaire (VRCT). Un modèle mathématique (TF) est conçu pour prédire l'évolution de la teneur en fillers en fonction de ces trois paramètres.

L'objectif de cette modélisation est de concevoir une fonction mathématique décrivant l'évolution de la teneur en fillers (TF) des sables de concassage en fonction de l'ouverture de sortie du concasseur secondaire (OSCS), ouverture de sortie du concasseur tertiaire (OSCT) et vitesse de rotation du concasseur tertiaire (VRCT). Utilisant ce modèle, nous pouvons prédire la teneur en fillers en fonction de l'ajustement de ces paramètres.

TABLE 1 – Caractérisation chimiques de la roche mère du gisement de l'ENG EL-HACHIMIA. TABLE 2 – Variation des niveaux des facteurs

Oxyde de calcium (CaO)	50.68%			
Oxyde de silicium (SiO ₂)	4.51%	Facteurs	Niv bas (-1)	Niv haut (+1)
Oxyde de fer (Fe ₂ O ₃)	0.54 %	X ₁ OSCS	20	100
Oxyde d'aluminium (Al ₂ O ₃)	1.09 %	(mm)		
Oxyde de magnésium (MgO)	1.01 %	X ₂ OSCT	10	40
Oxyde de potassium (K ₂ O)	-	(mm)		
Oxyde de sodium (Na ₂ O)	-	X ₃	30	60
Sulfate soluble dans l'eau	0.0024%	VRCT		
Sulfate soluble dans l'acide	0.54%	(m/s)		
Perte au feu (PF)	40.70 %			

2 Méthodologie Expérimentale

2.1 Processus de traitement des granulats de l'ENG EL-HACHIMIA

La fabrication du sable concassé 0/4 mm au sein de l'installation de traitement des granulats de l'ENG unité EL-HACHIMIA est le résultat d'une succession d'opérations. Ce processus de traitement est subdivisé en trois niveaux de traitement (stages) à savoir : stage primaire, stage secondaire et enfin le stage de finition tertiaire, chaque stage comporte plusieurs étapes de traitement. L'unité EL-HACHIMIA exploite un gisement de calcaire massif dur. Les résultats d'analyse minéralogique par Diffraction à Rayons X (DRX), de plusieurs échantillons de la roche (tout-venant) montre une composition minéralogique essentiellement de calcite (CaCO₃), Dolomite CaMg(CO₃)₂ et de quartz (SiO₂). Ces résultats sont confirmés par l'analyse chimique représentée sur le tableau 1.

2.2 Modélisation par plans d'expériences

La méthode des plans d'expériences est appliquée dans notre approche pour étudier l'influence de l'ouverture de sortie du concasseur secondaire (OSCS), ouverture de sortie du concasseur tertiaire (OSCT) et la vitesse de rotation du concasseur tertiaire (VRCT) influençant la réponse qui est : la teneur en fillers de sable concassé (TF), et pour modéliser la relation entre eux. Dans l'objectif d'évaluer cette influence et de concevoir cette relation sur une station de traitement en activité avec un minimum de conséquences financières pour l'entreprise, nous avons adopté le plan d'expériences factoriel complet 2³. Tel que défini par Montgomery [9], un plan factoriel complet est un plan expérimental avec un nombre de niveaux limités à deux (bas et haut) pour chaque facteur ; il prend en compte toutes les combinaisons entre les niveaux des facteurs au cours de l'expérience [7]. Dans notre cas la variation des niveaux des trois facteurs est présentée dans le tableau 2.

Le nombre d'expériences peut être calculé à partir d'une formule utilisant un plan factoriel complet : 2^k, où k est le nombre de facteurs (= 3 dans le cas présent). En conséquence, huit expériences peuvent être appliquées pour étudier les effets des facteurs [3, 4].

TABLE 3 – Résultats (TF) du plan factoriels complet 2³

Pt expérimental	X ₁	X ₂	X ₃	Y=TF%
A	-1	-1	-1	13.719
B	+1	-1	-1	11.900
C	-1	+1	-1	9.224
D	+1	+1	-1	8.525
E	-1	-1	+1	14.325
F	+1	-1	+1	12.542
G	-1	+1	+1	11.966
H	+1	+1	+1	9.682

TABLE 4 – Effets des facteurs sur la teneur en fines du sable concassé.

Facteur	Effet
a ₀	11.4856
a ₁	-0.8229
a ₂	-1.6356
a ₃	0.6429
a ₁₂	0.0779
a ₁₃	-0.1941
a ₂₃	0.331
a ₁₂₃	-0.2029

Le détail de chaque point expérimental et les résultats obtenus sont explicités dans le Tableau 3. Pour chaque point expérimental on répète l'essai cinq fois, pour s'assurer de la reproductibilité des résultats. Le prélèvement d'échantillons de sable concassé 0/4mm dans l'usine de traitement est effectué avec la procédure de prélèvement de matériaux en cours d'écoulement conformément à la norme [NFP 18-552].

3 Résultats et discussion

3.1 Conception du modèle analytique

Une meilleure teneur en fillers dans un sable concassé est liée en grande partie au réglage des paramètres de la station de traitement des granulats préalablement choisies (ouverture de sortie du concasseur secondaire (X₁), ouverture de sortie du concasseur tertiaire (X₂) et la vitesse de rotation du concasseur tertiaire (X₃). Le but de cette modélisation est de calculer l'effet de chaque facteur sur la réponse et de trouver, par le biais d'un modèle mathématique, une relation fidèle entre ces trois paramètres et la teneur en fillers (TF), pour ce faire nous partons du modèle mathématique associé aux plans factoriels complets 2^k [3, 4, 12] qui s'écrit :

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (1)$$

Les résultats obtenus à partir des huit expériences sont présentés dans le tableau 3, avec les niveaux bas (-1) et haut (+1) tels que spécifiés dans le tableau 2. Connaissant la réponse (y) on aura le système d'équation 2

TABLE 5 – Signification des effets.				TABLE 6 – TF exp-TF modèle		
Terme	Effet	t_j	Valeur Student	N°	TF exp	TF prédites
				Signifiant 1	13.719	13.640
a_1	-0.8229	7.667		Signifiant 2	11.99	11.994
a_2	-1.6356	15.261		Signifiant 3	9.224	9.708
a_3	0.6429	5.998	1.697	Signifiant 4	8.528	8.450
a_{12}	0.0779	0.727		Non-Signifiant 5	14.325	14.268
a_{13}	-1.1941	1.809		Signifiant 6	12.541	12.622
a_{23}	0.331	3.087		Signifiant 7	11.966	12.048
a_{123}	-0.2029	1.893		Signifiant 8	9.682	9.626

$$\begin{pmatrix} 13.719 \\ 11.900 \\ 9.224 \\ 8.528 \\ 14.325 \\ 12.541 \\ 11.966 \\ 9.682 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & - & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{123} \end{pmatrix} \quad (2)$$

La solution du système ci-dessus est de déterminer le vecteur colonne a tableau 4, tel que : $a = X^{-1}Y$.

3.2 Validation du modèle par l'analyse statistique

Après avoir conçu l'équation de régression polynomiale du taux de fines exprimé en fonction des trois facteurs (OSCS, OSCT et VRCT), il est nécessaire de valider le modèle par des tests statistiques.

La signification des différents coefficients calculés a été vérifiée par le test de Student pour un niveau de confiance de 95 %. Ce test permet de déterminer si parmi les coefficients du modèle, existe des coefficients non significatifs, lesquels seront éliminés de l'équation de régression car leurs influences sur la teneur en fines sont négligeables. Les effets des facteurs et les valeurs de Student (t_j) sont présentés dans le tableau 5.

Les résultats du tableau 5 montrent que l'interaction OSCT – OSCT est statistiquement insignifiante. Selon GOUPY [4] les interactions d'ordre 3 ou d'ordre plus élevé sont considérées négligeable, dans notre cas, pour un meilleur ajustement du modèle (TF) élaboré on suppose que l'interaction OSCT-OSCT-VRCT est négligeable, donc le modèle retenu s'écrit comme indique l'équation 3

$$y_i = 11.4856 - 0.823 x_1 - 1.635 x_2 + 0.645 x_3 - 0.194 x_1 x_3 + 0.331 x_2 x_3 \quad (3)$$

Le test de la validité de l'équation de régression est basé sur la statistique de FISHER. La valeur tabulée du test de FISHER pour le niveau de signification $\alpha = 0.05$ et le nombre de degré de liberté ($f_1 = k - 1 = 5$) et ($f_2 = N - k = 2$) est de 19.3. La valeur F calculée pour ce modèle est égale à 33.13 est supérieure à celle tabulée, donc l'équation de régression est donc très significative sur la réponse. le test de FISHER a montré que l'équation de régression retenue décrit l'expérience de façon adéquate. Les réponses expérimentales et les réponses prédites par le modèle sont présentées dans le tableau 6. Le coefficient de détermination ($R^2 = 0,9985$) est très proche de 1. Cela montre que le modèle mathématique proposé est capable de prédire avec une précision très satisfaisante les valeurs expérimentales mesurées. Nous avons également sélectionné un autre point expérimental dans le domaine d'étude pour vérifier la validité du modèle en dehors des points utilisés pour le plan d'expériences factoriel complet 2^k . Les résultats des tests expérimentaux sur cinq échantillons sont rapportés dans le tableau 7. On voit que la valeur prédite est proche de la moyenne des valeurs mesurées et reste à l'intérieur de l'intervalle délimité par la moyenne \pm écart type (SD), soit : $10.61 \in [8,21\%, 11,43\%]$

TABLE 7 – Validation du modèle par un autre point expérimental (OSCS=50mm, OSCT=25mm, VRCT=30m/s)

N° Essai	(TF%) expérimentales	(TF%) moyenne	Ecart type	(TF%) prédites
1	11.64			
2	9.13			
3	11.42	9.824	1.61	10.61
4	8.04			
5	8.89			

En conclusion, les tests statistiques et graphiques permettent de considérer notre modèle Equation 3 comme étant bon pour représenter les résultats du plan d'expériences. L'analyse du modèle élaboré Equation 3, montre une augmentation du taux de fillers avec l'augmentation de la VRCT, ce qui corrobore certaines constatations antérieures [5, 1]. Cette augmentation du taux de fillers est réduite par l'élargissement de l'ouverture de décharge des deux concasseurs (OSCS et OSCT).

3.3 Optimisation des paramètres opératoires

L'objectif de ce travail est d'optimiser l'ensemble des paramètres opératoires de la station de traitement des granulats de l'ENG EL-HACHIMIA et d'obtenir un réglage optimal de celle-ci, afin d'avoir un sable concassé qui répond aux prescriptions des normes en vigueur, qui fixent la teneur en fillers des sables de concassage. Après avoir identifié les facteurs expérimentaux les plus importants avec leurs niveaux de variation. L'approche méthodologique de la méthode des plans d'expériences (plan factoriel complet à deux niveaux 2^k), permettra d'optimiser les trois paramètres de fonctionnement de l'unité de concassage de l'ENG EL-HACHIMIA afin de prédire le taux de fillers (TF) selon les besoins des clients, en utilisant les surfaces de réponses et les courbes iso valeurs.

Selon le modèle proposé (équations 3), l'optimisation consiste à restituer l'équation

TF (OSCS, OSCT, VRCT) et trouver toutes les valeurs des paramètres de fonctionnement OSCS, OSCT et VRCT qui entraînent un état souhaité de l'installation de concassage.

Les figures 1,2 sont proposées comme des abaques de prédiction de la teneur en fillers, pour une utilisation pratique par l'opérateur, ceci en utilisant l'optimisation graphique (courbes iso-teneurs en fillers) en fixant l'un des paramètres (VRCT) et en cherchant les deux autres (OSCS-OSCT) pour une teneur en fillers souhaitée.

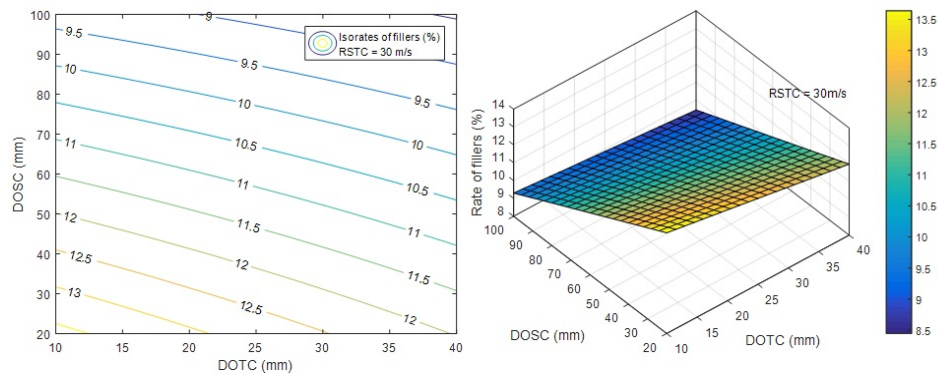


FIGURE 1 – Abaques de prédiction de la teneur en fillers pour VRCT= 30m/s

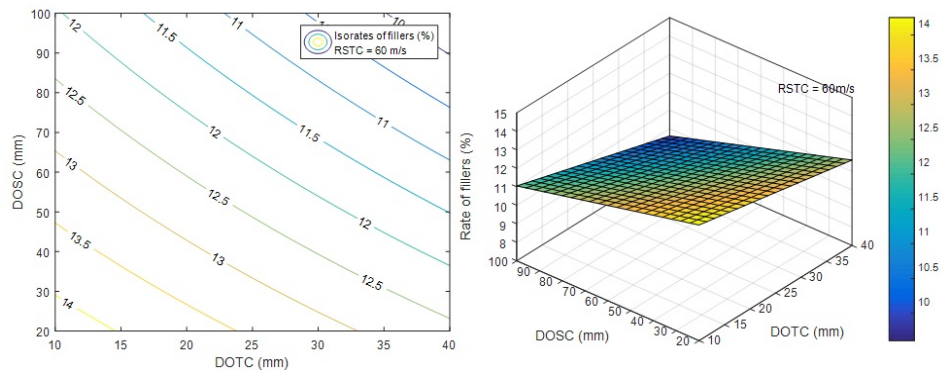


FIGURE 2 – Abaques de prédiction de la teneur en fillers pour VRCT= 60m/s

4 Conclusion

Cette étude met en évidence l'influence des trois paramètres préalablement choisis sur le taux de fillers des sables concassés. La confrontation des résultats expérimentaux aux résultats obtenus par le modèle établi par la méthode des plans d'expériences montre une convergence dans les résultats obtenus.

Le réglage des concasseurs, a une grande influence sur la teneur en fillers du produit fini. Il faut donc que les appareils choisis, soient bien réglés et bien utilisés. Maintenant, avec la présence de ces abaques, il est possible de définir un objectif de production pour une distribution granulométrique souhaitée caractérisée par sa teneur en fillers, en agissant sur le réglage des paramètres opératoires du processus d'élaboration des sables concassés.

Le modèle et abaques développés sont des outils méthodologiques adaptés à l'optimisation de l'installation. Ils permettent en particulier de prédire la teneur en fillers des sables concassés.

Références

- [1] Bengtsson, M. : Quality-driven production of aggregates in crushing plants. Chalmers University of Technology.(2009)
- [2] Danielsen, S. W., Wigum, B. J., Petersen, B., Hotvedt, O. : Production and Utilisation of Manufactured Sand. COIN P 2 Improved construction technology.,(2009)
- [3] Goupy, J. : Plans d'expériences pour surfaces de réponse.(1999)
- [4] Goupy, J., Creighton, L. : Introduction of experience plans. industrial techniques, Conceptin series. DUNOD.(2001)
- [5] Jaatinen, A., Onnela, T. : Automatic control of impact crushers based on visual measurement of size distribution. IFAC Proceedings Volumes, 46(16), 214-217.(2013)
- [6] Joudi-Bahri, I., Lecomte, A., Ouezdou, M. B., & Achour, T : Use of limestone sands and fillers in concrete without superplasticizer. Cement and Concrete Composites, 34(6), 771-780,(2012)
- [7] Kumar, R., & Ahuja, I. S. : Modelling for surface roughness of non-ferrous alloy castings using response surface methodology. International Journal of Materials Engineering Innovation, 6(4), 257-271 (2015)
- [8] Lagerblad, B., Gram, H. E., Westerholm, M. : Evaluation of the quality of fine materials and filler from crushed rocks in concrete production. Construction and Building Materials, 67, 121-126 (2014).
- [9] Montgomery, D. C. : Design and analysis of experiments. John wiley & sons (2017)
- [10] Sadhouari, F., Goufi, N., Guezzouli, A. : Valorisation de l'utilisation des sables concassés par analyse des propriétés des mortiers et bétons. In 1st International Conférence SBEIDCO., ENSET Oran, Algeria (pp. 247-254),(2009, October)
- [11] Danielsen, S. W., Wigum, B. J., Petersen, B., Hotvedt, O. Production and Utilisation of Manufactured Sand. State-of-the-art-report. COIN P 2 Improved construction technology. SP 2.5 Production of manufactured sand. (2009).
- [12] Sado, G., Sado, M. C. : Les plans d'expériences : de l'expérimentation à l'assurance qualité. Afnor.(2000)



Modélisation et simulation du flux des patients au service des urgences de Tlemcen

Afaf Zerrouk¹, Imane Laribi ¹, and Latefa Ghomri¹

¹MELT Laboratory, Faculty of Technology, University of Tlemcen, Algeria,

Résumé L'objet de cet article est de diminuer les temps d'attentes des patients au service d'urgence de l'hôpital de Tlemcen dont le but d'améliorer sa performance. Tout en sachant que ces services subissent un afflux important d'où la nécessité d'une bonne gestion des ressources humaines et matérielles. Dans ce contexte, nous avons posé comme point centrale de notre recherche l'étude du flux de patients au sein du service d'urgence. Nous présentons à travers cet article, la démarche suivie pour la modélisation, ainsi que les résultats obtenus par simulation. La finalité du travail sera l'amélioration par un scénario « What-if » une solution opérationnelle inspirée d'une proposition stratégique qui est la mise en œuvre d'une nouvelle structure par l'État, pour minimiser les temps d'attentes des patients aux urgences.

Mots clés : service des urgences ; flux de patients ; modélisation ; simulation ; temps d'attente

1 Introduction

Le service des urgences est un système dans lequel une variété de services médicaux, de prestataires et de personnel auxiliaire doivent collaborer pour trier, diagnostiquer et traiter des problèmes médicaux allant du bénin au danger de mort. L'encombrement est un déséquilibre entre la demande et la capacité des services d'urgence à fournir des soins est le principal obstacle au quel doit faire face tous les services d'urgences mondiaux dû à quoi les délai d'attente se voit augmenté [1]. Selon le NHS britannique, l'amélioration du flux de patients pour éviter l'encombrement hospitalière est un défi contemporain. Dans cet article l'objectif principale est de réduire le temps d'attente des patients au sein d'Urgences Médico-Chirurgicales de Tlemcen. La prestation de services au sein des urgences s'avère être complexe et multifactorielle, avec une variété d'aléas générant ainsi un grand nombre de circuits indéterministes d'où le choix de la simulation. Puisque celle-ci permet de reproduire le fonctionnement du système, de tester les multiples scénarios possibles afin de pouvoir suggérer

*Corresponding Author

d'éventuelles améliorations. Notre étude a été réalisée au UMC du Centre Hospitalier Universitaire (CHU) de Tlemcen durant la période du 14 février au 13 mai 2022. Le service accueille tout patient dont l'état nécessite une prise en charge immédiate, qu'il s'agisse de soins médicaux, chirurgicaux ou médico-chirurgicaux, à toute heure de la journée, 24h/24.

2 Modélisation de flux de patient

Afin de bien visualiser le flux de patients au sein d'UMC de Tlemcen, nous avons utilisé un « flowchart » qui est une représentation graphique qui aide à visualiser un processus en étapes discrètes organisées dans la séquence d'événements. Le « flowchart » fournit une base pour le modèle de simulation d'événements discrets. Ce dernier est représenté en fonction du flux de patients existant du système étudié.

Dès l'arrivée d'un patient à l'accueil un tri préliminaire sera fait soit par la réceptionniste ou par un médecin généraliste à la base des données anamnestiques, clinique, et motif de la visite, afin de distinguer les vrais des faux patients et en fonction du type de la pathologie le malade sera référé à l'unité la plus appropriée pour sa prise en charge qui peut être soit médicale ou chirurgicale.

2.1 Parcours des patients relevant de l'unité médicale

Les médecins généralistes au niveau des urgences font face à deux cas de figures : Des patient étant dans un état stable, ce qui donne amplement le temps au médecins de faire leurs diagnostics en passant par une consultation et si besoin des examens complémentaires (scanner, radio, bilans. . .) ou un avis de médecins généraliste ou les deux au même temps, pour en conclure à un diagnostic évident. En fonction de ce dernier le médecin prend une décision à propos du parcours du patient qui peut être admis dès le départ dans l'Unité d'Hospitalisation de Court Durée. Pour les patient étant dans un état instable représentent soit une urgence absolue ou relative. Si c'est une urgence absolue dont le pronostic vital est engagé est immédiatement acheminée vers la Salle d'Accueil des Urgences Vitales (SAUV), ou la salle de déchoquage. Sinon, une urgence relative elle ne sera pas admise aux SAUV immédiatement mais nécessite une stabilisation de l'état du patient pour ne pas se transformer en urgence absolue. La figure 1 schématise de manière plus détaillée le parcours des patients dans l'unité médicale.

2.2 Parcours des patients relevant de l'unité chirurgicale

L'unité chirurgicale est répartie en cinq disciplines (traumatologie, chirurgie générale, urologie, neurochirurgie, ORL). Lorsque le patient est stable, il consultera un résident spécialiste conformément à la pathologie d'urgence. Si le diagnostic ne peut être posé, le résident peut référer à son maître-assistant, ou aux examens complémentaires, ou il peut laisser le patient en observation sans commencer le traitement, car certaines pathologies ne sont souvent pas immédiatement symptomatiques. La figure 2 représente de façon plus détaillé le processus d'admission des patients dans l'unité chirurgicale.

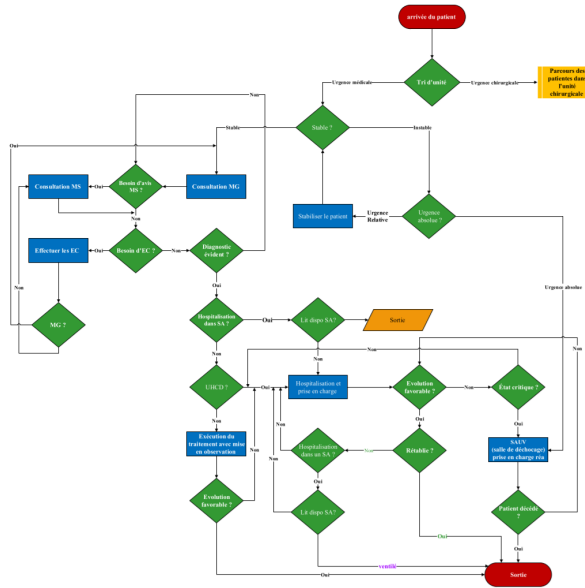


FIGURE 1 – Flowchart du processus d’admission des patients dans l’unité médicale

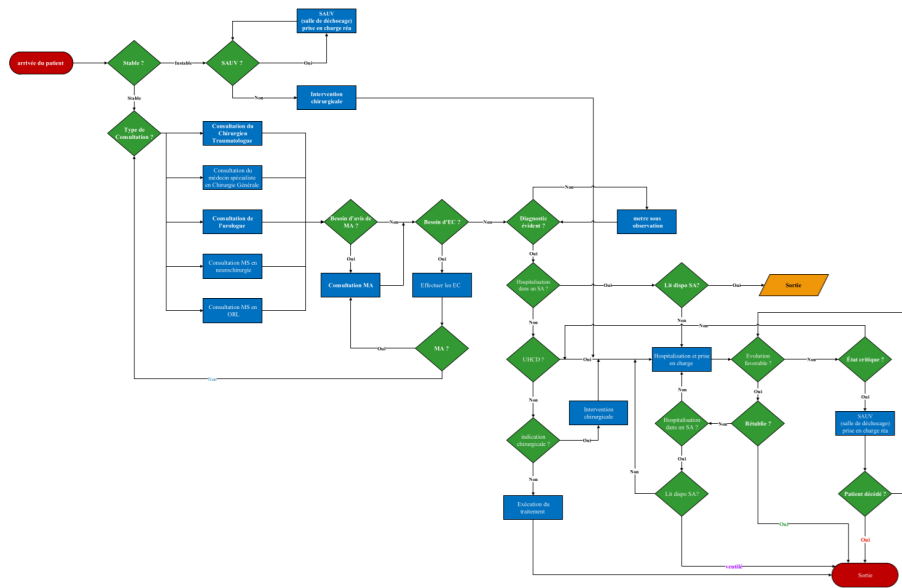


FIGURE 2 – Flowchart du processus d’admission des patients dans l’unité chirurgicale

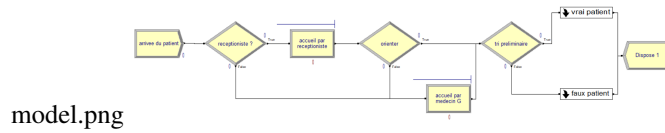


FIGURE 3 – Modèle arena du parcours de patient au sein d’UMC

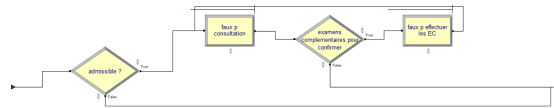


FIGURE 4 – Sous modèle arena de faux patients

3 Simulation de l’existant

Le choix de la simulation est raisonnable lorsqu’il s’agit de reproduire le fonctionnement d’un système, et de tester des scénarios pour proposer d’éventuelles améliorations. Dans cette étude, nous avons utilisé le logiciel Arena, pour modéliser le système étudié. Nous présentons dans cette partie uniquement l’unité médicale.

Dans UMC de Tlemcen, il est plus fréquent que les patients seront accueillis par une réceptionniste que par un médecin généraliste avec les probabilités (80%, 20%) chacun. L’aiguillage de patient par la réceptionniste est un processus avec un temps de traitement qui dure 3min et suit une loi normale d’écart type 1 min. Or, Puisque la ressource réceptionniste n’est pas une infirmière d’accueil et d’orientation elle peut effectuer que des orientations mineures (avec une probabilité de 20%). Donc le tri se fait majoritairement par une ressource de médecins généralistes qui est basé sur un calendrier ou les premières 6h de la journée sont assuré par 3 médecins généralistes, idem pour les 6h d’après-midi et les 12h de nuit sont assuré par deux médecins généralistes. Le tri par les médecins est un processus avec un temps de traitement qui suit une loi uniforme de minimum 5 min et maximum 10 min. Il est mentionné que le taux des faux patients (68.75%) est plus élevé que le taux des vrais patients (31.25%). De plus le flux des urgences médicale est plus intense (58.75%) que celui des urgence chirurgicale (41.25%) (d’après les témoignages et aussi en observant le système le phénomène d’encombrement est plus présent dans l’unité médicale). La figure 3 présente le modèle arena du parcours de patient au sein d’UMC. Le sous modèle des faux patients représenté par la figure 4 commence par un test d’admissibilité avec 90% que cette tranche de patient sera réorienté vers un point de consultation externe (non admis), et seulement 10% seront admis si le médecin généraliste suspecte une pathologie grave et une consultation sera effectuer qui dure au minimum 5min et au maximum 15min dont le médecin peut faire recours aux examens complémentaires (probabilité 15%) pour tranché qu’il ne s’agit pas d’une véritable urgence et à ce moment-là c’est dernier sont libéré du système. La figure 5 représente le processus des vrai patients relevant de l’unité médicale. Cette figure commence par le sous processus investigation. Ceci représente le processus qui

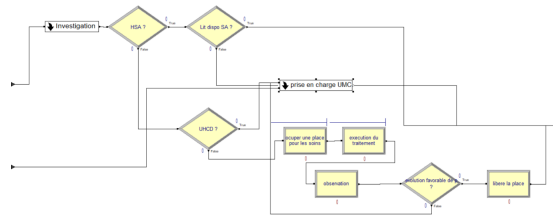


FIGURE 5 – Sous modèle arena de vrai patients relevant de l'unité médicale

a comme entrée des entités patient stable (71.87%) relevant de l'unité médicale, ils passeront initialement par une consultation chez le médecin généraliste dans un box de consultation médicale et cette opération dure (minimum 5 min, maximum 15 min). Ensuite si le médecin n'arrive pas à poser un diagnostic (46.2% diagnostic évident), il fait recours à un médecin spécialiste (58.33%), ou des examens complémentaires (71.4%). Les médecins spécialistes seront introduits sur Arena par un ensemble de 57 ressources (selon le tableau de garde médicale et chirurgicale d'UMC). Pour qu'un médecin spécialiste donne son avis il faut qu'il examine le patient, cette opération dure minimum 5 min et maximum 20 min. Le temps de traitement des examens complémentaires (ensemble composée de trois ressources) suit une loi uniforme entre la valeur minimale 5 min et la valeur maximale 45 min.

4 Résultats de la simulation

Dans le but d'obtenir des résultats fiables et satisfaisants, les conditions initiales de la simulation sont 10 réplifications du modèle sur un an en régime transitoire, avec une période de préchauffage (Warm Up Period) de 10 jours pour stabiliser le système avant son lancement. À la fin de la simulation, nous avons remarqué que la demi-largeur de l'intervalle de confiance est très faible, indiquant que les résultats sont très satisfaisants. Nous avons obtenu 22814 patients qui ont quitté le service des urgences après un an. En outre, selon les statistiques du rapport, un patient reste en traitement effectif en moyenne 1,66 heure, et la durée moyenne passée dans les files d'attente est de 177,62 heures. Nous avons remarqué que la file d'attente la plus critique de tout le système est celle de l'unité d'hospitalisation de courte durée (1027,2 patients), avec un temps d'attente moyen de 2626,64. La majorité des ressources goulets (chaise ou brancard, labo, lit UHCD, radio, salle d'observation, scanner) atteignent un taux d'utilisation de 100%.

4.1 Amélioration par un scénario « What-if »

Les goulets d'étranglements sont principalement les ressources physiques (lits, unité d'investigation). Ces derniers augmentent les temps d'attentes et affectent la prise en charge. Comme solution, on propose l'augmentation de la capacité matérielle par le biais d'une simulation d'un scénario de déménagement de staff des UMC actuelle vers la nouvelle structure récemment bâtie.

Ressources	Ancienne UMC	Nouvelle UMC
Occupation de lit	2626,64	Nulle
Effectuer les examens complémentaires CG	107,52	2,5
Effectuer les examens complémentaires neuro chir	108,13	2,53
Effectuer les examens complémentaires ORL.	109	2,67
Effectuer les examens complémentaires trauma	107,31	2,52
Effectuer les examens complémentaires URO	117,21	2,67
Effectuer les examens complémentaires	106,92	2,52

FIGURE 6 – Comparaison entre les temps d’attentes dans les files d’attentes

Ressources	Ancienne UMC	Nouvelle UMC
Occupation de lit	1027,2 patients	Nulle
Occuper une place pour les soins	414,19 patients	428,62
Effectuer les examens complémentaires	404,8 patients	11,26
Occuper une place salle observation NC	212,89 patients	Nulle
Intervention chirurgicale CG	156,67 patients	164,64
Effectuer les examens complémentaires CG	152,95 patients	4,53
Effectuer les examens complémentaires trauma	126,45 patients	3,89

FIGURE 7 – Comparaison entre les files d’attentes avant et après amélioration

4.2 Simulation du scénario d’aménagement

Les conditions initiales de la simulation ont été maintenues : 10 réplifications, 1an en régime transitoire, période de préchauffage (Warm Up Period) de 10 jours. Des changements ont été appliqué au niveau des ressources : lit d’UHCD, chaise ou brancard, scanner, lit de SAUV, salle de bloc opératoire, lit dans la salle de réveille.

D’après la figure 6 et 7, nous constatons une diminution significative du temps d’attente, ainsi que du nombre de patients dans les files d’attentes.

5 Conclusion

L’objectif de ce travail est d’améliorer les délais d’attentes des patients au sein de service d’urgence de Tlemcen. Pour ce faire nous avons simulé sous le logiciel arena un modèle qui reflète le fonctionnement des anciennes urgences, dans le but de détecter les dysfonctionnements de ce dernier. Nous avons remarqué des temps d’attente trop élevés, et des files d’attente encombré, ainsi que des ressources qui ont atteint leur taux d’occupation maximale de 100%. Enfin, nous avons amélioré les performances du système plus précisément le temps d’attente par le biais d’un scénario « What if » : l’ouverture d’une future urgence.

Références

- [1] Miguel Carvalho-Silva, M Teresa T Monteiro, Filipe de Sá-Soares, and Sónia Dória-Nóbrega. Assessment of forecasting models for patients arrival at emergency department. *Operations Research for Health Care*, 18 :112–118, 2018.

VIII

POSTERS

Sommaire

VIII.1	A Cooperative Game Theory Model for a Banking Network	574
VIII.2	CVaR-GARCH-Copula Models in Forecasting the Market Risk : Evidence from the Exchange Rate Market	579
VIII.3	On Nonparametric Kernel Regression Estimation for Functional Stationary Ergodic Data: a Short Overview	587
VIII.4	Performance Evaluation of a Production Line via Petri Nets: Case of the AMIMER ENERGIE Company	593
VIII.5	Outlier Detection Methods for Exponential Samples	599
VIII.6	A Knowledge-based Decision Support System for Loan Assessment: An Integrated Case-Based Reasoning and AHP Method	605
VIII.7	Implementation of IoT-Smart Irrigation system using Blynk App	612
VIII.8	Single Retrial Service with Batch Arrivals, Recurrent Customers, Breakdown, Delaying Repair and Bernoulli Vacation	622
VIII.9	Power Contamination and Domination on the Grid	630
VIII.10	Total Flowtime Minimization in Flow Shop with Resources constraints by using Meta-Heuristic	636
VIII.11	Optimisation of Batch Stochastic (s,Q) Continuous Review Inventory System with Retrial Demands	642
VIII.12	Automatic Classification of Sleep Apnea-Hypopnea Events Using EWT-based Frequency Characteristics of EEG Signals and Neural Networks Trained by Hybrid PSO & GSA	648
VIII.13	Classification of Obstructive Sleep Apnea based on Entropy and Bispectral Entropy Features	659
VIII.14	On The Property of Solution of Stochastic Differential Equation With Respect to Initial Data	668
VIII.15	On a Multi-Server Queueing System with Differentiated Working Vacation Policy, Vacation Interruption, Balking and Reneging	671
VIII.16	Quadratic Parametric Approach for Constrained Bi-Matrix Game with Payoffs and Constraints Represented by IFN	676
VIII.17	Convergence Rate of Lynden-Bell Estimator for Randomly Left Truncated and Widely Orthant Dependent Data	682
VIII.18	Multivariate Probability Density Estimator using Inverse Gamma and Beta Prime Kernels	690

VIII.19	Nonparametric Mode Estimation	696
VIII.20	On M/M/1 Retrial Queue with Orbital Search.	702
VIII.21	On Estimation in Periodic Threshold ARCH(Q) Models: Gaussian QMLE Approach	708
VIII.22	New Form of Driver Authentication based on His Behavior and Habits	715
VIII.23	Analysis of an M/G/1 Retrial Queue with Persistent and Impatient Customers	721
VIII.24	Matrix Geometric Method for the Analysis of Unreliable Server Queueing System subjected to Vacation Policy	727
VIII.25	Towards Automatic Reinforcement of Mobile Codes Security Based on Algebraic Approach	733
VIII.26	Minimisation de la Rogne dans la Production du Carton Ondulé au Niveau de l'Entreprise Générale Emballage	739
VIII.27	Flow Shop Robotisé Réentrant à Deux Machines	745
VIII.28	Application de la Programmation de But Linéaire dans la Planification de la Production au sein de l'ALFADITEX	751
VIII.29	Comparaison des Approches PERT et PERT Stochastique. Application à un Projet de la RTC-Sonatrach de Béjaia	757
VIII.30	Optimisation de la Maintenance Préventive des Equipements Informatiques au niveau de l'Entreprise NAFTAL Béjaia	764
VIII.31	Analyse des Performances du Système Ma/M/1//N via les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG)	770
VIII.32	Une Approche de Sélection d'Attributs et Classification pour le Trafic du Réseau Internet	776
VIII.33	Modélisation et Prévision de la Pluviométrie. Tranfert des Eaux Barrage Béni Haroun	782
VIII.34	Problèmes autour de la Localisation dans les Supply Chains: Transport, Routage, Clustering, Jeux et Métaheuristiques	788
VIII.35	Utilité Décisionnelle de l'Information Comptable Financière : Autres Mesures à partir du cas Algérien	795
VIII.36	Entreposage des Conteneurs au niveau du Centre de Transit des Marchandises Dangereuses du port de Béjaïa	799
VIII.37	Réapprovisionnement En Matières Premières: Cas De La SARL Ramdy	807



A cooperative game theory model for a banking network

Karima Bouibed*¹, Mohammed Hefaia², and Abdelkader Sbai³

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
karima.bouibed@univ-bejaia.dz

²Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
hafaia.med@gmail.com

³Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
kadasbai@gmail.com

Abstract : In this work, we present an application of cooperative game in a banking network. Banks have found their interest in networking in order to allow their customers access to multiple machines. The network allows the continuity of the service to the customers even in case of breakdown of their own machines, as well as considerable savings in comparison with the expansion of their own network. In such a system, there is a difference between the costs incurred by a bank and the actual costs caused by the customers of that bank. The fixing of interchange fees is equivalent to the allocation of the total cost resulting from such a network, and the fee structure will be the result of a negotiation process involving the participating banks. The different concepts of cooperative game solutions were applied to solve the problem of allocating costs.

MSC: 91A06 ; 91A12 ; 91A80

Keywords : Cooperative game ; Coalition ; Bank ; Location ; Cost allocation

1 Introduction

The ATM (Automated Teller Machine) network has contributed significantly to the reliable execution of most of the financial services of customers. According to Hannan et al. [3], ATMs can provide significant benefits to banks and customers. The machines can allow customers to withdraw and deposit money at more convenient times and places than during branch opening hours. At the same time, automating services that were previously performed manually, ATMs can reduce the costs of handling certain customer requests. These potential benefits are multiplied when banks share their ATMs with others, allowing customers of other banks to access their accounts through an ATM.

For all these different reasons, ATM networks have formed, consisting of several banks,

*Corresponding Author

where customers of one bank can use the ATMs of any bank in the network. In such a system, there is a difference between the costs incurred by a bank and the costs actually caused by the customers of that bank. Such imbalances in network usage can be compensated by setting interchange fees. Each time a customer of bank i uses an ATM of bank j , bank i must pay a fee f_{ij} to bank j . The setting of interchange fees is equivalent to the allocation of the total cost resulting from such a network, and the fee structure will be the result of a negotiation process involving the participating banks.

2 Game model

In this section, we consider the following ATM game assuming that :

1. \mathcal{N} be the set of players (banks) and L the set of locations (city, part of a city,...etc).
2. n_i^l the number of transactions from bank $i \in \mathcal{N}$ in location $l \in L$.
3. $n^l(S) = \sum_{i \in S} n_i^l$ is the number of transactions owned by S in location l , $\forall S \subseteq \mathcal{N}$.
4. Let A^l be the set of banks that have ATMs in location l , $A^l \subseteq \mathcal{N}$.
5. $L_1 := \{l \in L, |A^l| = 1\}$ be the set of locations where only one bank is represented, and let $L_M := \{l \in L, |A^l| > 1\}$ the set of places where several banks are represented. We assume that $L = L_1 \cup L_M$, i.e there are ATMs in all locations.

Regarding customer behavior, we assume that, if a coalition S has formed a network, we will have :

A1 : Transactions at a particular location will be processed by an ATM if one or more members of S have an ATM there.

A2 : When a customer of bank ($i \in S$) performs a transaction in location l , and if the bank has ATMs in location l , the customer will use one of the ATMs of bank i .

Transaction costs are assumed to be the same for all banks.

- The cost of the transaction will be α if the customer uses an ATM of his own bank.
- If he uses an ATM from another bank, the transaction cost will be β where $\beta > \alpha$.
- The cost of non-ATM transactions is complex, as there are several alternatives to using ATMs, such as withdrawing cash at the counter, writing a check to a third party in exchange for cash, or use of a repayment facility.

In Gow and Thomas's four banks example [4], the cost of over-the-counter cash withdrawal is used as an approximation of this cost. We assume that the cost of a non-ATM transaction is γ where $\gamma > \beta$. Suppose S forms a network. The assumptions **A1** and **A2** imply, for any location $l \in L$ and $S \subseteq \mathcal{N}$, that the total amount of transaction costs at location l is given by :

$$c^l(S) := \begin{cases} \sum_{i \in S \cap A^l} \alpha n_i^l + \sum_{i \in S \setminus A^l} \beta n_i^l & \text{if } S \cap A^l \neq \emptyset, \\ \sum_{i \in S} \gamma n_i^l & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

2.0.1 Example

Consider a location l where the three banks B_1 , B_2 et B_3 have customers. The number of transactions of customers of these banks at l is given as follows :

$$n_{B_1}^l = 150, n_{B_2}^l = 200, n_{B_3}^l = 250.$$

ATM or non-ATM transaction costs are given as follows :

- * $\alpha = 2$ for customers using ATMs of their own bank,
- * $\beta = 4$ if customers using ATMs of the other bank,
- * $\gamma = 10$ for non-ATM transactions.

Banks B_1 and B_3 have ATMs at location l , so we have $A^l = \{B_1, B_3\}$. Then, these parameters fix the cost set of the coalition c^l .

The cost at which coalition $\{B_1\}$ is able to serve all its customers is $c^l(\{B_1\}) = \alpha n_{B_1}^l = 300$, since $B_1 \in A^l$. Similarly, we calculate $c^l(\{B_3\}) = \alpha n_{B_3}^l = 500$. Since $B_2 \notin A^l$, we have $c^l(\{B_2\}) = \gamma n_{B_2}^l = 2000$.

The cost of serving customers of B_1 and B_2 together are $c^l(\{B_1, B_2\}) = \alpha n_{B_1}^l + \beta n_{B_2}^l = 300 + 800 = 1100$. The customers of B_1 and B_3 are all served by their own bank's ATM, hence $c^l(\{B_1, B_3\}) = \alpha(n_{B_1}^l + n_{B_3}^l) = 800$ and $c^l(\{B_2, B_3\}) = \alpha n_{B_3}^l + \beta n_{B_2}^l = 1300$. The cost associated with each coalition, as shown in the following table :

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1, B_2\}$	$\{B_1, B_3\}$	$\{B_2, B_3\}$	\mathcal{N}
$c^l(S)$	300	2000	500	1100	800	1300	1600

TABLE 1 – The values for c^l .

To link this game to reality, it would be appropriate to study the corresponding cost reduction game v^l .

Let $s_i^l = (\gamma - \beta)n_i^l$ the cost savings that occur if transactions from bank $i \in \mathcal{N} \setminus A^l$ can be processed through an ATM of another bank.

The single-location ATM game v^l is given by, for all $S \subseteq \mathcal{N}$.

$$v^l(S) = \sum_{i \in S} c^l(\{i\}) - c^l(S) = \begin{cases} \sum_{i \in S \setminus A^l} s_i^l & \text{if } S \cap A^l \neq \emptyset, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

Or

$$v^l(S) = \sum_{i \in S} c^l(\{i\}) - c^l(S) = \begin{cases} (\gamma - \beta)n_i^l(S \setminus A^l) & \text{if } S \cap A^l \neq \emptyset, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

The coalition cost savings for this example are shown in the table below.

Note that the cost savings, i.e. the values of v^l , come from the transactions of banks that do not have an ATM in the location l , i.e. the bank B_2 in this case. Note also that individual coalitions have zero values. Individual players spare no cost whether or not they have ticket ATMs.

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1, B_2\}$	$\{B_1, B_3\}$	$\{B_2, B_3\}$	\mathcal{N}
$S \setminus A^l$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	B_2	\emptyset	B_2	B_2
$v^l(S)$	0	0	0	1200	0	1200	1200

TABLE 2 – The values for v^l .

The ATM game v is obtained by aggregating over all locations, i.e. for each $S \subseteq \mathcal{N}$,

$$v(S) := \sum_{l \in L} v^l(S) = (\gamma - \beta) \sum_{l \in L: S \cap A^l \neq \emptyset} n^l(S \setminus A^l). \quad (4)$$

Or

$$v(S) := \sum_{l \in L} v^l(S) = \sum_{l \in L: S \cap A^l \neq \emptyset} s^l(S \setminus A^l). \quad (5)$$

Given the savings game (\mathcal{N}, v) , the core is given as follows :

$$\text{core}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(\mathcal{N}) = v(\mathcal{N}), x(S) \geq v(S), \forall S \subset \mathcal{N}\}.$$

If v has a non-empty core, then the value of τ , is given by

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \tau_i(v) = v(\mathcal{N}).$$

3 Allocation rules for ATM game

Two allocations will be defined and we also study their relation with the theoretical solutions of existing games. Consider the ATM game v defined by the equations (4) or (5).

3.1 The equal share rule

We first see an allocation rule that distributes the cost savings equally between the owners of the transactions and the owner of the ATMs. We have for each $i \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{l \in L_1} w_i^l + \sum_{l \in L_M} x_i^l \\ &= \frac{\gamma - \beta}{2} \sum_{l \in L_1: i \notin A^l} n_i^l + \frac{\gamma - \beta}{2} \sum_{l \in L_1: i \in A^l} n^l(\mathcal{N} \setminus \{i\}) \\ &\quad + (\gamma - \beta) \sum_{l \in L_M: i \notin A^l} n_i^l, \end{aligned} \quad (6)$$

with

$$w_i^l = \begin{cases} \left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) n^l(\mathcal{N} \setminus \{i\}) & \text{if } i = i^l, \\ \left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) n_i^l & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

$$x_i^l = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in A^l, \\ (\gamma - \beta) n_i^l & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

Proposition 3.1. [1] *If y results from the equal sharing rule, then $y = \tau(v)$.*

3.2 The transaction-based rule

Suppose banks with ATMs receive no reward for the cost savings they provide to banks without ATMs. Cost savings are rewarded by the bank that owns the transactions for which

the savings are made. Thus, for all $l \in L$, we choose x^l as defined by the formula (8), then we sum over the set of locations. This gives the allocation vector z given by, for each $i \in \mathcal{N}$,

$$z = \sum_{l \in L} x^l = (\gamma - \beta) \sum_{l \in L: i \notin A^l} n_i^l. \quad (9)$$

Proposition 3.2. [1] *If $L = L_M$, and y results from the transaction-based rule, then $core(v) = \{z\}$.*

We have established algorithms to calculate the values of the parameters :

- $c^l(S)$: The total transaction cost of the coalition S ,
- $v^l(S)$: Coalition cost savings,
- $v(S)$: The cost savings of the coalition S in several locations,
- w^l and x^l : Allocations,
- y and z : Distribution of cost savings,

in the case of several banks and locations and we have treated an example consisting of four banks.

4 Conclusion

In this work, we have studied the problem of cost allocation in a banking network, more precisely ATM networks, using the concepts of cooperative game theory. This study allowed us to see how the cost savings are distributed between banks that have ATMs and others to satisfy the financial transactions of the bank's various customers, according to the characteristics of each location in terms of the number of banks that have ATMs and the other banks that do not have but are in cooperation with it.

References

- [1] Bjrndal, E. , Hamers, H., Koster, M. : Cost allocation in a bank ATM network. *Math Meth Oper Res* **59** 405418 (2004).
- [2] Giannakoudi, S. : Internet banking : the digital voyage of banking and money in cyberspace. *Information and Communications Technology Law*. **39** 3, 205-243, (1999).
- [3] Hannan, T.H., Kiser, E.K., Prager, R.A., McAndrews, J.J. : To surcharge or not to surcharge : An empirical investigation of ATM pricing. *Review of economics and Statistics* **85** 4, 9901002 (2003).
- [4] Gow, S., Thomas, L. : Interchange fees for bank ATM networks. *Naval Research Logistics*, **45**, 407-417 (1998).
- [5] Muto, S., Nakayama, M., Potters, J., Tijs, S. : On big boss games. *The Economic Studies Quarterly*, **39** 4, 303-321 (1988).
- [6] Potters, J., Tijs, S.H. : Information market games with more than one informed player. *Methods of Operations Research*, **63**, 313-324 (1989).



CVaR-GARCH-Copula models in forecasting the market risk : Evidence from the exchange rate market

Fayçal Boumizem¹, Mohammed Bouznit², and Ali Zatout³

¹Laboratory of Organizational Economics and Sustainable Development, Université de Jijel ,
f.boumizem@univ-jijel.dz

²Laboratoire d'Economie et Développement, Université de Bejaia ,
mohammed.bouznit@univ-bejaia.dz

³Higher National School of Statistics and Applied Economics ,
latom67@yahoo.fr

Abstract : This study aims to empirically investigate the class of GARCH models combined with copula dependence modeling to forecast the Value at Risk (VaR) and the Conditional Value at Risk (CVaR) based on 11 years of daily returns from exchange rate market of three currencies ; EUR/CNY, USD/CNY and EUR/USD. Indeed, this approach has been adopted not only to forecast VaR and CVaR of bivariate portfolios, but also to compare the obtained results to those coming from the same portfolios without including the dependence structure modeling by using various recents backtesting procedure. The findings suggest that the dependency structure captured by the student copula are better compared to others copulas in the class of elliptical and archemidean copulas. Moreover, when we combine the AR(1)-GARCH(1,1) with the Student distribution and this copula, the predicted values of VaR and CVaR are more precise than those obtained without taking into account the dependency structure.

Keywords : VaR and CVaR ; GARCH Models ; Copula Theory ; Backtesting ; Exchange Rate.

1 Introduction

Over the last three decades, financial and monetary crisis became more frequent. The rise of volatility in times of crisis, correlated with the fall of the financial market price is particularly worrying. A typical example of this phenomenon is that of the 2008 subprime crisis, which announced the collapse of the US bank Lehman - Brothers disappeared on September 15, 2008.

Recently, according to the recommendations of the Bank for International Settlements (BIS) and Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), Risk prediction plays an important role in the financial industry and banking and the use of Value at Risk (VaR) as a measure of risk is the best way to guard against market risk (Du & Escanciano, 2017).

Moreover, the VaR is widely used by financial institutions, it is a common tool for measuring and managing risk for financial institutions, it has the advantage that having a simple and clear financial interpretation. However, VaR suffers from several limitations. Conceptually, the VaR is just a theoretical measure of a probable potential loss and focus only on measuring the distribution quantile, consequently, it fails to control for the tail of the distribution beyond the VaR under classical assumptions (such as normality) and gives no indication about the extent of these losses. Also, the VaR is not a coherent measure of risk because it does not satisfy the subadditivity condition which goes against the principle of diversification theory, this means that the risk of a portfolio can be larger than the sum of the risks of its components when measured by VaR which penalizes diversification theory (Artzner, Delbaen, Eber, & Heath, 1999 ; Rootzén & Kluppelberg, 1999 ; Acerbi & Tasche, 2002).

To overcome weaknesses of VaR, Acerbi and Tasche (2002) propose a new risk's measure called "Expected Shortfall" (ES) or "Conditional Value at Risk" (CVaR), it measures the expected loss of a position beyond a given confidence level, the ES has several suitable properties of a coherent and spectral risk's measure (Wei, 2021). It captures the risk more efficiently than the VaR and since that all switch from a Value-at-Risk (VaR) to an Expected Shortfall risk measurement approach under recommendations of Basel IV.

From a computational point of view, it seems that the VaR and ES calculations grow up from the simple procedures (i.e the historical simulation) to the more complicated ones (i.e Monte Carlo simulation, the EVT, Copula theory) in twenty-six years. Recently, The application of copulas in the estimation of th VaR was introduced for the first time by (Embrechts, Resnick, & Samorodnitsky (1999), Cherubini, Luciano, & Vecchiato (2004) summarized the applications of Copula in finance, Jondeau and Rockinger (2006), Chen and Fan (2006) and Fernandez (2008) popularize the model GARCH-Copula in modeling dependence structure between stocks markets.

The literature related to VaR and CVaR has experienced a spectacular abundance during the 2000s. McNeil and Frey (2000) attempt to estimate VaR and CVaR by fitting a GARCH model and after that they use the EVT to model the tail of the distribution of the innovations. The authors found that this approach is better suited for both VaR and CVaR and over perform the standard GARCH approach. Likewise, Pafka & Kondor (2001) analyze the performance of the RiskMetrics method on the 30 stocks of DJIA index. The obtained results show the usefulness in the estimation of the Value at Risk. Ghorbel & Trabelsi (2009) propose a method which combines time series, extreme value theory and copula models to estimate the Value at Risk of a portfolio. The results indicate that the conditional extreme value copula method offers reasonable and acceptable forecasts of VaR than others methods.

Recently, Zhang et Al. (2014) introduce C-Vine, D-Vine and R-Vine models to investigate the measurement of VaR and ES of the international stock index portfolio with Vine copula models. The authors found that the three vine copula models are able to effectively forecast the VaR and ES of the international stock markets portfolio according to the backtesting results. Yu et al. (2018) use the combination of GARCH-type-EVT models and vine copula methods to measure the VaR and ES of a portfolio consist of four crude oil assets. The main findings show that the adopted models can describe the portfolio risk accurately. Furthermore, Cerqueti, Giacalone, & Panarello (2019) employ a modified Gaussian Copula to evaluate the CVaR in the framework of portfolio theory ; they found that the performances of the new method surpass the classical ones for the dataset used in this study. Since then, this study combines between Copulas and GARCH models to predict the values of VaR and

CVaR for bivariate portfolios containing currencies. The suitability of GARCH-Copula class will be tested using several backtesting procedures.

The remainder of this study is structured as follows. Section 2 presents the methodology. The used data are presented in section 3, while the obtained results and discussions are provided in section 4. Finally, the main conclusions are reported in section 5.

2 Methodology

The accuracy of the estimated VaR and CVaR depend mainly on the used models. Moreover, for an adequate estimation of the VaR and CVaR, the characteristics of the financial series must be clearly defined. Therefore, our attention is drawn to two fundamental characteristics in this study :

- Leptocurticity : the empirical distributions of the yields exhibit an excess of Kurtosis (Kurtosis is greater than 3).
- The clustering of volatilities : that is, big changes tend to follow big changes and small changes tend to follow small ones.

Recently, many authors suggest that the most common way of treating leptocurticity is to assume an appropriate probability distribution (Fantazzini, 2009), and the effects of aggregation of volatility are reduced by allowing volatility to vary across time instead of constant volatility. So, the adopted methodology is similar to that employed by McNeil and Frey (2000), where the latter has had a lot of success recently in the empirical studies. It was used in several previous studies (Lima & Néri, 2007 ; Ghorbel & Trabelsi, 2009). Indeed, the used model in paper is composed from several parts. In the first part, we model the conditional mean, and then we introduced the conditional variance as the second part with different distributions, while the copula models are the last part of the studied model.

3 Used Data

The used data, which include three daily exchange rate currencies : the USD/CNY, EUR/CNY, and EUR/USD, coming from the database of Yahoo Finance website (<http://finance.yahoo.com/>) and covering the period from January 1, 2009, to September 27, 2019, constituting a total of 2802 observations. We divided the data into two subsamples : the in-sample period, from January 1, 2009, to December 31, 2015 with 1826 observations, is reserved to the estimations, while the out of sample period, from January 1, 2016, to September 27, 2019 with 976 observations will be used to assess the quality of the VaR and CVaR forecasting. For more details, the descriptive analysis of the used data is given as follows :

First, we examine the daily logarithm returns, defined as $r_t = (\log(p_t) - \log(p_{t-1})) \times 100$ where p_t is the closing price at the day t . The fact that working with the returns makes all series in a comparable metric and deals with the stationary concept, as can be seen from the point of view by making a comparison between the figures below.

It's worth noting that Figure 1 illustrates the evolution of the time series over the period study, It could be seen that the volatility clusters are clearly remarkable in the three time series of returns. In addition, the EUR/CNY and EUR/USD are more volatile than USD/CNY.

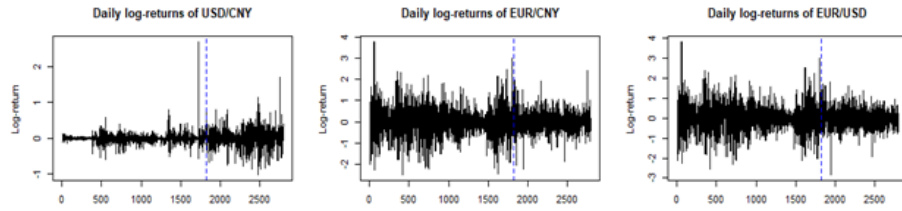


FIGURE 1 – Daily returns of the three foreign exchange rates
Source : elaborated by the authors

4 Empirical Results and Discussions

As mentioned in the methodology, we consider an estimation of CVaR based on AR(1)-GARCH(1,1) under the student distribution combined with copula model for three foreign exchange markets ; EUR/CNY, USD/CNY and EUR/USD. First, we estimate an AR(1)-GARCH(1,1) model under the student distribution for each time series using the rolling estimation procedure with a window of 1000 observations and forecasting the 1-day-ahead VaR and CVaR. In total, we have 976 forecasted values of VaR and CVaR at different significance level. At each estimation step, we use the best copula fitted for standardized residual series (the t-Copula in our case) after the transformation of margins to the uniform scale [0,1]. Estimating the copula's parameter will be performed by following two steps ; we simulate from the chosen copula 2802 bivariate standardized residuals and form 2802 equally weighted portfolios. Further detail, Table 1 shows the number of violations, cumulative violations and the critical violations of the three exchange rates' returns. We conclude that the used model to model each exchange rate separately is not enough suitable, because the violations aren't enough close to the theoretical number of violations especially at the coverage level of 5%. Further detail, we see that the average of violations on 976 one-day-ahead VaR forecasted is about 9 days for the three currencies. The USD / CNY is the farthest from the critical value of the violations with 11 exceptions, followed by EUR / CNY with 9 exceptions then by EUR / USD with at least 8 exceptions for the significance level of 5%. For the 1% level of significance, we see the same remark, for the cumulative violations, the results suggest that our used model to forecast CVaR is adequate and gives a suitable estimation of risks compared to effective losses.

TABLE 1 – Number of violations, violations and cumulative violations of time series

	USD/CNY	EUR/CNY	EUR/USD
V(5%)	60	40	41
CV(10%)	56.04	40.78	46.09
NV(5%)	48.80	48.80	48.80
V(1%)	12	10	7
CV(2.5%)	15.25	10.8	8.82
NV(1%)	9.76	9.76	9.76

Table 2 reports the p-values' backtest of Escansiano & Du (2017), conducted on the three series of returns, for VaR and CVaR at level of 10%, 2,5% for CVaR, and 5% and 1% for

VaR. It's clear that all p-Values are more than 5%, except one for the conditional backtest of CVaR(10%) of USD/CNY implying that the null hypothesis of an adequate rate of exceptions and independence between exceptions cannot be rejected for all exchange rate time series (except USD/CNY for CVaR(10%)). This means the used model to forecast the two measure of risk is very suitable.

In the next step, we re-estimate this model for three bivariate portfolios constructed from the three previous time series taking into account the copula and modeling the dependency structure. Then, we use the backtesting tests in view to judge whether the obtained results of the forecast accuracy of VaR and CVaR or not.

TABLE 2 – p-Values of backtesting CVaR and VaR on different currencies

		CVaR (10%)	CVaR (2,5%)	VaR (5%)	VaR (1%)
Unconditional	USD/CNY	0.2214	0.3208	0.1358	0.5155
	EUR/CNY	0.1119	0.6168	0.1556	0.9392
backtest	EUR/USD	0.5994	0.1720	0.2135	0.2954
Conditional	USD/CNY	0.0118	0.1505	0.1721	0.3384
	EUR/CNY	0.6796	0.9285	0.2686	0.9911
backtest (h=5)	EUR/USD	0.7610	0.9685	0.8616	0.9993
Robust	USD/CNY	0.7859	0.7747	0.6799	0.7629
Unconditional	EUR/CNY	0.1794	0.6419	0.2241	0.9431
	backtest	EUR/USD	0.6480	0.2136	0.2660
Robust	USD/CNY	0.5306	0.3242	0.1758	0.3385
Conditional	EUR/CNY	0.6838	0.9302	0.2695	0.9912
	backtest (h=5)	EUR/USD	0.7677	0.9700	0.8618

**, significant at the 1% level ; *, significant at the 5% level.

Regarding Table 3, it is clear that copula models combined with AR(1)-GARCH(1,1) and the student distribution provide more accuracy of VaR and CVaR which is translated by the number of violations and cumulative violation close to its theoretical compared to the case without considering the dependence structure.

TABLE 3 – Number of violations, violations and cumulative violations of portfolios with and without dependence structure modeling

	Without copula			With copula		
	Portfolio 01	Portfolio 02	Portfolio 03	Portfolio 01	Portfolio 02	Portfolio 03
V (5%)	44	37	39	48	40	44
CV (10%)	41,98	38,73	41,92	50,89	42,27	48,48
NV (5%)	48,80	48,80	48,80	48,80	48,80	48,80
V (1%)	10	6	9	17	9	4
CV (2.5%)	9,98	8,11	10,41	11,05	11,76	13,79
NV (1%)	9,76	9,76	9,76	9,76	9,76	9,76

Source : elaborated by the authors

Finally, Table 4 reports p-Values of backtesting CVaR and VaR according to the test of Escaniano and Du (2017). The findings show that all p-values of tests with respect to all portfolios VaR and CVaR estimation with copula are better than those obtained for the same portfolios without copula modeling. Further, we suggest that only portfolio including USD/CNY is suffering from an under-estimation of risk only if we leave the dependence outside our modeling. This is the consequences of the trade crisis between USA and China during the forecast

period of VaR and CVaR. Nevertheless, introducing the copula in the model, the forecasted VaR and CVaR are more accurate even in the crisis period.

The main conclusion of these results is, despite the presence of certain dynamics observed in the time series of returns of the currencies in question the chosen model, namely AR(1)-GARCH(1,1) model estimated under the Student distribution for the errors, captures with satisfactorily this dynamic. We have also combined this model with the copula models in order to forecast the value-at-risk and the conditional value-at-risk in a period characterized by disturbing turmoil in the forex market and the results are more accurate even in times of crisis such results is confirmed by backtesting tests.

TABLE 4 – p-values of backtesting CVaR and VaR on different portfolios with and without dependence structure modeling

		Portfolios	CVaR (10%)	CVaR (2,5%)	VaR (5%)	VaR (1%)
Without dependence structure modeling	Unconditional backtest	Portfolio 01	0,1824	0,3967	0,4592	0,9392
		Portfolio 02	0,0373	0,0772	0,0480	0,1238
		Portfolio 03	0,1694	0,5148	0,1094	0,7992
	Conditional backtest (h=5)	Portfolio 01	0,0615	0,6027	0,0384	0,9911
		Portfolio 02	0,6891	0,9948	0,8719	0,9999
		Portfolio 03	0,9549	0,9800	0,9706	0,9947
	Robust Unconditional backtest	Portfolio 01	0,2338	0,4396	0,5128	0,9424
		Portfolio 02	0,0748	0,1133	0,0942	0,1649
		Portfolio 03	0,2504	0,5384	0,1648	0,8115
	Robust Conditional backtest (h=5)	Portfolio 01	0,0669	0,6642	0,0401	0,9912
		Portfolio 02	0,7072	0,9952	0,8726	0,9999
		Portfolio 03	0,9580	0,9804	0,9708	0,9948
With dependence structure modeling	Unconditional backtest	Portfolio 01	0,7138	0,7718	0,9058	0,9392
		Portfolio 02	0,2059	0,8675	0,1556	0,2954
		Portfolio 03	0,9516	0,6119	0,4592	0,7071
	Conditional backtest (h=5)	Portfolio 01	0,9832	0,3811	0,9117	0,9911
		Portfolio 02	0,6082	0,8472	0,6189	0,9993
		Portfolio 03	0,2497	0,8945	0,4403	0,9869
	Robust Unconditional backtest	Portfolio 01	0,7392	0,7898	0,9138	0,9421
		Portfolio 02	0,2757	0,8822	0,2218	0,3278
		Portfolio 03	0,9596	0,6409	0,5149	0,7176
	Robust Conditional backtest (h=5)	Portfolio 01	0,9847	0,3845	0,9115	0,9913
		Portfolio 02	0,6143	0,8516	0,6194	0,9993
		Portfolio 03	0,2704	0,8957	0,4419	0,9873

** , significant at the 1% level ; * , significant at the 5% level.

We also conduct the McNeil and Frey (2000) test of CVaR on the three exchange rates and the three portfolios with and without copulas models ; the bootstrapped p-values of the test are reported in Table 5. Wereject the null hypothesis that the excess of actual time series when the VaR is violated is i.i.d and has zero mean for the nine series' return (three exchange rate returns, three portfolios returns without copula and three portfolios return with copula modeling) at 1% significance level VaR estimation. This means that CVaR is systematically underestimated at this level estimation even if we take into account the dependence structure, however, this is not true for the 5% significance level, and the CVaR is just estimated when we introduce the dependence structure on the basic model almost for all time series as the test show in Table 5 below.

In summary, all obtained results in this study are in line with those obtained in the pre-

TABLE 5 – Bootstrapped p-values of McNeil and Frey test

	1%	5%
Exchange rate return		
USD/CNY	0,0002	0,0161
EUR/CNY	0,0039	0,0001
EUR/USD	0,0216	0,0014
Portfolios return without copulas		
Portfolio 01	0,0062	0,0002
Portfolio 02	0,0198	0,0005
Portfolio 03	0,0073	0,0007
Portfolios return without copulas		
Portfolio 01	0,0001	0,0000
Portfolio 02	0,0118	0,0018
Portfolio 03	0,4455	0,0000

vious studies (Du & Escanciano, 2017; McNeil & Frey, 2000). We proved that the AR(1)-GARCH(1,1) model with the Student Distribution combined and the Student copula model is more flexible in quiet periods like in agitated periods. The dependence between assets is the key to a successful modeling of financial time series, especially for the forecasting purposes.

5 Conclusions

Both VaR and CVaR are widely used to measure financial risks; however the accuracy of their estimation is important insofar that provides more information for risk managers. In this research, we tried to study the validity of the GARCH model combined with copula models to forecast the market risk using a series of tests. The risk measure used in this study is the conditional value at risk, in more precision, we introduce the AR(1)-GARCH(1,1) estimated under the student distribution combined with the student copula model to forecast the CVaR. This model incorporates some features liked to the dynamic observed in markets such as clustering and fat-tailed disturbances.

We found that the used approach in our research provides more precise forecast of VaR and CVaR since it takes into account the dependence structure or the relation between assets in the portfolio. These results are confirmed by two backtesting procedures.

Despite the effectiveness of our approach, the article has some limits, we consider in our paper only the AR(1)-GARCH(1,1) model with the student distribution and the student copula for dependence structure. Future researches may investigate further models that overpowered the GARCH(1,1) model with other different distribution and other copula models

References

- [1] Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *J. Bank. Financ.*, 1487-1503. doi :[https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00283-2](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00283-2)
- [2] Cerqueti, R., Giacalone, M., & Panarello, D. (2019). A Generalized Error Distribution Copula-based method for portfolios risk assessment. *Physica A*, 524, 687-695. doi :<https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.04.077>

- [3] Chen, X., & Fan, Y. (2006). Estimation of copula-based semi-parametric time series models. *J. Econometrics*, 130(2), 307-335. doi :<https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.03.004>
- [4] Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. Chichester : Wiley.
- [5] Du, Z., & Escanciano, J. (2017). Backtesting Expected Shortfall : Accounting for Tail Risk. *Manag. Sci.*, 63(4), 940-958. doi :<https://doi.org/10.1287/mnsc.2015.2342>
- [6] Embrechts, P., Resnick, S., & Samorodnitsky, G. (1999). Extreme Value Theory as a Risk Management Tool. *N. Amer. Actuar. J.*, 3(2), 30-41. doi :<https://doi.org/10.1080/10920277.1999.10595797>
- [7] Fantazzini, D. (2009). The effects of misspecified marginals and copulas on computing the value at risk : A Monte Carlo study. *Comput. Statist. Data Anal.*, 53(6), 2168-2188. doi :<https://doi.org/10.1016/j.csda.2008.02.002>
- [8] Fernandez, V. (2008). Copula-based measures of dependence structure in assets returns. *Physica A*, 387(14), 3615-3628. doi :<https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.02.055>
- [9] Ghorbel, A., & Trabelsi, A. (2009). Measure of financial risk using conditional extreme value copulas with EVT margins. *J. Risk*, 11(4), 51-85. doi :<https://doi.org/10.21314/JOR.2009.196>
- [10] Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). The Copula-GARCH model of conditional dependencies : An international stock market application. *J. Int. Money Finance*, 25(5), 827-853. doi :<https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2006.04.007>
- [11] Lima, L. R., & Néri, B. (2007). Comparing Value-at-Risk Methodologies. *Braz. Rev. Econometrics*, 27(1), 1-25.
- [12] McNeil, A., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series : an extreme value approach. *J. Empir. Finance*, 7(3-4), 271-300. doi :[https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(00\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8)
- [13] Pafka, S., & Kondor, I. (2001). Evaluating the RiskMetrics methodology in measuring volatility and Value-at-Risk in financial markets. *Physica A*, 299(1-2), 305-310. doi :[https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00310-7](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00310-7)
- [14] Rootzén, H., & Kluppelberg, C. (1999). A Single Number Can't Hedge Against Economic Catastrophes. *AMBIO : J. Hum. Environ.*, 550 - 555.
- [15] Yu, W., Yang, K., Wei, Y., & Lei, L. (2018). Measuring Value-at-Risk and Expected Shortfall of crude oil portfolio using extreme value theory and vine copula. *Physica A*, 490, 1423-1433. doi :<https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.064>
- [16] Zhang, B., Yu, W., Jiang, Y., Xiaodong, L., & Zhenfeng, P. (2014). Forecasting VaR and ES of stock index portfolio : A Vine copula method. *Physica A*, 416, 112-124. doi :<https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.08.043>



On nonparametric kernel regression estimation for functional stationary ergodic data: A short overview

Abd elbasset Djeniah

Laboratory of Stochastic Models, Statistic and Applications, University of Saida-Dr. Moulay Tahar. B. P.
138, En-Nasr, Saida, Algeria
abdelbasset.djeniah@univ-saida.dz

Abstract : In this paper, we give a brief overview on nonparametric regression estimation for functional stationary ergodic data. Specifically, the kernel type estimator of the regression operator for functional stationary ergodic data, in different cases ; complete data, missing at random (MAR), and censored data, is presented. Based on the literature, important asymptotic properties of the estimator are given.

MSC: 62G20 ; 62N01 ; 62P30 ; 62M10

Keywords : Regression operator ; functional data ; kernel estimator ; ergodic process.

1 Introduction

Over the last two decades, the statistics literature on the nonparametric functional statistics analysis was extensive. The reader can be referred to [9, 21, 10, 12, 6, 18, 4, 24] for an overview on the subject.

The problem of regression has attracted a considerable attention and generated an extensive research studies over time. For a comprehensive literature on the topic, we may refer to [7, 12, 20, 3, 5, 23, 19]).

This work provides a short overview on the nonparametric estimation of regression function at which the covariate is functional and the data are sampled from a stationary and ergodic process. For an interesting discussion about the ergodic theory, we refer to [14, 15]. The article is organized as follows : In Section 02, we present basic results of functional regression model. Section 03 is devoted to the nonparametric regression estimation whenever functional stationary ergodic data are considered. For this model, three cases are examined ; complete data, missing at random and censored data. Finally, some comments on the presented results are given in Section 04.

2 Basic results of functional regression model

Consider the regression model defined by

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

where $m(X) = \mathbb{E}(Y|X)$ is the regression operator of Y given X and (X_1, \dots, X_n) is a sample of independent variables taking values in some infinite-dimensional space \mathcal{H} . Here, we assume that (Y_1, \dots, Y_n) are i.i.d. real variables. Then, the functional kernel estimate is given as

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K \left\{ \frac{x - X_i}{h} \right\}}{\sum_{i=1}^n K \left\{ \frac{x - X_i}{h} \right\}}, \quad (2)$$

where K is kernel function and $h = h_n$ is a sequence of positive real numbers such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$. [10] showed under mild conditions on K and h the almost complete pointwise rates of convergence, that is for any $x \in \mathcal{H}$:

$$\hat{m}(x) - m(x) = O(h^\beta) + O_{a.c.o.} \left(\sqrt{\frac{1}{n\phi_x(h)}} \right)$$

with $\phi_x(h) = \mathbb{P}(d(X, x) \leq h)$ and d is a pseudo-distance of the functional space \mathcal{H} .

Under general conditions, it has been proved in [11] that the uniform rates of convergence are given as :

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |\hat{m}(x) - m(x)| = O(h^\beta) + O_{a.c.o.} \left(\sqrt{\frac{\log N_{\mathcal{C}} \left(\frac{\log n}{n} \right)}{n\phi_x(h)}} \right),$$

where \mathcal{C} is a subset of a semi-metric space \mathcal{H} and $N_{\mathcal{C}}(\varepsilon)$ is the minimal number of balls of radius ε which are necessary to cover the set \mathcal{C} .

3 Regression function estimator for functional stationary ergodic data.

For $x \in \mathcal{H}$ (separable Hilbert space), a well known kernel-type estimator of $m(x)$ is presented as in (2) where $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ is a sequence of stationary and ergodic functional random samples with distributed as pair (X, Y) , such that Y_i is a real valued random variable and X_i takes value in \mathcal{H} with the norm $\|\cdot\|$ generated by an inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Let \mathcal{F}_i be the σ -field generated by $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_{i-1}, Y_{i-1})\}$. For $x \in \mathcal{H}$, let $D_i = d(x, X_i) = |x - X_i|$, $F_x(u) = \mathbb{P}(D_i \leq u) = \mathbb{P}(X \in B(x, u))$ and $F_x^{\mathcal{F}_{i-1}}(u) = \mathbb{P}(D_i \leq u | \mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{P}(X \in B(x, u) | \mathcal{F}_{i-1})$ be the distribution function and the conditional distribution function, given the σ -field \mathcal{F}_{i-1} , of $(D_i)_{i \geq 1}$, respectively.

In the case of complete data, the pointwise rate of almost sure convergence for the kernel regression estimate has been shown in [15]. Under general hypotheses and conditions

$\lim_{n \rightarrow \infty} n\phi(h) = \infty$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n\phi(h)\}^{-1} \log n = 0$, it has been proved that :

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |\hat{m}(x) - m(x)| = O_{a.s.}(h^\beta) + O_{a.s.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}}\right).$$

A uniform version of this result over the subset \mathcal{C} ; a class of elements in the functional space \mathcal{H} , has been also given in [15]. Under general assumptions, conditions $\frac{\log N(\eta, \mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})}{n\lambda_n^2\phi(h)} = 0$ and $\sum_{n \geq 1} \exp(-\lambda_n^2 O(n\phi(h))) < \infty$, it has been proven that

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} |\hat{m}(x) - m(x)| = O_{a.s.}(h^\beta) + O_{a.s.}(\lambda_n),$$

where for any $\eta > 0$, $N(\eta, \mathcal{C}, d) = \min \left\{ n : \exists c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C} \forall x \in \mathcal{C} \exists k \in \{1, \dots, n\} d_{\mathcal{C}}(x, c_k) < \eta \right\}$ is a number which measures how full is the class \mathcal{C} and λ_n is a sequence of positive real numbers that tends to zero, as $n \rightarrow \infty$ and $\eta = \eta_n = o(h)$.

3.1 The case of missing at random data

In incomplete case with MAR for the response variable, we have incomplete sample of size n from (X, Y, δ) which is denoted by $\{(X_i, Y_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$ where $\delta_i = 1$ if Y_i is observed, and $\delta_i = 0$ otherwise. Meanwhile the Bernoulli random variable δ is satisfied with

$$\mathbb{P}(\delta = 1 | X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\delta = 1 | X = x) = \pi(x) = \pi(x),$$

where $\pi(x)$ is a functional operator. This condition shows that δ and Y are conditionally independent given X . Based on the incomplete data $\{(X_i, Y_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$, the new functional estimator of $m(x)$ adapted to MAR response can be defined as

$$\tilde{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i Y_i K\left\{\frac{x - X_i}{h}\right\}}{\sum_{i=1}^n \delta_i K\left\{\frac{x - X_i}{h}\right\}}.$$

Under general assumptions and condition $\frac{n\phi(h)^{2\beta}}{\log \log n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, the convergence rate in probability of the estimator $\tilde{m}(x)$ has been showed in [16] :

$$\left(\sqrt{\frac{n\phi(h)}{\log \log n}}\right) \tilde{m}(x) - m(x) \xrightarrow{P} 0. \tag{3}$$

Further, under general hypotheses and the following condition

$$h^\beta \sqrt{n\phi(h)} \rightarrow n \text{ as } n \rightarrow \infty, \tag{4}$$

[16] showed that

$$\sqrt{n\phi(h)} \{\tilde{m}(x) - m(x)\} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)), \tag{5}$$

where \xrightarrow{D} means the convergence in distribution, f a deterministic nonnegative bounded function, τ_0 a nondecreasing bounded function, and $\sigma^2(x) = \frac{M_2 V(x)}{M_1^2 \pi(x) f(x)}$ with

$$M_j = K^j(1) - \int_0^1 (K^j)'(u) \tau_0(u) du, \tag{6}$$

for $j \in \{1, 2\}$.

