U.S.T.H.B. Alger

Institut d'Informatique
Post-Graduation

Amar AÏSSANI

Djamil AÏSSANI

Réseaux de Files d'Attente

Bab Ezzouar - 1988

Réseaux de files d'attente

AVANT – PROPOS

L'objet du cours "Modélisation des Systèmes Informatiques" est d'exposer un certains nombre de méthodes utilisées pour l'évaluation des performances des systèmes informatiques et télé-informatiques.

Dans un premier temps, nous avons fait des rappels sur des notions de statistiques, processus aléatoires et files d'attente, exposées notamment dans [1] et [2]. Une attention particulière a été accordée à l'analyse des phénomènes d'attente : analyse de l'évolution des systèmes, identification des modèles, récolte des données, identification des lois de probabilité, analyse opérationnelle, ...

L'étape suivante a consisté à faire un certain nombre de rappels sur les modèles Poissoniens (à serveur unique, à plusieurs serveurs, à paramètres variables), et les modèles non Markoviens (méthode des étapes d'Erlang). Nous avons tenu également à donner une idée sur les méthodes de la chaîne de Markov incluse et de l'introduction de variables supplémentaires.

Après l'étude des réseaux de files d'attente, plusieurs exposés ont permis d'avoir une idée d'ensemble, sur notamment :

- Les réseaux de files d'attente à serveurs non fiables [4] ;
- Les techniques et les langages de simulation [3] ;
- Les réseaux de Petri ;
- Les méthodes itératives et les méthodes approchées ;
- L'approximation par des diffusions.

Enfin une attention particulière a été accordée à l'interprétation informatique (i.e. aux problèmes liés à la conception et à l'évaluation de la performance de systèmes complexes de calculs et informatiques) [5].

Cette évaluation soulève de nombreuses difficultés, dont l'une des plus importante et des plus complexes est la sûreté nécessaire de discuter la possibilité d'étendre les techniques classiques et moins classiques de la fiabilité aux problèmes de sûreté de fonctionnement [6].

Références

[1] Aïssani D., Statistiques appliquées pour ingénieur, c.p.e, I.Sc B, Constantine, 1978, 179 pages.

[2] Aïssani D. et Bouguerra A., Cours de Processus Aléatoires et Files d'Attente, U.E.R Math-Informatique, E.N.I.T.A, 1985.

[3] Aïssani D., Modélisation et Simulation des Systèmes Industriels, cours de Post-Graduation, Institut d'Informatique, Université d'Annaba, 1987.

[4] Aïssani A. et Aïssani D., Fiabilité des Systèmes et Systèmes de files d'attente non fiables, U.E.R, Mathématique-Informatque, E.N.I.T.A, 1986, 90 pages.

[5] Aïssani A., Phénomènes d'attente dans les systèmes informatiques U.E.R Math-Info, E.N.I.T.A, 1988, 100 pages.

[6] Actes de la conférence nationale "Modèles de Fiabilité et Science de l'Ingénieur", Béjaïa, mars 1988.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Flot des départs des S.F.A.(Systèmes de files d'attente) **1**

3 Systèmes "multi-phases" **5**

4 Réseaux exponentiels **8**

5 Réseaux fermés avec usagers non homogènes **25**

6 Réseaux mixtes à plusieurs classes **27**

7 Réseaux avec différents types de service **37**

8 Approximation de diffusion des réseaux **38**

1 Introduction

Les modèles considérés jusqu'à présent ne sont que des approximations grossières des systèmes réels. En effet très souvent on se trouve en présence de plusieurs Systèmes de files d'attente (on dit encore "stations de service" où "nœuds") interactifs et durant son processus de service l'usager sollicite successivement un ou plusieurs systèmes. Cette situation est bien illustrés par un système informatique ou les requêtes sont traitées successivement par différentes ressources (unité centrale, mémoires, unités entrées-sorties...).

l'étude de ces modèles de phénomènes d'attente s'avère souvent complexe car le flot des arrivées dans une station est la superposition des flots de requêtes en provenance des autres nœuds du réseau. Ce flot n'est pas Poissonien (ni même récurrent d'ailleurs) et les caractéristiques du réseau sont difficiles à déterminer. Il existe cependant une classe de modèles pour lesquels on arrive à obtenir une solution simple : Ce sont les réseaux exponentiels pour lesquels la distribution de probabilité des états s'obtient sous forme de produit. Cette propriété remarquable des réseaux exponentiels est une conséquence du théorème de Burke selon lequel les flots des départs sont Poissoniens. Ce résultat que nous avons déjà énoncé au fait justement l'objet du paragraphe suivant. L'étude des réseaux exponentiels est reportée aux sections (3) et (4). Dans les sections (5) - (7) nous montrons que la formule-produit reste valable pour une plus large classe de réseaux : ceux dont la fonction de répartition de la durée de service admet une transformée de Laplace-Stiltjes rationnelle (loi de Cox). Dans le paragraphe (8) nous présentons la méthode d'approximation de diffusion qui permet d'étudier des réseaux quelconques.

2 Flot des départs des S.F.A.(Systèmes de files d'attente)

Considérons un système de files d'attente à serveur unique. Nous noterons par :

$$A(x) = P(\xi_n < x),\ \xi_n = t_n - t_{n-1},\ \lambda^{-1} = \int_0^{+\infty} x dA(x)$$

la fonction de répartition de la durée d'inter-arrivées et par :

$$H(x) = P(\tau_n < x),\ \mu^{-1} = \int_0^{+\infty} x dH(x)$$

celle de la durée de service. Soit d'autre part $t'_1 < t'_2 < ... < t'_n < ...$ les dates de départ des usagers, $\xi'_n = t'_n - t'_{n-1}$ la durée entre les départs des $n^{\text{ième}}$ et $(n-1)^{\text{ième}}$ usagers et $D(x) = P(\xi'_n < x)$. On admettra que les variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geq 1}$, $(\tau_n)_{n>1}$ sont indépendantes dans leur ensemble.

Théorème 1.
Supposons que la condition d'ergodicité géométrique :

$$\rho = \lambda/\mu < 1 \tag{1}$$

est vérifiée. Les variables aléatoires $(\xi'_n)_{n\geq 1}$ *sont indépendantes et* $D(x) = 1 - e^{\lambda x},\ x \geq 0$ *si et seulement si :*

1. $A(x) = 1 - e^{\lambda_x}$;
2. $H(x) = 1 - e^{\mu x}$;
3. *La discipline de service n'altère pas la durée de service.*

Preuve.
La durée ξ' *entre deux départs successifs vaut :*

$$\xi' = \begin{cases} \tau & \textit{Si le serveur est occupé,} \\ \xi + \tau & \textit{Si le serveur est inactif.} \end{cases}$$

Selon la formule des probabilités totales :

$$D(x) = P(\xi' < x/E_0).P(E_0) + P(\xi' < x/\overline{E}_0).P(\overline{E}_0)$$

où E_0 *est l'événement* ***"le serveur est inactif"****. On a :*

$$D(x) = (1-\rho)\int_0^{+\infty} H(x-y)dA(y) + \rho H(x). \tag{2}$$

En introduisant les transformées de Laplace-Stieltjes :

$$a(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}dA(x)\ ;\ h(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}dH(x)\ ;\ d(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}dD(x)$$

l'équation (2) devient :

$$d(s) = (1-\rho)a(s)h(s) + \rho h(s) \tag{3}$$

comme ξ *et* τ *sont de lois exponentielles de paramètres* λ *et* μ *respectivement :*

$$d(s) = (1-\rho)\frac{\lambda}{\lambda+s}.\frac{\mu}{\mu+s} + \frac{\mu}{\mu+s} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

La formule d'inversion donne immédiatement $D(x) = 1 - e^{-\lambda_x}$.
Réciproquement, si on suppose que $d(s) = \lambda/(\lambda+s)$ *et* $h(s) = \mu/(\mu+s)$*, alors de (3) il résulte que* $a(s) = \lambda/(\lambda+s)$*. Si maintenant* $a(s) = d(s) = \lambda/(\lambda+s)$*, alors de (3) il découle que* $h(s) = \mu/(\mu+s)$*. D'autre part* $\rho h(s) + (1-\rho)h(s)a(s) = d(s)$ *si* $h(s)$ *et* $a(s)$

ne sont pas des transformées de Laplace-stiljes de lois exponentielles. La démonstration de ce résultat est assez complexe (elle consiste à comparer les coefficients de la décomposition de $\lambda/(\lambda+s)$ et nous la négligeons ici). L'indépendance des variables aléatoires $(\xi'_n)_{n\geq 1}$ résulte de la propriété d'absence de mémoire des modèles Poissonniens, de l'indépendance des durées de service, ainsi que du fait que le choix des usagers dans une file non vide ne dépend pas des durées de service des usagers.

■

Considérons les intervalles (t'_{n-1}, t'_n) et (t'_n, t'_{n+1}) de durée ξ'_n et ξ'_{n+1} respectivement. La liaison entre (t'_n, t'_{n+1}) et la préhistoire du système n'apparaît qu'a travers la dépendance du nombre d'usagers dans le système de file d'attente à la date de départ du $n^{\text{ième}}$ usager.

Dans le théorème (2) nous montrons que ξ'_n et le nombre d'usagers présents à la date de départ t'_n sont indépendants. Enfin, si la discipline de service dépend des durées de service, alors la durée d'inter-arrivées pendant la période d'activité ne sera pas exponentielle mais aura une loi dépendant du nombre d'usagers dans le système aux dates des départs précédents.

Théorème 2.
Pour le système Poissonien à m serveurs si $\lambda < \mu m$ alors les variables aléatoires $(\xi'_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants et $D(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Preuve.
Soit ξ' un intervalle fixe entre deux départs successifs ; $J(t)$ le nombres d'usagers présents dans le système, t unités de temps après le départs du dernier usager ; $J(\xi')$ le nombre d'usagers présents dans le système à l'instant qui suit immédiatement le départ, alors :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P\left[J(t) = n, \xi' > x\right] \\ F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(x) = P(\xi' > x) = 1 - D(x). \end{aligned} \tag{4}$$

En régime stationnaire on obtient :

$$F_n(0) = P_n \ , \ n = 0, 1, ... \tag{5}$$

où P_n a été obtenue dans [10].
D'après [10] nous avons :

$$\begin{aligned} F_0(x+h) &= (1-\lambda h)F_0(x) + \circ(h); \\ F_n(x+h) &= (1-\lambda h)(1-\mu_n h)F_n(x) + \lambda h F_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Avec $\mu_n = \mu \min(n,m)$. En passant à la limite lorsque h tend vers zéro nous obtenons le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}\frac{dF_0(x)}{dx} &= -\lambda F_0(x),\\ \frac{dF_n(x)}{dx} &= -(\lambda+\mu_n)F_n(x)+\lambda F_{n-1}(x)\ ,\ n=1,2,...\end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équations avec pour condition initiale $F_n(0) = P_n$, $n \geq 0$ nous donne : $F_n(x) = P_n e^{-\lambda x}$. En tenant compte de la condition de normalisation, nous obtenons $F(x) = e^{-\lambda x}$ et d'après (4), $D(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
Montrons maintenant que $J(\xi')$ et ξ' sont indépendants. La distribution conjointe de $J(\xi')$ et ξ' peut être obtenue à partir de la relation suivante :

$$P\left[J(\xi')=n,\ x<\xi'<x+h\right] = F_{n+1}(x)\mu_{n+1}h = \mu_{n+1}P_{n+1}he^{-\lambda x}$$

Or d'après les équations d'états de Kolmogorov en régime stationnaire (cf.[10]) :

$$\mu_{n+1}P_{n+1} = \lambda P_n.$$

Par conséquent :

$$P\left[J(\xi')=n, x<\xi'<x+h\right] = \lambda P_n e^{-\lambda x} = P(J(\xi')=n)P(x<\xi'<x+h)$$

L'indépendance des intervalles entre les départs résulte maintenant de la remarque faite lors de la preuve du théorème (1).

■

Finch P.O. [] a étudié le système $M/G/1/N$ et il montre que les dates des départs d'un tel système forment un processus de Poisson si et seulement si la loi de service est exponentielle et si $N = +\infty$. Comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, l'analyse des modèles de réseaux de files d'attente sera considérablement simplifiée si les flots des départs forment au moins un processus de renouvellement. De nombreux auteurs se sont intéressés à cette question [] , cependant comme le montre le théorème suivant, les conditions pour qu'un système d'attente possède une telle propriété sont très restreintes.