3.2 The case of random censorship

Suppose that $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ is a sequence of i.i.d. censoring random variables with common unknown continuous distributed function G . We observe only the n pairs (Z_i, δ_i) with $Z_i = \min\{Y_i, C_i\}$, and $\delta_i = I_{\{Y_i \leq C_i\}}$ for $i = 1, 2, \dots, n$, where I_A denotes the indicator function of the set A . We assume that $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ and $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ are independent. Based on $(X_i, Z_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}$, the estimator of $m(x)$ is constructed as follows :

$$\tilde{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i K \left\{ \frac{x - X_i}{h} \right\}}{\sum_{i=1}^n K \left\{ \frac{x - X_i}{h} \right\}}, \quad (7)$$

where $\tilde{Y}_i = \delta_i Z_i \bar{G}^{-1}(Z_i)$ with $G(\cdot) = 1 - G(\cdot)$. As $G(\cdot)$ is unknown, it is not possible to employ the estimator (8) in practice. Thus, $G(\cdot)$ is replaced with its Kaplan-Meier estimator defined as :

$$\bar{G}_n(t) = 1 - G_n(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1 - \delta_{(i)}}{n - i + 1} \right)^{I_{\{Z_{(i)} \leq t\}}}, & \text{if } t < Z_{(n)}; \\ 0, & \text{if } t \geq Z_{(n)}, \end{cases}$$

where $Z_{(1)} < Z_{(2)} < \dots < Z_{(n)}$ are the order statistics of Z_i and $\delta_{(i)}$ is the concomitant of $Z_{(i)}$. Therefore, a the estimator of $m(x)$ is defined as :

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i K \left\{ \frac{x - X_i}{h} \right\}}{\sum_{i=1}^n K \left\{ \frac{x - X_i}{h} \right\}},$$

where $\hat{Y}_i = \delta_i Z_i \bar{G}_n^{-1}(Z_i)$.

Under some hypotheses and the following condition

$$\frac{\log n}{n\phi(h)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

it has been shown in [17] that

$$\hat{m}(x) - m(x) = O_{a.s.} \left(h^\beta \right) + O_{a.s.} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h)}} \right). \quad (9)$$

The asymptotic normality of the estimator has also been given by [17]. Under some hypotheses, conditions (4) and (8), we have

$$\sqrt{n\phi(h)} \{ \hat{m}(x) - m(x) \} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x)), \quad (10)$$

where f a deterministic nonnegative bounded function, τ_0 a nondecreasing bounded function, and $\sigma^2(x) = \frac{M_2 V(x)}{M_1^2 f(x)}$ with M_j given in (6).

4 Comments on the results established

- The result presented in (9) extends the result established in the complete observations (see Theorem in [15]) to the case where the response variables are of random right censorship. It is well observed that the convergence rate of the estimator $\hat{m}(x)$ is similar to that in complete case
- The result given in (10) extends the result done in Theorem 1 presented by [14] to the case where the response variables are random right censorship.
- The results established in (3) and (5) have been further extended in Theorem 1 and Theorem 2, respectively, given in [2] to the case where when the observations are linked by the single index structure.

References

- [1] Aboubacar, A., Chaouch, M. : Real-time estimation for functional stochastic regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **90**, 9, 1705-1732(2020).
- [2] Akkal, F., Meghnafi, M., Rabhi, A. : missing At random in nonparametric regression for functional stationary ergodic data in the functional index model. *MathLAB Journal*. **5**, 1, 384-398(2018).
- [3] Boente, G., Vahnovan, A. : Strong convergence of robust equivariant nonparametric functional regression estimators. *Statist Probab Lett*. **100**, 1–11(2015).
- [4] Bouchentouf, A.A., Chaouch, M., Rabhi, A., Traore, A. : Single functional index quantile regression under general dependence structure. *Journal of Nonparametric Statistics*. **32**, 3, 725-755(2020).
- [5] Chagny, G., Roche, A. : Adaptive estimation in the functional nonparametric regression model. *J Multivariate Anal*. **146**, 105–118(2016).
- [6] Cuevas, A. : A Partial overview of the theory of statistics with functional data. *Journal of Statistical Planning and Inference*. **147**, 1–23(2014).
- [7] Delsol, L. : CLT and Lq errors in nonparametric functional regression. *C R Math Acad Sci Paris*. **345**, 7, 411–414(2007).
- [8] Ezzahrioui, M., Ould-Saïd, E. : Asymptotic normality of a nonparametric estimator of the conditional mode function for functional data. *J. Nonparametric. Statist*. **20**, 3–18(2008).
- [9] Ferraty, F., Vieu, P. : Nonparametric models for functional data, with applications in regression, time series prediction and curve discrimination. *The international conference on recent trends and directions in nonparametric statistics. J. Nonparametric Statist*. **16**, 111–125(2004).
- [10] Ferraty, F., Vieu, P. : Nonparametric functional data analysis. Theory and practice, Springer Series in Statistics. Springer, New York (2006).
- [11] Ferraty, F., Laksaci, A., Tadj, A., Vieu, P. : Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables. *J Statist Plann Inference*. **140**, 2, 335–352, (2010).
- [12] Geenens, G. : Curse of dimensionality and related issues in nonparametric functional regression. *Stat Surv*. **5**, 30–43(2011).

- [13] Hall, P., Heyde, C. : Martingale limit theory and its application. Academic Press, New York(1980).
- [14] Laïb, N., Louani, D. : Nonparametric kernel regression estimation for functional stationary ergodic data : asymptotic properties. *Journal of Multivariate Analysis*. **101**, 10, 2266–2281(2010).
- [15] Laïb, N., Louani, D. : Rates of strong consistencies of the regression function estimator for functional stationary ergodic data. *Journal of Statistical Planning and Inference*. **141**, 1, 359-372(2011).
- [16] Ling, N., Liang, L., Vieu, P. : Nonparametric regression estimation for functional stationary ergodic data with missing at random. *Journal of Statistical Planning and Inference*. **162**, 75–87 (2015).
- [17] Ling, N., Liu, Y., P. Vieu. : Ling, N., Liu, Y. : The kernel regression estimation for randomly censored functional stationary ergodic data. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. **46**, 17, 8557–8574 (2017).
- [18] Ling, N., Vieu, P. : Nonparametric modelling for functional data : Selected survey and tracks for future. *Statistics*. **52**, 934-949(2018).
- [19] Ling, N., Meng, S., Vieu, P. : Uniform consistency rate of kNN regression estimation for functional time series data. *Journal of Nonparametric Statistics*. **31**, 2, 451-468 (2019)
- [20] Liu, Q., Zhao, S. : Pointwise and uniform moderate deviations for nonparametric regression function estimator on functional data. *Statist Probab Lett*. **83**, 5, 1372–1381(2013).
- [21] Masry, E. : Nonparametric regression estimation for dependent functional data : asymptotic normality. *Stochastic Process. Appl.* **115**, 155–177 (2005).
- [22] Ramsay, J., Silverman, B. W. : *Functional data analysis*. Springer Series in Statistics, New York(2005).
- [23] Raña, P., Aneiros, G., Vilar, J., Vieu, P. : Bootstrap confidence intervals in functional nonparametric regression under dependence. *Electron J Statist*. **10**, 2, 1973–1999(2016).
- [24] Sang, P., Cao, J. : Functional single-index quantile regression models. *Statistics and Computing*. **30**, 771–781(2020).



Performance Evaluation of a Production Line via Petri Nets: Case of the AMIMER ENERGIE Company

Sedda Hakmi ^{*1}, Halima Keddouh¹, Fahimai Djouadi¹, and Djamil Aïssani¹

¹LaMOS Research Unit, University of Bejaia, Algeria,
sedda.hakmi@univ-bejaia.dz, halimakeddouh@gmail.com, djouadifahima1995@gmail.com,
djamil.aissani@univ-bejaia.dz.

Abstract : The analysis of the production system for generator sets at AMIMER ENERGIE presents difficulties since the description of the system status must take into account the information of each part of the frame. Thus, the high waiting times for some pre-stocks and the missed delivery deadlines will affect the company's production efficiency.

In this paper, we have focused on the modelling and performance analysis of the chassis production line at the level of the boiler shop. We first proposed a detailed modelling of this system using Petri nets. This tool allowed us to obtain a detailed and semantically accurate analysis of the production of the frames. Secondly, we calculated performance indices that allowed us to see the influence of the variation of the inter-arrival rate and the service rates on the system performance. The interpretation of the results obtained indicates the measures to be taken to meet the company's objectives

Keywords : AMIMER ENERGIE company ; Production system ; Modelling ; Performance evaluation ; Petri nets

1 Introduction

For several years, the context of globalization and increased competition have defined a new economic and industrial order for goods producing companies. Indeed, these companies are daily confronted with the need to control and improve the performance of all their processes in order to guarantee their durability and competitiveness[5]. In this environment, each company must optimise customer satisfaction and improve its overall performance by improving the "quality, cost, time" [6]. This is particularly the case for a production line, as performance improvement has always been an important objective since humans have been making objects.

*Corresponding Author

AMIMER ENERGIE is the Algerian leader in the design, manufacture and installation of all-power generators [7]. In order to better position itself in a market subject to strong competition, the company AMIMER ENERGIE is considering making certain modifications to its production management system because it is encountering certain blocking problems in its production plan, such as bottlenecks (long waiting times at the level of certain pre-storage, delivery deadlines that are not respected, etc.), which are problems that can be solved by using the methods and techniques of Operations Research.

In the production plan of AMIMER ENERGIE, the managers identified several bottlenecks, such as : overproduction, unnecessary movements and treatments, under-utilisation of skills, long waiting times for some pre-storage, etc. All these factors affect the efficiency of the production process. To overcome some of these problems (blockages), we propose in this work a study of the performance of the production chain of AMIMER ENERGIE company via Petri nets tool are a high-level graphical formalism, which allows an easier description of complex systems behavior [3, 4, 2].

These networks are graphical and mathematical tools for modelling and verifying the dynamic behaviour of complex systems, including production systems, computer and telecommunications systems, transport networks, etc. A crucial point that is inherent in PN is that they can be extended as required. In addition to its various analytical features, it offers the possibility of qualitative analysis (modelling the dynamic behaviour of a repairable system in the presence of faults) [1].

2 Production line

The generating set is composed of several parts that are produced and assembled by different workshops : boiler making, electrical engineering, mechanical assembly, electromechanical assembly, test bench

In this work, the study was devoted only to the boiler making workshop.

2.1 Boilermaking workshop

This workshop covers all the activities of implementation of any type of metal (sheets, angles, UPN...) in sheets of tubes constituting a finished product for this workshop but a semi-finished product for the production unit. It consists of three sections : Cutting, Welding, Painting.

2.2 Presentation

We shall observe the stages of transformation of a part in the different sections of the boiler making workshop, see FIGURE 1.

When a part arrives in the boiler room, it passes through several machines to undergo various transformations in order to obtain a semi-finished product. Then, after undergoing these transformations, it will be transferred either to other sections of the same workshop or to other workshops. The description and analysis of the different stages of transformation of the parts in the workshop allow us to model this situation.

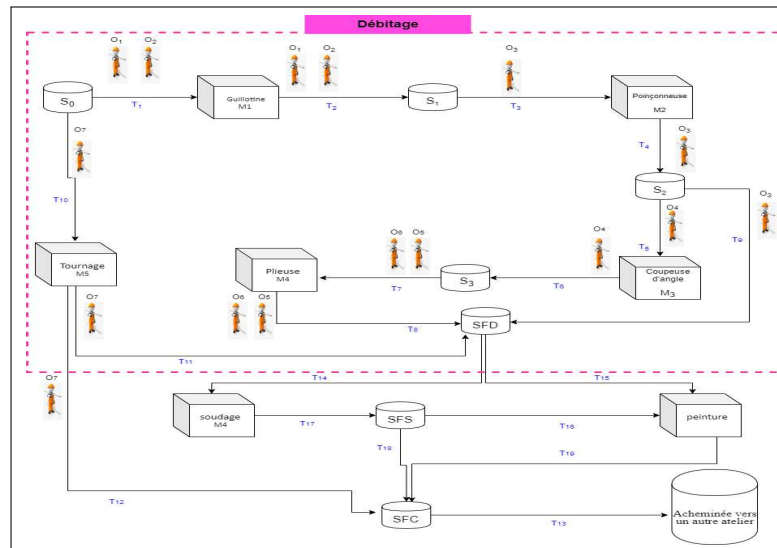


FIGURE 1 – Diagram of the process of transformation of parts in the boiler room.

- The production system operates from 8 am to 4.30 pm, with a one-hour break from 12 pm to 1 pm. During this period, the machines are not running, although there are products in the system.

- The arrival time of the parts differs. That is, the arrival efficiency is higher in the morning from 8 am to 11 am. It decreases from 11 am to 12 pm and becomes low from 1 pm to 4.30 pm. These parts are stored in one of the storage areas : $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$, SFD (cutting section final stock), SFS (welding section final stock) et SFC (boiler room final stock).

- The parts are transferred by operators ($O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ et O_7) who are distributed over the five machines : M_1 (Guillotine), M_2 (Punching machine), M_3 (Angle cutter), M_4 (Folding machine) and M_5 (Turning).

- To produce a certain product X , an unprocessed part (sheet metal) is taken from the stock S_0 . It is transferred by the two operators O_1 and O_2 to the machine M_1 where it undergoes the first transformation. Once this operation is completed, the part is transported by the same operators to stock S_1 . Operator O_3 retrieves the part from stock S_1 and places it in machine M_2 where it undergoes the second transformation. Then, it will either be sent to another section of the same workshop, or it will be transferred to machine M_3 by operator O_4 where it will undergo the third transformation. The part arrives at machine M_4 , by operators O_5 and O_6 , to undergo the last operation. Finally, the finished product X is transported by operators O_5 and O_6 to the finished product stock in the cutting section. While some parts go directly from the S_0 stock to the M_5 machine where they undergo a transformation. Then, these parts are transported by operator O_7 to SFD and then to the other sections of the same workshop

Since the assignment of a part to the angle milling machine and the lathe is very rare, they

had to be ignored. This allowed us to propose a new scheme given by the following figure :

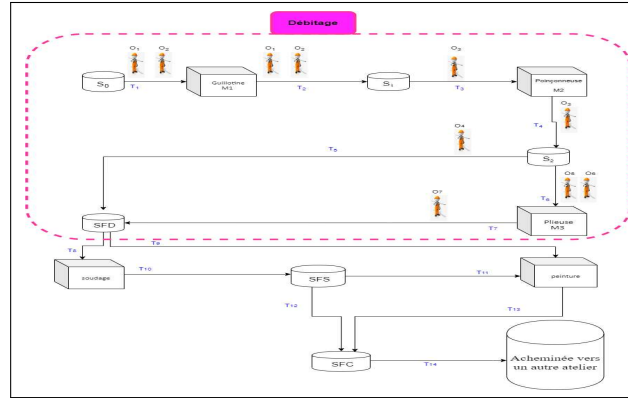


FIGURE 2 – Simplified diagram of the parts transformation process in the boiler room.

2.3 The problem

The current environment of generator production is characterised by highly competitive markets. Customer requirements and expectations are becoming more and more demanding in terms of quality, cost and delivery times. Indeed, it can be difficult to pre-assess the correct way to eliminate those bottlenecks that affect the production workflow. To do this, it is necessary to focus on those items that slow down production and propose all possible solutions. In order to better position itself in such a highly competitive market, AMIMER ENERGIE is considering improving its production management system because it is encountering some bottleneck problems in its production plan. Among the problems identified by the managers are :

- Anarchic management of storage of semi-finished products.
- Frequent stock-outs in the warehouse of certain components and elementary parts at the start of production.
- Frequent breakdowns of certain machines in the production line.
- Non-optimal allocation of manpower in some workshops.
- Very high waiting times for parts in the welding and painting sections.

To overcome some of these problems (blockages), we propose in this work a study of the performance of the production chain of the company AMIMER ENERGIE via the mathematical and graphic tool of modelling and analysis which is the Petri nets.

3 The transformation process Petri model of chassis parts

In this section, we will detail the path of each part of a chassis via the (PN), (see Figure 3). The capacity of the population is represented by the positive integer parameter N which

appears as the initial marking of the P_{S0} place.

In this model we have two categories of places such as :

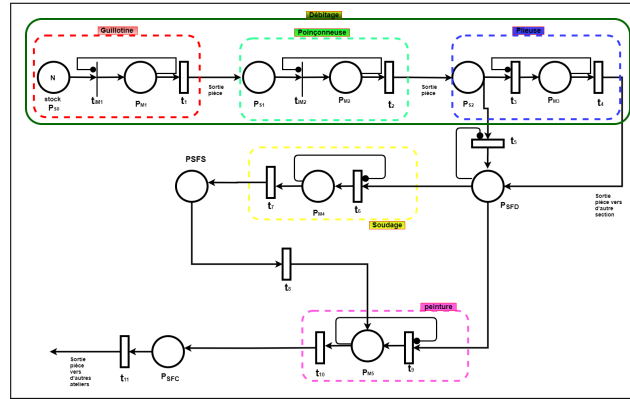


FIGURE 3 – PN modelling the process of transformation of the parts of a chassis in the boiler room.

- Category 1 : The places P_{S0} ; P_{S1} ; P_{S2} ; P_{SF0} ; P_{SF1} ; P_{SF2} ; P_{SF3} ; P_{SF4} ; P_{SF5} ; P_{SF6} ; P_{SF7} ; P_{SF8} ; P_{SF9} ; P_{SF10} ; P_{SF11} which represent the intermediate stocks and the input and output stocks.
 - Category 2 : places P_{M1} ; P_{M2} ; P_{M3} ; P_{M4} ; P_{M5} which represent machines.
 - $T_{iM} = \{t_{iM1} ; t_{iM2}\}$ is a set of two immediate transitions, such that :
 - t_{iM1} : represents the arrival of a workpiece at machine 1.
 - t_{iM2} : represents the arrival of a part at machine 2.
 - $T = \{t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; t_6 ; t_7 ; t_8 ; t_9 ; t_{10} ; t_{11}\}$ is a set of timed transitions, such that :
 - t_1 : represents the service of machine 1 (cutting the sheet).
 - t_2 : represents the service of machine 2 (punching the sheet).
 - t_3 : represents the arrival of the part at machine 3.
 - t_4 : represents the service of machine 3.
 - t_5 : represents the arrival of the part at P_{SF0} stock.
 - t_6 : represents the arrival of the part at machine 4.
 - t_7 : represents the service of machine 4 (welding the parts).
 - t_8 : represents the arrival of the part at machine 5 via PSFS.
 - t_9 : represents the arrival of the part at machine 5 via PSFD.
 - t_{10} : represents the service of machine 5 (paint work).
 - t_{11} : represents the total service of the boiler workshop.
- Note** : the inhibiting arc allowing the test at zero, which indicates one of the conditions for crossing the transition is that the place contains no tokens.

4 Modelling the production process of a "2" range chassis via Petri nets (PN) :

The description given in the previous section, the complexity of the studied process, as well as the presence of the phenomena of parallelism and resource sharing, led us to call upon PN for an adequate and valid evaluation of the various performance indices. For this

purpose, the Petri Net V12 module of the GRIF software was used.

This section is devoted to presenting the results we obtained by evaluating the performance of our production system.

For this purpose, we considered four cases according to the parameters to be varied :

Case 1 : Evaluate the performance of our production line in its current state (real case).

Case 2 : Evaluate the performance of our production line by varying the service rates.

Case 3 : Evaluate the performance of our production line by varying the rates of inter-arrival.

Case 4 : Evaluate the performance of our production chain by varying the service rates and the inter-arrival rates.

5 Conclusion

In this work, we have modelled the production system of the boiler workshop of the AMIMER ENERGIE company via the PN. This model allowed us to better visualise all the manufacturing stages of a chassis from the arrival of the raw material (sheet metal) to the painting. In a second step, we were able to evaluate the main performance indices using the GRIF software. Indeed, we noticed that the waiting time for parts in the welding and painting sections is very high and the layout of the six welding stations is insufficient to meet the production needs. This led us to vary the service rates and inter-arrival rates in these two sections to eliminate the bottlenecks. We found the ideal parameters that minimise the waiting time, and consequently minimise the manufacturing time of a chassis. The results we obtained show that we can go from manufacturing three and a half units per day to four units per day. nce of all workshops.

References

- [1] A. Aissani et D. Aissani. Réseau de File d'Attente. Institut d'Informatique, U.S.T.H.B. Alger, 1988.
- [2] G. Balbo, M. Ajmone and G. Conte. Performance Models of Multiprocessor Systems. The MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [3] R. David and H. Alla. "Du Grafcet aux Réseaux de Petri. Herms Science Publications", 2 edition, 2001.
- [4] S. Hakmi, O.Lekadir and D. Aissani. Analysis of priority queue with repeated attempts using generalized stochastic petri nets. Miskolc Mathematical Notes, 20(2) :925 DOI :10.18514/MMN.2019.2620, 2019
- [5] M. Meunier. Optimiser les Processus et les Ressources de Production. Les dossiers, Pôle Productique, Rhône Alpes, 2003.
- [6] O. Senechal. Pilotage des Systmes de Production vers la Performance Globale. Habilitation diriger des recherches, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2004.
- [7] <https://www.amimer.com/>. octobre,2020.



Outlier Detection Methods for Exponential Samples

Lyasmine Harrouche ¹, Hocine Fellag ², and Lynda Atil ³

¹LMPA Laboratory, Department of Mathematics University of Mouloud MAMMERRI Tizi-Ouzou, Algeria, lyasmine.harrouche@ummto.dz

²LMPA Laboratory, Department of Mathematics University of Mouloud MAMMERRI Tizi-Ouzou, Algeria, hocine.fellag@ummto.dz

³LMPA Laboratory, Department of Mathematics University of Mouloud MAMMERRI Tizi-Ouzou, Algeria, lynda.atil@ummto.dz

Abstract : In this paper, we compare some statistics for detecting one or multiple upper outliers in exponential samples under slippage alternative using the empirical powers and p-value. This comparative study is done using exhaustive Monte Carlo techniques.

MSC: 62E15 ; 62E20

Keywords : Detection ; Exponential ; outlier ; power of test ; p-value ; performance criteria.

1 Introduction

In statistical analysis, an observation will be termed discordant if it is statistically unreasonable on the basis of some prescribed probability model. Moreover, it is an observation known to have been generated by a different probability model, such a discordant observation need not necessarily show up as an outlier. Some writers use the word "outlier" for an observation which is both surprising and discordant, a term such as "suspect value" is then used by them to describe a surprising value (an outlier in our sense) see [1].

According to [7], an outlier is an observation that deviates so much from other observations as to arouse suspicion that it was generated by a different mechanism. To identify these outliers of varying degrees of discordancy in the sample, a discordancy test is performed.

There are several discordancy test procedures, a very popular procedure model called block test statistic which is used to test for discordancy of k outliers in the data, and then either zero or k outliers are declared discordant in a single hypothesis test. (See[5], [10], [14]).

Outlier detection has a long history and many papers have been published in the literature. Until the 1960s, most of the published works on outliers in univariate samples were in the context of normal distributions [3]. A large volume of literature has been devoted to the detection and handling of outliers in the data. [2], [7] provided excellent literature surveys. For

*Corresponding Author

example, testing for outlier in exponential samples had been studied by various authors including [15], [14], [5],[18], [17], [13],[11], [16], etc.

The aim of this paper is to perform a comparative study of outlier detection methods for exponential samples, using power comparison and p-value. Single and multiple outliers cases are considered.

The format of the paper is as follows. Section 2 is devoted to define the discordancy test and the model also it contains the three test statistics to be compared. In the last section a simulation study to compare the test statistics discussed in the previous section. We finish with a conclusion.

2 Discordancy test and proposed test statistics

Consider the model given by a sample (X_1, X_2, \dots, X_n) of *iid* random variables distributed according to exponential distribution with parameter $\theta > 0$ and $x > 0$, denoted by $Ex(\theta)$, $f(x; \theta) = \theta \exp(-x\theta)$.

Suppose that, k observations ($k < n$) are distributed according to $Ex(\theta/b)$ instead of $Ex(\theta)$ with $b > 1$. These k observations with greater mean are called upper outliers.

$(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, \dots, X_{(n)})$ are order statistics corresponding to the sample $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$. We use the discordancy test for testing the outliers.

Hypothesis testing

$H_0 : b = 1$ ie $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ are $\exp(\theta)$, $\theta > 0$ unknown.

$H_k : b > 1$ ie $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, \dots, X_{(n-k)}$ are $\exp(\theta)$

$X_{(n-k+1)}, X_{(n-k+2)}, \dots, X_{(n)}$ are $\exp(\frac{\theta}{b})$, $b > 1$

We assume that the decision criterion is : the hypothesis H_0 is rejected when $T > t_c$, with $t_c = t_c(\alpha)$ being the critical value corresponding to test statistic T to the significance level α .

In this section, we propose to compare the performance of three known statistics using intensive Monte Carlo study. To perform this comparison, we consider a sample of our model and suppose that a single or two outliers occur.

The proposed test statistics, considered in this comparative study are as follows :

The first one is defined by

$$DIX = \frac{X_{(n)} - X_{(n-k)}}{X_{(n)}}$$

This test statistic is a Dixon type test statistic. It was proposed by [4]. Its null distribution was obtained by [15] and [9]. Moreover, and [5] established its distribution under H_1 .

The second one is the maximum likelihood ratio test (MLR) given by for the first time by [6]. The null distribution was derived by [5],[19], [16]. This test statistic is based on the ratio of the sum of the observations suspected to be outliers to the sum of all observations of the sample. Its expression is

$$MLR = \frac{\sum_{j=n-k+1}^n X_{(j)}}{S_n}$$

The Third test statistic is proposed by [13], the authors computed explicitly the critical values of LK in the presence of single outlier. However, when multiple outliers occurs, approximate

critical values are obtained only, defined by

$$LK = \frac{(X_{(n)} - X_{(n-k)})}{S_n}$$

The comparative study is done using the empirical power and p-values criterions.

3 Comparative study

To evaluate the performance of the discordancy test of the statistics, a simulation study is performed to compare the performance of the three test statistics.

In this section, we compare the performance of the three statistics discussed in the previous section according to power and p-value comparison.

To perform this comparison, we consider a sample of our model and suppose that a two outliers occur at some specific position. To compare the performance of the tests, the simulation study using 10000 samples generated from $Ex(1)$ and the 9 and 10th simulated value X_9 and X_{10} is replaced by bX_9 , $b \geq 1$. This has the effect of producing one contaminant observation from $Ex(1/b)$ in the sample. Tables 1 and 2 give the power and p-value respectively of the test statistics DIX, MLR, and LK for $b = 1(0.5)25$ and $\alpha = 0.05$

Empirical powers

n	b	Empirical power		
		DIX	LK	MLR
40	1	0.0513	0.0524	0.0538
	1.5	0.0598	0.0610	0.0565
	2	0.0855	0.0888	0.0906
	2.5	0.1215	0.1348	0.1334
	3	0.1618	0.1835	0.1909
	3.5	0.2197	0.2513	0.2519
	4	0.2647	0.2946	0.3083
	4.5	0.3181	0.3489	0.3541
	5	0.3573	0.3955	0.4149
	5.5	0.4008	0.4321	0.4529
	6	0.4365	0.4736	0.4922
	6.5	0.4685	0.5142	0.5405
7	0.5208	0.5528	0.5711	
7.5	0.5435	0.5857	0.5994	

Table 1. Empirical power of the three statistics for 40 in the presence of two outliers in the sample

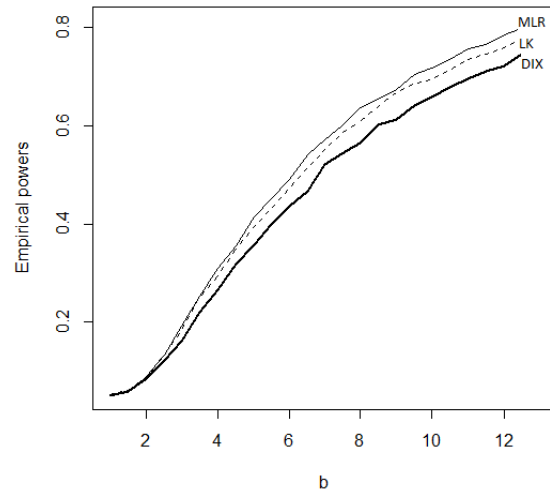


FIGURE 1 – Empirical powers of different test statistics at $\alpha = 0.05$ for $n = 40$, $k = 2$

The table and Figure 1, show that the three test statistics have the same behavior but MLR is more powerful than two other statistics.

Comparison using p-values

<i>n</i>	<i>b</i>	p-value		
		DIX	LK	MLR
40	1	0.2029	0.7652	0.4235
	1.5	0.2076	0.7658	0.4768
	2	0.2045	0.7698	0.5267
	2.5	0.2092	0.7675	0.5303
	3	0.3832	0.7764	0.3876
	3.5	0.6180	0.8999	0.2680
	4	0.6210	0.8613	0.1812
	4.5	0.6178	0.6789	0.1211
	5	0.5161	0.5142	0.0074
	5.5	0.3726	0.3898	0.0765
	6	0.2699	0.2766	0.0501
6.5	0.1905	0.1928	0.0305	
7	0.1352	0.1517	0.0205	
7.5	0.0982	0.1015	0.0136	

Table 2. p-value of the three statistics for $n = 40$ in the presence of two outliers in the sample

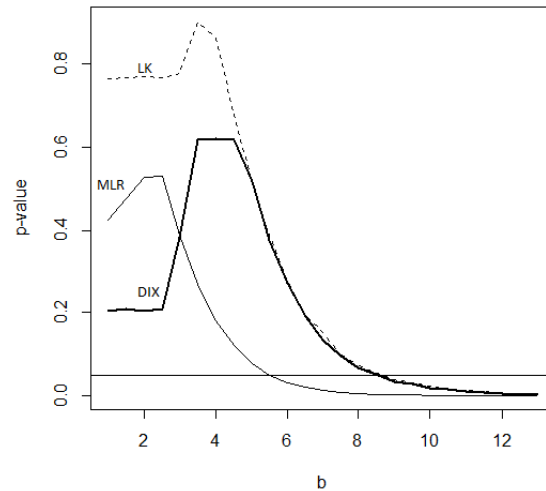


FIGURE 2 – p-values of different test statistics at $\alpha = 0.05$ for $n = 40, k = 2$

Comparison with p-value shows that in the table and Figure 2, DIXON and LK statistics detect the outliers at approximately at $b = 8$, however MLR is lower than $\alpha = 0.05$ and detect the outliers for $b = 5; 5$ and its p-value decreases rapidly compared to the others statistics

4 Conclusion

We compared to MLR, LK and DIXON test statistics for detecting one or multiple upper outliers in exponential samples under slippage alternative using the empirical powers and p-value. This comparative study is done using exhaustive Monte Carlo techniques for detection of two outliers, we showed that MLR is the most powerful, using the p-value comparison we remarque that MLR detect better than LK and DIXON, the three statistics detect well, for the great value of b .

References

- [1] Barnett, V., Lewis, T. : Outlier in statistical data . New York, John Wiley and Sons, Inc.(1978).
- [2] Barnett, V., Lewis, T. : Outliers in statistical data . 2cd ed, John Wiley and Sons (1984).
- [3] Barnett, V., Lewis, T. : Outliers in statistical data . 3rd ed. Chichester, England, John Wiley(1994).
- [4] Basu, A. P. : On some tests of hypotheses relating to the exponential distribution when some outliers are present. Journal of the American Statistical Association, **60**, 548-559 (1965).

- [5] Chikkagoudar, M. S., Kunchur, S. H. : Distributions of test statistics for multiple outliers in exponential samples. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **12**, 18, 2127–2142 (1983).
- [6] Fisher, R. A. : Tests of significance in harmonic analysis. *Proceedings of the Royal Society A*, **125**, 54-59 (1929).
- [7] Hawkins, D. M. : Identification of outliers. London, Chapman and Hall, (1980).
- [8] Hayes, K., Kinsella, T. : Spurious and non-spurious power in performance criteria for tests of discordancy. *Statistician*, **52**, 69-82 (2003).
- [9] Kabe, D. G. : Testing outliers from an exponential population. *Metrika*, **15**, 15-18 (1970).
- [10] Kimber, A. C., Stevens, H. J. : The null distribution of a test for two upper outliers in an exponential sample. *Applied Statistics*, **30**, 153–157(1981).
- [11] Kumar, N. : Test for multiple upper outliers in an exponential sample irrespective of origin. *Statistics : A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **47**, 1, 184-190 (2013).
- [12] Laurent, A. G. : Conditional distribution of order statistics and distribution of the reduced i th order statistic of the exponential model. *The Annals of Mathematical Statistics*, **34**, 652-657 (1963).
- [13] Lalitha,S., Kumar, N. : Multiple outlier test for upper outliers in an exponential sample. *Journal of Applied Statistics*, **39**, 6, 1323-1330 (2012).
- [14] Lewis, T., Fieller, N. R. J. : A recursive algorithm for null distributions for outliers : I. gamma samples. *Technometrics*, **21**, 3, 371-376(1979).
- [15] Likeš, J. : Distribution of Dixon's statistics in the case of an exponential population. *Metrika*, **11**, 46-54 (1966).
- [16] Lin, C., Balakrishnan, N. : Tests for multiple outliers in an exponential sample. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **43**, 4, 706-722 (2014).
- [17] Shadrokh, A., Pazira, H. : A new statistic for detecting outliers in exponential case. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, **5**, 2, 5614-5620 (2010).
- [18] Zerbet, A., Nikulin, M. : A new statistic for detecting outliers in exponential case. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **32**,3, 573-583 (2003).
- [19] Zhang, J. : Tests for multiple upper or lower outliers in an exponential sample. *Journal of Applied Statistics*, **25**, 2, 245-255 (1998).



A Knowledge-based Decision Support System: An Integrated Case-based Reasoning and AHP Method

Abdelkader Adla ^{*1}, Bakhta Nachet ², Mohammed Frendi ³, and Djamila Boualouan ³

¹Computer Science Department, Oran1 University, Algeria,
adla.abdelkader@univ-Oran1.dz

²Computer Science Department, Oran1 University, Algeria,
nachetdal@yahoo.fr

³Computer Science Department, Oran1 University, Algeria,
mohamedfrendi31@Gmail.com

⁴Department of Mathematics and Informatics, University of Ain Temouchent, Algeria,

Abstract :

In this paper, we propose a Knowledge-Based Decision Support System (KBDSS) based on a case-based reasoning model where the knowledge and the experience are retained and stored in a knowledge base in the form of a case base and an analogical reasoning is used to retrieve the most relevant case from the case base. However, with the diversity of the attributes describing the cases, it becomes difficult to distinguish the most reliable one covering the requirements of users. In other words, it is necessary to set weightings for each attribute forming the context of the problem. To do this, we use the Analytic Hierarchy Process method (AHP) to calculate the attributes' weights and determine the importance of each attribute in relation to other attributes. In this way, the case-based reasoning performance is enhanced and the knowledge-based decision support system increases the reuse of experiential knowledge across cases and their components, and reduces the time needed to make a choice. We are experimenting with our system in a financial field, more precisely, to commercial loan assessment, a multiple attribute decision problem where expertise is needed to evaluate the loan amount.

Keywords : Knowledge-Based Systems, Decision Support Systems, Case-Based Reasoning, Analytic Hierarchy Process, Information Retrieval.

1 Introduction

Experiential knowledge is of significant value to the organization and particularly useful for users engaged in similar decision making activities. It clearly helps them in the decision process, and reduces the time required to come to a decision, especially in critical situations

*Corresponding Author

[1],[2] and [3]. Integrating experiential knowledge within the knowledge base, knowledge-based systems with features such as explanation ability, heuristic inference, reasoning with uncertainty and structured representation of knowledge are invaluable tools in the decision-making process [4]. To develop these systems, Case-Based Reasoning (CBR) is the most suited model that implements knowledge base. Indeed, the case-based reasoning formalism reflects faithfully human knowledge by storing data about significant experiences as "cases" and reasoning by analogy [5].

In this paper, we propose a knowledge-based decision support system (KBDSS) where the knowledge and the experience are retained and stored in a knowledge base in the form of a case base. The decision support system based on the case base increases the reuse of experiential knowledge across cases and their components, and reduces the time needed to make a choice. However, with the diversity of the attributes, it becomes difficult to distinguish the most reliable attributes covering user's requirements. In other words, it is necessary to set weightings for each criterion forming the context of the problem in order to classify them according to their relevance during the decision phase. To do so, we determine the importance of each attribute in relation to other attributes, expressed in terms of weights applying Analytic Hierarchy Process (AHP) method. Using the AHP method allows to classify attributes, calculate their weights and measure the similarity between cases this will enhance the case-based reasoning performance and retrieving the most relevant similar cases.

We are experimenting with our system in a financial field, more precisely, to commercial loan assessment, a multiple attribute decision problem where expertise is needed to evaluate the loan amount. The remaining part of the paper is organized as follows. First, in section 2 we give a literature review on knowledge based decision support systems, case-based reasoning, and the most common multi-criteria methods that is AHP. Next, we present our knowledge-based approach to decision support system. In section 4 we apply our approach to a bank loan assessment to illustrate the feasibility and applicability of our idea. Finally, concluding remarks and future work are given in section 5.

2 Literature Review

Knowledge-Based Systems (KBS) require a more detailed specification of the solving knowledge (represented in terms of attributes, constraints, and/or similarity metrics) as well as the corresponding items (semantic properties have to be specified) [6] [7]. Integrating a KBS within a knowledge-based decision support system allows learning about user experiences over time and automatically suggesting solutions that fit the learned user's model. It provides solutions based on the domain knowledge of what problem features will match a user's interest.

In knowledge-based decision support systems, the experiential knowledge is organized in a knowledge base taking originally the form of a database. However, over the years, the knowledge becomes more complex and its nature has evolved. The case base structuration then takes place in the intelligent support of problem solving. Such a knowledge representation can provide uniform and consistent experiential knowledge [8].

Case-Based Reasoning (CBR) systems [5] are the most prevalent models that implement knowledge based systems. Most case-based reasoning systems represent problems and solutions as cases. A case generally represents a problem situation which has been

captured and learned that can be reused to solve new problems. It is referred to as a past case. Correspondingly, a new case is the description of a new problem to be solved.

To process a user request, the system initiates a search in the case base to retrieve similar problems that should be suggested to the user i.e. those that satisfy these user requirements and terminates the process by retaining the new case. Sometime the solution retrieved can be straightforwardly reused in the new problem, but in the majority of the situations the retrieved solution is not directly applicable and must be adapted to the specific requirements of the new problem.

3 Knowledge-Based Decision Support System

Our approach to develop a Knowledge-Based Decision Support System (KBDSS) is mainly based on case-based reasoning model where knowledge is organized in cases, and uses analogical reasoning. A case is defined as a couple of components (problem, solution), storing both the problem description and the solution applied in that situation. The problem component of the case is the user's query, it is typically represented by a set of problem features, those specified by the user, and the solution component of the case is the problem itself.

The number of cases in the case base is constantly increasing due continuous retaining of new cases. In order to reduce the research time and to increase the effectiveness of the retrieval process, the latter is carried out in two steps : The first one consists in organizing the case base in such a way just a subset of relevant cases is selected whilst the second one is dedicated to the similarity measurement and the ranking of source cases included in the subset.

3.1 Case Representation and Indexing

Case indexing considers the clues that characterize the case and thus helps to distinguish one case from another. It refers to creating additional data structures, partitioning knowledge base, and assigning indexes to cases to speed up the process, and to facilitate and ensure retrieving a relevant subset of cases at appropriate times by focusing on the most relevant features. The assigned specific indexes identify under what conditions the cases may be useful, and also suggest the applicability of the case to a new one when retrieved. These features or attributes can be either of nominal type or numeric one.

To organize and represent cases for efficient retrieval, a flat case base is the simplest and most common way. In this organization all the cases are represented at one level by a vector of attributes-values. However, the major drawback of this structure remains the exhaustive search throughout the case base which requires a huge computational effort. This drawback may even increase sharply if the number of the cases and the attributes step up.

To overcome these shortcomings, we use a binary decision tree structure. Trees result in recursively partitioning a dataset into subsets. In such a hierarchical structure, cases are organized into categories in order to reduce the number of candidate cases used to measure case similarity. Indexing trees also enable richer case representations of past situations than a simple database, since a case includes information about the context of the event as well as details. Using this manageable structure, a balance is found between storage methods

that preserve the semantic richness of cases and their indexes, and methods that support efficient searching and simplify access to relevant cases.

3.2 Case Retrieval

The retrieval process is driven by a similarity metric that computes the similarity of the problem description, i.e., the current user requirements and the past problems in the case base. However in an effort to enhance the case-based reasoning performance and retrieving the most relevant similar cases, we do determine the importance of each attribute in relation to other attributes, expressed in terms of weights. To this end, Analytic Hierarchy Process (AHP) method is used to classify attributes, calculate their weights and measure the similarity between cases.

3.3 Analytic Hierarchy Process (AHP) to assigning features weights

AHP is a popular Multi-Criteria Decision-making Method (MCDM) developed by Saaty in the 1970s [9], designed to solve complex multi-criteria decision problems. AHP is aimed at integrating different measures into a single overall score for ranking decision alternatives. To set priorities, weights are assigned to each attribute through a process of comparative judgements based on pair-wise comparisons on a scale 1 to 9 in a matrix A where each attribute is compared at a peer level in terms of importance. Priorities are calculated from the comparison matrix A by the eigenvalue method (Equation (1)) :

$$A * w = \lambda * w. \quad (1)$$

Where A is the comparison matrix, w is the vector of the priorities, and λ is the maximal eigenvalue.

3.4 Similarity measures

Similarity measure calculates the degree of similarity between the source cases and the target case. This operation is carried out over two stages :

1. The local similarities are used to compute similarities between values of single attributes. They are calculated for each attribute i by comparing the value of the target case c_i with the corresponding source one s_i . However, as problem features are described by different types of values (nominal or numeric), the local similarity is calculated regarding these types.
 - a) For numerical values, the local similarity is often calculated with a distance measurement. We used the Euclidian and the Manhattan distances which are in fact particular kinds of the Minkowski measurement (the equation(2)) : For two cases C and S , c_i and s_i , represent respectively the i th feature of C and S , and w_i the associated weight to this feature.

$$d(C, S) = \left(\sum_{i=1}^L w_i |c_i - s_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

As the global distance cannot be calculated due to the different features values types, we get a local distance for each feature. For numerical features, the calculation of the local distance is based on the following the equation (3) : (derived from the equation (1)) :

$$d(c_i, s_i) = |c_i - s_i| \quad (3)$$

To normalize the distance calculation, we introduce the Int_i function to explicitly express the definition domain. This function expresses the difference between the maximum and the minimum values for the feature I (equation (4))

$$d(c_i, s_i) = \frac{|c_i - s_i|}{int_i} \quad (4)$$

Finally, the local similarity for a numerical characteristic can be calculated from the distance given by the equation (4). According to the equation (5), two closest problems are the most similar.

$$sim(c, s) = 1 - \frac{|c_i - s_i|}{int_i} \quad (5)$$

b) For nominal features, the local measurement considers two values equation(6) :

$$sim(c_i, s_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } c_i = s_i \\ 0 & \text{if } c_i \neq s_i \end{cases} \quad (6)$$

- The global similarity is calculated from all the local similarities in order to establish similarities and more precisely the degree of similarity between the target problem and source ones. The target problem (C) is compared with a source problem (S) in the case base by the global similarity measurement (the equation (7)) with the weight w_i :

$$w_i = 1 - \frac{r_i - 1}{\max(r_i)} \quad (7)$$

The global similarity criteria allow ranking all the source cases from the most similar to the less one. For each attribute, the corresponding weight is calculated by the equation (7) where w_i is the attribute weight, r_i is the importance rank of the attribute in the CBR system, and $\max(r_i)$ is the maximum value of importance between the attributes (equation (8)) :

$$sim(C, S) = \frac{\sum_i^n w_i sim(c_i, s_i)}{\sum_i^n w_i} \quad (8)$$

4 Experiments and Results

We experiment our knowledge-based approach for decision support system on a case of bank loan assessment for housing. The loan assessment process is complex, subjective and highly judgmental. The loan granting decision is based on information presented in the financial statements plus information related to customers and the collateral. Frequently this qualitative information is of great value to the loan assessment. This ill-structured nature of the loan assessment process prevented the bank officer from applying any rigorous mathematical or analytical methods. Usually a bank (or another loan agency) makes decisions by utilizing experienced loan officers to perform the requisite tasks and evaluations.

The willingness to develop a knowledge-based decision support system for the bank aims to support the bank financial officer and endow them tools to check the loan application criteria, determines the amount for that loan which both satisfies his financial needs based on to make his expert knowledge and past experiences analysis, reduces the time and improves the quality of the evaluation.

To grant a loan for customers for housing, the bank officers must take into account some lineaments such as faades of the plot of land and whether is built or not. These features, varying from one area of land to another, allow its real price evaluation so that if the customer would be unable to repay the loan, the bank can sell the land or housing with this price. We considered a sample of 122 land properties, all types combined (rural or urban, built or not built, one or two facades, or even three, etc.). Table 1 presents an example of a loan request.

22cmLoan requested (Millions of DA)	Property				
	Type of the plot	Area (m^2)	Zone	Nbr of the facades	Conditions
5	Built	350.50	Urban	1	70

TABLE 1 – Example of a loan request

To evaluate the effectiveness of the search strategies, we use statistical measures such Precision, Recall, Accuracy and F-Measure. There is an inverse relationship between precision and recall. Increasing precision often involves reducing recall. The inverse relationship between precision and recall compels the system to come to a compromise between them. To this end, F-Measure (F-score) is calculated. All these measures are calculated for both systems (Table 2) in order to evaluate their performance.

	Precision	Recall	Accuracy	F-mesure
CBR-DSS	0,321	0,529	0,779	0,4
FreeCBR	0,215	0,824	0,557	0,341

TABLE 2 – GMSS and FreeCBR comparison based on statistical values

5 Conclusion

We applied our knowledge-based approach to decision support systems on bank loan assessment to provide bank loan officers with access to past experience using a case-based reasoning mechanism. The case-based reasoning is enhanced by assigning weights to the attributes and selecting the most important ones using AHP method.

Overall the experiments showed in this study that the knowledge-based decision support system using CBR to search and recall previous decisions improve the efficiency of performance of the bank officers.

In order to evaluate the proposed system, a comparative performance was undertaken with FreeCBR, a conventional CBR, using statistical parameters. We found that the proposed system shows better results and outperforms the conventional FreeCBR particularly in relation to precision and accuracy measures. Nevertheless, more experiments and comparisons with other systems are needed to set the performance of our system.

In future work, we plan to improve our system in the case retrieving step to allow calculating and retrieving the similar cases and choosing the most appropriate and relevant source case(s) by coupling the traditional similarity measure with the fuzzy sets theory.

References

- [1] Gallupe, B. : Knowledge management systems : surveying the landscape. *International Journal of Management Reviews*, **3**, 1, 61-77, (2001).
- [2] Baillergeau E., Duyvendak J. W. : Experiential knowledge as a resource for coping with uncertainty. Evidence and examples from the Netherlands, *Health, Risk and Society*, **18**, 7-8, 407-426, (2016).
- [3] Minhyung K., Byoungsoo, K. : Motivation, opportunity, and ability in knowledge transfer. a social network approach. *Knowledge Management Research and Practice*, **15**, 2, 214-224, (2017).
- [4] Akerkar, R., Sajja, P. : *Knowledge-Based Systems*, Jones and Bartlett Publishers, (2009).
- [5] Aamodt, A., Plaza, E. : Case-Based Reasoning. Foundational Issues, Methodological Variations, and System Approaches. *AI Communications*. IOS Press, **7**, 1, 39-59.
- [6] Marakas, G., M. : *Decision support systems in the 21st Century*, Pearson Education, (2003).
- [7] Hasemana, W., D., Nazaretha, L., D., Paul, S. : Implementation of a group decision support system utilizing collective memory, *Information and Management*, **42**, 4, 591-605, (2005).
- [8] Adla, A., Soubi, J., L., Zarat, P. : A cooperative Intelligent Decision Support System for Boilers Combustion Management based on a Distributed Architecture, *Journal of Decision Systems (JDS)*, **16**, 2, 241-263, (2007).
- [9] Saaty, T., L. : Group Decision Making and the AHP. In Golden, B.L., Wasil, E.A., Harker, P.T. (eds) *The Analytic Hierarchy Process*. Springer, Berlin, Heidelberg, (1989).



Implementation of IoT-Smart Irrigation system using Blynk App

Ibtissem Adoui*¹ and Mohammed Titaouine 

¹Department of Electronics, Faculty of Technology, LMSE laboratory, University of Bordj Bou-Arréridj, Algeria,

ibtissem.adoui@univ-bba.dz

²Department of Electronics, Faculty of Technology, University of Batna 2 (Mostefa Ben Boulaïd) Batna, Algeria,

mohammedtitaouine@gmail.com

Abstract : Advances in Internet of Things (IoT) applications have enabled the development of smart wireless solutions. This paper aims to present the implementation of a smart irrigation system based on IoT technology. In the proposed system, the ESP32 micro-controller has been used with several compatible sensors and actuators to take control and suitable decision. Sensors used include soil moisture, DHT22, and Ultra-son HC-SR04, while actuators used include a water pump, OLED display, and relay. In addition, Wi-Fi is used as a wireless communication medium to enable the real-time interaction between users and the proposed smart irrigation system, besides Blynk App which is used as a local server that provides the ability to monitor the system remotely. The soil moisture sensor senses the level of soil moisture and determines if it is dry or wet. If the soil is dry, the irrigation motor operates watering the plants at the time of need for real water, and switches OFF when the soil is wet in part to save water. The benefit of employing this irrigation system is to reduce human interference and ensure proper irrigation and it is quite feasible and affordable. The solar panel is used to power our system which increases its advantages because it does not consume any energy.

Keywords : Smart Irrigation ; IoT ; Blynk App ; node MCU esp32 ; solar panel.

1 Introduction

In the present era, one of the greatest problems faced by the world is water scarcity and agriculture being a demanding occupation consumes plenty of water. Therefore, a system is required that uses water judiciously [1]. Algeria, like other countries too, is largely affected by water scarcity. Water resources in Algeria are very limited and unequally distributed in space and time. The country has one of the lowest per capita water supplies in the world. The renewable water resources in Algeria amount to $600 m^3$ per capita per year, which is

*Corresponding Author

below the UN threshold for water poverty ($1000 \text{ m}^3/\text{year}/\text{capita}$). Irrigated agriculture is still the largest water user in the country, using about 65% of all water resources. However, the increasing competition over scarce water resources due to rapid urbanization has become a severe constraint and a serious threat to irrigated agriculture sustainability [2].

To get out of this crisis, new solutions must be found to solve this problem of irrigation.

With the water requirements in irrigation being large, there is a need for a smart irrigation system that can save about 80% of the water.

Therefore, it was necessary to find a way to test the condition of the ground before providing water in the fields. This mechanism would reduce the farmer's workload and help maintain suitable soil conditions for improved agricultural production and better quality. Thus, the evolution of technology in the fields of computing and electronics such as wireless sensor networks and the Internet of Things (IoT) has made it possible to design smart irrigation systems that eliminate direct farmer involvement.

In our project, we created an automatic irrigation system for small spaces such as gardens and house plants which can detect the water content in the soil and automatically irrigate the garden. It is achieved by installing sensors in the field to monitor the soil moisture which transmits the data to the micro-controller for estimation of the water demands of plants. Additional to the soil moisture sensor, the DHT22 is also used to know what temperature of the crop field and in this way to obtain both values such as temperature and humidity of the environment. These sensors are connected to the Internet via the Wi-Fi module (ESP32). This interconnected activity is to give additional sensitivity to the irrigation system.

Using this smart irrigation can save about 80% of water. We all know that there are several factors such as air humidity, soil type... etc. Which greatly affect the growth and development of plants, and that every person or gardener has his way of watering and dealing with plants. This system can be programmed for different crop requirements and seasonal changes thanks to the network of sensors used. This system is most suitable for irrigation and makes human life easier and raised the question of following the garden. In addition, our system is applicable in all agricultural fields.

2 Types of irrigation systems

There are two methods of irrigation : Conventional Irrigation System and smart irrigation system.

2.1 Conventional Irrigation System

Conventional irrigation method is manually worked. The irrigation scheme is based on real-time weather soil conditions observed manually. The watering schedule is driven by a heuristic based on the experience of the farmer. In this type there are many methods :

(a) Sprinkle irrigation : It is a method of irrigation in which water is distributed similarly to rainfall. It covers a large system. Water is allowed to pass through pipes and in between intervals of pipe, a sprinkler is connected which spreads the water to plants, which seems like rain falling on the surface. This irrigation system is used to irrigate crops, lawns, landscapes, golf courses, and other areas [3].

(b) Drip System : Drip irrigation is a technique large used, Whenever plants required water, the nozzle is turned on and sub-pipes spread the water to the roots of the plants. This method of irrigation is the most efficient water and nutrient delivery system for growing crops because it saves water and increases yield.

(c) Channel System : Channel system uses canals to pump water. This method of irrigation has many advantages. From rivers, canals will be constructed and from canals with pumps water is planted in plants.

2.2 Automated Irrigation System

These systems can reduce water consumption in a field by 50%. And also minimize electrical energy expenses by using a set of solar panels and batteries rechargeable, the platform is equipped with various humidity sensors buried in the ground which makes it possible to calculate the real needs of the soil in water and to regulate the flow accordingly thanks to a small electronic unit. This system makes it possible to control constantly and in real-time the various atmospheric and soil parameters, and the needs of the plants.

3 Proposed system

3.1 Architecture design

The automatic irrigation system was designed to continuously sense the moisture level of the soil. The system responds appropriately by watering the soil with the exact amount of water required and then shuts down the water supply when the required amount of soil moisture is achieved. The reference amount of soil moisture is already fed to the microcontroller beforehand. This reference soil moisture content was made to be adjustable for the three most common soil types (sandy, loamy and clayey soils). When the system is powered and the input signal enters, the ESP32 microcontroller reads the temperature, and humidity values from the DHT22 sensor, and the soil moisture value, this is compared to the reference value. This reference value depends on the type of plant, in this case, for example, if the system needs to be tested for "Aloe vera", according to the MINAGRI, it would have a reference value of 30–50% of humidity. If the temperature rises above 30 or falls below 10, the system will send a notification to the smartphone. Also if the soil moisture is lower than 30% the system turns ON the pump, and until 50 % the system turns OFF the pump. All values are shown on the OLED display and our interface on Blynk App.

Figure1 shows the block diagram of our project and the different connections between the different components.

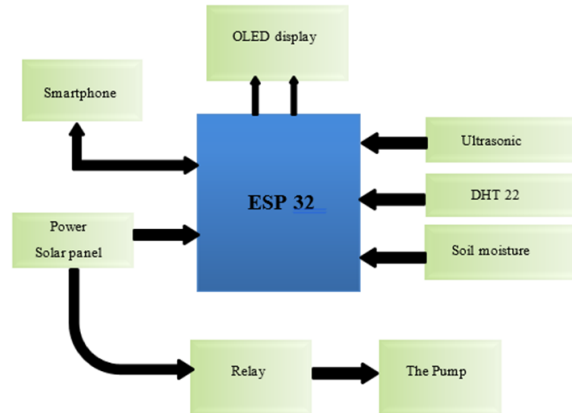


FIGURE 1 – proposed system diagram

3.2 System Hardware

The proposed irrigation system is based on an ESP32 board connected to some sensors and actuators which are remotely controlled by our interface in Blynk App. The following table describes the main hardware used.

Components	Type	Specifications
ESP 32		It is a low-cost, low-power system on a chip (SoC) series with Wi-Fi & dual-mode Bluetooth capabilities.
Sensors	Soil moisture	It measures the content of water and humidity in the soil.
	Ultrason HC-SR04	Is an electronic device that measures the distance of a target object by emitting ultrasonic sound waves and converting the reflected sound into an electrical signal[4].
	DHT-22	Is used to monitor temperature and humidity amounts[4].
	Ultrason HC-SR04	Is an electronic device that measures the distance of a target object by emitting ultrasonic sound waves and converting the reflected sound into an electrical signal[4].

Actuators	Water pump	It is used as an amphibious pump and is ideal for reliable fountains.
	Solar panel	Also known as "PV panels" are used to convert light from the sun, which is composed of particles of energy called "photons", into electricity that can be used to power electrical loads.
	OLED display	It is a tool for displaying sensor data.
	relay	Is used for switching loads and controlling appliances [5]

3.3 System Software

The software used is described in Table 2.

Software	Specifications
Arduino IDE	It is software that allows to write, modify a program and convert it into a series of understandable instructions for the Arduino card[6].
Blynk App	It is an IoT platform that allows in particular to design a mobile application (Android and iOS) to control and visualize the data of an embedded system via a public or private cloud server. The design of the mobile application (Android and iOS) based on widgets (graphic elements) is carried out by simple drag & drop without writing a line of code.

3.4 Principe of operation

In our smart irrigation system, various sensors such as soil moisture sensor, and DHT22 sensor are connected to the input pins of the Arduino microcontroller. Arduino is a microcontroller that acts as a brain for the whole system. The values detected by the sensors are displayed on the OLED display screen and will be transferred to the actuators to act on this data. If the detected value exceeds the threshold values set in the program, the pump will be automatically turned on/off by the relay circuit and it is connected to the control circuit which helps to switch the voltage. The Arduino also logs soil moisture and water usage data in Thing-speak cloud, configured using ESP32 WIFI module. The same data is also acquired and displayed in the Android application via the Internet.

In our project and to make the system connected and remotely controllable, we have the choice of working either with a WiFi card for Arduino or a Bluetooth module, the latter has a command area of fewer than 15 meters, which forced us to use the ESP32 (WI-FI) module.

The control card will allow to receive the commands and execute them then send the states of the various sensors and actuators. In our project, this card provides :

- Irrigation control.
- Correct operation of the pump.

- Reading data received from soil moisture and DHT22 sensors.

Our project has additional support which is a computer USB port (5V 200mA) to regularly communicate information to simulate the project in reduced form, by supplying the system with 12V. We control the current required to drive the pump using a relay. By using this system, the farmer can access the details about the condition of the field anywhere at any time.

4 Implementation of IOT smart irrigation system

Figure 2 shows the circuit implemented by FRITZING. For the realization of our global

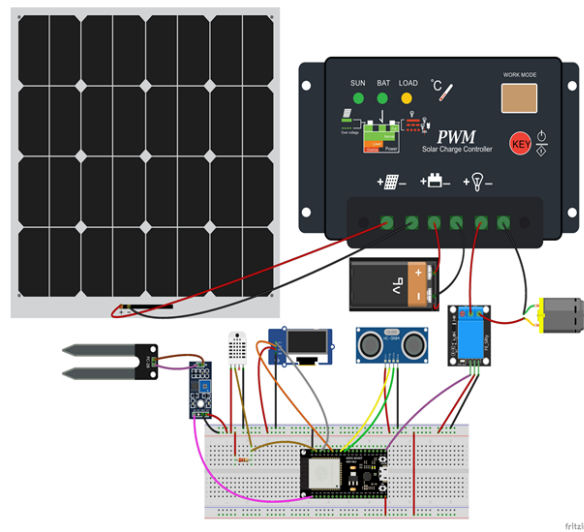


FIGURE 2 – Implemented Circuit with ESP32 module.

system, we went through several steps. These steps are grouped into two parts

- First part : design and production of the entire electronic system.
- Second part : The mobile application (Blynk).

The software Proteus is used in this section to do the simulation of our system before doing the realization. Figure 3 shows the irrigation system structure with Proteus.

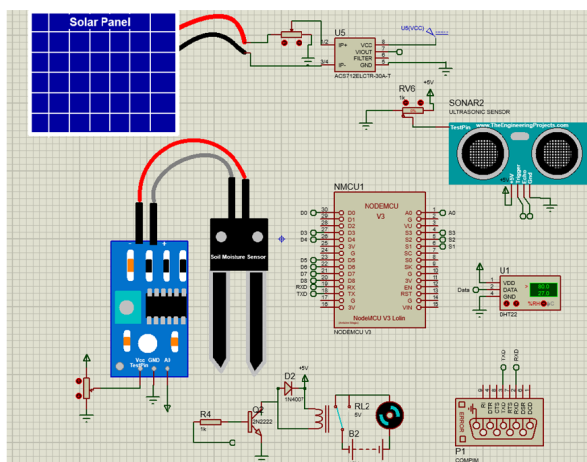


FIGURE 3 – irrigation system with Proteus.

4.1 Design and realization

To obtain results that show the automation efficiency of our smart irrigation system, three tests were performed as shown in Figure 4

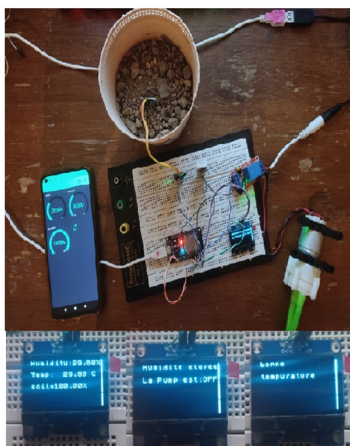


FIGURE 4 – The Smart irrigation system.

The screenshots of the results of the designed system obtained on android application are shown in figure 5.

One advantage of this app is that it, real-time as well as historical data of measurements of air temperature, air humidity, soil humidity and the water level in the tank can be obtained from anywhere using the app. Similarly, The system can operate in two modes automatic mode and manual mode.

Blynk application offers a very flexible way to send notifications. Such Notifications are part of our automatic irrigation system. In our system three different notifications are used. The first notification if the plant needs water (fig 6.a). The second notification if the watering process is over (fig 6.b). And the last notification if the tank water level drops as shown in the figure 6.c. Figure 7 shows the project that's used as an (IoT) Smart Irrigation system controlled by Blynk application is running



FIGURE 5 – Our interface on the Blynk App.



FIGURE 6 – Blynk App Test.



FIGURE 7 – Final Implementation of the proposed IoT smart

5 Conclusion

This research paper focuses on an IoT smart irrigation system based on Wi-Fi using open-source software and open hardware. Where a new approach that provides a reasonable and less expensive way to monitor and regulate a smart system was proposed and realized utilizing Blynk App. The proposed IoT smart irrigation is cost-effective compared to other approaches to building such systems. The suggested system includes sensors like soil moisture, DHT22, Ultra-son HC- SR04, and actuators such as a water pump, OLED display, and relay. In the meantime, these sensors are connected to the Internet via the ESP32 module. The farmer can control the irrigation system via the report displayed from the application Blynk on the mobile. The application works to display readings from sensors and control the water pump in case of an emergency. This is to alert the user and make the system easy to use. One of the most important results of this research work is the success in creating an effective, reliable, and cost- effective prototype of an IoT smart irrigation system based on the Blynk App. In this project, Cam concluded that using the Internet of Things in agriculture can reduce water wastage human intervention and conserves energy and the environment.

To improve the circuit in order to approach the plants real life, study can adopt intelligent algorithms based on system learning.

References

- [1] Mr. Muthamils elvan, Narendra Kumar Meel , Chetan Sharma ,Arshad Ali : WATER IRRIGATION SYSTEM USING ARDUINO. International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET).Volume 05 Issue : 10 (2018).
- [2] K. Laoubi M. Yamao : Management of irrigation schemes in Algeria, an assessment of water policy impact and perspectives on development. WIT Transactions on Ecology and the Environment, Vol 125, (2009)

- [3] M. SHIVA SHANKAR, A.V. RAMANJANEYULU, T.L.NEELIMA AND ANUP DAS, :Sprinkler Irrigation – An Asset in Water Scarce and Undulating Areas. Integrated Soil and Water Resource Management for Livelihood and Environmental Security (2018)
- [4] Djehaiche, R, Aidel, S, Saeed, N :Implementation of M2M-IoT Smart Building System Using Blynk App. In : Hatti, M. (eds) Artificial Intelligence and Heuristics for Smart Energy Efficiency in Smart Cities.IC-AIRES, Lecture Notes in Networks and Systems, vol 361. (2021)
- [5] Djehaiche, Rania ; Aidel, Salih :Application of M2M Communication based on ZigBee to Control Smart home automation. figshare. Conference contribution.(2021)
- [6] R. Djehaiche and S. Aidel :Application of M2M Communication based on ZigBee to Control Smart home automation. pp. 114–119 (2021).



Single retrial service with batch arrivals, Recurrent customers, Breakdown, Delaying Repair and Bernoulli Vacation

Tassadit Lachemot*¹

¹University of Mouloud Mammeri, TIZI OUZOU,
tassadit.lachemot@ummto.dz

Abstract : In this paper, we study an $M^{[X]}/G/1$ retrial queue with two classes of customers : transit and recurrent customers, service subject to break down occurring randomly at any instant while serving customers, delaying repair service and Bernoulli vacation at each service completion.

Keywords : Retrial queue ; batch arrival ; bernoulli vacation ; breakdown ; delayed repair ; recurrent customers ; supplementary variable.

1 Introduction

Retrial queueing system have been widely used to model many practical problems arising in telephone switching system, telecommunication network, computer network and computer systems. The fundamental feature of these queue is that a customer who finds all the servers busy are obliged to leave the service but some time later they come back to the service facility. Between trials, a customer is said to be in "orbit". The detailed overviews of the related references with retrial queues can be found in the book of (Falin and Templeton, 1997) and the surveys papers of (Artalejo, 1994), (Aissani, 1994) and (Farahmand, 1990).

In recent years, retrial queueing with breakdown was introduced by several others as (Choudhury and Tadj, 2009 ; Choudhury and Ke, 2012 ; Kim and Lee, 2013 ; Jain and Bhagat, 2014 ; Yi Peng and Jinbiao wu 2021). The repair of broken down server is also an important factor. Practically, the reliable server may breakdown or stops working during any phase of service and will need to be repaired.

Moreno (2004) studied an $M/G/1$ retrial queue in which there is a fixed number $K, K > 0$ of recurrent customers who immediately return to the orbit after being served, and transit customers who leave the system forever after the service. The concept of recurrent customers in retrial queue was examined by (Gao, S., Liu, Z and Dong, H 2012). Generally, the service times of recurrent customers can be considered as an idle time of server which will

*Corresponding Author

be used for other tasks such as preventive maintenance, priority tasks, machine repair and scanning a new work, etc.

2 Description of the model

We consider an $M^X/G/1$ queueing system, with two classes of customers : transit (also called ordinary) customers and a fixed number $K (K \geq 1)$ of recurrent (also called permanent) customers, where the number of individual transit customers arrive to the system according to a compound Poisson process with rate λ . The size of successive arriving batches is X_1, X_2, \dots , where X_1, X_2, \dots are identically and independently distributed (i.i.d) random variables with probability mass function (p.m.f) $g_n = P\{X = n\}, n \geq 1$, probability generating function (PGF) $g(z) = E(z^X)$ and we denote $g_{[k]} = E(X(X-1)\dots(X-k+1))$. If a transit customer finds the service busy or broken, then all the arriving transit customers join the orbit (retrial group) with probability p or leave the system with probability $q = 1 - p$. But if the server is free then he starts serving the customer from the batch which is on the head of the queue whereas others leave the service area and join the orbit in accordance with an *FCFS* discipline, in order to seek service again and again until it finds the server free. The time of successive repeated attempts of any transit customers follow an arbitrary law with probability distribution function $A(x)$, density function $a(x)$ and Laplace-Stieltjes transform $L_A(s)$. The service time of the transit customers are independently and identically distributed with a probability distribution function $B_1(x)$, a density function $b_1(x)$, Laplace-Stieltjes transform $L_{B_1}(s)$ and n th moments β_{1n} .

There is a fixed number K of recurrent customers in the system. Once served, recurrent customers immediately return to the retrial group. We assume that only the recurrent at the head of the orbit is allowed to access the server. The time of successive repeated attempts of any recurrent customers follow an exponential law with a finite mean γ^{-1} (constant retrial policy). The service time of the recurrent customers are independently and identically distributed with a probability distribution function $B_2(x)$, a density function $b_2(x)$, a Laplace-Stieltjes transform $L_{B_2}(s)$ and n th moments β_{2n} .

While the server is serving any classes of customers, it may breakdown at any time and the server will be down for a short interval of time exponentially distribution with mean μ^{-1} . When the server fails, it takes some time known *Delaytime* before starting the repair. The Delay times of the server are i.i.d random variable with probability distribution function $D(x)$, density function $\psi(x)$, Laplace-Stieltjes transform $L_D(s)$ and two first moments ϕ_1, ϕ_2 .

After delay time, a repair begins immediately, the repair time has a distribution function $C(x)$, a density function $c(x)$, a Laplace-Stieltjes transform $L_C(s)$ and the first two moments γ_1, γ_2 . The customers whose service is interrupted remains in service. Once the time of repair completed, the server takes over the service of this customers.

After each service completion the server takes Bernoulli vacation, i.e., after each service completion the service may go for a vacation with probability $(1 - r)$ or with probability r he may serve the next unit. The vacation times follow an arbitrary law with probability distribution function $V(x)$, density function $v(x)$ and Laplace-Stieltjes transform $L_V(s)$. This type of queueing model is known as $M^X/G/1$ Bernoulli vacation queue with recurrent customers, unreliable service during which a breakdown period, a delay period and a repair period occur.

The condition completion rates for the repeated attempts of transit customers, for the

service of transit customers, for the service of recurrent customers, for repair, for delay and for vacation times are respectively given by :

$$\alpha(x) = \frac{a(x)}{1-A(x)}, \beta_1(x) = \frac{b_1(x)}{1-B_1(x)}, \beta_2(x) = \frac{b_2(x)}{1-B_2}, \gamma(x) = \frac{c(x)}{1-C(x)}, \theta(x) = \frac{\psi(x)}{1-D(x)}, v(x) = \frac{v(x)}{1-V(x)}$$

3 Steady-state distribution

The aim of this section is to obtain the joint distribution of the server state and the queue length in the steady state of the process $\{Y(t), t \geq 0\}$. The state of the system at time t can be described by the following Markov process.

$$\{Y(t), t \geq 0\} = \{(S(t), S^*(t), N(t), \xi_0(t), \xi_{11}(t), \xi_{12}(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \xi_4(t)); t \geq 0\}$$

We denote $S(t)$ the server state

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{If the server is idle at time } t; \\ 1, & \text{If the server is busy at time } t; \\ 2, & \text{If the server is waiting for repair at time } t; \\ 3, & \text{If the server is under repair at time } t; \\ 4, & \text{If the server is on vacation at time } t. \end{cases}$$

We define $S^*(t)$ as a type of customers in service.

$$S^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{If the server is occupied by the transit customers;} \\ 2, & \text{If the server is occupied by the recurrent customers.} \end{cases}$$

Let $N(t)$ be the orbit size (i.e, number of customers in the retrial group) at time t . If $S(t) = 0$ and $N(t) > K$, then $\xi_0(t)$ represents the elapsed retrial time of the transit customer; if $S(t) = 1$ and $S^*(t) = 1$, we define $\xi_{11}(t)$ as the elapsed service time of the transit customer; if $S(t) = 1$ and $S^*(t) = 2$, we define $\xi_{12}(t)$ as the elapsed service time of the recurrent customer; if $S(t) = 2$, we define $\xi_2(t)$ as the elapsed repair time; if $S(t) = 3$, we define $\xi_3(t)$ as the elapsed delay time; if $S(t) = 4$, we define $\xi_4(t)$ as the elapsed vacation time.

we first define the state probabilities, state densities and joint state probability densities for the Markov process $Y(t), t \geq 0$. By considering transitions of the process between time t and $t + dt$ and taking $t \rightarrow \infty$, we obtain the following differential equations in steady-state as follows :

$$(\lambda + \gamma)P_{0,K} = r \int_0^\infty \beta_1(x)P_{1,K}(x) + r \int_0^\infty \beta_2(x)P_{2,K-1}(x)dx + \int_0^\infty v(x)V_K(x)dx, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_{0,n}(x)}{\partial x} + (\lambda + \gamma + \alpha(x))P_{0,n}(x) = 0, \quad n \geq K + 1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \mu + \beta_1(x)\right)P_{1,n}(x) &= \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} g_j P_{1,n-j}(x) \\ &+ \int_0^\infty \gamma(y)R_{1,n}(x,y)dy, \quad n \geq K, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \mu + \beta_2(x)\right)P_{2,n}(x) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} g_j P_{2,n-j}(x) + \int_0^\infty \gamma(y)R_{2,n}(x,y)dy, \quad n \geq K-1, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \theta(y)\right)D_{1,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} g_j D_{1,n-j}(x,y), \quad n \geq K, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \theta(y)\right)D_{2,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} g_j D_{2,n-j}(x,y), \quad n \geq K-1, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(x)\right)R_{1,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} g_j R_{1,n-j}(x,y), \quad n \geq K, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(x)\right)R_{2,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} g_j R_{2,n-j}(x,y), \quad n \geq K-1, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + v(y)\right)V_n(y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} g_j V_{n-j}(y), \quad n \geq K. \quad (9)$$

The steady-state boundary conditions are

$$P_{0,n}(0) = r \int_0^\infty P_{1,n}(x)\beta_1(x)dx + r \int_0^\infty P_{2,n-1}(x)\beta_2(x)dx + \int_0^\infty v(x)V_n(x)dx, \quad n > K, \quad (10)$$

$$P_{1,n}(0) = \lambda \sum_{j=1}^{n-K} (1 - \delta_{n,K})g_j \int_0^\infty P_{0,n+1-j}(x)dx + \int_0^\infty \alpha(x)P_{0,n+1}(x)dx + \lambda g_{n+1-K}P_{0,K}, \quad n \geq K, \quad (11)$$

$$P_{2,n}(0) = \gamma(1 - \delta_{n,K-1}) \int_0^\infty P_{0,n+1}(x)dx + \gamma\delta_{n,K-1}P_{0,K}, \quad n \geq K-1, \quad (12)$$

$$D_{1,n}(x,0) = \mu P_{1,n}(x), \quad n \geq K, \quad (13)$$

$$D_{2,n}(x,0) = \mu P_{2,n}(x), \quad n \geq K-1, \quad (14)$$

$$R_{1,n}(x,0) = \int_0^\infty D_{1,n}(x,y)\theta(y)dy, \quad n \geq K, \quad (15)$$

$$R_{2,n}(x,0) = \int_0^\infty D_{2,n}(x,y)\theta(y)dy, \quad n \geq K-1, \quad (16)$$

$$V_n(0) = (1-r) \int_0^\infty P_{1,n}(x)\beta_1(x)dx + (1-r) \int_0^\infty P_{2,n-1}(x)\beta_2(x)dx, \quad n \geq K, \quad (17)$$

and the normalizing condition is

$$\begin{aligned}
P_{0,K} + \sum_{n>K} \int_0^\infty P_{0,n}(x)dx + \sum_{n \geq K} \left(\int_0^\infty P_{2,n}(x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{2,n}(x,y)dxdy \right. \\
\left. + \int_0^\infty R_{2,n}(x,y)dxdy \right) + \sum_{n \geq K} \left(\int_0^\infty P_{1,n}(x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{1,n}(x,y)dxdy \right. \\
\left. + \int_0^\infty R_{1,n}(x,y)dxdy + \int_0^\infty V_n(x)dx \right) = 1
\end{aligned} \quad (18)$$

The following theorem gives the joint distribution of the server state and queue length in terms of probability generating function.