Théorème 3.
Soit un système de files d'attente $M/G/1/N$ pour lequel les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes. Alors, le flot des inter-départs forme un processus de renouvellement si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Les durées de service sont toutes nulles avec une probabilité égale à un ;

2. $N = 1$ *;*

3. $N = 2$ *et les durées de service sont constantes ;*

4. $N = +\infty$ *et les durées de service sont de loi exponentielle ;*

Selon le cas, la distribution de probabilité des inter-départs est :

1. La même que celle du flot des arrivées ;

2. La convolution de celle du flot des arrivées et du processus de service ;

3. Une somme de convolution ;

4. La même que celle du flot des arrivées.

3 Systèmes "multi-phases"

On convient d'appeler ainsi le réseau de configuration particulière représenté sur la figure suivante :

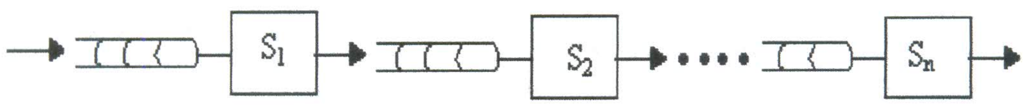

FIG. 1 – Structure d'un système "multi-phases"

Un tel système est constitué de n stations $S_1, S_2, ..., S_n$ disposées en série. Chaque station S_i est constituée de m_i serveurs statistiquement identiques et fonctionne selon le schéma classique donné dans [10]. L'itinéraire de chaque usager est donné par l'algorithme suivant : $a = (i, i+1, ..., j-1, j)$, où i est le numéro de la phase initiale de service de l'usager et j celui de la dernière phase.

Le flot des arrivées dans le système S_i est la somme du flot des arrivées en provenances de la source extérieure et de celui des usagers qui quittent S_{i-1} pour se rendre dans S_i. Soit :

λ_i : Le taux du flot des arrivées dans S_i en provenance de l'extérieur ;

ε_i : Le taux du flot des départs de S_i vers l'extérieur ;

Λ_i : Le taux du flot total des arrivées dans S_i;

q_i : La probabilité pour qu'à l'issue de son séjour à la phase S_i le client quitte la station.

Nous admettrons que tous les flots en provenance des sources extérieures sont simples et que les serveurs sont exponentiels de taux $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$.

Le système S_1 est Poissonnien et par conséquent le flot des départs est simple de taux λ_1 (théorème2). En vertu des propriétés des flots tamisés (cf. [10]), nous avons :

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 q_1$$

et le flot des arrivées dans S_2 est simple de taux :

$$\Lambda_2 = \lambda_2 + (1 - q_1)\lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \varepsilon_1.$$

De la même manière le flot des départs de S_2 vers l'extérieur est simple de taux :

$$\varepsilon_2 = \Lambda_2 q_2 = \lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_2 - \varepsilon_1$$

et celui des arrivées dans S_3 est simple de taux :

$$\Lambda_3 = \lambda_3 + \Lambda_2(1 - q_2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

On montre par récurrence que le flot des arrivées à la $j^{\text{ième}}$ phase est simple de taux :

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i - \sum_{i=1}^{j-1} \varepsilon_i. \tag{6}$$

Soit $V_i(t)$ le nombre de requêtes présentes à la date t à la i-ème phase et :

$$P(x) = \lim_{t \to +\infty} P(v_1(t) = x_1,\ v_2(t) = x_2, ..., v_n(t) = x_n) \tag{7}$$

les probabilités stationnaires des états du système.

Théorème 4.
Le processus $V(t) = (v_1(t), v_2(t), ...v_n(t))$ est un processus homogène de Markov. Si $\Lambda_i < \mu_i m_i,\ i = \overline{1,n}$ alors les probabilités $P(x)$ existent et ne dépendent ni du temps ni de l'état initial. Elles s'expriment sous la forme :

$$P(x) = P_1(x_1)P_2(x_2), ..., P_n(x_n)$$

où $P_i(x_i)$ est la distribution stationnaire de probabilité du nombre de requêtes dans S_i. L'expression de $P_i(x_i)$ est donnée dans [10] pour un système $M/M/m_i$ de taux des arrivées Λ_i. Ainsi, sous les hypothèses d'exponentialité (des durées d'inter-arrivées et de service) chaque station se comporte comme un système Poissonien indépendant. La démonstration rigoureuse de ce résultat peut être trouvée dans (Reich, [176]).

Dans le paragraphe suivant nous démontrons un résultat analogue pour les réseaux exponentiels.

Un modèle plus complexe à analyser est le système multi-phases avec blocages [166, 168, 124, 125, 122]. Les phénomènes de blocage résultent généralement de la limitation de la capacité des files d'attente. Lorsque la file de la $k^{\text{ième}}$ phase est pleine, alors le service à la $(k-1)^{\text{ième}}$ phase est bloqué jusqu'à ce qu'une place se libère, un exemple de ce type de modèle est représenté sur la figure suivante :

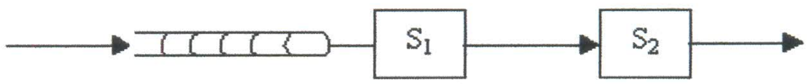

FIG. 2 – Modèle simple de réseau à deux phases avec blocage.

Dans ce système, il ne peut y avoir formation de file d'attente à la seconde phase. Cette disposition des stations entraîne des situation de blocage du premier serveur (les requêtes n'ont pas accès au service) même dans le cas où le service de la requête est terminé et que la file n'est pas vide. Le service reprend dès que le second serveur se libère et la requête bloquée accède à la seconde phase. Soit :

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si une requête est en cours dans } S_1; \\ 1 & \text{Si une requête est bloquée;} \end{cases}$$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si le serveur } S_2 \text{ est libre;} \\ 1 & \text{S'il est occupé.} \end{cases}$$

Soit :

$$P_n(i,j;t) = P\left[v(t) = n,\ \ S(t) = i,\ \ E(t) = j\right]$$

où $v(t)$ est le nombre de requêtes à la première phase.
En régime stationnaire on a :

$$\begin{aligned}
&\lambda P_0(0,0) = \mu P_0(0,1) \\
&(\lambda+\mu)P_0(0,1) = \mu P_0(1,1) + \mu P_1(0,0) \\
&(\lambda+\mu)P_0(1,1) = \mu P_1(0,1) \\
&(\lambda+\mu)P_n(0,0) = \lambda P_{n-1}(0,0) + \mu P_n(0,1) \\
&(\lambda+2\mu)P_n(1,1) = \lambda P_{n-1}(0,1) + \mu P_n(1,1) + \mu P_{n+1}(0,0) \\
&(\lambda+\mu)P_n(1,1) = \lambda P_{n-1}(1,1) + \mu P_{n+1}(0,1)
\end{aligned}$$

Hunt G.C. montre que $\rho = 2/3$ est la charge maximale admissible. La solution générale est obtenue sous la forme :

$$\begin{aligned} P_n(0,0) &= \sum_{j=2}^{4} C_{1j}\, r_j^n; \\ P_n(0,1) &= \sum_{j=2}^{4} C_{2j}\, r_j; \\ P_n(1,1) &= \sum_{j=2}^{4} C_{3j}\, r_j^n; \end{aligned}$$

Pour $n \geq 4$, où : $r_2 = \rho/(1+\rho)$; $r_{3,4} = (\rho/4)\{(\rho+3) + \sqrt{\rho^2+6\rho+1}\}$. Pour $n < 4$ le résultat est obtenu directement des équations d'équilibre. La probabilité $P_0(0,0)$ est obtenue à partir de la condition

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[P_n(0,0) + P_n(0,1) + P_n(1,1)] = 1.$$

Pour ce type de modèle, il existe des tentatives de mettre en évidence les conditions pour que le flot des arrivées à une station soit Poissonien On trouvera dans des résultats concernant les systèmes à deux phases avec blocage. Les conditions de stabilité sont considérées dans pour différentes règles de conduite de l'usager bloqué.

Lors de l'étude de modèles multi-phases on s'intéresse souvent au problème de la détermination des conditions pour lesquels la disposition des stations (phases) n'influe pas sur la distribution de la durée de séjour de l'usager ; par exemple dans le cas où le flot des requêtes est arbitraire on a établit les conditions suivantes :

- Même nombre de serveurs à chaque phase (Avi-Itzhak)
- Nombre arbitraire de serveurs à chaque phase et file illimitée à chaque phase (Friedman).

D'autres conditions intermédiaires peuvent être mises en évidence on trouvera d'autres questions de l'étude des systèmes multi-phases dans [196, 64, 175, 163, 124, 125, 176]

4 Réseaux exponentiels

L'itinéraire des usagers dans un système multi-phases obéit à un certain ordre : si l'usager sollicite les stations S_i et S_j, alors la phase i précède la phase j, si $i < j$ et l'usager doit parcourir toutes les phases intermédiaires.

Très souvent dans les réseaux réels après chaque phase la requête peut solliciter à priori n'importe quelle autre phase. A l'issue du service à la phase i l'usager opte pour la phase j avec une probabilité égale à P_{ij} ou bien quitte le réseau avec une probabilité P_{i0} :

$$\sum_{j=0}^{n} P_{ij} = 1 \ , \ i = \overline{0,n}.$$

Les usagers proviennent d'une source extérieure à des dates aléatoires qui forment un processus homogène de Poisson de taux λ_i. A son arrivée dans le réseau l'usager opte pour la station S_i avec une probabilité égale à P_{0i} :

$$\sum_{i=0}^{n} P_{0i} = 1$$

la requête est immédiatement prise en charge par l'un des serveurs inactifs et la durée de service est de loi exponentielle de paramètre μ_i. Si la requête trouve tous les serveurs occupés, alors elle rejoint la file d'attente commune de capacité illimitée. L'usager attend son tour jusqu'au moment où il sera pris en charge par l'un des serveurs selon la discipline FIFO. On admet généralement que $P_{00} = 0$ car ce cas ne présente pas d'intérêt pratique. Ce type de réseau a été étudié pour la première fois par Jackson J.R. .
Soit $V(t) = (v_1(t),\ v_2(t), ...v_n(t))$ où $v_i(t)$ représente le nombre de requêtes présentes à la date t dans le station S_i.

Théorème 5. ***(de décomposition de Jackson)***
Supposons que les conditions suivantes soient remplies :

1. *Le flot des arrivées est simple de taux* Λ.
2. *Les* m_i *serveurs de la station* S_i *sont exponentiels de taux* $\mu_i,\ i = \overline{1,n}$.
3. *La matrice stochastique* $\mathbf{P} = \| P_{ij} \|$ *est irréductible.*
4. *La discipline de service est FIFO (ou toute autre discipline indépendante des durée de service des requêtes en attente).*

Alors,

1. *Le processus* $V(t)$ *est un processus homogène de Markov.*
2. *Les coordonnées du vecteur* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ *(où* λ_i *est le taux des arrivées à la stations* S_i*), sont solutions du système linéaire d'équation algébriques :*

$$\lambda_i = \lambda_0 P_{0\,i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{j\,i}, \; i = \overline{1,n} \tag{8}$$

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{j\,0} \tag{9}$$

Si de plus on a :

$$\max_{1 \le i \le n} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i m_i} \right) < 1 \tag{10}$$

alors les probabilités ergodiques stationnaires :

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{t \to +\infty} P\left[v_1(t) x_1 \;,\; v_2(t) = x_2, ..., v_n(t) = x_n\right]; \\ P_i(x_i) &= \lim_{t \to +\infty} P\left[v_i(t) = x_i\right]; \end{aligned}$$

existent et on a la décomposition suivante :

$$P(x) = P_1(x_1) P_2(x_2) ... P_n(x_n) \tag{11}$$

où :

$$P_j(x_j) = \begin{cases} P_j(0) \left(\frac{\lambda_j}{u_j}\right) x_j \; \frac{1}{x_j!} & si \;\; x_j \le m_j \\ P_j(0) \left(\frac{\lambda_j}{u_j}\right) x_j \; \frac{1}{m_j! m_j^{x_j - m_j}} & si \;\; x_j > m_j \end{cases}$$

$$P_j(0) = \left[\sum_{x_j=0}^{m_{j-1}} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right) x_j \; \frac{1}{x_j!} + \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right) m_j \; \frac{1}{m_j! \; (1 - \frac{\lambda_j}{\mu_j m_j})} \right]^{-1} \tag{12}$$

Preuve.

Si on désigne par e_i le vecteur de dimension n dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de la $i^{ième}$ qui vaut 1, alors les probabilités de transition durant un petit intervalle de temps $(t, \; t+h)$ du processus Markovien $V(t)$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} P(x \xrightarrow{\;h\;} x + e_i) &= P\left[v(t+h) = x + e_i \;/\; V(t) = x\right] = \lambda P_{o\;i} h + \circ(h) && (13) \\ P(x \xrightarrow{\;h\;} x - e_i) &= \mu_i(x_i) P_{o\,i} h + \circ(h) && (14) \\ P(x \xrightarrow{\;h\;} x + e_i - e_j) &= \mu_i(x_i) P_{i\;j} h + \circ(h) && (15) \end{aligned}$$

$$\mu_i(x_i) = \mu_i \; \min \; (m_i, x_i)$$

La première probabilité de transition (13) signifie que durant $(t, \; t+h)$ un usager est arrivé dans le réseau en provenance de la source externe et qu'à son arrivé il opte pour le système

S_i. L'égalité (14) signifie que durant $(t,\ t+h)$ un usager a été servi dans S_i et qu'il décide ensuite de quitter le réseau. Une autre possibilité (15) est le cas où l'usager quitte le station S_i pour se rendre dans S_i. Les autres transitions possibles sont d'ordre $o(h)$ nous pouvons les négliger. En régime stationnaire nous pouvons écrire les équations d'états :

$$\left[\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i)\right] P(x) \;=\; \lambda_0 P_{0\ i} P(x-e_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i+1) P_{i\ 0} P(x+e_i) + $$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \mu_i(x_{i+1}) P_{ij}\ P(x+e_i-e_j) \tag{16}$$

Notons que les formules (9) - (12) sont analogues à celles des probabilités stationnaires des états du système $M/M/m_i$ et c'est pourquoi (cf. [10]) on peut les réécrire sous la forme :

$$P_j(x_j) = P_j(0) \prod_{i=1}^{x_j} \frac{\lambda_i}{\mu_j(i)} \tag{17}$$

La valeur λ_0 étant connue, alors en vertu de l'hypothèse 4 du théorème (5) le système d'équations (8)-(9) admet une solution unique.
Montrons maintenant que si nous reportons (11)-(12) et (17) dans (16) alors nous obtenons une identité. En vertu de (17) il résulte que :

$$P_j(x_{j-1}) = P_j(0) \prod_{j=1}^{x_j-1} \frac{\lambda_i}{\mu_j(i)} = \frac{\mu_j(x_j)}{\lambda_j}\ P(x_j)$$

En reportant cette expression dans (11) on obtient :

$$P(x-e_j) = \frac{\mu_j(x_j)}{\lambda_j}\ P(x);$$

c'est pourquoi :

$$\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} P_{0i}\ P(x-e_i) = P(x) \sum_{j=1}^{n} P_{0i}\ \frac{\mu_i(x_i)}{\lambda_i}.$$

De la même manière :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i+1)\ P_{0i}\ P(x+e_i) = P(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ \frac{\mu_i(x_i)}{\lambda_i};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1_{j\neq i}}^{n} \mu_i(x_j+1) P_{ji}\ P(x+e_i-e_j) = P(x) \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\ \mu_i(x_j) P_{ji}.$$

Après simplification par $P(x)$ dans (16) nous obtenons :

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} P_{0i} \frac{\mu_i(x_i)}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{i0} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_j P_{ji} \frac{\mu_i(x_i)}{\lambda_i}.$$

Cette égalité se transforme en identité car :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{i0} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \{1 - \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i P_{ij}; \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_0 P_{oj}) = \lambda_0 \sum_{j=1}^{n} P_{0j} = \lambda_0;
\end{aligned}$$

(c'est l'équation (9))

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} P_{0i} \frac{\mu_i(x_i)}{\lambda_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i P_{ij} \frac{\mu_j(x_j)}{\lambda_j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j(x_j)}{\lambda_j} \left[\lambda_0 P_{0j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{ij} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i).
\end{aligned}$$

■

Remarque 1. *Bien que le théorème ait été démontré initialement par Jackson dans le cas ou $P_{ii} = 0$ il reste valable dans le cas où $P_{ii} > 0$.*

Remarque 2. *La quantité $P_j(x_j)$ représente la probabilité stationnaire pour qu'il y ait x_j requêtes dans un système Poissonien $M/M/m_j$ dont le flot des arrivées est simple de taux λ_j. Comme pour les systèmes multi-phases, cela signifie que chaque système se comporte dans le réseau comme un système indépendant. Cette propriété remarquable des réseaux Jacksoniens permet de simplifier leur étude en les étudiant station par station. Les caractéristiques de chaque système sont alors obtenues à l'aide des formules correspondantes (cf. [10]) pour le modèle Poissonien $M/M/m_j$ (μ_i, λ_j).*

Ce type de réseau que nous venons d'étudier s'appelle généralement réseau ouvert car il y a toujours interaction entre le réseau et l'environnement extérieur. Une modification de ce type de réseau a été considérée par Gordon et Newell ils considèrent un modèle de réseau fermé qui se caractérise par la présence permanent d'un nombre constant de requêtes :

$$\forall\, t \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} v_i(t) = N.$$

Dans ce cas, les usagers ne peuvent provenir de l'extérieur, ni quitter le réseau, après chaque service l'usager est simplement orienté vers une autre station. Ce modèle est un cas particulier du réseau Jacksonien avec :

$$\lambda_0 = 0,\ P_{0i} = P_{i0} = 0; \quad \forall\ i = \overline{1,n}.$$

Notons que dans ce cas, le système d'équations (8) , (9) admet une infinité de solutions. Si on se fixe l'une des valeurs λ_i (par exemple λ_1) alors on peut déterminer de manière unique les autres quantités :

$$\lambda_j = \alpha_j \lambda_1. \tag{18}$$

Comme le réseau est fermé, il ne peut y avoir formation de files d'attente de tailles infinies. C'est pourquoi l'analyse du régime stationnaire ne permet de mettre en évidence que le système le plus chargé. C'est celui pour lequel on a :

$$\frac{\alpha_{j_0}}{m_{j_0}\mu_{j_0}} = \max_{1\le j\le n}\left(\frac{\alpha_j}{m_j\mu_j}\right).$$

Théorème 6. ***(Gordon-Newell)***
Si les hypothèses du théorème de Jackson sont remplies et si de plus :

$$\lambda_0 = 0;\ P_{i0} = p_{0i} = 0,\ \forall i = \overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} v_i(t) = N\ ,\ \forall\ t \ge t_0;$$

alors, les probabilités ergodiques stationnaires du processus $V(t)$ sont de la forme :

$$P(x) = \frac{1}{G_n(N)} \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i^{x_i}}{b_i(x_i)}; \tag{19}$$

$$G_n(N) = \sum_{\sum x_i = N} \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i^{x_i}}{b_i(x_i)}; \tag{20}$$

où les quantités z_i sont solutions du système d'équations

$$\mu_i z_i = \sum_{j=1}^{n} (\mu_i z_i) P_{ij}; \tag{21}$$

$$\begin{aligned} b_i(0) &= 1; \\ b_i(z) &= a_i(z)\ b_i(z-1); \qquad (22) \\ a_i(z) &= \min(x_i, m_i)\ ,\ i = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Preuve.

La méthode des équations d'états nous permet d'écrire en régime stationnaire :

$$P(x)\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(x_i)\ a_i(x_i)\ \mu_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon(x_i)\ a_i(x_i+1)\ \mu_i\ P_{ij}\ P(x+e_i-e_j); \tag{23}$$

$$\varepsilon(x_i) = \begin{cases} 0 & Si\ x_i = 0; \\ 1 & Si\ x_i \neq 0; \end{cases}$$

$$a_i(x_i) = \frac{\mu_i(x_i)}{\mu_i} = \min(m_i, x_i) = \begin{cases} x_i\ , & Si\ \ x_i \leq m_i; \\ m_i\ , & Si\ \ x_i > m_i. \end{cases}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$P(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1}(x_i)\right) Q(x); \tag{24}$$

et reportons cette expression dans (23) :

$$Q(x)\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_i(x_i)\ P_{ij}\ Q(x+e_i-e_j). \tag{25}$$

Nous allons chercher la fonction $Q(x)$ sous le forme :

$$Q(x) = C\left[\prod_{i=1}^{n} z_i^{x_i}\right];$$

où C est une constante à déterminer. Alors de (25) nous obtenons :

$$\mu_j\ z_j = \sum_{j=1}^{n}(\mu_j\ z_j)\ P_{ji}\ ,\ j = \overline{1,n}.$$

Ce système d'équations peut être réécrit sous forme matricielle :

$$yP = y; \quad avec \quad y = (\mu_1 z_1,\ \mu_1 z_2, ..., \mu_n z_n), \quad P = \|\ P_{ij}\ \|_{n\times n}\ .$$

Ce type d'équation a déjà été rencontré lors de l'étude des chaînes de Markov à espace des états fini. La solution est unique puisque la matrice stochastique **P** *est irréductible. La solution de(23) est donc de la forme :*

$$P(x) = \frac{1}{G_n(N)}\prod_{i=1}^{n}\frac{z_i^{x_i}}{b_i(x_i)}.$$

La constante peut être déterminée à partir de la condition de normalisation.

■

Remarque 3.

La solution pour le réseau fermé s'obtient de nouveau sous forme de produit. Malheureusement même cette forme explicite se prête mal au calcul des probabilités $P(x)$ (pour n et N grands) à cause de la constante de normalisation $G_n(N)$ qui s'exprime sous forme d'une somme. C'est pourquoi on utilise des algorithmes de calcul qui se réalisent aisément sur ordinateur [?].

• **Calcul de la constante de normalisation :**

Notons avant tout que les formules (19) - (22) peuvent être réécrites sous une forme plus commode :

$$P(x) = \frac{1}{G_n(N)} \prod_{j=1}^{n} C_j(x_j); \tag{26}$$

$$C_j(x_j) = \begin{cases} (\frac{a_j}{\mu_j})^{x_j}(\frac{1}{x_j!}), & x_i \leq m_j; \\ \\ (\frac{a_j}{\mu_j})\frac{1}{m_j!\; m_j^{x_j - m_j}}, & x_j > m_j; \end{cases} \tag{27}$$

(28)

$$G_n(N) = \sum_{\sum_{j=1}^{n} x_j = N} \prod_{j=1}^{n} C_j(x_j); \tag{29}$$

$$a_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \;,\; j = \overline{1,n};$$

et les quantités λ_j sont solutions du système d'équations :

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{ji} \;,\; i = \overline{1,n}. \tag{30}$$

Introduisons le paramètre suivant :

$$\omega_j = \frac{a_j}{(1 + \sum_{i=2}^{n} a_i)} \;,\; j = \overline{1,n} \tag{31}$$

qui représente la probabilité pour qu'un usager fixé arrive (à la date de transition) dans la station S_j. Si on multiplie le numérateur de l'équation (26) par :

$$\left[1 + \sum_{j=2}^{n} a_i\right] N;$$

alors on obtient après quelques transformations la formule (26) où ω_j se trouve à la place de a_j. Il est aisé de vérifier que les quantités ω_j peuvent être déterminées à partir du système d'équations :

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_{ij} \ , \ i = \overline{1,n}.$$

• **<u>Premier cas</u>** $(\mathbf{m_1 = m_2 = ... = m_n = 1})$.

Notons :

$$\sum_{\sum_{j=1}^{r} x_j \,=\, k} \ \prod_{j=1}^{r} C_j(x_j) = G_r(k). \tag{32}$$

Dans notre cas $C_j(x_j) = (\frac{\omega_j}{\mu_j})^{x_j} = y_j^{x_j}$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} G_r(k) &= \sum_{\substack{\sum_{j=1}^{r-1} x_j \,=\, k; \\ (x_r \,=\, 0)}} \ \prod_{J=1}^{r} y_j^{x_j} + \sum_{\substack{\sum_{j=1}^{r} x_j \,=\, k; \\ (x_r \,>\, 0)}} \ \prod_{j=1}^{r} y_j^{x_j}; \\ &= \sum_{\sum_{j=1}^{r-1} x_j \,=\, k} \ \prod_{j=1}^{r-1} y_j^{x_j} + y_r \sum_{\sum_{j=1}^{r} x_j \,=\, k\,-\,1} \ \prod_{j=1}^{r} y_j^{x_j}. \end{aligned}$$

Soit :

$$G_r(k) = G_{r-1}(k) + y_r G_r(k-1); \tag{33}$$

de plus :

$$G_1(k) = y_1^k \quad , \quad k = \overline{0,N}; \tag{34}$$

$$G_r(0) = 1 \quad , \quad r = \overline{1,n}. \tag{35}$$

La formule récurrente (33) avec les conditions initiales (34) et (35) donne un algorithme simple de calcul de la constante $G_n(N)$. • **<u>Deuxième cas</u>** $(\mathbf{m_i \geq 1 \ , \ i = \overline{1,n}})$

Dans ce cas, l'algorithme est de la forme :

$$G_r(k) = \sum_{\sum_{j=1}^{r} x_j \,=\, k} \ \prod_{j=1}^{r} C_j(x_j) = \sum_{l=0}^{k} C_r(l) \sum_{\sum_{j=1}^{r-1} x_j \,=\, k\,-\,1} \ \prod_{j=1}^{r-1} C_j(x_j).$$

Soit :

$$G_r(k) = \sum_{l=0}^{k} G_r(l) \ G_{r-l}(k-l) \tag{36}$$

avec les conditions initiales :

$$G_1(k) = C_1(k) = (\omega_1/\mu_1)^k (1/k!); \qquad \text{si } \ k \leq m_1 \tag{37}$$

$$G_1(k) = C_1(k) = (\omega_1/\mu_1)^k \frac{1}{m_1! m_1^{k-m_1}}; \qquad \text{si } \ k > m_1 \tag{38}$$

$$G_r(0) = 1; \qquad \forall\, r = \overline{1,n} \tag{39}$$

Ces algorithmes demandent "$2nN(N = 1)$" opérations arithmétiques. Dans [?], on propose un algorithme de calcul d'après le schéma dit de Gorner et qui demande :

$$"(1/2)(n-2)N(N=1)+2(N-1)"$$

opérations arithmétiques. La procédure peut être étendue au calcul des caractéristiques moyennes du réseau. Introduisons les notations suivantes :

$\overline{\upsilon}_{N,j}$: durée moyenne de séjour dans le système S_j ;

$\overline{\omega}_{N,J}$: durée moyenne d'attente de l'usager dans la file S_j ;

$\overline{u}_{N,j}$: nombre moyen de serveurs actifs dans S_j ;

$\overline{q}_{N,j}$: taille moyenne de la $j^{\text{ième}}$ file.