Théorème 3.1. *Under the stability condition, the probabilities generating functions are given by :*

$$\begin{aligned}
P_0(z,x) = \frac{(\lambda + \gamma)[(\lambda + \gamma) - H(z)R(z)]P_{0K}z^{K+1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\
\times (1 - A(x))e^{-(\lambda + \gamma)x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(z,x) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z)R(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\
\times (1 - B_1(x))e^{-G(z)x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(z,x) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[R(z)k_1(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\
\times (1 - B_2(x))e^{-G(z)x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_s(z,x) = \frac{(1 - r)(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[(\lambda + \gamma)k_1(z) - zH(z)]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\
\times (1 - V(x))e^{-\lambda p(1 - g(z))x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1(z,x,y) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z)R(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\
\times \mu(1 - B_1(x))(1 - C(y))L_D(\lambda p(1 - g(z)))e^{-(G(z)x + \lambda p(1 - g(z))y)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2(z,x,y) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[R(z)k_1(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\
\times \mu(1 - B_2(x))(1 - C(y))L_D(\lambda p(1 - g(z)))e^{-(G(z)x + \lambda p(1 - g(z))y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1(z,x,y) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z)R(z))]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\
\times \mu(1 - B_1(x))(1 - D(y))e^{-(G(z)x + \lambda p(1 - g(z))y)},
\end{aligned}$$

$$D_2(z, x, y) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[R(z)k_1(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)R(z)z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)R(z)k_1(z)]} \\ \times \mu(1 - B_2(x))(1 - D(y))e^{-(G(z)x + \lambda p(1 - g(z))y)}$$

$$P_{0K} = \frac{\lambda p g_1 [(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))(1 - \rho_1) - (\lambda g_1 + \gamma \rho_2)(1 - L_A(\lambda + \gamma))]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda g_1(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_1]}$$

Where

$$R(z) = r + (1 - r)L_V(\lambda p(1 - g(z)))$$

$$H(z) = \lambda z^{-1}g(z)k_1(z) + \gamma k_2(z)$$

$$G(z) = \lambda p(1 - g(z)) + \mu - \mu L_D(\lambda p(1 - g(z)))L_C(\lambda p(1 - g(z)))$$

$$k_i(z) = L_{B_i}(G(z)) \quad i = 1, 2$$

Remarque 3.1. like all the probabilities are written according to P_{0K} . Hence from normalizing condition (18) we get

$$P_{0K} = 1 - \rho$$

Then it immediately follows that the steady state condition is $\rho < 1$, where ρ is given as follow

$$\rho = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda g_1\rho_1 + \gamma\rho_2] + \lambda p g_1(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda\rho_1 + \gamma\rho_2 - \lambda(1 - g_1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda g_1(1 - p)\rho_1 + \gamma\rho_2 + \lambda p g_1]} \quad (19)$$

4 Performance Measures

In this section, we derive some performance measures of the system under the steady state condition.

Corollaire 4.1. 1. The mean number of transit customers in the retrial group is given by

$$E(N_T) = \frac{\lambda g_{[1]}^2 \rho_3(1 - p) - \gamma g_{[2]} \rho_2 + \gamma \rho_4 g_{[1]}}{2g_{[1]}(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})} \\ + \frac{(1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[2]} + \gamma \rho_4 + 2(\lambda g_{[1]}\rho_1 + \gamma \rho_2)) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3}{2\{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))(1 - \rho_1) - (\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2)(1 - L_A(\lambda + \gamma))\}} \quad (20)$$

2. The mean number of transit customers in the system is given by

$$E(L_T) = \frac{2k_1'(1)g_{[1]}(\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2) + g_{[1]}(\lambda g_{[1]}\rho_3(1 - p) + \gamma \rho_4) - \gamma g_{[2]}\rho_2}{2g_{[1]}(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})} \\ + \frac{\lambda p g_{[1]}((1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[2]} + 2\lambda g_{[1]}\rho_1 + 2\gamma \rho_2 + \gamma \rho_4) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3)}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})P_{0K}} \quad (21)$$

3. The mean orbit size is given by

$$\begin{aligned}
 E(N) = & (K - 1) + \frac{\lambda p g_{[1]} + \gamma \rho_2 - \gamma k_2'(1)(1 - \rho_1)}{\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]}} \\
 & + \frac{\lambda p g_{[1]}(1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[1]}\rho_1 + \gamma \rho_2)}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})P_{0K}} \\
 & + \frac{\lambda p g_{[1]}\{(1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[2]} + \gamma \rho_4) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3\}}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})P_{0K}} \\
 & + \frac{\lambda g_{[1]}^2(1 - p)(\rho_3 + 2\rho_1) - \gamma g_{[2]}\rho_2 + \gamma g_{[1]}\rho_4}{2g_{[1]}(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})}
 \end{aligned} \quad (22)$$

4. The mean system size is given by

$$\begin{aligned}
 E(L) = & K + \frac{2k_1'(1)g_{[1]}(\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2) + g_{[1]}(\lambda g_{[1]}\rho_3(1 - p) + \gamma \rho_4) - \gamma g_{[2]}\rho_2}{2g_{[1]}(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})} \\
 & + \frac{\lambda p g_{[1]}((1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[2]} + 2\lambda g_{[1]}\rho_1 + 2\gamma \rho_2 + \gamma \rho_4) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3)}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda g_{[1]}(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})P_{0K}}
 \end{aligned} \quad (23)$$

Where

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \lambda p g_{[1]}\{(1 - r)\eta_1 + (1 + \mu \gamma_1 + \mu \phi_1)\beta_{11}\} \\
 \rho_2 &= \lambda p g_{[1]}\{(1 - r)\eta_1 + (1 + \mu \gamma_1 + \mu \phi_1)\beta_{21}\} \\
 \rho_3 &= R''(1) + 2R'(1)k_1'(1) + k_1''(1) \\
 \rho_4 &= R''(1) + 2R'(1)k_2'(1) + k_2''(1)
 \end{aligned}$$

Références

- [1] Aissani, A.(1994). A retrial queue with redundancy and unreliable server, Queueing systems 17,431-449.
- [2] Artalejo, J. A. (1994). New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers, Statistics Neerlandica. vol.48, nr.1, pp. 23-36.
- [3] Choudhury, G., Ke, J-C. (2012). A batch arrival retrial queue with general retrial times under Bernoulli vacation schedule for unreliable server and delaying repair, Appl. Mathemat. Model 36,255–269.
- [4] Falin, G. I., Templeton, J. G. C. (1997). Retrial queues, Chapman and Hall, London.
- [5] Farahmand, K. (1990). Single line queue with repeated demands, Queueing Systems, 6, 223–228.
- [6] Gao, S., Liu, Z. and Dong, H.(2012) A repairable discrete-time retrial queue with recurrent customers, Bernoulli feedback and general retrial times. Oper Res Int J 12, 367383. <https://doi.org/10.1007/s12351-010-0098-7>

[7] Jain, M., Bhagat, A. (2014). Unreliable bulk retrial queues with delayed repairs and modified vacation policy, J. Int. Eng. Int.

[8] Kim, B. K., Lee, D. H. (2013). The $M/G/1$ queue with disasters and working breakdowns, Appl. Math. Model.

[9] Moreno, P. (2004). An $M/G/1$ retrial queue with recurrent customers and general retrial times, Appl. Mathemat. Comp 159, 651–666.

[10] Yi Peng, Jinbiao wu (2021). Analysis of a batch arrival retrial queue with impatient customers subject to the server disasters. AIMS 2243-2264



Power contamination and domination on the grid

Amina Ainouche¹ and Sadek Bouroubi^{*2}

¹L'IFORCE Laboratory, Operational Research Department, USTHB, Algiers, Algeria,
a.ainouche@yahoo.fr

²L'IFORCE Laboratory, Operational Research Department, USTHB, Algiers, Algeria,
bouroubis@gmail.com

Abstract : The contamination game of a grid graph $G(n, m)$ is a dynamic variant of the domination [7], similar to the power domination [8]. This standard is introduced by Haynes, Hedetniemi and Henning in 2002 [6], which is initially defined as a basic domination for a set of vertices S in a graph G , and then a propagation of this domination in all vertices of G , while starting with S . On the other hand, the contamination phenomena in $G(n, m)$ is interpreted by an evolutionary automaton cellular, which aims to propagate viruses according to a given propagation rules. In this paper, we define a mathematical self-playing game called a contamination game based on the power domination, in which, we identify the minimum number of contaminant cells for $G(n, m)$, called the contamination number and denoted $\gamma_c(G(n, m))$.

MSC: 0C569 ; 05C12

Keywords : Domination ; Power domination in graph ; Contamination in a grid graph

1 Introduction

Electric power systems need to be monitored in real-time. One way to achieve this task is to place phase measurement units at selected locations in the system. The power system monitoring problem is a combinatorial optimization problem that consists of minimizing the number of measurement devices to be put in an electric power system. The power system monitoring problem has been formulated as a graph theory domination problem by Haynes, Hedetniemi, Hedetniemi, and Henning in [7]. This problem is of somehow different flavor than standard domination type problems, since putting a phase measurement unit into a vertex of a graph can have global effects. For instance, if an electric power system can be modeled by a path, then a single measurement unit suffices to monitor the system no matter how long is the path.

Let $G = (V, E)$ be a connected graph. For a vertex v of G , let $N(v)$ denote the open neighborhood of v , and for a subset S of V let $N(S) = (\cup_{v \in S} N(v)) \setminus S$. We denote with $M(S)$ the set monitored by S , defined algorithmically as follows [4] :

*Corresponding Author

Algorithm 1 Construction of a monitored set $M(S)$

Input: Graph $G = (V, E)$ and $S \subset V$.

Output: $M(S)$: the monitored set by S .

```
1: Initiate  $M(S) \leftarrow S \cup N(S)$ ;  
2: While there exists  $v \in M(S)$  such that  $N(v) \cap (V \setminus M(S)) = \{w\}$  do  
3:    $M(S) \leftarrow M(S) \cup \{w\}$ ;  
4: EndWhile ;  
5: Return  $M(S)$  ;
```

The set S is called a power dominating set of G if $M(S) = V$ and the power domination number, denoted by $\gamma_\pi(G)$, is the minimum cardinality of a power dominating set. Various papers have addressed the power domination number, in which they essentially concentrate on its algorithmic point of view. This problem is proven to be NP-complete even when restricted to bipartite graphs, chordal graphs, planar graphs, circle graphs and split graphs [4]. In contrast, the problem can be solved in polynomial time for trees and interval graphs [4, 6]. Dorfling and Henning obtained closed formulas for the power domination numbers of grid graphs [5]. This result is in striking contrast with the fact that a determination of such formulas for the usual domination number of grid graphs is an open problem [7]. Now, a natural description of a grid is a cartesian product of two paths. However, there exist other graph products such as the strong, the direct, and the lexicographic product [7].

In this paper we introduce a new variant of domination characterized as a virus-contamination in grid graph $G(n, m)$, which is defined in two steps :

- (1) Local domination for a few cells of $G(n, m)$.
- (2) Propagation on all cells of $G(n, m)$ according to a given initial contamination rules.

2 Power Contamination on the Grid

Let $G(n, m) = (V, E)$ be a grid graph, and $S \subset V$. The set S is said to be a contaminating set if a full contamination of $G(n, m)$ can be achieved from S and the power contamination number $\gamma_c(G(n, m))$ is the minimum cardinality of a power contaminating set. In the following, we will illustrate the problem as a self-playing game, in order to deal with the problem of contamination in $G(n, m)$.

For a vertex v of $G(n, m)$, let $M(v)$ and $VN(v)$ denote, respectively, Moore neighborhood (see Fig.1(a)) and Von Neumann neighborhood (see Fig.1(b)) of v , extended to the cells at the edge of $G(n, m)$.

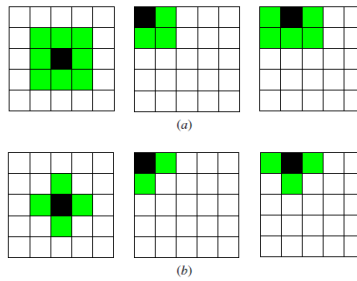


FIGURE 1 – Moore and Von Neumann neighborhoods of the black cell.

2.1 Contamination Rules in $G(n, m)$

The contamination game of $G(n, m)$ can be seen as a cellular automaton, or a model where each state leads automatically to the next state from predefined rules. This game takes place on $G(n, m)$, whose cells are considered by analogy as living cells, which can take two different states "sick" or "healthy". At each step, the state of any cell is determined by the state of its eight neighbors, in regards to a given initial contamination rules. The goal of this game is to find the minimum number of initial contaminated cells $\gamma_c(G(n, m))$, such that the entire grid is contaminated. This kind of contamination can be seen as an evolutionary cellular automaton, which models an epidemiological phenomenon, illustrating the propagation of viruses in living cells.

The space of states is a two-dimensional grid of sick or healthy living cells. The chosen transition rule depends on the number and position of the contaminated living neighboring cells that surround a cell, it corresponds to Moore neighborhood.

A cell v is contaminated by two sick cells v_1 and v_2 , if one of the following conditions is fulfilled :

- (1) $v_1, v_2 \in VN(v)$,
- (2) $v_1, v_2 \notin VN(v)$ and $M(v_1) \cap M(v_2) = \{v\}$.

The possible configurations which satisfies these conditions are given in Figure 2.

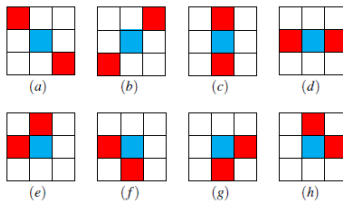


FIGURE 2 – The contamination rules of the blue cell.

The following algorithm illustrates the contamination and spread process which yield the contaminated set S , according to the contamination rules :

Algorithm 2 Construction of a contaminated set $C(S)$

Input: Graph $G = (V, E)$ and $S \subset V$.

Output: $C(S)$: the subset of vertices contaminated by S .

- 1: Initialize $C(S) \leftarrow S$;
 - 2: **While** $\exists v \in V \setminus C(S)$, such that the conditions (1) or (2) are satisfied **do**
 - 3: $C(S) \leftarrow C(S) \cup \{v\}$;
 - 4: **End While** ;
 - 5: **Return** $C(S)$;
-

2.2 Mathematical Model

Let $x_{ij}^{(k)}$ be the decision variable at the step k ,

$$x_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{if the cell } (i, j) \text{ is contaminated in step } k; \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

The goal of this game is to find the minimum number of contaminating cells $\gamma_c(G(n, m))$ at the step 0, so that the entire grid is contaminated after k_0 steps, according to Algorithm 2.

The objective is the following :

$$\mathcal{M}in(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(0)} \stackrel{(k_0 \text{ steps})}{\rightsquigarrow} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(k_0)} = nm,$$

according to the contamination rules presented above, which are written as follows :

$$k \rightarrow k+1 \left\{ \begin{array}{l} x_{ij}^{(k)} x_{i+,j+}^{(k)} \leq x_{i+1,j+1}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n-2, \forall j = 1, m-1; \quad (\text{Fig.2(a)}) \\ x_{ij}^{(k)} x_{i+,j-}^{(k)} \leq x_{i+1,j-1}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n-1, \forall j = 1, m-1; \quad (\text{Fig.2(b)}) \\ x_{ij}^{(k)} x_{i+,j}^{(k)} \leq x_{i+1,j}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n-2, \forall j = 1, m; \quad (\text{Fig.2(c)}) \\ x_{ij}^{(k)} x_{i,j+}^{(k)} \leq x_{i,j+1}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n, \forall j = 1, m-2; \quad (\text{Fig.2(d)}) \\ x_{ij}^{(k)} x_{i+1,j-1}^{(k)} \leq x_{i+1,j}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n-1, \forall j = 1, m; \quad (\text{Fig.2(e)}) \\ x_{ij}^{(k)} x_{i+1,j+1}^{(k)} \leq x_{i,j+1}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n-1, \forall j = 1, m-1; \quad (\text{Fig.2(f)}) \\ x_{ij}^{(k)} x_{i+1,j-1}^{(k)} \leq x_{i,j-1}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n-1, \forall j = 1, m-1; \quad (\text{Fig.2(g)}) \\ x_{ij}^{(k)} x_{i+1,j+1}^{(k)} \leq x_{i+1,j}^{(k+1)}, \quad \forall i = 1, n-1, \forall j =, m-1; \quad (\text{Fig.2(h)}) \\ x_{ij}^{(k)} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, n, \forall j = 1, m, \forall k \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

3 Contamination on Strong Product of Two Paths

A natural representation of a grid $G(n, m)$ is as the strong product of two paths $P_n \boxtimes P_m$, such that :

1. Each cell of $G(n, m)$ is represented by a vertex v in $P_n \boxtimes P_m$.
2. The neighbors between two cells in $G(n, m)$ is represented by an edge in $P_n \boxtimes P_m$.

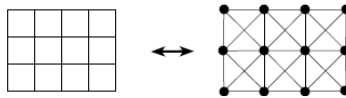


FIGURE 3 – $G(3, 4)$ modeled as the strong product of paths.

The number of neighbors of each cell in $G(n, m)$ represents the degree of the corresponding vertex in $P_n \boxtimes P_m$, as shown in Figure 3. This implies that the virus-contamination on $G(n, m)$ is equivalent as on $P_n \boxtimes P_m$.

The evolution of the total contamination of the grid $G(3, 4)$ is shown in Figure 4.

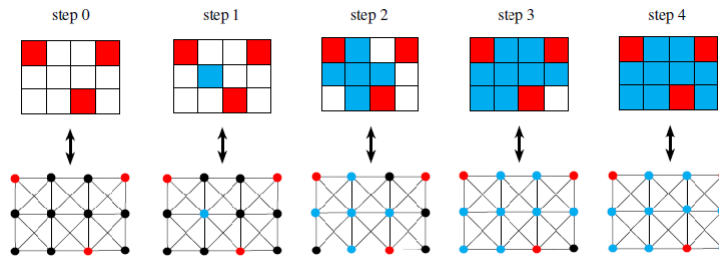


FIGURE 4 – The evolution of the total contamination of $G(3, 4)$.

4 Main Results

Lemma 4.1. For any positive integer m , the contamination number of the path P_m is :

$$\gamma_c(P_m) = 1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Théorème 4.1. Let n, m be two positive integers. Then we have

$$\gamma_c(P_n \boxtimes P_m) \leq \begin{cases} \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right\} + 1 & \text{if } m \text{ and } n \text{ have the same parity,} \\ \max \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \right\} + 1 & \text{else.} \end{cases}$$

Corollaire 4.1. *For any positive integer n , we have :*

$$\gamma_c(P_n \boxtimes P_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

5 Conclusion

In this work, we have introduced a new dynamic variant of domination, which has the same principle of unfolding as power domination. This type of domination can be interpreted as a biological phenomenon or an evolutionary social phenomenon, which is called a *contamination game* and takes place in the grid graph $G(n, m)$. We identified an upper bound for the minimum number of contaminant cells $\gamma_c(G(n, m))$ in $G(n, m)$.

References

- [1] A. Aazami, Domination in graphs with bounded propagation : algorithms, formulations and hardness results. J. Comb. Optim. 19 (2010), No. 4, 429-456.
- [2] T.L. Baldwin, L. Mili, M.B. Boisen and R. Adapa, Power system obserability wih minimal phasor measurement placement, IEEE Trans Power System 8(2) : 707-715, 1993.
- [3] J.G. Chang, P. Dorbec, M. Montassier and A. Raspaud, Generalized power domination of graphs. Discrete Appl. Math. 160 (2012), No. 12, 1691-1698.
- [4] P. Dorbec, M. Mollard, S. Klavzar and S. Spacapan, Power Domination in product graphs, SIAM J. Discrete Math. 22(2) : 554-567, 2008.
- [5] M. Dorfing, M.A. Henning. A note on power domination in grid graph, Discrete Applied Math. 154(6) : 1023-1027, 2006.
- [6] T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi S.T. Hedetniemi and M.A. Henning, Domination in graphs applied to electric power networks, SIAM J. Discrete Math. 15(4) : 519-529, 2002.
- [7] D. Gonçlves, A. Pinlou, M. Rao and S. Thomassé, The domination number of grid. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 25(4) : 1443-1453, 2011.
- [8] C.-S. Liao and D-T. Lee, Power domination problem in graph, lecture Notes comp.Sci. 3595(2005), 818-828.
- [9] D. Ferrero, S. Varghese and A. Vijayakumar, Power domination in honeycomb networks. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 14(6) :521-529, 2011.
- [10] P. Dorbec, S. Varghese and A. Vijayakumar, Heredity for generalized power domination. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 18(3), 2016.
- [11] P. Dorbec and S. Klavzar, Generalized power domination : Propagation radius and Sierpinski graphs. Acta Applicandae Mathematicae, 134(1) : 75-86, 2014.
- [12] P. Bose, C. Pennarun and S. Verdonschot, Power domination on triangular grids : CCCG 2017, Ottawa, Ontario, July 26-28, 2017.



Total flowtime minimization in flow shop with resources constraints by using meta-heuristics

Imane Laribi  ¹

¹MELT Laboratory, Faculty of Technology, University of Tlemcen, Algeria,
imane.laribi@univ-tlemcen.dz

Abstract : Flow shop scheduling problems have been widely studied in the literature due to their application in many industries. Most of the researchers in this area of scheduling deal with machines as the only resource in conducting production tasks. However, other additional resources such as raw materials are usually not only required for processing jobs but also are often restricted, we refer to this resource as non-renewable. To close the problem to real-world condition, this paper addresses a permutation flow shop scheduling problem subject to non-renewable resources constraints, where the objective function is to minimize the total flowtime. Since the considered problem is strongly NP-hard, application of meta-heuristics is indispensable. Therefore, two meta-heuristic algorithms including a Genetic Algorithm (GA) and Particle Swarm Optimization Algorithm (PSO) are suggested to find optimal or near optimal solutions. The computational results demonstrated that in small to medium scale problems, PSO is more effective than GA, but in large scale problems the suggested GA statistically outperformed the PSO for our investigated problem.

Keywords : flow shop scheduling problem ; non-renewable resources constraints ; meta-heuristics ; total flowtime

1 Introduction

Scheduling problem is a significant issue that has a major impact on increasing the productivity of manufacturing systems, it concerns to assign a set of limited resources (renewable and/or non-renewable) to a set of tasks (jobs) with respect to operational constraints such that the optimal usage of available resources is obtained.

Among the different possible configurations in manufacturing systems, this paper focuses on a Flow Shop (FS) environment since it can be found in lots of applications in chemical, pharmaceutical, steel, food and assembly industries. The FS problem is defined as a production problem where a set of n jobs have to be executed with identical flow patterns on a set of m machines. When the order of jobs processing on all machines is the same, we have the Permutation Flow Shop Scheduling Problem (PFSP). This kind of problem is NP-hard [1].

*Corresponding Author

Due to the strong industrial background, the PFSSP has received a considerable attention from researchers. In most of PFSSP studies, the only resource considered is the machine. However, in most real life manufacturing environment, jobs may also require, besides machines additional resources such as raw materials. We refer to these resources as non-renewable or consumable resources. Taking into account the availability of non-renewable resources in the production process implies that not only machine must be free when starting a job, but also the non-renewable resources must be available in sufficient quantities. There are several applications of PFSSP subject to non-renewable resources in industry practice. Paint shop of an automobile manufacturer is an example of such problem. Assume that the paint shop is switching to paint a batch of automobiles in black. At any time moment, if the quantity of paint will be not sufficient to paint the automobile being processed than the process will be stopped until the replenishment of the required quantity of paint from outside the production system. Consequently, the efficiency of production will be affected by the delay caused by the unavailability of resource.

Motivated by the previously described background, this paper explores the PFSSP that takes into account the non-renewable resources. In terms of the objective function to be optimized, the maximum completion time or makespan has been the most analyzed criterion in the literature. However, in many real industries the total flowtime metrics have taken more relevance than those referring to the makespan. The total flowtime is an important performance measure in production scheduling as it affects the inventory levels and lead times. Moreover, minimizing this performance measure not only enables a time-based competition but also results in reduced work in process.

In our problem, once the required quantity of non-renewable resource is not enough to process job, the job being processed must be stopped until the availability of the required quantity of consumable resource. This issue will result in some jobs being late and a relatively larger flowtime is generated. It has been recognized that the inventory level increases as the total flowtime increases. Therefore, this paper aims to find a smaller total flowtime schedule that considers both the availability of renewable and non-renewable resources in PFSSP.

Laribi et al. [2] and Györgyi et al. [3] performed a comprehensive literature review of scheduling problems related to this research. The authors in [2] developed also an integer programming model and proposed an approximate resolution method based on a genetic algorithm to investigate the flow shop scheduling problem subject to non-renewable resources constraints. Their objective is to find a schedule that minimizes the makespan. To obtain better and more robust solutions, the Taguchi method is performed for tuning the parameters and operators of the algorithm. To the best of our knowledge, all of the previous research in PFSSP subject to non-renewable resource constraints address only the minimization of the makespan criterion. That is to say, there is no other research that investigates the resources constraints FS problems by considering minimization of total flowtime as objective.

2 Problem Statement

Following the three-field classification scheme used by Toker et al. [4], we denote the investigated scheduling problem as $F_m|prmu, NR|\sum C_j$, where m is the number of machines, $prmu$ denotes that only permutation schedules are allowed, NR indicates the existence of non-renewable resources and $\sum C_j$ denotes the total completion time minimization (total flow-

time) as the optimization criterion. The assumptions of this research are :

- A set $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ of n jobs must be processed on a set $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ of m machines sequentially.
- Each job $j, j \in \{1, \dots, n\}$ requires a fixed positive processing time P_{ij} on every machine $i, i \in \{1, \dots, m\}$.
- Besides machines, we assume the existing of a set $R = \{R_1, R_2, \dots, R_r\}$ of r additional non-renewable resources.
- We assume that $r = m$, i.e., each consumable resource is dedicated to one and only one machine (unshared resource).
- Each resource $R_l, l \in \{1, \dots, r\}$ is delivered from external suppliers to the machine where there is a need with limited amounts at several fixed delivery dates.
- The job can only start processing when the required non-renewable resource is available in sufficient quantities.
- After processing a job, the stock of resource is decreased by the applied quantities.
- Each job can be processed on only one machine at a time and each machine can process only one job at a time.
- The sequence of jobs is the same on every machine (permutation schedule).
- No preemption is allowed i.e., job once started on machine, continues in processing until it is completed.

3 Approximate resolution method

Meta-heuristics have as a purpose determining in a reasonable time, approximate solution to an optimization problem when there is no exact method to solve it effectively. In this section, we investigate two meta-heuristics based population : genetic algorithm and particle swarm optimization for solving the proposed problem.

3.1 Genetic algorithm

Genetic Algorithm (GA) is meta-heuristic that use analogies with genetic biological processes to solve optimization problems. GA is implemented as iterative algorithm that use a population of individuals to represent possible solutions to the considered problem. In each iteration, the best individuals of the population produce an offspring through crossover and mutation operators. These new individuals, along with some of their parents, form a new population that is used in the next iteration. This process is repeated until a good solution is found or a specified number of generations have been executed. The pseudo-code of the proposed GA for the considered PFSSP can be summarized by algorithm 1 where P_{size} refers to the population size, P_c represents the crossover probability, P_m denotes mutation probability and t_{max} for maximum number of generations.

3.2 Particle swarm optimization

Particle Swarm Optimization (PSO) is an evolutionary technique for solving unconstrained continuous optimization problems. It imitating the behavior of flocks of birds, schools of fish searching for food by implementing an information sharing approach. Like GA, PSO is

Algorithm 1 GA for the considered PFSSP

Initialize parameters P_{size} , P_c , P_m and t_{max} .
Generate initial population randomly ($P_{size}=200$ individuals).
Calculate the fitness (total flowtime criterion) for each individual.
while number of iterations $\leq t_{max}$ **do**
 Select the best fit individuals using wheel selection procedure.
 Recombine pairs of parents using two-points crossover with $P_c=0.9$.
 Mutate resulting offspring using shift mutation with $P_m=0.15$.
 Evaluate fitness of new individuals.
 Replacement using elitism strategy.
end while
Output best individual found.

also a population based search algorithm where each individual is referred as particle and represents a potential solution. PSO system starts with a randomly generated initial population (swarm) of individuals (particles) and searches iteratively in the searching space for optimal solution. The original PSO was designed for a continuous solution space so it can not be used for PFSSP. In what follow, we modified the PSO position representation, particle velocity and the updating mechanism, to make PSO suitable for the considered problem.

- Solution representation : For solving the PFSSP subject to resources constraints, we use the permutation representation mechanism, i.e., each particle i is represented by a sequence $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\}$, $x_{ij} \in n$.
- Updating the particles : since particle position X_i and velocity V_i are both a permutation of jobs then the crossover operator \otimes can be used to redefine the model of the original PSO algorithm. So, position and velocity of the particle can be updated respectively according to equation (1) and (2). It can be found that, each particle in the swarm follows two best solutions, the personal best position found by itself denoted by $pbest_i$ and the global best position in the entire swarm denoted by $gbest$.

$$X_i^{t+1} = X_i^t \otimes V_i^{t+1} \quad (1)$$

$$V_i^{t+1} = pbest_i^t \otimes gbest^{t+1} \quad (2)$$

- Crossover operator : The crossover used for these equations is the two-points crossover. Applying this operator, we can get two offspring particles, we compare them and we pick the particle with the smaller total flowtime criterion as a final offspring particle.
- Diversification : it can be observed from the two previous equations that if personal best position has the same permutation as global best position and if the new achieved velocity has the same sequence as the current position then the evolution process will be stagnated. To prevent the trend, the mutations operator denoted by M is introduced to eliminate the stagnation and avoid premature convergence.
The following equations are used receptively for the two conditions :

$$V_i^{t+1} = M(gbest^t) \quad (3)$$

$$X_i^{t+1} = M(X_i^t) \quad (4)$$

The pseudo-code of the proposed PSO algorithm for the considered PFSSP is given in algorithm 2

Algorithm 2 PSO for considered PFSSP

Initialize parameters N and t_{max} .
Generate randomly the swarm of N particles ($N=200$).
Evaluate the total flowtime criterion for each particle i in the swarm.
Find $pbest_i$ for each particle and $gbest$ for all particles.
while maximal number of iterations is not achieved **do**
 for each particle i **do**
 By Eq.1 update the position of each particle.
 By Eq.2 update the velocity of each particle.
 Apply the diversification strategy using eq.3 and eq.4.
 Evaluate the fitness of the new particle position.
 Update the $pbest_i$ for each particle and $gbest$ for all particles.
 end for
end while
Output $gbest$.

4 Computational results

In order to evaluate the performance of the proposed algorithms for total flowtime (TFT) minimization in PFSSP under non-renewable resources constraints, the instances tested were those of 10, 20, 50 and 100 jobs with 5 and 10 machines taken from the benchmark instances introduced by [2] where the availability of the non-renewable resources is assumed to be Non-uniform arrival, i.e., the availability function of each non-renewable resource is assumed to be either an increasing, a decreasing or a random staircase function. Table 1 reports the performance of both GA and PSO for small to large problems. The experiments results show that the PSO outperform GA for small to medium instances. However, for large size problem (up to 50 jobs with 10 machines) GA become more effective than PSO. Regarding the CPU times, GA found a solution more quickly for all instances.

5 Conclusion

Optimization methods such as GA and PSO are two approaches based population, they have proved them selves to be effective solution to optimization problems. The objective of this paper is to compare the performance of these two optimization algorithms for PFSSP subject to non-renewable resources with minimizing the total flowtime. The results show that the PSO algorithm has obtained better performance for small to medium problems. However, for large problems GA surpassed PSO. As future works, we try to improve the efficiency of the proposed PSO by hybridizing it with other search heuristics since the advantage of the

Instances		GA		PSO	
<i>n</i>	<i>m</i>	TFT	CPU(s)	TFT	CPU(s)
10	5	4588	0.14	4570	10.67
10	10	3906	0.15	3906	11.72
20	5	14292	0.35	14259	12.3
20	10	10761	0.55	10708	29.15
50	5	63666	1.80	62651	30.87
50	10	88551	2.34	90592	35.38
100	5	357717	12.17	367839	57.62
100	10	373061	16.25	378383	76.10

TABLE 1 – Comparaison of total flowtime obtained using GA and PSO

proposed PSO model is that there are no parameters to adjust except the swarm size and the maximum number of generation which allows us to save time of tedious work of parameter turning.

References

- [1] M. . R. Garey and D. S. Johnson, "The complexity of flowshop and jobshop scheduling," *Mathematics of operations research*, vol. 2, pp. 117–129, 1976.
- [2] I. Laribi, F. Yalaoui, and Z. Sari, "Permutation flow shop scheduling problem under non-renewable resources constraints," *Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimization*, 2018, forthcoming.
- [3] P. Györgyi and T. Kis, "Minimizing total weighted completion time on a single machine subject to non-renewable resource constraints," *Journal of Scheduling*, vol. 22, no. 6, pp. 623–634, 2019.
- [4] A. Toker, S. Kondakci, and N. Erkip, "Scheduling under a non-renewable resource constraint." *Operational Research Society*, vol. 42, pp. 811–814, 1991.



Optimisation of Batch stochastic (s, Q) continuous review inventory system with retrial demands

Lydia Bazizi^{*1}, Fazia Rahmoune², and Ouiza Lekadir³

¹LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
lydia.bazizi@univ-bejaia.dz

²LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
fazia.rahmoune@univ-bejaia.dz

³LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
ouiza.lekadir@univ-bejaia.dz

Abstract : In this paper, we analyze an (s, Q) continuous review inventory system with batch arrivals, batch retrials and immediate service, using the BDSPNs (Batch Deterministic and Stochastic Petri Nets). Arriving batch demands enter to the system according to Poissonian process and are served immediately from the stock on hand. If the system is out-of-stock, the arriving demands join a virtual orbit with limited capacity and repeat their requests after a random time exponentially distributed, under the constant retrial policy. However, in the case of full orbit, the arriving demands are definitively rejected from the system. The mechanism of the considered system can be described by a bi-dimensional CTMC (Continuous-Time Markov Chain) expressed by the inventory level and the number batch demands in the orbit. Moreover, we derived some performance measures at the steady state are derived through a recursive algorithm. Finally, an optimisation problem is numerically studied.

Keywords : (s, Q) Inventory systems ; BDSPNs, Partial backlog assumption ; CTMC ; Performance measures ; Recursive algorithm.

1 Introduction

In the literature of inventory systems with shortages, an unsatisfied demand is faced to two principales situations : completely ordered (backlog case) or completely lost (lost sales case). Otherwise, in daily situations, it is more reasonable to assume that some of excess demands are backordered and the rest is lost which is known as the partial backlog case. The most common works dealing with this assumption are [5, 7, 2].

In out-of-stock situation, the unsatisfied demand can wait in a virtual orbit and makes successive attempts before it received its service. This concept gave rise to the retrial theory

^{*}Corresponding Author

in the context of inventory systems, which was first proposed by Artalejo et al. in [2]. Since then, inventory systems with retrials have received considerable attention in many research works [10, 8, 6, 14].

To analyze these complex inventory systems, several modeling tools have been investigated among others, Markov chains ([2, 6, 10]), Queuing theory([1, 12, 9]), finally Petri nets (PNs) ([3, 11]).

Labadi et al. in [3] have proposed a new formalism named the BDSPNs (Batch Deterministic and Stochastic Petri Nets) which respond to the need of representing a finite quantity (batch), also this formalism is structured to be responsive to represent stochastic and deterministic events.

In the present work, we have selected the BDSPNs to analyse an inventory system with batch retrial demands in the partial backlog case.

2 Description of the considered inventory system and the BDSPN associated model

2.1 Description of the considered inventory system

The considered system can be represented in Figure 1.

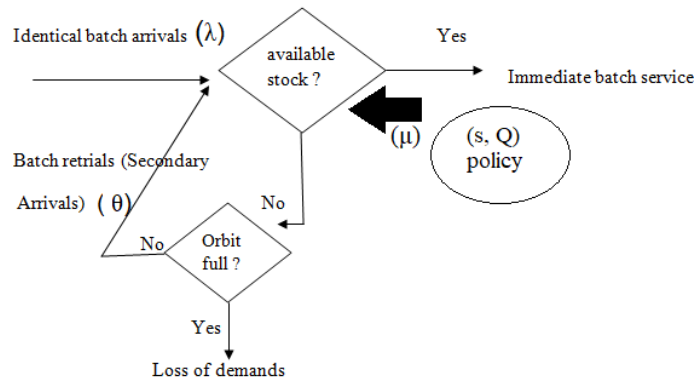


FIGURE 1 – The (s, Q) continuous review inventory system with partially backlogged batch demands

2.2 The associated BDSPN model

In this section, we model the described inventory system using the BDSPNs formalism represented in Figure 1.

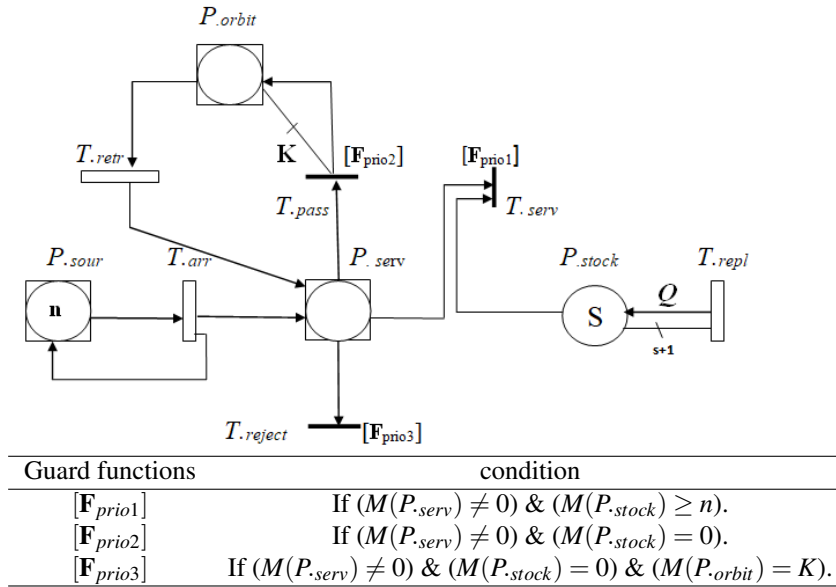


FIGURE 2 – The BDSPN model of the considered inventory system.

3 The stochastic analysis of the BDSPN model

The stochastic analysis of the studied system through the BDSPNs formalism is done by steps :

As a first step, we have generated the reachability graph of the BDSPN model representing the state space of the system. As a second step, from the isomorphism property between the reachability graph and the graph of CTMC states, we have obtained the stochastic process.

The stochastic process of the studied inventory system is the bi-dimensional continuous time Markov chain represented by the stock level and the number of batch demands in the orbit, with the discrete state space $\Omega_M^n = \{(ni, nl) / 0 \leq i \leq \alpha, 0 \leq l \leq \gamma\}$, where $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$, and $n \in \mathbb{N}^*$.

The infinitesimal generator P_∞ matrix representation is written as follows :

$$P_\infty(l;m) = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & \dots & K-1 & K \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ K-1 \\ K \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_0 & C & & & & \\ B & A_1 & \ddots & & & \\ & B & A_1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & C & \\ & & & B & A_1 & C \\ & & & & B & A_1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Such as A_0, A_1, C and B are square matrices of order $(\alpha + 1)$.

3.1 The steady state probabilities distribution

The steady state probabilities distribution $\Pi = (\Pi^0, \Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^\gamma)$, where $\Pi^l = (\pi_0^l, \pi_1^l, \dots, \pi_\alpha^l)$, $\forall l \in \{0, 1, \dots, \gamma\}$ is obtained by solving the following linear system :

$$\begin{cases} \Pi P_\infty = 0; \\ \sum_{l=0}^{\gamma} \sum_{i=0}^{\alpha} \pi_i^l = 1. \end{cases}$$

To solve the system above, we have to solve $\alpha \times (\gamma + 1)$ independent linear equations. The schema of resolution of the linear system can be described by a backward recursive procedure.

3.2 Performances measures

The most important performance measures at the steady state while adapting formulas which are applied to BDSPNs.

1. **The expected inventory level per unit**, noted $E_{I(u)}$:

$$E_{I(u)} = \sum_{M_j \in \Omega_M^n} M_j(P_{stock}) \pi_{M_j} = n \sum_{l=0}^{\gamma} \sum_{i=1}^{\alpha} i \pi_i^l. \quad (1)$$

Where $M_j(P_{stock})$ is the number of tokens in the place P_{stock} in the marking M_j , and π_{M_j} is the steady-state probability that the process is at the state (marking) M_j in the set of tangible markings Ω_M^n .

2. **The expected number of batch demands in the orbit**, noted E_o :

$$E_o = \sum_{\mu_j \in G\mu A(BDSPNs, \mu_0)} Card[\mu_j(P_{orbit})] \pi_{\mu_j} = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{l=1}^{\gamma} l \pi_i^l. \quad (2)$$

Where $G\mu A(BDSPNs, \mu_0)$ is the set of accessible μ -marking from the initial μ -marking μ_0 and $Card[\mu_j(P_{orbit})]$ represent the cardinality of the set $\mu_j(P_{orbit})$.

3. **The expected rate of lost demands**, noted E_l :

$$E_l = \lambda Proba[[M(P_{stock}) = 0] \text{ and } [M(P_{orbit}) = K]] = \lambda \pi_0^\gamma, \quad (3)$$

Where π_0^γ is the probability that a primary batch demand will be lost.

4. **The expected reorder level**, noted E_r :

$$E_r = \sum_{M_j \in S(T_{repl})} \mu \pi_{M_j} = \sum_{l=0}^{\gamma} \sum_{i=0}^{\beta} \mu \pi_i^l. \quad (4)$$

Where $S(T_{repl})$ is the set of M -marking at which the transition T_{repl} is enabled.

5. **The overall served-retrial rate**, noted θ_{ser} :

$$\theta_{ser} = \sum_{M_j \in S(T_{retr})} \theta \pi_{M_j} = \theta \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{l=1}^{\gamma} \pi_i^l \quad (5)$$

Where : $S(T_{retr})$ is the set of tangible M -marking at which the transition T_{retr} is enabled and $[M(P_{stock}) > 0]$.

4 Total cost analysis

In this section, we study numerically an optimisation problem which consists on the minimisation of a total cost function given in equation 9 with respect to the decision variables (the reorder level s and the the maximum inventory level S), this part is presented the sub-section 4.1.

4.1 Optimisation Problem

In this sub-section, we pose the problem of minimizing the total cost function (formula (9)), the constraints are formulated in (7) and (8). The whole problem is formulated as follows :

$$\text{Min}_{(s,S,K)} Ct(s, S, K) \quad (6)$$

$$\text{subject to } S - s > s + n \quad (7)$$

$$s, S, K \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \quad (8)$$

Such as :

$$Ct(s, S, K) = c_h E_{I(u)} + (f + c_p Q) E_r + c_w E_o + c_l E_l, \quad (9)$$

The optimisation problem 6 is solved using a numerical procedure which is expressed as follows :

4.1.1 Solution Procedure

The optimisation problem is a three-dimensional problem and the different performance measures included in the total cost function are expressed using the stationary distribution, which is given in recursive form, that makes the analysis very difficult. To overcome this problem, we proceed numerically.

The results are illustrated with suitable numerical examples and we investigate the impact of different model-parameters on the optimality of the total cost function Ct and the decision variables (s, S, K) .

References

- [1] Alimardani, M., Jolai, F. and Rafiei, H. : Bi-product inventory planning in a three-echelon supply chain with backordering, poisson demand and limited warehouse space. Journal of Industrial Engineering International, **(9)**, (1), 1-22 (2013).

- [2] Artalejo, J. R., A. Krishnamoorthy, and M.J.Lopez-Herrero. : A Numerical Analysis of (s, S) Inventory Systems with Repeated Attempts. *Annals of Operations Research*, **(141)**, (1), 67-83 (2006).
- [3] Labadi, K., Chen, H. and Amodeo, L. : Modeling and performance evaluation of inventory systems using batch deterministic and stochastic Petri nets. *IEEE Transactions On Systems, Man, and Cybernetics-part C :ART C : Applications and Reviews*, **(37)**, (6), 1287-1302 (2007) .
- [4] Molloy, M.K. : On the Integration of Delay and Throughput Measures in Distributed Processing Models, PhD thesis, UCLA, Los Angeles (1981) .
- [5] Montgomery, D. C., Bazaraa, M. S. and Keswani, A. K. : Inventory models with a mixture of backorders and lost sales. *Naval Res. logist*, **20**, (2), 255-263 (1981).
- [6] Periyasamy, C. : A Finite Population Discrete Time Inventory System with Postponed Demands. *International Journal of Mathematical Archive*, **(8)**, (7), 86-90 (2017).
- [7] Rosenberg, D. : A new analysis of lot-size model with partial backlogging. *Naval Research Logistics*, **(26)**, (2), 349-353 (1979) .
- [8] Sagayaraj, M.R., Moganraj, D. and Periyasamy, C. : A finite population discrete time inventory system with retrial demands. *International Journal of Modern Engineering Research*, **(5)**, (4), 52-56 (2015).
- [9] Seyedhoseini, S. M., Rashid, R., Kamalpour, I. and Zangeneh, E. : Application of queuing theory in inventory systems with substitution flexibility. *Journal Industrial Engineering International*, **(11)**, (1), 37-44 (2015).
- [10] Sivakumar, B. : An Inventory system with retrial demands and multiple server vacation. *Quality Technology and Quantitative Management*, **(8)**, (2), 125-146 (2011).
- [11] Raghavan, S.N.R. and Roy, D. : A stochastic Petri net approach for inventory rationing in multi-echelon supply chains. *Journal of Heuristics*, **(11)**, (5-6), 421-446 (2005).
- [12] Teimoury, E., Mazlomi, A., Nadafioun, R., Khondabi, I.G. and Fathi, M. : Inventory planning with batch ordering in multi-echelon multi-product supply chain by queuing approach. *Proceeding of the International Multiconference of Engineering and Computer Scientists*, 16-18 March , Hong Kong, **(2)** (2011).
- [13] Ushakumari, P.V. : On (s, S) inventory system with random lead time and repeated demands. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **(2006)**, 1-22 (2006).
- [14] Yadavalli, V.S.S., Kathiresan, J. and Anbazhagan, N. : A Continuous Review Inventory System with Retrial Customers and Two-Stage Service. *Applied Mathematics and Information Sciences*, **(12)**, (2), 441-49 (2018).



Automatic classification of sleep apnea-hypopnea events using EWT-based frequency characteristics of EEG signals and neural networks trained by hybrid PSO GSA

Hadj Abdelkader Benghenia^{*1,2} and Hadj Slimane Zine-Eddine¹

¹Biomedical Engineering Laboratory, Faculty of Technology, Abou Bekr Belkaid University, Tlemcen 13000, Algeria,
hadjabdelkader.benghenia@univ-tlemcen.dz

²Electrical Engineering Department, Bouira University, Bouira, Algeria,
h.benghenia@univ-bouira.dz

Abstract : Sleep apnea-hypopnea syndrome (SAHS) is a sleep disease in which breathing pauses often during sleep. One of the physiological changes that occur during apnea is an alteration in the electroencephalogram (EEG) signal, which may be utilized to identify and monitor sleep apnea occurrences. In this paper, we suggested a technique for automatically distinguishing sleep apnea-hypopnea events (SAHE) using EEG signal features. We used an empirical wavelet transform (EWT) to divide the EEG signals of C3-A2 and C4-A1 into ten sub-bands. Following that, we extracted the frequency characteristics by calculating the cross-power spectral density (CPSD) of the EEG (C3-A2) sub-bands with the EEG (C4-A1) sub-bands. The extracted characteristics were fed into popular machine learning classifiers including Knearest neighbors (KNN), Support Vector Machines (SVM), decision trees (DT), and Multilayer perceptron neural networks (MLPNN). In order to achieve better performance of the proposed algorithm, we propose to train MLPNN by combining particle swarm optimization algorithm and gravitational search algorithm (PSOGSA). As a result, after using the PSOGSA method, the MLPNN accuracy increased from 92.6389% to 96.1667%. In terms of sensitivity and specificity, the suggested technique achieved 97.78% and 97.96%, respectively. As a consequence, it is possible to infer that the suggested strategy generates better or equivalent outcomes when compared to earlier efforts in this subject.

Keywords : Electroencephalogram (EEG) ; sleep apnea-hypopnea events (SAHE) ; empirical wavelet transform (EWT) ; sub-band, cross power spectral density (CPSD) ; popular classifiers ; Multilayer perceptron neural networks (MLPNN) ; PSOGSA

*Corresponding Author

1 Introduction

Sleep apnea–hypopnea syndrome (SAHS) is a respiratory disease that causes partial or total closure of the upper airways while sleeping [1], [2]. Inadequate sleep at night and mental exhaustion during the day may both have a significant negative impact on our lives when sleep interruptions occur. Sleep stage scoring and apnea/hypopnea identification are two of the most difficult challenges in sleep analysis [3]. Ischemic heart disease, circulatory dysfunction, and stroke have all been linked to untreated SAHS [4]. As a result, detecting the existence of hypopnea-apnea syndrome early is critical. The standard definition of apnea is the cessation of airflow for at least 10 seconds or the average number of hypoventilations per hour (breathing disorder index) greater than 5 times. However, hypopnea refers to a 30% decrease in airflow for at least 10 seconds with a blood oxygen saturation decrease of 4%. Obstructive sleep apnea (OSA), Central Sleep Apnea (CSA), and Mixed Sleep Apnea (MSA) are the three kinds of sleep apnea [5]. OSA is the most prevalent kind of apnea seen in clinical practice. It completely closes the upper airway and relaxes the throat muscles, impeding the passage of breathing during sleep [6]. The process by which the center of the brain stops directing the muscles that control breathing is known as CSA, causing respiratory flow to stop. MSA is a mixture of these two kinds, with obstructive apnea in the first half and central apnea in the second, or vice versa. The number of apneas plus hypopneas per hour of sleep is referred to as the sleep apnea hypopnea index (AHI), and it is connected to the severity of apneas. Polysomnography (PSG) is currently regarded as the gold standard for SAHS diagnosis. PSG necessitates nocturnal recording of a variety of physiological data from patients, including electroencephalogram (EEG), electrocardiogram (ECG), electromyogram (EMG), electrooculogram (EOG), thoracic and abdominal respiration movements, oxygen saturation (SpO₂), and airflow (AF) [7]. However, in order to monitor and detect cases of SAHE, a sleep technician is required. This is challenging, costly, and time consuming. Several studies have been conducted in order to establish an automated SAHS events detection approach that makes use of several bio-signals such as ECG, EEG, EMG, and EOG [3]. In recent years, more study has focused on using a single signal function to automatically diagnose the presence of SAHS. Among these, the EEG signal has gotten a lot of attention. The reason for this is because EEG readings represent brain electrical activity, which has a strong association with sleep phases and sleep quality, and apnea occurrences severely disrupt sleep quality [9]. In summary, the primary goal of this study is to recognize SAHE using only EEG signals. Several studies highlight the role of EEG signals in the mechanistic classification and recognition of SAHE. Tagluk et al. [10] investigates the bispectral characteristics of an EEG signal, analyzing the degree of quadratic phase coupling (QPC) in each sub-band. The approach described in [11] employs sub-frame-based characteristics that are modeled for band-limited signals acquired using basic bandpass filtering. However, the effect of incorporating higher frequency bands (40Hz) on apnea diagnosis is not explored in the technique. The expectation of recognizing sleep disturbed breathing episodes in an apnea patient is explored in [12] by evaluating the features of EEG frequency bands and EMG signal. In [13], apnea episodes inside an apnea patient are recognized using entropy values derived from each frequency band of an EEG signal. In [14], sub-frame-based features are extracted, and feature fluctuation within a frame is modeled using Rician PDF and model parameters, as well as some statistical factors. The authors of [15] presented Hermite coefficient-based EEG signal decomposition for apnea detection utilizing artificial bee colony optimization. In

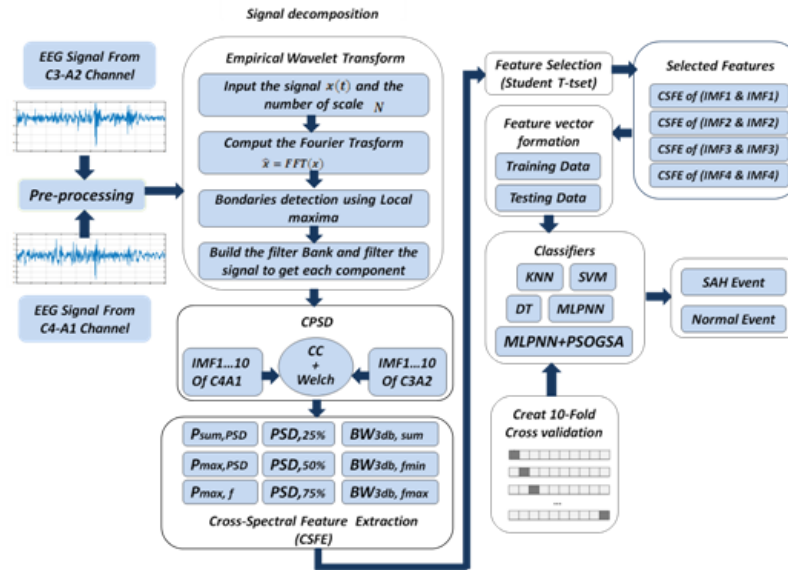


FIGURE 1 – Graphical representation of proposed approach to detect and classify SAHS.

the present work, automatic classification of SAHE is performed by analyzing the EEG (C3A2 C4A1) signals into ten sub-bands by EWT technique, extracting the frequency characteristics using CPSD and optimized classifier MLPNN-PSOGSA. The proposed system used to perform the classification of SAHE is shown in Figure 1. The following is how the paper is structured. Section 2 describes the material utilized as well as the parameters obtained. Section 3 provides a full overview of the characteristics derived in this study. Section 4 explains the classifiers that were employed. Section 5 presents the experimental results, while Section 6 interprets the results. Section 7 brings the paper to a close.

2 Methods and material

2.1 EEG Database

The data used in this study was obtained from the St. Vincent's University Hospital/University College Dublin Sleep Apnea Database (UCD database) available online from PhysioNet which provides a variety of physiological signals for biomedical research. The availability of the UCD database offers easy validation and assessment of our approach. The C3-A2 and C4-A1 EEG signals of 25 patients were selected on random as the research subjects. The 25 patients included 21 men and 4 women, between the ages of 28-68 (average 50 ± 10 years), with a BMI range of 25.1-42.5 kg/m² (average 31.6 ± 4.0 kg/m²), and an AHI range of 1.7-90.9 (average 24.1 ± 20.3 events/h). Each recording contains 5.9- to 7.7-h EEG signals as well as an annotation file with detailed onset time and duration of every apnea/hypopnea

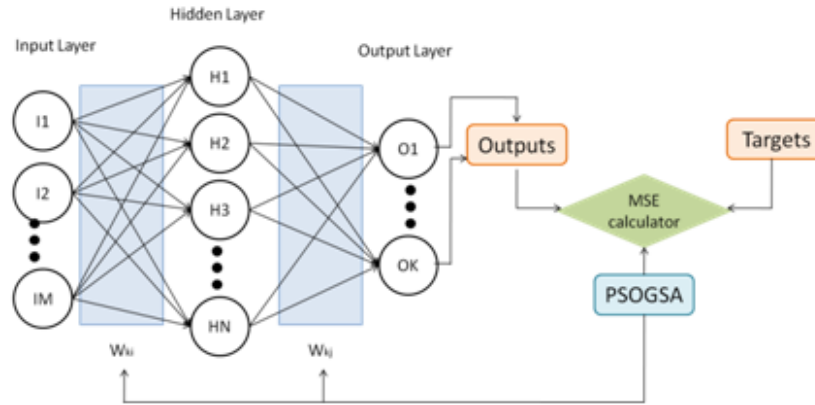


FIGURE 2 – MLPNN-PSOGSA model for classification task.

event. The sampling frequency of the EEG signal was 128 Hz. The data is composed of overnight polysomnography data recorded by the Jaeger–Toennies system (Erich Jaeger GmbH, Germany) [15] [16].

2.2 EWT Based EEG Signals Decomposition

Wang and James suggested in [17] to use the EWT approach to overcome the limitations of the EMD method in signal decomposition and analysis. The EWT approach may deconstruct any non-stationary signal into distinct modes by applying a filter bank made of adaptive wavelet filters, with each mode being modified around a specified frequency to meet the characteristics of intrinsic mode functions (IMF) [18]. The different main steps of the EWT algorithm are described as follows [18] : The Fast Fourier Transform (FFT) is used to get the signal spectrum from 0 to . To acquire the segmentation, for the Fourier spectrum, the EWT boundary detection approach is used. Empirical wavelets are used as band-pass filters for all spectrum segmentations, and a parameter β based on Meyer's wavelets and LittlewoodPaley theory [19]. The scale space parameter was chosen to conduct spectrum boundary identification for EEG signals decompositions, whereas the number of modes was empirically selected to be 10 for each individual channel.

2.3 Feature extraction

The goal of this study is to look at the EEG sub-band signal in the frequency domain to see if any new indices or characteristics can be found that might help characterize SAHE better. The feature extraction method is used to obtain hidden discriminative properties of EEG data in order to conduct SAHE classification. Using an empirical wavelet transform, the EEG signals from C3A2 and C4A1 leads are divided into 10 IMF (Sub-Bands). The cross-spectral density (CSD) of time series x and y as a function of frequency f , $[CPSD]_{xy}(f)$, is the Fourier transform of the cross-correlation function (CCF) of time series x and y [20] : The CPSD compares the frequency domains of each of the sub-signals (IMFs) for C3A2 leads

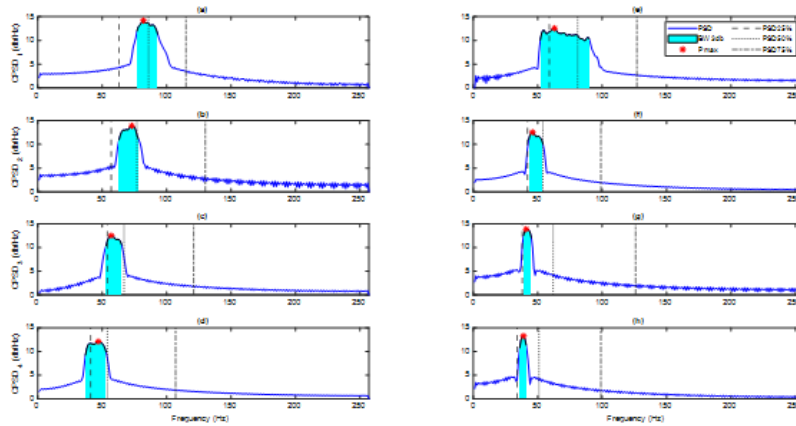


FIGURE 3 – Cross power spectral density (CPSD) of the first four sub-bands : (a-d) Normal ; (e-h) SAH

Table .1. Brief description about the feature extracted

Sr.No	Feature	Detail
1	$P_{sum, PSD}$	The sum of the amplitudes of the power spectral density (PSD) signal
2	$P_{max, PSD}$	The maximum power spectral density
3	$P_{max, f}$ (Hz)	The frequency where the power spectral density (PSD) is maximum
4	$PSD_{25\%}$ (Hz)	The frequency containing 25% of PSD signal
5	$PSD_{50\%}$ (Hz)	The frequency containing 50% of PSD signal
6	$PSD_{75\%}$ (Hz)	The frequency containing 75% of PSD signal
7	$BW_{3dB, sum}$	The sum of the amplitude of the power spectral density signal PSD between the upper and lower frequencies of the band where the PSD is located using a threshold of 3 dB
8	$BW_{3dB, f_{min}}$ (Hz)	The lower frequency of the BW_{3dB}
9	$BW_{3dB, f_{max}}$ (Hz)	The upper frequency of the BW_{3dB}

with C4A1, allowing for the detection of rhythms shared by the two sub-signals. Several characteristics were derived from the CPSD signals. For classification, the total of ninety (9 × 10) cross power spectral density characteristics from each sub-band is recovered. Table 1 summarizes the brief explanation used to compute all of the frequency characteristics.

2.4 Classification

2.4.1 Optimized MLPNN by using PSO GSA

Generally, there are three methods of using a heuristic algorithm for training MLPNN. First, heuristic algorithms are used for finding a combination of weights and biases which provide the minimum error for an MLPNN. Second, heuristic algorithms are employed as a way to find a proper structure for an MLPNN in a particular problem. The last method is to use an evolutionary algorithm to tune the parameters of a gradient-based learning algorithm, such as the learning rate and momentum. In the first case, the structure is fixed before training MLPNN. The duty of a training algorithm is to find a proper value for all connection

weights and biases in order to minimize the overall MLPNN error. In the second case, the structures of MLPNN vary. A training algorithm is applied to an MLPNN to determine the best structure for a certain problem. Changing the structure can be accomplished by manipulating the connections between neurons, the number of hidden layers, and the number of hidden nodes in each layer of the MLPNN. In this paper, PSO, GSA, and PSO GSA are applied to an MLPNN using the first method ; these mechanisms are called MLPNNPSO, MLPNNGSA, and MLPNNPSOGSA, respectively. This means that the structure of the MLPNN is fixed ; PSO, GSA, and PSO GSA find a combination of weights and biases which yield the minimum error for the MLPNN. In order to design MLPNNPSO, MLPNNGSA, and FNNPSOGSA, the following basic elements need to be defined. First, a fitness function using the error of the MLPNN should be defined to evaluate agents' fitness in MLPNNPSO, MLPNNGSA, and MLPNNPSOGSA. Second, an encoding strategy should be defined to encode the weights and biases of the MLPNN for the agents of MLPNNPSO, MLPNNGSA, and MLPNNPSOGSA. These elements are described below [21].

3 Results

Experiments are carried out using MATLAB to implement the suggested approach for automatic diagnosis of sleep apnea-hypopnea events. We adopt EWT for EEG signal classifications in this work since it has been shown to be particularly beneficial for non-linear and non-stationary signal analysis [22]. The MATLAB code of EWT for decomposing the EEG signal into the IMF is publicly available. A boundary detection approach is used to extract ten IMF sub-bands from each SAHE and non-SAHE signal. After signal decomposition for both classes, ten IMF are produced from low to high-level decomposition (up to bottom direction in the plot). The two previous graphs show the frequency amplitude in the signal's time axis, as well as the residue of normal or sleep apnea-hypopnea events. Figure 3 depicts the current CPSD technique pattern as well as a graphical representation of the extracted characteristics for the first four major IMFs. The Welch's approach used in CPSD reduces noise in the rated power spectra, resulting in a smoother spectral curve with a single peak. Nine different types of statistical and all CPSD signal-based features are extracted from the subbands (IMFs) for C3A2 leads with C4A1 of both the classes, as shown in Table 1. Unstable feature selection performance leads to reduced performance in the final classifier, therefore only the most significant features are employed to maximize classifier performance. The ttest is used to identify the most important characteristics and decrease model complexity. The traits with the lowest p-values are judged to be the most significant. Here, out of the ten CPSD signals of subbands (IMFs) for C3A2 leads with C4A1, only four are identified as important and used to train the classifiers for optimal performance. Table 2 summarizes the p-values of retrieved features from each CPSD signal. Table 2 shows that all statistical parameters except PSD(75%) (Hz) are of interest and usefulness in distinguishing between the SAHE and normal events. Figure 3 depicts a box plot depiction of the most significant CPSD features. Figure 3 also highlighted how two groups varied in terms of all CPSD features of four first sub-bands. For identifying SAHE, we used the suggested feature set as input to prominent classifiers such as k-Nearest Neighbor (KNN) [23], support vector machine (SVM) [24], decision trees (DT) [25], and MLPNN [26]. The results of this study are shown in Figure 5 and Table 3. Figure 6 depicts the ROC diagrams and confusion matrices for each classifier in identifying SAHE. In

this figure, it can be shown that all classifiers performed well in identifying SAHE. As shown in Figure 6 and Table 3, the KNN approach has the greatest classification accuracy among well-known classifiers, with a value of 93.16%. In the following degree, the SVM approach has a higher classification score, with an accuracy of 92.52%. Furthermore, the accuracy of the two classifiers MLPNN and DT was 90.08% and 84.36% respectively. Table 3 also includes the AUC values for each of the classifiers. According to these results, KNN and SVM have the greatest AUC values, with values equal to 0.9847 and 0.9742 for these two classifiers, respectively. This paper's concept is not confined to the specified feature set. In this research, we presented the PSOGSA approach for training MLPNN in the classification phase to boost detection efficiency even more. In this step, we utilized the MLPNN weights and biases as optimization variables in the PSOGSA technique, and by minimizing a cost function, in this instance the MSE, we selected the optimal weights and biases that resulted in the least cost function. In order to do this, we examined, in addition to the PSOGSA method, additional well-known evolutionary algorithms such as particle swarm optimization (PSO) and the gravitational search algorithm (GSA).

4 Discussion

In this work, empirical wavelet transform (EWT) was utilized to decompose EEG signals of normal and sleep apnea apnea/hypopnea events into IMF sub-bands. EWT is an adaptive method that decomposes non-stationary and non-linear EEG data by using frequency information in the signal spectrum. It is noted that each IMF mode are grouped in decreasing order of frequency, in which initial row of the picture is related highest frequency. Figure 3 displays the current CPSD approach pattern as well as a graphical representation of the extracted features for the first four main IMFs. The Welch's technique employed in CPSD minimizes noise in the rated power spectra, resulting in a smoother spectral curve with a single peak. Nine distinct types of statistics and all CPSD signal-based characteristics are recovered from the sub-bands (IMFs) for C3A2 leads with C4A1 of both the classes, as can be seen in Table 1. Frequency domain-based features such as sum of the amplitudes of the power spectral density, maximum power spectral density, frequency where the power spectral density (PSD) is maximum, frequency containing 2550 power spectral density signal PSD between the upper and lower frequencies of the band where the PSD is located using a threshold of 3 dB, lower frequency of the BW3db and upper frequency of the BW3db are extracted from obtained CPSD of sub-bands which forma feature vector of 90 (9*10). Statistical t-test was done to examine the significance of extracted characteristics as provided in Table 2. This work employed UCD dataset to assess the performance of the proposed technique. The major goal of this work was to analyze the EEG signal using the EWT method to extract characteristics with the capacity to reliably diagnose sleep apnea/hypopnea and normal events. These feature vectors must then be fed into a classifier for final detection. In this study, various classifiers were evaluated and their performance was compared. The KNN and SVM algorithms produced the best classification accuracy, while the remaining classifiers produced respectable results. As a result, the suggested feature vector has the potential to be useful in identifying SAHE. In the second half of this paper's suggested notion, we used PSO, GSA and PSOGSA to train the MLPNN in the classification phase and presented it as a recommended classifier. The findings of this section demonstrated that the proposed ap-

proach had the highest accuracy. To assess the findings, we showed convergence curves of various evolutionary algorithms for training MLPNNs, which reveal that the PSO GSA method outperformed the others in training.

5 Conclusion

This research describes a new approach for automatically detecting sleep apnea and normal classes that uses EWT-based features in the feature extraction phase and MLPNNPSO in the classification phase. The EWT technique was used to extract its IMFs. The feature set was then chosen based on these IMFs. The classification results using popular approaches reveal that multiple methods have acceptable accuracy, demonstrating the potential of the suggested feature set in this task. Furthermore, this research employs MLPNN-PSOGSA, which results in good detection accuracy. Instead of using the PSO technique for learning, we employed the PSOGSA algorithm to train MLPNN and dubbed it 'MLPNN-PSOGSA.' Based on the findings, the suggested technique can identify with high accuracy, as when MLPNN training was done using the PSO algorithm, the accuracy was 92.50% the PSOGSA algorithm was employed, the accuracy climbed to 96.16%. It was discovered that the PSOGSA method outperformed the PSO algorithm in MLPNN training.

Table.2. p-values obtained as a result of t-test statistical test for all extracted features at different EWT sub-bands.

IMF Modes	p-value									Result
	$P_{sum, PSD}$	$P_{max, PSD}$	$P_{max, f}$	$PSD_{25\%}$	$PSD_{50\%}$	$BW_{sub, sum}$	$BW_{sub, f min}$	$BW_{sub, f max}$		
IMF1	1.8141e-290	2.5103e-126	0	0	0	0	0	0	0	S
IMF2	2.9629e-109	2.9606e-63	0	0	0	2.7576e-79	0	3.7336e-280	0	S
IMF3	2.5412e-58	1.4140e-71	1.7271e-289	2.5277e-285	5.5156e-214	2.9230e-99	1.5441e-234	4.8858e-160	5	S
IMF4	1.5969e-53	2.1443e-55	6.9760e-176	2.1095e-157	8.9001e-85	5.6214e-105	2.4666e-122	1.3204e-59	5	S
IMF5	2.5416e-26	1.5807e-14	1.4728e-36	5.6374e-33	1.1402e-12	1.8591e-20	6.6585e-24	1.0417e-27	NS	NS
IMF6	4.9699e-11	2.0745e-05	5.7845e-16	1.2532e-09	0.6722	1.7900e-17	2.5530e-07	2.3569e-16	NS	NS
IMF7	0.3353	0.0313	0.2172	0.7979	0.3661	4.2490e-07	0.2304	0.0028	NS	NS
IMF8	0.7073	0.1294	0.6029	0.0950	0.9633	0.0089	5.7036e-05	0.3759	NS	NS
IMF9	0.6449	1.5945e-11	7.0415e-10	1.6675e-11	6.4727e-06	0.2395	6.8342e-05	6.8123e-04	NS	NS
IMF10	6.9452e-08	0.0449	6.6854e-07	0.0011	0.0063	1.6641e-15	0.1024	3.3980e-07	NS	NS

S, NS represent: Significant, Not Significant, respectively

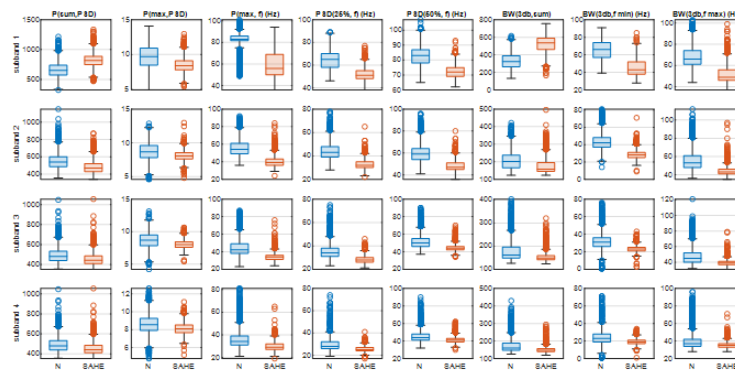


FIGURE 4 – Box-plot of significant frequency domain features extracted from the first four sub-bands of SAH and the normal class.

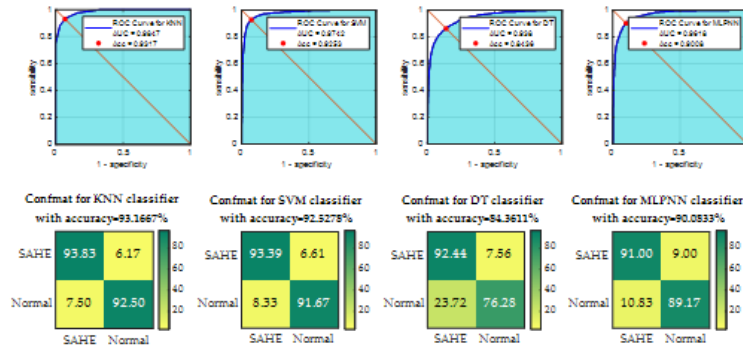


FIGURE 5 – Receiver operating characteristic (ROC) curves and confusion matrices of popular classifiers ordered from left to right : KNN, SVM, DT and MLPNN respectively

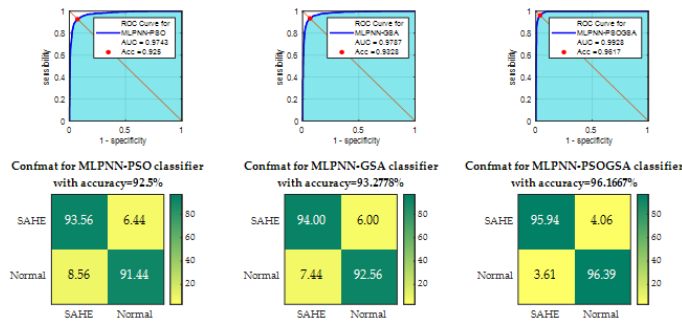


FIGURE 6 – Receiver operating characteristic (ROC) curves and confusion matrices of optimized classifiers ordered from left to right : MLPNN+PSO, MLPNN+GSA, and MLPNN+PSOGSA respectively

References

[1] Liu, Y. T., Zhang, H. X., Li, H. J., Chen, T., Huang, Y. Q., Zhang, L., ... Yang, M. (2018). aberrant interhemispheric connectivity in Obstructive sleep apnea–hypopnea syndrome. *Frontiers in neurology*, 9, 314.

[2] Torabi-Nami, M., Mehrabi, S., Borhani-Haghighi, A., Derman, S. (2015). Withstanding the obstructive sleep apnea syndrome at the expense of arousal instability, altered cerebral autoregulation and neurocognitive decline. *Journal of integrative neuroscience*, 14(02), 169-193.

[3] Schluter, T., Conrad, S. (2012). An approach for automatic sleep stage scoring and " apnea-hypopnea detection. *Frontiers of Computer Science*, 6(2), 230-241.

[4] Ancoli-Israel, S., DuHamel, E. R., Stepnowsky, C., Engler, R., Cohen-Zion, M., Marler, M. (2003). The relationship between congestive heart failure, sleep apnea, and

mortality in older men. *Chest*, 124(4), 1400-1405.

[5] Peppard, P. E. (2000). young T, Palta m, Skatrud J. Prospective study of the association between sleep-disordered breathing and hypertension. *N Engl J Med*, 342, 1378-1384.

[6] Vimala, V., Ramar, K., Ettappan, M. (2019). An intelligent sleep apnea classification system based on EEG signals. *Journal of medical systems*, 43(2), 1-9.

[7] Schluter, T., Conrad, S. (2012). An approach for automatic sleep stage scoring and " apnea-hypopnea detection. *Frontiers of Computer Science*, 6(2), 230-241.

[8] Saha, S., Bhattacharjee, A., Fattah, S. A. (2019). Automatic detection of sleep apnea events based on inter-band energy ratio obtained from multi-band EEG signal. *Healthcare technology letters*, 6(3), 82-86.

[9] Kaya, Y., Sezgin, N., Tekin, R. (2014, April). A new approach for diagnostic estimation of Obstructive Sleep Apnea Syndrome based on One Dimensional Local Binary Pattern. In *2014 22nd Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)* (pp. 333-336). IEEE.

[10] Bhattacharjee, A., Fattah, S. A., Zhu, W. P., Ahmad, M. O. (2018). VMD-RiM : Rician modeling of temporal feature variation extracted from variational mode decomposed EEG signal for automatic sleep apnea detection. *IEEE Access*, 6, 77440-77453.

[11] Azim, M. R., Haque, S. A., Amin, M. S., Latif, T. (2010, December). Analysis of EEG and EMG signals for detection of sleep disordered breathing events. In *International Conference on Electrical Computer Engineering (ICECE 2010)* (pp. 646-649). IEEE.

[12] Saha, S., Bhattacharjee, A., Ansary, M. A. A., Fattah, S. A. (2016, November). An approach for automatic sleep apnea detection based on entropy of multi-band EEG signal. In *2016 IEEE Region 10 Conference (TENCON)* (pp. 420-423). IEEE.

[13] Bhattacharjee, A., Saha, S., Fattah, S. A., Zhu, W. P., Ahmad, M. O. (2018). Sleep apnea detection based on rician modeling of feature variation in multiband EEG signal. *IEEE journal of biomedical and health informatics*, 23(3), 1066-1074.

[14] Taran, S., Bajaj, V. (2019). Sleep apnea detection using artificial bee colony optimize hermite basis functions for EEG signals. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 69(2), 608-616.

[15] St. Vincent's University Hospital/University College Dublin Sleep Apnea-Database. (2008). [Online].Available : <http://www.physionet.org/pn3/ucddb/> [10.1161/01.cir.101.23.e215].

[16] Goldberger, A. L., Amaral, L. A. N., Glass, L., Hausdorff, J. M., Ivanov PCh, M. R., Mietus, J. E., ... Stanley, H. E. (2000). Components of new research resources for physiologic signals PhysioBank, Physio Toolkit. *Circulation*, 101, e215-e220.

[17] Wang, S., James, C. J. (2007). Extracting rhythmic brain activity for brain-computer interfacing through constrained independent component analysis. *Computational intelligence and neuroscience*, 2007.

[18] Gilles, E. W. T. *IEEE T. Signal Process*, (61), 3999.

[19] Siddharth, T., Gajbhiye, P., Tripathy, R. K., Pachori, R. B. (2020). EEG-based detection of focal seizure area using FBSE-EWT rhythm and SAE-SVM network. *IEEE Sensors Journal*, 20(19), 11421-11428.

[20] Lu, W. A., Lin, J. F., Wang, C. H., Chen, Y. S., Shieh, Y. H., Kuo, C. D. (2021). Cross-Spectral Analysis of Electrocardiographic and Nostril Airflow Signals Identifies Two Respiratory Frequencies of Heart Rate Modulation. *Journal of Healthcare Engi-*

neering, 2021.

[21] Mirjalili, S., Hashim, S. Z. M., Sardroudi, H. M. (2012). Training feedforward neural networks using hybrid particle swarm optimization and gravitational search algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 218(22), 11125-11137.

[22] Sadiq, M. T., Yu, X., Yuan, Z., Fan, Z., Rehman, A. U., Li, G., Xiao, G. (2019). Motor imagery EEG signals classification based on mode amplitude and frequency components using empirical wavelet transform. *Ieee Access*, 7, 127678-127692.

[23] Bablani, A., Edla, D. R., Dodia, S. (2018). Classification of EEG data using knearest neighbor approach for concealed information test. *Procedia computer science*, 143, 242-249.

[24] Shi, M., Wang, C., Li, X. Z., Li, M. Q., Wang, L., Xie, N. G. (2021). EEG signal classification based on SVM with improved squirrel search algorithm. *Biomedical Engineering/Biomedizinische Technik*, 66(2), 137-152.