Il est évident (cf. [10]) que :

$$\overline{\upsilon}_{N,j} = \overline{\omega}_{N,j} + \frac{1}{\mu_j}; \tag{40}$$

$$\overline{q}_{N,j} = \overline{\mathrm{v}}_{N,j} + \overline{u}_{N,j}. \tag{41}$$

En régime stationnaire, on montre que :

$$\frac{\overline{\upsilon}_{N,j}}{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}} = \frac{\overline{\omega}_{N,j}}{\overline{q}_{N,j}}; \tag{42}$$

(dans le cas où $n = 1$ ce n'est rien d'autre que la formule de Little). En tirant $\overline{q}_{N,j}$ de la formule (42) et en la substituant dans (41) nous obtenons :

$$\overline{\mathrm{v}}_{N,j} = \overline{u}_{N,j} + \overline{\mathrm{v}}_{N,j}\ (\frac{\overline{\omega}_{N,j}}{\overline{\upsilon}_{N,j}}).$$

D'où,

$$\overline{\omega}_{N,j} = \frac{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}\ \overline{\upsilon}_{N,j}\ -\ \overline{u}_{N,j}\ \overline{\upsilon}_{N,j}}{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}}. \tag{43}$$

En substituant (43) dans (40) nous avons :

$$\overline{\upsilon}_{N,j} = (\frac{1}{u_j}) + \frac{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}\ \overline{\upsilon}_{N,j}\ -\ \overline{u}_{N,j}\ \overline{\upsilon}_{N,j}}{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}}.$$

D'où enfin,

$$\overline{\upsilon}_{N,j} = \frac{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}}{\overline{u}_{N,j}} \cdot \frac{1}{\mu_j}; \tag{44}$$

cette relation permettra plus loin de déterminer certaines caractéristiques du réseau.

1. Nombre moyen de serveurs actifs :

Il est aisé de voir que pour le $j^{\text{ième}}$ système :

$$\begin{aligned}\overline{u}_{N,j} &= \sum_{x_j=1}^{m_j} x_j P_{N,j}(x_j) + m_j \sum_{x_j=m_j+1}^{N} P_{N,j}(x_j) = \\ &= \sum_{x_j=1}^{m_j} x_j \sum_{N,x_j} P(x) + m_j \sum_{x_j=m_j+1}^{N} \sum_{N,x_j} P(x) \end{aligned} \tag{45}$$

où :
* $P_{N,j}(x_j)$: est la probabilité marginale pour qu'il y ait x_j requêtes dans le système S_j sachant que le réseau a une capacité totale de N requêtes;
* $\sum_{N,x_j} P(x)$: est la somme des probabilités par rapport à tout les états du réseaux sachant que la $j^{\text{ième}}$ station contient x_j requêtes.
En substituant (45) dans (26) nous obtenons en tenant compte de (29) :

$$\overline{u}_{N,j} = \frac{1}{G_n(N)} \left[\sum_{x_j=1}^{m_j} x_j \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) + m_j \sum_{x_j=m_j+1}^{N} \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) \right].$$

En tenant compte de (27) - (27) (en posant ω_j/μ_j au lieu de a_j/μ_j) nous obtenons après quelques transformations :

$$\begin{aligned}\overline{u}_{N,j} &= \frac{\omega_j}{\mu_j} \frac{1}{G_n(N)} \left[\sum_{x_j=0}^{m_j-1} \sum_{N-1,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) + + \sum_{N-1,x_j=m_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) \right. \\ &\left. + \sum_{x_j=m_j+1}^{N-1} \sum_{N-1,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) \right].\end{aligned}$$

L'expression qui figure entre accolade n'est autre que $G_n(N-1)$ et par conséquent :

$$\overline{u}_{N,j} = \frac{\omega_j}{\mu_j} \cdot \frac{G_n(N-1)}{G_n(N)} \tag{46}$$

2. Durée moyenne de séjour de l'usager :
D'après (44), nous avons :

$$\mu_j \overline{v}_{N,j} = \frac{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}}{\overline{u}_{N,j}}$$

D'ici, en tenant compte de (26)-(29) nous avons :

$$\mu_j \overline{v}_{N,j} = \frac{1}{\overline{u}_{N,j}\, G_n(N)} \sum_{x_j=1}^{N} x_j \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i x_i.$$

En tenant compte de (46) et après avoir effectué quelques transformations nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mu_j \overline{v}_{N,j} &= \frac{1}{(\omega_j/\mu_j) G_n(N-1)} \left\{ \sum_{x_j=1}^{m_j} x_j \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) + \sum_{x_j=m_j+1}^{N} x_j \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) + \right. \\
&\left. + m_j \sum_{x_j=m_j+1}^{N} \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) - m_j \sum_{x_j=m_j+1}^{N} \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) \right\} ; \\
&= \frac{1}{(\omega_j/\mu_j)\ G_n(N-1)} \left\{ \sum_{x_j=1}^{m_j} x_j \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) + m_j \sum_{x_j=m_j+1}^{N} \left[\sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) \right] + \right. \\
&\left. + \sum_{x_j=m_j+1}^{N} (x_j - m_j) \left[\sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) \right] \right\} ; \\
&= \frac{1}{G_n(N-1)} \left\{ \sum_{x_j=0}^{N-1} \sum_{N-1,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) + (1/m_j) \left[\sum_{x_j=m_j}^{N-1} (x_j - m_j + 1) \times \right. \right. \\
&\left. \left. \times \sum_{N-1,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) \right] \right\} ; \\
&= \frac{1}{G_n(N-1)} \left[G_n(N-1) + (1/m_j) \sum_{x_j=m_j}^{N-1} (x_j - m_j + 1) P_{N-1,j}(x_j) G_n(N-1) \right] ; \\
&= 1 + (1/m_j) \left[\sum_{x_j=m_j}^{N-1} (x_j - m_j + 1) P_{N-1,j}(x_j) \right] .
\end{aligned}$$

D'où :

$$\overline{v}_{N,j} = (1/\mu_j) \left[1 + (1/m_j) \sum_{x_j=m_j}^{N-1} (x_j - m_j + 1) P_{N-1}(x_j) \right] . \tag{47}$$

Afin de déterminer les probabilités $P_{N-1}(x_j)$ on peut utiliser les formules récurrentes :

$$\begin{aligned}
\frac{P_{N,j}(x_j)}{\overline{u}_{N,j}} &= \frac{1}{\overline{u}_{N,j}\, G_n(N)} \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) = \frac{1}{(\omega_j/\mu_j)\, G_n(N)} \sum_{N,x_j} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i); \\
&= \begin{cases} \frac{1}{x_j G_n(N-1)} \sum_{N-1,x_j-1} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i), & \text{si } 1 \leq x_j \leq m_j; \\[2ex] \frac{1}{m_j G_n(N-1)} \sum_{N-1,x_j-1} \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i), & \text{si } x_j > m_j; \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{x_j} P_{N-1,j}(x_j-1), & \text{si } \ 1 \leq x_j \leq m_j; \\[2ex] \frac{1}{m_j} P_{N-1,j}(x_j-1), & \text{si } \ x_j > m_j. \end{cases}
\end{aligned}$$

En utilisant (46) nous obtenons :

$$P_{N,j}(x_j) = \frac{\omega_j}{\mu_j} \frac{G_n(N-1)}{G_n(N)} \frac{P_{N-1,j}(x_j-1)}{\min(x_j, m_j)}. \tag{48}$$

A l'aide de la relation (48) avec les conditions initiales :

$$P_0(0) \;=\; 1; \tag{49}$$

$$P_{N-k}(0) \;=\; \frac{G_n^{(j)}(N-k)}{G_n(N-k)}, \quad k = \overline{1, N-1}; \tag{50}$$

nous pouvons obtenir les probabilités $P_{N,j}(x_j)$; ensuite $\overline{v}_{N,1}$ s'obtient à partir de la relation (47). Dans (50) la quantité $G_n^{(j)}(N-k)$ se calcule en supposant que $(N-k)$ usagers sont répartis dans les n stations du réseau à l'exception de la station S_j.

Le nombre moyen de requêtes dans S_j , $\overline{\text{v}}_{N,j}$ s'obtient en utilisant les relations (42) et (44). Si $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, alors les formules se simplifient considérablement. Ainsi la durée de séjour moyenne dans S_j vaut :

$$\overline{v}_j = (1/\mu_j) \left[1 + \sum_{x_j=1}^{N-1} x_j P_{N-1,j}(x_j) \right] = (1/\mu_j)(1 + \overline{\text{v}}_{N-1,j}). \tag{51}$$

D'autre part, le nombre moyen de requêtes dans S_j :

$$\overline{\text{v}}_{N,j} = N q_{N,j}; \tag{52}$$

où $q_{N,j}$ est la probabilité de séjour de l'usager dans S_j qui vaut :

$$q_{N,j} = \frac{\omega_j \overline{v}_{N,j}}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j \overline{v}_{N,j}}. \tag{53}$$

De (51) - (53) nous obtenons la formule récurrente :

$$\overline{v}_{N,j} = (1/\mu_j)\left[1 + \frac{(N-1)\omega_j\overline{v}_{n-1,j}}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j\overline{v}_{N-1,j}}\right] \tag{54}$$

avec la condition initiale $\overline{v}_{0,j} = 0$.

En résumé, voici quelques caractéristiques du réseau fermé pour $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$.

1. **Durée moyenne de séjour dans S_j :**

$$\begin{aligned}\overline{v}_{N,j} &= (1/\mu_j)\left(1 + \frac{(N-1)\omega\overline{v}_{N-1,j}}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j\overline{v}_{N-1,j}}\right);\\ \overline{v}_{0,j} &= 0.\end{aligned}$$

2. **Nombre moyen de requêtes dans S_j :**

$$\overline{v}_{N,j} = \frac{N\ \omega_j\ \overline{v}_{N,j}}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j\overline{v}_{N,j}}.$$

3. **Durée moyenne d'attente dans la $j^{\text{ième}}$ file :**

$$\overline{\omega}_{N,j} = (1/\mu_j)\ \frac{(N-1)\ \omega_j\ \overline{v}_{N-1,j}}{\sum_{j=1}^{n}\ \omega_j\ \overline{v}_{N-1,j}}.$$

4. **Taille moyenne de la $j^{\text{ième}}$ file :**

$$\overline{q}_{N,j} = \frac{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}\ \overline{\omega}_{N,j}}{\overline{v}_{N,j}}.$$

5. **Taux d'utilisation du $j^{\text{ième}}$ serveur :**

$$\eta_{N,j} = \frac{\overline{\mathrm{v}}_{N,j}}{\overline{v}_{N,j}\ \mu_j}.$$

Pour plus de précisions on pourra se référer à l'ouvrage de Moore [?] où il est procédé à des simplifications des algorithmes de Buzen dans le cas ou $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$.

Relation avec le modèle de Jackson :

Dans [?] Gordon et Newell poussent plus loin l'analyse du résultat du théorème (5) dans le cas asymptotique où $N \to +\infty$.

Supposons qu'il existe un indice i_0 tel que $\frac{z_i}{m_i} = \max\left(\frac{z_i}{m_i}\right)$. Sans perte de généralité, on peut considérer que $i_0 = 1$. On montre dans [?] que :

$$\lim_{N\to+\infty} G_n(N) = \frac{m_1^{m_1}}{m_1!}\prod_{i=2}^{n}\sum_{x_i=0}^{+\infty} C_j(x_j). \tag{55}$$

De (19), en admettant que $(\frac{z_i}{m_i}) < 1$, $\forall\, i \neq 1$, il résulte que $P(x) \to 0$ pour tout état x tel que $x_1 < +\infty$. La distribution marginale est alors de la forme :

$$P(x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{\prod_{i=2}^{n} C_j(x_j)}{\prod_{i=2}^{n} \left[\sum_{x_i=0}^{+\infty} C_i(x_i)\right]}. \tag{56}$$

D'ici on obtient que :

$$P(x_2, x_3, ..., x_n) = \prod_{i=2}^{n} P_i(x_i); \tag{57}$$

où la distribution marginale du nombre de requêtes dans S_i est de la forme :

$$P_i(x_i) = C_i(x_i)\; k_i^{-1} \tag{58}$$

$$k_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \left(\frac{g_i}{\mu_i}\right)^k \frac{1}{k!} + \left(\frac{g_i}{\mu_i}\right)^{m_i} \frac{1}{m_i!} \sum_{k=m_i} \left(\frac{g_i}{\mu_i\; m_i}\right)^k .$$

Si maintenant parmi les quantités z_i/m_i il en existe deux ou plus qui soient maximales, alors les expressions (56) et (57) restent vraies pour toutes les stations, telles que :

$$(\frac{z_i}{m_i}) < \max_j(\frac{z_j}{m_j}).$$

De (58), on remarque que si $m_i = 1$, alors $P_i(x_i)$ est une loi géométrique de paramètre $(\frac{g_i}{\mu_i})$; si par contre $m_i = +\infty$, alors $P_i(x_i)$ est une loi de Poisson de paramètre $(\frac{g_i}{\mu_i})$.
Le fait que $P(x) \to 0$ pour état x tel que $x_1 < +\infty$ signifie que dans la première station il s'accumule un nombre infini de requêtes et c'est pourquoi ce sous-système est appelé "goulet d'étranglement". D'autre part la distribution marginale $P(x_2, x_3, ..., x_n)$ s'obtient sous forme de produit. Le résultat est donc analogue à celui de Jackson.

Dans [?] on considère aussi le cas où les grandeurs $(\frac{z_i}{m_i}) = (\frac{g_i}{\mu_i\; m_i})$ sont voisines et n, N sont grands. Dans ce cas, les requêtes seront réparties plus ou moins uniformément à travers les stations du réseau. La méthode décrite est analogue à celle de Khintchine utilisée pour l'obtention de la distribution canonique en mécanique statistique.

Les applications des réseaux sont très nombreuses notamment dans les systèmes informatiques. Ces derniers ont évidemment une structure plus complexe que celle des réseaux exponentiels (du type de Jackson ou Gordon-Newell), cependant les tentatives de modélisation de ces systèmes se sont avérées très fructueuses.A ce sujet, on pourra se référer à l'ouvrage de Moore C. G. qui a été le premier à saisir l'importance des résultats de Jackson et Gordon-Newell pour la modélisation des systèmes informatiques. On trouvera justement dans une discussion des résultats de Moore. Notons cependant que même les modèles plus généraux que nous verrons ci-dessous présentent quelques inconvénients car il ne permettent pas de prendre en considération certains phénomènes de blocage (dûs aux capacités limitées des buffers ou à la non fiabilité des ressources) qui se rentre rencontrent fréquemment dans les systèmes informatiques. Une nouvelle tendance est apparue ces dernières années qui fait appel aux réseaux de Pétri stochastiques Récemment encore, on propose un symbolisme de synchronisation dans les réseaux de files d'attente et d'autre part une méthode de résolution de ces systèmes.

Jackson a généralisé le résultat du théorème 4 au cas où le taux $\lambda(\overline{x})$ du flot des arrivées dépend du nombre de requêtes dans le réseau et lorsque chaque station peut avoir un taux de service dépendant du nombre de requêtes dans ce système. $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$, où $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est l'état du réseau.

A l'aide de la méthode standard on obtiens les équations d'états :

$$\begin{aligned}\left[\lambda(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i)(1 - P_{ii})\right] P(x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda(x-1)_{P_{0i}} P(x - e_i) + \sum_{i=1} \mu_i(x_i + 1) P(x + e_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j(x_j + 1) P_{ji}\ P(x + e_j - e_i).\end{aligned}$$

Théorème 7. ***(Jackson)***
Soit :

$$\begin{aligned}F(k) &= \prod_{\overline{x}=0}^{k-1} \lambda(\overline{x})\ , k = 0, 1, 2, ...; \\ f(x) &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \frac{e_i}{\mu_i(j)}; \\ H(k) &= \sum_{\sum_{i=1}^{n} x_i = k} f(x);\end{aligned}$$

$$G = \begin{cases} \sum_{K=0}^{+\infty} F(k)H(k) & \textit{Si la somme est convergente;} \\ +\infty & \textit{Si elle est divergente.} \end{cases}$$

alors, si $G < +\infty$ *les probabilités ergodiques stationnaires des états du second modèle de Jackson sont de la forme :*

$$P(x) = \frac{1}{G} f(x) F(x)$$

où les quantités e_i sont solutions du système d'équations :

$$e_i = P_{0i} + \sum_{j=1}^{n} e_j \ P_{ji}$$

Comme le fait remarquer Kleinrock , c'est le dernier modèle Markovien que l'on puise envisager car il généralise le théorème de Burke dans son sens le plus large. Dès que l'on tente d'adoucir les propriétés Markoviennes du flot des arrivées ou du processus de service, le flot des départs se complique énormément, non seulement à cause des distributions marginales mais aussi à cause de l'absence d'indépendance des autres états.

Les réseaux Jacksoniens (y compris ceux de Gordon-Newell) présentent cependant plusieurs inconvénients, notamment en pratique lorsqu'il s'agit de modéliser des réseaux réels tels que les systèmes informatiques :

1. L'hypothèse d'exponentialité des loi de service et d'inter-arrivées n'est pas toujours admissible.
2. Les usagers sont statistiquement identiques, alors qu'en pratique on a souvent à faire à plusieurs classes distinctes d'usagers (parfois de différentes priorités).
3. La discipline FIFO n'est pas la seule que l'on puisse rencontrer dans les systèmes informatiques ou autres.
4. Les serveurs sont absolument fiables alors qu'en pratique il est parfois nécessaire de tenir compte de l'influence des pannes qui engendrent des phénomènes de blocage.

Dans les paragraphes suivants, nous allons procéder à l'analyse de quelques modèles qui généralisent les réseaux de Jackson et qui s'écartent des hypothèses ci-dessus.
En général il est possible de décrire le comportement du réseau à l'aide d'un processus Markovien (en introduisant un certain nombre de variables supplémentaires) et d'écrire ensuite les équations de Kolmogorov pour les probabilités stationnaire des états du réseau. Ces équations s'appellent aussi équations d'équilibre global. Cependant, la résolution du système obtenu pose quelques difficultés d'ordre technique. Dans certains cas pourtant en peut mettre en évidence des méthodes directes de résolution. Ceci est dû au fait que ces systèmes peuvent être décrits à l'aide des processus Markoviens de populations En particulier, un processus Markoviens de populations représente une chaîne de Markov continue dont l'espace des états est décrit par des vecteurs de dimension finie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et pour lesquels seuls les transitions suivantes sont admissibles :

* $k \rightarrow k(i^+)$ (arrivée dans S_i en provenance de l'extérieur) ;

* $k \longrightarrow k(i^-)$ (départ de S_i vers l'extérieur) ;

* $k \longrightarrow k(j^+, i^-)$ (transition interne de S_i vers S_j).

Kingman décrit des classes intéressantes de réseaux et quelques propriétés des processus associés en utilisant la terminologie et et les résultats des chaînes de Markov inversibles. Chandy considére quelques unes de ces questions et remarque que les probabilités stationnaires vérifient non seulement les équations d'équilibre global mais aussi les équations d'équilibre local. Rappelons que les équations d'équilibre global expriment le fait suivant : pour tout état x,

$$P(x) \times \left[\sum \text{taux de sortie de } x\right] = \sum_{y \in \mathbb{E}} P(y) \times \left[\sum \text{taux de y vers } x\right] ;$$

où E est l'ensemble des états admissibles du réseau. Dans ce cas, les théorèmes ergodiques mettent en évidence (comme nous l'avons vu pour le théorème de Jackson) l'existence d'une solution unique, qui est une distribution de probabilité non singulière vérifiant la condition de normalisation :

$$\sum_{x \in \mathbb{E}} P(x) = 1.$$

Les équations d'équilibre local permettent de ramener le problème de la détermination des probabilités des états du réseau à plusieurs problèmes de moindre dimension qui se résolvent donc plus aisément. La propriété d'équilibre local exprime le fait suivant :

$$P(x) \times [\text{taux de sortie de l'état } e \text{ par départ d'un usager de la station } S_i]$$

$$\parallel$$

$$\sum_{e' \in \mathbb{E}} P(y) \times [\text{taux de sortie de l'état } e' \text{ pour entrer dans } e \text{ par arrivé d'un usager dans } S_i] .$$

En particulier, les réseaux exponentiels Jacksoniens vérifient les équations d'équilibre local. On montre aussi que certains réseaux non exponentiels possède cette propriété. Notons que toute solution des équations d'équilibre local est aussi solution des équations d'équilibre global, mais la réciproque est fausse en général. De plus, pour de tels réseaux, la solution s'obtient sous forme de produit et cela permet de faire la parallèle avec les réseaux exponentiels.

5 Réseaux fermés avec usagers non homogènes

Considérons un réseau fermé constitué de n stations à serveur unique ($m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$) et R classes d'usagers. Le nombre total de requêtes de classe j dans le réseau vaut

$N(j)$. Les durées de service dans toutes les stations sont de lois exponentielles et le taux de service du $i^{\text{ième}}$ serveur dépend du nombre de requêtes et non du numéro de l'usager. Introduisons la notion de "stade de service" (i, j) qui indique qu'un usager de classe j est en cours de service dans S_i. Dans ce cas, on montre que le réseau possède la propriété d'équilibre local :

$$P(x) \times [\text{taux de sortie de l'état y par départ d'un usager du stade de service (i, j)}]$$
$$\|$$
$$\textstyle\sum_{y \in \mathbb{E}} P(y) \times [\text{ taux de sortie de l'état } \text{ y } \text{ par arrivée d'un usager au stade (i, j)}] .$$

Cette propriété est vraie pour tous les stades de service. Soit $P_{ij}(\text{v})$ la probabilité pour que l'usager de classe v qui termine son service dans S_i se rende dans S_j avec $1 \leq i$, $j \leq n$, $1 \leq \text{v} \leq R$. L'événement "$x_i(\text{v})$ **requêtes présentes dans** S_i" peut être représenté sous forme matricielle $\| \ x_i(\text{v}) \ \|$, $i = \overline{1,n}$, $\text{v} = \overline{1,R}$, avec :

$$\sum_{i=1} x_i(\text{v}) = N(\text{v}).$$

Théorème 8.
Pour le réseau fermé avec usagers non homogènes, la probabilité stationnaire de l'état $x_i(\text{v})$ s'exprime sous forme de produit :

$$P(\| \ x_i(v) \ \|) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^{n} D_i[x_i(1), x_i(2), ..., x_i(R)],$$

où :

$$D_i[x_i(1), x_i(2), ..., x_i(R)] = \frac{x_i! \ y_i(1)^{x_i(1)} ... y_i(R)^{x_i(R)}}{\prod_{j=1}^{x_i} \mu_i(j) x_i(1)! ... x_i(R)!},$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{R} x_i(j), \ i = \overline{1,n}.$$

$\mu_i(j)$ est le taux de service dans S_i, G une constante de normalisation et les quantités $y_i(\text{v})$ sont solutions du système d'équations :

$$y_j(\text{v}) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\text{v}) \ P_{ij}(\text{v}), \ j = \overline{1,n}; \ \text{v} = \overline{1,R}.$$

6 Réseaux mixtes à plusieurs classes

Soit un réseau constitué de n stations, destiné au service d'usagers de R classes distinctes. On donne la matrice de routage $\mathbf{P} = \| P_{i,r;j,s} \|$ où $P_{i,r;j,s}$ est la probabilité pour que l'usager de classe r qui termine son service dans S_i se rende dans S_j et devienne un usager de classe s.

Dans ce paragraphe, nous considérons une classe suffisamment large de réseaux qui vérifient les équations d'équilibre local. Cette classe englobe les réseaux constitués de stations appartenant à l'un des types suivants :

Type 1. Station à serveur exponentiel unique dont le paramètre peut dépendre du nombre d'usagers dans la file ; discipline FIFO.