[25] Ishfaqe, A., Awan, A. J., Rashid, N., Iqbal, J. (2013, December). Evaluation of ANN, LDA and decision trees for EEG based brain computer interface. In *2013 IEEE 9th International Conference on Emerging Technologies (ICET)* (pp. 1-6). IEEE.

[26] Waili, T., Johar, G., Sidek, K., Nor, N. S. H. M., Yaacob, H., Othman, M. (2019). EEG based biometric identification using correlation and MLPNN models.



Classification of Obstructive Sleep Apnea based on Entropy and Bispectral Entropy Features

Hadj Abdelkader Benghenia^{*1,2} and Hadj Slimane Zine-Eddine¹

¹ Biomedical Engineering Laboratory, Faculty of Technology, Abou Bekr Belkaid University, Tlemcen 13000, Algeria,
hadjabdelkader.benghenia@univ-tlemcen.dz

² Electrical Engineering Department, Bouira University, Bouira, Algeria,
h.benghenia@univ-bouira.dz

Abstract : One typical sleep problem is called obstructive sleep apnea (OSA) syndrome. The current automatic OSA detection approaches largely focus on feature extraction and classifier selection based on physiological data as an alternative to polysomnography (PSG) for OSA screening. We need to know the different classes as early as possible so that we can take precision the faster the better. Therefore researchers has been continuously trying on looking for better treatment and faster way of diagnosing the sleep apnea in a more accurate way so as to reduce the time spend on it and focus more on the treatment part. In this project, in order to diagnose the sleep apnea, we need to extract the heart rate data from the electrocardiogram (ECG) device and from there the Entropy method will be used to extract the features out from it and this features include the approximate entropy, sample entropy and bispectral entropy (HOS1 and HOS2). Then after getting the features, the t-test program will be used to check on the probability value so as to know whether how good the heart rate data. From here, 4 different classifiers have been used to run the entropies features and they are the Decision Tree (DT), K-Nearest Neighbor (KNN), Support Vector Machine Classifier (SVM) and the Probabilistic Neural Network (PNN). After getting the Classifiers output results it shows that the SVM classifier is the best classifier among the 4 different types as it yields better output values than the others. The results SVM yields 86.9% of accuracy, 85.3% of sensitivity and 88.6% of specificity.

Keywords : heart rate ; obstruct sleep apnea ; bispectral entropy ; classifiers

1 Introduction

Obstructive sleep apnea syndrome (OSAS) is a respiratory disease that causes partial or total closure of the upper airways while sleeping [1], [2]. Inadequate sleep at night and mental exhaustion during the day may both have a significant negative impact on our lives

*Corresponding Author

when sleep interruptions occur. Sleep stage scoring and apnea-hypopnea identification are two of the most difficult challenges in sleep analysis [3]. Ischemic heart disease, circulatory dysfunction, and stroke have all been linked to untreated OSAS [4]. As a result, detecting the existence of hypopnea-apnea syndrome early is critical. The standard definition of apnea is the cessation of airflow for at least 10 seconds or the average number of hypoventilations per hour (breathing disorder index) greater than 5 times. However, hypopnea refers to a 30% decrease in airflow for at least 10 seconds with a blood oxygen saturation decrease of 4%. Obstructive sleep apnea (OSA), Central Sleep Apnea (CSA), and Mixed Sleep Apnea (MSA) are the three kinds of sleep apnea [5]. OSA is the most prevalent kind of apnea seen in clinical practice. It completely closes the upper airway and relaxes the throat muscles, impeding the passage of breathing during sleep [6]. The process by which the center of the brain stops directing the muscles that control breathing is known as CSA, causing respiratory flow to stop. MSA is a mixture of these two kinds, with obstructive apnea in the first half and central apnea in the second, or vice versa. The number of apneas plus hypopneas per hour of sleep is referred to as the sleep apnea hypopnea index (AHI), and it is connected to the severity of apneas. Polysomnography (PSG) is currently regarded as the gold standard for SAHS diagnosis. PSG necessitates nocturnal recording of a variety of physiological data from patients, including electroencephalogram (EEG), electrocardiogram (ECG), electromyogram (EMG), electrooculogram (EOG), thoracic and abdominal respiration movements, oxygen saturation (SpO₂), and airflow (AF) [3]. However, in order to monitor and detect cases of OSAS, a sleep technician is required. This is challenging, costly, and time consuming. Several studies have been conducted in order to establish an automated SAHS events detection approach that makes use of several bio-signals such as ECG, EEG, EMG, and EOG [7]. In recent years, more study has focused on using a single signal function to automatically diagnose the presence of SAHS. Among these, the ECG signal has gotten a lot of attention. The reason for this is because ECG readings represent heart electrical activity, which has a strong association with sleep phases and sleep quality, and apnea occurrences severely disrupt sleep quality [8]. In summary, the primary goal of this study is to recognize SAHE using only ECG signals. Under this work, the entropy method has been used. This entropy program help to get the features then input to the Classifier program so as to compare which Classifier program can get the best result among the 4 Classifiers. The entropy is the numerical measurement for the randomness of an electrical signal. The Classifier been used in this project is acting as an Artificial Neural Network (ANN). This ANN is like our brain whereby we need to train it and then do testing to it to make sure it is working correctly as per required. So far the entropy method has been used in the EEG signal which is able to get good features thus we will be using it to get the good features from the ECG signal for running them through the Classifier by using a student's t-test method to check the p value then train and test it. The main goal of this project is to develop the software to detect the OSA. Analyse which is the best Classifier which will yield the best result among the 4 different types of classifiers, in terms of their accuracy by comparing the data output. The layout of the project is shown in block diagram in terms of a process flow chart as per below in figure 1.

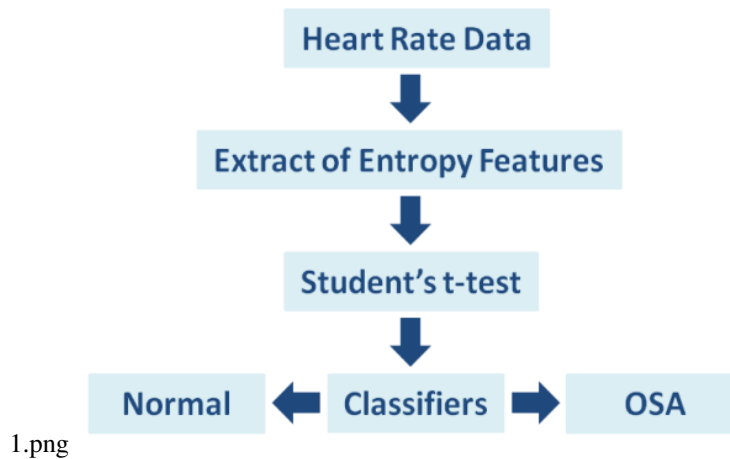


FIGURE 1 – Proposed System

2 Methods

2.1 Database

The HuGCDN2014-OXI database contains records for 83 subjects. Each of them includes an ECG lead, digitized at 200 Hz, and the SpO₂ signal, digitized at 50 Hz. As in the case of Physionet, each minute was labeled as apneic or non-apneic by an expert, based on simultaneously recorded polysomnography. Sleep studies and the labeling process were performed according to guidelines defined by the AASM [10]. Three groups are defined : 1st) CONTROL : 38 healthy subjects with an AHI less than 5. 2nd) DESATURATING PATIENTS : 34 patients with OSAS, with an AHI greater than 25, who show a desaturating pattern during apneic episodes. 3rd) NON-DESATURATING PATIENTS : 11 patients with OSAS, with an AHI greater than 25, who do not always show a desaturating pattern during apneic episodes. A patient was defined as 'non-desaturated' when their ODI was less than half their AHI.

2.2 Entropies

2.2.1 Approximate Entropy

The Approximate Entropy (ApEn) is a logarithmic likelihood which data are close to one another, will stay close together within next data comparison pattern. This means that the ApEn has the regularity of data measurement. The important fact with ApEn is that it measures the disorder of heart rate signal [11]. It is able to detect changes in the underlying for episodic behaviour which do not reflect at the peak amplitude or occurrence [11]. When the ApEn values are small, their regularity will be high and while the ApEn values are big then their regularity will become low. The values in term of index show the overall predictability and complexity of time series. This ApEn which is proposed by SM Pincus [12] has a model independent, scale invariant and also discriminate time series whereby future's clear recognition

2.png

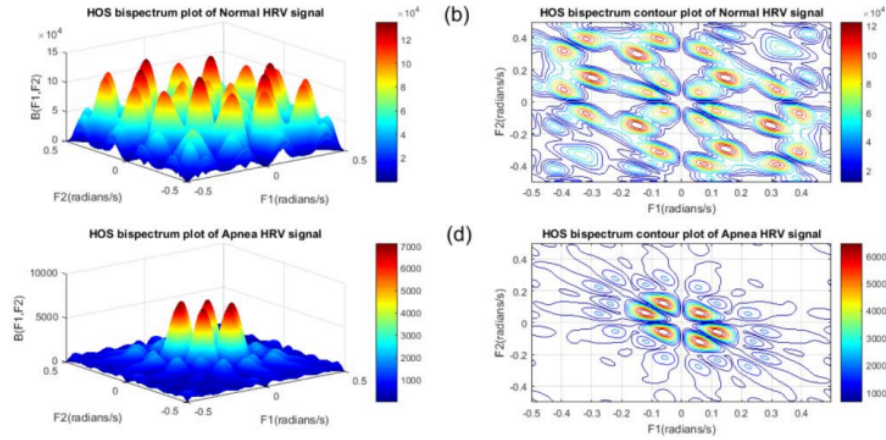


FIGURE 2 – Typical plots for OSA Normal HR : (a c) HOS 3rd order cumulant and (b d) contour.

is not easy [16]. It has 1 equations as per stated below [12] :

3.png

$$ApEn(m, e, N) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \log C_i^m(e) - \frac{1}{N - m} \sum_{i=1}^{N-m} \log C_i^{m+1}(e) \dots (1)$$

The below equation is correlation integral with a fixed parameter of e for setting comparison tolerant.

4.png

$$C_i^m(e) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{j=1}^{N-m+1} \Theta(e - \|x_i - x_j\|) \dots (2)$$

2.2.2 Sample Entropy

This Sample Entropy (SampEn) is one of the tools for investigation on dynamics of the heart rate and time series. It is similar to ApEn with small difference in computation and measures the signal complexity in same way as ApEn but with different parameters of r and N whereby SampEn decrease consistently as r increase. This method which is proposed by Joshua S Richman, has a negative natural logarithm of estimated conditional probability which length m matches pointwise that is within tolerance r which match at next point. The equation of Sample Entropy is stated as per below [13] :

where $t = 0, 1, \dots$ then $m-1$ with $B(0) = N$, length of input series. The above equation is calculated by carrying out the runs of points which matches within tolerance r until no match is encountered and during this process the template match count is stored in the counters

5.png
$$SampEn(t,r,N) = -\ln \frac{C(t)}{D(t-1)} \dots (3)$$

of C(t) and D(t) from length k up to m. The process starts by searching all the points which matches first point which is within the tolerance r. The points which match will have length 1 and those which do not match will have length 0. When the length 1 matches the second point, it will turn length 2 and for the length 0 which matches second point will turn length 1. Thus this carries on till the data ended.

2.2.3 Bispectral Entropies

The Bispectral Entropies (HOS1 and HOS2) are known as the Higher Order Spectra (HOS) which are the spectral that represent higher order moment or the cumulant of signal [11]. This bispectrum is the 3rd order Fourier Transform correlation of signal whereby the equation is shown as below [11] :

6.png
$$A(f_1, f_2) = E[C(f_1)C(f_2) * C(f_1 + f_2)] \dots (4)$$

where the C(f) is Fourier Transform of signal a(nT) while E[] denote the expectation operation. The frequency (f) may be normalise by Nyquist frequency in the range of 0 and 1 [11]. The bispectral entropies are obtained so as to characterize the irregularity or regularity of heart rate variability through the bispectral plot and thus below are the equations [11] : Bispectral Entropy 1 (HOS1) :

$$P_1 = -\sum_n p_n \log p_n \dots (5)$$

8.png
$$p_n = \frac{|C(f_1, f_2)|}{\sum_{\Omega} |C(f_1, f_2)|} \dots (6)$$

The Ω = Region which is inside the triangle Bispectral Entropy 2 (HOS2) :

$$P_2 = -\sum_m p_m \log p_m \dots (7)$$

9.png
$$p_m = \frac{|C(f_1, f_2)|^2}{\sum_{\Omega} |C(f_1, f_2)|^2} \dots (8)$$

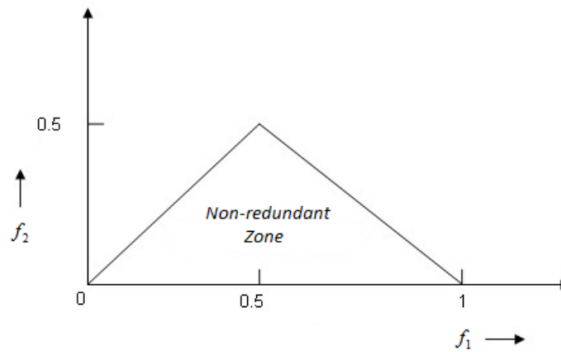
The Ω = Region which is inside the triangle

2.3 Classifiers

[h] Under this work, the 4 classifiers which will be used are Support Vector Machine Classifier (SVM), K-Nearest Neighbour (KNN), Decision Tree (DT) and Probabilistic Neural Network (PNN). Below are the brief explanations to the 4 different classifiers.

2.3.1 Support Vector Machine (SVM)

It is a supervised learning method which performs the classification by constructing a separating hyper-plane in an n-dimensional space that separates input data classes. Using



10.png

FIGURE 3 – Computation of Non-redundant Zone

Table.1. t-test Result for Normal and OSA Heart Rate Features

	Normal		OSA		p-value
	Mean	SD	Mean	SD	
ApEn	1.8300	0.2890	1.6800	0.1840	0.0380
SampEn	1.4200	0.3120	1.2900	0.1640	0.0800
HOS1	0.7770	7.0370×10^{-2}	0.7100	7.6600×10^{-2}	<0.0001
HOS2	0.4810	0.1000	0.3350	0.0630	<0.0001

1.png

radial basis function (RBF) the input data is mapped to a high-dimensional feature space, such that the mapped data will be more partitioned as compared to the initial input data [14].

2.3.2 K-Nearest Neighbor (KNN)

It is a simple classifier which assigns a feature vector to the class. It uses the minimum distance from the test data to the training samples to determine the k-nearest neighbors. We have used k=2 and the separation was evaluated using Euclidean distance [15].

2.3.3 Decision Tree (DT)

In this classifier, the significant features are first used to build a tree and group of rules are generated from this tree to determine the class of test images [16].

2.3.4 Probabilistic Neural Network (PNN)

It is a type of radial basis network employed for classification. The operations are organised into multi-layered feedforward network with four layers : input, hidden, summation, and output [17].

3 Results and discussion

After running the Entropy programs such as the Approximate Entropy, Sample Entropy and Bispectral Entropies (HOS1 and HOS2), the table 1 shown below are the features col-

Table 2: Average Output Results for DT, SVM, KNN and PNN Classifiers

		ACCURACY	SENSITIVITY	SPECIFICITY
DT	Testing/Training1	75.3	71.0	79.6
SVM	Testing/Training2	86.9	85.3	88.6
KNN	Testing/Training3	83.4	77.1	89.7
PNN	Testing/Training4	81.8	80.4	81.2

2.png

lected from the 2 different types of heart rate data (Normal OSA). Fig. 2 shows the typical 3rd order cumulant and its contour plot of normal and OSA heart rate. Before input features into the classifier programs, I need to run the features through t-test program to check the probability value (p-value). I have used this t-test program as there are only 2 different types of features to be compared. The ANOVA test is for those which have more than 3 different features to compare. The below table 1 showed the values which are captured under the output result. From table shown above, it can be seen that the p-value is very near to zero value and this means that the smaller the value, the better discriminating capability the features have. From the above results, it shows that Normal mean/ median values are higher than OSA mean/ median values and the HOS1 and HOS2 yield better p values than ApEn and SampEn. The table1 below shows the value for SD of normal and OSA features. There are a total of 4 different classifier programs used to run the normal and OSA features after doing the t-test run. The 4 different classifier programs are Decision Tree (DT), K-Nearest Neighbor (KNN), Probabilistic Neural Network (PNN) and Support Vector Machine Classifier (SVM). Below tables are the outputs results for all the testing and training results for the different Classifier programs. After comparing the four different classifiers from above table, the best results obtained are from SVM Classifier for overall values. Even though the KNN has the highest specificity value but its sensitivity value is low thus it is not consider the best classifier for normally the sensitivity and specificity value needs to be high for both than can consider as good results. The accuracy value of SVM showed the highest among the others. The KNN and SVM have very close output values as their concept is similar to each other. KNN is a multilayer perceptron method while PNN consisted of only 4 layers. From the table above, it shows that the best classifier is SVM then KNN and follows by PNN and lastly is DT. After running the program for this automated identification of sleep obstructive apnea project, the results for all the entropies mean values of normal are high and all the entropies mean values of OSA are low. This shows that the experiment is good as it yield the same results in practical and as per discussed in theory. In theory, the normal heart rates are more random varying which yield high entropies values whereas for OSA class, their heart rates are slowly varying which yield low entropies values. Since this program yield good results, it is then able to assist the doctors in diagnosing patients' sleep disorders conditions. Firstly, the ECG signal has been collected from the patients and go through the preprocessing method to remove the unwanted signals such as the high frequency signals, baseline wander and powerline interference signals, then after this process the required heart rate data is obtained. After this, the data will be input into the entropies programs to extract out the entropy features such as the ApEn, SampEn, Bispectral HOS1 and HOS2 features. Lastly then will go through the classifiers' programs by inputting the entropy features to get the output results of different cardiac classes. The experiment has showed that the SVM classifier is the best

classifier among the others such as the KNN, PNN and DT classifiers. As the overall output results is the best among the other 3 classifiers. From the output results of SVM and KNN were almost the same as this might be due to their similar method between them. Thus in practical it proven that SVM is better than KNN as stated in theory for it yield a better overall results than KNN. The difference only lies on the Accuracy and Specificity by referring to the average output result under Table 2.

4 Conclusions

The sleep problems have always been one of the cause of death worldwide and thus the heart rate data has been the raw material for the diagnose of sleep apnea. With the help of the ECG device, the heart rate variability data has been extracted from the ECG signal so that it can be used to extract the features out by using the Entropy methods such as the approximate entropy, Sample entropy and bispectral entropy. After using the student t-test program to check the p value for the normal and apnea heart rate data, and run through the classifiers programs of Decision Tree (DT), K-Nearest Neighbor (KNN), Probabilistic Neural Network (PNN) and Support Vector Machine Classifier (SVM), the results show that the SVM Classifier is the best among the others as it has a better results compare to the other 3 classifiers by having the sensitivity value of 85.3% and specificity value of 88.6%. Thus this shows that the SVM Classifier can do a better job in classifying the heart rate data more accurately. The accuracy of the proposed design also depend on some of the factors such as number of data, quality of training set and extracted parameters.

5 References

- [1] Liu YT, Zhang HX, Li HJ, Chen T, Huang YQ, Zhang L, Huang ZC, Liu B, Yang M. Aberrant Interhemispheric Connectivity in Obstructive Sleep Apnea-Hypopnea Syndrome. *Front Neurol*. 2018 May 8 ;9 :314.
- [2] Torabi-Nami M, Mehrabi S, Borhani-Haghighi A, Derman S. Withstanding the obstructive sleep apnea syndrome at the expense of arousal instability, altered cerebral autoregulation and neurocognitive decline. *J Integr Neurosci*. 2015 Jun ;14(2) :169-93.
- [3] Benghenia, H.A., Zine-Eddine, H.S., Alexandre, A. (2022). Automated recognition of sleep apnea-hypopnea syndrome using continuous wavelet transform-based multiscale dispersion entropy of single-lead ECG signal. *Traitement du Signal*, Vol. 39, No. 1, pp. 341-353.
- [4] Ancoli-Israel S, DuHamel ER, Stepnowsky C, Engler R, Cohen-Zion M, Marler M. The relationship between congestive heart failure, sleep apnea, and mortality in older men. *Chest*. 2003 Oct ;124(4) :1400-5.
- [5] Peppard PE, Young T, Palta M, Skatrud J. Prospective study of the association between sleep-disordered breathing and hypertension. *N Engl J Med*. 2000 May 11 ;342(19) :1378-84

- [6] Vimala V, Ramar K, Ettappan M. An Intelligent Sleep Apnea Classification System Based on EEG Signals. *J Med Syst.* 2019 Jan 8 ;43(2) :36
- [7] Tim SCHLÜTER, Stefan CONRAD. An approach for automatic sleep stage scoring and apnea-hypopnea detection[J]. *Front Comput Sci*, 2012, 6(2) : 230-241
- [8] Saha, Suvasish et al. "Automatic detection of sleep apnea events based on inter-band energy ratio obtained from multi-band EEG signal." *Healthcare Technology Letters* 6 (2019) : 82 - 86.
- [9] Moody G B, Mark R G and Goldberger A L 2001 PhysioNet : a web based resource for the study of physiologic signals *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.* 20 70–5.
- [10] Berry RB, Brooks R, Gamaldo CE, Harding SM, Marcus CL, Vaughn BV. The AASM manual for the scoring of sleep and associated events : rules, terminology and technical specifications, version 2.0. Darien, Illinois : American Academy of Sleep Medicine, 2012.
- [11] Rajendra Acharya U, Paul Joseph K, Kannathal N, Lim CM, Suri JS. Heart rate variability : a review. *Med Biol Eng Comput.* 2006 Dec ;44(12) :1031-51.
- [12] S.M. Pincus, "Approximate entropy as a measure of system complexity", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 88, 1991, pp.2297-2301.
- [13] D.E. Lake, J.S. Richman, M.P. Griffin, J.R. Moorman, "Sample entropy analysis of neonatal heart rate variability", *Am J Physiol. Regul Integr Comp Physiol.*, 283, 2002, R789- R797.
- [14] Support vector machines : Training and applications, Technical report, MIT AI Lab. CBCL.
- [15] D.T. Larose, *Discovering Knowledge in Data : An Introduction to Data Mining*, Chapter 5 : KNN, New Jersey, Willey Interscience, USA, 2004, pp. 90–106.
- [16] D.T. Larose, *Decision Trees*, Chapter 6 in *Discovering Knowledge in Data : An Introduction to Data Mining*, Wiley Interscience, Hoboken, NJ, 2004, pp. 108–126.
- [17] F.S. Donald, Probabilistic neural networks, *Neural Networks* 3 (1990) 109–118.



On The Property of Solution of Stochastic Differential Equation With Respect to Initial Data

Moussa Souar^{*1} and Fatima Benziadi²

¹Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University of Saida - Dr. Moulay Tahar,
Algeria,
moussasouar22@gmail.com

²Laboratory of Stochastic Models, Statistics and Applications, University of Saida - Dr. Moulay Tahar,
Algeria,
fatimabenziadi2@gmail.com

Abstract : In this paper, we study the homeomorphic property of solutions of multi-dimensional stochastic differential equations.

MSC: 60G17 ; 60H05.

Keywords : Solution of SDE ; Stochastic differential geometry ; Lipschitz coefficients.

1 Introduction

As the dynamical behavior of many important random phenomena can be described by continuous stochastic differential equations (SDE). In this work, we are interested by the following stochastic differential equation :

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1)$$

where $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, and $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ are Borel measurable functions and B_t is an n -dimensional standard Brownian motion defined on a complete probability space (Ω, \mathcal{F}, P) and x is the initial condition defined in \mathbb{R}^d .

At first, to get the existence and uniqueness of solution of (1), we shall impose the following hypotheses :

Assume there is a positive constant K such that for all $x, y \in \mathbb{R}^d$ we have,

H1. The uniform Lipschitz condition :

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|,$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|.$$

*Corresponding Author

H2. Linear growth :

$$\begin{aligned} |\sigma(t, x)| &\leq K(1 + |x|), \\ |b(t, x)| &\leq K(1 + |x|). \end{aligned}$$

Then the stochastic differential equation (1) has unique strong solution $X_t(x) = X_t(x, w)$ with continuous paths which satisfies :

$$X_t(x) = x + \int_0^t \sigma(r, X_r) dB_r + \int_0^t b(r, X_r) dr.$$

Furthermore, the solution depend continuously on the initial data x , that is, the two-parameter process $X_t(x)$ is jointly continuous in t and x .

2 Homeomorphic Property of The Solution of SDE

The regularity of the solution of SDE such as the continuity, the differentiability and the diffeomorphic properties with respect to the initial state has been discussed by many authors, we refer [2, 1, 3, 4]. In this section, we show the homeomorphic property of the solution of equation (1), the purpose is to prove that the mapping $x \rightarrow X_t(x, w)$ is one to one and onto under the above hypotheses.

Lemma 2.1. *Let $T > 0$ and p be any real number. Then there is a positive constant $C_{p,T}^1$ such that*

$$\mathbb{E}[|X_t(x) - X_t(y)|^p] \leq C_{p,T}^1 |x - y|^p, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0, T]. \quad (2)$$

Lemma 2.2. *Define*

$$g_t(x, y) = \frac{1}{|X_t(x) - X_t(y)|}$$

Then $g_t(x, y)$ is continuous in $[0, \infty) \times \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} | x \neq y\}$.

By previous results, we conclude that $x \rightarrow X_t(x, w)$ is one to one for all $t > 0$, the following lemmas are destiny for the onto property.

Lemma 2.3. *For any $T > 0$ and any real number p there is a positive constant $C_{p,T}^2$ such that*

$$\mathbb{E}[1 + |X_t(x)|^2]^p \leq C_{p,T}^2 [1 + |x|^2]^p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0, T]. \quad (3)$$

Lemma 2.4. *Let $\overline{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ and define*

$$H_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + |X_t(x)|} & \text{if } x \in \mathbb{R}^d, \\ 0 & \text{if } x = \infty. \end{cases}$$

So $H_t(x)$ is continuous on $[0, \infty) \times \overline{\mathbb{R}^d}$.

By the previous lemma we similarly define $X_t(\infty) = \infty$, then $X_t(x)$ is continuous on $[0, \infty) \times \overline{\mathbb{R}^d}$, since it is homotopically equivalent to the identity map $x \rightarrow X_0(x) = x$ on $\overline{\mathbb{R}^d}$, then the mapping $x \rightarrow X_t(x, w)$ is onto for all $t > 0$.




3 Conclusion

The map $X_t(x, w)$ is continuous, one to one and onto. Hence the inverse map $X_t^{-1}(x, w)$ is well defined, one to one and onto. It is continuous. Indeed, the map $X_t(x, w)$ is continuous and one to one from the compact space $\overline{\mathbb{R}^d}$ into itself, it is a closed map. Therefore, the inverse map $X_t^{-1}(x, w)$ is continuous. So for almost all w , $X_t(x)$ is a homeomorphism of \mathbb{R}^d .

References

- [1] Bismut, J.M. : Mécanique Aléatoire, Lecture Notes in Mathematics, vol. 866, Springer, Berlin, (1981).
- [2] Elworthy, K. D. : Stochastic Dynamical Systems and Their Flows, stochastic analysis ed. by A. Friedman and M. Pinsky, 79-95, Academic press, New York, (1978).
- [3] Ikeda, N. and Watanabe, S. : Stochastic differential equations and diffusion processes, North Holland-Kodansha, Tokyo, (1981).
- [4] Malliavin, P. : The canonic diffusion above the diffeomorphism group of the circle, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 329, 325-329, (1999).

On a multi-server queueing system with differentiated working vacation policy, vacation interruption, balking and reneging

Aimen Dehimi¹, Louiza Berdjoudj ², Mohamed Boualem , and Amina Angelika Bouchentouf ⁴

¹Laboratory of Applied Mathematics (LMA), Department of Mathematics, University of Bejaia, Algeria, aimen.dehimi@univ-bejaia.dz

²Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, louiza.berdjoudj@univ-bejaia.dz

³LaMOS Research Unit, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria, mohammed.boualem@univ-bejaia.dz

⁴Department of Mathematics, Djilali Liabes University of Sidi Bel Abbas, Algeria, bouchentouf_amina@yahoo.fr

Abstract : The present paper deals with an $M^X/M/c$ queueing system with differentiated working vacations, Bernoulli schedule vacation interruption, balking and reneging, and impatience timers which depend on the states of the servers. Once the system is empty, the servers wait a random amount of time before they go on a working vacation during which service is provided at a lower rate. At the instant of the service achievement in the vacation period, if there are customers present in the system, the vacation is interrupted and the servers return to the regular busy period with probability β' or continues the working vacation with probability $1 - \beta'$. Whenever the working vacation ends, the servers return to the normal busy period. If the system is empty, the servers can take another working vacation of shorter duration. Whenever a customer arrives at the system, he activates a random impatience timer. If his service has not been completed before his impatience timer expires, the customer may abandon the system. For the proposed model, we present the steady-state equations.

MSC: 60K25 ; 68M20 ; 90B22

Keywords : Queueing models ; Stochastic analysis ; Bernoulli schedule vacation interruption ; Impatient customers

*Corresponding Author

1 Introduction

Queuing systems subject to working vacation policy have been extensively studied due to their wide applications in computer and communication network, manufacturing system and data etc. Many working vacation policies improve the adaptability for optimal design of queuing systems. These models have been studied by different researchers. As a general rule, in working vacation policy, the server resumes its work at the normal service rate after the end of the vacation, only if customers are waiting in the system. Li and Tian [4] introduced vacation interruptions in an infinite-buffer Markovian single server queue with working vacation policy at which the server may come back from the vacation to the regular working level once the number of customers attain a certain value in the vacation period. Various queuing situations occur where customers tend to be discouraged by a long queue. As a consequence, customers decide either not to join the queue (balk) or leave after logging into the queue without being served because of their impatience (renege). Numerous researchers have been attracted by the analysis of the impatience behavior in queuing models with vacation and working vacation. Yue et. al [7] dealt with impatience behavior in an $M/M/1$ queue under multiple working vacation policy. A finite buffer renewal input queuing model with balking and multiple working vacations has been carried out by Vijaya Laxmi and Jyothisna [5]. Then, Vijaya Laxmi and Jyothisna [6] analyzed the impatience behavior in a queuing model with Bernoulli schedule vacation interruption. Later, Bouchentouf and Yahiaoui [1] investigated a $M/M/1$ queuing model with feedback, renegeing and retention of renegeed customers, multiple working vacations and Bernoulli schedule vacation interruption. Recently, Bouchentouf et al. [3] investigated On impatience in Markovian $M/M/1/DWV$ queue with vacation interruption. Then, Bouchentouf and Guendouzi [2] analyzed $M^X/M/c$ bernoulli feedback queue with variant multiple working vacations and impatient customers performance and economic analysis.

In this investigation, we consider a $M^X/M/c/N$ queuing system with waiting servers, balking and renegeing, under differentiated working vacations and Bernoulli schedule vacation interruption at which the servers are subject to two types of working vacation, namely : working vacation after the busy period and working vacation taken immediately after the server has just returned from previous working vacation to find that there are no customers in the queue. In this paper, we derive the steady-state equations of the system .

2 Model description

We consider a $M^X/M/c/N$ queueing system with differentiated two working vacations. Customers arrive in batches according to a Poisson process with rate λ . The arrival batch size X is a random variable with probability mass function $P(X = l) = b_l; l = 1, 2, \dots, N$. They are served in accordance with First Come First Served 'FCFS' discipline. The service time during normal busy period follows an exponential distribution with rate μ . The queueing system consists of c servers, all the servers go on working vacation synchronously once the system becomes empty, and they also return to the system as one at the same time. If the servers return from the working vacation period to find an empty queue, they immediately leave all together for another working vacation. Otherwise, they return to serve the queue. On the other hand, if no arrival takes place during the regular busy period, the servers wait

for a random duration of time before leaving for working vacation. The waiting server duration follows an exponential distribution with rate ω . After the waiting time duration is finished, they leave for an initial type-1 vacation exponentially distributed with parameter ϕ_1 . Upon return from the initial type-1 vacation if the servers do not find any customers waiting in the queue, they leave for the second type-2 vacation of shorter duration which follows exponential distributions with parameter ϕ_2 . Otherwise, they return to the normal busy period and starts serving the customers present in the system.

If a customer arrives during the vacation periods, the system immediately resumes services and switches to the busy period. That is, the servers are supposed to be interrupted under the Bernoulli rule, i.e., at a service completion instant during this period if there are customers in the system, the server may interrupt the vacation and switch to normal busy period with probability β' or continue the vacation with probability $\beta = 1 - \beta'$. It is worth noting that the vacation service rate can be only applied to the first customer who arrives during a vacation period.

During vacation period, customers are served at lower rate. The service time during this period follows an exponential distribution with rate ν , with $\nu < \mu$.

In normal busy period, type-I, and type-II working vacations, each arriving customer activates an individual timer, exponentially distributed with parameters ξ_0 and ξ_1, ξ_2 , respectively, such that, if the customer's service has not begun before the customer's timer expires, he abandons the queue never to return.

The inter-arrival times, service times, waiting times, working vacation times, and impatience times are mutually independent. The service discipline is First-Come, First-Served.

3 Steady-state analysis

Let $L(t)$ denote the number of customers in the system at time t , and let $S(t)$ be the status of the servers at time t . For the mathematical representation of the proposed model at an instant t , we consider the following states of the system based on the status of the servers :

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{when the servers are in busy period at time } t; \\ 1, & \text{when the servers are in type-1 working vacation period at time } t; \\ 2, & \text{when the servers are in type-2 working vacation period at time } t; \end{cases}$$

The bi-variate process $\{(L(t); S(t)); t \geq 0\}$ represents two-dimensional infinite state Markov chain in continuous time with state space :

$$\Omega = \{(j, n) : j = 0, 1, 2; n = 0, 1, \dots, N\}.$$

Let $P_{j,n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = j, L(t) = n\}$, $(j, n) \in \Omega$, denote the system state probabilities. Applying the Markov process theory, we obtain the following set of steady-state equations

$$(\lambda + \omega)P_{0,0} = (\mu + \xi_0)P_{0,1}, \quad n = 0,$$

$$(\lambda + \mu + \xi_0)P_{0,1} = \lambda b_1 P_{0,0} + \gamma_1 P_{1,1} + \gamma_2 P_{2,1} + 2\beta' v P_{1,2} \\ + 2(1 - \beta)v P_{2,2} + 2(\mu + \xi_0)P_{0,2}, \quad n = 1,$$

$$(\lambda + n(\mu + \xi_0))P_{0,n} = \lambda \sum_{m=1}^n b_m P_{0,n-m} + \gamma_1 P_{1,n} + \gamma_2 P_{2,n} + (n+1)(1 - \beta)v P_{1,n+1} \\ + (n+1)(1 - \beta)v P_{2,n+1} + (n+1)(\mu + \xi_0)P_{0,n+1}, \\ 2 \leq n \leq c - 1$$

$$(\lambda + c\mu + n\xi_0)P_{0,n} = \lambda \sum_{m=1}^n b_m P_{0,n-m} + \gamma_1 P_{1,n} + \gamma_2 P_{2,n} + c(1 - \beta)v P_{1,n+1} \\ + c\beta' v P_{2,n+1} + (c\mu + (n+1)\xi_0)P_{0,n+1}, \\ c \leq n \leq N - 1$$

$$N(\mu + \xi_0)P_{0,N} = \lambda \sum_{m=1}^N b_m P_{0,N-m} + \gamma_1 P_{1,N} + \gamma_2 P_{2,N}, \quad n = N,$$

$$(\lambda + \gamma_1)P_{1,0} = \omega P_{0,0} + (v + \xi_1)P_{1,1}, \quad n = 0,$$

$$(\lambda + v + \xi_1 + \gamma_1)P_{1,1} = \lambda b_1 P_{1,0} + 2(\beta v + \xi_1)P_{1,2}, \quad n = 1,$$

$$(\lambda + n(v + \xi_1) + \gamma_1)P_{1,n} = \lambda \sum_{m=1}^n b_m P_{1,n-m} + (n+1)(\beta v + \xi_1)P_{1,n+1}, \\ 2 \leq n \leq c - 1,$$

$$(\lambda + cv + n\xi_1 + \gamma_1)P_{1,n} = \lambda \sum_{m=1}^n b_m P_{1,n-m} + (c\beta v + (n+1)\xi_1)P_{1,n+1}, \\ c \leq n \leq N - 1,$$

$$(N(v + \xi_1) + \gamma_1)P_{1,N} = \lambda \sum_{m=1}^N b_m P_{1,N-m}, \quad n = N,$$

$$\lambda P_{2,0} = \gamma_1 P_{1,0} + (v + \xi_2)P_{2,1}, \quad n = 0,$$

$$(\lambda + v + \xi_2 + \gamma_2)P_{2,1} = \lambda b_1 P_{2,0} + 2(\beta v + \xi_2)P_{2,2}, \quad n = 1,$$

$$(\lambda + n(v + \xi_2) + \gamma_2)P_{2,n} = \lambda \sum_{m=1}^n b_m P_{2,n-m} + (n+1)(\beta v + \xi_2)P_{2,n+1}, \\ 2 \leq n \leq c - 1,$$

$$(\lambda + c\nu + n\xi_2 + \gamma_2)P_{2,n} = \lambda \sum_{m=1}^n b_m P_{2,n-m} + (c\beta\nu + (n+1)\xi_2)P_{2,n+1},$$

$$c \leq n \leq N-1,$$

$$(N(\nu + \xi_2) + \gamma_2)P_{2,N} = \lambda \sum_{m=1}^N b_m P_{2,N-m}, \quad n = N,$$

The normalization condition is

$$\sum_{n=0}^N P_{0,n} + \sum_{n=0}^N P_{1,n} + \sum_{n=0}^N P_{2,n} = 1$$

4 Conclusion



In this paper, we considered a $M^X/M/c/N$ queuing model subject to differentiated working vacations, Bernoulli schedule vacation interruption, waiting server and customer' impatience during both busy and working vacation periods. We obtained the steady-state equations of the considered system. The steady-state solution of the system, as well as useful characteristics of the queuing model, will be the subject of further work.

References

- [1] Bouchentouf, A. A. and Yahiaoui L. (2017). On feedback queuing system with reneging and retention of reneged customers, multiple working vacations and Bernoulli schedule vacation interruption. *Arabian Journal of Mathematics*, 6(1), 1–11. doi : 10.1007/s40065-016-0161-1
- [2] Bouchentouf, A. A., Guendouzi, A. (2020). The $M^X/M/c$ MX/M/c Bernoulli feedback queue with variant multiple working vacations and impatient customers : performance and economic analysis. *Arabian Journal of Mathematics*, 9(2), 309-327.
- [3] Bouchentouf, A. A., Guendouzi, A., Majid, S. (2020). On impatience in Markovian M/M/1/N/DWV queue with vacation interruption. *Croatian Operational Research Review*, 21-37.
- [4] Li, J.H. and Tian, N.S. (2007). The $M/M/1$ queue with working vacations and vacation interruptions. *Journal of systems Science and System Engineering*, 16(1), 121-127. doi : 10.1007/s11518-006-5030-6
- [5] Vijaya Laxmi, P. and Jyothsna, K. (2013). Analysis of finite buffer renewal input queue with balking and multiple working vacations. *OPSEARCH*, 50(4), 548–565. doi : 10.1007/s12597-013-0123-8
- [6] Vijaya Laxmi, P. and Jyothsna, K. (2015). Impatient customer queue with Bernoulli schedule vacation interruption. *Computers and Operations Research*, 56, 1–7. doi : 10.1016/j.cor.2014.08.018
- [7] Yue, D. Yue, W. Xu, G. (2012). Analysis of customers' impatience in an M/M/1 queue with working vacations. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 8(4), 895–908. doi : 10.3934/jimo.2012.8.895 .



Quadratic Parametric Approach for Constrained Bi-matrix Games with Payoffs and Constraints Represented by IFNs

Sabiha Djebara ¹ and Farida Achemine ²

¹Laboratoire de Recherche Opérationnelle et de Mathématiques de la Décision, Faculté des Sciences,
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, 15000 Tizi-Ouzou, Algeria,
sabiha.djebara@ummo.dz

²Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Faculté des Sciences, Université Mouloud Mammeri
de Tizi Ouzou, 15000 Tizi-Ouzou, Algeria,
farida.achemine@ummo.dz

Abstract : In this paper, we consider a constrained bi-matrix game with the payoffs and the linear constraints are intuitionistic fuzzy numbers (IFN). Based on a ranking method for intuitionistic fuzzy numbers, we propose an approach for solving the considered game. In this approach, the constrained bi-matrix game with (IFN) is converted into a crisp constrained bi-matrix game. Finally, a parametric quadratic optimisation model is given to compute the solution of this game.

MSC: 91A10 ; 28E10.

Keywords : Non cooperative game, Bi-matrix game, Intuitionistic Fuzzy numbers.

1 Introduction

A bi-matrix game is among one of the most important model in non cooperative games. It is a two person non-zero(constant)-sum game in which each player has finitely many pure strategies. A player is allowed to randomize his strategy according to a probability distribution on his pure strategy set, which defines a mixed strategy for the player. In some real situations, choice of mixed strategies is subject to linear constraints. Such a bi-matrix games are called constrained bi-matrix games. However, in many bi-matrix games problems coming from real life situation, the two players often lack information about other players' behavior or about the environment. This lack of precision (indeterminacy) may be modeled using the concept of intuitionistic fuzzy set (IFS) [1]. This concept is a generalisation of a fuzzy set and introduced by Atanassov [1]. It is characterized by a membership function and a non-membership function [2]. Intuitionistic fuzzy set is very useful in providing a flexible model to model uncertainty involved in decision making [4]. The concept of intuitionistic fuzzy number is defined by

*Corresponding Author

Burillo et al. [3] and a simple mathematical expression of this concept is given by Xu [6]. The bi-matrix game with payoffs of IFNs is studied in [8] and to the best of our knowledge, there is no study on constrained bi-matrix games with payoffs and constraints of IFNs.

In this paper, we propose an approach to solve the constrained bi-matrix game with payoffs and constraints of IFNs.

The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, some basic definitions on (IFS) and (IFN) are given and the required notations are explained. Section 3 contains the proposed approach. A Numerical example is given in section 4. Section 5 concludes the paper.

2 The Concept of Intuitionistic Fuzzy Information and Ranking Method

2.1 The Concept of Intuitionistic Fuzzy Information

Definition 1. [1] An intuitionistic fuzzy set (IFS) is an object having the following form :

$$\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle : x \in X \}$$

which is characterized by a membership function : $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1], x \in X \rightarrow \mu_{\tilde{A}} \in [0, 1]$ and a nonmembership function : $\nu : X \rightarrow [0, 1], x \in X \rightarrow \nu_{\tilde{A}} \in [0, 1]$

with the condition : $\mu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$,

where $\mu_{\tilde{A}}(x)$ and $\nu_{\tilde{A}}(x)$ represent, respectively, the membership degree and the non-membership degree of x in A .

Moreover, for each IFS A in X , if $\pi_{\tilde{A}(x)} = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)$, $\forall x \in X$.

Then $A(x)$ is called an indeterminacy degree of x to A .

Definition 2. [2] Let $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle | x \in X \}$ and $\tilde{B} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{B}}(x) \rangle | x \in X \}$ be two IFSs in the finite universal set $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. The operations over IFNs are stipulated as follows :

1. $\tilde{A} + \tilde{B} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x)\nu_{\tilde{B}}(x) \rangle | x \in X \}$
2. $\tilde{A}\tilde{B} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) + \nu_{\tilde{B}}(x) - \nu_{\tilde{A}}(x)\nu_{\tilde{B}}(x) \rangle | x \in X \}$

Definition 3. [6] $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$ is an intuitionistic fuzzy number (IFN) or an intuitionistic fuzzy value (IFV), where $\mu_{\tilde{a}}(x) \in [0, 1], \nu_{\tilde{a}}(x) \in [0, 1], \mu_{\tilde{a}}(x) + \nu_{\tilde{a}}(x) \leq 1$. And $\pi_{\tilde{a}} = 1 - \mu_{\tilde{a}}(x) - \nu_{\tilde{a}}(x)$ is characterized by a hesitancy function.

2.2 The Ranking Method and Proprieties

Remark 1. The intuitionistic fuzzy number (IFN) $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$ is mathematically equivalent to a closed interval fuzzy number $\tilde{a} = [\mu_{\tilde{a}}, 1 - \nu_{\tilde{a}}]$. Similarly, and IFS $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle | x \in U \}$ is mathematically equivalent to a closed interval fuzzy set $[\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \nu_{\tilde{A}}(x)]$.

Yager [7] introduced the attitude factor corresponding to Basic Unit-intervals Monotonic (BUM) function $Q(y)$ as follow $v = \int_0^1 Q(y)dy$ ($v \in [0, 1]$) and he proved that the bigger the value of v , the higher the degree of player's risk preference. So that the risk preferences of players are determined by their BUM functions .

Definition 4. Let $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$ be an intuitionistic fuzzy number (IFN), if there is any basic unit-interval monotonic (BUM) function $Q(x) \in \Gamma$. Then for an interval number $[\mu_{\tilde{a}}, 1 - \nu_{\tilde{a}}]$, have

$$F([\mu_{\tilde{a}}, 1 - \nu_{\tilde{a}}], \mathcal{V}) = \mu_{\tilde{a}}[1 - \int_0^1 Q(x)dx] + (1 - \nu_{\tilde{a}}) \int_0^1 Q(x)dx = \mu_{\tilde{a}} + \mathcal{V}(1 - \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}}) \tag{1}$$

It is called the mean value of risk preference, i.e.

$$F(\tilde{a}, \mathcal{V}) = F([\mu_{\tilde{a}}, 1 - \nu_{\tilde{a}}], \mathcal{V}) = \mu_{\tilde{a}} + \mathcal{V}(1 - \mu_{\tilde{a}} - \nu_{\tilde{a}}) \tag{2}$$

Remark 2. [7] The parameter reflects players's preference information about hesitancy. $\mathcal{V} \in [0, \frac{1}{2}]$: shows that the player is risk averse, who favors the hesitancy of the membership degree. $\mathcal{V} \in (\frac{1}{2}, 1]$: shows that the player is risk prone, hesitancy gets more resolved in favor of nonmembership degree. $\mathcal{V} = \frac{1}{2}$: shows that the player is neutral.

Definition 5. [8] Assume that $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$ and $\tilde{b} = \langle \mu_{\tilde{b}}, \nu_{\tilde{b}} \rangle$ be two IFNs in a set. Then, $\tilde{a} \leq_{IF} \tilde{b}$ if and only if $F(\tilde{a}, \mathcal{V}) \leq F(\tilde{b}, \mathcal{V})$ is always valid for any given parameter $\mathcal{V} \in [0, 1]$.

Similarly, the order relation " \geq_{IF} " can be defined. Namely, $\tilde{a} \geq_{IF} \tilde{b}$ if and only if for a given parameter $\mathcal{V} \in [0, 1]$, $F(\tilde{a}, \mathcal{V}) \geq F(\tilde{b}, \mathcal{V})$.

Theorem 1. [8] For a given $\mathcal{V} \in [0, 1]$, the Eq.1 is a unit interval monotone increasing function on $\mathcal{V} \in [0, 1]$, with the following good properties :

- For any IFN $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$, then $\tilde{a} \geq_{IF} \tilde{a}$ is always valid.
- For any IFNs $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$ and $\tilde{b} = \langle \mu_{\tilde{b}}, \nu_{\tilde{b}} \rangle$, if $\tilde{a} \geq_{IF} \tilde{b}$ and $\tilde{b} \geq_{IF} \tilde{a}$, then $\tilde{a} =_{IF} \tilde{b}$.
- For any IFNs $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$, $\tilde{b} = \langle \mu_{\tilde{b}}, \nu_{\tilde{b}} \rangle$ and $\tilde{c} = \langle \mu_{\tilde{c}}, \nu_{\tilde{c}} \rangle$, if $\tilde{a} \geq_{IF} \tilde{b}$ and $\tilde{b} \geq_{IF} \tilde{c}$, then $\tilde{a} \geq_{IF} \tilde{c}$.
- For any IFNs $\tilde{a} = \langle \mu_{\tilde{a}}, \nu_{\tilde{a}} \rangle$, $\tilde{b} = \langle \mu_{\tilde{b}}, \nu_{\tilde{b}} \rangle$ and $\tilde{c} = \langle \mu_{\tilde{c}}, \nu_{\tilde{c}} \rangle$, if $\tilde{a} \geq_{IF} \tilde{b}$, then $\tilde{a} + \tilde{c} \geq_{IF} \tilde{b} + \tilde{c}$ for any IFN \tilde{c} .

3 Problem Description ant its Solution

Let $G_1 = \langle S_1 \times S_2, A, B \rangle$ be the constrained bi-matrix game with mixed strategies, where $I_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $I_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ are the sets of pure strategies of player I and player II, respectively. $X = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0, \sum_{j=1}^m y_j = 1\}$ are the sets of mixed strategies of player I and player II, respectively. $D^1x \leq d^1, \forall x \in X$ and $D^2y \geq d^2, \forall y \in Y$ are the linear constraints on the mixed strategies of player I and

II, respectively. A and B are the payoff matrices of player I and player II, respectively, with $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. The aim of each player is to maximize her/his gain.

In this paper, we consider the game $G_2 = \langle \tilde{S}_1 \times \tilde{S}_2, \tilde{A}, \tilde{B} \rangle$, where the entries of $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{D}^1, \tilde{D}^2, \tilde{d}^1$ and \tilde{d}^2 are intuitionistic fuzzy number, with $\tilde{S}_1 = \{x \in X, \tilde{D}^1 x \leq_{IF} \tilde{d}^1\}$, $\tilde{S}_2 = \{y \in Y, \tilde{D}^2 y \leq_{IF} \tilde{d}^2\}$ are the sets of the linear constraint on the mixed strategies of player I and player II, respectively. Where, $D^1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D^2 \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $d^1 \in \mathbb{R}^p$ and $d^2 \in \mathbb{R}^q$. G_2 is called an intuitionistic fuzzy constrained bi-matrix game.

Definition 6. The pair of strategies (x^*, y^*) is an IFN-Nash equilibrium for the game G_2 if

$$\begin{aligned} x^T \tilde{A} y^* &\leq_{IF} x^{T*} \tilde{A} y^* \quad \forall x \in \tilde{S}_1 \\ x^{T*} \tilde{B} y &\leq_{IF} x^{T*} \tilde{B} y^* \quad \forall y \in \tilde{S}_2 \end{aligned}$$

Following the idea in [5], there exists an IFN-Nash equilibrium for the game $G_2, (x^*, y^*) \in \tilde{S}_1 \times \tilde{S}_2$ which is the solution of the mathematical programming model (P1)

$$(P1) \begin{cases} \max_{IF} x^T (\tilde{A} + \tilde{B}) y - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} \\ \tilde{A} y \leq_{IF} \tilde{\mu} \\ x^T \tilde{B} \leq_{IF} \tilde{\nu} \\ \tilde{D}^1 x \leq_{IF} \tilde{d}^1 \\ \tilde{D}^2 y \geq_{IF} \tilde{d}^2 \\ x^T e_n = 1, y^T e_m = 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Applying the ranking function (see equation (1)), for $\mathcal{V}_1 \in [0, 1]$ and $\mathcal{V}_2 \in [0, 1]$, we have $\tilde{A}(\mathcal{V}_1) = F((\tilde{a}_{ij}(\alpha_i, \beta_j))_{n \times m}, \mathcal{V}_1) = (F((\tilde{a}_{ij}(\alpha_i, \beta_j), \mathcal{V}_1))_{n \times m}$.

$$F((\tilde{a}_{ij}(\alpha_i, \beta_j), \mathcal{V}_1) = \mu_{\tilde{a}_{ij}(\alpha_i, \beta_j)} + \mathcal{V}_1 \left(1 - \mu_{\tilde{a}_{ij}(\alpha_i, \beta_j)} - \nu_{\tilde{a}_{ij}(\alpha_i, \beta_j)} \right).$$

$$\tilde{B}(\mathcal{V}_2) = F((\tilde{b}_{ik}(\alpha_i, \beta_k))_{m \times p}, \mathcal{V}_2) = (F((\tilde{b}_{ik}(\alpha_i, \beta_k), \mathcal{V}_2))_{m \times p}.$$

$$F((\tilde{b}_{ij}(\alpha_i, \beta_j), \mathcal{V}_2) = \mu_{\tilde{b}_{ij}(\alpha_i, \beta_j)} + \mathcal{V}_2 \left(1 - \mu_{\tilde{b}_{ij}(\alpha_i, \beta_j)} - \nu_{\tilde{b}_{ij}(\alpha_i, \beta_j)} \right).$$

In the same way, we calculate \tilde{D}^1 and \tilde{D}^2 , \tilde{d}^1 and \tilde{d}^2 .

The definition of IFN-Nash equilibrium is reformulated using the equation (1) and parameters $\mathcal{V}_1 \in, \mathcal{V}_2 \in [0, 1]$.

Definition 7. The pair of strategies $(x^*, y^*) \in \tilde{S}_1(\mathcal{V}_1) \times \tilde{S}_2(\mathcal{V}_2)$ is a $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -Nash equilibrium for the game G_2 if

$$\begin{aligned} x \tilde{A}(\mathcal{V}_1) y^* &\leq x^* \tilde{A}(\mathcal{V}_1) y^* \quad \forall x \in \tilde{S}_1(\mathcal{V}_1) \\ x^* \tilde{B}(\mathcal{V}_2) y &\leq x^* \tilde{B}(\mathcal{V}_2) y^* \quad \forall y \in \tilde{S}_2(\mathcal{V}_2) \end{aligned}$$

Where $\tilde{S}_1(\mathcal{V}_1) = \left\{ x \in X, \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n x_i \left[\mu_{\tilde{D}_{ik}^1}(\alpha_i, \beta_k) + \mathcal{V}_1 \left(1 - \mu_{\tilde{D}_{ik}^1}(\alpha_i, \beta_k) - \nu_{\tilde{D}_{ik}^1}(\alpha_i, \beta_k) \right) \right] \leq \{F(d_1, \mathcal{V}_1)\} \right\}$ and $\tilde{S}_2(\mathcal{V}_2) = \left\{ y \in Y, \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^m y_j \left[\mu_{\tilde{D}_{lj}^2}(\alpha_l, \beta_j) + \mathcal{V}_2 \left(1 - \mu_{\tilde{D}_{lj}^2}(\alpha_l, \beta_j) - \nu_{\tilde{D}_{lj}^2}(\alpha_l, \beta_j) \right) \right] \leq \{F(d_2, \mathcal{V}_2)\} \right\}$

The parametric bi-matrix game $\langle \tilde{S}_1(\mathcal{V}_1) \times \tilde{S}_2(\mathcal{V}_2), \tilde{A}(\mathcal{V}_1), \tilde{B}(\mathcal{V}_2) \rangle$ has at least one Nash equilibrium wich is an $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ -Nash equilibrium for the game G_2 ant it can be obtained by solving the problem (P.F) :

$$P.F \left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i \left[\mu_{\tilde{a}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) + \mathcal{V}_1 \left(1 - \mu_{\tilde{a}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) - \nu_{\tilde{a}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) \right) + \mu_{\tilde{b}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{V}_2 \left(1 - \mu_{\tilde{b}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) - \nu_{\tilde{b}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) \right) \right] y_j - \tilde{\mu}(\mathcal{V}_1) - \tilde{\nu}(\mathcal{V}_2) \right\} \\ \sum_{j=1}^m y_j \left[\mu_{\tilde{a}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) + \mathcal{V}_1 \left(1 - \mu_{\tilde{a}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) - \nu_{\tilde{a}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) \right) \right] \leq \mu(\mathcal{V}_1) \quad \forall i = 1..n. \\ \sum_{i=1}^n x_i \left[\mu_{\tilde{D}_{ik}^1}(\alpha_i, \beta_k) + \mathcal{V}_1 \left(1 - \mu_{\tilde{D}_{ik}^1}(\alpha_i, \beta_k) - \nu_{\tilde{D}_{ik}^1}(\alpha_i, \beta_k) \right) \right] \leq d_k^1(\mathcal{V}_1) \quad \forall k = 1..p. \\ \sum_{i=1}^n x_i \left[\mu_{\tilde{b}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) + \mathcal{V}_2 \left(1 - \mu_{\tilde{b}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) - \nu_{\tilde{b}_{ij}}(\alpha_i, \beta_j) \right) \right] \leq \nu(\mathcal{V}_2) \quad \forall j = 1..m. \\ \sum_{j=1}^m y_j \left[\mu_{\tilde{D}_{lj}^2}(\alpha_l, \beta_j) + \mathcal{V}_2 \left(1 - \mu_{\tilde{D}_{lj}^2}(\alpha_l, \beta_j) - \nu_{\tilde{D}_{lj}^2}(\alpha_l, \beta_j) \right) \right] \leq d_l^2(\mathcal{V}_2) \quad \forall l = 1..q. \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \sum_{j=1}^m y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3)$$

4 Numerical results

We consider two hydroelectric companies engaged in competitive bidding for the power supply qualification. When more constraints are imposed on the mixed strategies, both parties take the fact that the bidding prices are "high, flat, and low". The uncertainty on the payoffs and the constraints is expressed using intuitionistic fuzzy numbers. For example, assume that the data of the companies are :

$$F(\tilde{A}, \mathcal{V}_1) = \begin{pmatrix} (0.8 + 0.2\mathcal{V}_1) & (0.6 + 0.3\mathcal{V}_1) & (0.9) \\ (0.5 + 0.2\mathcal{V}_1) & (0.7 + 0.3\mathcal{V}_1) & (0.8 + 0.1\mathcal{V}_1) \\ (0.9 + 0.2\mathcal{V}_1) & (0.6 + 0.2\mathcal{V}_1) & (0.7 + 0.1\mathcal{V}_1) \end{pmatrix}$$

$$F(\tilde{B}, \mathcal{V}_2) = \begin{pmatrix} (0.6 + 0.2\mathcal{V}_2) & (0.8 + 0.2\mathcal{V}_2) & (0.6 + 0.2\mathcal{V}_2) \\ (0.5 + 0.2\mathcal{V}_2) & (0.9) & (0.7 + 0.3\mathcal{V}_2) \\ (0.5 + 0.2\mathcal{V}_2) & (0.5 + 0.2\mathcal{V}_2) & (0.9 + 0.1\mathcal{V}_2) \end{pmatrix}$$

$$F(\tilde{D}^1, \mathcal{V}_1) = \begin{pmatrix} (0.6 + 0.1\mathcal{V}_1) & (0.7 + 0.2\mathcal{V}_1) & (0.5 + 0.1\mathcal{V}_1) \\ (0.6 + 0.3\mathcal{V}_1) & (0.8 + 0.1\mathcal{V}_1) & (0.7 + 0.3\mathcal{V}_1) \\ (0.5 + 0.1\mathcal{V}_1) & (0.9) & (0.7 + 0.1\mathcal{V}_1) \end{pmatrix}$$

$$F(\tilde{D}^2, \mathcal{V}_2) = \begin{pmatrix} (0.6 + 0.2\mathcal{V}_2) & (0.8 + 0.1\mathcal{V}_2) & (0.5 + 0.2\mathcal{V}_2) \\ (0.8 + 0.2\mathcal{V}_2) & (0.5 + 0.3\mathcal{V}_2) & (0.6 + 0.2\mathcal{V}_2) \\ (0.6 + 0.1\mathcal{V}_2) & (0.9) & (0.8 + 0.1\mathcal{V}_2) \end{pmatrix}$$

$$F(\tilde{d}^1, \mathcal{V}_1) = ((0.8s + 0.1\mathcal{V}_1) \quad (0.9) \quad (0.6 + 0.1\mathcal{V}_1))$$

$$F(\tilde{d}^2, \mathcal{V}_2) = ((0.9 + 0.1\mathcal{V}_2) \quad (0.8 + 0.1\mathcal{V}_2) \quad (0.8))$$

\mathcal{V}_1	\mathcal{V}_2	$x^*(\mathcal{V}_1)$	$y^*(\mathcal{V}_2)$	$\mu^*(\mathcal{V}_1)$	$v^*(\mathcal{V}_2)$
0.6	0.9	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4762 \\ 0.5238 \\ 0 \end{pmatrix}$	0.8629	0.9158

5 Conclusion

In this paper, we proposed an approach to study the bi-matrix game where the payoffs and the constraints are fuzzy intuitionistic numbers. The proposed approach is illustrated by an application related to the conflict of hydropower companies competition, where the decision information is uncertain, and strategy selection depends on players judgements. A numerical example is given

Acknowledgements 1. *The authors would like to thank the two referees for their comments that helped to substantially improve this article.*

References

- [1] Atanassov, K.T. Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKR's Session, Sofia : deposited in Central Science-Technical Library of Bulgarian Academy of Science, 1697/84, in Bulgarian. (1983)
- [2] Atanassov, K.T. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20 87- 96, (1986).
- [3] Burillo, P., Bustince, H. and Mohedano, V. Some definition of intuitionistic fuzzy number, *Fuzzy based expert systems, fuzzy bulgarian Enthusiasts* (1994).
- [4] Edjegwa, P. A., Akubo, A. J. and Joshua, O.M., Intuitionistic Fuzzy set and its application in Carrer determination Via Normalized Euclidian Distance, & *European Scientific Journal*, 10, 529-536, (2014)
- [5] Mangasarian, O., Stone, H., Two-person nonzero-sum games and quadratic programming. *J Math Anal Appl* 9 : 348–355 (1964).
- [6] Xu, Z., Extended C-OWA operators and their use in uncertain multi-attribute decision making. *Syst Engine Theo Pract* 25(11) :7–13 (2005)
- [7] Yager, R. R., OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making. *IEEE Trans Syst Man Cybern Part B* 34(5) :1952–1963 (2004).
- [8] Yang, J., Xu, Z. and Dai, Y. Simple noncooperative games with intuitionistic fuzzy information and application in ecological management. *Appl Intell* 51, 6685–6697 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10489-021-02215-7>



Convergence rate of Lynden-Bell estimator for randomly left truncated and widely orthant dependent data

Mohamed Kaber El Alem¹, Zohra Guessoum^{*2}, and Abdelkader Tatachak³

¹Lab. MSTD, Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology Houari Boumediene (USTHB), Algeria,
med.kaber.nema@gmail.com

²Lab. MSTD, Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology Houari Boumediene (USTHB), Algeria,
zguessoum@usthb.dz

³Lab. MSTD, Faculty of Mathematics, University of Sciences and Technology Houari Boumediene (USTHB), Algeria,
atatachak@usthb.dz

Abstract : In this paper, we attempt to establish the strong uniform consistency with a rate of Lynden-Bell estimator when the random variables of interest and the truncated variables form a widely orthant dependent (WOD) sequences. Then, asymptotic results for hazard rate function are established as an application of the main results. The performances of the proposed estimators are illustrated via some simulations.

MSC: Primary 62G20 ; Secondary 62G05

Keywords : Lynden-Bell estimator ; Random left-truncation ; Strong uniform consistency rate ; Widely Orthant Dependent

1 Introduction

In classical statistical inference, the observed random variables (rv's) of interest are generally assumed to be independent and identically distributed (iid). However, in many survival or reliability studies, the assumption of independence is often too strong to be realistic. In addition, it is common to have data which are not only dependent but incomplete too. The incomplete data case we consider in this work is that generated by random left truncation (RLT) mechanism. This model first appeared in astronomy, but it occurs also in several fields such as medicine, epidemiology, biometrics and economics. Our focus in the present paper is to study the asymptotic properties of the Lynden-Bell estimator when the random variables of interest and the truncated

*Corresponding Author

variables form a (WOD) sequences. The concept of WOD rv's was introduced by Wang et al. ([4], 2013) as follows

Définition 1.1. For a sequence of random variables $\{X_N, N \geq 1\}$, if there exists a finite real sequence $\{g_U(N), N \geq 1\}$ satisfying for $N \geq 1$ and $\forall x_i \in (-\infty, +\infty), 1 \leq i \leq N$,

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_N > x_N) \leq g_U(N) \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(X_i > x_i)$$

and if there also exists a sequence $\{g_L(N), N \geq 1\}$ satisfying for $N \geq 1$ and $\forall x_i \in (-\infty, +\infty), 1 \leq i \leq N$,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N) \leq g_L(N) \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$$

Then the random sequence $\{X_N, N \geq 1\}$ is called Widely Orthant Dependent (WOD) with dominant coefficient $g(N) = \max\{g_U(N), g_L(N)\}$.

2 Basic definitions and notation

Let X and Y be two independent real random variables defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, with continuous distribution functions (df's) F and G respectively. In the RLT model, the rv of interest X and the truncating rv Y are observable only if $X \geq Y$, while nothing is observed if $X < Y$. In this paper we follow the same sampling scheme as that of Woodroffe ([5], 1985) whose observable sample of size $n = \sum_{i=1}^N 1_{\{X_i \geq Y_i\}}$, is a subset of N pairs $\{(X_i, Y_i), 1 \leq i \leq N\}$, where N is deterministic but unknown while n is random. Without possible confusion we still denote $\{(X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n \leq N\}$ the observed pairs from the original N -sample. Now, set $\tau := \mathbb{P}(X \geq Y)$ and without further mention we shall assume that we observe at least one pair (X_1, Y_1) i.e., $\tau > 0$, because otherwise no data will be available.

In the sequel, all probability statements are to be interpreted as conditional probability ones, i.e., $\mathbf{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X \geq Y)$. Likewise \mathbf{E} and \mathbb{E} will denote the expectation operators related to \mathbf{P} and \mathbb{P} , respectively. Then conditionally on n , the asymptotic results are stated considering $n \rightarrow +\infty$ which remain true with respect to the probability \mathbb{P} since $n \leq N$.

Under RLT model, the conditional joint distribution of an observed (X, Y) (see Stute ([3], 1993)), becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y) &:= \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y | X \geq Y) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^x G(y \wedge z) dF(z), \end{aligned}$$

where $y \wedge z := \min(y, z)$. The marginal distributions are defined by

$$\mathbf{F}(x) := \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^x G(z) dF(z) \quad \text{and} \quad \mathbf{G}(y) := \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y \wedge z) dF(z).$$

Let $a_w = \inf\{u : W(u) > 0\}$ and $b_w = \sup\{u : W(u) < 1\}$ be the lower and upper bounds of the W df support. As pointed out in Woodroffe ([5], 1985), F and G can be estimated completely only if

$$a_G \leq a_F, \quad b_G \leq b_F \quad \text{and} \quad \int_{a_F}^{\infty} \frac{dF}{G} < \infty.$$

Let $C(\cdot)$ be the function defined by

$$C(x) := \mathbf{P}(Y \leq x \leq X) = \mathbf{G}(x) - \mathbf{F}(x) = \frac{1}{\tau} G(x)[1 - F(x)], \quad a_G < x < b_F. \quad (1)$$

The functions \mathbf{F} , \mathbf{G} and C can respectively be estimated empirically by

$$\mathbf{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}, \quad \mathbf{G}_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq y\}} \quad \text{and} \quad C_n(x) = \mathbf{G}_n(x) - \mathbf{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq x \leq X_i\}},$$

Lynden-Bell ([2], 1971) constructed a nonparametric estimators of F and G given by

$$\hat{F}_n(x) = 1 - \prod_{i: X_i \leq x} \left[\frac{nC_n(X_i) - 1}{nC_n(X_i)} \right] \quad \text{and} \quad \hat{G}_n(y) = \prod_{i: Y_i > y} \left[\frac{nC_n(Y_i) - 1}{nC_n(Y_i)} \right].$$

According to the expression of $C(\cdot)$ in (1), and replacing F and G by their respective non-parametric maximum likelihood estimators, He and Yang ([1], 1998) proposed an estimator for τ , namely

$$\tau_n(x) = \frac{\hat{G}_n(x)[1 - \hat{F}_n(x)]}{C_n(x)} 1_{\{C_n(x) \neq 0\}} =: \tau_n. \quad (2)$$

3 Main Results

Now we state our main results as follows.

3.1 Strong consistence of Lynden Bell estimator

In the following theorem, the rate of the strong uniform convergence of the Lynden Bell estimator is given.

Théorème 3.1. *Under standard conditions, we have*

$$\sup_{x \in D} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = O(n^{-1/2} \log^{1/2}(ng(n))) \text{ a.s., as } n \rightarrow \infty.$$

The following Corollary states a rate of convergence for the estimator τ_n towards the rate of no truncation τ .

Corollaire 3.1. *Under the conditions of the theorem 3.1, we have*

$$|\tau_n - \tau| = O(n^{-1/2} \log^{1/2}(ng(n))) \text{ a.s., as } n \rightarrow \infty.$$

3.2 Application to Hazard Rate Estimation

Note that the function $C(\cdot)$ intervenes also in the cumulative risk function associated to F defined for $b_G \leq b_F$ by

$$\Lambda(x) := \int_{a_F}^x \frac{dF(z)}{1-F(z)} = \int_{a_F}^x \frac{d\mathbf{F}(z)}{C(z)}.$$

Then it is clear that $\Lambda(\cdot)$ can be estimated by

$$\Lambda_n(x) = \int_{a_F}^x \frac{d\mathbf{F}_n(z)}{C_n(z)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1_{\{X_i \leq x\}}}{C_n(X_i)}.$$

By differentiation we obtain the hazard rate function

$$\lambda(x)dx = \frac{dF(x)}{1-F(x)} = \frac{d\mathbf{F}(x)}{C(x)}.$$

So, a natural kernel estimator for $\lambda(\cdot)$ is given by

$$\hat{\lambda}_n(x) = \frac{1}{h_n} \int K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) d\Lambda_n(u) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_n(X_i)} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right),$$

where K is a kernel function and h_n is a sequence of positive bandwidths converging to zero so that $nh_n \rightarrow +\infty$. The strong uniform consistence with rate of the hazard rate function estimator is given in the following

Théorème 3.2. *Under assumptions concerning the kernel, bandwidths and hazard function, we have*

$$\sup_{x \in D} |\hat{\lambda}_n(x) - \lambda(x)| = O\left(\sqrt{\frac{\log(ng(n))}{nh_n}} + h_n^2\right) \text{ a.s., as } n \rightarrow \infty.$$

4 Simulation Study

For a given functional L and its estimate \hat{L}_n , the GMSE computed along B Monte Carlo trials is defined as

$$GMSE = \frac{1}{BH} \sum_{k=1}^B \sum_{j=1}^H (\hat{L}_{n,k}(x_j) - L(x_j))^2,$$

where H is the number of equidistant points x_j belonging to the range $[-3, 3]$ and $\hat{L}_{n,k}(x_j)$ is the value of $\hat{L}_n(x_j)$ computed at iteration k .

4.1 The performance of Lynden Bell estimator

TABLE 1 – Lynden-Bell estimator with $n \in \{50, 100, 500\}$ and different truncation rates
 $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$

n	50	100	500
$1 - \tau$	GMSE	GMSE	GMSE
10%	0.0041	0.0020	4.2825×10^{-4}
30%	0.0048	0.0021	4.3375×10^{-4}
50%	0.0055	0.0024	4.5901×10^{-4}

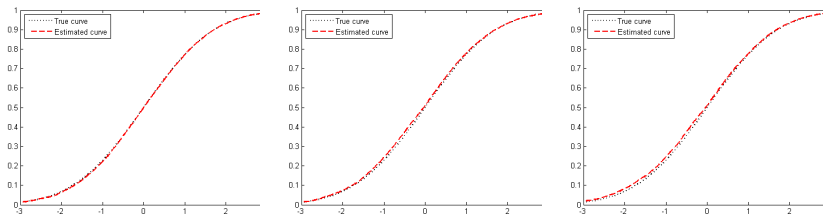


FIGURE 1 – Lynden-Bell estimator : $n=50$ and $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$

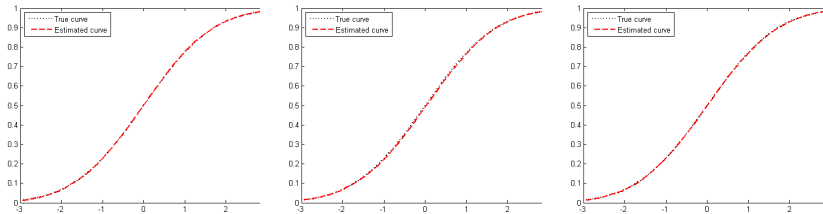


FIGURE 2 – Lynden-Bell estimator : $n=100$ and $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$

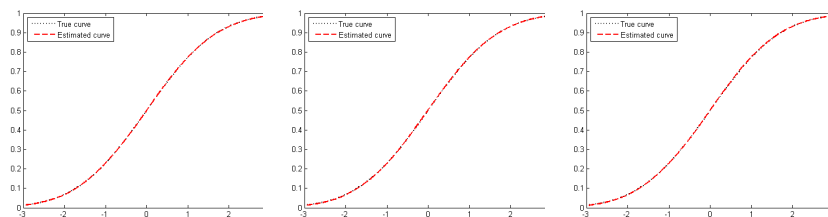


FIGURE 3 – Lynden-Bell estimator : $n=500$ and $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$

4.2 The performance of the hazard rate function estimator

TABLE 2 – Hazard rate estimator with $n \in \{50, 100, 500\}$ and different truncation rates $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$

n	50	100	500
$1 - \tau$	GMSE	GMSE	GMSE
10%	0.0626	0.0332	0.0102
30%	0.0667	0.0345	0.0112
50%	0.0672	0.0391	0.0128

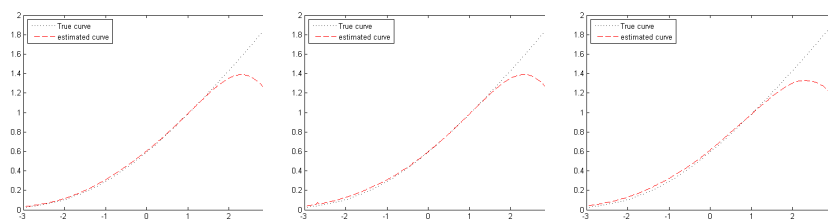
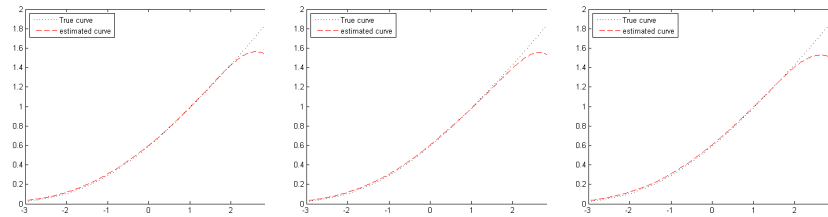
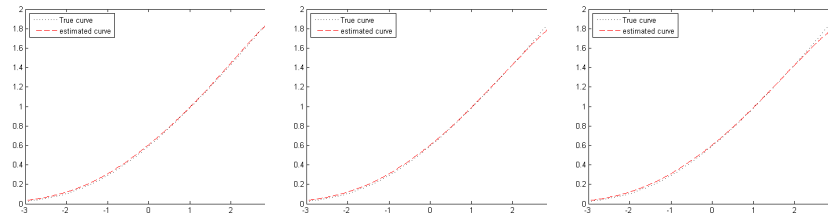


FIGURE 4 – Hazard rate estimator : $n=50$ and $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$

FIGURE 5 – Hazard rate estimator : $n=100$ and $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$ FIGURE 6 – Hazard rate estimator : $n=500$ and $TR \approx 10\%, 30\%, 50\%$

4.3 Some comments on the simulation results

- The tables and figures above indicate that the quality of our estimators is slightly affected by the rate of truncation ($1 - \tau$), and deteriorates moderately as the rate increases. Nevertheless, we observe that the performance of our estimators improves as the sample size n increases.
- For small sizes, the figures reveal the existence of a bump at the right of the hazard rate estimator, and this gradually disappears when the size increases even for large rates of truncation.
- The figures suggest that our estimators fit well the target curves provided that the truncation rate is not too excessive.

5 Conclusion

Our main contribution in this paper extended some existing asymptotic results stated in iid, strong mixing and associated left truncated data to WOD ones. Strong uniform convergence rates for the proposed estimators were stated and they are around $O\left(n^{-1/2} \ln^{1/2}(ng(n))\right)$. Simulation studies were conducted to assess the impact of both WOD and incompleteness on the estimation. These simulations revealed that the estimators are slightly affected by the truncation rate ($1 - \tau$), and deteriorates moderately for sufficiently large rates, however, the performances of our estimators improve as the sample size n increases.

References

- [1] He, S. and Yang, G.L. : Estimation of the truncation probability in the random truncation model. *Ann. Statist*, 26, 1011-1028 (1998).
- [2] Lynden-Bell, D. : A method of allowing for known observational selection in small samples applied to 3CR quasars. *Mon. Not. R. Astron. Soc*, 155, 95-118 (1971).
- [3] Stute, W. : Almost sure representation of the product-limit estimator for truncated data. *Ann. Statist*, 21, 146-156 (1993).
- [4] Wang, K., Wang, Y., Gao, Q. : Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a new dependent risk model with a constant interest rate. *Methodol Comput Appl Probab*, 15, 109-124 (2013).
- [5] Woodroffe, M. : Estimating a distribution function with truncated data. *Ann. Statist*, 13, 163-177 (1985).