Type 2. Serveur unique ; discipline processeur partagé (si à un instant donné la file contient k requêtes, chacune d'elles reçoit $1/k$ de service par seconde ; la fonction de répartition de la durée de service a une transformée de Laplace-Stiljes rationnelle (loi de Cox).

Type 3. Plusieurs serveurs en nombre supérieur ou égal au nombre maximal d'usagers pouvant se trouver dans la file (cela revient à supposer un nombre infini de serveurs) ; les requêtes de chaque classe peuvent avoir une fonction de répartition de la durée de service différente des autres classes dont la transformée de Laplace-Stiljes est rationnelle.

Type 4. Serveur unique, discipline LIFO avec péremption, i.e. l'usager qui arrive le dernier a la priorité absolue et l'interruption est conservatrice ; la fonction de répartition de la durée de service a une transformée de Laplace-Stiljes rationnelle.

Soit $E\{(i,r) : 1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq r \leq R\}$. Le processus $X = \{X_j\}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov de matrice des transitions $\mathbf{P}$. $X_j = (i,r)$ signifie que la $j^{\text{ième}}$ station visitée par un usager quelconque est S_i où il a un comportement de classe r. Il s'avère que la chaîne de Markov X peut être décomposée en m sous-chaînes (exhaustives et ergodiques). Soient $E_1, E_2, ..., E_m$ les ensembles des états de chacune des sous-chaînes et $k_{ir}(x)$ le nombre d'usagers de la $r^{\text{ième}}$ classe dans S_i lorsque l'état est x, on note :

$$M(x/E_j) = \sum_{(i,r)\in E_j} k_{ir}(x).$$

Le réseau fermé est caractérisé par la relation $M(x/E_j) = cste \ , \ j = \overline{1,m}$. Pour le réseau ouvert, les usagers sont générés par une source externe. Le taux des arrivées de l'extérieur peut dépendre de l'état x du réseau et cette dépendance peut être de l'un des types suivants :

Type a. Le taux des arrivées dépend du nombre total $M(x)$ de requêtes dans le réseau lorsque l'état est x :

$$\lambda(x) = \lambda(M(x));$$
$$M(x) = \sum_{j=1}^{m} M(x/E_j).$$

L'usager qui arrive dans S_i adopte un comportement de classe r avec une probabilité q_{ir} indépendante de l'état x.

Type b. La source externe génére m flots Poissoniens de requêtes qui se rendent dans les sous-chaînes correspondantes. Le taux du $j^{\text{ième}}$ flot $\lambda_j(M(x/E_j))$ est une fonction de $M(x/E_j))$. L'usager du $j^{\text{ième}}$ flot qui arrive dans le réseau se rend avec une probabilité q_{ir} dans S_i où il adopte un comportement de classe r si :

$$(i,j) \in E_j \text{ et } \sum_{(i,r)\in E_j} q_{ir}.$$

Dans un réseau ouvert, l'usager de classe r qui termine son service dans S_i quitte le réseau avec une probabilité :

$$1 - \sum_{j,s} P_{i,r;j,s}\ ,\ j = \overline{1,m}\ ,\ s = \overline{1,R}.$$

Notons que si les fonctions de répartition de la durée de service sont exponentielles, alors le système de files d'attente à plusieurs serveurs peut se ramener à un système de files d'attente à serveur unique du point de vue de la distribution de probabilité des états ; il suffit d'effectuer les modifications correspondantes pour les taux de service. Ceci concerne le type 1.

Nous avons montré dans [10] que si la fonction de répartition de la durée de service a une transformée de Laplace-Stiljes rationnelle (la durée de service obéit à une loi de Cox) alors le service peut être décomposé en étapes, chacune ayant une durée de loi exponentielle (voir le schéma de Cox dans [10]). Par analogie avec la méthode des étapes d'Erlang [10] la connaissance du numéro de l'étape de service suffit pour décrire entièrement le processus de service (i.e. pour que le processus soit Markovien). Pour la station de type 4, l'interruption conservatrice signifie que le nouveau service de la requête "interrompue" reprend à l'étape où elle a quittée le serveur pour rejoindre la file. L'état du réseau sera représenté par le vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; où x_i est un vecteur qui caractérise la $i^{\text{ième}}$ station et dépend de sa structure :

Pour le type 1.

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik});$$

où $k_i; i = \overline{1,n}$ est le nombre d'usagers dans S_i ; et $x_{ij} = \overline{1,R}$, $j = \overline{1,k_i}$ est le numéro de la classe de l'usager qui se trouve en $j^{\text{ième}}$ position dans S_i (discipline FIFO).

Pour le type 2 ou 3.

$$x_i = (\mathrm{v}_{i1}, \mathrm{v}_{i2}, ..., \mathrm{v}_{iR});$$

avec :

$\mathrm{v}_{ir} \ = (m_{ir1}, m_{ir2}, ..., \mathrm{v}_{irk});$

m_{ir1} : nombre d'usagers de classe r dans S_i qui se trouvent à la $i^{\text{ème}}$ étape de service dans le dispositif de Cox ;

k_{ir} : nombre maximal d'étapes possibles de service pour l'usager de classe r dans cette station.

Pour le type 4.

$$x_i = ((r_1, m_1), (r_2, m_2), ..., (r_k, m_k))$$

avec :

k_i : nombre d'usagers dans S_i ;

(r_j, m_j) : caractérise l'usager en $j^{\text{ième}}$ position (selon la discipline LIFO) ;

r_j : nombre de la classe ;

m_j : numéro de l'étape interrompue.

Les équations d'équilibre global pour l'obtention des probabilités stationnaires $P(x)$ des états du réseau s'écrivent sous la forme :

$$\lambda(x)P(x) = \sum_{y \in E} P(y)\lambda(y,x) \ , \ x \in E; \tag{59}$$

où $\lambda(y, x)$ est le taux de transition du réseau de l'état y à l'état x.

Comme nous l'avons précisé précédemment, il est difficile d'obtenir les probabilités stationnaires $P(x)$ directement à partir du système d'équations (59) et c'est pourquoi on utilise l'approche basée sur l'obtention des équations d'équilibre local (appelées aussi équations indépendantes d'équilibre). Elles sont de la forme :

$$P(x) \text{ [taux de sortie de } x \text{ par départ d'un usager du stade } (i,j)]$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{y \in E} P(y) \text{ [taux de sortie de l'état } y \text{ par arrivée d'un usager au stade } (i,j)] \, . \tag{60}$$

L'idée est analogue à celle de la méthode des étapes d'Erlang. Chaque usager est lié à l'étape à laquelle il se trouve. Si l'usager est en cours, alors l'étape est déterminée par la place qu'il occupe dans le dispositif de Cox. Si l'usager est dans la file, alors pour la discipline FIFO c'est la première étape ; pour la discipline LIFO c'est l'étape interrompue. Avec une telle approche qui est analogue à celle donnée en [10] (un peu plus complexe cependant) on peut exprimer le système (59) sous la forme d'une série d'équations d'équilibre local du type (60). Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour qu'une distribution $P(x)$ soit solution de (59) est qu'elle vérifie les équations d'équilibre local (60). Cependant, il est à noter que les équations d'équilibre local n'ont pas toujours une solution ce qui est le cas par exemple pour la discipline FIFO lorsque les usagers des différentes classes ont des fonctions de répartition de la durée de service différentes.
Pour toute sous chaîne ergodique, on introduit les quantités e_{ir} qui sont solutions du système d'équations :

$$\sum_{(i,r)\in E_k} e_{ir}P_{i,r;j,s} + q_{js} = e_{js}, \qquad (j,s) \in E_k \ , \ k = \overline{1,m}. \tag{61}$$

Si $q_{js} = 0$ pour tout $(j,s) \in E_k$, alors le réseau est fermé par rapport à E_k. Dans ce cas, les quantités e_{ir} sont déterminées à une constante près. Si par contre $q_{js} \neq 0$ pour au moins un couple $(j,s) \in E_k$ alors e_{ir} est déterminé de manière unique. Notons que le réseau peut être ouvert par rapport à certaines classes et fermé par rapport à d'autres (on dit alors que le réseau est mixte).
Soient :

a_{irj} : la probabilité de transition de l'usager de classe r vers S_i à l'étape $j+1$ de service après avoir été servi à la $j^{\text{ième}}$ étape.

$b_{ijr} = 1 - a_{ijr}$;

u_{ijr} : taux de service de l'usager de classe r à la $j^{\text{ième}}$ étape dans S_i (cette étape est de durée exponentielle) ;

$A_{irl} = \prod_{j=1}^{l} a_{irj}$.

Théorème 9. ***(Baskett-Chandy-Muntz-Palacios)***
Pour un réseau (ouvert, fermé ou mixte) constitué de n stations appartenant à l'un des types (1 à 4), la distribution stationnaire unique $P(x)$ existe si $G > 0$; elle est donnée par :

$$P(x) = G\ d(x)f_1(x_1)f_2(x_2)...f_n(x_n); \tag{62}$$

où G est une constante de normalisation :

$$G = \left[\sum_{x \in E} d(x) f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n) \right]^{-1}$$

avec $f_i(.)$ est une fonction qui dépend de la structure de s_i :

- *Si S_i est de type 1, alors :*

$$*f_i(x_i) = \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{k_i} \prod_{j=1}^{k_j} e_i \; x_{ij}, \quad \textit{Si } \mu_i \textit{ est indépendant du nombre d'usagers dans } S_i \, ;$$

$$*f_i(x_i) = \prod_{j=1}^{k_j} \frac{e_{ix}}{\mu_i(j)}, \quad \textit{Si le taux de service dépend du nombre d'usagers dans } S_i.$$

- *Si S_i est de type 2, alors :*

$$f_i(x_i) = k_i! \prod_{r=1}^{R} \prod_{l=1}^{k_{ir}} \left\{ \frac{\left[\frac{e_{ir} \; A_{irl}}{\mu_{irl}}\right]^{m_{irl}}}{m_{irl}!} \right\}.$$

- *Si S_i est de type 3, alors :*

$$f_i(x_i) = \prod_{r=1}^{R} \prod_{l=1}^{k_{jr}} \left\{ \frac{\left[\frac{e_{ir} A_{irl}}{\mu_{irl}}\right]^{m_{irl}}}{m_{irl}!} \right\}.$$

- *Si S_i est de type 4, alors :*

$$f_i(x_i) = \prod_{j=1}^{k_i} e_{ir} \left[\frac{A_{ir} m_j}{\mu_{ir} m_j}\right].$$

$d(x)$ est une fonction du nombre de requêtes correspondant à l'état x et qui dépend de la structure du flot des arrivées.

1. *Pour le type A de dépendance du taux des arrivées de l'état x :*

$$d(x) = \prod_{i=0}^{M(x)-1} \lambda(i).$$

2. *Pour le type B :*

$$d(x) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=0}^{M(x)-1} \lambda_j(i).$$

Si le réseau est fermé $d(x) = 1$. La preuve de ce théorème s'effectue en résolvant les équations d'équilibre local. De ces équations il résulte (61).

Théorème 10.
Soit :

$$\mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_n); \quad \textit{avec} \quad \mathrm{v}_i = (\mathrm{v}_{i1},\ \mathrm{v}_{i2}, ..., \mathrm{v}_{iR});$$

v_{ir} est le nombre de requêtes de classe r dans S_i. Alors, on a les distributions stationnaires :

$$P(\mathrm{v}_1 = d_1, ..., \mathrm{v}_n = d_n) = C\ d\ (\mathrm{v})\ g_1(d_1)...\ g_n(d_n), \qquad (d_i = (k_{i1}, k_{i2}, ..., k_{iR}))\ ;$$

où :

- Pour S_i de type 1 :

$$g_i(d_i) = k_i! \left[\prod_{r=1}^{R} \frac{1}{k_{ir}!}\ e_{ir}^{k_{ir}} \right] \frac{1}{\mu_i^{k_i}}.$$

- Pour S_i de type 2 et 4 :

$$g_i(d_i) = k_i! \prod_{r=1}^{R} \frac{1}{k_{ir}!} \left(\frac{1}{\mu_{ir}} \right)^{k_{ir}}.$$

- Pour S_i de type 3 :

$$g_i(d_i) = \prod_{r=1}^{R} \frac{1}{k_{ir}!} \left(\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{k_{ir}};$$

$$k_i = \sum_{r=1}^{R} k_{ir}.$$

Dans chaque cas, l'expression pour $g_i(d_i)$ est obtenue en sommant $f_i(x_i)$ par rapport à x_i pour $k_{i1}, ..., k_{iR}$ fixés. Si le taux de service ne dépend pas de la classe de requête et ne dépend que du nombre d'usagers qu'il contient alors au lieu de :

$$\prod_{r=1}^{R} \left(\frac{1}{\mu_{ir}} \right)^{k_{ir}},$$

il est nécessaire de poser :

$$\prod_{j=1}^{ki} \frac{1}{\mu_i(j)};$$

où $\mu_i(j)$ est le taux de service dans S_i lorsqú'elle contient j requêtes.
Dans le cas d'un réseau ouvert, lorsque le taux des arrivées en provenance de la source externe est une constante indépendante du nombre de requêtes dans le réseau, le théorème précédent peut être utilisé sous une forme plus exploitable. (on ne s'intéresse ici qu'à la distribution de probabilité du nombre de requêtes dans chaque station).

Théorème 11.

Pour le réseau ouvert qui satisfait les conditions du théorème (9) et dont le flot des arrivées est simple de taux λ, la distribution stationnaire de probabilité du nombre de requêtes dans chaque système vaut :

$$P\left[k=(k_1,k_2,...,k_n)\right]=C\ d(k)\ h_1(k_1)\ h_2(k_2)\ ...h_n(k_n)$$

où :

$$h_i(k_i)=\begin{cases}\dfrac{\left(\sum_{r\in R_i}e_{ir}\right)^{k_i}}{\mu_i k_i}, & \text{Si } S_i \text{ est de type 1;}\\[2ex] \left(\sum_{r\in R_i}\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}\right)^{k_i}, & \text{Si } S_i \text{ est de type 2 ou 4;}\\[2ex] \frac{1}{k_i!}\left(\sum_{r\in R_i}\frac{e_{ir}}{\mu_{ir}}\right)^{k_i}, & \text{Si } S_i \text{ est de type 3;}\end{cases}$$

où R_i est l'ensemble des numéros des classes de requêtes que peut servir la station i. La constante de normalisation est de la forme :

$$C=\left[\sum_{k_1=0}^{+\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\lambda^{k_i}h_i(k_i)\right]^{-1},$$

ou bien :

$$C=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{h_i=0}\lambda^{k_i}\ h_i(k_i)\right)\right]^{(-1)}. \tag{63}$$

On montre d'autre part que :

$$\sum_{k_i=0}^{+\infty}h_i(k_i)=\begin{cases}1-\sum_{r\in R_i}\left[\frac{\lambda e_{ir}}{\mu_i}\right]^{-1}, & \text{pour le type1;}\\[2ex] 1-\sum_{r\in R_i}\left[\frac{\lambda e_{ir}}{\mu_{ir}}\right]^{-1}, & \text{pour le type 2 ou 4;}\\[2ex] \exp\left[\sum_{r\in R_i}\left[\frac{\lambda e_{ir}}{\mu_{ir}}\right]\right], & \text{pour le type 3.}\end{cases}$$

Il s'avère que le nombre de requêtes dans chaque station sont des variables aléatoires indépendantes. La distribution de probabilité du nombre de requêtes dans S_i est donnée par :

$$P_i(k_i)=C\ \lambda^{k_i}\ h_i(k_i)\ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\sum_{k_j=0}^{+\infty}k_j\ h_j(k_j)\right];$$

et en tenant compte de (62) on aura :

$$P_i(k_i) = \frac{\lambda^{k_i}\ h_i(k_i)}{\left[\sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^m\ h_i(m)\right]}.$$

Introduisons les notations :

$$\rho_i = \begin{cases} \sum_{r \in R_i} \left[\frac{\lambda e_{ir}}{\mu_i}\right], & \text{pour } S_i \text{ de type 1;} \\ \\ \sum_{r \in R_i} \left[\frac{\lambda e_{ir}}{\mu_{ir}}\right], & \text{pour } S_i \text{ de type 2, 3 ou 4;} \end{cases}$$

alors nous pouvons formuler le résultat suivant.

Théorème 12.
Pour le réseau ouvert qui satisfait les conditions du théorème (9) et pour lequel le flot des arrivées est simple de taux λ, la distribution conjointe du nombre de requêtes dans chaque station est donnée par :

$$P(k) = P_1(k_1)\ P_2(k_2)\ ...\ P_n(k_n);$$

où :

$$P_i(k_i) = \begin{cases} (1-\rho_i)\ \rho_i^{k_i}, & \textit{pour le type 1, 2 ou 4 ;} \\ \\ e^{-\rho_i}\ \left(\frac{\rho_i^{k_i}}{k_i!}\right), & \textit{pour le type 3.} \end{cases}$$

D'ici il résulte que pour S_i de type 1, 2 ou 4 la distribution stationnaire marginale de probabilité du nombre de requêtes dans S_i est la même que pour le système de files d'attente M/M/1 et il est nécessaire pour qu'elle existe que $\rho_i < 1$. Pour la station de type 3, cette distribution est équivalente à celle de M/G/∞ avec $\rho_i = \lambda/\mu$. Lorsqu'on doit tenir compte du fait que le taux de service dépend du nombre d'usagers dans la station, il suffit de remplacer dans (61) $f_i(x_i)$ par :

$$\frac{f_i(x_i)}{\prod_{j=1}^{k_i} \alpha_i(j)}.$$

On peut ainsi considérer le cas où la station contient plusieurs serveurs. Si dans S_i il y a L_i serveurs :

$$\alpha_i(k_i) = \begin{cases} k_i, & \text{si } 1 \le k_i \le L_i; \\ \\ L_i, & \text{si } k_i > L_i. \end{cases}$$

Lorsqu'on doit tenir compte du fait que la taux de service dépend du nombre de requêtes de chaque classe, alors dans (61) il faut remplacer $f_i(x_i)$ par :

$$\frac{f_i(k_i)}{\left[\prod_{r=1}^{R} \prod_{j=1}^{k_{ir}} \frac{1}{\mu_{ir}(j)}\right]};$$

où $\mu_{ir}(j)$ est le taux de service dans S_i lorsqu'il y a j usagers de classe r.
On peut tenir compte aussi du fait que le taux de service des usagers $z_I(k_I)$ dans un sous-réseau $S_I = \{S_{i_1}, S_{i_2}, ..., S_{i_n}\}$ dépend du nombre total d'usagers dans ce sous-réseau :

$$k_I = \sum_{i \in I} k_i \ , \qquad\qquad I = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$$

Dans ce cas, dans (61) il faut remplacer $\prod_{i \in I} f_i(x_i)$ par :

$$\prod_{i \in I} f_i(x_i) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{z_I(j)}.$$

Des exemples de calculs de caractéristiques de tels réseaux peuvent être trouvés dans [?].

Notons que les théorèmes (8) et (9) peuvent être généralisés au cas où le comportement des usagers dans le réseau est décrit par une chaîne de Markov d'ordre $h > 1$ ou par un processus semi-Markovien. Supposons pas exemple que pour tout $j \geq 0$:

$$P\left[x_{j+1} \ / \ x_i \ , \ o \leq i \leq j\right] = P\left[x_{j+1} \ / \ x_j, ..., x_{j-h+1}\right], (h > 1);$$

alors, la matrice de routage sera de la forme :

$$\mathbf{P} = \| \ P_{(i,r);\ (j_1,s),\ (j_2,s),...,(j_h,s)} \ \| \ .$$

Ces probabilités "mesurent" l'événement **"l'usager arrive dans $\mathbf{S_i}$ où il adopte un comportement de classe r après avoir été servi successivement dans $\mathbf{S_{j_1}}$, $\mathbf{S_{j_2}}$, ..., $\mathbf{S_{j_h}}$ où il avait respectivement, un comportement de classe $\mathbf{S_1}$ dans $\mathbf{S_{j_1}}$, ..., $\mathbf{S_h}$ dans $\mathbf{S_{j_h}}$"** (pour cet événement le comportement de l'usager avant la station S_j n'influe pas). L'idée consiste à se ramener à une chaîne de Markov d'ordre 1 en remplaçant les probabilités de routage par $P_{a;b}$ avec :

$$a = ((c_2, i_2), ..., (c_h, i_h), (i, r)); \qquad b = ((c_1, i_1), (c_2, i_2), ..., (c_h, i_h)).$$

Dans [?] on considère le cas où les transitions des usagers d'une station à une autre ne se font pas instantanément mais après un délai aléatoire dont la fonction de répartition $B_{ij}(x)$

est arbitraire et dont la transformée de Laplace-Stiljes est rationnelle. Ces réseaux sont dits semi-Markoviens. Dans [?] on introduit un nouveau paramètre : la quantité de travail nécessaire pour effectuer le service de la requête (c'est une généralisation de la notion de durée de service ; à ce sujet on pourra se référer au manuel de Gnedenko B.V. et Kovalenko I.N. [?] où cette question est traitée en détail). La solution s'obtient de nouveau sous forme de produit. L'analyse de tels réseaux s'effectue à l'aide de la méthode des fonctions génératrices. Pour le calcul de tels réseaux (notamment la constante de normalisation) on propose deux méthodes : méthodes de décomposition en fractions simples et méthodes de multiplication des séries de puissance. On trouvera dans [?] les algorithmes correspondants ainsi qu'une méthode numérique de détermination des distributions marginales du nombre de requêtes dans chaque station, avec tous ses moments. D'autres algorithmes efficaces généralisant ceux de Buzen sont présentés par exemple dans [?].
Notons qu'une extension au cas ou la fonction de répartition de la durée de service est arbitraire a été obtenue par Sazmelson C.L. et Bulgren W.G. [?]. La solution est obtenue au sens des distributions [?] et la formule-produit est étendue au cas d'une fonction de répartition de la durée de service générale (pas forcément différentielle, à condition toutefois que l'espérance mathématique existe).
Muntz [?] montre que les solutions sous forme de produit peuvent être obtenues en étudiant les conditions pour lesquelles les flots des départs des noeuds du réseau sont Poissonniens (pour les systèmes multi-phases on utilise le théorème de Burke ainsi que les propriétés des flots superposés et tamisés). La condition suffisante pour que le flot des départs d'un système de files d'attente à file d'attente illimitée soit Poissonien de taux λ est de la forme :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{p_j \, q_{jk}}{\Pi_k} = \lambda;$$

où $p_j = \lim_{t\to+\infty} P\left[\mathrm{v}(t) = j\right]$, $\mathrm{v}(t)$ est le nombre de requêtes présentes dans le système à la date t ; q_{jk} est le taux de transition de l'état j à l'état k. Cette condition peut être étendue au cas d'un système à plusieurs classes d'usagers. Si pour un flot des arrivées Poissoniens le flot des départs est encore Poissonien, alors on dit que le système possède la propriété $M \Rightarrow M$. On montre alors [?] que si le réseau est constitué de stations de type 1-4 qui possèdent la propriété $M \Rightarrow M$ alors la solution s'obtient sous forme de produit.

7 Réseaux avec différents types de service

Soit un réseau fermé constitué de n stations et qui contient N usagers ; la $i^{\text{ième}}$ station contient m_i serveurs. On distingue $L \geq n$ différents types de service, et le service de type l, $1 \leq l \leq L$ s'effectue dans la station de numéro $s(l)$. Après avoir effectué son service de type l l'usager est orienté avec une probabilité P_{lj} dans la station de numéro $s(j)$ où il doit recevoir un service de type j :

$$P_{lj} \geq 0 \;, \qquad\qquad \sum_{j=1}^{L} P_{lj} = 1$$

i.e. la suite des types de service nécessaires à l'usager engendre une chaîne de Markov de matrice des transitions $\mathbf{P} = \| P_{lj} \|$, cette chaîne est supposée irréductible. Les durées de service de type l sont des v.a. de même loi, non négatives, d'espérance mathématique μ_l^{-1} , $o < \mu_l < +\infty$. Les durées de service correspondantes aux différents types sont indépendantes. Dans chaque station on instaure une discipline de priorité relative, la discipline de service étant FIFO. L'état initial du réseau S_0 est déterminé par le type de service pour chaque usager. Soient :

$M_l(t, S_0)$: nombre de dates de début de service de type l durant $(0, t)$;

$N_1(t, S_0)$: nombre de dates de fin de service de type l durant $(0, t)$;

$W_1(t, S_0)$: durée totale de service de type l durant $(0, t)$.

Il est évident que :

$$M_l(t, S_0) - m_{s(l)} \leq N_l(t, S_0) \leq M_l(t, S_0)$$

où $m_{s(l)}$ est le nombre de canaux dans la station qui assure le service de type l.

Soit $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_L$ les solutions uniques du système d'équations.