Multivariate probability density estimator using inverse gamma and beta prime kernels

Lynda Harfouche ¹, Nabil Zougab , and Smail Adjabi 

¹LaMOS Research Unit, Higher School of Computing and Digital Sciences and Technologies (ESTIN), 06008, Amizour, Bejaia, Algeria, harfouche@estin.dz

²Lamos Research Unit, Faculty of Technologie, University of Bejaia, Algeria, nabilzougab@yahoo.fr

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, adjabi@hotmail.com

Abstract : In this paper, we first propose the multivariate inverse gamma and beta prime kernel estimator for probability density function in the context of multivariate positive data. Some properties (bias, variance, and mean integrated squared error) of the corresponding estimator are also investigated. Finally, the performances of the classical estimators based on family inverse gamma and beta prime kernels are illustrated by a simulation study and real data.

MSC: 62G07, 62G99.

Keywords : Bandwidth ; Beta prime kernel ; Inverse gamma kernel ; Multivariate data ; Positive data.

1 Classical multivariate IG and BP kernel estimator

Let $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ be independent and identically distributed (i.i.d.) d -variate random variables with an unknown density f on the support T_d , where $T = [0, \infty[^d$. The MV-IG or MV-BP kernel estimator is defined as :

$$\widehat{f}_{MV-j}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{l=1}^d K_{j(x_l, h_l)}(X_{il}), \quad (1)$$

by [1], where $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})$, $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ is the target (point where the density is estimated), $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$ is the vector of bandwidths and $j = IG, BP$ and the explicit form of the univariate kernel $K_{j(x_l, h_l)}(X_{il})$ is given in table 1.

*Corresponding Author

TABLE 1 – Univariate continuous(Beta prime and Inverse gamma) kernels.

Kernel(j)	Explicit form
IG	$K_{IG(\alpha,\beta)}(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (1/y)^{\alpha+1} \exp(-\beta/y),$ <p>where $\alpha = \frac{h+x}{h} + 1$ and $\beta = \frac{x(h+x)}{h}$.</p>
BP	$K_{BP(\lambda,\mu)}(y) = \frac{y^{\lambda-1}(1+y)^{-\lambda-\mu}}{\beta(\lambda,\mu)},$ <p>where $\lambda = \frac{x^2}{h} + x + 1$ and $\mu = \frac{x}{h} + \frac{1}{x+h} + 1$.</p>

1.1 Asymptotic properties

The following theorem presents the asymptotic bias and variance of the MV-IG and MV-BP kernel estimators. We assume that

- A1. f has two continuous and bounded derivatives.
- A2. The sequence of bandwidths $h = h(n)$ satisfies $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$.

Let \widehat{f}_{MV-j} be the multivariate IG and BP kernel estimator defined by (1). For a given $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ and under assumptions A1 and A2, then :

(i) the bias of the MV- j kernel estimators admit the following expansion

$$bias(\widehat{f}_{MV-j}(x)) = \sum_{l=1}^d q_j(x_l, f) h_l + o\left(\sum_{l=1}^d h_l\right), \quad (2)$$

where the explicit form of $q_j(x_l, f)$ is given in table 2. Similarly, when $n \rightarrow \infty$ and $\mathbf{h} \rightarrow 0$ the

TABLE 2 – Explicit form of $q_j(x_l, f)$.

Kernel(j)	Explicit form
IG	$q_{IG}(x_l, f) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_l^2} x_l,$
BP	$q_{BP}(x_l, f) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{(1+x_l)}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_l^2} \right).$

asymptotic variance is

$$Var(\widehat{f}_{MV-j}(x)) = \frac{f(\mathbf{x})}{n} \prod_{l=1}^d p_j(x_l, h_l) + o\left(\frac{1}{n \prod_{l=1}^d h_l^{1/2}}\right), \quad (3)$$

where the explicit form of $p_j(x_l, h_l)$ is given in table 3.

1.2 Global propriety

The criterion to use for the global propriety is the mean integrated squared error (*MISE*) defined as

$$MISE(\widehat{f}_{MV-j}) = \int_{T_d} bias^2(\widehat{f}_{MV-j}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{T_d} Var(\widehat{f}_{MV-j}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (4)$$

TABLE 3 – Explicit form of $p_j(x_l, h_l)$.

Kernel(j)	Explicit form
IG	$p_{IG}(x_l, h_l) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} h_l^{-1/2} x_l^{-1/2}$,
BP	$p_{BP}(x_l, h_l) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} h_l^{-1/2} (1+x_l)^{-1/2}$.

Using the expressions of the bias and variance given in Theorem 1, then the MISE is given as

$$MISE(\hat{f}_{MV-j}) = \int_{T_d} \left(\sum_{l=1}^d q_j(x_l, f) h_l \right)^2 d\mathbf{x} + \int_{T_d} \left(\frac{f(\mathbf{x})}{n} \prod_{l=1}^d p_j(x_l, h_l) d\mathbf{x} \right) + o \left(\sum_{l=1}^d h_l + \frac{1}{n \prod_{l=1}^d h_l^{1/2}} \right), \quad (5)$$

In practice, the choice of the vector of bandwidths is a crucial issue in kernel method. By minimizing (5) in the bandwidths $\mathbf{h} := (h_1, \dots, h_d)$ and for the reason of simplification, we obtain the optimal values of the vector bandwidth \mathbf{h} that minimizes (5) by

$$\mathbf{h}_j^{opt} = \left[\frac{\int_{T_d} \prod_{l=1}^d p_j(x_l, h_l) d\mathbf{x}}{2 \int_{T_d} \left(\sum_{l=1}^d q_j(x_l, f) h_l \right)^2 d\mathbf{x}} \right]^{-2/(4+d)} n^{-2/(4+d)}. \quad (6)$$

It is clear that the bandwidth given by (6) can not be used directly in practice because it depends on the unknown probability density function f and its derivatives. For this reason, we adapted the rule of thumb (RT) method for the choice of the vector bandwidth \mathbf{h} .

2 Illustrations from simulated data

We study the finite-sample performance for MV-IG and MV-BP kernel density estimators for bivariate positive data. We consider independent bivariate densities defined as follows :

(a) \mathbf{D}_1 is the independent bivariate log-normal density $\mathbf{LN}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\ln(x_1) - 1)^2\right) \times \frac{1}{x_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\ln(x_2) - 1)^2\right), \quad x_1, x_2 > 0.$$

(b) \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 is the independent bivariate weibull density $\mathbf{W}(\mathbf{1}, \mathbf{3})$:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x_1}{\beta}\right)^\alpha \times \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x_2}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\beta}\right)^\alpha, \quad x_1, x_2 > 0.$$

(c) \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_1 is the independent bivariate Burr density $\mathbf{B}(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{3x_1^2}{(1+x_1)^2} \times \frac{3x_2^2}{(1+x_2)^2}, \quad x_1, x_2 > 0.$$

We denote, $N_{sim} = 50$ by the number of replications for the simulation of sizes $n = 100, 500$, and 1000, (h_1, h_2) is the vector optimal smoothing obtained by Rule of thumb method with

$h_i = \sigma(X_i)n^{-1/3}, i = 1, 2$ and \widehat{ISE} is given by

$$\widehat{ISE} = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}} \{ \hat{f}_{MV-j}^{[k]}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \}^2, \quad (7)$$

with $\hat{f}_{MV-j}^{[k]}(\mathbf{x})$ is the bivariate kernel density estimator using sample number k .

Table 4 shows the mean of ISE's values and their standard deviation errors and the vector

TABLE 4 – Simulation results of the \widehat{ISE} using IG and BP kernel.

Density	kernel		n=100	n=500	n=1000
D_1	IG	(h_1, h_2)	(0.8767042, 1.3799611)	(0.6901637, 0.7875452)	(0.5835652, 0.5163064)
		ISE	0.0010352723	0.0009045413	0.0007236238
		sd	0.0007799581	0.0005392274	0.0004521922
D_1	BP	(h_1, h_2)	(1.356684, 1.202949)	(0.8641217, 0.5571118)	(0.5730319, 0.3929826)
		ISE	0.0005550663	0.0003420857	0.0002548075
		sd	0.0004675856	0.0003249692	0.0001011554
D_2	IG	(h_1, h_2)	(0.6514942, 0.6994583)	(0.4005152, 0.4067706)	(0.3114757, 0.2980058)
		ISE	0.009187499	0.004493854	0.002904386
		sd	0.025690774	0.005202581	0.006709728
D_2	BP	(h_1, h_2)	(0.5185393, 0.7119182)	(0.3750751, 0.4600215)	(0.3055599, 0.2664675)
		ISE	0.0007517253	0.0004205959	0.0003001276
		sd	0.0005572645	0.0003245142	0.0003206460
D_3	IG	(h_1, h_2)	(0.4140829, 0.2399655)	(0.1632253, 0.1685424)	(0.1201479, 0.2717701)
		ISE	0.1194627	0.03153384	0.02212012
		sd	0.1022244	0.03205237	0.04269175
D_3	BP	(h_1, h_2)	(0.1363838, 0.1745816)	(0.10920127, 0.07998911)	(0.1030934, 0.1040732)
		ISE	0.1409753	0.12739466	0.02222098
		sd	0.1025521	0.08908954	0.06475188

smoothing parameter. From Table 4, we can observe that the mean of ISE based on 50 replications decrease as sample size n increases for the all models ; which indicates that our proposed estimator is consistent. The Beta prime kernel outperform better than the inverse gamma kernel in the sense of integrated squared error criterion for the log-normal and weibull models.

3 Real data analysis

This section is reserved to illustrate the performances of the MV-IG and MV-BP kernel density estimators for BMD bivariate data measured in g/cm^2 for 24 individuals ; see also [3].

The data were already analyzed by using the dependent bivariate BS distribution (parametric approach). Because the positivity of the considered data, the IG and BP kernels are the appropriate kernels to analyse them. Now, we apply the MV-IG, MV-BP kernel estimators to estimate the PDF for BMD data. Note that, the corresponding vector bandwidths for the estimators are chosen using the RT procedure. The density estimates are represented in Figure 1. The obtained results show the the satisfactory smoothing quality of the two estimators.

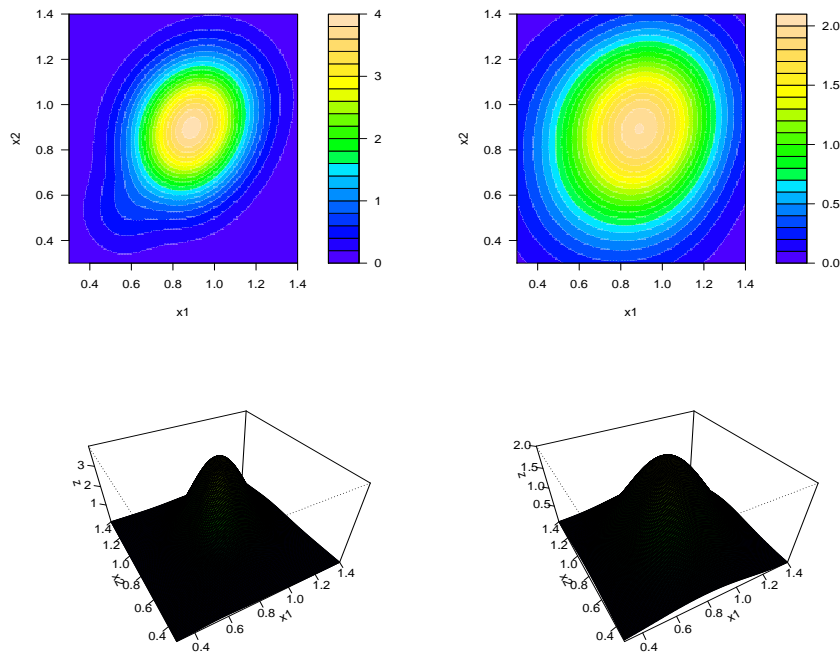


FIGURE 1 – Contour and surface plots of estimated BMD data with sample size $n = 24$, using IG (left) and BP (right) kernels.

4 Conclusion

This article has proposed the classical and the IG and BP kernel density estimators in the context of multivariate positive data. We have demonstrate the asymptotic proprieties of the proposed estimator such as the bias, the variance and the mean ingrate squared error (MISE). The performances of the classical density estimator are investigated through simulation study for independent and real bivariate positive data in the sense of integrated suqred error (ISE) criterion.

References

- [1] Bouezmarni, T., Rombouts. J.V.K : Nonparametric density estimation for multivariate bounded data, Journal of Statistical Planning and Inference, **140**,139-152 (2010).
- [2] Erçelik, E., Nadar, M :Nonparametric density estimation based on beta prime kernel. Communications in Statistics - Theory and Methods, DOI : 10.1080/03610926.2018.1538458 (2018).
- [3] Johnson, R., and D.Wichern :Applied multivariate analysis. New Jersey : Prentice-Hall(1999).
- [4] Zougab, N., Harfouche, L., Ziane, Y., Adjabi, S. : Multivariate generalized Birnbaum-Saunders kernel density estimators, Journal of communication in statistics Theory and method. **47**, 18, 4534-455 (2017).



Nonparametric Mode Estimation

Adlane Mellah¹, Nora Saadi², and Nabil Zougab³

¹Algeria LMA Laboratory, University of Bejaia, Algeria,
adlane.mellah@univ-bejaia.dz

²Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
nora.saadi@univ-bejaia.dz

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
nabil.zougab@univ-bejaia.dz

Abstract : This paper addresses the problem of estimating the mode of a density function under non parametric conditions based on an orthogonal series method. We give a rigorous, theoretical account of the estimator's properties (bias, variance, mean square error, convergence of the bias, convergence of the variance, convergence of the mean square error and convergence in probability). Our results show that some of the theoretical properties of Orthogonal series's estimator are similar to those of Parzen's estimator. For example, under the condition that the density has two bounded derivatives in a neighborhood of the mode, and the density is uniformly continuous.

MSC: MSC code1 ; 62G07, code2 ; 62G20

Keywords : Mode estimation ; Orthogonal series ; Density estimation ; Convergence in probability.

1 Introduction

The most fundamental problem in statistics is the determination of the unknown density of probability function $h(\cdot)$ and the mode x_0 . Several works have been devoted to the estimation of the mode under non parametric conditions. Most of these works require regularity conditions such as the existence of the density function, the density being Lipschitz or being twice differentiable, for example. Given a sample set X_1, \dots, X_n of independent identically distributed variables, each with the unknown probability density $h(\cdot)$ and mode x_0 . We want to estimate x_0 from this sample set. The classic nonparametric estimator of the mode x_0 is the kernel estimator introduced by Parzen (1962). The last quinquennial has seen an increased interest and numerous papers are dealing with the problem of the mode. To quote only a few of them, Mokkadem (2006) studied mode rate and large deviation super bounds for the kernel mode estimator. Hermann and Ziegler (2004) obtained rates of nonparametric estimation of the mode in absence of smoothness assumptions. However, the most of the available studies concentrate on kernel estimator introduced by Parzen (1962), and the majority of studies (see for example Asselin de beauville (1978), Gasser, Hall and

Presnell (1998)) have consisted of Monte Carlo experiments, with very little attention being paid to theoretical results. There does not even exist a description of theoretical properties of the mode estimators using orthogonal series. But, in many areas of mathematical analysis, the smoothness of a function is more readily determined by the behaviour of its Fourier series. our thesis in this paper is that the latter approach is natural and convenient when analyzing properties orthogonal series density and mode estimators. orthogonal series density estimators were introduced by Cencove (1962) and have since been applied to several different areas (harmonic analysis, signal processing, image compression, functional statistics ...). Orthogonal series estimators have found favor in applications because of the ease with which they can be calculated and for their good performance with the multivariate data (see Frey (1976)). In the last decade however, several papers have appeared which deal with the estimation of orthogonal expansion of densities . Some notable examples include (Bosq and Blank(2007), Herrick, Nason and Silverman (2001), and Efromovich (2010)). This method assumes that a square-integrable $h(\cdot)$ can be represented as a convergent orthogonal series expansion, $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(x)$, $x \in \Omega$, where $\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ is a complete orthonormal system of functions on a set Ω of the real line that is, satisfying $\int_{\Omega} e_k(x)e_j(x)dx = \delta_{kj}$, $0 \leq k, j < \infty$, where δ_{kj} is the delta Kronecker and $\{a_k\}$ are Fourier coefficients defined by $a_k = \int_{\Omega} e_k(x)h(x)dx = \mathbb{E}[e_k(X)]$, $k = 0, 1, \dots$. Orthonormal systems proposed for $\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ are those with compact support (such as the Fourier, trigonometric, and Haar systems on $[0; 1]$, and Legendre systems on $[-1; 1]$ and those with unbounded support such as the Hermite system on $(-\infty, \infty)$, and Laguerre system on $[0; \infty[$, (see Walter (1994)). A discussion of trigonometric systems can be found in (Efromovich (2010)). Classical orthogonal polynomials, including Legendre, Gegenbauer, Jacobi, and Chebyshev, are a popular choice as well ; (see Walter (1994), Budzkis and Radavicius (2005)). Our aim in the present paper is to provide a rigorous account of several theoretical aspects of Orthogonal series mode estimator and we generalize the terme of the variance given by Asselin de beauville (1978) in trigonometric cases. In particular we prove the convergence in probability of the estimator. and we give its statistical and asymptotic properties(bias, variance, mean square error, convergence of the bias, convergence of the variance and convergence of the mean square error).

2 Nonparametric mode estimator using orthogonal series

Let $h(\cdot)$ be a continuous, strictly positive probability density and x_0 denote the mode of h . This method assumes that a square-integrable $h(\cdot)$ can be represented as a convergent orthogonal series expansion, $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k(x)$, $x \in \Omega$, where $\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ is a complete orthonormal system of functions on a set Ω of the real line that is, satisfying $\int_{\Omega} e_k(x)e_j(x)dx = \delta_{ij}$, $0 \leq k, j < \infty$, where δ_{ij} is the delta Kronecker and $\{a_k\}$ are Fourier coefficients defined by $a_k = \int_{\Omega} e_k(x)h(x)dx = \mathbb{E}[e_k(X)]$, $k = 0, \dots$. Given an independent sample, X_1, \dots, X_n from $h(\cdot)$ and a system $\{e_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$, the $\{a_k\}$ can be estimated unbiasedly by $\hat{a}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_k(X_i)$. The estimator of $h(\cdot)$ is given by $\hat{h}_{d_n}(x) = \sum_{k=0}^{d_n} \hat{a}_k e_k(x)$ where (d_n) is a sequence of positive numbers chosen such that $d_n \rightarrow \infty$ when $n \rightarrow \infty$. The mode estimator's (\hat{x}_0) using orthogonal series is defined by

$$\hat{h}_{d_n}(\hat{x}_0) = \sup_x \hat{h}_{d_n}(x). \tag{1}$$

We shall assume throughout that $h(\cdot)$ and $\hat{h}_{d_n}(\cdot)$ obeys the following conditions.

1. The probability density function h is uniformly continuous in $x \in \Omega$ and $h(x_0) = \sup_x h(x)$, and we assume that x_0 is unique.
2. h has two bounded derivatives in a neighborhood of x_0 , $h''(x_0) < 0$
3. $h'(x_0) = 0$
4. $\hat{h}'_{d_n}(\hat{x}_0) = 0$ and $\hat{h}''_{d_n}(x_0) < 0$.

Théorème 2.1. *If:*

1. $M = \sup_{x,j} |e_j(x)| < \infty$,
2. $\mathbb{E}(\hat{h}_{d_n}(x)) \rightarrow h(x)$ as $n \rightarrow \infty$,

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{x}_0 - x_0| \geq \varepsilon] = 0, \forall \varepsilon > 0. \quad (2)$$

3 Statistical properties of \hat{x}_0

If \hat{x}_0 is the mode of $\hat{h}_{d_n}(x)$. By Taylor's theorem,

$$\hat{h}'_{d_n}(\hat{x}_0) = 0 = \hat{h}'_{d_n}(x_0) + (\hat{x}_0 - x_0)\hat{h}''_{d_n}(x_0) + \dots \quad (3)$$

If the sample size is large enough. One may write :

$$\hat{x}_0 - x_0 = -\frac{\hat{h}'_{d_n}(x_0)}{\hat{h}''_{d_n}(x_0)} = \frac{\hat{h}'_{d_n}(x_0)}{\hat{H}''_{d_n}(x_0)}. \quad (4)$$

Where $\hat{H}''_{d_n}(x_0) = -\hat{h}''_{d_n}(x_0)$

3.1 Bias of the Estimator

Let $L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ be a function of k random variables such that $\mathbb{E}(Y_i) = \alpha_i, i = 1, \dots, k$ and $\text{Var}(Y_i) = O(\varphi(n))$ where $\varphi(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Taylor' series of $L(\cdot)$ in a neighborhood of $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ gives

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = L(\alpha) + \sum_{i=1}^k L'_i(\alpha)(Y_i - \alpha_i) + O(\varphi(n)), \quad (5)$$

and

$$\text{Var}(L(\cdot)) = \sum_{i=1}^k [L'_i(\alpha)]^2 \text{Var}(Y_i) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k L'_i(\alpha)L'_j(\alpha) \text{Cov}(Y_i, Y_j) + O(\varphi(n)). \quad (6)$$

Where $L'_i(\alpha) = \frac{\partial L(\cdot)}{\partial Y_i}$.

Théorème 3.1. *If:*

1. $\sup_{x,k} |e_k(x)| = M < \infty$, $\sup_{x,k} |e'_k(x)| = M' < \infty$ and $\sup_{x,k} |e''_k(x)| = M'' < \infty$,
2. $d_n = o(\sqrt{n})$
3. $\mathbb{E}(\hat{h}'_{d_n}(x_0)) \rightarrow h'(x_0)$ and $\mathbb{E}(\hat{h}''_{d_n}(x_0)) \rightarrow h''(x_0)$ as $n \rightarrow \infty$, then

the estimator \hat{x}_0 asymptotically unbiased.

Théorème 3.2. *If :*

1. $\sup_{x,k} |e_k(x)| = M < \infty$, $\sup_{x,k} |e'_k(x)| = M' < \infty$ and $\sup_{x,k} |e''_k(x)| = M'' < \infty$,
2. $d_n = o(\sqrt{n})$, then

$$\text{Var}(\hat{x}_0) = \frac{\text{Var}[\hat{h}'_{d_n}(x_0)]}{\mathbb{E}[\hat{H}''_{d_n}(x_0)]^2} + \frac{\text{Var}[\hat{H}''_{d_n}(x_0)]}{\mathbb{E}[\hat{H}''_{d_n}(x_0)]^4} - \frac{2\mathbb{E}(\hat{h}'_{d_n}(x_0))\text{Cov}(\hat{h}'_{d_n}(x_0), \hat{H}''_{d_n}(x_0))}{[\mathbb{E}(\hat{H}''_{d_n}(x_0))]^3}. \quad (7)$$

Théorème 3.3. *If :*

1. $\sup_{x,k} |e_k(x)| = M < \infty$, $\sup_{x,k} |e'_k(x)| = M' < \infty$ and $\sup_{x,k} |e''_k(x)| = M'' < \infty$,
2. $d_n = o(\sqrt{n})$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{x}_0) = 0. \quad (8)$$

3.2 Mean square error

Théorème 3.4. *If :*

1. $\sup_{x,k} |e_k(x)| = M < \infty$, $\sup_{x,k} |e'_k(x)| = M' < \infty$ and $\sup_{x,k} |e''_k(x)| = M'' < \infty$,
2. $d_n = o(\sqrt{n})$, then

$$\mathbb{E}|\hat{x}_0 - x_0|^2 = \frac{\text{Var}[\hat{h}'_{d_n}(x_0)]}{\mathbb{E}[\hat{H}''_{d_n}(x_0)]^2} + \frac{\text{Var}[\hat{H}''_{d_n}(x_0)]}{\mathbb{E}[\hat{H}''_{d_n}(x_0)]^4} - \frac{2\mathbb{E}(\hat{h}'_{d_n}(x_0))\text{Cov}(\hat{h}'_{d_n}(x_0), \hat{H}''_{d_n}(x_0))}{[\mathbb{E}(\hat{H}''_{d_n}(x_0))]^3} + \frac{\mathbb{E}^2(\hat{h}'_{d_n}(x_0))}{\mathbb{E}^2(\hat{H}''_{d_n}(x_0))}$$

Théorème 3.5. *If*

1. $\sup_{x,k} |e_k(x)| = M < \infty$, $\sup_{x,k} |e'_k(x)| = M' < \infty$ and $\sup_{x,k} |e''_k(x)| = M'' < \infty$,
2. $d_n = o(\sqrt{n})$,
3. $\mathbb{E}(\hat{h}'_{d_n}(x_0)) \rightarrow h'(x_0)$ and $\mathbb{E}(\hat{h}''_{d_n}(x_0)) \rightarrow h''(x_0)$ as $n \rightarrow \infty$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\hat{x}_0 - x_0|^2 = 0. \quad (9)$$

4 Simulation studies

In order to study the behaviour of the mode estimator based on an orthogonal series method, we simulate $m = 100$ samples of the Beta distribution $B(2, 5)$, with size $n \in \{100, 1000, 3000, 5000, 7000, 10000\}$. Results of simulation study are given in Table 4.

Algorithm 4.1 Algorithm of simulation

1. Simulate $m = 100$ samples of the $B(2, 5)$ with $n \in \{100, 1000, 3000, 5000, 7000, 10000\}$.
2. Estimate the probability density function by orthogonal series using the cosine basis which defined by :

$$e_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0. \\ \sqrt{2} \cos(k\pi x) & , \text{ if } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

3. Estimate the mode, we note it \hat{x}_0 .
4. Calculate the empirical mean squared error ($M\hat{S}E$) associated to each sample, the $M\hat{S}E$ is defined as :

$$M\hat{S}E := \frac{1}{m} \sum_1^m (\hat{x}_0 - x_0)^2 \quad (10)$$

with x_0 is the theoretical mode of $B(2, 5)$, which is equal to : $x_0 = 1/5$

n	\hat{x}_0	$M\hat{S}E$
100	0.26955	0.0170172
1000	0.18484	0.00049024
3000	0.19904	0.00158610
5000	0.21053	0.00133805
7000	0.21221	0.00067957
10000	0.21348	0.00032670

TABLE 1 – Behavior of \hat{x}_0 and $M\hat{S}E$ in function of sample size n.

From the table 4, we observe that :

1. The estimated mode by orthogonal series is close to the theoretical value of mode.
2. The values of $M\hat{S}E$ decreases as the samples size increases.

5 Conclusion

Nonparametric mode estimation is the only to go when we are no information on the density itself. The simplicity and good performance of orthogonal series density estimator have

been applied to several different areas (harmonic analysis, signal processing, image compression, physical analysis, functional statistics ...). In this paper we have provide a rigorous account of several theoretical aspects of Orthogonal series's mode estimator. Our results show that some of the theoretical properties of Orthogonal series's estimator are similar to those of Parzen's estimator. For example, under the condition that the density has two bounded derivatives in a neighborhood of the mode, and the density is uniformly continuous.

References

- [1] Asselin de beauville, J. *Estimation non paramétrique de la densité de probabilité et du mode exemple de la distribution gamma. Revue de Statistique Appliquée*,(Tome 26, Num/ero 3) :47–70,(1978).
- [2] Cencov, N. Evaluation of an unknown distribution density from observations. *Soviet Math. Dokl*, 3, 1559–1562,(1962).
- [3] Bosq,D., Blanke, D. *Inference and Prediction in Large Dimensions*. Wiley,(2007).
- [4] Efromovich, S. Orthogonal series density estimation. *Interdisciplinary review : computational statistics*, 2,467–476,(2010).
- [5] Fryer, M. A Review of Some Non-Parametric Estimators of Density Functions. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 18, 371–380,(1976).
- [6] Gasser,T., Hall, P. and Presnell, B. Nonparametric estimation of the mode of a distribution of random curves. *Journal of the Royal Statistical Society*,60, 681–691,(1998).
- [7] Herrmann, E. and Ziegler, K. Rates of consistency for nonparametric estimation of the mode in absence of smoothness assumptions. *Statistics and Probability Letters*,68 :359–368,(2004).
- [8] Herrick, D., Nason, G., Silverman, B. Some new methods for wavelet density estimation. *Sankhya*,A63,94–411,(2001).
- [9] Parzen, E. On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Stat*,33(3) :1065–1076,(1962).
- [10] Mokkadem, A., Pelletier, M., Worms, J. A large deviation supper bound for the kernel mode estimator. *Theory Probab Appl*.50, 153–165,(2006).
- [11] Rudzkis R, Radavicius M. Adaptive estimation of distribution density in the basis of algebraic polynomials. *Theory Probab Appl*,49 :93–109,(2005).
- [12] Saadi, N., Adjabi, S. On the estimation of the probability density by trigonometric series. *Communications in Statistics-Theory and Methods*,38, 3583–3595,(2009).
- [13] Walter, G. *Wavelets and other Orthogonal Systems with Application*. London : CRC Press.(1994).



On $M/M/1$ Retrial Queue with Orbital Search

Zina Boussaha¹, Nadia Oukid², and Halim Zeghdoudi³

¹Department of Mathematics, University of Annaba, Algeria,
boussaha_z@yahoo.fr

²Department of Mathematics, Saad Dahlab, University, Blida 1, Algeria,
oukidnad@yahoo.fr

³LaPS laboratory, Badji-Mokhtar University, Box 12, Annaba, 23000, Algeria,
hzeghdoudi@yahoo.fr

Abstract : We consider a retrial queueing system with search of customers from the orbit, where the server stay idle after his active period .The model was proposed in the first time by Tuan Phung-Duc [9] for cloud computing systems where the processing unit (server) and the storage unit (orbit) are separated. Of our parts we propose to study the effects of performance measures on the system. The model is explicitly analyzed in terms of generating functions. Assuming the search time to be no negligible, the source, service, and retrial times to be independent random variables, we perform the steady-state analysis of the model computing various steady-state performance measures and illustrative numerical examples are presented.

Keywords : Retrial queueing systems ; orbital search ; cloud systems.

1 Introduction

In the retrial queueing system, customers arriving to a busy system join a group of blocked customers called orbit and try to capture a free server after a random amount of time. Such systems occur in communication and computer networks, aircraft landing and takeoff, machine repair, inventory control, and in several other fields. For a systematic account of the fundamental methods and results on this topic, we refer to the monograph by Falin and Templeton [7], Artalejo and Gomez-Corral [4]. A review of the main results can be found in [11], [2], and [1].

Most of the literature on retrial queues assumes that after completion of each service the server will remain idle in the system until the arrival of the next primary or retrial. But in real life, we always want to minimize the idle time of the server and minimize the holding costs. So it is necessary to study the retrial queue with orbital search. That is, after completion of each service, the server may actively search the customer from the orbit. Then a service is followed by another service if a search is made, otherwise a service is followed by an idle period. In the context of a classical queue, Neuts and Ramalhoto [12] introduced the notion of search (at a service completion epoch) for customers. The search for orbital customers for

$M/G/1$ queue with retrials was introduced by Artalejo et al [3]. So far seldom research work on retrieval queue with orbital search has been done, readers are referred to [13], [5], [8], [6] and [14]. In this model the search mechanism is initiated after some idle time of the server. This model is motivated from cloud computing systems where the processing unit and the storage unit are separated [9]. We propose, several numerical results to study the effect of certain parameters keys on the characteristics of the model.

The rest of the paper is organized as follows. Section 2 describes the queueing model in details while section 3 is devoted to the analysis of the model. In section 4, some numerical examples are given to illustrate the features of our model. Concluding remarks are presented in section 5.

2 Model Formulation

We consider a single server retrieval queue with orbital search of customers. The detailed description of the model is given as follows : Customers arrive at the system according to a Poisson process with rate λ . Service time of incoming customers follows the exponential distribution with rate μ . After the completion of the service the server stays idle for an exponentially distributed time with rate α . All customers (primary or orbital) who arrive during this idle time is immediately served. We assume that there is no waiting space and therefore if an arriving customer finds the server free, the customer begins his service immediately, otherwise an arriving customer finds the server busy (serving a customer or searching) join pool of blocked customers called orbit in accordance with FCFS discipline. Inter-retrial time have an exponential distribution with rate θ . After the idle time, the server starts searching for a customer in the orbit with exponentially distributed of rate ν .

We assume that inter-arrival times, retrial time, service times, and searching times are mutually independent of each other.

3 Steady state analysis

Let $N(t)$ be the number of customers in the retrieval queue at time $t \geq 0$, and $C(t)$ be the state of the server at time t as follows :

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{if the server is idle,} \\ 1, & \text{if the server is serving a customer,} \\ 2, & \text{if the server is searching for a customer.} \end{cases}$$

We then have the fact that $\{X(t) = (C(t), N(t)), t \geq 0\}$ forms a Markov chain on the state space $S = \{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}$. The Markov chain $\{X(t), t \geq 0\}$ is ergodic if and only if $\lambda < \mu$.

Let $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = i, N(t) = j)$, where $p_{i,-1} = 0 (i = 1, 2)$, the balance equations read as follows :

$$\begin{aligned} (\lambda + \alpha)p_{0,0} &= \mu p_{1,0} + \nu p_{2,0}, & (1) \\ (\lambda + \alpha + j\theta)p_{0,j} &= \mu p_{1,j} & j \geq 1, & (2) \\ (\lambda + \mu)p_{1,j} &= (j+1)\theta p_{0,j+1} + \nu p_{2,j+1} + \lambda p_{1,j-1} + \lambda p_{0,j} & j \geq 0, \\ (\lambda + \nu)p_{2,j} &= \alpha p_{0,j} + \lambda p_{2,j-1} & j \geq 0, & (3) \end{aligned}$$

We define the partial generation functions $P_0(z)$, $P_1(z)$ and $P_2(z)$ as :

$$P_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j}z^j, P_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}z^j \text{ and } P_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{2,j}z^j.$$

Transforming the above balance equations to generating functions we obtain,

$$(\lambda + \alpha)P_0(z) + \theta zP_0'(z) = \mu P_1(z) + \nu p_{2,0}, \tag{4}$$

$$(\lambda + \mu)P_1(z) = \theta P_0'(z) + \frac{\nu}{z}(P_2(z) - p_{2,0}) + \lambda zP_1(z) + \lambda P_0(z), \tag{5}$$

$$(\lambda + \nu)P_2(z) = \alpha P_0(z) + \lambda zP_2(z). \tag{6}$$

By summing the above equation and arranging the result, we obtain the equation of the balance between the flows coming into and out the orbit :

$$\lambda(P_1(z) + P_2(z)) = \theta P_0'(z) + \frac{\nu(P_2(z) - p_{2,0})}{z}. \tag{7}$$

From 4 and 6, we obtain

$$P_1(z) = \frac{(\lambda + \alpha)P_0(z) + \theta zP_0'(z) - \nu p_{2,0}}{\mu}, \tag{8}$$

$$P_2(z) = \frac{\alpha P_0(z)}{(\lambda + \nu - \lambda z)}. \tag{9}$$

Substituting these two expressions into 7 and arranging the result yields

$$P_0'(z) = A(z)P_0(z) + B(z), \tag{10}$$

where

$$A(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{(1 - \lambda \frac{z}{\mu})} + \frac{c}{(1 - \frac{\lambda z}{\lambda + \nu})}, B(z) = \frac{\nu p_{2,0}}{\theta z},$$

where a,b and c are given by

$$a = \frac{-\alpha \nu}{\theta(\lambda + \nu)}, b = \frac{\lambda^2(\lambda + \alpha + \nu - \mu)}{\theta \mu(\lambda + \nu - \mu)}, c = \frac{\lambda^2 \alpha \mu}{(\lambda + \nu)^2 \theta (\mu - \lambda - \nu)}.$$

The solution of the differential equation 10 is given by :

$$P_0(z) = \frac{\nu p_{2,0}}{\theta} z^a \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda z} \right)^{\frac{b\mu}{\lambda}} \left(\frac{\nu}{\lambda + \nu - \lambda z} \right)^{\frac{c(\lambda + \nu)}{\lambda}} \int_0^z x^{-(a+1)} \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda x} \right)^{-\frac{b\mu}{\lambda}} \left(\frac{\nu}{\lambda + \nu - \lambda x} \right)^{-\frac{c(\lambda + \nu)}{\lambda}} dx.$$

From 7, 9 and 10, we have

$$P_1(1) + P_2(1) = \left(\frac{\theta}{\lambda} A(1) + \frac{\alpha}{\lambda} \right) P_0(1). \tag{11}$$

We also have the normalization condition :

$$P_0(1) + P_1(1) + P_2(1) = 1.$$

Therefore, from the expression for $P_0(z)$, we obtain the expression for $p_{2,0}$ as follows.

$$P_{2,0} = \frac{\theta(1 - \frac{\lambda}{\mu})}{(\lambda + \mu) \int_0^1 x^{-(a+1)} \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda x}\right)^{-\frac{b\mu}{\lambda}} \left(\frac{v}{\lambda + v - \lambda x}\right)^{-\frac{c(\lambda+v)}{\lambda}} dx}. \quad (12)$$

So from this equation, we obtain the fact that the stability condition for the model is $\lambda < \mu$ [9].

Corollary

– The generating function of the orbit size, $P(z)$, is given by :

$$P(z) = P_0(z) + P_1(z) + P_2(z) = \left(1 + \frac{\alpha}{(v + \lambda - \lambda z)} + \frac{+\alpha + \lambda + \theta z A(z)}{\mu}\right) P_0(z) + \frac{v P_{2,0}}{\mu}.$$

– The generating function of the system size, $\Phi(z)$, is given by :

$$\Phi(z) = P_0(z) + z P_1(z) + P_2(z) = \left(1 + \frac{\alpha}{(v + \lambda - \lambda z)} + \frac{(\alpha + \lambda)z + \theta z^2 A(z)}{\mu}\right) P_0(z) + \frac{v P_{2,0}}{\mu}(z + 1).$$

– The probability that the server is idle but the system is not empty, denote by P_0 , is given by :

$$P_0 = P_0(1) = \frac{v(1 - \frac{\lambda}{\mu})}{\alpha + v}.$$

– The probability that the server is busy, denote by P_1 , is given by :

$$P_1 = P_1(1) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

– The probability that the server is searching of customers in orbit, denote by P_2 , is given by :

$$P_2 = P_2(1) = \frac{\alpha(1 - \frac{\lambda}{\mu})}{\alpha + v}.$$

– The mean orbit size, \bar{n}_o , is given by : $\bar{n}_o = P'(1)$.

– The mean system size, \bar{n}_s , is given by : $\bar{n}_s = \Phi'(1) = \bar{n}_o + P_1(1)$.

– The average time a customer spends in the system W , and the average time a customer spends in the orbit W_q are found by using the Little's formula $W = \frac{\bar{n}_s}{\lambda}$, $W_q = \frac{\bar{n}_o}{\lambda}$.

4 Numerical Examples

In this section we shall present some numerical examples using MATLAB in order to illustrate the effect of various parameters in the system performance measures.

4.1 Effect of λ on performance measures

We assume that $\mu = 10$, $v = 2.5$, $\theta = 1.34$ and $\alpha = 3$.

Remark : From Figs.1 we can see that the probabilities that the server is idle P_0 , in search of customers P_2 decrease monotonously. The probability P_1 that the server is busy, the orbit size and waiting times of customers in the orbit and in the system increase, which agree with our expectations.

4.2 Effect of v on performance measures

We assume that $\mu = 4$, $\lambda = 2.2$, $\alpha = 1.2$, and $\theta = 1.44$.

Remark : From Figs.2, we can see that when $v \in [2.2, 3]$, the average times a customer's spends in the orbit and in the system decreases. The probability that the server is busy P_1 it's stable and equal to 0.5, when the other probabilities differs from monotony.

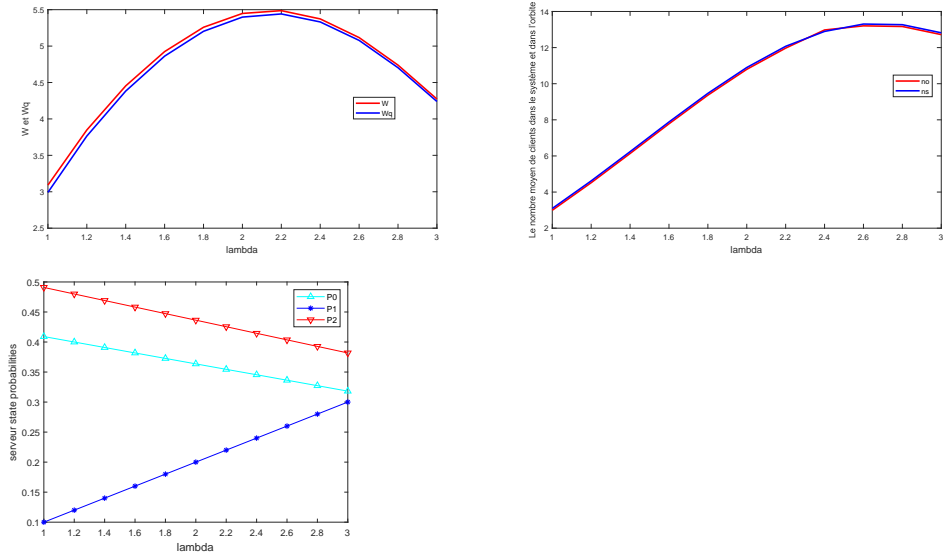


FIGURE 1 – Variation of system characteristics in terms of λ .

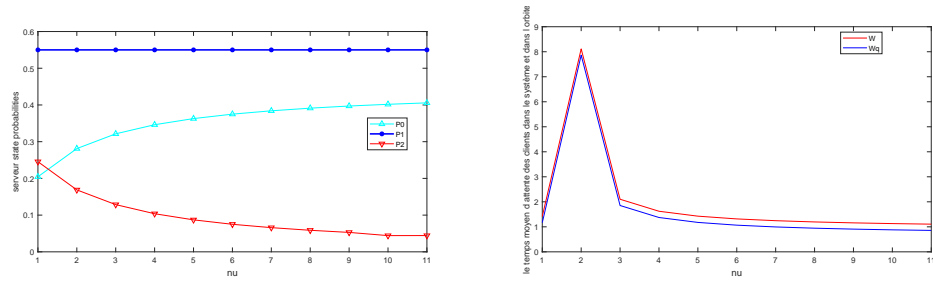


FIGURE 2 – Variation of system characteristics in terms of ν .

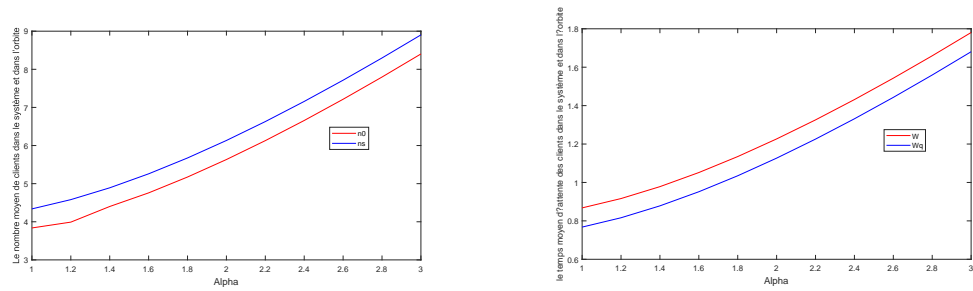


FIGURE 3 – Variation of system characteristics in terms of α .

4.3 Effect of α on performance measures

We assume that $\mu = 10, \lambda = 5, \nu = 2.5$, and $\theta = 1.33$.

Remark : In Figs. 3 show that as functions of α , the number of customer in the system and in the orbit, the average time a customer spends in the system and in the orbit increase monotonously.

5 Conclusion

In this paper, we present a queueing model for cloud computing systems where the processing unit and the storage unit are separated. The model is analyzed in terms of generating functions. We also present some numerical examples to study the effect of some key parameters on the characteristics of the model. For future work, we would like to extend this model to a multiserver setting which may call for a level-dependent QBD formulation [10].

References

- [1] Anisimov, V., Limnios, N. : Queueing Theory 2 : Advanced Trends. John Wiley Sons (2021).
- [2] Artalejo, J. R. : Accessible bibliography on retrial queues : progress in 2000–2009. Mathematical and computer modelling, 51(9-10), 1071-1081,(2010).
- [3] Artalejo, J. R., Joshua, V. C., Krishnamoorthy, A. : An $M/G/1$ retrial queue with orbital search by the server. Advances in stochastic modelling, 41-54,(2002).
- [4] Artalejo, J. R., and Antonio Gómez-Corral : Retrial Queueing Systems : A Computational Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008).
- [5] Chakravarthy, S. R., Achyutha Krishnamoorthy, and Varghese C. Joshua : "Analysis of a multi-server retrial queue with search of customers from the orbit." Performance evaluation 63.8 (2006) : 776-798.
- [6] Dudin, A. N., Krishnamoorthy, A., Joshua, V. C., Tsarenkov, G. V. : Analysis of the BMAP/G/1 retrial system with search of customers from the orbit. European Journal of Operational Research, 157(1), 169-179.(2004).
- [7] Falin, G., and Templeton J. G. : Retrial queues. Vol. 75. CRC Press, (1997).
- [8] Krishnamoorthy, A., T. G. Deepak, and V. C. Joshua. : "An $M|G|1$ retrial queue with nonpersistent customers and orbital search." Stochastic Analysis and Applications 23.5 (2005) : 975-997.
- [9] Phung-Duc, T. : Retrial queue for cloud systems with separated processing and storage units. In International Conference on Queueing Theory and Network Applications (pp. 143-151). Springer, Cham (2015).
- [10] Phung-Duc, T., Masuyama, H., Kasahara, S., Takahashi, Y. A. : simple algorithm for the rate matrices of level-dependent QBD processes. In Proceedings of the 5th international conference on queueing theory and network applications (pp. 46-52)(2010, July).
- [11] Phung-Duc, T. : Retrial queueing models : A survey on theory and applications. arXiv preprint arXiv :1906.09560 (2019).
- [12] Neuts, M. F., Ramalhoto, M. F. (1984). :A service model in which the server is required to search for customers. Journal of Applied Probability, 21(1), 157-166 (1984).
- [13] Varghese, J. C., Krishnamoorthy, A. : Retrial Queues with Orbital Search (Doctoral dissertation, Department of Mathematics)(2003).
- [14] Wüchner, P., Sztrik, J., de Meer, H. :Finite-source $M/M/S$ retrial queue with search for balking and impatient customers from the orbit. Computer Networks, 53(8), 1264-1273.(2009).



On some probabilistic properties of periodic threshold *ARCH* processes

Walid Slimani^{*1}, Ines Lescheb², and Mouloud Cherfaoui³

¹Laboratory of Applied Mathematics, University of Biskra, Algeria. ,
walid.slimani@univ-biskra.dz

²Department of Mathematics, University of Constantine 1, Constantine, Algeria.,
i.lescheb@gmail.com

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria. ,
mouloudcherfaoui2013@gmail.com

Abstract : In this work, we propose a natural extension of threshold *ARCH* (*TARCH*) processes to periodically time-varying coefficients (*PTARCH*). Some theoretical probabilistic properties of *PTARCH* are discussed. This models, can be viewed as a special of random coefficient *ARCH* models. For this class of processes, we establish theoretical conditions, which ensure that the process in the threshold model is strictly and second-order stationary (in periodic sense). Some examples as special cases are proposed and studied.

MSC: 62F12 ; 62M10.

Keywords : Periodic threshold *ARCH* models ; Strictly periodically stationary.

1 Introduction

In recent years, many papers discussed the periodic generalized autoregressive conditionally heteroskedastic models (*PGARCH_s*) process introduced by Bollerslev and Ghysels [6], and this process has been proved to be a power tool for modeling and forecasting of many non stationary time series, which makes a distinctive by a stochastic conditional variance with periodic dynamics. Generally, by *PGARCH_s* process, we mean a discrete-time strictly stationary process $(\varepsilon_n, n \in \mathcal{Z})$, $\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ defined on some probability space (Ω, \mathcal{F}, P) and satisfying the factorization

$$\varepsilon_n = h_n e_n, \quad (1.1)$$

where the innovation process $(e_n, n \in \mathcal{Z})$ is a sequence independent and identically distributed with zero mean and unit variance (*i.i.d* $(0, 1)$) defined on the same probability space

*Corresponding Author

(Ω, \mathcal{F}, P) and time-varying coefficients "volatility" process $(h_n, n \in \mathcal{L})$ satisfy the recursion

$$h_n^2 = \alpha_0(s_n) + \sum_{i=1}^q \alpha_i(s_n) \varepsilon_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j(s_n) h_{n-j}^2, \quad (1.2)$$

wherein $(\alpha_i(s_n), 0 \leq i \leq q)$ and $(\beta_j(s_n), 0 \leq j \leq p)$ are non negative periodic functions with period s with $\alpha_0(t) > 0$. $(s_n)_n$ is a periodic sequence of positive integers with finite state space $\mathbb{S} = \{1, \dots, s\}$ defined by $s_n := k \mathbb{I}_{\Delta(k)}(n)$ with $\Delta(k) := \{sn + k, n \in \mathbb{Z}\}$ which refers to the stage or "season" of the periodic cycle at time n . $PGARCH_s$ model is potentially more efficient than standard one, it becomes increasingly important and an efficient tool to model seasonal asset returns of stocks, exchange rates and other financial time series and continues to gain a growing interest of researchers (see Aknouche and Bibi [1]; Bibi and Lescheb [3]; Lescheb [8]). This interest is due to its multiple advantages, for instance, among others, it is capable to capture the stylized facts, e.g., volatility clustering, leptokurticity, dependency without correlation and tail heaviness. However, in some asymmetric financial data sets exhibiting the so-called leverage effect characterized by $Cov(e_{n-k}, h_n^2) < 0$, for some $k > 0$, the $PGARCH_s$ models are incapable to model such data without further extensions. This finding, led Rodriguez and Ruiz [10] to study five of the most popular specifications of the time-invariant asymmetric volatility process $(h_n, n \in \mathbb{Z})$ with leverage effect, namely, the generalized quadratic ARCH ($GQARCH$), the threshold GARCH ($TGARCH$), the GJR – GARCH (GJR), the exponential GARCH ($EGARCH$) and the asymmetric power GARCH ($APGARCH$) models. These models are important in modelling, forecasting and in capturing the asymmetry of the volatility and hence are purported to be able to capture the leverage. In this paper, we provide the model so-called periodic threshold ARCH ($PTARCH$) model defined by Equation (1.1) and

$$\forall n \in \mathbb{Z} : h_n = \alpha_0(s_n) + \sum_{i=1}^q \alpha_i(s_n) \varepsilon_{n-i}^+ + \beta_i(s_n) \varepsilon_{n-i}^-, \quad (1.3)$$

where $|\varepsilon_n| = \varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-$ and $\varepsilon_n = \varepsilon_n^+ - \varepsilon_n^-$ with $\varepsilon_n^+ = \max(\varepsilon_n, 0)$, $\varepsilon_n^- = \min(\varepsilon_n, 0)$. $(s_n)_n$ is a periodic sequence of positive integers with finite state space $\mathbb{S} = \{1, \dots, s\}$ defined by $s_n := k \mathbb{I}_{\Delta(k)}(n)$ with $\Delta(k) := \{sn + k, n \in \mathbb{Z}\}$ which refers to the stage or "season" of the periodic cycle at time n , $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of independent identically distributed (*i.i.d.*) random variables defined on the same probability space (Ω, \mathcal{A}, P) with zero mean and unit variance and e_k is independent of ε_n for $k > n$ (the independence of $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ may be relaxed to a martingale difference assumption). In equation (1.1) and (1.3), the volatility process $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ depending at time n , not necessarily symmetrically, through the coefficients $\alpha_i(s_n)$ and $\beta_i(s_n)$ together on the modulus and the sign of the past innovations. By setting $n = st + v$, $\varepsilon_{st+v} = \varepsilon_t(v)$, $h_{st+v} = h_t(v)$ and $e_{st+v} = e_t(v)$, Model (1.1) and (1.3) may be equivalently written as

$$\varepsilon_t(v) = h_t(v) e_t(v) \text{ and } h_t(v) = \alpha_0(v) + \sum_{i=1}^q \alpha_i(v) \varepsilon_t^+(v-i) + \beta_i(v) \varepsilon_t^-(v-i), \quad (1.4)$$

which we will make heavy use. In (1.4), $\alpha_0(v)$, $\alpha_i(v)$ and $\beta_i(v)$ with $i \in \{1, \dots, q\}$ are the model coefficients at season v and $\varepsilon_t(v)$ refers to ε_t during the $v - th$ "season" or regime,

$v \in \{1, \dots, s\}$ of cycle t . For the convenience, $\varepsilon_t(v) = \varepsilon_{t-1}(v+s)$, $h_t(v) = h_{t-1}(v+s)$ and $e_t(v) = e_{t-1}(v+s)$ if $v < 0$. The non-periodic notations (ε_t) , (h_t) , (e_t) etc. will be used interchangeably with the periodic notations $(\varepsilon_t(v))$, $(h_t(v))$, $(e_t(v))$ etc. Note that there are not restrictions to guarantee the positivity of $h_t(v)$. However, the parameters of $TARCH(q)$ model have to be restricted to guarantee the stationarity (in periodic sense) and the existence of moment of some orders. The process $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ is globally non stationary, but is stationary within each period, are becoming an appealing tool for investigating both volatility and distinct "seasonal" patterns with threshold effect and continue to gain a growing interest especially in finance and monetary economics. Before processing, some algebraic notations are used throughout the paper.

$I_{(n)}$ is the $n \times n$ identity matrix, $O_{(n,m)}$ denotes the matrix of order $n \times m$ whose entries are zeros, for simplicity we set $O_{(n,m)} := O_{(n,m)}$ and $O_{(n,m)} := O_{(n,m)}$. The spectral radius of squared matrix M is noted $\rho(M)$, $\|\cdot\|$ refers to the standard norm in \mathbb{R}^n or the uniform induced norm in the space $M(n)$ of $n \times n$ matrices. \otimes denotes the Kronecker product of matrices. $Vec(M)$ is the usual column stacking vector of the matrix M . For any $p > 0$, $\mathbb{L}_p(\Omega, A, P)$ denotes the space of random variables X defined on some probability space (Ω, A, P) such that $E\{|X|^p\} < +\infty$. The usual norm in \mathbb{L}_p is given by $\|X\|_p = E\{|X|^p\}$ if $p \in]0, 1[$ and $(E\{|X|^p\})^{\frac{1}{p}}$ otherwise.

2 Probabilistic Properties of PTARCH

Now, define for each $v \in \mathbb{S}$, the q -vector $\underline{\alpha}_{1,q}(v) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)'$, $\underline{\beta}_{1,q}(v) := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)'$, $2q$ -vector $\underline{H}_0 = (1, -1, 0, \dots, 0)'$, $2q$ -random vectors $\underline{\varepsilon}_t(v) := (\varepsilon_t^+(v), \varepsilon_t^-(v), \dots, \varepsilon_t^+(v-q+1), \varepsilon_t^-(v-q+1))'$, $\underline{\eta}_t(e_t(v)) := \alpha_0(v)(e_t^+(v), e_t^-(v), 0, \dots, 0)'$ and $2q \times 2q$ -random matrix

$$M_v(e_t(v)) = \begin{pmatrix} \underline{\alpha}_{1,q-1}(v)e_t^+(v)\underline{\beta}_{1,q-1}(v)e_t^+(v) & \alpha_q(v)e_t^+(v)\beta_q(v)e_t^+(v) \\ \underline{\alpha}_{1,q-1}(v)e_t^-(v)\underline{\beta}_{1,q-1}(v)e_t^-(v) & \alpha_q(v)e_t^-(v)\beta_q(v)e_t^-(v) \\ I_{(2(q-1) \times 2(q-1))} & O_{(2(q-1) \times 1)} \end{pmatrix}.$$

With the above notations, equation (1.4) may be rewritten in state-space form $\varepsilon_t = \underline{H}_0 \underline{\varepsilon}_t(v)$ and

$$\underline{\varepsilon}_t(v) = M_v(e_t(v)) \underline{\varepsilon}_t(v-1) + \underline{\eta}_v(e_t(v)) \tag{2.1}$$

Equation (2.1) is the same as the defining equation for independent periodic distribution (*i.p.d*) random coefficient autoregressive models introduced recently by Aknouche and Guerbienne [2]. In this section, we are interested in causal solution of equation (2.1), i.e., the solution $(\varepsilon_t)_t$ of model (1.1) and (1.3) such that ε_t is a measurable function of e_{t-i} for $i \geq 0$. For this purpose, iterating Equation (2.1) s -time to get

$$\varepsilon_t(s) = \left\{ \prod_{v=0}^{s-1} M_{s-v}(e_t(s-v)) \right\} \varepsilon_t(0) + \sum_{k=1}^s \left\{ \prod_{v=0}^{s-k-1} M_{s-v}(e_t(s-v)) \right\} \underline{\eta}_k(e_t(k))$$

By setting $\underline{\varepsilon}_t(0) = \underline{\varepsilon}_t$, the last equation can be rewritten as

$$\underline{\varepsilon}_{t+1} = H(\underline{e}_t) \underline{\varepsilon}_t + \underline{\eta}(\underline{e}_t), \quad (2.2)$$

where

$$\underline{e}_t = (e_t(1) \dots, e_t(s))', \quad H(\underline{e}_t) = \left\{ \prod_{v=0}^{s-1} M_{s-v}(e_t(s-v)) \right\},$$

and

$$\underline{\eta}(\underline{e}_t) = \sum_{k=1}^s \left\{ \prod_{v=0}^{s-k-1} M_{s-v}(e_t(s-v)) \right\} \underline{\eta}_k(e_t(k)).$$

However, Equations similar to (2.2) were studied extensively in the literature (e.g., Bougerol and Picard [4, 5] and the references therein)

2.1 Strict periodic stationarity

The existence of causal solution of (1.1) and (1.3) is equivalent to the existence of the one of (2.2). Indeed, it is obvious that any causal solution of (1.1) and (1.3) leads via (2.1) to the one of (2.2) and vice versa in a way that any component of a stationary solution of the dual process $((\underline{\varepsilon}'_t(1), \dots, \underline{\varepsilon}'_t(s))_{t \in \mathbb{Z}}$ (see Gladyshev [7] for more details) is one of (1.1) and (1.3). In what follows, we examine the necessary and sufficient conditions ensuring the strict stationarity of the models (2.2), the corresponding solution of equation (2.1) is however called strictly periodic stationary (SPS). The key tool in studying the strict stationarity of (2.2) is the top-Lyapunov exponent $\gamma_L(H)$ associated with the sequence of random matrices $(H_t)_t$ defined in equation (2.2) and given by,

$$\gamma_L(H) := \inf_{t > 0} \left\{ \frac{1}{t} E \left\{ \log \left\| \prod_{j=0}^{t-1} H(e_{t-j}) \right\| \right\} \right\} \stackrel{a.s.}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \log \left\| \prod_{j=0}^{t-1} H(e_{t-j}) \right\| \right\}. \quad (2.3)$$

The last part of the above equation can be easily proved using Kingman's [9] subadditive ergodic theorem and the existence of $\gamma_L(H)$ is guaranteed by the fact that $E \{ \log^+ \|H(\underline{e}_t)\| \} \leq E \{ \|H(\underline{e}_t)\| \} < +\infty$, where $\log^+(x) = \max(\log x, 0)$ for any $x > 0$. This shows that $\gamma_L(H)$ is independent of the chosen norm, so

$$\gamma_L(H) := \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \log \left\| \prod_{j=0}^{t-1} H(e_{t-j}) \right\| \right\} = \log \rho \left(\prod_{v=0}^{t-1} H_{s-v} \right),$$

when $H(\underline{e}_t)$ is non-random matrix.

Example 2.1.

In $PTARCH_2(1)$ models, the necessary and sufficient condition ensuring the existence of strictly periodically stationary solution is that $\sum_{\vartheta=1}^2 E \{ \log \{ \alpha_1(\vartheta) e_0^+ + \beta_1(\vartheta) e_0^- \} \} < 0$. The zones for stationarity associated for $TARCH(1)$ and for $PTARCH_2(1)$ with $\alpha_1(2) = 0.25\alpha_1(1)$, $\beta_1(2) = 0.25\beta_1(1)$ and $e_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ are shown in Figure(1).

It is clearly observed that the corresponding zone to $TARCH(1)$ is less restrictive than of that corresponding to $PTARCH_2(1)$.

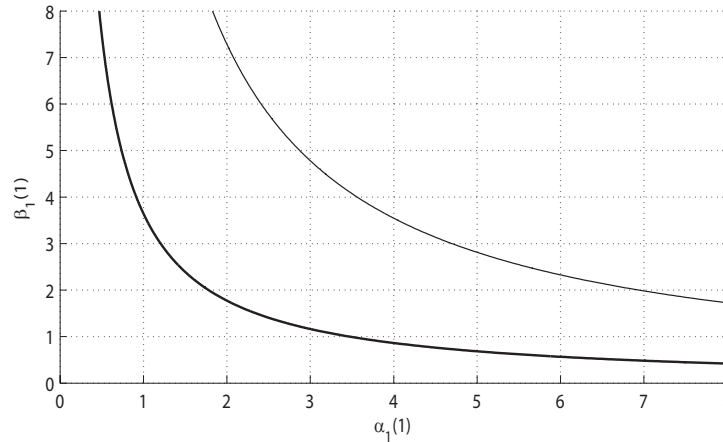


FIGURE 1 – Displayed is the stationary zones of $TARCH(1)$ (dashed line) and $PTARCH_2(1)$ (full line)

Proposition 2.1. *If $\gamma_L(H) < 0$ then there is $\delta > 0$ such that $E(h_t^\delta) < \infty$ and $E(|\varepsilon_t|^\delta) < \infty$ for all t .*

Théorème 2.1. *Equation (2.2) has a causal strictly stationary solution given by the series*

$$\underline{\varepsilon}_{t+1} = \sum_{k \geq 0} \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} H(\underline{\varepsilon}_{t-j}) \right\} \underline{\eta}(\underline{\varepsilon}_{t-k}) \tag{2.4}$$

if and only if $\gamma_L(H)$ is strictly negative, the series (2.4) converges absolutely almost surely and constitute the unique ergodic solution process to (2.2) and hence Equation (2.1) is SPS process and admits a causal solution given by the series

$$\underline{\varepsilon}_t(\nu) = \sum_{k \geq 0} \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} M_{\nu-j}(\varepsilon_t(\nu-j)) \right\} \underline{\eta}_{\nu-k}(\varepsilon_t(\nu-k)) \tag{2.5}$$

which converges absolutely almost surely and the process $(\underline{H}'_0 \underline{\varepsilon}_t(\nu))_{t \in \mathbb{Z}}$ constitute the unique, causal, SPS and periodically ergodic solution of equation (1.1) and (1.3).

Remarque 2.1. *Even if the condition $\gamma_L(H) < 0$ could be used as a necessary and sufficient condition for the strict stationarity of equation similar to (2.2), it is of little use for practical checking of stationarity since this condition involve the limit of products of infinitely many random matrices. Hence, some simple sufficient conditions ensuring the negativity of $\gamma_L(H)$ can be given :*

1. *If $E \left\{ \log \left\| \prod_{v=0}^{s-1} H_{s-v}(\varepsilon_t(s-v)) \right\| \right\} < 0$ or $E \left\| \prod_{v=0}^{s-1} H_{s-v}(\varepsilon_t(s-v)) \right\| < 1$ then $\gamma_L(H) < 0$.*

2. If $E \left\{ \log \left\| \prod_{j=0}^r H(e_{t-j}) \right\| \right\} < 0$ then $\gamma_L(H) < 0$.
3. If $\rho(H) < 1$, then $\gamma_L(H) < 0$ where $H = E \left\{ \prod_{v=0}^{s-1} H_{s-v}(e_t(s-v)) \right\}$.

2.2 Second-order periodic stationarity

In this subsection we examine the conditions ensuring the existence of a unique causal periodically ergodic and periodically correlated (PC) solution to (1.4). Formally a second-order process $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is said to be PC with period s , if for any integers t and k , $E\{\varepsilon_{t+s}\} = E\{\varepsilon_t\}$ and $Cov(\varepsilon_{t+s}, \varepsilon_{k+s}) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_k)$, so when $s = 1$ a PC process is equivalent to second-order stationary process. PC time series are common in many scientific fields where the observed phenomena have significant periodic behavior in mean, variance and covariance structure, namely in meteorology, hydrology, finance and economy. For convenience, we shall considered the centred version of the state-space representation (2.1), i.e

$$\tilde{\varepsilon}_{t+1} = H(e_t)\tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\eta}(e_t). \quad (2.6)$$

The main properties of the representation (2.6) are summarized in the following proposition.

Proposition 2.2. Consider the PTARCH(q) model (1.4) with state space representation (2.6), then the $\tilde{\varepsilon}_l$ is orthogonal to $\tilde{\eta}(e_k)$, i.e., $E\{\tilde{\varepsilon}_l \tilde{\eta}'(e_k)\} = 0$ for all $k \geq l$.

Théorème 2.2. Assume that

$$E\{e_t^4\} < \infty \text{ and } \rho(E\{H^{\otimes 2}(e_t)\}) < 1, \quad (2.7)$$

then the series $\tilde{\varepsilon}_{t+1} = \sum_{k \geq 0} \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} H(e_{t-j}) \right\} \tilde{\eta}(e_{t-k})$ converges absolutely a.s and in mean and constitute the unique, causal, strictly stationary having moments up to second-order.

Remarque 2.2. For PTARCH_s(1), the following assertions hold

1. When $\gamma_L(H) > 0$, almost surely $h_t \rightarrow +\infty$ at an exponential rate, i.e., $\rho^t h_t \rightarrow +\infty$ and $\rho^t \varepsilon_t^2 \rightarrow +\infty$ as $t \rightarrow +\infty$ for any $\rho > e^{-\gamma_L(H)}$.
2. When $\gamma_L(H) = 0$, in distribution $h_t \rightarrow +\infty$, and $\varepsilon_t^2 \rightarrow +\infty$ as $t \rightarrow +\infty$.







References

- [1] Aknouche, A. and Bibi. A. Quasi-maximum likelihood estimation of periodic GARCH and periodic ARMA-GARCH processes. Journal of Time Series Analysis, 30(1) : 19–46. (2008).
- [2] Aknouche, A. and Guerbyenne, H. Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions. Stat. Prob. Letters, 79(7) : 990-996. (2009).

- [3] Bibi, A. and I. Lescheb. Strong consistency and asymptotic normality of least squares estimators for *PGARCH* and *PARMA-PGARCH*. *Statistics & Probability Letters*, 80 (19–20) : 1532–1542. (2010).
- [4] Bougerol, P. and Picard, N. Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *Annals of Probability*, 20(4) : 1714–1730. (1992).
- [5] Bougerol, P. and Picard, N. Stationarity of *GARCH* processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics*, 52(1–2) : 115–127. (1992).
- [6] Bollerslev, T. and E. Ghysels. Periodic autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14(2) : 139–151. (1996).
- [7] Gladyshev, E.G. Periodically correlated random sequences. *Soviet Math*, 2(1961) : 383–388. (1961).
- [8] Lescheb, I. Asymptotic inference for periodic *ARCH* processes. *Random Oper. Stoch. Equ.*, 19(3) : 283–294. (2011).
- [9] Kingman, J.F.C. Subadditive ergodic theory. *The annals of probability*, 1(6) : 883–909. (1973).
- [10] Rodriguez, M. and E. Ruiz. Revisiting several popular *GARCH* models with leverage effect : Differences and similarities. *Journal of Financial Econometrics*, 10(4) : 637–668. (2012).



New form of driver authentication based on his behavior and habits

Tinhinane Chenache , Kahina Zizi ², Sofiane Aissani , Farid Kacimi , Zoubeyr farah , and
Mawloud Omar 

^{1,2,3,4,5}LIMED Laboratory, University of Bejaia, Faculty of exact sciences, Computing Department, Bejaia,
Algeria
tinhinane.chenache@univ-bejaia.dz, kahina.zizi@univ-bejaia.dz,
sofiane.aissani@univ-bejaia.dz, farid.kacimi@univ-bejaia.dz, zoubeyr.farah@univ-bejaia.dz

⁶IRISA, Université Bretagne sud
mawloud.omar@univ-ubs.fr

Abstract : Intelligent Transportation Systems (ITS) have emerged as a new technology in the field of transport. This intelligence comes from the fact that vehicles can drive by ensuring a certain level of security. Several approaches have been proposed in this area. The aim of this paper is to ensure the authentication of a driver based on his behavior. To achieve this goal, we have proposed a method which authenticates the driver based on a set of characteristics before and after the vehicle start up, namely the adjustment of the mirrors, seat, etc. The proposition is modeled with a graph theory. The results we obtained have demonstrated the feasibility of our proposal by giving a low rate of false rejection and false acceptance.

Keywords : Intelligent transport systems (ITS) ; Authentication ; Behavior ; Driver authentication ; Graph .

1 Introduction

Nowdays, the automation of tasks is becoming very important in our daily life, whatever the field, smart homes, smart cities, etc., with the aim of improving the standard of living of users, which requires greater knowledge of their privacy, but this is not without risks. Until now, vehicle security has remained classic, mainly using locking devices, alarms or fingerprints. The need for novelty in this area, especially in intelligent vehicles that communicate more and more sensitive information with each other, has pushed the scientific community to think about new methods to enhance the security of transportation systems, this which gave birth to a new field of research called "Intelligent Transport Systems" (ITS). In recent years, researchers are interested in the case of the smart car especially in driver authentication

*Corresponding Author

which led to a huge development in the latter. Several schemes have been developed based on physical, biological and behavioral characteristics. In the area of physical biometrics, Kalikova et al. [6] have proposed an approach which is based on the use of an ear thermogram to identify a driver. This thermogram provides information about the temperature distribution on the surface of the ear which allows to determine its shape, an artificial neural network is used to verify the legitimacy of the driver. Other researchers are interested in biological biometrics such as Santos et al.[4] have exploited the biometric aspect of electrocardiogram ECG signals more precisely on the QRS complex in order to distinguish between a trustworthy driver and a malicious one. Some researchers have found that the physical features of the driver are not the only things that make us unique. In fact, driving patterns can distinguish one rider from another, Sei-Wang Chen et al. [1] have proposed a method for representing a driver's driving behavior in the form of graphs called Driving Habit Graph (DHG). Simulation results have shown that the DHG method can effectively represent the driving style of a driver. In the other hand, Putri et al. [2] have defined a new gaussian mixture model (GMM) based behavioral modeling approach to represent pre-processed data features with higher predictive accuracy. The proposed methods were compared with the GMM baseline and the simulation results proved the high degree of accuracy of these proposed methods compared with the GMM method. an other approche is proposed by Burton et al. [5] to solves the problem of insecurity and unreliable transportation systems caused by vehicle misuse through continuous driver authentication which consists in building a model of driving activities through a set of features extracted during driving by applying various machine learning algorithms . In order to provide a high degree of protection in intelligent transportation systems Yang et al.[3] have also suggested a new mechanism for authenticating a driver based on the upper part of his or her body more exactly on the dynamics of these upper body joint angles.The approach can authenticate the driver by matching the driving behaviors of the current driver with the driving behaviors of the vehicle owner.

In the rest of this paper some main concepts will be presented in the section 2. We present, afterward in Section 3, the main phases of our protocol of authentication. In Section 4, we analyze our protocol performances. Finally, Section 5 concludes this paper.

2 Problem Statement and Definitions

After studying the behavior of a driver we found that the latter is confronted with certain very common actions between drivers but in a different order of execution from one to another, which motivated us to study these actions and deduce a general behavior that will be able to distinguish them. To realize this, we first differentiated between the actions that the driver performs before starting the car and the actions performed during the driving phase. Before a car driver starts driving, he first performs certain actions, in our work we consider the following actions :

- Mirror adjustment(MA) : Each driver adjusts the mirrors according to their size and preferences, we take in consideration the three mirrors : central mirror (CM), left side mirror (LSM), right side mirror (RSM). At first, for the sake of simplicity, we are only interested in the degrees of horizontal adjustment.
- Steering wheel adjustment (SWA) : this action will be taken into account in relation to its position in centimeters.

- Positioning of the seat (PS) : A driver adjusts his seat in relation to his habits, we take into consideration the adjustment of the height (HS) in centimeters, depth in centimeters (DS) and seat bib in radians (BS).
- The Seat Belt (SB) : This action is taken into consideration, in relation to the order of its execution, for example there are people who put it on before starting the engine and others who put it on afterwards.
- Engine ignition (EI) : This action is taken into account in the execution order.

Once the driver starts driving, it can be noticed that the passage from one speed to another is done in the same speed interval for the same driver. This is why it can be considered as a characteristic which makes it possible to identify a driver. then, we consider only the minimum and maximum speeds reached as an action to engage a particular gear. We note $V_{(i,i+1)max}$ and $V_{(i,i-1)max}$, the respective maximum speeds of the passage from speed i to speed $i + 1$ and from speed i to speed $i - 1$, and $V_{(i,i+1)min}$ and $V_{(i,i-1)min}$ the respective minimum speeds of the transition from speed i to $i + 1$ and i to $i - 1$.

3 Our proposal authentication system

Authentication of intelligent vehicle systems is a very sensitive part to protect the vehicle from unauthorized access. To achieve this goal, we propose a new behavioral method of the driver to authenticate him, since he sits on the seat of his car until he hits the engine. For this, we have chosen to use graph theory to model these selected behaviors. The construction of the graph $G = N, V$ begins by forming the states which represent the actions of the driver discussed in the section 2, and in the form of arcs the conditions and probabilities which determine the order execution of actions. To train our model we divide it into two phases :

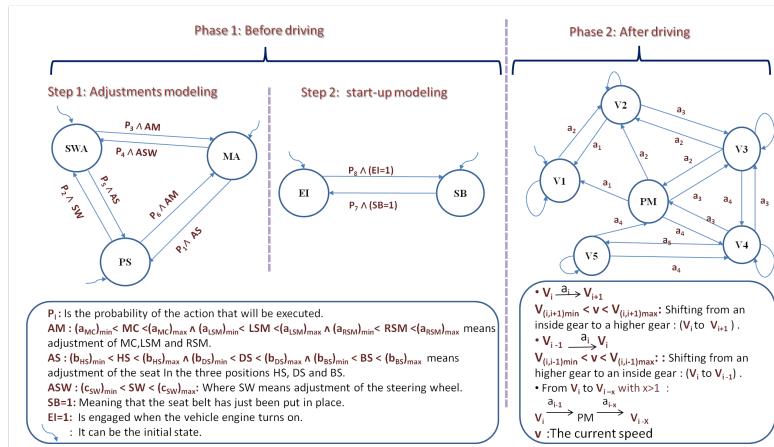


FIGURE 1 – General Graph

3.1 Modeling phase of the typical driver Before and after starting

- Before starting : We divide the set of behaviors into two essential parts, namely the behaviors of the possible adjustments (step1) : of the seat (PS), of the steering wheel (SWA) and the mirrors (MA) ; as well as the vehicle starting actions (step2) : Engine ignition (EI) and seat belt (SB) as mentioned in the figure 1. The transition between two nodes of the graph are done with conditions such as the interval of adjustments mentioned on each arc, and probability which is fixed by statistics in learning phase.
- After starting : In our proposal we considered that the order of gear change must be imperatively respected, which means that in order to change from the first gear to the third gear the driver must first go through the second gear. As shown below :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i \longrightarrow v_j \quad \text{if } j = i + 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

For the downshift process we assume that the transition from a speed i to a speed $i-1$ is done directly, but to move to a speed lower than $i-1$ the passage through the neutral gear is mandatory. This hypothesis can be represented as follows.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i \longleftarrow v_j \quad \text{if } i = j - 1 \\ v_i \longrightarrow pm \longrightarrow v_j \quad \text{if } i < j - 1 \end{array} \right. \quad (2)$$

3.2 Authentication verification phase

In order to ensure the authentication of a driver before and after starting driving, we have defined an acceptance index I which indicates the degree of similarity between the acquired biometric information and the reference model that represents the legitimate driver characteristics recorded during the modeling phase. This index takes a value between 0 and 1, it is calculated on the basis of two indices generated during the two authentication phases as follow.

$$I = \frac{I_1 * m + I_2}{1 + m} \quad (3)$$

m : is a coefficient that makes the actions of phase 1 more important than those of phase 2.

- Before starting : we generate an index I_1 from two sub-indices I_{11} and I_{12} which correspond respectively to the steps 1 and 2, as shown in this equation :

$$I_1 = \begin{cases} I_{11} + I_{12} \\ I_{11} = I_{11} + a * x_1 + b * y_1 \\ I_{12} = I_{12} + c * x_2 + d * y_2 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a, b) = \begin{cases} (0, 1) & \text{If it's the right action} \\ (-1, 0) & \text{Else} \end{cases} \quad (c, d) = \begin{cases} (0, 1) & \text{If it's the right action} \\ (-1, 0) & \text{Else} \end{cases}$$

- after starting : In this case the variation of the speed is frequent for each passage of a speed to another one we verify if it is in the interval of the reference model or not and according to this comparison the acceptance index it varies by the following function :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_2 = I_2 + x * \frac{\min(|V - V_{(i,i+1)min}|, \max|V - V_{(i,i+1)max}|)}{100} + y * \frac{\frac{Int}{1.5} - |V - V_{avg}|}{100} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{With : } (x, y) = \begin{cases} (0, 1) & \text{If it's in the range of the reference model} \\ (-1, 0) & \text{Else} \end{cases}$$

$$Int = V_{(i,i+1)max} - V_{(i,i+1)min} \cdot V_{(i,i+1)avg} = \frac{V_{(i,i+1)max} + V_{(i,i+1)min}}{2}$$

The increment and decrement of these indices I_1 and I_2 is done according to the result of comparison between the observed behavior and the reference model (if the value of the observed model belongs to the interval of the reference model). Once the acceptance index of the observed driver is calculated, it will be compared to a particular value (fixed during the simulation) in order to validate the legitimacy of the driver.

4 Simulation results

We performed our simulations on a platform using JAVA. We applied our approach on 50 drivers and initialized the intervals of the reference model according to the data extracted from the legitimate driver. These data are stored in a database created under the MySQL server. This simulation allows us to evaluate the performance of our proposal by evaluating the False Acceptance Rate (FAR) and the False Rejection Rate (FRR).

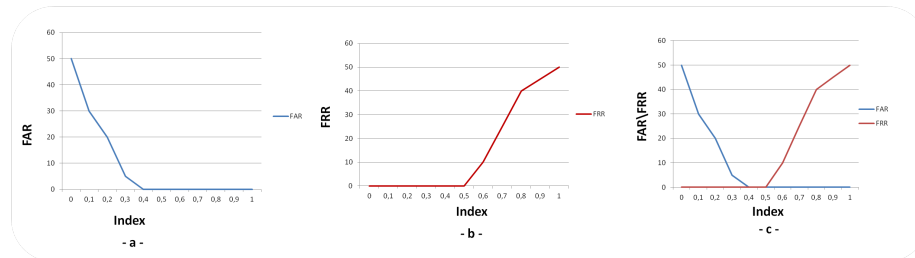


FIGURE 2 – a- Curve illustrating the values of the FAR. b- Curve illustrating the values of the FRR. c- Curve illustrating the values of the FAR/FRR.

The figure 2-a- shows the variation of the FAR according to the acceptance index, the FAR is defined as the percentage of impostor drivers who were wrongly recognized as a legitimate driver. We notice that the value of FAR degrades as the value of the acceptance index increases and from 0.4 the rate of FAR tends to 0.

Figure 2-b- shows the variation of the FRR considered as the percentage of legitimate drivers that were recognized as impostors as a function of the acceptance index. We notice that if the value of the acceptance index is fixed between $[0, 0.5]$ the FRR is null, over this value the FRR increases until it reaches the maximum, this is due to the value of the acceptance index that is higher than the matching index of the legitimate drivers.

In the figure Figure 2-c- shows the evolution of the FRR and the FAR according to the acceptance index. Comparing these results, we notice that our proposal achieves the best performance when the acceptance index is set between 0.4 and 0.5.

In order to be able to fix the value of the matching index to which the acceptance index must be compared, simulations on 20 drivers with 20 authentication attempts for each driver

were carried out. The simulation results shows that if the matching index is set to 0.4 we will have an illegitimate driver who will be accepted twice as the good driver : $FAR \approx 0.005$ and $FRR \approx 0$. If the matching index is set to 0.5 we will have two legitimate drivers that will be rejected, one of which is rejected twice and the other only just once : $FAR \approx 0$ and $FRR \approx 0.0075$.

From this results the acceptance index will be compared at 0.5. The choice of this value is justified by the fact that a driver who has been falsely rejected can reauthenticate himself while a driver who has been falsely accepted can generate serious risks.

5 Conclusion

To conclude, the driving behavior of a driver was analyzed from certain actions before and after his departure. Driving behavior was also modeled by graph theory to prove its validity. and finally, the results showed that our proposal based on the behavior of conductors offers good performance by setting the value of our acceptance index.

Acknowledgements



This work has been sponsored by General Directorate for Scientific Research and Technological Development, Ministry of Higher Education and Scientific Research (DGRSDT), Algeria.

References

- [1] Driving behaviour modelling system based on graph construction, Chen, Sei-Wang and Fang, Chiung-Yao and Tien, Chih-Ting, Transportation research part C : emerging technologies, 26, 314–330, 2013, Elsevier.
- [2] Smartwatch-based open-set driver identification by using gmm-based behavior modeling approach, Putri, Rekyan Regasari Mardi and Yang, Ching-Han and Chang, Chin-Chun and Liang, Deron, IEEE Sensors Journal, 21, 4, 4918–4926, 2020, IEEE.
- [3] A novel GMM-based behavioral modeling approach for smartwatch-based driver authentication, Yang, Ching-Han and Chang, Chin-Chun and Liang, Deron, Sensors, 18, 4, 1007, 2018, MDPI.
- [4] ECG-based user authentication and identification method on VANETs, Santos, Alex and Medeiros, Iago and Resque, Paulo and Rosário, Denis and Nogueira, Michele and Santos, Aldri and Cerqueira, Eduardo and Chowdhury, Kaushik Roy, Proceedings of the 10th Latin America networking conference, 119–122, 2018.
- [5] Driver identification and authentication with active behavior modeling, Burton, Angela and Parikh, Tapan and Mascarenhas, Shannon and Zhang, Jue and Voris, Jonathan and Artan, N Sertac and Li, Wenjia, 2016 12th International conference on Network and Service Management (CNSM), 388–393, 2016, IEEE.
- [6] Driver Identification Using Ear Biometrics, Kalikova, Jana and Krcal, Jan, 2018 5th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI), 1277–1281, 2018, IEEE.



Analysis of an M/G/1 retrial queue with persistent and impatient customers

Nasreddine Dehamnia¹, Mohamed Boualem ², and Djamil Aïssani 

¹Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
nasreddine.dehamnia@univ-bejaia.dz

²LaMOS Research Unit, Faculty of Technology, University of Bejaia, Algeria,
mohammed.boualem@univ-bejaia.dz

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
lamos_bejaia@hotmail.com

Abstract :

In this work, we analyze a retrial queue with reliable server and two types of primary customers persistent and impatient having different general service distributions. After this, we suggest a supplementary variables method for analysis of the Markov process, which describes the functioning of the system, and find the joint distribution of the server state in terms of generating functions, and some performance measures of the system, such as the mean number of customers in the retrial queue and in the system.

Keywords : retrial queue ; reliable server ; impatient ; persistent ; supplementary variables method ; performance measures.

1 Introduction

Retrial queuing systems have been widely used to model many practical problems arising in production systems and quality control issues, telecommunication technology, computer systems, and telephone networks. For a recent account of this system can be found in the monographs of (Yang & Templeton, 1987 [7]; Falin, 1990 [4]; Falin & Templeton, 1997[5]; Aïssani & Artalejo, 1998 [1]; Artalejo & Gómez-Corral, 2008 [2]; Boualem, 2014[3]; Taleb & Aïssani, 2016[6]; Aïssani & Ferhat, 2018[8]; and Zirem & Boualem, 2019[9]).

All of these aforementioned works deal with cases various retrial queueing models which may have some of the following characteristics : (i) Poisson arrivals, batch arrivals, (ii) exponentially or generally distributed service times, (iii) single or multiple servers, (iv) reliable or unreliable server, (v) single or multiple orbit. But in this paper we are interested just in a new version of a reliable retrial queue with persistent and impatient customers.

*Corresponding Author

The remainder of this article is organized as follows. Firstly, we introduce the mathematical description of the model. After this, by using supplementary variables technique and probability generating function method, we study steady-state distribution of the model. Finally, we describe it in terms of generating function and then we give some performance measures.

2 Model Description

We consider an $M/G/1$ retrial queue with two types of customers : persistent(arrival type1) and impatient(arrival type2). The persistent and impatient customers arrive according to independent Poisson processes with rate $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 > 0$ respectively.

- If an arriving primary customer persistent or impatient finds the server free, it is served immediately and leaves the system after service completion.
- If an arriving persistent customer finds the server busy, it join the orbit and returns later to try again until it finds the server free.
- If an arriving impatient customer finds the server busy, it join the orbit with probability m or leave the system with probability $1 - m$.
- If the server is free then it starts serving the customer from the batch which is on the head of the queue in accordance with an FCFS(First Come First Served) discipline.
- The persistent customer at the head of the retrial queue attempts to reach the server in a random time exponentially distributed with rate $\alpha_1 > 0$.
- The impatient customer at the head of the retrial queue attempts to reach the server in a random time exponentially distributed with rate $\alpha_2 > 0$.
- The retrial customer is required to cancel its attempt for service if a primary customers arrives first. In this case, if the retrial customer was persistent will return to it position in the retrial queue, but if the retrial customer was impatient chooses return to it position in the retrial queue with probability q or leave the system with probability $1 - q$.
- Secondary customer become impatient after a limited patience duration when this duration expires, they leave the system forever without having reached their service, the impatient duration follows an exponential distribution of rate $\varphi > 0$.
- Successive service times for customers of type1 and type2 are independent with common probability distribution function $B_i(x), i = 1, 2$, density function $b_i(x), i = 1, 2$, and conditional completion rate $\beta_i(x), i = 1, 2$. With ;

$$\beta_i(x) = \frac{b_i(x)}{1 - B_i(x)}, i = 1, 2.$$

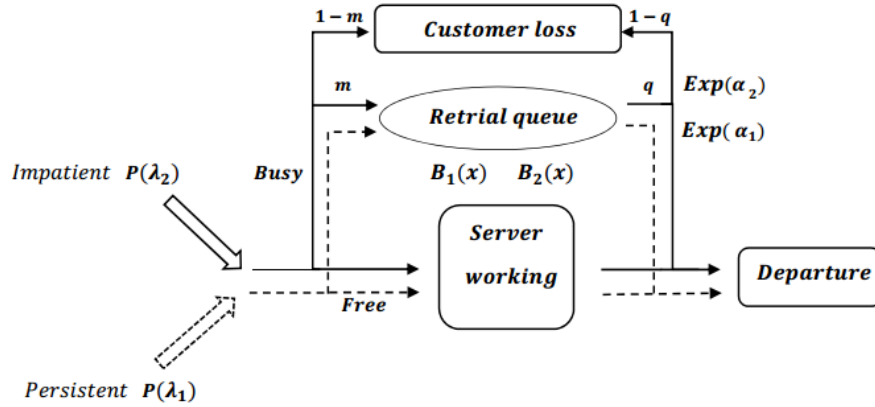


FIGURE 1 – Schematic representation of the queueing model.

3 Steady state distribution

The state of the system at time t can be described by the Markov process :

$$X(t) = \{C(t), N(t), \xi_1(t), \xi_2(t), t \geq 0\}, \text{ with :}$$

- $C(t)$: represent the server state at time t such as,

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{if the server is free at time } t. \\ 1 & \text{if the server is busy with persistent customer at time } t. \\ 2 & \text{if the server is busy with impatient customer at time } t. \end{cases}$$

- $N(t)$: represent the number of customers in the retrial queue at time t .
- $\xi_1(t)$: the elapsed service time for persistent customer at time t .
- $\xi_2(t)$: the elapsed service time for impatient customer at time t .

We introduce the following functions which describe the joint distribution of the server state as follows :

$$P_{0,n}(t) = P(C(t) = 0, N(t) = n), \quad n \geq 0,$$

$$P_{1,n}(t, x) \partial x = P(C(t) = 1, N(t) = n, x \leq \xi_1(t) < x + \partial x), \quad n \geq 0, x > 0,$$

$$P_{2,n}(t, x) \partial x = P(C(t) = 2, N(t) = n, x \leq \xi_2(t) < x + \partial x), \quad n \geq 0, x > 0.$$

The limiting probabilities when the stability condition is met are

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{0,n}(t) = P_{0,n}, \quad n \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{1,n}(t, x) = P_{1,n}(x), \quad n \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{2,n}(t, x) = P_{2,n}(x), \quad n \geq 0.$$

Using the supplementary variable technique, the Kolmogorov forward equations, which govern the system under the steady-state conditions, can be written as follows :

$$[(\lambda_1 + \lambda_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)]P_{0,n} = \int_0^\infty P_{1,n}(x)\beta_1(x) dx + \int_0^\infty P_{2,n}(x)\beta_2(x) dx, n \geq 0, \tag{1}$$

$$[\lambda_1 + \beta_1(x) + \frac{\partial}{\partial x}]P_{1,n}(x) = \lambda_1 P_{1,n-1}(x), n \geq 0, \quad (2)$$

$$[m\lambda_2 + \beta_2(x) + \varphi + \frac{\partial}{\partial x}]P_{2,n}(x) = \varphi P_{2,n+1}(x) + m\lambda_2 P_{2,n-1}(x), n \geq 0, \quad (3)$$

The boundary conditions are given as follows :

$$P_{1,n}(0) = \lambda_1 P_{0,n} + \alpha_1 P_{0,n+1}, n \geq 0, \quad (4)$$

$$P_{2,n}(0) = q\lambda_2 P_{0,n} + [\alpha_2 + (1-q)\lambda_2]P_{0,n+1}, n \geq 0, \quad (5)$$

The normalizing condition is :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_{0,n} + \int_0^{\infty} P_{1,n}(x) dx + \int_0^{\infty} P_{2,n}(x) dx) = 1. \quad (6)$$

We introduce the following generating functions which are convergent for each $x > 0$, $P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n}z^n$, $P_1(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n}(x)z^n$, $P_2(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2,n}(x)z^n$.

The equations.(1)–(6) are transformed into the equations

$$[(\lambda_1 + \lambda_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)]P_0(z) = \int_0^{\infty} P_1(z, x)\beta_1(x) dx + \int_0^{\infty} P_2(z, x)\beta_2(x) dx, \quad (7)$$

$$[\lambda_1 + \beta_1(x) + \frac{\partial}{\partial x}]P_1(z, x) = \lambda_1 z P_1(z, x), \quad (8)$$

$$[m\lambda_2 + \beta_2(x) + \varphi + \frac{\partial}{\partial x}]P_2(z, x) = \frac{\varphi}{z} P_2(z, x) + m\lambda_2 z P_2(z, x), \quad (9)$$

$$P_1(z, 0) = \lambda_1 P_0(z) + \frac{\alpha_1}{z} P_0(z), \quad (10)$$

$$P_2(z, 0) = q\lambda_2 P_0(z) + \frac{[\alpha_2 + (1-q)\lambda_2]}{z} P_0(z), \quad (11)$$

$$P_0(1) + \int_0^{\infty} P_1(1, x) dx + \int_0^{\infty} P_2(1, x) dx = 1. \quad (12)$$

Solving (8) and (9), we obtain

$$P_1(z, x) = \left(\frac{\lambda_1 z + \alpha_1}{z}\right) P_0(z) (1 - B_1(x)) e^{-\lambda_1(1-z)x}, \quad (13)$$

$$P_2(z, x) = \left(\frac{q\lambda_2 z + \alpha_2 + (1-q)\lambda_2}{z}\right) P_0(z) (1 - B_2(x)) e^{-(m\lambda_2(1-z) + \frac{\varphi(z-1)}{z})x}. \quad (14)$$

3.1 Theorem

If the stability condition is fulfilled, we can obtain

3.1.1 Corollary

- In steady state, the marginal generating functions of the orbit size are given by
- $P_0(z)$ when the server is free,
 - $P_1(z) = \left(\frac{\lambda_1 z + \alpha_1}{z}\right) P_0(z) \bar{L}_{B_1}(\lambda_1(1-z))$ when the server is busy with persistent customer,
 - $P_2(z) = \left(\frac{q\lambda_2 z + \alpha_2 + (1-q)\lambda_2}{z}\right) P_0(z) \bar{L}_{B_2}\left((m\lambda_2 - \frac{\phi}{z})(1-z)\right)$ when the server is busy with impatient customer.

3.1.2 Corollary

Let N_q and N_s be the numbers of customers in the retrial queue and in the system in steady state, respectively. Then the generating functions of N_q and N_s are given by

$$P_q(z) = \left[1 + \left(\frac{\lambda_1 z + \alpha_1}{z}\right) \bar{L}_{B_1}(\lambda_1(1-z)) + \left(\frac{q\lambda_2 z + \alpha_2 + (1-q)\lambda_2}{z}\right) \bar{L}_{B_2}\left((m\lambda_2 - \frac{\phi}{z})(1-z)\right)\right] P_0(z),$$

$$P_s(z) = \left[1 + z\left(\left(\frac{\lambda_1 z + \alpha_1}{z}\right) \bar{L}_{B_1}(\lambda_1(1-z)) + \left(\frac{q\lambda_2 z + \alpha_2 + (1-q)\lambda_2}{z}\right) \bar{L}_{B_2}\left((m\lambda_2 - \frac{\phi}{z})(1-z)\right)\right)\right] P_0(z).$$

The results of corollary 3.1.2 are derived from relations

$$P_q(z) = E[z^{N_q}] = P_0(z) + P_1(z) + P_2(z),$$

$$P_s(z) = E[z^{N_s}] = P_0(z) + z(P_1(z) + P_2(z)).$$

References

- [1] Aissani, A., Artalejo, J. R. (1998). On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing Systems*, 30, 309–321.
- [2] Artalejo, J. R. and Gómez-Corral, A. (2008). *Retrial queueing systems : A computational approach* (Springer ed.). Heidelberg, Berlin : Springer.
- [3] Boualem, M. (2014). Insensitive bounds for the stationary distribution of a single server retrial queue with server subject to active breakdowns. *Advances in Operations Research*, 2014, Article ID 985453, 12.
- [4] Falin, G. (1990). A survey of retrial queues. *Queueing Systems*, 7, 127–167.
- [5] Falin, G. I., Templeton, J. G. C. (1997). *Retrial queues*. Chapman and Hall, London.
- [6] Taleb, S., Aissani, A. (2016). Preventive maintenance in an unreliable M/G/1 retrial queue with persistent and impatient customers. *Annals of Operations Research*, 247, 291–317.
- [7] Yang, T., Templeton, J. G. C. (1987). A survey on retrial queues. *Queueing Systems*, 2, 201–233.

-
- [8] Aissani, A., Ferhat, L., Hamadouche, D., Taleb, S. (2018). Analysis of Customers' Impatience in a Repairable Retrial Queue under Postponed Preventive Actions. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 02–12.
- [9] Zirem, D., Boualem, M., Adel-Aissanou, K., Aissani, D.(2019). " Analysis of a single server batch arrival unreliable queue with balking and general retrial time," *Quality Technology and Quantitative Management*, vol. 16, 672-695.

Matrix geometric method for the analysis of unreliable server queueing system subjected to vacation policy

Anis Chettouf^{*1}, Mohamed Boualem^{id2}, and Amina Angelika Bouchentouf^{id3}

¹Laboratory of applied Mathematics Bejaia University, Algeria,
anis.chettouf@univ-bejaia.dz

²Research Unit LaMOS (Modeling and Optimization of Systems), University of Bejaia, 06000, Algeria,
mohammed.boualem@univ-bejaia.dz

³Mathematics Laboratory, Djillali Liabes University of Sidi Bel Abbes, 22000, Algeria,
bouchentouf_amina@yahoo.fr

Abstract : We deal with an infinite-space single server Markovian queue with working breakdown, balking, and renegeing, both single and multiple vacation. In addition, we suppose that once the regular busy period is terminated, the server has to wait a random period before he goes on a vacation (waiting server). The steady-state solution of the queueing system has been established via the matrix geometric method.

MSC: 60K25 ; 68M20 ; 90B22

Keywords : Queueing models ; impatience ; vacation ; matrix method ; working breakdown.

1 Introduction

During recent years, the literature on queueing systems with customers' impatience have paid a great attention because of their wide applications in several real life situations, such as communication and telecommunication systems, production/manufacturing systems, etc. For recent research works on the subject, the reader may refer to Yue et al. [6]. Wang and Chang [5], Afroun et al.[1]. Bouchentouf et al. [2, 3] and the references therein.

In this work, we consider an infinite-space single server Markovian queue subjected to single and multiple vacation, with waiting server, working breakdown, balking, and renegeing. The considered system is appropriate to model several real life situations, such as communication and telecommunication systems, production/manufacturing systems, etc. However, to the best of our knowledge, there is no work where the various features (waiting server, working breakdown, balking, renegeing, single and multiple vacation) have been considered together for unreliable server queueing models, even in the most recent studies. This motivates us to study the proposed system which regroups all these features at the same time.

*Corresponding Author

2 Model description

We consider an $M(\lambda)/M(\mu_1)/1/\infty/FCFS$. The system alternates between up state and down state. In the up state, it is either in regular state or in vacation state. In the down state it is in the working repair state. Once the regular busy period is terminated, the server has to wait a random period before he goes on a working vacation. The waiting time has an exponential distribution with rate η . The vacation period follows an exponential distribution with rate ϕ . Further, the queueing system is analyzed under both single (at vacation period completion, the server switches to the busy period and stays there waiting for a new arrival) and multiple (if at the end of working vacation, the system is still empty, the server takes another vacation) vacations. Let δ be the indicator function :

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{for the single vacation policy;} \\ 0, & \text{for the multiple vacation policy.} \end{cases}$$

During a regular busy period, the server may break down, and the breakdowns are supposed to occur according to a Poisson process with rate φ . In addition, once the system breaks down, the system immediately goes to reparation period whose duration follows an exponential duration with rate γ .

When the system is in the breakdown state, it still offers customer service but at a lower service rate. The service time in this state follows an exponential distribution with rate μ_2 ($\mu_2 < \mu_1$).

A customer on arrival finds n customers in the system, decides to enter the queue with probability θ or balk with probability $1 - \theta$.

Whenever a customer arrives at the system and finds the server on vacation, or on working reparation periods, he respectively activates an impatience timer T_0, T_2 . If the customer's service has not been completed before the customer's timer expires, the customer may abandon the system. This time $T_j; j = 0, 2$, is a random variable exponentially distributed with rate ξ_j . In addition, we assume that the customers timers are independent and identically distributed random variables and independent of the number of waiting customers.

3 System states process

The queueing system suggested can be analyzed as a quasi-birth-and-death(QBD) process. Let $\mathcal{N}(t)$ be the number of customers in the system at the moment t , $\mathcal{N}(t) \geq 0$. Let

$$\mathcal{J}(t) = \begin{cases} 0, & \text{The system is in a vacation period;} \\ 1, & \text{The system is in a busy period;} \\ 2, & \text{The system in a working breakdown period} \end{cases}$$

be the state of the servers at the moment $t \geq 0$.

Here, we take $\Omega_t = \{(\mathcal{N}(t); \mathcal{J}(t))\}$. Then, easily, we can see that $\{\Omega_t; t \geq 0\}$ is a regular irreducible continuous time Markov chain (CTMC) with state space $\mathbb{S} = \{(n, j) : n \in \mathbb{Z}^+; j = 0, 1, 2\}$ where n denotes the number of customer in the queue and j denotes the server state.

Following the concept of Neuts [4], the infinitesimal generator Q for the process can be

represented in the block matrix form

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & & & & & \\ C_1 & A_1 & B_1 & & & & \\ & C_2 & A_2 & B_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & C_N & A_N & B_1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

where N is a sufficiently large number such that when the number of customers $n \geq N$, we approximate the matrices A_n and C_n by A_N and C_N , respectively.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \delta\phi) & \delta\phi & 0 \\ \eta & -(\lambda + \eta + \phi) & \phi \\ 0 & \gamma & -(\lambda + \gamma) \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \theta\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \theta\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta\lambda \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} -(\theta\lambda + n\xi_0 + \phi) & \phi & 0 \\ 0 & -(\theta\lambda + \mu_1 + \phi) & \phi \\ 0 & \gamma & -(\theta\lambda + \mu_2 + n\xi_2 + \gamma) \end{pmatrix}, n \geq 1$$

$$C_n = \begin{pmatrix} n\xi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 + n\xi_2 \end{pmatrix}, n \geq 1$$

4 Stability condition

Théorème 4.1. *The Markov chain Ω_t has a stationary distribution if and only if the following inequality*

$$\theta\lambda < \frac{\gamma\mu_1 + \phi(\mu_2 + N\xi_2)}{\gamma + \phi}$$

is satisfied.

Preuve. From the Theorem 3.1.1 of Neuts [4], the approximated system is stable and the steady-state probability vector exists if and only if

$$YB_1e < YC_Ne, \tag{1}$$

where Y is the invariant probability of the matrix $F = C_N + A_N + B_1$. The vector Y satisfies $YF = 0$ and $Ye = 1$, where e is a column vector with all elements are equal to one. After doing a calculation, the vector $Y = [0, \gamma/(\phi + \gamma), \phi/(\phi + \gamma)]$ can be obtained. Substituting B_1 and C_N into (1) and doing some routine manipulation leads to

$$\theta\lambda < \frac{\gamma\mu_1 + \phi(\mu_2 + N\xi_2)}{\gamma + \phi}$$

which completes the proof of the Theorem. □

4.1 Steady-state solution

Let $\pi_{n,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\mathcal{N}(t) = n; \mathcal{J}(t) = j\}$, $(n; j) \in \mathbb{S}$, denote the steady-state system probabilities of the Markov chain $(\Omega_t)_{t \geq 0}$.

The system of balance (Chapman-Kolmogorov) equations for these probabilities is given as follows :

$$\begin{aligned}
(\lambda + \delta\phi)\pi_{0,0} &= \eta\pi_{0,1} + \xi_0\pi_{1,0}, \quad n = 0, \\
(\theta\lambda + \xi_0 + \phi)\pi_{1,0} &= \lambda\pi_{0,0} + 2\xi_0\pi_{2,0}, \quad n = 1, \\
(\theta\lambda + n\xi_0 + \phi)\pi_{n,0} &= \theta\lambda\pi_{n-1,0} + (n+1)\xi_0\pi_{n+1,0}, \quad n \geq 2, \\
(\lambda + \eta + \phi)\pi_{0,1} &= \delta\phi\pi_{0,0} + \mu_1\pi_{1,1} + \gamma\pi_{0,2}, \quad n = 0, \\
(\theta\lambda + \mu_1 + \phi)\pi_{1,1} &= \lambda\pi_{0,1} + \mu_1\pi_{2,1} + \phi\pi_{1,0} + \gamma\pi_{1,2}, \quad n = 1, \\
(\theta\lambda + \mu_1 + \phi)\pi_{n,1} &= \theta\lambda\pi_{n-1,1} + \mu_1\pi_{n+1,1} + \phi\pi_{n,0} + \gamma\pi_{n,2}, \quad n \geq 2, \\
(\lambda + \gamma)\pi_{0,2} &= \phi\pi_{0,1} + (\mu_2 + \xi_1)\pi_{1,2}, \quad n = 0, \\
(\theta\lambda + \mu_2 + \xi_1 + \gamma)\pi_{1,2} &= \lambda\pi_{0,2} + (\mu_2 + 2\xi_1)\pi_{2,2} + \phi\pi_{1,0}, \quad n = 1, \\
(\theta\lambda + \mu_2 + n\xi_1 + \gamma)\pi_{n,2} &= \theta\lambda\pi_{n-1,2} + (\mu_2 + (n+1)\xi_1)\pi_{n+1,2} + \phi\pi_{n,0}, \quad n \geq 2,
\end{aligned}$$

The normalizing condition is as

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,0} + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,1} + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n,2} = 1.$$

Under the stability condition, the system of balance equations can be done in the following matrix form as :

$$\begin{cases} \Pi Q = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n e_n = 1. \end{cases}$$

where e is a column vector with all elements are equal to 1. $\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \dots)$ is the steady-state probability vector of the transition rate matrix Q , and Π_n is given as :

$$\Pi_n = (\pi_{n,0}, \pi_{n,1}, \pi_{n,2}), \quad n \geq 1.$$

When the stability condition is fulfilled, the sub-vectors of Π satisfy

$$\Pi_n = \Pi_N R^{n-N}, \quad n \geq N, \quad (2)$$

where the matrix R is the minimal non-negative solution of the matrix quadratic equation

$$B_1 + RA_N + R^2 C_N = 0.$$

As in [4], we can calculate the successive approximation

$$R_{n+1} = -(B_1 + R_n^2 C_N)(A_N)^{-1}, \quad n \geq 0.$$

From equation $\Pi Q = 0$, we obtain

$$\Pi_0 A_0 + \Pi_1 C_1 = 0 \tag{3}$$

$$\Pi_0 B_0 + \Pi_1 A_1 + \Pi_2 C_2 = 0 \tag{4}$$

$$\Pi_{n-1} B_1 + \Pi_n A_n + \Pi_{n+1} C_{n+1} = 0, \quad 2 \leq n \leq N-1 \tag{5}$$

$$\Pi_{N-1} B_1 + \Pi_N A_N + \Pi_{N+1} R C_N = 0 \tag{6}$$

$$\Pi_N R^{n-N-1} B_1 + \Pi_N R^{n-N} A_N + \Pi_N R^{n-N+1} C_N = 0 \quad \text{for } n \geq N+1. \tag{7}$$

The normalizing condition is as :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n e_n = 1. \tag{8}$$

From equation (3) to (6), after some mathematical manipulations, we get

$$\Pi_{n-1} = \Pi_n \psi_n, \quad 1 \leq n \leq N \tag{9}$$

and

$$\Pi_N [\psi_N B_1 + A_N + R C_N] = 0, \tag{10}$$

where

$$\psi_1 = -C_1 (A_0)^{-1},$$

$$\psi_2 = -C_2 (A_1 + \psi_1 B_0)^{-1},$$

$$\psi_n = -C_n (A_{n-1} + \psi_{n-1} B_1)^{-1}, \quad \text{for } 3 \leq n \leq N.$$

Using equation (8) and (9) we obtain

$$\Pi_N \left[\sum_{n=1}^N \prod_{i=N}^i \psi_i + (I-R)^{-1} \right] e_n = 1 \tag{11}$$

Solving equation (10) and (11), yields Π_N . We use equation (2) and (9) to get Π_n for $n \geq 0$

References

- [1] Afroun, F., Aïssani, D., Hamadouche, D. Boualem, M. : Q -matrix method for the analysis and performance evaluation of unreliable $M/M/1/N$ queueing model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 41(18) (2018). <https://doi.org/10.1002/mma.5119>
- [2] Bouchentouf, AA., Boualem, M., Yahiaoui, L., Ahmad. H. : A multi-station unreliable machine model with working vacation policy and customers' impatience. *Quality Technology & Quantitative Management*. 19(6), 766-796 (2022).

- [3] Houalef, M., Bouchentouf, AA., Yahiaoui L. : A multi-server queue in a multi-phase random environment with waiting servers and customers' impatience under synchronous working vacation policy. Journal of the Operations Research Society of China. 1-29 (2022). <https://doi.org/10.1007/s40305-021-00384-3>
- [4] Neuts, M.F. : Matrix-geometric solutions in stochastic models. John Hopkins University Press, Baltimore. (1981).
- [5] Wang, K-H., Chang, Y-C. : Cost analysis of a finite $M/M/R$ queueing system with balking, reneging and server breakdowns. Mathematical Methods of Operations Research, 56, 169–180 (2002).
- [6] Yue, D. Zhang Y. and Yue W. : Optimal performance analysis of an $M/M/1/N$ queue system with balking, reneging and server vacation. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 28(1), 101-115 (2006).



Towards Automatic Reinforcement of Mobile Codes Security Based on Algebraic Approach

Djamila Zamouche ¹, Sofiane Aissani , and Mawloud Omar 

¹ LIMED, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie,
djamila.zamouche@univ-bejaia.dz,
sofiane.aissani@univ-bejaia.dz

²IRISA Laboratory, Univ Bretagne Sud, Vannes, France,
mawloud.omar@univ-ubs.fr

Abstract : Protecting a machine from malicious mobile codes based on mobile code analysis, especially, programs rewriting while using formal methods have been proven secure. A rewriting code approach based on process algebra has been proposed to reinforce security programs, where it reduces the problem of reinforcing security policies to a problem of solving a system of algebraic equations. Despite the robustness of this approach in obtaining a code respecting a given policy from a code which does not respect it, it is still too abstract to be applied to a real language, which is one of the fundamental issues. In this paper, we propose a new approach to automatic mobile code security reinforcement that aims to inherit the robustness of the process algebra-based code rewriting approach and to achieve a relatively high level of facility in applying this approach on a real language.

Keywords : Automatic reinforcement ; Mobile Codes ; Security Policy ; Process Algebra ; Logic

1 Introduction

Recently, research in distributed systems has seen the emergence of a new technology that is *mobile codes*. A mobile code is a set of instructions written in a programming language that runs on one or more machines to which it is temporarily linked. The main advantages of mobile codes are bandwidth optimization and flexibility. In turn, increased flexibility is accompanied by a more vulnerable cost of intrusions. Mobile codes generated by malicious machines can attack the environment where they run through several types of attacks, namely, denial of service, masquerade, attack on privacy, etc. Therefore, protecting the machine from malicious mobile code is a requirement. Different methods have been used with the aim of protecting a machine from malicious code. Among them, authentication and

*Corresponding Author

access control methods [1] [2], and analysis of mobile code methods, namely, static analysis [3] [4], dynamic analysis [5], and hybrid methods or programs rewriting methods with finite state automata [6], algebraic method [7], and so on. Although the former category for applying security is rather simple and can be described as preventive, their major drawback is that they base their decision to execute a code or not on its origin and not on the code itself. Indeed, it is not because we trust a host that it cannot send a malicious code. Static analysis is limited to checking basic security properties. To check the high-level security properties, values of variables are often required. This is why the use of dynamic analysis techniques is necessary. However, these techniques cause a considerable loss of performance. These losses are mainly caused by the tests added in the code. Hybrid methods are the most interesting method, because they try to combine the advantages of both static and dynamic methods. They enable to modify a program to make it compatible with a given security policy. In its basic step [7], the proposed solution allows obtaining a code respecting a given policy from a code which does not respect it, therefore, we can say that it allows the execution of all the codes. However, the proposed approach is still too abstract to be applied to a real language. In this paper, we propose a new automatic reinforcement approach of mobile code security that efficiently enhances the robustness of the mechanism proposed in [7] by further enriching their aspects. We intend to redefine the technique by making improvements in several levels to facilitate its application in a real language.

2 The proposed solution

In our work, we propose to redefine the technique proposed in [7] by making improvements in several levels to be applied in a real language. Indeed, we propose to specify the properties by a high level logic formalism. Moreover, we propose to introduce the unification modulo an equational theory in order to take into account the equivalent actions of the program. The equivalence of the actions is reduced to their effects on the environment. Finally, we optimize the calculation of the Greatest Common Factor (GCF) by characterizing the actions with zero effect on the considered security property. In what follows, we give the detailed description of the algebraic approach that allows to enforce security properties on a program. First, we introduce some definitions. Then, we present the logic that will allow to specify the security properties and describe the approach adopted in order to generate the secure program.

2.1 Definitions

Définition 2.1. Greatest Common Factor (GCF) : Let P and Q be two processes, the GCF of P and Q , denoted by $P \sqcap Q$, is a process P' such that the following conditions hold :

$$\begin{array}{ll} - P' \sqsubseteq P & - \forall P'', P'' \sqsubseteq P \text{ and} \\ - P' \sqsubseteq Q & P'' \sqsubseteq Q \longrightarrow P'' \sqsubseteq P' \end{array}$$

where, $\alpha \sqsubseteq \beta$ means that all traces of α are traces of β .

Définition 2.2. The derivative [8] of a process P with respect to an action α , denoted by $\partial_\alpha(P)$, is the process that remains to be executed after having executed the action α . Thus, the derivative is defined as follows : $\partial_\alpha(P) = \{P' \mid P \xrightarrow{\alpha} P'\}$.

Définition 2.3. The function $\delta(P)$ defines the set of actions by which a process P can start its execution. Thus, this function is defined as follows : $\delta(P) = \{\alpha \mid \exists P' \wedge P \xrightarrow{\alpha} P'\}$.

Définition 2.4. Unification : Two terms a and b belonging to $T(F, X)$ (a term defined on a set of symbols F and a set of variables X , $T(F, X)$ denotes the algebra of terms defined on F and X) are unifiable if there exists a substitution $\sigma : X \sqsubseteq T(F, X)$ such that $\sigma(a) = \sigma(b)$. The most general unifier of a and b noted $\text{mgu}(a, b)$ is a substitution σ such that :

$$\begin{cases} \sigma(a) = \sigma(b) \\ \forall \sigma' : \sigma'(a) = \sigma'(b), \exists \sigma'' : \sigma' = \sigma \circ \sigma'' \end{cases}$$

Définition 2.5. Unification modulo equational theory : Let E be an equational theory $a =_E b$ and only if $a \downarrow = b \downarrow$ in E , where $a \downarrow$ denotes the normal form of $a \in E$. Two terms a and b belonging to $T(F, X)$ are unifiable modulo equational theory, if there exists a substitution $\sigma : X \sqsubseteq T(F, X)$ such that $\sigma(a) =_E \sigma(b)$. The general unifier of a and b is noted $\text{mgu}_E(a, b)$ is a substitution σ such that :

$$\begin{cases} \sigma(a) =_E \sigma(b) \\ \sigma', \sigma'' : \sigma'(a) = \sigma'(b) \text{ and } \sigma = \sigma' \circ \sigma'' \end{cases}$$

2.2 Logical language for the security policies specification

Logic languages are widely used as a formal language to specify security policies. Indeed, logics allow to express security properties in a more natural way. In the context of our work, we have realized the need to define a logic to describe the security policies that will be used during the reinforcement process. It must meet three criteria, namely : (i) linear and temporal, or a logic that allows to express properties that verify a linear model is needed, the assumption of linearity means that a process can only be in one state at a given time ; (ii) well suited for the specification of safety properties, and (iii) allowing the specification of infinite properties. There are programs that run indefinitely and it is important to be able to capture this kind of behavior. The use of logic as a language for specifying security policies has led to the introduction of a new operator for calculating the GCF (denoted $\sqcap_{\mathbb{K}}$) between a process and a logic formula such that $P' = P \sqcap_{\mathbb{K}} \Phi$ respects the following properties :

$$P' \models \Phi \quad (1)$$

$$P' \sqsubseteq P \quad (2)$$

$$\forall Q : (Q \models \Phi \wedge Q \sqsubseteq P) \longrightarrow Q \sqsubseteq P' \quad (3)$$

The property 1 ensures that the process P' satisfies the security policy Φ , the property 2 ensures that all traces of $P \sqcap_{\mathfrak{X}} \Phi$ are also traces of P , and the property 3 ensures that P' is the most general program (the largest in terms of execution traces) that satisfies Φ .

In order to meet the above criteria, we have defined a logic, noted \mathfrak{X} , inspired by the formalism for extended regular expressions. Intuitively, \mathfrak{X} is a linear logic that expresses the regular language class, but with the possibility of expressing possibility to express infinite properties. Our choice is motivated by the fact that we are looking for a logic that marries well with the syntax of process algebras in order to meet our main objective, which is to enforce a security policy on a program. We have chosen the most used operators by temporal logics, and which correspond to our needs to express the security properties. Let α an action, the syntax of \mathfrak{X} is presented below.

$$\Phi ::= \top \mid 0 \mid 1 \mid \alpha \mid \neg\Phi \mid \Phi.\Phi' \mid \Phi \vee \Phi' \mid next(\Phi) \mid \cup(\Phi, \Phi')$$

where

- \top indicates true.
- $0, 1$ indicates the formulas corresponding to the blocked (respectively terminated) processes.
- α indicates the formula corresponding to an elementary action.
- $\neg\Phi$ represents the negation of a formula.
- $\Phi.\Phi'$ represents Conjunction of two formulas.
- $\Phi \vee \Phi'$ represents the inclusive 'or' between two formulas.
- $next(\Phi)$ indicates that from the next action, the formula Φ will be true.
- $\cup(\Phi, \Phi')$ indicates that Φ' will become true when Φ stops being true.

2.3 Optimization of the reinforcement

During our study, we have noticed that there are derivatives of a formula that do not change, this is where the idea of optimization came from. For this reason, we define the set of irrelevant actions of a logical formula. This set contains the actions that do not change the state of a formula if we calculate its derivatives with respect to them. We define the function Γ that calculates the irrelevant actions of the formula. An action α has no effect on the environment if $\partial_{\alpha}(\varphi_i) = \varphi_i$, whatever the sub-formula φ_i of φ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^0(\varphi) = \emptyset \\ \Gamma^i(\varphi) = \bigcup_{\mathfrak{X} \partial_{\alpha}^i(\varphi) = \varphi} \alpha \in \varphi^+ \{ \alpha \} \end{array} \right.$$

Where $\mathfrak{X} \partial_{\alpha}^i(\varphi)$ is the i^{th} derivative with respect to α , and φ^+ is the set of actions of φ . We generalize this definition as follows : $\Gamma(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma^i(\varphi)$.

2.4 Algorithm

The problem of enforcing a security property on a program P turns to find $P \sqcap_E \Phi$, a GCF of P and Φ . The idea is to generate a linear system where its resolution gives $P \sqcap_E \Phi$. Therefore, from the previous properties given above, we construct the algorithm (cf., Algorithm 1) allowing to compute the GCF of P and Φ by generating a linear system and resolving it. The function $o(x)$ allows to know whether $x \downarrow$ or not. $\nabla(\alpha, \beta, A)$ is an operator that is used to find the substitutions (if they exist) that make two actions equivalent, and adds the substitutions of constants as an additional condition, the A will contain the irrelevant actions, so if our action α is not relevant, we remain in the same state and without substitution.

Algorithm 1 Algorithm for the calculation of $P \sqcap_E \Phi$

- 1: $E \leftarrow \{P \sqcap_E \Phi = o(P) \times o(\Phi) + \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \in \delta(P) \times \delta(\Phi) \\ (\mu, \sigma) \in \nabla(\alpha, \beta, \Gamma(\Phi))}} \mu \cdot (\partial_\alpha(P) \sigma \sqcap_E \partial_\beta(\Phi) \sigma)\}$;
 - 2: **while** exists expression equivalent to $P_i \sqcap \Phi_i$ in the right member of any equation in E that does not appear in the left limb **do**
 - 3: $E \leftarrow E \cup \{P_i \sqcap_E \Phi_i = o(P_i) \times o(\Phi_i) + \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \in \delta(P_i) \times \delta(\Phi_i) \\ (\mu, \sigma) \in \nabla(\alpha, \beta, \Gamma(\Phi_i))}} \mu \cdot (\partial_\alpha(P_i) \sigma \sqcap_E \partial_\beta(\Phi_i) \sigma)\}$;
 - 4: **end while**
 - 5: Return the solution of the linear system E .
-

3 Implementation

To validate the proposed approach, we have applied it on a real language that is the C language under the Linux operating system, which has a built-in C compiler, namely the gcc compiler.

The implemented grammar allows to represent all the actions of a program, a condition, a loop and condition, a loop and simple operations. This grammar is represented by the following BNF (Backus-Naur Form) grammar :

P :: *instruction OMEGA/condition COND instruction OMEGA/instruction*instruction OMEGA*

Instruction :: *a(var, var).inst/a(var, cte).inst/r(var).inst/s(var).inst/w(var).inst*

Var :: *a/b/c.../z*

Cte :: *1/2/.../100*

Condition :: *(var = var) ET condition/(var = cte) ET condition/(var = var) OU condition/(var = cte) OU condition/(var > var) ET condition/(var > cte) ET condition/(var > var) OU condition/(var > cte) OU condition/(var < var) ET condition/(var < cte) ET condition/(var < var) OU condition/(var < cte) OU condition/epsilon*

Firstly, we have introduced the process $((s = 0)CONDs(s)^*)$, which has a condition in a loop which is not allowed by the grammar. Therefore, the prototype indicates that the introduced process does not respect the grammar.

In the second case, we have introduced the following process $P = a(z, 2).r(x).(x < 0)CONDa(x, x + 1).s(x)OMEGA$ and the following security policy $\Phi = 7r(y)*r(y).a(y, y -$

z).7s(0)OMEGA. Thus, the implemented prototype generates a system of equations and does not solve the system.

4 Conclusion

In this paper, the mobile codes security problem is considered, where we've proposed an approach for an automatic reinforcement of mobile code security. The main contribution of this paper is the construction of an efficient security approach that can be applied for a real language. To do this, the security properties are specified by a high level logic formalism. For the validation of the proposed approach, we have applied it on a real language that is the C language.


Acknowledgment

This work was carried out in the framework of the research activities of the LIMED Laboratory, University of Bejaia, Algeria. It was done in collaboration with the IRISA Laboratory, Université Bretagne Sud, France. This work has been sponsored by the General Directorate for Scientific Research and Technological Development, Ministry of Higher Education and Scientific Research (DGRSDT), Algeria.

References

- [1] U. Topaloglu, and C. Bayrak, Secure mobile agent execution in virtual environment, *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 16(1) :1-12, 2008.
- [2] N. Dragoni, F. Massacci, K. Naliuka, and I. Siahaan, Security-by-contract : Toward a semantics for digital signatures on mobile code, In *European Public Key Infrastructure Workshop*, pp. 297-312, 2007.
- [3] G. C. Necula, and P. Lee, Safe, Untrusted Agents Using Proof-Carrying, *Mobile Agents and Security*, 1419 :61, 2003.
- [4] Y. Tsukada, Interactive and probabilistic proof of mobile code safety, *Automated Software Engineering*, 12(2) :237-257, 2005.
- [5] U. Erlingsson, and F. B. Schneider, SASI enforcement of security policies : A retrospective, In *Proceedings DARPA Information Survivability Conference and Exposition*. 2 :287-295, 2000.
- [6] H. Ould-Slimane, M. Mejri, and K. Adi, Enforcing security policies on programs, *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, 147 :195, 2006.
- [7] H. Fujita, and I. Zualkernan, Enforcing security policies using algebraic approach, *New Trends in Software Methodologies, Tools and Techniques*, 182 :84, 2008.
- [8] J. A Brzozowski, Derivatives of Regular Expressions, *Association for Computing Machinery*, 11(4) :481-494, 1964.

Minimisation de la Rogne dans la Production du Carton Ondulé au niveau de l'Entreprise Général Emballage

Saida Belhou¹, Nassima Berrane², Ouiza Lekadir ^{*3}, and Djamil Aïssani⁴

^{1,2}LaMos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
lamos_b_e_jaia@hotmail.com

³LaMos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
ouiza.lekadir@univ-bejaia.dz

⁴LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
djamil.aissani@univ-bejaia.dz

Résumé Le besoin de la planification existe dans la plupart des entreprises. Général Emballage comme toute entreprise essaye d'assurer une bonne planification de la production de ces machines mais elle se trouve confronté à des coûts liés à sa production. L'objectif principal de notre travail est la minimisation de la rogne (chute) dans la production des plaques du carton ondulé au sein de l'entreprise Général Emballage, en proposant des plans de découpe optimaux. Notre travail est basé sur une étude statistique prévisionnelle afin d'estimer la demande du produit étudié. Ensuite, nous avons formulé notre problème comme un problème de "Cutting stock" qui est un programme linéaire en nombre entiers. Pour la résolution du problème ; la méthode de "génération de colonnes" a été appliquée sous Matlab. Les résultats obtenus indiquent que les plans de découpe trouvés minimisent la chute totale dans la production des plaques du carton ondulé.

Mots clés : L'entreprise Général Emballage ; Optimisation Combinatoire ; Cutting Stock ; Rogne ; Méthodes de prévision ; Génération de Colonnes ; Emballage

1 Introduction

L'entreprise GE (Général Emballage) est leader en Algérie de l'industrie du carton ondulé. Elle a très tôt mise sur l'application des approches scientifiques en s'impliquant dans les programmes de formation avec l'université. De ce fait, le carton ondulé prend de plus en plus une place importante dans l'industrie "Packaging" et comme toute entreprise, GE se

*Corresponding Author

trouve confrontée à une forte mutation de son environnement se traduisant par une clientèle de plus en plus exigeante sur le coût, la qualité du produit et les délais de livraison.

Le principal problème rencontré à GE est un problème qui consiste en la planification de la production qui peut être défini comme étant un ensemble de décisions, qui doivent être prises à court et à moyen terme afin de convertir des matières premières en produits finis. Plus précisément, il s'agit d'un problème de minimisation des chutes (Rognes) lors du processus de découpe des Plaques du carton ondulé au niveau de l'entreprise GE. Notre étude consiste à recenser tout les plans de découpe et à mettre en oeuvre un modèle mathématique pour minimiser la chute engendrée par les découpes de ces dernières.

2 Prévision de la demande

2.1 Etude prévisionnelle de la série des demandes du produit "Plaque du carton ondulé"

Cette étude comporte : Récolte des données, une analyse préliminaire des données, l'identification du modèle, l'estimation des paramètres du modèle et enfin les prévisions. On va résumer brièvement cette étude prévisionnelle réalisée. En premier lieu, nous avons effectué une collecte de données nécessaires pour analyser le fonctionnement des processus de demande et de production au niveau du service de production de l'entreprise la GE. Ces données représentent les quantités mensuelles demandées (produites) en tonne, et cela depuis Janvier 2015 jusqu'à Décembre 2018. La chronique des demandes Plaque $(y_t, t \geq 0)$ est illustrée par son graphe qui a fait apparaître une tendance croissante. Il a été nécessaire de modifier la série originale en utilisant une différenciation d'ordre 1 pour éliminer la tendance d'où $d = 1$. On obtient alors la nouvelle chronique : $Q_t = (1 - B)y_t$. En deuxième lieu, on a représenté le corrélogramme et le corrélogramme partiel de la série originale "Demande Plaque". En troisième lieu, la série y_t on l'a différenciée une seule fois pour éliminer la tendance et nous avons obtenu le graphe de la série différenciée Q_t . De plus, on a remarqué que y_t ainsi que Q_t ne possèdent pas une composante saisonnière. Pour ces raisons, on a suggéré comme modèle le processus ARIMA($p; d; q$) avec $d = 1$. Pour la détermination des paramètres p et q , on a analysé les coefficients de corrélation et d'autocorrélation partiel. D'après le corrélogramme de la série différenciée obtenu, il y a six pics significatifs. Donc, on a pris $Q_{max} = 7$, d'où, $q \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Et d'après le corrélogramme partiel de la série différenciée qu'on a obtenu, il y a quatre pics significatifs donc on a pris $P_{max} = 5$, d'où, $p \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Après plusieurs essais, nous avons trouvé que le modèle le plus approprié est le processus ARIMA(2; 1; 0); nous avons estimé donc le modèle : $y_t = (1 + \phi_1)y_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)y_{t-2} + \phi_2 y_{t-3} + \varepsilon_t$. Une fois le modèle établi, il faut estimer ses paramètres. Les estimateurs des coefficients de ce modèle et leurs variances sont donnés par : $\hat{\phi}_1 = -0,4224$, $\hat{\phi}_2 = -0,3951$, $\hat{\sigma}(\hat{\phi}_1) = 0,1378$, $\hat{\sigma}(\hat{\phi}_2) = 0,1597$.

Des tests sont réalisés pour valider notre modèle. En effet, la taille de l'échantillon est $n = 48$ tandis que le nombre de paramètres estimés est $k = 2$. Le test de Student a donné une statistique :

Autres tests sur le bruit blanc, Nous avons obtenu le corrélogramme et le corrélogramme partiel des résidus.

- $T_1 = \frac{|\hat{\phi}_1|}{\hat{\sigma}(\hat{\phi}_1)} = 3.0653 > t_{(46,0.025)} = 2.013$, cet estimateur est donc significatif;
- $T_2 = \frac{|\hat{\phi}_2|}{\hat{\sigma}(\hat{\phi}_2)} = 2.4740 > t_{(46,0.025)} = 2.013$, cet estimateur est donc significatif;

Par la suite, nous avons vérifié que tous les estimateurs sont significatifs, alors le modèle sera conservé si les résidus peuvent être considérés comme un bruit blanc ainsi qu'en témoignent le comportement des autocorrélations et des autocorrélations partielles qu'on a obtenu qui sont tous inclus dans l'enveloppe. Cette constatation est confirmée par le test de Box et Ljung dont la réalisation de la statistique Q' sur l'hypothèse de la nullité des 20 premiers coefficients de corrélation des résidus au niveau de signification $\alpha = 0.05$ est : $Q' = 18,996 < \chi^2_{(18;0.05)} = 28,87$. On accepte l'hypothèse que les résidus forment un processus bruit blanc.

Donc on a retenu le modèle :

$$y_t = 0,5776y_{t-1} + 0,0273y_{t-2} - 0,3951y_{t-3} + \varepsilon_t.$$

Enfin, en quatrième lieu Les prévisions pour l'année 2019 sont calculées en utilisant la formule. ces prévision sont illustrées dans une figure, à partir de la quelle on remarque que les prévisions de la demande Plaque semblent avoir une tendance régulière qui diffère des fluctuations de la série originale. De ce fait, l'entreprise devrait produire des quantités comprise entre 3600 et 3800 tonnes pour chaque mois en 2019.

2.2 Etude comparative

En dehors des validations fondamentales des modèles de la demande, il était intéressant de comparer les résultats donnés par le modèle que nous avons établi et ses prévisions avec les données réelles des demandes collectées. ce qui est illustré dans une figure. à partir de la quelle on a constaté qu'au début de janvier, nos prévisions et les demandes réelles enregistrées au niveau de GE sont presque identiques. Par la suite, elles décroissent avec le même comportement jusqu'au mois de février avec un écart un peu plus important et cela est bien justifié par le manque de demandes au début de l'année. Pour le mois de mars la diminution de production (demandes) est justifiée par la grève d'une semaine (dont deux jours durant lesquels l'entreprise était à l'arrêt de production).

3 Modélisation et Résolution du problème

Dans ce travail on a établi un programme linéaire en nombres entiers (PLNE) afin de minimiser les coûts liés à la production du produit fini (plaque du carton ondulé). Pour cela, plusieurs actions ont été déployées, à savoir : l'augmentation de la productivité des machines sur les trois sites de production (Akbou, Setif, Oran), ainsi que la diminution de la rogne.

3.1 Description du problème

GE possède deux onduleuses à savoir Fosber et Medesa, le fonctionnement de ces machines est le suivant :

- Le procédé de fabrication débute avec l'arrivée de bobines de papier à l'onduleuse.

- Ensuite les bobines de 2,4 m (qui est la norme dans chaque usine) sont transportées sur un tapis roulant automatisé jusqu'à l'onduleuse.
- La fabrication nécessite deux bobines de papier ; une pour le papier de face dite couverture et une seconde pour le papier cannelure. Le papier de face sera alors annexé aux cannelures à l'aide de la presse lisse. Le produit sortant est donc un carton simple face, ce dernier doit joindre une autre feuille de papier couverture sur la face cannelée pour former le carton double face.
- Puis les tables chauffantes reçoivent le carton double face qui passe à ce niveau sous des rouleaux presseuses afin d'assurer le maintien de l'encollage.
- Une fois la production du carton ondulé terminée, il faut le couper à l'aide de la machine coupeuse pour obtenir la largeur désirée.

Le problème est alors de trouver une manière efficace afin d'exploiter la matière première pour un minimum de chutes. Notre but est de regrouper les commandes des clients selon un modèle de découpe qui permet d'avoir une rogne minimale.

3.1.1 Définition de la chute (la Rogne)

On appelle chute toute pièce restante après l'opération de découpe. La rogne est un facteur important pour la constitution d'un programme de production onduleuse optimisé, ce facteur sera l'objet de notre étude.

3.2 Modélisation du problème

3.2.1 Données de base

On connaît les informations suivantes : ● La largeur de la bobine, ● Le nombre, le type (dimensions) de plaques à découper.

3.2.2 Indices, paramètres, données et variables

- **Indices** : Soit i le type (dimension) de découpe d'une plaque $i = 1, \dots, n$, et soit j le modèle de découpe d'une plaque $j = 1, \dots, m$.
- **Paramètres** : Soit n : le nombre total de type de découpe et soit m le nombre total de modèle de découpe.
- **Données** : Soit L la largeur de la bobine et soit d_i la demande de plaques de type i .
- **Variable** : Soit : * a_{ij} : le nombre de plaques de type i découpées selon le modèle j . * y_j : le nombre de plaques découpées selon le modèle j . * c_j : la chute pour le modèle j .

3.3 Formulation mathématique du problème

- **Contraintes** :
 - * La somme de plaques de type i découpées selon le modèle j doit être supérieur ou égale à la demande d_i . $\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j \geq d_i, i = \overline{1, n}$
 - * Le nombre de plaques découpées doit être un entier naturel, $y_i \in \mathbb{N}, j = \overline{1, m}$.
- **Fonction objectif** : Le service planification à GE vise à minimiser la chute enregistrée

lors de processus de production *Minimiser* $\sum_{j=1}^m c_j y_j$. Donc le modèle mathématique construit est un modèle de "Cutting Stock" qui se formalise comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} \min \quad \sum_{j=1}^m c_j y_j \\ \text{s.c} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \geq d_i \quad i = \overline{1, n} \\ \quad \quad y_j \in \mathbb{N} \quad j = \overline{1, m} \end{array} \right.$$

3.4 Résolution du problème et interprétation des résultats

Le modèle établi est un PLNE, pour le résoudre on a utilisé la méthode de génération de colonnes, de plus on a utilisé le Logiciel de planification et de contrôle de la production utilisée par Général Emballage (PC-Topp).

3.4.1 Présentation des résultats et interprétation

Une fois que les demandes clients arrivent, le logiciel PC-Topp classe les commandes selon leurs délai de livraison Le tableau ci-dessous représente les longueurs (en millimètres) des types de Laize utilisés dans notre application : Des résultats sont obtenus en appliquant

Type(i)	316*1225	318*1225	320*1059	470*1240	576*1081	628*1735	780*1120	850*183
---------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	---------

Table 3. Types de laize.

la méthode de génération de colonnes sous Matlab. En effet, avec cette méthode les types (*i*) de plaques sont données par les différentes longueurs (Laizes) données. Dans notre cas, on a considéré 8 types de Laize qui dépendent de la demande des clients. L'application de l'algorithme de génération de colonnes nous a permis de construire des combinaisons de ces types qui représentent les plans de découpe (*j*) en minimisant la chute associée à chaque plan de découpe. En effet, la méthode a pour objectif de maximiser le nombre de découpes (plaques), ce qui est équivalent à minimiser le métrage utilisé dans une bobine . Les résultats obtenus montre que le métrage utilisé est 7350 m qui ne dépasse pas 8000 m (la longueur d'une bobine). Les rognés obtenues sont réduites et ne dépasses pas la valeur 100 mm (la norme exigée par le service production).

Le nombre de plaques associées à chaque plan de découpe est obtenu et résumé en tableaux. Ces tableaux montrent que quelques plans réalisés satisfont la demande et pour le reste des plans le nombre de plaques produites ne réponds pas à la demande client ; cela est justifié par la capacité limitée des machines et le manque des qualités du papier ; c'est pour ce la que l'entreprise produit par tranche (et le reste des commandes seront produites dans les prochains programmes).

3.4.2 Etude comparative

Pour vérifier l'efficacité de nos résultats, nous avons effectué une étude comparative entre nos résultats et ceux trouvés à l'aide du PC-Topp. De cette étude comparative, on a constaté que les rognés associées pour chaque plan de découpe prennent des valeurs dans

{22, 34, 48, 50, 60, 68, 96, 100} et celles trouvées à l'aide du PC-Topp sont dans {30, 34, 50, 60, 68, 74, 82, 84, 92} et elles respectent la norme exigée par l'entreprise GE (ne dépassent pas 100 mm). Comme la production des plaques du carton ondulé est importante par rapport aux autres produits (70% de la capacité de production totale), nous avons comparé les quantités calculées avec Matlab et celles produites à Générale Emballage. Nous avons trouvé que les chutes sont minimales et certaines valeurs sont inférieures à celles trouvées par le PC-Topp. Par conséquent les résultats trouvés donnent une bonne gestion de production puisque elle permettent de Satisfaire la demande des clients. Dans cette section, nous avons déterminé un plan de découpe pour l'entreprise Général Emballage. Nous avons déterminé les quantités de plaques à produire avec une chute minimale, et ce, en utilisant le solveur Matlab.

4 Conclusion

Le but de ce travail est de déterminer une bonne planification de la production afin de satisfaire la demande des clients. Ainsi, en premier lieu nous avons effectuè une ètude prévisionnelle d'un produit fini " Plaques du carton ondulè " pour avons estimer la demande de ce produit en utilisant une mètode de Box et Jenkins. En second lieu nous avons identifiè le modèlè mathématique comme ètant un programme linèaire en nombre entier (PLNE). La rèsolution de notre problèmè revient à rèsoudre un problèmè de dècoupe qui est un problèmè d'optimisation combinatoire. De ce fait, on s'est orientè vers une mètode exacte (gènèration de colonnes) où nous avons utilisè le solveur Matlab. Pour chaque plan de dècoupe proposè ; nous avons calculè la chute (Rogne) associèe. A partir des rèsultats obtenus, on peut conclure que les plans de dècoupes trouvès donnent des chutes minimales qui respectent les exigences de l'entreprise. Ce travail peut ètre complètè par des ètudes permettant d'èvaluer au mieux les difèrentes exigences de l'entreprise GE telles que : • Envisager une autre mètode à appliquer pour le problèmè de dècoupe. • Recycler l'ensemble de ces dèchets de production et de ces rejets industriels. • Crèation des espaces de stockage pour les produits finis.

Références

- [1] A. Pirotte G. Bresson. Economètrie des sèries temporelles :Théorie et application. Presse universitaire de France, 1995.
- [2] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis et H. D. Sherali. Linear programming and network flows. John Wiley and Sons, 2ème èdition, 1990.
- [3] [https ://www.generalemballage.com/presentation-de-lentreprise/](https://www.generalemballage.com/presentation-de-lentreprise/)

Flow shop robotisé réentrant à deux machines

Khebouche Ali  and Boudhar Mourad ^{*1}

¹RECITS Research Unit, Faculty of Mathematics, University of USTHB, Algeria,
kheboucheali@gmail.com

Résumé Dans ce papier, nous avons étudié un problème rencontré dans les cellules robotisées réentrantées où les pièces doivent rester sur les machines pendant un temps illimité. Les pièces sont transportées d'une machine à l'autre par un robot central ayant la capacité de permutation. Un des problèmes est d'optimiser les mouvements du robot afin d'avoir la meilleure productivité. On s'intéressera au cas de la production cyclique pour une cellule équilibrée et déséquilibrée à deux machines. On montrera qu'il existe des 3 cycles optimaux d'une unité strictement dominants les 3 cycles restants.

Mots clés : Cellules robotisées circulaires, Chain-reentrant, maximisation du débit, production cyclique.

1 Introduction

Les robots industriels font partie intégrante des systèmes de fabrication modernes en raison de leurs fonctions importantes telles que le soudage, l'assemblage, les essais et l'inspection dans les chaînes de production des industries légères et lourdes. Dans les systèmes de fabrication cellulaire, l'une des principales applications des robots est la manipulation des matériaux entre les machines [1].

Une cellule robotique d'un flow-shop est composée de m machines M_1, M_2, \dots, M_m et d'un robot chargé de manipuler les pièces entre les machines. La cellule est équipée d'un tampon d'entrée qui fournit les pièces à produire en quantité infinie, et d'un tampon de sortie également de capacité infinie. Ces deux tampons sont modélisés par deux machines supplémentaires. Chaque pièce doit être prélevée dans le tampon d'entrée, transférée séquentiellement sur chaque machine (M_1, M_2 , etc. jusqu'à M_m), puis transférée dans le tampon de sortie. Asfahl [5] a utilisé pour la première fois ce concept pour décrire une cellule robotique composée de trois machines pour la fabrication de pièces moulées destinées à l'assemblage différentiel de camions. Deux configurations principales sont étudiées dans la littérature : D'une part, la cellule robotique est linéaire ou bien semi-circulaire où les tampons d'entrée et de sortie sont séparés et situés respectivement à chaque extrémité de la ligne [2] (voir Figure 1). D'autre part, la cellule robotique est circulaire, où les machines sont disposées en cercle. Par ailleurs les tampons d'entrée et de sortie occupent soit le même emplacement ($M_0 = M_{m+1}$) (voir Figure 2), soit un emplacement très proche [3], [4].

*Corresponding Author

FIGURE 1 – Cellules robotisées linéaires à trois machines.

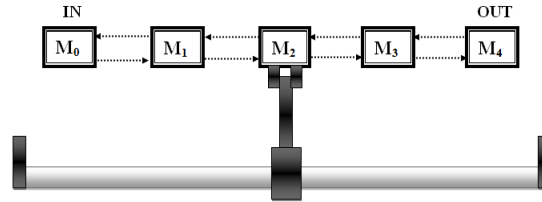
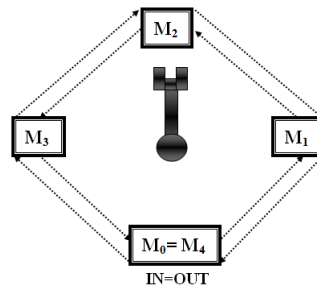


FIGURE 2 – Cellules robotisées circulaires à trois machines.



2 Présentation du problème, définitions, notations

Dans ce papier, nous nous intéressons au problème d'ordonnement flow shop à deux machines dans des cellules robotisées circulaires, qui sont constituées d'un robot central avec capacité de permutation. Ainsi, lorsque le robot et la machine sont tous les deux occupés, on peut permutationner deux pièces en même temps (le robot charge la pièce i et décharge la pièce $i + 1$ à la machine occupée simultanément), et une contrainte de recirculation de type chaîne-rentrant. La séquence d'exécution des pièces dans le problème de la cellule robotique circulaire réentrante est comme suit (M_1, M_2, M_1) . On remarque qu'une fois le passage sur les machines terminé, il y a un retour à la première machine. Les cellules robotiques traditionnelles étaient fondées sur l'idée que le robot ne pouvait pas charger une machine déjà occupée. Cependant, nous pouvons lever cette hypothèse en supposant que le robot et la machine sont tous les deux occupés dans le chargement ou le déchargement d'une pièce.

Pour la production de masse, il est opérationnellement pertinent de préférer la programmation cyclique. Cela signifie que le robot peut effectuer les mêmes activités indéfiniment, chaque itération laissant la cellule dans le même état, avec les mêmes machines chargées et vides. La séquence élémentaire est appelée un cycle. Les cycles à une unité sont des cycles spécifiques qui produisent exactement une pièce : au cours d'une itération, exactement une pièce entre dans la cellule, et une pièce traitée sort de la cellule. L'objectif est de trouver une séquence cyclique de mouvements de robot qui minimise le temps de cycle d'une unité nécessaire pour produire une pièce, ou de manière équivalente qui augmente le débit lorsque chaque pièce entre dans la première machine seulement deux fois

2.1 Définitions et notations

Définition 2.1. Dans la cellule robotisée réentrante avec capacité de permutation, nous définissons une séquence d'activités : $A_i^+, A_1^-, A_i^{s+}, A_1^{s-}$ et A_0^- pour tous $i \in \{0, 1\}$.

A_i^+ Il s'agit de la séquence d'activités suivante :

1. Le robot charge une pièce depuis M_i .
2. Le robot transporte cette pièce depuis M_i à M_{i+1} .
3. Le robot décharge cette pièce sur M_{i+1} .

A_i^{s+} Il s'agit de la séquence d'activités suivante :

1. Le robot charge une pièce depuis M_i .
2. Le robot transporte cette pièce depuis M_i à M_{i+1} .
3. En même temps que le robot charge une pièce depuis M_{i+1} , il décharge la pièce transportée sur M_{i+1} . (Swap).

A_1^- Il s'agit de la séquence d'activités suivante :

1. Le robot charge une pièce depuis M_2 .
2. Le robot transporte cette pièce depuis M_2 à M_1 .
3. Le robot décharge cette pièce sur M_1 .

A_1^{s-} Il s'agit de la séquence d'activités suivante :

1. Le robot charge une pièce depuis M_2 .
2. Le robot transporte cette pièce depuis M_2 à M_1 .
3. En même temps que le robot charge une pièce de M_1 , il décharge la pièce transportée sur M_1 (Swap).

A_0^- Il s'agit de la séquence d'activités suivante :

1. Le robot charge une pièce depuis M_1 .
2. Le robot transporte cette pièce depuis M_1 à M_0 .
3. Le robot décharge cette pièce sur M_0 .

Définition 2.2. Soient π_i et π_j deux cycles de mouvement de robot et Π l'ensemble de tous les cycles de mouvement de robot réalisables, sachant que $\pi_i, \pi_j \in \Pi$. π_i domine π_j si et seulement si $T(\pi_i) \leq T(\pi_j)$ où $T(\pi_i)$ et $T(\pi_j)$ sont les temps des cycles π_i et π_j respectivement.

Définition 2.3. Un cycle de déplacement de robot $\pi^* \in \Pi$ est dit optimal si $T(\pi^*)$ est inférieur à tout autre $T(\pi_i)$, où $\pi_i \in \Pi$ pour tout i . En outre, $T(\pi^*)$ est considéré comme le temps de cycle optimal si et seulement si π^* est un cycle de déplacement de robot optimal.

Nous utiliserons, Les notations et hypothèses suivantes :

- ε le temps de chargement des machines par le robot (le temps de déchargement des machines par le robot est également ε).
- $\hat{\varepsilon}$ le temps de permutation du robot entre deux pièces ($\hat{\varepsilon} = 2\varepsilon$).

- δ le temps de trajet entre deux machines/tampons consécutifs M_i et M_{i+1} (dans les deux sens) avec $i \in \{0, 1, 2\}$. Comme les tampons d'entrée et de sortie se trouvent au même endroit, le temps de parcours entre M_0 et M_3 est égal à 0.
- p_i , pour $i \in \{1, 2\}$, le temps de traitement sur les machines (dans le cas non équilibré), et p le temps de traitement sur une machine quelconque dans le cas équilibré.
- p'_1 le deuxième temps de traitement de la pièce dans la première machine (dans le cas non équilibré), et p dans le cas équilibré.
- w_i le temps d'attente à la machine i , $i \in \{1, 2\}$, pendant l'exécution de π_j .
- w'_1 le temps d'attente du second passage sur la machine 1 pendant l'exécution de π_j .
- $T(\pi_j)$ temps de cycle moyen à long terme du cycle de déplacement du robot π_j pour produire une pièce.
- Le temps de trajet entre deux machines quelconques M_i et M_j est donné par $\delta_{ij} = \min(|i - j|, m + 1 - |i - j|) \delta$.

3 Résultats et discussions

3.1 Définition des cycles

Lorsque nous considérons la capacité de permutation dans notre problème, nous nous rendons compte qu'il est beaucoup plus compliqué que les autres problèmes qui n'ont pas de capacité de permutation, ce qui entraîne une augmentation significative du nombre de cycles de mouvement du robot ainsi qu'une augmentation significative du nombre de cycles de mouvement du robot réalisables. Il y a 8 cycles dans le problème de cellule robotique réentrante à deux machines avec capacité de permutation. Deux de ces cycles ne sont pas réalisables, comme indiqué dans le tableau 1.

TABLE 1 – Définition de cycles de cellule robotique réentrante à 2 machines

Cycles réalisables	Cycles non réalisables
$\pi_0 = (A_0^+ A_1^+ A_1^- A_0^-)$	$\pi_6 = (A_0^+ A_1^- A_0^- A_1^+)$
$\pi_1 = (A_0^+ A_1^{s+} A_1^- A_0^-)$	$\pi_7 = (A_0^+ A_1^+ A_0^- A_1^-)$
$\pi_2 = (A_0^{s+} A_0^- A_1^- A_1^+)$	
$\pi_3 = (A_0^{s+} A_0^- A_1^+ A_1^-)$	
$\pi_4 = (A_0^{s+} A_0^- A_1^{s+} A_1^-)$	
$\pi_5 = (A_0^+ A_1^{s-} A_1^+ A_0^-)$	

3.2 Cycles du mouvement du robot

1. Cycle π_0

Cas non équilibré : $T(\pi_0) = 4\delta + 8\varepsilon + w_1 + w_2 + w'_1$

On a : $w_1 = p_1$, $w_2 = p_2$ et $w'_1 = p'_1$

$T(\pi_0) = 4\delta + 8\varepsilon + p_1 + p_2 + p'_1$

2. Cycle π_1

Cas non équilibré : $T(\pi_1) = 4\delta + 8\varepsilon + w_1 + w_2 + w'_1$

On a : $w_1 = p_1$, $w_2 = \max\{0, p_2 - (p_1 + p'_1 + 4\delta + 6\varepsilon)\}$ et $w'_1 = p'_1$.

- $T(\pi_1) = 4\delta + 8\varepsilon + p_1 + p'_1 + \max\{0, p_2 - (p_1 + p'_1 + 4\delta + 6\varepsilon)\}$
3. **Cas équilibré** : $T(\pi_1) = 4\delta + 8\varepsilon + 2p$
Cycle π_2
- Cas non équilibré** : $T(\pi_2) = 6\delta + 8\varepsilon + w_1 + w_2 + w'_1$
On a : $w_1 = \max\{0, p_1 - (3\delta + 2\varepsilon + w_2)\}$, $w_2 = \max\{0, p_2 - (4\delta + 4\varepsilon + w'_1)\}$
et $w'_1 = \max\{0, p'_1 - (3\delta + 2\varepsilon)\}$.
 $T(\pi_2) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{0, p_1 - (3\delta + 2\varepsilon), p_2 - (4\delta + 4\varepsilon), p'_1 - (3\delta + 2\varepsilon), p'_1 + p_1 - (6\delta + 4\varepsilon)\}$
4. **Cas équilibré** : $T(\pi_2) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{0, 2p - (6\delta + 4\varepsilon)\}$
Cycle π_3
- Cas non équilibré** : $T(\pi_3) = 6\delta + 8\varepsilon + w_1 + w_2 + w'_1$
On a : $w_1 = \max\{0, p_1 - (2\delta + \varepsilon)\}$, $w_2 = p_2$ et $w'_1 = \max\{0, p'_1 - (2\delta + \varepsilon)\}$.
 $T(\pi_3) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{p_2, p_1 + p_2 - (2\delta + \varepsilon), p'_1 + p_2 - (2\delta + \varepsilon), p_1 + p'_1 + p_2 - (4\delta + 2\varepsilon)\}$
5. **Cas équilibré** : $T(\pi_3) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{p, 3p - (4\delta + 2\varepsilon)\}$
Cycle π_4
- Cas non équilibré** : $T(\pi_4) = 6\delta + 8\varepsilon + w_1 + w_2 + w'_1$
On a : $w_1 = \max\{0, p_1 - (2\delta + \varepsilon)\}$, $w_2 = \max\{0, p_2 - (6\delta + 6\varepsilon + w_1 + w'_1)\}$ et
 $w'_1 = \max\{0, p'_1 - (2\delta + \varepsilon)\}$.
 $T(\pi_4) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{0, p_1 - (2\delta + \varepsilon), p_2 - (6\delta + 6\varepsilon), p'_1 - (2\delta + \varepsilon), p_1 + p'_1 - (4\delta + 2\varepsilon)\}$
6. **Cas équilibré** : $T(\pi_4) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{0, 2p - (4\delta + 2\varepsilon)\}$
Cycle π_5
- Cas non équilibré** : $T(\pi_5) = 6\delta + 8\varepsilon + w_1 + w_2 + w'_1$
On a : $w_1 = \max\{0, p_1 - (2\delta + \varepsilon + w_2)\}$, $w_2 = \max\{0, p_2 - (4\delta + 4\varepsilon + w'_1)\}$ et
 $w'_1 = \max\{0, p'_1 - (2\delta + \varepsilon)\}$.
 $T(\pi_5) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{0, p_1 - (2\delta + \varepsilon), p_2 - (4\delta + 4\varepsilon), p'_1 - (2\delta + \varepsilon), p_1 + p'_1 - (4\delta + 2\varepsilon)\}$
- Cas équilibré** : $T(\pi_5) = 6\delta + 8\varepsilon + \max\{0, 2p - (4\delta + 2\varepsilon)\}$

3.3 régions d'optimalité dans cas équilibré

Théorème 3.1. *Nous avons,*

1. *Le cycle π_1 domine le cycle π_0 .*
2. *Le cycle π_4 domine le cycle π_3 .*

Théorème 3.2. *Nous avons,*

1. *Si $p \leq \delta$ alors π_1 est un cycle optimal à 1 unité.*
2. *Si $\delta < p \leq 2\delta + \varepsilon$ alors π_2 , π_4 et π_5 sont des cycles optimaux à 1 unité.*
3. *Si $2\delta + \varepsilon < p \leq 3\delta + 2\varepsilon$ alors π_2 est un cycle optimal à 1 unité.*
4. *Si $p > 3\delta + 2\varepsilon$ alors π_1 est un cycle optimal à 1 unité.*

3.4 régions d'optimalité dans cas déséquilibré

Théorème 3.3. *Nous avons,*

1. *Le cycle π_1 domine le cycle π_0 .*
2. *Le cycle π_4 domine le cycle π_3 .*

Théorème 3.4. *Si $p_1 + p'_1 > 2\delta$ alors π_2 et π_4 dominent π_1 .*

Théorème 3.5. *Si $p_1 + p'_1 \leq 2\delta$ alors π_1 est un cycle optimal à 1 unité.*

Théorème 3.6. *Si $p_1 + p'_1 > 2\delta$ et si $p_2 \geq 4\delta + 4\epsilon$, $p_2 \geq p_1 + 2\delta + 3\epsilon$, $p_2 \geq p'_1 + 2\delta + 3\epsilon$ et $p_2 \geq p_1 + p'_1 + 2\epsilon$ alors π_4 est un cycle optimal à 1 unité qui domine π_2 , sinon le π_2 est un cycle optimal à 1 unité.*

4 Conclusion

Dans ce résumé on a montré que, dans une cellule robotisée réentrant et équilibrée à deux machines. Pour cela on a montré qu'il existe des 3 cycles d'une unité strictement dominants les 3 cycles restants. Le but maintenant est de d'élargir ces méthodes pour des cellules taille ($m > 2$) pour les pièces identiques du cas déséquilibré.

Références

- [1] Foumani, M., Jenab, K. : Cycle time analysis in reentrant robotic cells with swap ability. International Journal of Production Research, **50**, 22, 6372–6387 (2012).
- [2] Crama, Y., Van De Klundert, J. : Cyclic scheduling of identical parts in a robotic cell. Operations Research, **45**, 6, 952–965 (1997).
- [3] Rajapakshe, T., Dawande, Mi., Sriskandarajah, C : Quantifying the impact of layout on productivity : An analysis from robotic-cell manufacturing. Operations Research, **59**, 2, 440–454 (2011).
- [4] Jung, K.S., Geismar, H.N., Pinedo, M., Sriskandarajah, C. : Approximations to optimal sequences in single-gripper and dual-gripper robotic cells with circular layouts. IIE Transactions **47**, 6, 634–652 (2015).
- [5] Asfahl, C.R : Robots and manufacturing automation. NJohn Wiley & Sons, Inc (1985).

Application de la programmation de but linéaire dans la planification de la production au sein de l'ALFADITEX *

Elhadi Boughani¹, Ouiza Lekadir ², and Djamil Aïssani³

¹LaMos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
scor_lhadi@hotmail.com

²LaMos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
ouiza.lekadir@univ-bejaia.dz

³LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
djamil.aissani@univ-bejaia.dz

Résumé Le travail réalisé dans ce papier vise à donner un moyen d'améliorer la planification de la production au sein de l'entreprise ALFADITEX, basée essentiellement sur les prévisions de ventes. En effets, plusieurs facteurs peuvent rendre, la solution des prévisions de ventes est insuffisante à la satisfaction des objectifs de l'entreprise (plus de profit, contraintes subites de matières premières de stocks, de changement de produits . . .), imposant la nécessité du recours à d'autre outils de modélisation. Par la suite on montrera comment la programmation de buts linéaire peut améliorer la gestion de la planification de la production en optimisant la solution proposée par la prévision des ventes.

Mots clés : Programmation de but ; Programmation multiobjectifs ; Méthodes de prévision ; Séries chronologiques ; Méthode de Box et Jenkins ; Planification de la production.

1 Modélisation et prévision des ventes

Pour le calcul des prévisions des demandes mensuelles futures allant de janvier 2005 à décembre 2005 nous avons appliqué la méthode de Box et Jenkins pour les séries dont l'historique était important. Les série d'historique de taille moyen sont modélisées par le lissage exponentiel. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont résumés dans le tableau suivant, Tapis, FeutreIM37, Mol.Eco, Feutre 180 NI, Coton napp, Mol.Teint, C.gouraya, T.77003, T.84000, O.300/200, O.90200, FT36, Serpil sont les différents produits de l'entreprise ALFADITEX.

* ALgérie FABrication DIvers TEXtiles

† Corresponding Author

TABLE 1 – Résumé des prévisions

Tapis	FeutreIM37	Mol.Eco	Feutre 180 NI	Coton nappé	Mol.Teintheight4884
24089	64126	1116	15991	14529	
6688	23260	64126	1116	15991	14529
5668	23706	64126	1116	15991	14529
6244	23463	64126	1116	15991	14529
5919	23595	64126	1116	15991	14529
6103	23523	64126	1116	15991	14529
5999	23562	64126	1116	15991	14529
6058	23541	64126	1116	15991	14529
6024	23552	64126	1116	15991	14529
6043	23546	64126	1116	15991	14529
6033	23549	64126	1116	15991	14529
6039	23548	64126	1116	15991	14529

TABLE 2 – Résumé des prévisions (suite)

C.gouraya	T.77003	T.84000	O.300/200	O.90/200	FT36	Serpil
5231	7349	16711	34186	29850.63	6241	13856
5093	734b9	17032	34724	29850.63	6241	13856
4955	7349	17353	35262	29850.63	6241	13856
4817	7349	17673	35800	29850.63	6241	13856
4679	7349	17994	36338	29850.63	6241	13856
4541	7349	18315	36875	29850.63	6241	13856
4403	7349	18635	37413	29850.63	6241	13856
4265	7349	18956	37951	29850.63	6241	13856
4127	7349	19277	38489	29850.63	6241	13856
3990	7349	19598	39027	29850.63	6241	13856
3852	7349	19918	39564	29850.63	6241	13856
3714	7349	20239	40102	29850.63	6241	13856

2 Amélioration de la planification par la Programmation de buts linéaire

Pour améliorer le plan de production proposé par les prévisions, on propose de résoudre le programme de programmation de buts linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \text{Max } Z = \sum_{i=1}^P C_i X_i^t, & t \in \{\overline{1,12}\} \setminus \{8\} \\
 \text{goal}(X_i^t = Z_i^t); (Z_i^t = O_i^t); & i = \overline{1,P}; t \in \{\overline{1,12}\} \setminus \{8\} \\
 \text{Sous/contraintes} & \\
 \text{Capacité : } X_i^t \leq K_i^t, & i = \overline{1,P}, t \in \{\overline{1,12}\} \setminus \{8\} \\
 \text{Stock : } S_i^{\min} \leq S_i^t \leq S_i^{\max} & i = \overline{1,P}, t \in \{\overline{1,12}\} \setminus \{8\} \\
 \text{demande : } X_i^t + S_i^t \geq P_i^t, & i = \overline{1,P}, t \in \{\overline{1,12}\} \setminus \{8\} \\
 \text{Demande Août : } S_i^8 \geq P_i^8 & i = \overline{1,P} \\
 X_i^t \geq 0, & i = \overline{1,P}, t \in \{\overline{1,12}\} \setminus \{8\} \\
 S_i^t \geq 0, & i = \overline{1,P}, t \in \{\overline{1,12}\}
 \end{array} \right. \quad (1)$$

X_i^t : La quantité de l'article i à produire pendant la période t , ; S_i^t : La quantité de l'article i que l'on doit avoir en stock à l'instant t ; C_{ij} : Le CA (chiffre d'affaire) de l'article i ; K_i^t : capacité de production de l'article i pour la période t , ; S_i^{\min} : Stock minimum autorisé de l'article i , $i = \overline{1,P}$; S_i^{\max} : Stock maximum autorisé de l'article i , ; P_i^t : La prévision de la demande de l'article i pour la période t

2.1 La fonction objectif

L'objectif pour ce premier modèle est de maximiser le profit global engendré par tous les produits. Elle s'écrit sous la forme : $\text{Max } Z = \sum_{i=1}^P C_i X_i^t, T = \{\overline{1,12}\} \setminus \{8\}$

3 Résultats et discussion

Pour chaque période un modèle est formulé. Pour chaque période nous avons un total de 28 variables (14 sur les articles et les 14 autres sur les stocks) et 28 contraintes (14 sur les capacités mensuelles et les 14 autres sur les demandes minimales prévisionnelles du marché). La résolution s'est fait sur le logiciel MOPEN (Multi Objective Programming ENvelopment), un environnement de plusieurs méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multiobjectifs.

3.1 Application des méthodes de la PB

En prenant en compte les niveaux d'aspiration les objectifs mensuels de production, les poids sont déterminés en ordonnant les buts du plus au moins important en utilisant l'option "Simple valuating methods". Les solutions trouvées en résolvant chaque modèle avec la programmation de compromis sont résumés dans les tableaux suivants : Les résultats de l'application de la programmation de compromis montrent une pleine utilisation des capacités mensuelles de production. Nous allons par la suite utiliser les résultats relatifs aux chiffres d'affaire comme les niveaux d'aspiration des chiffres d'affaire mensuels de l'entreprise. Ainsi nous aurons 15 buts répartis en 06 niveaux de priorité.

1. Le niveau de priorité P_1 est affecté aux produits aux produits de tensions tels que le molleton économique, le molleton teint et la serpillière
2. Le niveau de priorité P_2 est affecté aux produits tapis, feutre IM37, feutre T36 et feutre 180NI ;
3. Le niveau de priorité P_3 est affecté aux produits ouate 300/200 et ouate 90/200.
4. Dans le niveau de priorité P_4 nous avons les produits coton nappé et feutre matelas ;
5. Le niveau de priorité P_5 est réservé aux produits des fils cardés tels que le tissu 84000, tissu 77003 et le couverture gouraya.

TABLE 3 – Résultats mensuelles de la programmation de compromis

	variables	Jan	Fév	Mars	Avr	Mai	Juin
	X_1^i	8982	8165	8982	8165	8982	8165
	X_2^i	36353	33048	36353	33048	36353	33048
	X_3^i	4010	3645	4010	3645	4010	3645
	X_4^i	2406	2187	2406	2187	2406	2187
	X_5^i	90605	82368	90605	82368	90605	82368
	X_6^i	16474	14976	16474	14976	16474	14976
	X_7^i	8237	7488	8237	7488	8237	7488
	X_8^i	16038	14580	16038	14580	16038	14580
	X_9^i	44907	40824	44907	40824	44907	40824
	X_{10}^i	34928	31752	34928	31752	34928	31752
	X_{11}^i	21384	19440	21384	19440	21384	19440
	X_{12}^i	36315	33014	36315	33014	36315	33014
	X_{13}^i	11431	11300	11431	11300	11431	11300
	X_{14}^i	20755	18870	20755	18870	20755	18870
CA (DA)	Z^i	57160700	51964000	57160700	51964000	57160700	51964000

TABLE 4 – Résultats mensuelles de la programmation de compromis (suite)

	variables	Juil	Sept	Oct	Nov	Déc
	X_1^i	8217	7826	8609	7826	8217
	X_2^i	33783	32174	35391	32174	33783
	X_3^i	3653	3478	3826	3478	3653
	X_4^i	1826	1739	1913	1739	1826
	X_5^i	68478	65218	71739	65218	68478
	X_6^i	9130	8696	9565	8696	9130
	X_7^i	4563	4348	4782	4348	4563
	X_8^i	13697	13043	14348	13043	13697
	X_9^i	41087	39130	43044	39130	41087
	X_{10}^i	31956	30435	33478	30435	31956
	X_{11}^i	20089	19130	21043	19130	20089
	X_{12}^i	15340	14608	16070	14608	15340
	X_{13}^i	4566	14347	4783	14347	4566
	X_{14}^i	12052	11480	12626	11480	12052
CA (DA)	Z^i	54056300	51964000	57160700	51964000	54056300

6. Finalement, le niveau de priorité P_6 est pour le chiffre d'affaire mensuel.

Les priorités ainsi que les niveaux d'aspiration définis, nous allons donc appliquer la méthode lexicographique pour dégager un plan de production pour 2005.

3.2 Application de la méthode lexicographique

Le logiciel MOPEN nous offre les choix suivants : • MINMAX si le décideur désire minimiser la déviation maximale des buts ; • WEIGHTED si l'objectif est de minimiser la somme des déviations

ponderées pour chaque niveau de priorité ; ● EXTENDED dans le cas décideur désire minimiser la déviation maximale avec un certain poids et la somme pondérée des déviations pour chaque niveau de priorité.

En utilisant alors la méthode lexicographique, nous trouvons les résultats resumés dans les tableaux suivants (On présentera les résultats du mois de Janvier, pour les autre mois une analyse similaire est fait) :

TABLE 5 – Résultats pour Janvier 2005

variables	Jan	d_i^{1-}	d_i^{1+}	S_i^1
X_1^1	8609	0	0	20866
X_2^1	35391	0	0	43363
X_3^1	3826	0	0	10892
X_4^1	1913	0	0	5160
X_5^1	71739	0	0	69161
X_6^1	9565	0	0	17076
X_7^1	4782	0	0	347
X_8^1	14348	0	0	51143
X_9^1	43044	0	0	65422
X_{10}^1	33478	0	0	44265
X_{11}^1	21043	0	0	1143
X_{12}^1	16070	0	0	2708
X_{13}^1	4783	0	0	2566
X_{14}^1	12626	0	0	1341
Z^1	45188000	11972700	0	
U^1	0.209458			

3.2.1 Interprétation des résultats et analyse sensitive

Les résultats obtenus montrent que tous les buts sur les objectifs de production sont pleinement atteints ($d_i^{1+} = d_i^{1-} = 0$). Ceci peut s'expliquer par le fait que les objectifs de production sont inférieurs aux capacités pratiques des lignes de production. Cependant les buts sur les chiffres d'affaire mensuels (niveau de priorité 6) sont déviés négativement d'un montant de l'ordre de 11.000.000DA.

On a étudié la situation où si la direction de l'entreprise désire diminuer cet écart indésirable tout en maintenant les objectifs mensuels de production, ainsi les futures résultats par exemple pour le mois de janvier en changeant uniquement le niveau de priorité du chiffre d'affaire sont obtenus.

Ces résultats obtenus montrent le caractère conflictuel entre la maximisation du CA et les objectifs de production de l'entreprise Alfaditex. Donc une diminution du niveau de priorité entraîne une diminution du CA mensuel (déviations négativement) et un achèvement des buts de niveau supérieur sont pleinement achevés. La même étude faite pour les autres mois de l'année nous renseigne que pour avoir le profit maximal souhaité il faut augmenter les niveaux d'aspiration jusqu'à leurs capacités pratiques. Cette solution n'est pas souvent acceptée à cause d'un problème de matières premières (déchets textiles et fibres synthétiques). Si maintenant, l'entreprise désire produire exactement les prévisions des demandes. les prévisions seront alors les valeurs d'aspiration des différents modèles. En mettant le CA en priorité 1.

4 Conclusion

On déduit de cette étude qu'avoir un CA maximal et une faible utilisation des capacités des lignes de production sont deux objectifs contradictoires. Grâce à la programmation de but nous avons pu évaluer les écarts entre les réalisations et les buts que l'entreprise s'est fixé. Les résultats nous indiquent que tous les objectifs de production sont atteints avec un dépassement, ce qui veut dire que pour atteindre le but du CA, l'entreprise doit être en pleine capacité. Cette solution n'est pas implantable à cause du manque de déchets textiles sur le territoire national et de la concurrence accrue que connaît actuellement le secteur textile. Pour pallier à ce problème, au lieu de mettre le but du CA au premier niveau de priorité si les décideurs deviennent moins exigeants en plaçant ce but dans le deuxième niveau, alors dans ce cas l'objectif de production des tissus molleton seront atteints (priorité). Le logiciel MOPEN offre également la possibilité de changer à tout moment de niveau d'aspiration ou de relaxer avec un certain pourcentage les buts non achevés. D'un point de vue technique, on peut dire que la programmation de but offre un outil d'analyse précieux pour la résolution des problèmes de décision, quand l'espace des décisions possible est déterminé par un ensemble de contraintes qui influent simultanément sur plusieurs objectifs. Comme l'achèvement de tels multiples objectifs est souvent impossible, la programmation de but crée l'espace de solutions satisfaisant en spécifiant des niveaux d'aspiration.

Références

- [1] COURTOIS Alain., MARTIN-BONNEFOUS Chantal, and PILLET Maurice. Gestion de production. Les éditions d'organisation, 2001.
- [2] Vitoriano B and Romero C. Extended interval goal programming. Journal of the Operational Research Society, 50(1280-1283), 1999.
- [3] ROMERO C. A general structure of achievement function for a goal programming model. European Journal Of Operational Research, 153 :675686, 2004.
- [4] Ignizio JP. Multiobjective mathematical programming via the multiplex method and algorithm. European Journal of Operational Research, 22(338-46), 1985.
- [5] Gass SI. A process for determining priorities weights for large-scale linear goal programmes. Journal of the Operational Research Society, 37(779-85), 1986.

Comparaison des approches PERT et PERT stochastique. Application à un projet de la RTC-Sonatrach de Béjaia

Fouzia Ghellab^{*1}, Djamil Aïssani², Allaoua Melaz³, and Nassim Yahia Cherif³

¹Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, fouzia.ghellab@univ-bejaia.dz

²Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, lamos_bejaia@hotmail.com

³Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria

Résumé La méthode PERT (Project Evaluation and Review Technique) est un outil largement utilisé dans la gestion des projets industriels. Elle permet notamment de déterminer la durée totale d'un projet ou encore les marges de temps dont un chef de projet dispose sur certaines tâches, dans le cas où les durées individuelles de ces tâches sont incertaines. Cette méthode se décline sous plusieurs approches, notamment le PERT stochastique. Dans ce travail, nous avons considéré un projet de construction pris en charge par l'entreprise RTC-Sonatrach de Béjaia qui consiste à réaliser des aménagements divers à la station de compression SC3 du gazoduc 42" Moudjbara (W.Djelfa). Nous avons appliqué la méthode PERT et sa variante PERT stochastique pour voir en pratique ce que chaque méthode peut apporter.

Mots clés : La méthode PERT ; La méthode PERT stochastique ; La gestion des projets

1 Introduction

Les projet de recherche et développement consistent généralement en un nombre de tâches ou d'activités liées les unes aux autres. certaines tâches peuvent être effectuées simultanément, ou ne peuvent commencer qu'après que d'autres soient achevées. Chaque activité prend du temps avant de se terminer et peut nécessiter des ressources diverses [1].

Le développement des méthodes efficaces pour une gestion optimale des projets [2] s'avère indispensable pour toute entreprise, qui souhaite durer dans le temps. Les entreprises algériennes les plus distinguées comme RTC-Sonatrach de Béjaia n'échappent pas à

*Corresponding Author

cette règle. C'est pour cette raison que cette entreprise est engagée sur la voie de l'investissement dans la recherche de nouvelles stratégies de gestion.

Dans ce travail, notre but principal, est de satisfaire les objectifs en optimisant la durée totale du projet, ceci en se basant sur un projet qui consiste à la réalisation des aménagements divers à la station de compression SC3 du gazoduc GG1 42" Moudjbara (W.Djelfa), et ce en utilisant les méthodes PERT [3] et PERT stochastique .

2 Position du problème

Toute entreprise économique est confrontée aux problèmes de réussite de nouveau projet qui dépassent les coûts et les délais et ne satisfont pas les exigences initialement requises. La RTC-Sonatrach de Béjaia a pris en charge de réaliser des aménagements divers à la station de compression SC3 du gazoduc GG1 42" Moudjbara (W. Djelfa). En tant que maître de l'ouvrage, elle souhaite établir des prévisions aux différents paramètres de ce projet, à savoir : délai, ressources, coûts, Le problème est de chercher une méthode efficace d'ordonnement et de planification des tâches d'un projet dans le but d'optimiser la durée totale d'un projet. Pour cela, nous avons établi un planning prévisionnel de réalisation qui prend en considération les points suivant :

- Enoncer clairement le contenu du projet ;
- Les activités qui constituent le projet ;
- Etablir les liens entre les activités, leurs antériorités, leurs durées ;
- Optimiser le délai du projet.

3 Description du problème

Le projet de construction pris en charge par l'entreprise RTC-Sonatrach de Béjaia consiste à réaliser les aménagements divers à la station de compression SC3 du gazoduc GG1 42" Moudjbara (W. Djelfa) doivent porter essentiellement sur les travaux des ouvrages suivants : Poste de garde ; Magasin d'entreposage ; Abri véhicules sécurité ; Deux abri véhicules légers ; Sous-ponte/ bâtiment sécurité ; Voirie et réseaux divers (VRD).

4 Formulation du problème

Ce projet est constitué de 20 activités dont les descriptions et les durées estimées par le maître d'œuvre sont données dans le tableau suivant :

N° de l'activité	Nom de l'activité	Description des activités	Durée(en jours)	Prédécesseurs
1	A	Installation du chantier	10	-
2	B	Terrassement + évacuation	80	1
3	C	Infrastructure	60	2
4	D	Assainissement	20	3
5	E	Dallage	30	2 et 3
6	F	Superstructure	30	4 et 5
7	G	Maçonnerie	10	6
8	H	Electricité	90	7
9	I	Charpente métallique	25	7
10	J	Enduits	20	8
11	K	Revêtements	35	10
12	L	Etanchéité	6	9
13	M	Menuiserie métallique	5	7
14	N	Peinture	20	11,12 et 13
15	O	Menuiserie aluminium	10	14
16	P	Plomberie	12	11 et 14
17	Q	Télécommunication	5	15 et 16
18	R	Climatisation	4	14
19	S	VRD	30	11
20	T	Remise en état des lieux	20	17,18 et 20

Pour certaines activités n'ayant pas de relations d'antériorités strictes, on est obligé de les éclater en sous-activités pour mettre en évidence les relations d'antériorité stricte, et afin de pouvoir tracer un réseau PERT.

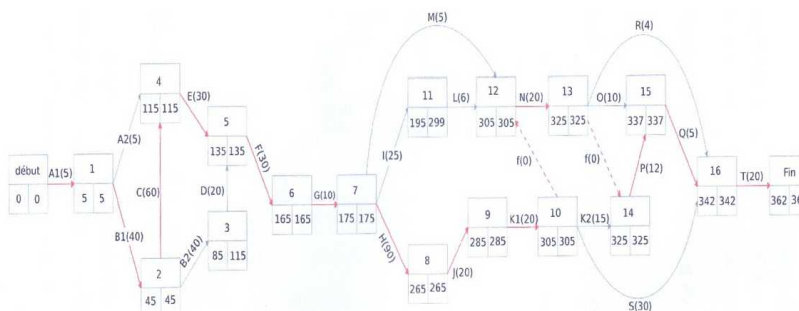
Après l'éclatement de ces tâches, on obtient 23 tâches. Le tableau suivant représente les 23 tâches, leurs durées et leurs prédécesseurs.

N° de l'activité	Nom de l'activité	Description des activités	Durée(en jours)	Prédécesseurs
1	A1	Installation du chantier (1)	5	-
2	A2	Installation du chantier (2)	5	1
3	B1	Terrassement + évacuation (1)	40	1
4	B2	Terrassement + évacuation (2)	40	3
5	C	Infrastructure	60	3
6	D	Assainissement	20	4
7	E	Dallage	30	2 et 5
8	F	Superstructure	30	6 et 7
9	G	Maçonnerie	10	8
10	H	Electricité	90	9
11	I	Charpente métallique	25	9
12	J	Enduits	20	10
13	K1	Revêtements(1)	20	12
14	K2	Revêtements (2)	15	13
15	L	Etanchéité	6	11
16	M	Menuiserie métallique	5	9
17	N	Peinture	20	13,15 et 16
18	O	Menuiserie aluminium	10	17
19	P	Plomberie	12	14 et 17
20	Q	Télécommunication	5	18 et 19
21	R	Climatisation	4	17
22	S	VRD	30	13
23	T	Remise en état des lieux	20	20,21 et 22

5 Résolution du problème

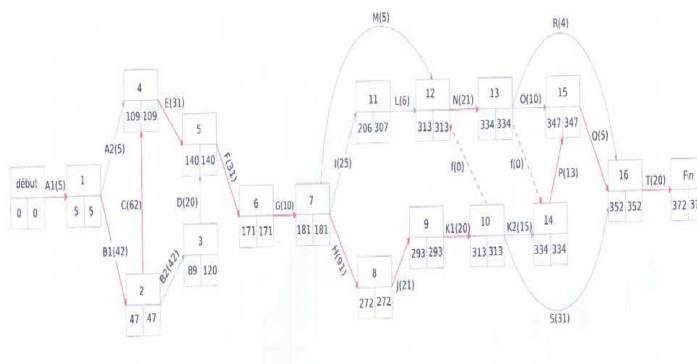
5.1 Minimisation de la durée totale du projet : Application de la méthode PERT

A partir des dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque activité, on introduit le réseau PERT. On constate que la durée minimale de la réalisation de projet est de 362 jours. Les tâches critiques sont : A1, B1, C, E, F, G, H, J, K1, N, P, Q, T. Alors, le chemin critique est l'ensemble des tâches critique (Le chemin présenté en rouge sur le graphe de la figure).



5.2 Application de la méthode PERT stochastique

On calcule les dates de début au plus tôt et au plus tard et avec ces valeurs, on va construire le réseau pour la méthode PERT stochastique où les durées des tâches vont changées.



Intéressons nous maintenant aux temps au plus tôt pour les événements :

Noeud i	Chemin	$E(u_i)$	$Var(u_i)$
0	0	0	0
1	0-1	5	0.44
2	0-1-2	47	7.55
3	0-1-2-3	89	14.66
4	0-1-2-4	109	23.55
5	0-1-2-4-5	140	27.55
6	0-1-2-4-5-6	171	32.99
7	0-1-2-4-5-6-7	181	33.43
8	0-1-2-4-5-6-7-8	272	38.87
9	0-1-2-4-5-6-7-8-9	293	41.64
10	0-1-2-4-5-6-7-8-9-10	313	44.41
11	0-1-2-4-5-6-7-11	206	36.2
12	0-1-2-4-5-6-7-8-9-10-12	313	44.41
13	0-1-2-4-5-6-7-8-9-10-12-13	334	51.52
14	0-1-2-4-5-6-7-8-9-10-12-13-14	334	51.52
15	0-1-2-4-5-6-7-8-9-10-12-13-14-15	347	54.29
16	0-1-2-4-5-6-7-8-9-10-12-13-14-15-16	352	54.4
17	0-1-2-4-5-6-7-8-9-10-12-13-14-15-16-17	372	56.17

Selon le tableau précédent, on constate que la durée minimale de la réalisation du projet est de 372 jours. Les tâches critiques sont : $A1, B1, C, E, F, G, H, J, K1, N, P, Q, T$. Alors, le chemin critique est l'ensemble des tâches critiques.

6 Interprétation des résultats des deux méthodes :

Pour l'ordonnancement des tâches de ce projet, on a utilisé deux méthodes : PERT et PERT stochastique. Après l'application de ces deux méthodes, on est arrivé au résultat suivante :

Avec la méthode PERT, on constate que la durée minimale de la réalisation du projet est de 362 jours. Et les tâches critiques sont : $A1, B1, C, E, F, G, H, J, K1, N, P, Q, T$. Alors, le chemin critique est l'ensemble des tâches crititiques.

Par contre, avec la méthode PERT stochastique, la durée minimale de la réalisation du projet est de 372 jours, soit 10 jours de plus par rapport à la la méthode PERT. Et les tâches critiques sont les mêmes avec la méthode PERT, donc on aura le même chemin critique avec la méthode PERT stochastique.

7 Conclusion

Dans ce travail, nous avons considéré un projet de construction pris en charge par l'entreprise RTC-Sonatrach de Béjaia qui consiste à réaliser des aménagements divers à la station de compression SC3 de gazoduc GG1 42" Moudjbara (W.Djelfa). On a appliqué la méthode PERT et sa variante PERT stochastique pour voir en pratique ce que chaque méthode peut

apporter.

Références

- [1] Moine, J. Y. : Le grande livre de la gestion de projet. Afnor, (2013).
- [2] Koné, O : Nouvelles approches pour la résolution du problème d'ordonnement de projet à moyens limités, Thèse de doctorat en système industriels, Université Paul Sabatier, (2010).
- [3] Baptiste, P, Munier, A : Ordonnement sur machine parallèles avec partage d'opérateurs. Canada, (2015).

Optimisation de la maintenance préventive des équipements informatiques au niveau de l'entreprise NAFTAL Béjaia

Akila Tahir¹, Nassima Rahmi², Salima Kendi , and Djamil Aïssani 

¹Département de Recherche Opérationnelle, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, Algérie. ,
tahirakilaro@gmail.com

²Département de Recherche Opérationnelle, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, Algérie. ,

³Unité de Recherche LaMOS, Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie, Université de Bejaia, Algérie.,
salima.kendi@univ-bejaia.dz

⁴Unité de Recherche LaMOS, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, Algérie. ,
lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, nous avons proposé un plan optimal de maintenance préventive pour les équipements informatiques au niveau de l'entreprise NAFTAL de Béjaia. Dans un premier temps, nous avons étudié la fiabilité de ces derniers. Puis, nous avons adopté une politique de maintenance préventive périodique imparfaite avec réparation minimale à la défaillance. Plus précisément, nous avons déterminé la période optimale entre les révisions générales qui minimise le coût de la maintenance préventive, tout en considérant l'efficacité de cette dernière. Afin d'examiner la possibilité de prolonger la période des révisions générales, nous avons aussi étudié l'impact de l'efficacité de la maintenance sur les équipements.

Mots clés : Optimisation de la Maintenance, Fiabilité des Equipements, Politique de Maintenance, Efficacité de la Maintenance, Révision Générale

1 Introduction

De nos jours, la sûreté de fonctionnement est devenue une préoccupation majeure dans la plupart des domaines industriels. En effet, les risques techniques qui peuvent mettre en cause la fiabilité, la disponibilité ou la sécurité d'un matériel ou d'une installation doivent être maîtrisés. Les systèmes défectueux sont généralement réparés plutôt que remplacés en raison du coût élevé du remplacement (Gan et al., 2022 [2] ; Liu et al., 2022 [3]). La maintenance préventive est fréquemment utilisées pour améliorer la fiabilité des systèmes et réduire les coûts d'exploitation (Liu et Wang, 2021 [1]).

Avec un personnel de plus de 2800 agents, l'entreprise NAFTAL (intégrée dans le groupe

SONATRACH) est le premier distributeur des produits pétroliers en Algérie. Elle contribue à hauteur de 51% de l'énergie finale en fournissant 8 millions de tonnes de produits pétroliers par an sous forme de carburant, (gaz de pétrole liquifié, bitumes et lubrifiant). La branche GPL est créée par la décision N.S.754 du 27.08.2003. Elle est chargée des activités liées au transport, stockage, enfûtage, distribution, promotion et développement des GPL sur tout le territoire national.

Le district GPL de Béjaia dispose d'un nombre considérable d'équipements informatiques. La maintenance de ces derniers devient une nécessité pour l'amélioration de leur fiabilité, la prévention de défaillance et la réduction des coûts de maintenance. Il est intéressant aussi d'établir un plan de maintenance des équipements tout en tenant compte de leur état de fonctionnement. Pour cela le département technique et maintenance du district GPL adopte une politique de maintenance préventive qui consiste à faire subir aux machines des révisions partielles et générales. Une révision est une intervention sur la machine après avoir réalisé un certain nombre d'heures de fonctionnement.

Des études sur la fiabilité et la maintenance des systèmes ont été menées dans le cadre de projets de fin de cycle de master, au sein de différentes entreprises à Béjaia. Nous citons, deux études réalisées au niveau de "l'EPB " (Entreprise Portuaire de Bejaia) : Bouhamou et Oukaour (1998) [6] et Amari et Ouali (2015) [9]. A BMT (Bejaia Mediterranean Terminal), nous citons l'étude de Benkerrou et Bendjoudi (2013) [8]. A l'entreprise MAC-SOUM (Akbou), Chahboune et Hammou (2016) [11] ont étudié la disponibilité des équipements de la chaîne de production. Au niveau de la RTC-Sonatrach Bejaia, on retrouve les travaux de Ouarab et Dadi (2016) [5], Boukhezar et Hammouche (2016) [7], Boutinzar et Azegagh (2018) [10], etc.

L'objectif de notre étude est l'optimisation de la maintenance préventive des équipements informatiques au niveau du district GPL de Béjaia.

2 Position du problème

La connaissance des caractéristiques de fiabilité est essentielle quelque soit le système simple (un équipement) ou complexe. L'usure et le renouvellement des équipements engendrent des coûts qu'on doit gérer d'une manière optimale. Au niveau du district GPL de l'entreprise NAFTAL (de Béjaia), les agents du département technique et maintenance enregistrent un nombre important de pannes des équipements informatiques, cela représente un signe de vieillissement de ces derniers. C'est la raison pour laquelle les agents de maintenance envisagent de faire un renouvellement de ces équipements, mais qu'après avoir bénéficier encore de leurs services. Ainsi, une nouvelle politique de maintenance s'avère nécessaire pour l'optimisation de la période de renouvellement. Dans notre travail nous allons examiner la possibilité de pouvoir la prolonger.

3 Formulation et modélisation du problème

3.1 Les données des durées de vie

L'étude est faite sur un groupe d'ordinateurs ayant les mêmes caractéristiques et qui ont subi un nombre important de pannes durant trois années. Nous avons obtenu un échantillon de durées de vie, de taille $n = 40$. Soit T la variable aléatoire représentant la durée de vie des équipements choisis. Pour la modélisation de la fiabilité de ces derniers, nous espérons que la variable T suit la loi de Weibull à deux paramètres (η et β). Nous avons effectué le test de Kolmogorov-Smirnov avec le logiciel "R" et le résultat renvoie que la variable aléatoire "durée de vie des équipements", suit bien la loi de Weibull de paramètres $\beta = 2.7$ et $\eta = 3131.5$ ($D_{max} < d(40, 0.05)$, $D_{max} = 0.1081$, $d(40, 0.05) = 0.214$).

3.2 Le modèle

En se basant sur la politique de maintenance adoptée par le district, nous avons opté pour la politique de "maintenance préventive périodique imparfaite avec réparation minimale à la défaillance". Cette dernière nous a permis de choisir un modèle d'optimisation adéquat. Ce modèle est celui de Gertsbakh (2000) [4]. Suivant cette politique, l'équipement reçoit juste des maintenances imparfaites.

3.2.1 Construction du modèle

Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes : Les actions de maintenance préventive sont effectuées suivant des périodes programmées à l'avance. Les durées inter-maintenances préventives sont fixées et égales. Le coût de maintenance préventive (révision générale) C_{rg} est le même à chaque intervention. L'effet de chaque action de maintenance préventive (révision générale) est constant, il fait varier le taux de défaillance exponentiellement, d'une quantité égale à e^α . Après K cycles, le système sera renouvelé et un coût C_{rl} sera dépensé. Le coût d'une réparation minimale C_{min} est le même à chaque intervention après défaillance.

On a pour un seul cycle :

$$C(T) = \frac{C_{min}h(T) + C_{rg}}{T} \quad (1)$$

pour $(K - 1)$ cycles :

$$C(T, K) = \frac{C_{min}h(T)(1 + e^\alpha + \dots + e^{\alpha(K-1)}) + (K-1)C_{rg} + C_{rl}}{KT} \quad (2)$$

où : C_{min} : coût de la réparation minimale. C_{rg} : coût de la révision générale. K : nombre de révisions générales avant de renouveler l'équipement. C_{rl} : coût de renouvellement du système. e^α : facteur de dégradation.

4 Optimisation de la périodicité des révisions générales

Le but est de déterminer la période optimale pour faire une révision générale, notée T^* et qui minimise la fonction de coût de maintenance par unité de temps. La fonction objectif à minimiser est la suivante :

$$C(T, K) = \frac{C_{min}h(T)(1 + e^\alpha + \dots + e^{\alpha(K-1)}) + (K-1)C_{rg} + C_{rl}}{KT} \quad (3)$$

Tel que le nombre moyen de défaillances dans un intervalle $[0, T]$ est donné par :

$$h(T) = \int_0^T \lambda(t) dt$$

pour K cycles :

$$h(T, K) = \int_0^T \lambda(t * K) dt$$

Après intégration de $h(T, K)$, on trouve :

$$h(T, K) = \left(\frac{KT}{\eta}\right)^\beta$$

On remplace $h(T, K)$ dans le modèle de coût $C(T, K)$ et on trouve :

$$C(T, K) = \frac{C_{min} \left[\left(\frac{KT}{\eta}\right)^\beta\right] (1 + e^\alpha + e^{2\alpha} + \dots + e^{\alpha(K-1)}) (K-1)C_{rg} + C_{rl}}{KT} \quad (4)$$

D'après Gertsbakh [4], on a :

$$(1 + e^\alpha + e^{2\alpha} + \dots + e^{\alpha(k-1)}) = \frac{e^{K\alpha} - 1}{(e^\alpha - 1)}$$

Alors :

$$C(T, K) = \frac{C_{min} \left[\left(\frac{KT}{\eta}\right)^\beta\right] (e^{K\alpha} - 1) / (e^\alpha - 1) + (K-1)C_{rg} + C_{rl}}{KT} \quad (5)$$

Après dérivation de $C(T, K)$ par rapport à la variable T , on trouve :

$$T^* = \sqrt[\beta]{\frac{(K-1)C_{rg} + C_{rl}}{(\beta-1) \left(C_{min} \left[\left(\frac{K}{\eta}\right)^\beta\right] (e^{K\alpha} - 1) / (e^\alpha - 1)\right)}} \quad (6)$$

L'estimation des coûts de maintenance des ordinateurs s'avère complexe. Lors de l'estimation des coûts, nous nous sommes basés sur les hypothèses : les coûts qui n'ont pas d'incidences significatives sur cette étude sont négligeables, le coût de chaque intervention comprend le coût de la pièce de rechange et le coût de la main-d'oeuvre. Dans le modèle d'optimisation, nous avons supposé que les coûts sont identiques pour chaque intervention. Pour cela, nous allons déterminer un coût minimal pour les maintenances correctives et un coût moyen pour les maintenances préventives.

Après optimisation, la périodicité des révisions générales est $T^* = 3056.7h$, ce qui veut dire que le renouvellement des ordinateurs s'impose quand on atteint 12 cycles, sachant que 12 cycles font $36678h$, ce qui nous donne presque 4 ans.

5 Impact de l'efficacité de la maintenance sur la période de renouvellement des ordinateurs

L'objectif est d'étudier comment l'efficacité de la maintenance influe sur la période de renouvellement des ordinateurs. La méthode utilisée consiste à faire varier le paramètre de l'efficacité de la maintenance préventive α de 5%, 15%, 25%, 55%, 75% et de 80% par rapport à sa valeur initiale, puis calculer les coûts de maintenance par unité de temps et les comparer avec les résultats obtenus dans la partie précédente.

A partir des résultats obtenus, nous remarquons que l'amélioration de l'efficacité des différentes valeurs de α prolonge la période de révision générale des ordinateurs, avec des coûts réduits.

6 Conclusion

L'objectif principal de notre travail est l'optimisation de la maintenance préventive du matériel informatique au sein du district GPL de Béjaia. Ainsi, un plan de maintenance s'appuyant sur la politique de maintenance préventive périodique imparfaite avec réparation minimale à la défaillance, est proposé. Nous rappelons qu'une politique de maintenance optimale est celle qui permet d'améliorer la disponibilité et réduire la probabilité de défaillance au moindre coût.

Grâce aux résultats obtenus, nous avons démontré qu'après l'adaptation d'une politique de maintenance préventive imparfaite avec réparation minimale, on a pu prolonger la période T des révisions générales de $896 h$.

Le renouvellement de notre système sera après 12 cycles, avec un coût de maintenance préventive égal à $940 DA/h$, sachant que 12 cycles correspondent à $36680 h$. Ceci nous donne presque 4 ans.


Afin d'améliorer encore la maintenance, nous avons proposé d'augmenter le paramètre d'efficacité de cette dernière. Grâce aux résultats obtenus, nous avons constaté que la prise en compte de l'amélioration de l'efficacité permet d'augmenter la durée de vie du système.

Références

- [1] P. Liu, G. Wang (2021). Optimal periodic preventive maintenance policies for systems subject to shocks. *Applied Mathematical Modelling*, 93, 101-114.
- [2] S. Gan, Z. Song, L. Zhang (2022). A maintenance strategy based on system reliability considering imperfect corrective maintenance and shocks. *Computers & Industrial Engineering*, 164, 107886.
- [3] J. Liu, X. Zhuang, H. Pang (2022). Reliability and hybrid maintenance modeling for competing failure systems with multistage periods. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 68, 103254.
- [4] I. Gertsbakh (2000). *Reliability theory with applications to preventive maintenance*. Springer, Berlin Allemagne.
- [5] N. Ouarab, S. Dadi, D. Aissani & R. Laggoune (2016). *Analyse de la Fiabilité et Optimisation de la Maintenance Préventive du Systeme de Contrôle d'Accès : Cas de Sonatrach RTC-Béjaïa*. Mémoire de fin de cycle. Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa.
- [6] F. Bouhamou, N. Oukaour, D. Aissani & S. Adjabi(1998). *Analyse de Retour d'Expériences pour l'optimisation de la Maintenance du Parc d'Engin de l'Entreprise Portuaire de Bejaia*, Mémoire d'ingéniorat. Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa.
- [7] F. Boukhezar, S. Hammouche, D. Aissani & S. Boulfekhar (2016). *Etude de fiabilité de la ligne de Fibre Optique Sonatrach (RTC Béjaïa-RTH)*. Mémoire de fin de cycle. Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa.
- [8] L. Benkerrou, CH. Bendjoudi, D. AISSANI & R. Laggoune (2013). *Maintenance Préventive périodique avec réparation minimale. Application aux equipments de manutention de BMT*. Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa.
- [9] N. Amari, TH. Ouali B. Brahmi (2015). *Modélisation et Evaluation des Performances d'un Atelier de Maintenance Corrective au sein de l'E.P.B*. Mémoire de fin de cycle. Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa.
- [10] M. Boutinzar, M. Azegagh & D. Aissani (2018). *Disponibilité et Maintenabilité du réseau anti-incendie du Parc de Stockage RTC Sonatrach Béjaïa*. Mémoire de fin de cycle. Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa.
- [11] S. Chahboune, R Hammou, D. Aissani & A. Touche (2016). *Etude de la fiabilité et de la disponibilité des équipements au niveau de l'entreprise MAC-SOUM*. Mémoire de fin de cycle. Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa.



Analyse des performances du système $M^a/M/1//N$ via les réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG)

Sedda Hakmi¹, Hamza Belkacemi², and Ouiza Lekadir ^{*3}

¹LaMos Research Unit, Economic sciences Faculty, University of Bejaia, Algeria,
Sedda.hakmi@univ-bejaia.dz

²LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
hamza.belkacemi@univ-bejaia.dz

³LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
ouiza.lekadir@univ-bejaia.dz

Résumé

Dans ce travail, nous montrons comment utiliser les réseaux de Petri pour modéliser et évaluer les performances de systèmes d'attente avec arrivées par groupes de taille fixe avec une seule source finie $M^a/M/1//N$. Pour ces systèmes il y'a des résultats analytiques exactes, mais compliqués donc difficiles à exploiter. Ainsi, après une modélisation appropriée en utilisant le formalisme des RdPSG (Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés) qui s'adapte à la structure de ces systèmes, nous avons pu construire le graphe des marquages du modèle qui nous a permis de construire la chaîne de Markov qui lui est associée. A partir de cette chaîne de Markov la distribution stationnaire est calculée et elle nous a permis d'obtenir les indices de performances de ces systèmes étudiés.

Mots clés : Systèmes de files d'attente ; Arrivées par groupes ; Source finie ; Réseaux de Petri généralisés ; Modélisation

1 Introduction

Les files d'attente ont été intégrées dans la modélisation et à l'évaluation des performances de divers systèmes informatiques, réseaux de communication, systèmes de production, etc. Grâce à tous ces développements, la théorie des files d'attente est aujourd'hui largement utilisée et ses applications sont multiples.

Dans les problèmes de file d'attente ordinaires, il est supposé que les clients arrivent par unité à la station, cependant cette hypothèse ne reflète pas toujours la réalité des systèmes d'attente réels où les clients arrivent par groupes, à titre d'exemple on peut citer les lettres

*Corresponding Author

arrivant à un bureau de poste, les navires arrivant à un port en convoi, les personnes allant à un théâtre, un restaurant, etc. Ainsi pour la modélisation de ce genre de systèmes de files d'attente (SFA) en plus de la modélisation classique il a été décidé par convention de prendre en compte la taille des groupes et l'ajouter à la notation de Kendall soit décrite comme une variable aléatoire ou comme un nombre fixe. L'étude des files d'attente avec arrivées par groupes a été introduite par les travaux d'Erlang [2] (1948). Les SFA avec arrivées ou services par groupes ont fait l'objet de nombreux travaux [6, 7].

Notre travail consiste à faire usage du formalisme RdPSG pour modéliser le système $M^a/M/1//N$ et d'évaluer ses performances. La puissance d'expression de ce formalisme nous a permis une modélisation très détaillée et sémantiquement précise qui a réduit la complexité de ce système [1, 5, 3, 4].

2 Modélisation du système $M^a/M/1//N$ par les RdPSG

On considère une file d'attente à source fini et arrivées par groupes à un seul serveur $M^a/M/1//N$, dans laquelle la taille du groupe est fixée à "a". Le nombre de clients dans la source noté N (entier positif) doit être un multiplicateur de "a". Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux λ . Le service des clients se fait suivant la loi exponentielle de paramètre μ . La FIGURE 1 représente une modélisation du système par les RdPSG.

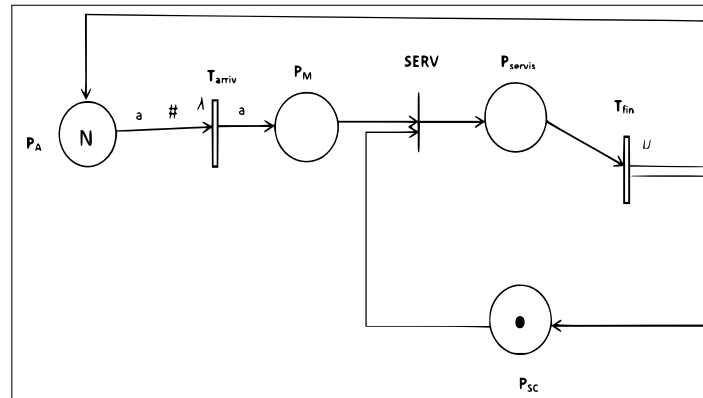


FIGURE 1 – Le RdPSG modélisant le système $M^a/M/1//N$.

Dans ce modèle on a :

- La place P_A contient les clients libres (source), représentés par N jetons. C'est-à-dire, aucun des N clients n'est arrivé dans le système ;
- La place P_M représente la file d'attente ;
- La place P_{servi} représente l'état ' Le serveur est occupé par le client ' ;
- La place P_{SC} représente l'état ' Le serveur est libre ', représenté par un seul jeton.
- Le marquage initial du réseau est alors donné par :

$$M_0 = (M(P_A), M(P_M), M(P_{servi}), M(P_{SC})) = (N, 0, 0, 1).$$

Ceci, signifie que tous les clients sont initialement libres et que le serveur est disponible.
 La transition T_{arriv} n'est franchissable que si le nombre de clients (commandes) dans la source est un multiplicateur de la taille fixe qu'on a appelé "a". Si on a le nombre de jetons N est multiplicateur de "a" dans la place P_A alors le taux de franchissement est égale à $N\lambda$. La condition de dépendance du taux de franchissement est représentée par le symbole # placé à coté de la transition T_{arriv} .
 La transition immédiate $SERV$ sera tirée si la place P_M contient un jeton et la place P_{SC} contient un jeton c'est-à-dire que le serveur est libre, donc un jeton sera enlevé de la place P_M pour donner naissance à un jeton dans la place P_{servi} . Ce jeton représente le serveur qui est occupé par un client.
 La transition T_{fin} représente la fin du service du client, elle ne sera franchie que s'il y'a un jeton dans la place P_{servi} . Dans ce cas un jeton sera déposé dans la place P_A qui représente la condition que le client devient libre, et un autre jeton sera déposé dans la place P_{sc} représentant le serveur qui devient libre.
 Le taux de franchissement de la transition temporisé T_{fin} est égale à μ .

3 Application sur le système $M^2/M/1//12$

Nous considérons la file d'attente $M^3/M/1//12$ où la taille du groupe $a = 3$ et la taille de la source est finie $N = 12$ clients. Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . Le taux de service des clients est μ . Le marquage initial est le suivant :

$$M_0 = (M(P_A), M(P_M), M(P_{servi}), M(P_{SC})) = (12, 0, 0, 1).$$

La figure suivante illustre la chaîne de Markov associée au modèle RdPSG obtenu.

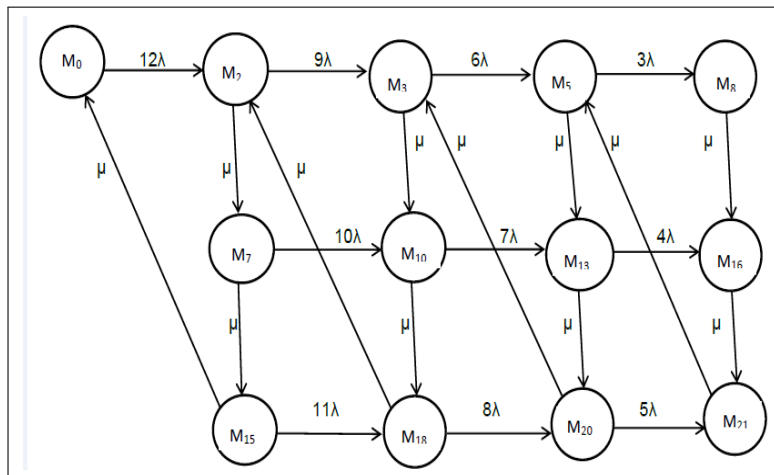


FIGURE 2 – Chaîne de Markov réduite associée à $M^3/M/1//12$.

Le générateur infinitésimal Q de la chaîne de Markov est calculé. De ce générateur Q on a pu calculer la distribution stationnaire π du système, ainsi que ses indices de performances.

Nous pouvons maintenant calculer les indices de performances :

- Le taux moyen effectif des arrivées des clients (η_N) :

$$\eta_N = \sum_{j \in SM_j} \lambda(M_j)\pi_j = 12\lambda\pi_0 + 9\lambda\pi_2 + 6\lambda\pi_3 + 3\lambda\pi_5 + 10\lambda\pi_7 + 7\lambda\pi_{10} + 4\lambda\pi_{13} + 11\lambda\pi_{15} + 8\lambda\pi_{18} + 5\lambda\pi_{20}.$$

- Le nombre moyen de clients dans la file (η_M) :

$$\eta_M = \sum_j M_j(p_M)\pi_j = 2\pi_2 + 5\pi_3 + 8\pi_5 + \pi_7 + \pi_8 + 4\pi_{10} + 7\pi_{13} + 10\pi_{16} + 3\pi_{18} + 5\pi_{20} + 9\pi_{21}.$$

- Le nombre moyen de clients dans le système (η_S) :

$$\eta_S = \sum_j [M_j(P_M) + M_j(P_{servis})]\pi_j.$$

$$= 3\pi_2 + 6\pi_3 + 9\pi_5 + 2\pi_7 + 2\pi_8 + 5\pi_{10} + 8\pi_{13} + \pi_{15} + 11\pi_{16} + 4\pi_{18} + 6\pi_{20} + \pi_{21}.$$

- Le temps moyen d'attente des clients dans la file (W_N) :

$$W_N = \frac{\eta_M}{\eta_N} = \frac{2\pi_2 + 5\pi_3 + 8\pi_5 + \pi_7 + \pi_8 + 4\pi_{10} + 7\pi_{13} + 10\pi_{16} + 3\pi_{18} + 5\pi_{20} + 9\pi_{21}}{12\lambda\pi_0 + 9\lambda\pi_2 + 6\lambda\pi_3 + 3\lambda\pi_5 + 10\lambda\pi_7 + 7\lambda\pi_{10} + 4\lambda\pi_{13} + 11\lambda\pi_{15} + 8\lambda\pi_{18} + 5\lambda\pi_{20}}.$$

- Le temps moyen de réponse (τ_N) :

$$\tau_N = \frac{\eta_S}{\eta_N} = \frac{3\pi_2 + 6\pi_3 + 9\pi_5 + 2\pi_7 + 2\pi_8 + 5\pi_{10} + 8\pi_{13} + \pi_{15} + 11\pi_{16} + 4\pi_{18} + 6\pi_{20} + \pi_{21}}{12\lambda\pi_0 + 9\lambda\pi_2 + 6\lambda\pi_3 + 3\lambda\pi_5 + 10\lambda\pi_7 + 7\lambda\pi_{10} + 4\lambda\pi_{13} + 11\lambda\pi_{15} + 8\lambda\pi_{18} + 5\lambda\pi_{20}}.$$

Nous avons analysé le système $M^a/M/1//N$ avec plusieurs valeurs de N et plusieurs valeurs de "a". Néanmoins, le graphe de la chaîne de Markov associée avec N quelconque a été obtenue d'une manière récursive (voir FIGURE (3)).

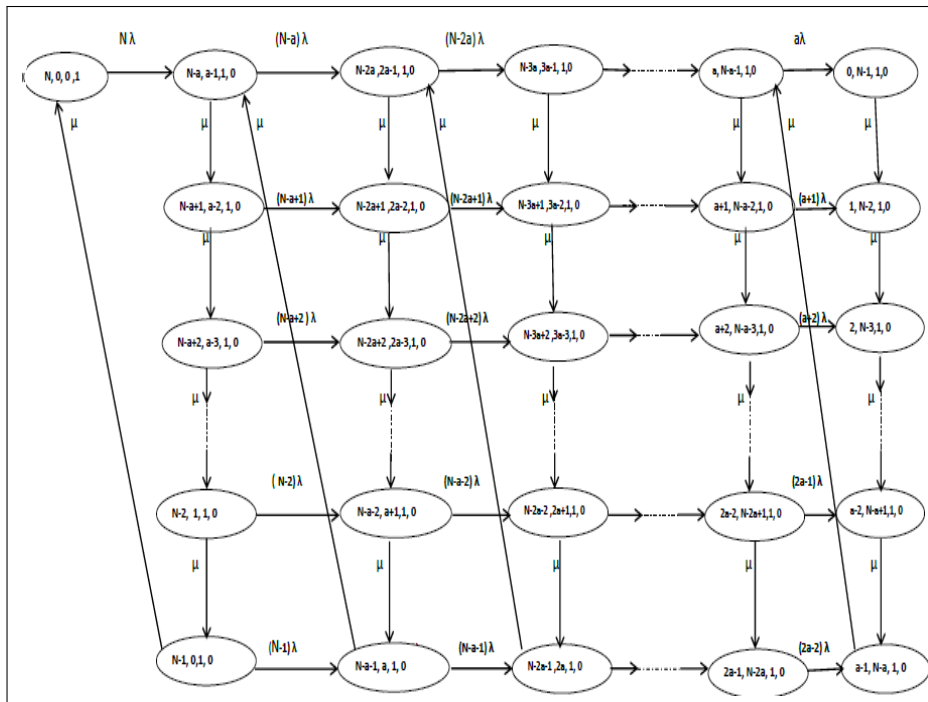


FIGURE 3 – La chaîne de Markov réduite associée à $M^a/M/1//N$.

4 Conclusion


Dans ce travail, nous avons modélisé les systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes à source finie via les RdPSG. Nous avons montré comment construire la chaîne de Markov à partir du graphe des marquages et nous avons donné les formules permettant l'obtention des paramètres de performance de notre modèle étudié. Finalement, nous avons évalué les indices de performances de notre système avec différentes valeurs de N , " a " et de λ et μ . A partir des résultats de cette étude nous prouvons l'efficacité de l'approche proposée.

Références

- [1] Diaz. M. : Petri nets, fundamental models, verification and applications. ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc, 2009.
- [2] Erlang, A. K. : Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. Pst office Electrical Engineer's, 10 :189-197, 1917.
- [3] Hakmi. S and Lekadir. O, and Aissani. D. Application of generalized stochastic petri nets to performance modeling of the RF communication in sensor networks. Booktitle : Verification and Evaluation of Computer and Communication Systems, Springer International Publishing AG, (33-47), 2017.
- [4] Hakmi.S and Lekadir.O, Aïssani.D. : Analysis of Priority Queue with repeated attempts using Generalized Stochastic Petri Nets. Miskolc Mathematical Notes : Vol. 20, No. 2, pp. 925-939 DOI : 10.18514/MMN.2019.2620, 2019.
- [5] Petri.C. A. : Kommunikation mit automaten, Phd dissertatio, Institut für Instrumentelle Mathematik, University of Bonn, West Germany, 65-377, 1962.
- [6] Sharda. I. : A queueing problem with batch arrivals and correlated departures. metrika. Journal of Mathematics Research, 20 :81-92, 1973.
- [7] Borthakur, A. and Medhi, J. : A queueing system with arrivals and service in batches of variable size. Cah. Du. Centre d'études de Rech. Oper, 16 :117-126, 1974.



Une approche de sélection d'attributs et classification pour le trafic du réseau Internet

Amira Bouchama¹, Marya Bouazabia ², and Dalila Boughaci ^{*3}

¹Université des sciences et de la technologie Houari-Boumediène, Alger, Algérie,
amirabcm12@gmail.com

²Université de Bejaia, Bejaia, Algérie,
marya.bouazabia@univ-bejaia.dz

³Université des sciences et de la technologie Houari-Boumediène, Alger, Algérie,
dalila_info@yahoo.fr;dboughaci@usthb.dz

Résumé La classification du trafic Internet est un domaine en plein évolution. Le but de la classification du trafic Internet est de comprendre le type du trafic porté sur Internet en examinant les paquets IP circulants sur le Web. Plusieurs approches de classification ont été étudiées pour le trafic Internet, chacune se base sur un critère bien précis (numéros de ports, charge utile, comportement de l'hôte et fonctionnalités de flux). Dans cet article, nous proposons une approche basée sur les fonctionnalités de flux pour établir une classification du trafic Internet. Nous avons fait recours à deux techniques supervisées de l'apprentissage automatique (Réseau bayésien et Arbres de décision), et dans le but d'améliorer les performances, nous avons procédé par une sélection d'attributs par recherche local. Toutes nos méthodes sont implémentées et validées sur le benchmark NIMS.arff.

Mots clés : Trafic Internet ; Paquets IP ; Flux ; Apprentissage Automatique ; Classification ; Sélection d'attributs ; Recherche Locale ; Benchmark.

1 Introduction

Grâce à ses multiples services, le réseau Internet connaît une utilisation très élevée. Cette augmentation d'utilisation s'avère problématique quand à la maîtrise complète du réseau, d'autant plus avec l'apparition des services de réseau pair à pair (P2P) et des applications temps réel. La fouille de données ou bien Data Mining en propose des méthodes et techniques, telles que la sélection d'attributs et la classification, pour remédier à ce problème. En rapport avec le trafic Internet, les deux techniques citées, collaborent afin d'attribuer chaque paquet circulant à une catégorie prédéfinie, procurant ainsi une qualité de service (QoS) et une surveillance de paquets pour la sécurité. Dans ce travail, on fait recours en premier lieu

*Corresponding Author

à deux algorithmes de classification très utilisés dans la classification du trafic Internet, à savoir le bayésien naïf et le C4.5. Ensuite, afin d'améliorer les performances, nous présentons notre approche basée sur les fonctionnalités de flux qui effectue une sélection d'attributs par recherche local. Nous présentons en derniers, l'implémentation de l'approche proposée ainsi que nos résultats obtenues sur le benchmark NIMS.arff.

2 Algorithmes étudiés

Le bayésien naïf et le C4.5 sont issus de concepts différents, cette dissemblance se reflète sur la classification des données et par conséquent sur les résultats atteints.

2.1 classificateur bayésien naïf (BN)

Le classificateur bayésien naïf est une technique de classification bayésienne basée sur l'application du théorème de Bayes avec des hypothèses naïves qui supposent l'indépendance des caractéristiques appelées aussi attributs. Le modèle construit est un modèle probabiliste conditionnel exprimé par l'équation 1

$$P(C/A_1, \dots, A_n) = \frac{P(C) \prod_{i=1}^n P(A_i/C)}{P(A_1, \dots, A_n)} \quad (1)$$

Ce modèle correspond au calcul de la probabilité pour qu'un objet ait comme classe C en fonction de ses attributs A_1, \dots, A_n . $P(C/A_1, \dots, A_n)$ appelé évidence est donné par l'équation 2.

$$P(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^k P(C_i) P(A_1, \dots, A_n/C_i) \quad (2)$$

Où k indique le nombre de classes.

Afin de déterminer la classe d'un objet, les probabilités de chaque classe en fonction des attributs de cet objet sont calculées et la plus grande est considérée (règle du maximum a posteriori MAP). La Table 1, présente les avantages et les inconvénients du classifieur BN.

Avantages	Inconvénients
Simple et facile à implémenter	L'attribut cible ne peut pas être numérique
Ne demande pas d'avoir des informations sur les attributs pour classifier	L'hypothèse de distribution normale des valeurs des attributs numériques est difficile à vérifier car le fait que les valeurs observées parmi les exemples d'apprentissage soient ou non normalement distribuées n'implique pas que la valeur de l'attribut le soit vraiment [1]
Rapide, même avec un ensemble large de données	Selon l'étude [2], le bayésien naïf donne de meilleures performances dans deux cas : une forte indépendance entre les attributs ou le contraire, une forte dépendance entre eux. Or entre ces deux extrémités, le classificateur est moins performant
Besoin de moins de données d'entraînement	

TABLE 1 – Avantages et Inconvénients du BN

2.2 C4.5

L'algorithme C4.5 tel que ses prédécesseurs, construit un modèle graphique sous forme d'arbre où les nœuds, branches et feuilles représentent respectivement les attributs, va-

leurs de l'attribut et classes. Durant la phase de construction, la sélection d'attribut pour chaque nœud est mesurée par une valeur appelé rapport de gain, ce dernier est calculé en fonction d'autres mesures comme l'entropie et le gain d'information. Les avantages et les inconvénients du C4.5 sont donnés par la Table 2.

Avantages	Inconvénients
Le modèle créé est simple et facile à interpréter	La complexité augmente avec l'augmentation de classes
Il manipule les attributs catégoriques et numériques	Il reconstruit le modèle en introduisant de nouvelles données
Il manipule les valeurs d'attributs manquantes	Moins rapide comparant à d'autres classificateurs à cause du choix de l'attribut et l'élagage
Il effectue l'élagage de l'arbre une fois créé	L'attribut cible ne peut pas être numérique
	Certaines branches sont vides à cause des nœuds qui ont zéro valeur ou proche de zéro valeur, ce qui rend par conséquent l'arbre plus grand et plus complexe

TABLE 2 – Avantages et Inconvénients du C4.5

2.3 Bayésien Naïf et C4.5 pour le trafic Internet

Plusieurs études ont fait recours à ces derniers pour la classification du trafic Internet. Le C4.5 triomphe avec un taux de succès dépassant 95%, le BN quand à lui, atteint un taux de succès d'environ 65% pouvant être amélioré avec une sélection d'attributs [4, 5, 6].

3 Approche proposée

Pour la majorité des algorithmes d'apprentissage, la dimensionnalité est un facteur qui peut nuire à leurs compétences (coût, complexité et performance). Dans ce cas, la sélection d'attributs s'avère efficace. La sélection d'attributs (voir la figure 1) est une opération qui consiste à sélectionner un sous ensemble d'attributs S depuis un ensemble d'attributs de départ A de manière à améliorer les résultats de la classification [7, 8].

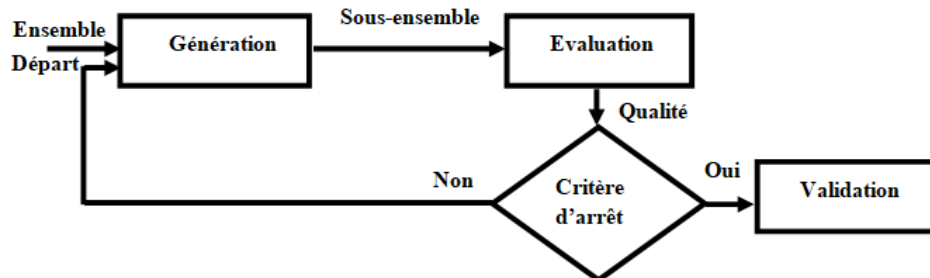


FIGURE 1 – Processus de sélection d'attributs[9]

3.1 Définition du problème

Nous définissons notre problème comme suit :

- X l'ensemble d'apprentissage.
- C un classificateur.
- *Evaluer* une fonction d'évaluation dont les arguments sont un ensemble d'attributs et un classificateur.
- *Accuracy* la fonction objectif mesurant la qualité d'un modèle S . Elle calcule le pourcentage de prédictions correctes.

Notre approche consiste à chercher une solution S_{locale} en partant d'une solution initiale S_{init} comprenant tous les attributs de l'ensemble X initialement, tel que :

$$\begin{aligned} & Evaluer(S_{locale}, C), Evaluer(S_{init}, C), Accuracy(S_{locale}) > Accuracy(S_{init}) \\ & Et \quad \forall S \in V(S_{init}) \quad Evaluer(S, C), Accuracy(S_{locale}, C) > Accuracy(S, C) \end{aligned}$$

$V(S)$: représente le voisinage de la solution S .

3.2 Méthodologie

Notre algorithme (voir Algorithme 1 3.2) propose une démarche de sélection d'attributs ayant les caractéristiques suivantes :

1. Procédure de génération : procédure heuristique backward.
2. Fonction d'évaluation : algorithme d'apprentissage supervisé (le BN ou C4.5)
3. Fonction objectif : taux de succès de classification.
4. Critère d'arrêt : atteinte d'un optimum local.
5. Procédure de validation : classifier avec le BN ou avec le C4.5.
6. Procédure de recherche locale : Hill-Climbing.

Algorithm 1 Sélection d'attributs par recherche locale

Require: S_{init} : solution initiale ; C : le classificateur utilisé

Ensure: S_{locale} : solution retournée par l'algorithme

```
1: Stop ← Faux
2: repeat
3:   Evaluer( $S_{init}, C$ )
4:    $S_{list}$  ← Voisinage( $S$ )
5:   for  $Sol$  in  $S_{list}$  do
6:     Evaluer( $Sol, C$ )
7:   end for
8:    $S_l$  ← getSolutionMaxAccuracy( $S_{list}$ )
9:   if  $S_l.accuracy > S_{init}.accuracy$  then
10:     $S_{init}$  ←  $S_l$ 
11:   else
12:    Stop ← Vrai
13:   end if
14: until Stop == Vrai
15: return  $S_{locale}$  ←  $S_{init}$ 
```

Pour l'étape de validation, nous avons pensé à plusieurs combinaisons de manière à effectuer la sélection d'attributs avec un classificateur C_1 (BN ou C4.5) et valider l'ensemble sélectionné avec un classificateur C_2 (BN ou C4.5), notant que C_1 peut être le même classificateur que C_2 .

4 Implémentation et résultats numériques

Dans cette section, nous présentons d'abord le benchmark NIMS.arff, puis nous exposons les différents résultats obtenus par notre approche.

4.1 NIMS

L'ensemble de données NIMS est téléchargé depuis le site [10]. Il est étiqueté par *AllApplicationsOverSSHLabeldTraffic*. NIMS contient 23 attributs (22 attributs numériques et l'attribut cible) caractérisant les flux transportés, et un total de 713851 instances. Nous avons utilisé 10% seulement du dataset en gardant 10% d'instances de chaque classe, au total donc 71385 instances.

4.2 Implémentation

Nous avons développé une api en JAVA afin de mettre en œuvre l'approche proposée et classifier l'ensemble des données avec les deux classificateurs abordés en déployant la bibliothèque WEKA. Notre application permet éventuellement d'analyser, modifier, visualiser sous forme de graphes n'importe quels ensembles de données en format arff ou csv.

4.3 Résultats numériques

Afin de valider notre approche, nous avons utilisé deux méthodes différentes pour le test : le pourcentage split à 66% et la validation croisée à 10 folds. Dans la Table 3, nous présentons les résultats de la sélection d'attributs de l'approche, et dans la Table 4, nous présentons les différents taux de succès (%) obtenues lors de la classification des données NIMS sans et avec l'approche.

Sélection(méthode/fonction objectif)		Attributs supprimés	Attributs restants
Split 66%	BN	16	6
	C4.5	2	20
CV 10 Folds	BN	14	8
	C4.5	5	17

TABLE 3 – Résultats de la sélection d'attributs

Méthodes test	Split 66%			CV 10 folds		
Sélection d'attributs (Fonction Objectif)	Aucun	BN	C4.5	Aucun	BN	C4.5
Validation BN	66.5	94.24	38.97	70.89	93.76	70.68
Validation C4.5	98.17	97.67	98.87	99.95	99.94	99.96

TABLE 4 – Résultats de la classification

Selon les différents résultats, nous pouvons dire que :

- Le BN est moins performant que le C4.5.
- Les attributs supprimés lors de la sélection en utilisant chaque classificateur et selon chaque méthode de test ne sont pas les mêmes.
- Lorsque nous utilisons le même classificateur dans les deux phases (sélection et validation), nous constatons une amélioration en particulier pour le BN.
- Par contre, nous avons constaté une baisse de taux de succès en combinant les deux classificateurs, notamment le cas de la sélection avec le C4.5 et la classification avec le BN en utilisant le Split 66%, qui a donné un résultat très faible 38.97%.

5 Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié deux techniques de classification supervisée (BN & C4.5) et avons proposé une approche visant à améliorer leurs résultats de classification du trafic Internet. Notre approche prouve que la sélection d'attributs joue un rôle très important dans l'amélioration des résultats d'un classificateur. Nous avons conclu de ce travail, que certains attributs peuvent être importants pour un classificateur mais moins importants pour un autre et que certains classificateurs ne sont pas adaptés l'un pour l'autre, il faut donc faire attention lors de l'hybridation. Comme perspectives, on envisage d'aborder d'autres approches méta-heuristiques pour la sélection d'attributs, comme les algorithmes évolutionnaires ainsi que d'exploiter des modèles de deep learning pour faire la classification.

Références

- [1] Ph. Preux , "Fouilles de données Notes de cours", Université de Lille 3, page. 18–60, 26 Mai 2011.
- [2] Thomas J. Watson Research Center P.O. Box 218, "An empirical study of the naïve Bayes classifier", Irina Rish, IBM Research Division Yorktown Height, NY 10598, 2 November 2001.
- [3] Mohamed M. Mazid, A. B. M. Shawkat Ali, Kevin S. Tickle, "Improved C4.5 algorithm for rule-based classification ", AIKED'10 Proceedings of the 9th WSEAS international conference on Artificial intelligence, knowledge engineering and databases, page 296-301, 20-22 February 2010.
- [4] Pramitha Perera, Yu-Chu Tian, Colin Fidge, Wayne Kelly, "A comparison of Supervised Machine Learning Algorithms for Classification of Communications Network Traffic", International Conference on Neural Information Processing ICONIP 2017 : Livre "Neural Information Processing", page 445-454.
- [5] Andrew W. Moore, Denis Zuevy, "Internet Traffic Classification using Bayesian Analysis Techniques", Université de Cambridge, in the Proceeding of the ACM SIGMETRICS, Banff, Canada, Join 2005.
- [6] Riyad Alshammari, A. Nur Zincir-Heywood, "An investigation on the identification of VoIP traffic : Case study on Gtalk and Skype", International Conference on Network and Service Management 2010.
- [7] Dalila Boughaci, Abdullah Ash-shuayree Alkhaldeh : Three local search-based methods for feature selection in credit scoring, Vietnam. J. Comput. Sci. 5(2) : 107-121 (2018).
- [8] Abdelouahab Laachemi, Dalila Boughaci : Improved machine learning classifiers combined with a stochastic local search for Web services classification. Intell. Decis. Technol. 14(4) : 581-609 (2020)
- [9] Dash. M. and Liu, H, "Feature selection for classification", Intelligent Data Analysis, vol. 1, page. 131-156, 1997.
- [10] Riyad Alshammari Download Data Set, <https://web.cs.dal.ca/riyad/Site/Download.html>.
- [11] Riyad Alshammari, A. Nur Zincir-Heywood, Abdel Aziz Farrag, "Performance Comparison of Four Rule Sets : An Exemple for Encrypted Traffic Classification", Faculty of Computer Science, Dalhousie University 6050 University Avenue Halifax, NS, Canada, published in Word Congress on Privacy, Security, Trust and the Management of e-Business 2009.



Modélisation et prévision de la pluviométrie. Tranfert des eaux Barrage Béni Haroun

Fatima Zoghbi¹, Sarra Amira², Yasmina Ziane^{*3}, and Djamil Aïssani^{id4}

^{1, 2}Département de Recherche Opérationnelle, Faculté des Sciences Exactes, Université A. Mira Bejaia, Algeria.,

^{3, 4}Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, yasmina-ziane@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, nous proposons de réaliser une étude statistique sur le barrage Béni Haroun, et une étude de prévision sur la pluviométrie de l'année 2016 par la méthode de Box et Jenkins. L'objectif de ce travail, est de déterminer le nombre de wilaya que le barrage peut alimenter en plus des wilayas déjà alimentées. D'après l'étude de prévision réalisée, nous avons déduit que le barrage peut alimenter cinq wilayas en eau potable et deux autres wilayas en eau d'irrigation.

Mots clés : Alimentation en eau ; Barrage Béni Haroun ; Méthode Box et Jenkins ; Prévision.

1 Introduction

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation des changements climatiques liés aux quantités pluviométriques obtenues en millimètres par mois, sur la période allant de l'année 2010 jusqu'à l'année 2015 du barrage Béni Haroun [1]. Sur toute cette période le barrage Béni Haroun alimente deux régions pour l'irrigation et deux wilayas en eau potable et il est prévu d'alimenter trois autres wilayas.

L'objectif du travail, est de répondre à une des problématiques rencontrée au niveau de ce barrage qui est : "est-ce que les apports pluviométriques peuvent compenser les quantités transférées". Une étude de prévision statistique s'impose pour répondre aux besoins du barrage. Nous avons réaliser une modélisation statistique des données climatologiques obtenues au sein du barrage de Béni Haroun. Nous avons appliqué la méthode de prévision, Box et Jenkins avec le logiciel R [2]. Des prévisions des quantités pluviométriques en millimètres sur une durée de douze mois et de six ans ont été déduites.

*Corresponding Author

2 Modélisation statistique des données de la pluviométrie

2.1 Collecte des données

Les données proviennent des annuaires statistiques établis par le service d'exploitation de la direction du barrage de Béni Haroun, où nous nous sommes intéressés aux données concernant la climatologie : la pluviométrie par mois, données par le tableau 1.

TABLE 1 – Les données de la pluviométrie en millimètres

Mois \ Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Janvier	96	21.4	52.5	112	69	195
Février	47.5	160	197.5	180	59	192
Mars	56.5	38	40.5	69	253	98
Avril	34.6	60	93.5	30	10	4.5
Mai	81	1.3	6.5	39	24.5	26.6
Juin	22	00	10.5	3.5	21	3
Juillet	2.5	00	2	3.5	00	00
Août	3	00	4	26.5	00	17.5
Septembre	33	25	49	27	0.5	38
Octobre	74	89	9.5	54.5	5.5	82.5
Novembre	100	57	35	248.5	63	82.5
Décembre	61.1	99	55.5	67.5	202	0.5

2.2 Application de la méthode de Box et Jenkins

Dans cette section, nous effectuons une analyse préliminaire qui va permettre de visualiser le corrélogramme et le corrélogramme partiel de la série originale présenté par la figure 3. Le graphe de l'autocorrélation présente une décroissance lente tandis que l'autocorrélation partielle apparaît tronquée, cela confirme la non stationnarité de notre série (figure 1).

L'examen des deux graphes de la figure 1, confirme l'existence d'une tendance croissante et une composante saisonnière. Alors, il est nécessaire de différencier la série originale avec une différenciation d'ordre 12 pour éliminer cette saisonnalité. La figure 2 représente la série après la différenciation nécessaire.

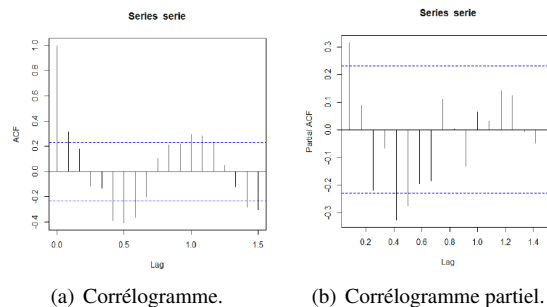


FIGURE 1 – Corrélogramme et Corrélogramme partiel de la série originale.

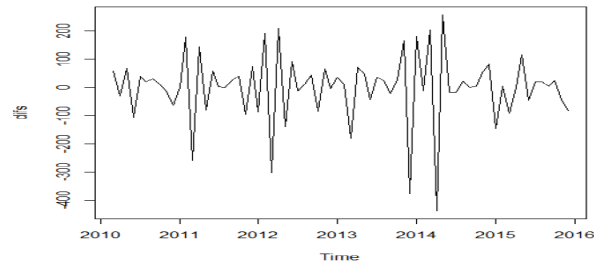


FIGURE 2 – Série après la différenciation

a) Identification du modèle

D’après le graphe de la série originale (Figure 3 (b)), on constate que cette série est sujette à une saisonnalité d’ordre 12 (12 mois) et une tendance croissante linéairement. Donc, le modèle adéquat est SARIMA(p, d, q)(P, D, Q) $_{s=12}$. En appliquant à la série originale un filtre ordinaire d’ordre 1 ($d = 1$) et un filtre saisonnier d’ordre 1 ($D = 1$), on a obtenu une série sans tendance ni saisonnalité. Nous avons choisi le modèle SARIMA(5, 1, 2)(0, 1, 1) $_{12}$.

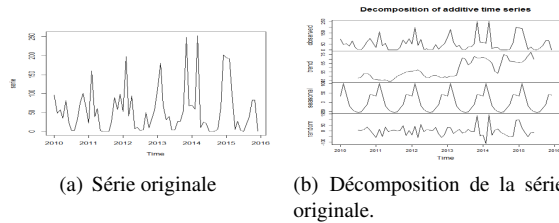


FIGURE 3 – Série originale et sa décomposition.

b) Estimation des paramètres du modèle

Après l’ajustement, les estimateurs et les écarts types des paramètres du modèle sont donnés par le tableau ci-dessous :

	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\phi}_3$	$\hat{\phi}_4$	$\hat{\phi}_5$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_s$
Estimateurs	0.8081	-0.4970	-0.6295	0.04411	-0.9210	0.9982	-1.0000
Écart-type	0.1813	0.1668	0.1649	0.1738	0.1538	0.0933	0.1648

D’après ces résultats, on peut remarquer que les estimateurs vérifient les conditions de stationnarité ($|\hat{\phi}| < 1$, $|\hat{\theta}| < 1$ et $|\hat{\theta}_s| < 1$) et d’inversibilité. Le modèle s’écrit :

$$(1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \hat{\phi}_3 B^3 - \hat{\phi}_4 B^4 - \hat{\phi}_5 B^5)(1 - B)(1 - B^{12})y_t = (1 - \hat{\theta} B)(1 - \hat{\theta}_s B^{12})\epsilon_t.$$

Alors :

$$(1 - 0.8081B - 0.3970B^2 - 0.6295B^3 - 0.4411B^4 - 0.9210B^5)(1 - B)(1 - B^{12})y_t = (1 - 0.9982B)(1 - B^{12})\epsilon_t.$$

c) Validation du modèle

Tests sur les coefficients du modèle. La valeur critique lue sur la table de Student est $T(72, 0.025) = 2,39$. Tester :

$$H_0 : \hat{\phi}_i = 0 \text{ contre } H_1 : \hat{\phi}_i \neq 0$$

Ce test est basé sur la statistique : $t_i = \frac{|\hat{\phi}_i|}{\hat{\sigma}(\hat{\phi}_i)} \curvearrowright t_{(n-7, \frac{\alpha}{2})}$ et $t_i = \frac{|\hat{\theta}|}{\hat{\sigma}(\hat{\theta})} \curvearrowright t_{(n-7, \frac{\alpha}{2})}$. Si

$t_i = \frac{|\hat{\phi}_i|}{\hat{\sigma}(\hat{\phi}_i)} > T(72, 0.025) = 2,39$, alors l'hypothèse H_0 sera rejetée.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

t_i	4.45	2.97	3.81	2.53	5.98	10.69	6.06
Décision	Rejeter H_0	Rejeter H_0	Rejeter H_0	Rejeter H_0	Rejeter H_0	Rejeter H_0	Rejeter H_0

Toutes les hypothèses H_0 des paramètres estimés sont rejetées, alors les estimateurs des paramètres $\hat{\phi}_i$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta}_s$ sont significativement différents de zéro.

d) Examen des résidus

Test sur les résidus : ce test est basé sur la statistique suivante :

$$Q = n(n+2) \sum_{i=1}^M \frac{\rho_i^2}{n-i} \curvearrowright \chi_{M-k}^2$$

Tester :

$$H_0 : \rho_i = 0, i = \overline{1, M} \text{ contre } H_1 : \exists i \in \overline{1, M}, \rho_i \neq 0$$

où :

ρ_i : désignent les coefficients d'autocorrélations théoriques,

M : partie entière de $\min(\frac{n}{2}, 3\sqrt{n})$, alors $M = 25$.

La valeur empirique de la statistique de Box et Ljung, $Q^* = 13.6550$. Au niveau de signification $\alpha = 0.05$, la valeur critique de la loi de khi-deux est :

$$\chi_{M-k}^2(\alpha) = \chi_{25-7}^2(0.05) = 28.8693.$$

Comme $Q^* = 13.6550 < \chi_{18}^2(0.05) = 28.8693$, alors on ne rejette pas l'hypothèse H_0 , par conséquent les résidus forment un bruit blanc. Le corrélogramme et le corrélogramme partiel des résidus nous montrent clairement que tous les pics sont à l'intérieur de l'enveloppe voir la figure 4 .

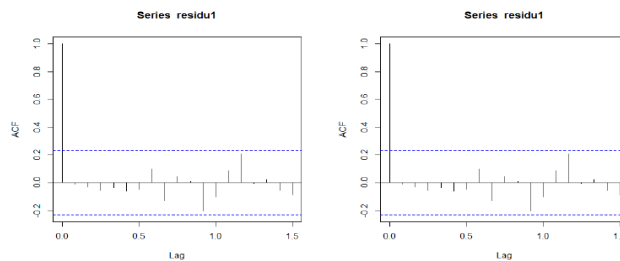


FIGURE 4 – Corrélogramme et corrélogramme partiel des résidus

e) Prédiction

Les prévisions obtenues selon le modèle SARIMA(5, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂ sont données par le tableau 2.2 et représentées par la figure 5

Mois	Valeur - prévue	Mois	Valeur - prévue
Janvier	103.50	Juillet	17.09
Février	173.01	Août	16.86
Mars	134.82	Septembre	44.47
Avril	42.81	Octobre	61.58
Mai	42.77	Novembre	115.42
Juin	14.26	Décembre	93.48

TABLE 2 – Prévisions par la méthode Box et Jenkins

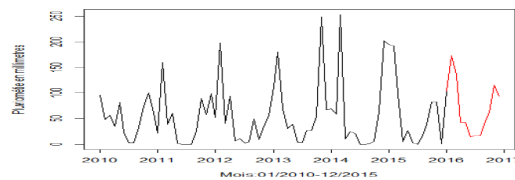


FIGURE 5 – Série originale et sa prévision

3 Nombre de wilayas que le barrage Béni Haroun peut alimenter

Pour répondre à l'objectif principal qui est, combien de wilayas peuvent être alimentées ? on a besoin de certaines informations.

- La quantité d'eau actuelle dans le barrage de Béni Haroun est 1 milliard m³,
- La quantité d'eau qu'il faut garder dans le barrage, afin d'éviter la sécheresse,
- Le besoin de chaque wilaya en quantité d'eau annuelle.

Le barrage doit alimenter cinq Wilayas en eau potable (AEP) et deux régions pour l'irrigation pour cette année. Alors les besoins en eau de ces wilayas ont été déjà récupérées, elles sont présentées par les valeurs données dans les tableaux suivants :

Qte AEP / Wilaya	Constantine	Mila	Batna	Khenchla	Oum Elbouaghi
AEP	108.24	47.5	93.10	26	21.3

TABLE 3 – Besoins en quantités d'AEP des cinq wilayas.

Qte irrigation / Wilaya	Téleghma	chemora
Eau d'irrigation	44	89.50

TABLE 4 – Besoin en quantités d'eau d'irrigation.

Alors la quantité d'eau qui sera transférée est :

$$\begin{aligned} QDt_{AEP} &= \sum_{j=1}^5 BQD_j = BQD_{Constantine} + BQD_{Mila} + BQD_{Batna} + BQD_{Khenchla} + BQD_{Oumelbouaghi} \\ &= 108.24 + 47.5 + 93.10 + 26 + 21.3 = 296.14 \text{ H m}^3. \end{aligned}$$

et

$$QDt_{irri} = \sum_{j=1}^2 BQD_j = BQD_{Telegma} + BQD_{Chemora} = 44 + 89.5 = 133.5 \text{ H m}^3.$$

telle que :

QDt_{AEP} : quantité d'eau potable transférée et QDt_{irri} : quantité d'eau d'irrigation transférée,

BQD : besoin en quantité d'eau potable. Alors la quantité d'eau totale transférée est :

$$QDT = QDt_{AEP} + QDt_{irri} = 296.14 + 133.5 = 429.64 \text{ H m}^3.$$

La quantité d'eau qui doit toujours être présente au barrage est de volume équivalent à la cote 172 m VTM (volume de la tranche morte) est 242 H m^3 , sachant que la quantité initiale dans le barrage (QDB_i) est de 1 milliard m^3 . Cependant le volume d'eau restant dans le barrage sera :

$$QDB_f = QDB_i - (VTM + QDT) = 1000 - 242 - 429.64 = 328.36 \text{ H m}^3.$$

On remarque que le barrage contient une quantité qui permet d'alimenter un nombre de wilayas inférieur au nombre de wilayas déjà alimenté, ou bien prévu d'être alimenté ; que ce soit en eau potable ou pour l'irrigation des régions selon leurs besoins, mais en prenant toujours en compte la quantité d'eau qui s'évapore, ainsi que le niveau minimal d'eau dans le barrage.

4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons réalisé une étude sur le barrage Béni Hahoun, où nous sommes intéressés au nombre de wilayas que ce dernier peut alimenter en plus des wilayas déjà alimentées (Mila et Constantine). Ce travail, est basé sur une étude de prévision de la pluviométrie de l'année 2016, par les deux méthodes lissage exponentiel et Box et Jenkins. Les résultats obtenus montre que le barrage Béni Haroun peut alimenter cinq wilayas (Constantine, Mila, Batna, Khenchla et Oum Elbouaghi) en eau potable et deux wilayas en eau d'irrigation (Télegma et chemora), tout en gardant une quantité d'eau dans le barrage qui peut alimenter un nombre de wilayas inférieur à cinq.

Références

- [1] Mebarki, A., Benabbas, C., Grecu, F. : Le système «Béni-Haroun» (Oued Kébir-Rhumel, Algérie) : aménagements hydrauliques et contraintes morpho-géologiques. Analele Universitatii Bucuresti : Geografie, **57**, 37-51.
- [2] Adjabi, S. : Cours méthode satatistique de la prévision Recherche Opérationnelle. Université A. Mira de Béjaia.

Problèmes autour de la localisation dans les supply chains: transport, clustering, jeux et métaheuristiques

Salima Kendi ¹, Kahina Bouchama ², and Mohammed Said Radjef ³

¹Unité de Recherche LaMOS, Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie, Université de Bejaia, Algérie.,
salima.kendi@univ-bejaia.dz

²Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, Algerie,
kahina.bouchama@gmail.com

³Unité de Recherche LaMOS, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, Algerie,
mohammedsaid.radjef@univ-bejaia.dz

Résumé Une chaîne logistique, dite aussi "supply chain", correspond aux différentes étapes liées à la chaîne d'approvisionnement, de l'achat des matières premières à la livraison d'un produit ou service au client. Elle représente tous les intervenants oeuvrant à garantir et optimiser la production. Dans ce travail, nous allons nous intéresser à un ensemble de modèles et d'approches issus de la RO et de l'IA qui peuvent être impliquées dans la gestion et l'optimisation de la supply chain. L'objectif est de mettre en évidence l'intérêt de telles applications tout en mettant l'accent sur les éventuelles interactions qui peuvent avoir lieu.

Mots clés : Supply chain, localisation, routage, clustering, théorie des jeux, métaheuristiques.

1 Introduction

La science mathématique de la localisation d'établissements a attiré beaucoup de recherche dans l'optimisation discrète et continue depuis près de cinq décennies. Les chercheurs se sont focalisés sur les algorithmes et les formulations dans divers problèmes de localisation, que ce soit dans le secteur public ou privé (ReVelle et Eiselt, 2005 [8]).

Une application courante des problèmes de localisation comprend un distributeur choisissant où implanter un centre de distribution dans une chaîne d'approvisionnement, un fabricant sélectionnant un bon emplacement pour placer son entrepôt, ou même les urbanistes définissant où placer une installation récréative. Cependant, les nouvelles applications des problèmes de localisation concernent l'emplacement des comptes bancaires, l'emplacement de la base de données dans les réseaux informatiques, la sélection des fournisseurs, etc. (Arabani et Farahani, 2012 [9]).

*Corresponding Author

2 Problème de localisation et problème de transport de marchandise

L'évolution des modes de consommation, le développement du commerce électronique, mais aussi les changements de types de productions industrielles ont favorisé dernièrement le développement du problème de transport de marchandises. La gestion de cette activité soulève le problème de la construction d'un système de distribution efficace. Ceci comprend le choix des localisations des dépôts où les marchandises sont stockées ainsi que le calcul des tournées de véhicules nécessaires à la distribution de ces marchandises. Ces deux points sont étroitement liés et si une solution optimale doit être trouvée, ils ne peuvent être résolus séparément. L'idée est de combiner deux niveaux de décision, tactique (affectation entre les noeuds) et stratégique (la localisation de dépôts).

3 Problème de localisation et problème de routage : problème de localisation-routage

L'élaboration de tournées de véhicules, date des années 1960. A cette époque, c'est essentiellement la relation étroite entre la localisation et le transport qui est mise en évidence, mais la difficulté du problème est loin d'être cernée (Von Boventer, 1961 [10]; Maranzana, 1964 [11]; Webb, 1968 [12]; Lawrence et Pengilly, 1969 [13]; Christofides et Eilon, 1969 [14]; Higgins, 1972 [15]). Watson-Gandy et Dohrn (1973) [16] ont été être les premiers à considérer réellement la visite des clients lors de la localisation, en utilisant une fonction non-linéaire des distances pour représenter les arrêts lors d'un trajet, tout en utilisant une fonction-vente dans laquelle les ventes déclinent quand la distance au dépôt augmente.

4 Clustering et problème de localisation-routage

Le clustering est une technique du data mining utilisée pour la classification non-supervisée d'un ensemble d'objets en des groupes dit clusters, sans avoir des connaissances au préalable ou du moins une connaissances parfaites des caractéristiques des groupes à former, tout en optimisant un ensemble de critères désirés.

Le problème de clustering a des applications nombreuses et variées, notamment dans les problèmes de routages et de localisation dans les chaînes d'approvisionnement. L'intérêt de cette approche pour ce type de problèmes est principalement la réduction de la taille du problème, de plus elle permet de prendre en considération des contraintes spécifiques à chaque cas particulier. Elle peut être utilisé soit en tant que méthode de résolution ou comme une étape de pré-traitement des données avant la résolution.

A titre d'exemples, nous pouvons citer le travail de Oudouar et El Fellahi [4] où une nouvelle approche a été proposée pour traiter le problème de routage de véhicules multi-dépôts. Elle consiste à combiner deux niveaux de décision : le niveau stratégique qui se manifeste par la localisation des entrepôts, et le niveau tactique qui implique le développement des

tournées de véhicules. L'avantage d'une telle approche est que l'inclusion des tournées futures dans la résolution d'un problème de localisation a permis des gains significatifs sur les coûts totaux.

Dans [3], une approche de localisation-acheminement basée sur le clustering a été appliquée pour redéfinir une chaîne d'approvisionnement agroalimentaire pour la commercialisation des volailles. Les auteurs ont proposé un modèle mathématique en trois étapes, qu'ils ont résolu par un processus séquentiel. En effet, ils ont proposé de former des clusters de clients en prenant en compte à la fois les coûts économiques et écologiques du transport des marchandises. Ils ont également identifié les abattoirs à installer, à fermer ou à rouvrir. Par la suite, un calcul du meilleur routage pour livrer les clients a été fait pour chaque abattoir. L'approche proposée a donné lieu à des résultats intéressants sur le cas réel étudié.

Un autre travail qui concerne la localisation a été proposé dans [6]. Dans ce travail, un nouveau modèle de clustering hiérarchique est proposé pour le choix de l'emplacement des installations, qui peut prendre en charge de manière flexible une grande variété d'objectifs d'optimisation et les combinaisons de contraintes pratiques multiples qui sont essentielles dans les scénarios logistiques réels. Au-delà de l'algorithme original de clustering hiérarchique, il incorpore un mécanisme d'anticipation qui atténue le "piège de l'avidité" en utilisant des informations globales. Ces avantages permettent à la méthode proposée de générer des solutions fiables avec une grande efficacité temporelle.

Notons aussi que le clustering des clients pour le processus de distribution est largement utilisée dans le choix de l'emplacement, l'optimisation des itinéraires de distribution et l'optimisation de l'ordonnancement des véhicules du centre de distribution de la logistique énergétique. Pour résoudre le problème du clustering de clients dont l'emplacement du centre de distribution est inconnu, Zhong et al. [7] ont proposé un algorithme de clustering qui tient compte de la structure du réseau de distribution et de la contrainte de volume de distribution, ce qui compense le fait que la distance euclidienne classique ne tient pas compte des informations sur les routes. Les résultats expérimentaux obtenus avec cet algorithme indiquent clairement que le concept du clustering peut traiter efficacement des ensembles de données spatiales à grande échelle, et que le processus de clustering n'est pas affecté par les clients isolés. Le clustering peut être appliqué efficacement à l'emplacement du centre de distribution, à l'optimisation des coûts de distribution, à l'optimisation des itinéraires de distribution et à la division de la zone de distribution de l'optimisation de la planification des véhicules.

5 Théorie des jeux et problème de localisation

Ces dernières années, on retrouve quelques travaux étudiant des problèmes de localisation par la théorie des jeux coopératifs (voir par exemple Serra et ReVelle, 1993 [17], 1994 [29]), Mallozzi (2007) [18], Fernandez et al. (2014) [31]; Konur et Geunes(2012) [19]; Diaz-Banez et al. (2011) [20]; Berman et Gavius (2007) [21]; Reilly (2012) [22]; Saidani et al. (2012) [?] et Fernandez et al. (2007) [30]) et non coopératifs (Puerto et al. (2012) [23]; Puerto et al. (2011) [24]; Goemans et Skutella (2004) [25]; Xua et Dub(2006) [26] et de Devanur et al. (2005) [27]). La modélisation par les jeux intervient souvent pour la représentation des

problèmes de localisation des établissements concurrentiels, où les différents acteurs ont généralement des intérêts antagonistes. Dans de tels jeux, on considère que les joueurs sont les concurrents, les stratégies sont les lieux de localisation et les fonctions de paiement sont les fonctions de coût. Une solution à ce problème consiste à déterminer un équilibre de Nash du jeu (dans le cas où il existe évidemment).

6 L'aspect multicritère dans les problèmes de localisation

La conception des supply chains est, à la base, un problème de décision multicritères qui inclut à la fois des critères quantitatifs et qualitatifs (qualité des produits, délai de livraison, préférences des clients, ...). Le plus souvent, le coût total, incluant toutes les activités de la chaîne, est utilisé comme seul critère de décision à optimiser. Cette optimisation monocritère n'est plus suffisante dans une économie dominée par les clients, avec des préoccupations sociales et environnementales de plus en plus fortes.

A titre d'exemple pour ce type d'applications, nous pouvons citer le travail présenté dans [1] où les auteurs proposent d'utiliser la programmation par but pour résoudre un problème de localisation des installations et d'allocation des produits avec des objectifs multiples et concurrents. Le modèle proposé décrit la situation dans laquelle une entreprise évalue six sites potentiels d'implantation d'usines de production dans quatre états, qui desserviraient quatre centres de distribution. Le modèle prend en compte de multiples objectifs, y compris plusieurs facteurs qualitatifs de l'analyse de l'emplacement et les objectifs liés aux coûts ont été pris en compte dans le modèle. Le résultat du modèle indique que la programmation par objectifs est l'une des techniques prometteuses qui sont applicables aux problèmes de localisation/allocation du monde réel.

7 Résolution des problèmes de localisation et métaheuristiques

Les problèmes de localisation statique des établissements sont généralement modélisés par des programmes linéaires mixtes (Mixed Integer Programming). Un outil qui permet de résoudre ce type de modèle d'une manière exacte est la méthode de Branch and Bound (BB). Néanmoins, cette méthode n'est efficace que pour les problèmes de petites tailles. Plusieurs chercheurs se sont donc intéressés à l'adaptation des métaheuristiques comme les algorithmes génétiques, les algorithmes de colonies d'abeilles, le recuit simulé, la recherche tabou, etc. Les métaheuristiques sont plus rapides que la méthode de Branch and Bound lorsque l'instance en question est de grande taille, elles retournent généralement des solutions proches de l'optimum.

En gestion de chaînes logistiques, les métaheuristiques sont surtout utilisées pour déterminer les tournées optimales une fois que l'affectation des clients aux entrepôts est bien établie. C'est le cas par exemple de l'article de Mottaki et al.[2], qui ont proposé de traiter le problème

du voyageur de commerce en adaptant un algorithme génétique, qui permet de prendre en compte la congestion des chemins à considérer lors de la définition de la tournée optimale.

8 Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés à un certain nombre de problèmes liés à la gestion de la supply chain d'un système de production. Nous avons dans un premier temps défini séparément le problème de localisation et le problème de transport de marchandise. Par la suite, nous avons évoqué la raison de l'émergence du problème de localisation-routage. Nous avons enchaîné par un survol de quelques travaux illustrant l'intérêt de l'approche par clustering pour la localisation des dépôts et l'affectation des clients dans les chaînes d'approvisionnement. Enfin, nous avons évoqué le rôle de la théorie des jeux dans les problèmes de localisation, puis le pourquoi du recours aux méta heuristiques pour résoudre des modèles linéaires à variables mixtes qui représentent des problèmes de localisation.

Ce papier n'est qu'un petit aperçu de ces applications, que nous comptons développer en proposant une classification plus rigoureuse des problèmes traités et des approches utilisées pour la gestion et l'optimisation de ces chaînes logistiques.

Références

- [1] Wang, S. C., and Chen, T. C. (2017). Multi-objective competitive location problem with distance-based attractiveness and its best non-dominated solution. *Applied Mathematical Modelling*, 47, 785-795.
- [2] Mouttaki, N., Benhra, J., and Rguiga, G. (2020). GENETIC ALGORITHM FOR OPTIMIZING DISTRIBUTION WITH ROUTE RESTRICTION CONSTRAINT DUE TO TRAFFIC JAMS. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*.
- [3] Boudahri, F., Aggoune-Mtalaa, W., Bennekrouf, M., and Sari, Z. (2013). Application of a clustering based location-routing model to a real agri-food supply chain redesign. In *Advanced methods for computational collective intelligence* (pp. 323-331). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [4] Oudouar, F., and El Fellahi, A. (2017, March). Solving the location-routing problems Using Clustering Method. In *Proceedings of the 2nd international conference on big data, cloud and applications* (pp. 1-5).
- [5] J. D. Tracey-White (2005). Rural-urban marketing linkages : an infrastructure identification and survey guide (No. 161). Food and Agriculture Org.
- [6] Lin, T., Liu, Y., Liu, B., Wang, Y., Wu, S., and Zhe, W. (2021). Hierarchical clustering framework for facility location selection with practical constraints. *IET Cyber-Physical Systems : Theory and Applications*, 6(4), 238-253.
- [7] Zhong J., Zhu J., Guo Y., Chang Y., Zhu C. (2021). A Customer Clustering Algorithm for Power Logistics Distribution Network Structure and Distribution Volume Constraints.

INTERNATIONAL JOURNAL OF CIRCUITS, SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING,
Volume 15.

- [8] C. S. ReVelle and H. A. Eiselt, Location analysis : A synthesis and survey, *European journal of operational research*, 165 (2005), pp. 119.
- [9] Arabani, A. B., and Farahani, R. Z. (2012). Facility location dynamics : An overview of classifications and applications. *Computers and Industrial Engineering*, 62(1), 408-420.
- [10] Von Boventer, E. (1961). The relationship between transportation costs and location rent in transportation problems. *Journal of Regional Science*, 3(2), 27-40.
- [11] Maranzana, F. E. (1964). On the location of supply points to minimize transport costs. *Journal of the Operational Research Society*, 15(3), 261-270.
- [12] Webb, M. H. J. (1968). Cost functions in the location of depots for multiple-delivery journeys. *Journal of the Operational Research Society*, 19(3), 311-320.
- [13] Lawrence, R. M., and Pengilly, P. J. (1969). The number and location of depots required for handling products for distribution to retail stores in South-East England. *Journal of the Operational Research Society*, 20(1), 23-32.
- [14] Christofides, N., and Eilon, S. (1969). An algorithm for the vehicle-dispatching problem. *Journal of the Operational Research Society*, 20(3), 309-318.
- [15] Higgins, J. C. (1972). On the merits of simple models in distribution planning. *International Journal of Physical Distribution*.
- [16] Watson-Gandy, C. D. T., and Dohrn, P. J. (1973). Depot location with van salesmen—a practical approach. *Omega*, 1(3), 321-329.
- [17] Serra, D. and ReVelle, C. (1993). The pq-median problem : location and districting of hierarchical facilities, *Location Science*, 1, pp. 299-312.
- [18] Mallozzi, L. (2007). Noncooperative facility location games. *Operations research letters*, 35(2), 151-154.
- [19] Konur, D., and Geunes, J. (2012). Competitive multi-facility location games with non-identical firms and convex traffic congestion costs. *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review*, 48(1), 373-385.
- [20] Díaz-Báñez, J. M., Heredia, M., Pelegrín, B., Pérez-Lantero, P., and Ventura, I. (2011). Finding all pure strategy Nash equilibria in a planar location game. *European Journal of Operational Research*, 214(1), 91-98.
- [21] Berman, O., and Gavius, A. (2007). Location of terror response facilities : A game between state and terrorist. *European Journal of Operational Research*, 177(2), 1113-1133.
- [22] Reilly, A., Nozick, L., Xu, N., and Jones, D. (2012). Game theory-based identification of facility use restrictions for the movement of hazardous materials under terrorist threat. *Transportation research part E : logistics and transportation review*, 48(1), 115-131.
- [23] Puerto, J., Tamir, A., and Perea, F. (2011). A cooperative location game based on the 1-center location problem. *European journal of operational research*, 214(2), 317-330.
- [24] Puerto, J., Tamir, A., and Perea, F. (2012). Cooperative location games based on the minimum diameter spanning Steiner subgraph problem. *Discrete Applied Mathematics*, 160(7-8), 970-979.

- [25] Goemans, M. X., and Skutella, M. (2004). Cooperative facility location games. *Journal of Algorithms*, 50(2), 194-214.
- [26] Xu, D., and Du, D. (2006). The k-level facility location game. *Operations Research Letters*, 34(4), 421-426.
- [27] Devanur, N. R., Mihail, M., and Vazirani, V. V. (2003, June). Strategyproof cost-sharing mechanisms for set cover and facility location games. In *Proceedings of the 4th ACM Conference on Electronic Commerce* (pp. 108-114).
- [28] Christopher, M. (1994). Logistics and supply chain management : strategies for reducing costs and improving services. *Journal of the Operational Research Society*, 45(11), 1341.
- [29] Serra, D., and ReVelle, C. (1994). Market capture by two competitors : the preemptive location problem. *Journal of regional Science*, 34(4), 549-561.
- [30] Fernandez, J., Pelegri, B., Plastria, F., and Toth, B. (2007). Solving a Huff-like competitive location and design model for profit maximization in the plane. *European Journal of operational research*, 179(3), 1274-1287.
- [31] Fernandez, J., Salhi, S., and Boglarka, G. (2014). Location equilibria for a continuous competitive facility location problem under delivered pricing. *Computers and Operations Research*, 41, 185-195.

Utilité décisionnelle de l'information comptable: Autres mesures à partir du cas Algérien

Baizid Touazi^{*1} and Tayeb Chabi²

¹LaMOS Research RMTQ Laboratory, Financial sciences and Accounting Departement University of Bejaia, Algeria

baizid.touazi@univ-bejaia.dz

² RMTQ Laboratory, Management Sciences Departement, University of Bejaia, Algeria

tayeb.chabi@univ-bejaia.dz

Abstract La nécessité d'enrichir la théorie sur la mesure de l'utilité décisionnelle de l'information comptable financière d'entreprise u-DC est toujours d'actualité. Notre choix est alors basé d'une part sur l'usage des modèles théoriques statistiques, pour mesurer u-DC produite par un échantillon de dix entreprises Algériennes de production, d'autre part sur nos jugements et sur les jugements des comptables de ces entreprises enquêtées. A cet effet, il est raisonnable sans doute que la concordance entre les résultats ne peut faire valider notre hypothèse théorique que par rapport aux modèles statistiques théoriques de mesure de u-DC.

Keywords : Mesure de l'utilité décisionnelle de l'information comptable financière ; Analyse quantitative ; Jugements ; Echantillon d'entreprises Algériennes de production.

1 Introduction

Dans le cadre de la gouvernance d'entreprise, les principaux organismes internationaux de normalisation ont attribué l'objectif d'utilité décisionnelle à la comptabilité financière [15] [8]. Le concept de la qualité de l'information comptable financière est alors tracé¹ [15]. Dans cette perspective, deux sous objectifs peuvent être identifiés, à savoir l'utilité décisionnelle en termes d'évaluation et l'utilité décisionnelle en termes de contrat [12]. Cependant, ces deux objectifs peuvent être en contradiction l'un avec l'autre [12] [4] [9]. En plus, la définition d'u-DC dépend des auteurs et des systèmes comptables financiers. La raison de la multiplicité d'interprétation de ce concept en vient sans doute de la multiplicité de son utilisation [19] [22]. Par ailleurs, la majorité des études précédentes sont réalisées suivant de modèles quantitatifs statistiques basés sur l'usage de chiffres comptables: Le modèle de Jones (1991) [13], de Healy (1985) [20] [16], de Collins et Hribar (2000) [5] [22] et le modèle de Roychowdhury (2006) [17]. Cependant, malgré les avantages d'une telle utilisation de ces modèles et des modèles statistiques en général, leur apport peut être critiqué [21]. D'ailleurs, bien qu'il n'y ait pas de réponse satisfaisante sur le problème de l'évaluation et de la mesure de u-DC, la littérature comptable documente que le modèle de Jones (1991) [13] et le modèle modifié de Jones [6] [22] sont les plus utilisés. Bien que plusieurs auteurs aient développé et amélioré ces modèles cependant, la question de leur efficacité est toujours d'actualité [1] [10]. En effet, la comptabilité peut-être assimilée à un système d'information [3] dynamique réel dans l'entreprise [7]

¹ Le cadre conceptuel du FASB (SFAC n°2) fut le premier à proposer une définition de la qualité de l'information comptable. La recherche Académique s'est intéressée au concept de la qualité de l'information comptable dans le cadre des conflits d'agence.

* Corresponding Author:

[18] [23]. De ce fait, sur le plan pratique il y a plusieurs systèmes comptables de l'information financière.

2 Les hypothèses

La théorie de l'agence, telle qu'elle élaborée par Jensen et Meckling (1976) [11] constitue la base de conception de la gouvernance d'entreprise. Elle évoque que les entreprises modernes sont caractérisées par la séparation entre la propriété et le contrôle et l'existence de conflits d'intérêts entre les dirigeants et les actionnaires. En effet, les dirigeants pouvant avoir des intérêts différents de ceux des actionnaires, profitent de l'avantage informationnel qu'ils détiennent pour orienter la gestion de l'entreprise vers la réalisation de leur objectif personnel. Des mécanismes de contrôle internes² et externes³ sont alors, définis afin de contraindre leur gestion au profit des actionnaires. Même si, cette conception est la plus acceptée, cependant la conception contractuelle partenariale devient de plus en plus importante. En outre, la comptabilité peut être définie comme un ensemble d'énoncés comptables qui sont liés entre eux, et qui visent à traduire une partie de la réalité économique et ou juridique de l'entreprise. Le modèle comptable anglo-saxon et le modèle continental européen peuvent être distingués [14]. Aussi, la définition de la comptabilité porte sur la description des activités et processus d'information dans l'entreprise [2] [18] etc. u-DC peut être alors analysée suivant le système d'information et suivant l'opinion⁴ des managers [2].

- Hypothèse n°1 : u-DC dépende de la qualité du système d'information
- Hypothèse n°2 : u-DC peut être traitée suivant l'opinion des comptables
- Hypothèse N°3: u-DC dépende du degré d'application des règles comptables Schipper and Vincent (2003) [19] expliquent que u-DC se définit de quatre façons différentes mais non mutuellement exclusives : Suivant la relation entre les flux de trésorerie, les accruals⁵ et les résultats ; Par la persistance, la variabilité et la prédictibilité des résultats comptable ; Par l'utilisation des caractéristiques qualitatives des cadres conceptuels comptables; Sur les décisions de mesure des dirigeants.
- Hypothèse n°4: u-DC peut être mesurée suivant la relation entre le chiffre d'affaire, le total des accruals, les cash-flow opérationnels et le résultat net de l'exercice de l'entreprise
- Hypothèse n°5 : u-DC peut être mesurée suivant la persistance, la variabilité et la prédictibilité des résultats nets de l'entreprise.

3 Méthodologie

Des questions face à face⁶ sur les problèmes d'application du SCF et sur la pertinence de l'information issue de son application par rapport au PCN, sont posées aux responsables de la comptabilité générale et des finances des entreprises enquêtées. Des questions fermées⁷ sur le système d'information comptable de ces entreprises et des questions à choix multiples QCM⁸ sur le degré d'application du SCF, sont aussi diffusées aux mêmes responsables. Les systèmes d'information sont analysés principalement suivants leurs caractéristiques de fonctionnement et de leurs impacts sur u-DC. Ainsi des pourcentages sont calculés et analysés. Ensuite, à partir de l'interview les problèmes de l'application normale du SCF sont présentées suivants de taux d'entreprises. Enfin, des pourcentages

² Le contrôle interne, structure de propriété, l'intéressement des dirigeants, audit interne, fonctionnement du système d'information, etc.

³ Les normes comptables financières, la régulation comptable, la qualité de l'audit externe, le contrôle par le marché, etc.

⁴ La méthode de quantification des jugements est davantage utilisée dans les recherches sur les déterminants externes de la qualité de l'information comptable financière ou dans les recherches sur les déterminants des systèmes de l'information comptable financière dans les entreprises.

⁵ Qui veut dire charges, produits et éléments comptables calculés et décalés

⁶ Questionnaire n°2 de l'interview.

⁷ Questionnaire n°1

⁸ Questionnaire n°3

moyens de l'application des règles du SCF par rapport à l'ancien PCN sont calculés à partir du Questionnaire N°3. Des graphiques, analyses de variances et des régressions sont effectuées sur le logiciel Excel. Enfin, sur la base des modèles théoriques de mesure de u-DC, une analyse des chiffres comptables de deux entreprises a été réalisée⁹.

Par ailleurs, les entreprises enquêtées doivent être structurées et possédant ainsi une structure bien définie et un système d'information comptable. Ensuite, elles doivent avoir l'activité de production comme étant principale. Selon le docteur CHABI Tayeb (2007) [2] la complexité du système d'information comptable de l'entreprise est lié au fait que l'entreprise doit comporter une activité de production qui est en interaction avec les activités d'investissement et de financement qui permettent ainsi des règles du PCN¹⁰.

Ensuite, l'utilisation des techniques de la comptabilité et l'application des règles du SCF. En effet, pour qu'il soit possible de réaliser notre enquête, il faut que l'échantillon comporte des entreprises qui appliquent eux même les règles du SCF possédant un système d'information comptable ; La prise de décision et l'usage de l'information comptable est réalisée par les dirigeants ou par les actionnaires et propriétaires. En outre, la taille des entreprises enquêtées doit être moyenne ou grande, dépendamment des ressources mises en œuvre. Cette caractéristique permet de s'assurer que ces entreprises possèdent un système d'information comptable très développé, possédant les moyens du travail comptable efficaces, et un système qui converge vers l'application complète et efficace des règles du SCF. Enfin, l'échantillon de notre enquête est composé de dix entreprises Algériennes de production.

4 Résultats et conclusion

Cette étude nous a permis de montrer qu'il y a une concordance et complémentarité entre les résultats de l'analyse des données issues du questionnaire n°1, du questionnaire n°2 et du questionnaire n°3, et ce concernant le problème d'évaluation des immobilisations, des stocks et des provisions. Donc, on peut affirmer la validité de nos hypothèses à savoir, u-DC peut être analysée suivant la qualité des systèmes d'information, la qualité de l'application des règles comptables financières et suivant l'opinion des comptables. Cela bien entendu est en plus de l'application des modèles théoriques de mesure de la qualité de l'information comptable financière. Par ailleurs, puisque ces résultats sont en relation avec l'application des modèles statistiques et de la théorie sur la mesure de u-DC, la logique en veut sans doute que la question sur la théorie de mesure de u-DC est toujours d'actualité.

5 Limites et perspectives de recherches

Le problème de notre étude est lié au fait que l'enquête n'a pas été réalisée auprès des propriétaires d'entreprises enquêtées, au sens d'investisseurs actuels. En outre, l'échantillon consulté est très réduit et dés fois, des entreprises qui font parties du même groupe sont consultées. En plus, il n'y a que quatre entreprises qui ont répondu au questionnaire N°3. Avec ces faiblesses, en réalité il est utile de réaliser une analyse quantitative des données comptables des entreprises de production. Particulièrement, en utilisant les modèles d'analyse des accruals spécifiques et le modèle de capitalisation des charges spécifié dans cette étude. Enfin, cette recherche propose d'aborder u-DC sous la vision de gestion et de communication et ce, par rapport aux conséquences économiques de la régulation comptable. Enfin, l'étude nous a permis de proposer un modèle à tester sur les chiffres comptables¹¹ :

⁹ Suivant la relation entre les flux de trésorerie, le chiffre d'affaire, les accruals et les résultats ; et suivant la persistance, la variabilité et la prédictibilité des résultats comptables.

¹⁰ Dans notre cas c'est le SCF.

¹¹ Le calcul des accruals non issu des comptes de résultats peut être possible par l'utilisation de l'équation: Résultat_t = variation des Actifs – variation des passifs + résultats_{t-1}. Six autres fonctions peuvent être construites des caractéristiques des éléments comptables. Par exemple variation de la trésorerie de gestion + variation de la trésorerie non de gestion = variation de la trésorerie ; etc.

$$\begin{aligned} \text{Charges} &= a + A. \text{ Rev} + B. \text{ Inc} \\ \text{Charges} &= a + A. \text{ Rev} + B. \text{ Inc} + C. \text{ Cac} \\ \text{Charges} &= a + A. \text{ Rev} + B. \text{ Inc} + C. \text{ Cac} + D. \text{ Ncac} \\ \text{Charges} &= a + A. \text{ Rev} + B. \text{ Inc} + C. \text{ Cac} + D. \text{ Ncac} + F. \text{ Ocf} \end{aligned}$$

Avec :

Ocf: Casf- flow opérationnels
Rev: Chiffre d'affaire
Inc : Produits opérationnels
Ncac : Accruals non courants non de gestion
Cac : Accruals courants non de gestion

References

- [1] Ahmed, S. A., Bruce, K. B., Morton, R.: Extreme accruals, earnings quality, and investor mispricing. Working paper Florida State University, 1-50 (2004).
- [2] Chabi, T. : L'impact de l'information comptable sur la prise de décision dans les entreprises de production : une approche systémique cas d'un échantillon d'entreprises Algériennes. Thèse de doctorat en sciences économiques. Alger (2007).
- [3] CHARRON, J. L., SEPARI, S. : Organisation et gestion de l'entreprise, manuel et application. Dunod, Paris (2001)
- [4] Christensen, O. P., Feltham, A. G., Sabac, F.: A contracting perspective on earnings quality. *Journal of accounting and economics*, 39, 2, 265-294 (2005)
- [5] Collins, W. D., Hribar, P.: Errors in Estimating Accruals: Implications for Empirical Research. *40, 1, 105-134* (2000)
- [6] Dechow, M. P., Sloan, G. R., Sweeney, P. A.: Detecting earning management, the accounting review. *70, 2, 193-225* (1995)
- [7] Enthoven. (1973). Normalisation comptable et développement économique. In *Finance et Développement*.
- [8] FASB Conceptual Framework. Statement of Financial Accounting Concepts No°8, as amended, Conceptual framework for Financial reporting, Chapter 1, The objective of General Purpose Financial Reporting
- [9] Gjesdal, F.: Accounting for stewardship. *Journal of accounting research*, 19, 1, 208-231(1981)



Entreposage des conteneurs au niveau du Centre de Transit des Marchandises Dangereuses du port de Béjaia

Lina Bounia¹, Nesrine Ladjemil², and Ouiza Lekadir³

¹Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, lina.bou006@gmail.com

²Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, nessladj20@gmail.com

³Lamos Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria, ouizalekadir@gmail.com

Résumé L'entreprise portuaire de Béjaia (EPB) est l'unique entreprise algérienne qui avait mis en exploitation un Centre de Transit de Marchandises Dangereuses (CTMD). Ce centre reçoit des quantités importantes en conteneurs pour lesquels il n'est pas performant vu le manque d'espace. l'objectif fixé dans ce travail est de proposer une application d'automatisation qui permet d'établir une solution réalisable qui consiste à satisfaire les contraintes de sûreté et de sécurité exigées par le CTMD et par la qualité des marchandises Dangereuses (MD) tout en essayant de réduire le nombre de zones d'entreposage et d'améliorer la capacité de stockage. Et ce, en faisant appel à l'outil de la programmation par contraintes (PPC) pour la résolution du problème de satisfaction par contraintes (CSP).

1 Introduction

Le Centre de Transit des Marchandises Dangereuses (CTMD) reçoit des quantités importantes en conteneur pour lequel il n'est pas performant vu le manque d'espace. Donc, on est amené à optimiser l'espace restant dans l'attente d'une extension.

2 Modélisation du problème d'entreposage des conteneurs au niveau du CTMD

la méthode mathématique adoptée dans notre application pour le problème d'entreposage au niveau du CTMD au port de Béjaia est celle de Satisfaction Par Contraintes [1, 2, 3, 4, 8] en faisant appel à l'outil de la programmation par contraintes (PPC) [5, 6], donc pour présenter cette application il y'a lieu en premier lieu de définir le truplet (X, D, C) , [2, 7] où :

- X : l'ensemble des Variables ;
- D : l'ensemble des Domaines finis ;
- C : l'ensemble des Contraintes.

2.1 Ensemble des variables

Les valeurs des variables peuvent ne pas être des entiers consécutifs ou des valeurs numériques [10, 9]. En tenant compte de la table de ségrégation et des données statistiques du centre de transit des marchandises dangereuses, nous avons pu subdiviser ce centre en sept (7) zones de différentes classes qui sont : Ω : L'ensemble des zones d'entreposage dans le CTMD.

$$\Omega = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7\}$$

Où, chaque zone comprend une ou deux classes différentes telles que :

- $Z_1 = \{\text{Classe 8}\}$;
- $Z_2 = \{\text{Classes 9, 4.2}\}$;
- $Z_3 = \{\text{Classe 3}\}$;
- $Z_4 = \{\text{Classe 6.1}\}$;
- $Z_5 = \{\text{Classe 5.1}\}$;
- $Z_6 = \{\text{Classes 4.1, 4.3}\}$;
- $Z_7 = \{\text{Classe 2.1, 2.2 (Classe 2)}\}$.

Chaque zone $Z_i, i = 1, \dots, 7$, contient un nombre fini S_{Z_i} de cellules k_j , où chaque cellule $k_j, j = 1, \dots, S_{Z_i}$ contient deux positions possibles, (P_1, P_2) .

- On note l'ensemble des classes : $C = (2.1, 2.2, 3, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, 6.1, 8, 9)$, pour simplifier les notations, on note cet ensemble de classes par : $C' = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.
- On note un conteneur par "TC" et comme on a deux types de conteneurs, alors chacun d'eux sera noté par :

$$T = \begin{cases} TC_1, & \text{si TC de type1 (TC de vingt pieds)} ; \\ TC_2, & \text{si TC de type2 (TC de quarante pieds)} . \end{cases}$$

- On a pris les dimensions exactes du conteneur (TC) de vingt pieds comme dimension d'un emplacement dans toutes les zones.

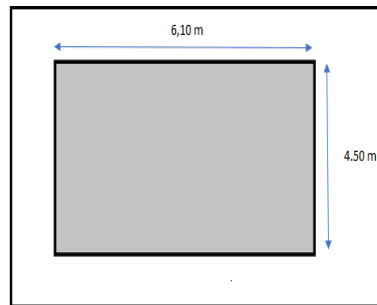


FIGURE 1 – Les dimensions d'un emplacement d'un conteneur.

- Par ailleurs, on a proposé un plan d'entreposage qui tient compte de consignes de sécurité :

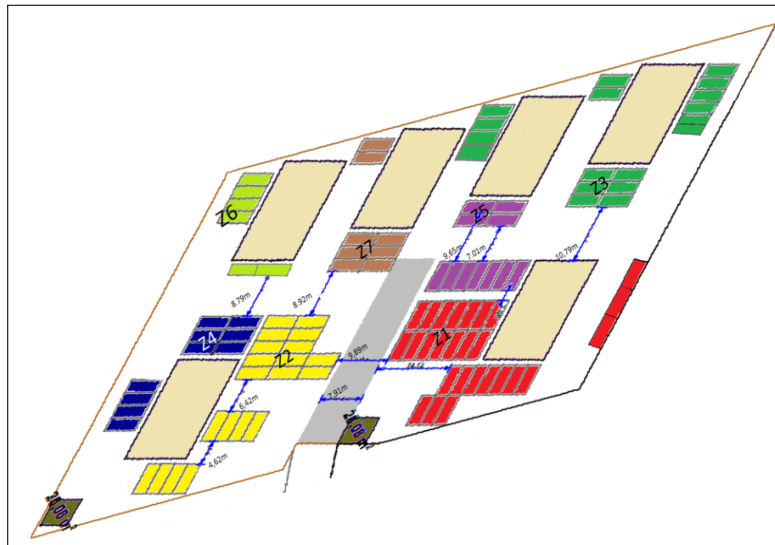


FIGURE 2 – Plan d'entreposage.

- On définit par ailleurs :
 - E_{vide} : l'ensemble des emplacements vides qui sont susceptibles de recevoir un conteneur (TC) dans chaque zone i , $i = 1, \dots, 7$.
 - E_{occ} : l'ensemble des emplacements occupés par des TC's.
- L'ensemble des variables X est :

$$X = \{TC, C', C_{TC}, C_p, T, Nb_1, Nb_2, E_{vide}, E_{occ}, Z_i, k_j, P\}.$$

avec les variables non déjà définies qui sont les suivantes :

- C_{TC} : la classe des conteneurs arrivés ou sortis ;
- C_p : la classe de conteneur déjà placé ;

- Nb_1 : nombre de TC de type 1 arrivés ou sortis ;
- Nb_2 : nombre de TC de type 2 arrivés ou sortis.
- Les variables d'états sont définies comme suit :

$$E_{pkz} = \begin{cases} 1, & \text{si le conteneur est de type 1 (ou type 2) de classe } C \text{ est placé dans la position } P \\ & \text{de la cellule } k_j \text{ de la zone } Z_i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2 Ensemble des domaines

$$D = \{D_{TC}, D_{C'}, D_{C_{TC}}, D_{C_p}, D_T, D_{Nb_1}, D_{Nb_2}, D_{E_{vide}}, D_{E_{occ}}, D_{Z_i}, D_{k_j}, D_P\}.$$

Tels que :

- $D_T : \{1, 2\}$; • $D_{C'} : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; • $D_{C_{TC}} : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
- $D_{C_p} : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; • $D_{Nb_1} : \overline{1, 200}$; • $D_{Z_i} : \overline{1, 7}$;
- $D_{k_j} : \overline{1, S_{Z_i}}$; • $D_P : \{1, 2\}$.

2.3 Ensemble des contraintes

- L'ensemble des contraintes qui lient les variables est :

$$C = (C_{T,C}, C_{C,Z_i}, C_{T,C,Z_i,k_j,P}).$$

- Les contraintes logiques sont :

1. Un TC de 20 pieds occupe un emplacement et un TC de 40 pieds occupe deux emplacements, ce qu'on peut formuler par :

$$\sum_{Z=1}^{Z=7} \sum_{K=1}^{K=S_{Z_i}} \sum_{P=1}^{P=2} E_{P,k_j,Z_i} = \begin{cases} 1, & \text{si } T = TC_1; \\ 2, & \text{si } T = TC_2. \end{cases} \quad (1)$$

2. On peut gerber un conteneur de 40 pieds sur deux conteneurs de 20 pieds, mais on peut pas faire l'inverse car on risque de défaire le 40 pieds, ceci se formule par :

$$\sum_{Z=1}^{Z=7} \sum_{K=1}^{K=S_{Z_i}} (2_{TC1} * E_{P_1,k_j,Z_i} \wedge 1_{TC2} * E_{P_2,k_j,Z_i}) = 1. \quad (2)$$

- Les contraintes de ségrégation :

Soit la matrice de séparation des classes (voir TABLE 1) qui résume le nombre d'emplacements qui doivent séparer les marchandises des différentes classes. De cette table, on a défini trois ensembles de compatibilité ou d'incompatibilité :

- C_{comp} : est l'ensemble des classes compatibles avec la classe C_p ;
- C_{inco_1} : est l'ensemble des classes incompatibles de degré 1, qui signifie qu'on doit laisser un emplacement avec la classe C_p ;
- C_{inco_2} : est l'ensemble des classes incompatibles de degré 2, qui signifie qu'on doit laisser deux emplacements avec la classe C_p .

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	2	1	2	0	2	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	2	1	2	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
5	2	1	2	1	0	1	2	1	1	0
6	0	0	1	0	1	0	2	0	1	0
7	2	0	2	1	2	2	0	1	2	0
8	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
9	1	0	0	1	1	1	2	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 1 – Table de séparation des marchandises dangereuses.

Ainsi, on définit les contraintes de ségrégation suivantes :

1. Si l'emplacement E_{1,k_j,Z_i} est occupé par un TC de classe C' alors on ne pourra affecter à l'emplacement E_{2,k_j,Z_i} que des TC de classe C_{comp} , ce qui se formule par :

$$(E_{1,k_j,Z_i} \wedge E_{2,k_j,Z_i}) = 1 \implies (C_p \in C_{Comp}) \quad (3)$$

2. La valuation '0' dans la TABLE1 veut dire que l'affectation est permise là où il y a des emplacements vides sans ségrégation :

$$((E_{P,k_j,Z_i} = 1) \wedge (C_{TC} \in C_{Comp})) \implies (E_{P+1,k_j,Z_i}) \vee (E_{P,k_j+1,Z_i}) = 1. \quad (4)$$

3. La valuation '1' veut dire qu'il faut laisser 'un emplacement' vide :

$$((E_{P,k_j,Z_i} = 1) \wedge (C_{TC} \in C_{inco_1})) \implies (E_{P+1,k_j,Z_i}) \vee (E_{P,k_j+1,Z_i} \vee E_{P,K,Z+1}) = 0. \quad (5)$$

$$((E_{P,k_j,Z_i} = 1) \wedge (C_{TC} \in C_{inco_1})) \implies (E_{P,K_j+2,Z_i}) \wedge (E_{P,k_j,Z_i+2}) = 1. \quad (6)$$

4. La valuation '2' veut dire qu'il faut laisser 'deux emplacements' vides :

$$\begin{aligned} & \left((E_{P,k_j,Z_i} = 1) \quad \wedge \quad (C_{TC} \in C_{inco_2}) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & (E_{P+1,k_j,Z_i}) \vee (E_{P,k_j+1,Z_i}) \vee (E_{P,K_i,Z_i+1}) \vee (E_{P,k_j+2,Z_i}) \vee (E_{P,k_j,Z_i+2}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

$$((E_{P,k_j,Z_i} = 1) \wedge (C_{TC} \in C_{inco_2})) \implies (E_{P,k_j+3,Z_i}) \wedge (E_{P,k_j,Z_i+3}) = 1 \quad (8)$$

$$P = 1, 2, k_j = \overline{1, S_{Z_i}}, Z_i = \overline{1, 7}.$$

Même explication par rapport à la valuation '1', Mais, en valuation '2', i.e. on doit laisser deux emplacements vides.

3.1 Exemple d'application

la résolution de cet algorithme nous permet de trouver un vecteur $V(j) = (Z_i, k_j, P)$, qui représente la zone qu'on doit affecter au TC arrivé, ainsi que sa cellule et sa position. En premier lieu on a déclaré la matrice initiale d'entreposage du CTMD qui décrit la situation qui stipule que le CTMD comporte 109 conteneurs de 20 pieds : 33 TCs de classe 3 est placé dans la zone (Z3), 37 TCs de classe 8 est placé dans la zone (Z1), 26 TCs de classe 9 est placé dans la zone (Z2), 6 TCs de classe 5.1 est placé dans la zone (Z5), 4 TCs de classe 6.1 est placé dans la zone (Z5) et 3 TCs de classe 2 est placé dans la zone (Z7).

• Cet exemple n'est pas une situation réelle mais c'est un exemple qu'on a construit nous même pour décrire une situation de saturation d'une zone et ce afin d'illustrer notre application dans le cas d'utilisation de la table de ségrégation. Ainsi, on suppose l'arrivée de 18 TCs, tels que : 5 TCs de type1 (20 pieds) de classe 2.2, 6 TCs de type2 (40 pieds) de classe 2.1, 2 TCs de type1 (20 pieds) de classe 4.1 et 5 TCs de type2 (40 pieds) de classe 9 sachant qu'il y'a eux de sortie de 3 TCs de type 1 de classe 3. L'entreposage établi par notre application est illustré dans la figure suivante :

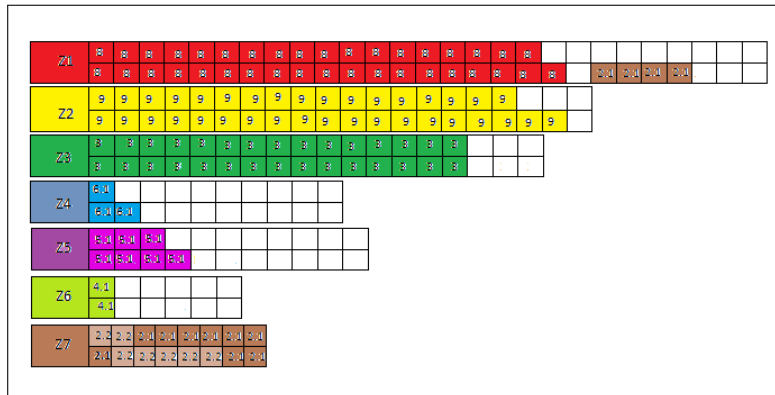


FIGURE 4 – La situation après l'affectation des TCs arrivés.

- V(1)=(Z=7, k=2, P=2); V(10)=(Z=1,k=21, P=1,Z=1,k=22, P=1);
- V(2)=(Z=7, k=3, P=1); V(11)=(Z=1,k=21, P=2,Z=1,k=22, P=2);
- V(3)=(Z=7, k=3, P=2); V(12)=(Z=6, k=1, P=1);
- V(4)=(Z=7, k=4, P=1); V(13)=(Z=6, k=1, P=2);
- V(5)=(Z=7, k=4, P=2); V(14)=(Z=2, k=14, P=1, Z=2,k=15, P=1);
- V(6)=(Z=7, k=5, P=1,Z=7,k=6, P=1); V(15)=(Z=2, k=14, P=2, Z=2,k=15, P=2);
- V(7)=(Z=7, k=5, P=2,Z=7,k=6, P=2); V(16)=(Z=2, k=16, P=1, Z=2,k=17, P=1);
- V(8)=(Z=7, k=6, P=1,Z=7,k=7, P=1); V(17)=(Z=2, k=16, P=2, Z=2,k=17, P=2);
- V(9)=(Z=7, k=6, P=2,Z=7,k=7, P=2); V(18)=(Z=2,k=18, P=1,Z=2,k=19, P=2).

4 Conclusion

Ce plan que nous avons proposé nous a ramené à améliorer la capacité de stockage du CTMD plus que 33%. Nous avons envisagé de proposer une application d'automatisation qui permet d'établir une solution réalisable qui consiste à satisfaire les contraintes de sûreté et de sécurité exigées par le CTMD et par la qualité des MD.

Références

- [1] Cooper, M. C., Cohen, D. A. and Jeavons, P. : Characterising tractable constraints. *Artificial Intelligence*, ed 65, 347-361 (1994)
- [2] Dechter, R. and Frost, D. : Backjump-based Backtracking for Constraint Satisfaction Problems, *Artificial Intelligence, Review* 136, 147-188, (2002)
- [3] Nadel, B. : Some applications of the constraint satisfaction problem, Csc-90-008 Computer science Dept. Wayne State, university (1990)
- [4] Montanari, U. Networks of constraints : Fundamental properties and applications to picture processing, *Information Sciences*, 7, 95-132, (1974)
- [5] Vigneron, V. Programmation par contraintes et découverte de motifs sur données séquentielles, thèse de Doctorant, Univ Bretagne Loire, Discipline informatique, (2017)
- [6] Kefi, M. Assistance à l'agencement d'environnements virtuels : apport de la programmation par contraintes, Thèse de Doctorant, Univ Nantes Angere Mans, discipline informatique, (2012)
- [7] Haralick, R. and Elliott, G. Increasing tree search efficiency for constraint satisfaction problems, *Artificial Intelligence*, 263-313, (1980)
- [8] Mackworth, K. Alan. Consistency in networks of relations, *Artificial Intelligence*, 99-118, (1977)
- [9] Baptiste, P. Une étude théorique et expérimentale de la propagation des contraintes ressources, Technical Report, Compiègne, Université des Technologies de Compiègne. Ph.D, (1998)
- [10] Van-Hentenryck, P. A Logic Language for Combinatorial Optimization, *Annals of Operations Research*, 21, 247-274, (1990)



Réapprovisionnement En Matières Premières: Cas De La SARL Ramdy

Yasmina Djabali^{*1}, Sabrina Oubraham², Sabrina Toufouti³, and Djamil Aïssani⁴

¹LaMOS Research Unit, University of Bejaia, Algeria,
yasmina.djabali@univ-bejaia.dz

⁴LaMOS Research Unit, Operational Research Department, University of Bejaia, Algeria,
lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé L'application des méthodes scientifiques de la recherche opérationnelle au niveau des entreprises est indispensable pour améliorer leurs processus de production. En particulier, il est plus que nécessaire pour une entreprise de production d'établir une politique optimale de gestion des stocks.

Dans ce travail, nous avons étudié un problème clé de la gestion des stocks relevé au sein de la SARL Ramdy. L'objectif de cette étude est de choisir un modèle de gestion qui reflète mieux les caractéristiques du système étudié, qui est basé sur le réapprovisionnement en matières premières (poudre de lait).

Mots clés : Entreprise Ramdy, Gestion des stocks, Prévision, Réapprovisionnement.

1 Introduction

La gestion des stocks fournit une politique d'approvisionnement qui assure une disponibilité permanente d'articles afin de satisfaire les demandes tout en minimisant les coûts engendrés. Gérer un stock composé d'un nombre important de matières premières, cas de l'entreprise Ramdy, ne permet pas d'accorder le même intérêt pour chaque article. On peut considérer cette gestion comme sélective, en outre, elle ne peut gérer l'ensemble de stock. L'objectif de ce travail est de construire un modèle de gestion qui consiste à la recherche d'un niveau maximum à avoir en stock et la période de réapprovisionnement afin d'éviter les ruptures de stock. En faisant appel au classement des articles par la méthode ABC, nous avons déterminé la poudre de lait comme la seule matière première appartenant à la classe A. Pour cette dernière, une étude prévisionnelle a été effectuée en utilisant le logiciel R. L'ajustement de la consommation de la poudre de lait par une loi connue nous a permis de valider un modèle stochastique de gestion des stocks (modèle (Q, r)), tout en calculant la quantité optimale de commande et le point de commande.

*Corresponding Author

2 Classification des produits selon la méthode ABC

Afin de déterminer et de choisir les éléments à étudier, on a effectué une analyse ABC. Les résultats de classification sont représentés dans le tableau ci-dessous

Les matières premières	Achats par ordre décroissant	Achats cumulés décroissante	Achats cumulés en pourcentage	Classe
POUDRE DE LAIT	3172850 T	3172850	53%	A
SUCRE	2212200 T	5385050	89%	B
CHEDDAR	446590 T	5831640	97%	B
AMIDON	147003 T	5978643	99%	C
AROME	52564 T	6031207	100%	C
Total général	6031207 T		100%	

FIGURE 1 – Tableau d'analyse ABC des Achats pour l'année 2015

D'après l'analyse ABC, on remarque que la poudre de lait est l'une des matières premières les plus importantes pour l'entreprise Ramdy. En effet l'achat de cette dernière a connu une augmentation considérable entre l'année 2012 et 2015 et cela peut être justifié par le volume de consommation de la poudre de lait dans la production. Pour cela, nous avons opté pour la modélisation d'un seul type de produit qui est la poudre de lait.

3 Le choix de la politique de gestion des stocks

En prenant en considération le fait que la demande de la poudre de lait est aléatoire, donc on aura à choisir un modèle de gestion des stocks parmi les modèles stochastiques suivants

- Le modèle (Q, r) .
- Le modèle (R, T) .
- Le modèle (Q, r, t) .
- Le modèle (R, r, T) .

Notre choix s'est porté sur le modèle (Q, r) pour plusieurs raisons :

- Il permet de réduire le stock de sécurité mais aussi de se protéger contre un éventuel prolongement du délai de livraison ou une augmentation de la demande.

- Permet d'éviter les ruptures de stocks.

- Adapté aux matières premières dont la demande est partiellement irrégulière (demande aléatoire).

- Permet de minimiser le coût total de la gestion (en limitant le nombre de commande et donc le coût de passation de commande globale) et il permet de réagir d'une manière efficace, au bon moment et de faire face aux aléas liés à la demande.

- En prenant en considération le fait que l'achat de la poudre de lait est à l'étranger et le délai de livraison qui est fixé à deux mois au minimum fait exclure automatiquement les politiques de gestion à révision périodique (augmentation des risques de rupture de stock pour une période de temps importante) et cela va engendrer des pertes très importantes et aussi il peut causer même l'arrêt de la production en cas d'une variation importante de la demande.

- Comme la poudre de lait est un produit nécessaire et sur lequel se base la production dans la SARL Ramdy, elle demande un suivi permanent de niveau de stock (d'une manière continue).

4 Détermination des paramètres du modèle (Q, r)

Pour déterminer les paramètres du modèle choisi, nous avons choisi l'excel qui est un environnement facile à manipuler. Pour cela nous avons eu besoin de définir les variables d'entrée et les variables de sortie.

1. Entrées :

On introduit les données telles que :

- La demande moyenne annuelle D .
- Le coût de lancement d'une commande C_a .
- Le coût de maintien C_s .
- Le délai de livraison L .
- La demande moyenne durant la période μ .
- La valeur associée au risque de rupture choisi Z .
- La valeur de l'écart type s .

2. Sorties :

- La quantité optimale de commande : Q^* .
- Le point de commande : r .
- Le stock de sécurité : S_s .
- Le coût de gestion : C_t .

4.1 Application et interprétation des résultats

Sous l'excel, nous avons eu le tableau suivant

La demande annuelle D	2522722,8
Coût de lancement Ca	12000
Coût de maintien en stock Cs	1
La demande moyenne μ	21022,6
L'écart type	54913,59
La valeur Z	3,09
Le délai de livraison L	2
La quantité optimale	246059,6416
Le point de commande	282013,1901
Le stock de sécurité	239967,9901
Le coût de gestion	486027,6317

FIGURE 2 – Le tableau obtenu avec excel

D	Ca	Cs	μ	σ	Z	L
2522722.8	12000	1	21022.6	54913.59	3.09	2

FIGURE 3 – Les paramètres utilisés

Le choix du modèle (Q, r) est motivé par le fait qu'il offre de meilleures estimations concernant la quantité à commander et le point de commande.

Sous l'excel, nous avons obtenu les résultats suivants :

	Quantité optimale	Le point de commande	le stock de sécurité	Le coût de gestion
Résultat	246059,6416	282013,1901	239967,9901	486027,6317

FIGURE 4 – Les résultats obtenus

D'après les résultats obtenus, on remarque à chaque fois que le niveau de stocks de la poudre de lait atteint 282013,1901 tonnes on lance une commande de quantité égale à 246059,6416 tonnes, cette quantité permet de minimiser le coût total et d'éviter la rupture de stocks et on remarque aussi d'une façon logique qu'un taux de service élevé (99.9) entraîne un stock de sécurité important qui égale à 239967,9901 tonnes.

La quantité optimale et le point de commande trouvés sont valables juste pour l'année 2016, mais pour les années qui suivent, on doit refaire le même travail (calcul des prévisions, calcul de la quantité optimale de commande et le point de commande), on doit tenir en compte de toutes les prévisions des années précédentes alors la moyenne et l'écart type de la demande vont changer et automatiquement la quantité optimale et le point de commande vont changer aussi. Nous proposons aux responsables de l'entreprise de revoir leurs politiques de réapprovisionnement afin de pouvoir affronter les nouvelles perspectives économiques, sans oublier de tenir compte de la notion de la quantité optimale de commande qui doit être déterminée avec soin et précision, afin de diminuer les surcoûts de stockage et d'éviter les ruptures. L'entreprise doit se baser sur l'historique de la demande afin qu'elle puisse prévoir la quantité à approvisionner.

5 Conclusion

Comme toute entreprise, la SARL Ramdy doit s'adapter aux besoins de ses clients et de répondre de la manière la plus rentable possible. Dans ce cadre, nous voyons l'importance de la politique d'approvisionnement dont les choix d'orientation doivent être guidés par les objectifs à atteindre. Notre étude a pour objectif d'examiner un cas pratique au sein de l'entreprise Ramdy, elle est basée sur les données recueillies à partir des archives de l'entreprise, malgré le manque de données pour certains articles et l'absence des données pour d'autres.

Nous avons choisi un modèle de gestion qui offre un meilleur service et qui minimise le coût de gestion totale et qui permet d'éviter surtout les pénuries.

Références

- [1] Belkacem, S., Bemsalama, N. Gestion des stocks des produits finis au niveau de l'entreprise les moulins de la Soummam Sidi Aich / spa : approvisionnement par production. Mémoire de fin d'étude, Département de Recherche Operationnelle, Université de Béjaïa (2003).
- [2] Foudad, B., Nait Alitouche, S. : Gestion de stocks de matières premières : modélisation, simulation et application d'une méthode multicritère d'aide à la décision. Cas Danone

Djurd- jura, Algérie." Mémoire d'Ingéniorat en Recherche opérationnelle Université de Bejaia (2005).

- [3] Rambeux, A. : Gestion économique des stocks, édition dunod, (1982).
- [4] Vallin, P. : Détermination d'une période économique robuste dans le cadre du modèle de Wilson. Lamsade Université de Paris Dauphine,(1999).
- [5] Zermati, P. : Pratique de la gestion des stocks. Edition Dunod, (1996).
- [6] Catalogue et documentations techniques du constructeur. SARL Ramdy.

Index des Auteurs

- Abda Youssouf, 452
Abdelnacer Smati, 510
Achemine Farida, 676
Adel-Aissanou Karima, 440
Adiche Chahrazad, 122
Adjabi Smail, 320, 355, 690
Adla Abdelkader, 605
Adoui Ibtissem, 612
Aghouiles Zidane, 440
Aiane Nedjma, 34
Aider Meziane, 6
Ainouche Amina, 630
Aissani Sofiane, 434, 715, 733
Ait Ameer Ahmed, 101
Ait Kaci Azzou Samira, 496
Aliane Mohamed, 154
Aliat Billel, 393
Amira Sarra, 782
Amroun Kamal, 459
Arezki Ouerdia, 409
Aries Nawel, 389
Arkoub Hamid, 558
Atil Lynda, 420, 599
Ayhar Chafiâa, 367
Azi Mourad, 141
Aziez Walid, 281
Aïssani Djamil, 16, 34, 114, 474,
593, 721, 739, 751, 757, 764,
782, 807
- Bakdi Khadidja, 531
Barache Bahia, 53
Barbu Vlad Stefan, 367
Barkaoui Kamel, 8
Barreiro-Gomez Julian, 189
Bazizi Lydia, 642
Becheur Abdelhamid, 544
Bechroune Lydia, 440
Becila Sabah, 403
Belaidi Rim, 141
Belhocine Sid Ali, 434
Belhoul Saida, 739
Belkacemi Hamza, 770
Benabdeslam Chafiaa, 287
Benadjaoud Imene, 496
Benaouicha Mustapha, 7
Benchaira Souad, 384
Bendjebar Safia, 481
Benghenia Hadj Abdelkader, 648,
659
Benkaddour Sakina, 41
Benseradj Hassiba, 344
Bentobache Mohand, 216, 223
Benyessad Djamel, 558
Benziada Mohamed Abdelghani, 523
Benziadi Fatima, 47, 668
Berdjoudj Louiza, 10, 671
Berkane Khelifa, 76
Berrane Nassima, 739

- Bibi Mohand Ouamer, 128, 141, 196,
 203, 210, 216, 223, 230, 236
 Boualem Mohamed, 16, 671, 721,
 727
 Bouazabia Marya, 776
 Bouaziz Tayeb, 148
 Boubakeur Ahmed, 523
 Bouchama Amira, 776
 Bouchama Kahina, 788
 Bouchentouf Amina Angelika, 22,
 28, 671, 727
 Boudache Souad, 287
 Boudhar Mourad, 745
 Boudjehem Rochdi, 452
 Boudjelda Souhaib, 243
 Boughaci Dalila, 776
 Boughani Lhadi, 751
 Bouhalouan Djamila, 605
 Bouibed Karima, 574
 Boukredera Djamila, 440, 496
 Boumesbah Asma, 167
 Boumezirene Thiziri, 531
 Boumimiz Fayçal, 579
 Bounia Lina, 799
 Bouroub Sadeki, 630
 Boussaha Zina, 702
 Boussouira Houria, 210
 Boutouis Manel Zahra, 305
 Bouznit Mohammed, 579
 Brahmi Belkacem, 243
 Brahmi Boualem, 173
 Brahmi Saloua, 446

 Chaabane Djamal, 160
 Chabi Tayeb, 795
 Chala Adel, 148
 Chaouche Randa Brick, 114
 Chenache Tinhinane, 715
 Cherfaoui Mouloud, 708
 Chergui Mohamed El-Amine, 167
 Chettab Abdelkader, 434
 Chettab Yasmine, 434
 Chettouf Anis, 727
 Chikouche Elias Taki Eddine
 Mohammed, 47

 Choutri Salah Eddine, 189

 Dehamnia Nasreddine, 721
 Dehbi Louiza, 154
 Dehimi Aimen, 671
 Derrech Amal, 173
 Djebara Sabiha, 676
 Djehiche Boualem, 4
 Djeloud Khalil, 223
 Djemai Samia, 196
 Djeniah Abd Elbasset, 587
 Djouadi Fahima, 593

 Elmoassaoui Hichem, 101

 Fandi Wahiba, 259
 Farah Zoubeyr, 715
 Farhi Nadir, 179
 Fellag Hocine, 420, 599
 Frihi Zahrate El Oula, 189

 Ghelielem Asma, 350
 Ghellab Fouzia, 757
 Ghomri Latefa, 259, 531, 566
 Grimes Walid, 428
 Guessoum Zohra, 332, 344, 350, 682

 Habbas Zineb, 459
 Haddadou Kamilia, 420
 Hadj Slimane Zine Eddine, 648, 659
 Hadjout Chafiâ, 230
 Hakmi Mohammed Amin, 216
 Hakmi Sedda, 89, 593, 770
 Hallal Nassim, 538
 Hamache Houssam, 10
 Hamadouche Djamel, 377
 Hamaz Abdelghani, 409
 Hamidatou Mouloud, 538
 Hamlat Tayeb, 326
 Hammoudi Abdelhakim, 273, 281,
 305, 316
 Hamrani Farida, 332
 Hamza Lamia, 489
 Harfouche Lynda, 690
 Harrouche Lyasmine, 599
 Hassaini Katia, 128

- Hedjam Akila, 377
 Hefaia Mohammed, 574
 Houalef Meriem, 22
- Ikhlef Lyes, 89, 95
- Kaber El Alem Mohamed, 682
 Kabyl Kamal, 135
 Kacimi Farid, 715
 Kadi Mokhtar, 28
 Kandouci Abdeldjebbar, 41, 76
 Karim Younsi, 510
 Kebiri Omar, 41
 Keddouh Halima, 593
 Kendi Salima, 764, 788
 Kernane Tewfik, 68, 82
 Khaldi Khaled, 108
 Khebouche Ali, 745
 Khelfaoui Youcef, 504
 Khemal-Bencheikh Yamina, 428
 Khemici Mohamed, 320
 Kihal Marouane, 489
 Kouloughli Sihem, 259
- Lachemot Tassadit, 16, 622
 Ladjemil Nesrine, 799
 Laffi Yacine, 452, 481
 Laggoune Radouane, 504
 Laib Soumia, 141
 Larbi Sabiha, 62
 Laribi Imane, 566, 636
 Lassassi Moundir, 5
 Lazari Nassima, 203
 Lebdioui Saad, 538
 Lebdiri Fatiha, 552
 Lekadir Ouiza, 89, 95, 642, 739, 751, 770, 799
 Lescheb Ines, 708
 Lounaci Abdelhakim, 265
- Mahiout Hichem, 179
 Makhloufi Sylia, 355
 Makranfar Zohra, 299
 Mancer Saida, 384
 Mansour Abdelaziz, 459
 Mansouri Charef Eddine, 398
- May Lamia, 504
 Mebrek Abdellah, 299
 Meddahi Samia, 108
 Mehenaoui Zohra, 452, 481
 Mekhaldi Abdelouahab, 523
 Mellah Adlane, 696
 Mendas Abdelkader, 299
 Menni Nassira, 361
 Merzougui Mouna, 403
 Metiri Farouk, 373
 Meziani Sara, 82
 Mohand Yazid, 446
 Mokhtari Fatiha, 326, 367
 Moussouni Nacima, 154
- Nachet Bakhta, 605
 Nait Mohand Nacim, 273
 Neciri Abdelhakim, 384
- Omar Mawloud, 715, 733
 Oubraham Sabrina, 807
 Oucherif Walid, 56
 Ouicher Fahima, 68
 Ouis Khedim Amaria, 250
 Oukid Nadia, 101, 702
 Ouzzani Fares, 389, 393
- Radjef Mohammed Said, 62, 179, 273, 281, 316, 788
 Rahmani Saâdia, 367
 Rahmi Nassima, 764
 Rahmoune Fazia, 34, 62, 642
 Remita Mouhamed Riad, 373
 Rezzag Abdelkrim, 236
 Rih Soumia, 339
- Saadi Nora, 696
 Sadoun Ahmed, 373
 Saïd Imadeddine, 474
 Saït Razika, 316
 Sayad Lamri, 474
 Sbai Abdelkader, 574
 Seghir Abdelghani, 552
 Seghir Abdelghani, 558
 Sekkak Sarah Yasmine, 114
 Sellami Mokhtar, 2

- Shakir Majid, 28
Slimani Walid, 708
Smati Abdelnacer, 516
Souam Said, 265
Souar Moussa, 668
Soufit Massinissa, 53
Souier Mehdi, 250
- Tadger Houda, 481
Tahir Akila, 764
Takhedmit Baya, 53
Tatachak Abdelkader, 339, 682
Tembine Hamidou, 189
Titaouine Mohammed, 612
Touabti Mohamed Chérif
 Abdelfettah, 516
Touazi Atik, 114
Touazi Baizid, 184, 795
Touche Nassim, 56, 416
- Toufouti Sabrina, 807
- Yahiaoui Lahcene, 22, 28
Yakoubi Oualid, 466
Yasmina Djabali, 807
Ykhlef Fayçal, 459
- Zaidi Ali, 160
Zamouche Djamila, 733
Zatout Ali, 579
Zeghdoudi Halim, 702
Zerrouk Afaf, 566
Ziane Yasmina, 355, 782
Ziani Abdelhakim, 466
Zirem Djamila, 16
Zizi Kahina, 715
Zoghbi Fatima, 782
Zouache Djaafar, 173
Zougab Nabil, 320, 355, 690, 696

Editions LaMOS 2022
ISBN : 978-9931-884-15-6

Présentation:

Il y a 30 ans de cela, le Colloque International MOAD'1992 (Méthodes et Outils d'Aide à la Décision) était organisé à Béjaia [voir le Compte Rendu publié par la revue MATAPLI de la SMAI (Société Française des Mathématiques Appliquées et Industrielles), n° 35, 1993, pp. 71 – 72]. Après Sidi Bel Abbès (2000), Saïda (2003) et Béjaia (2007), la 5ème édition du MOAD est programmée de nouveau à Béjaia du 15 au 17 novembre 2022, en tenant compte des évolutions scientifiques et technologiques de ces dernières années.

Cette manifestation (06 conférences plénières, 136 communications, une table ronde) couvre tous les aspects (mathématiques, techniques, économiques, opérationnels) des Méthodes et Outils d'Aide à la Décision. Son principal objectif est de confronter différentes disciplines s'occupant de la décision, notamment des domaines où s'est manifesté ces dernières années un effort d'analyse scientifique et/ou des espérances de synthèse théorique (ou de réalisations pratiques et spécialisées) assez important.

ISBN: 978-9931-884-15-6



978-9931-884-15-6