Définissons le taux d'activité (work rate) de la station lors d'un service de type l comme étant la quantité :

$$W_1 = \lim_{t \to +\infty} \frac{W_1(t, S_0)}{t}.$$

Théorème 13. ***(de Chang-Lavenberg)***

Les limites suivantes :

$$\lim_{t \to +\infty} N_l(t, S_0) = +\infty; \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{N_l(t,S_0)}{N_i(t,S_0)} = \frac{\Pi_l}{\Pi_i}, \forall\; l, i, S_0;$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{M_l(t,S_0)}{N_l(t,S_0)} = 1; \qquad W_l = \lim_{t \to +\infty} \frac{W_l(t,S_0)}{t} = \frac{1}{\mu_l} \lim_{t \to +\infty} N_l(t, S_0);$$

existent et sont indépendantes de l'état initial S_0. De plus :

$$\frac{W_l}{W_j} = \frac{\left(\frac{\Pi_l}{\mu_l}\right)}{\left(\frac{\Pi_j}{\mu_j}\right)}. \tag{64}$$

La preuve de ce théorème est assez élaborée [?] cependant on peut donner une justification intuitive de ce résultat :

Admettons que chaque station assure un seul type de service. Dans ce cas, la matrice $\mathbf{P} = \| P_{ij} \|$ est de dimension $n \times n$. On peut définir la fonction d'activité de la manière suivante :

$$W_i(t, S_0) = \int_0^t C_i(t, S_0)\, dt$$

où $C_i(t, S_0)$ est le nombre de serveurs actifs à la date t dans S_i (en cours de service). alors W_i représente le nombre de serveurs actifs dans S_i en régime stationnaire (en moyenne). Soit λ_i le taux (à l'état stationnaire) d'arrivées dans S_i , $1 \leq i \leq n$; il doit être égal au taux des départs ($\lambda_i = W_i \mu_i$) et doit satisfaire le système d'équations suivant :

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i P_{ji} \ , \ 1 \leq i \leq n.$$

Nous pouvons alors écrire $\lambda_i = \alpha \Pi_i$ où α est une constante. Donc $\alpha \Pi_i = W_i \mu_i$ ce qui donne la formule (63) du théorème (11). La relation (63) généralise la formule de Little. Ce type de relation est appelé loi de conservation et elles sont valables dans des cas relativement généraux [?].

Par analogie pour le réseau considéré au départ, on peut définir le taux d'activité de S_i de la manière suivante :

$$\mu_q = \sum_{l:s(l)=q} W_l$$

alors,

$$\frac{\mu_q}{\mu_r} = \frac{\left(\sum_{l:s(l)=q} \frac{\Pi_l}{\mu_l}\right)}{\left(\sum_{l:s(l)=r} \frac{\Pi_l}{\mu_l}\right)}.$$

La grandeur μ_q peut être interprétée comme le nombre moyen de serveurs actifs dans S_q. Si $m_q = 1$ alors μ_q est la probabilité stationnaire pour que S_q soit occupée.

8 Approximation de diffusion des réseaux

Considérons le modèle de réseau ouvert à n stations [?, ?]. La durée de service dans S_i est une variable aléatoire de loi quelconque de moyenne $1/\mu_i$ et de variance σ_i^2 , $i = \overline{1, n}$.

Le flot des arrivées est récurrent i.e. la suite des durée d'inter-arrivées forme un processus de renouvellement de moyenne $1/\mu_0$ et de variance σ_0^2 (on assimile la source à une station fictive S_0). De même le départ de l'usager vers l'extérieur s'interprète comme une transition vers une station S_{n+1}. Les transitions des usagers d'un système à un autre forment une chaîne de Markov de probabilités de transition $p(i,j)$ telles que :

$$\sum_{i'=1}^{n} P_{0i'} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i'=1}^{n+1} P_{ii'} = 1 \ , \ 1 \leq i \leq n.$$

Soient :

$A_i(t)$: le nombre d'arrivées dans S_i durant $(0,t)$;

$D_i(t)$: le nombre de départs de S_i durant $(0,t)$;

$D_{l,i}(t)$: le nombre d'usagers qui quittent S_l pour S_i durant $(0,t)$;

alors,

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \sum_{l=0}^{n} D_{l,i}(t); \\ D_i(t) &= \sum_{i'=1}^{n} D_{ii'}(t) \ , \ 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

De manière analogue à celle donnée en [10] on a :

$$\Delta Q_i(t) = \Delta A_i(t) - \Delta D_i(t);$$

est approximativement de loi normale de moyenne :

$$E(\Delta Q_i(t)) = \beta_i \Delta_t \ , \ 1 \leq i \leq n;$$

et de covariance :

$$cov(\Delta Q_i(t), \Delta Q_{i'}(t)) = \alpha_{ii'} \Delta_t \ , \ 1 \leq i, i' \leq n;$$

où :

$$\begin{aligned} \beta_i &= \sum_{l=0}^{n} P_{li} \frac{1}{\mu_l} - \frac{1}{\mu_i}; \\ \alpha_{ii'} &= \sum_{l=0}^{n} \frac{C_l - 1}{\mu_l} P_{li} P_{li'} + \left(\frac{C_i}{\mu_i} + \sum_{l=0}^{n} \frac{P_{li}}{\mu_l} \right) \delta_{ii'} - \frac{C_i}{\mu_i} P_{ii'} - \frac{C_i'}{\mu_i'} P_{i'i}. \end{aligned}$$

Si $P_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq n$, alors cette expression peut être réécrite sous la forme matricielle :

$$\alpha = \sum_{l=0}^{n} \frac{C_l}{\mu_l} V_l \, V_l^T + W;$$

où :

$$\alpha = \| \alpha_{ii'} \|_{nxn};$$

$$V_l^T = (-P_{l1},\ -P_{l2}, ..., -P_{ln});$$

$$W = \| w_{ii'} \|_{nxn};$$

$$w_{ii'} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{n} P_{li}(1 - P_{li})\frac{1}{\mu_l}\ , & i = i'; \\ \\ -\sum_{l=0}^{n} P_{li}P_{li'}\frac{1}{\mu_l} & i \neq i'; \end{cases}$$

W est donc la matrice de covariance du vecteur :

$$(\Delta Q_1(t),\ \Delta Q_2(t), ..., \Delta Q_n(t));$$

pour $\delta_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Ainsi le vecteur $Q(t) = (Q_1(t),\ Q_2(t), ..., Q_n(t))$ est approximé par un processus continu $X(t)$ qui est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = \beta dt + (\alpha dt)^{(1/2)} dZ(t)$$

où $Z(t)$ est un bruit blanc Gaussien de dimension n (chaque coordonnée a une moyenne nulle et une variance unité; les covariances sont nulles); β est le vecteur de coordonnées $\beta_1,\ \beta_2, ..., \beta_n$ et α est une matrice définie non négative.

Si l'état initial est X_0 alors le processus $X(t)$ admet une densité de probabilité à la date t qui est de la forme :

$$P(X_0, X; t) = (2\Pi\ det|\alpha t|)^{-1/2}\ exp\left[-\frac{1}{2}t(X - X_0 - \beta t)^T\ - 1_{X - X_0 - \beta t}\right];$$

et qui est solution de l'équation multi-dimensionnelle de la diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial t}P(X_0, X; t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}\sum_{i'=1}\alpha_{ii'}\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_{i'}}P(X_0, X; t) - \sum_{i=1}\beta_i\frac{\partial}{\partial X_i}P(X_0, X; t).$$

Afin de tenir compte de la contrainte $X(t) \geq 0$ on introduit des barrières réfléchissantes aux points $X_i = 0,\ i = \overline{1,n}$. La densité de probabilité stationnaire existe si tous les éléments $\gamma = 2\alpha^{-1}$ sont strictement négatifs. Dans ce cas :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} |\gamma_i|\ exp(\gamma_i(X_i)).$$

L'approximation de la distribution conjointe des tailles des files d'attente du réseau est alors de la forme :

$$\hat{P}(X_1, X_2, ..., X_n) = \hat{P}(X_1)\hat{P}(X_2)...\hat{P}(X_n);$$

où :

$$\hat{P}_i(y) = (1 - \hat{\rho}_i)\hat{\rho}_i^y;$$

$$\hat{\rho}_i = e^{\gamma}.$$

La forme produit est intéressante malgré la complexité des coefficients β_i et $\alpha_{ii'}$. Les probabilités marginales sont modifiées de la manière suivante :

$$\hat{P}_i(y) = \begin{cases} 1 - \rho_i, & \text{Si } y = 0; \\ \\ \rho_i(1 - \hat{\rho}_i)\hat{\rho}_i^{y-1}, & y \leq 1; \end{cases}$$

où, $\rho_i = e_i \left(\frac{\mu_0}{\mu_i}\right)$; e_i est le nombre de visites de l'usager dans le système S_i. Les quantités e_i sont solutions du système linéaire d'équations algébriques :

$$e_i = \sum_{l=0}^{n} e_l \ P_{li} \ , \ 1 \leq i \leq n;$$

ρ_i peut être interprété comme le coefficient d'utilisation du $i^{\text{ième}}$ système. Une simplification important a été apportée à cette méthode par Reiser R. et Kobayashi H. [?]. Le nouveau modèle de diffusion nécessite beaucoup moins de calcul pour obtenir les paramètre du système et mène à un degré comparable de précision.

Notons que la méthode est basée sur l'hypothèse que les flots de départs et d'arrivées à une station forment des processus de renouvellement. Cette hypothèse n'est justifiée que pour les réseaux exponentiels. L'erreur d'une telle approximation est analysée par Lester Lewis Neale [?]. Une autre méthode toujours basée sur cette hypothèse est proposée par Gelenbe E. et Pujolle G. [?]. Des résultats analogues peuvent être obtenus. Une illustration de ces techniques de diffusion est présentée dans [?, ?]. Dans [] on procède à la simulation à l'aide de la méthode de Monte-Carlo sur les exemples traités dans les exercices pour $\rho = 0.75$, $K = 5$ et $N = 10$. Les résultats ont ensuite été comparés avec ceux de la technique de diffusion et on a remarqué que les résultats coïncidaient bien. Cependant en remplaçant la distribution d'Erlang de S_2 par une loi exponentielle, les résultats de l'approximation s'accordaient moins bien avec ceux de la simulation. Dans ce même exemple, des calculs analogues ont été effectués dans le cas où la distribution de service dans S_i est hyper-exponentielle (le coefficient de variation ¿ 1) de fonction de densité :

$$\tilde{h}_1(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{0.25}\, exp\left(-\frac{x}{0.25}\right) + \frac{1}{1.25}\, exp\left(-\frac{x}{1.25}\right)\right];$$

$$\frac{1}{\mu_1} = 0.75\ ;\ \sigma_1 = 1.88\ ;\ \frac{1}{\mu_2} = \sigma_2 = 1.$$

Les conclusions sont analogues. Dans ces même ouvrages on étudie la possibilité d'utiliser les techniques de diffusion pour l'approximation des distributions transitoires. En particulier, pour les réseaux ouverts, il est obtenu :

1. **Durée moyenne de séjour dans le réseau :**

$$T = \sum_{i=1}^{n} e_i\ T_i$$

où, $T_i = \left(\frac{1}{\mu_i}\frac{\hat{\rho}_i}{1-\hat{\rho}_i} + \frac{1}{\mu_i}\right)$ est la durée moyenne de séjour dans S_i à l'issue d'un seul passage.

2. **La densité de probabilité de la durée de séjour dans la $i^{\text{ième}}$ file :**

$$f_i(t) = (1-\rho_i)\ \delta(t) + \overline{w}_i^{-1}\ exp\ (-\overline{w}_i^{-1}\ t);$$

$$\overline{w}_i = \frac{1}{\mu_i}\ \frac{\hat{\rho}_i}{1-\rho_i};$$

$$\delta(0) = 1;\ \ \delta(t) = 0, \forall\ t \neq 0.$$

Les techniques de diffusion restant les plus populaires en raison de leur simplicité. Une autre méthode pour l'approximation des réseaux fermés exponentiels est proposée par Medvediev G.A. [?, ?]. Cette méthode n'utilise plus l'hypothèse sur l'indépendance des flots des départs et est basée sur l'analyse des équations de Kolmogorov. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir le nombre moyen de requêtes dans chaque file sous une forme explicite; il est possible alors de considérer le problème du choix de la variante optimale de répartition des serveurs dans le réseau selon un critère économique donné. Une généralisation au cas ou les serveurs sont sujets à des pannes aléatoires est considérée dans [?, ?]. L'approximation des réseaux à faible charge $\lambda \to 0$ est étudiée par Brissina I.V. et Soloviev A.D. [?].

Références

[1] J. Abate and W. Whitt. Modeling service-time distributions with non-exponential tails : beta mixtures of exponentials. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 15(3) :517–546, 1999.

[2] I. Adiri and B. Avi. Itzhak. A time-sharing queue with a finite number of customers. *J. ACM.*, 16(2) :315–323, 1969.

[3] L. G. Afanassieva, F. Delcoigne, and G. Fayolle. On polling systems where servers wait for customers. *Markov Process. Related Fields*, 3(4) :527–545, 1997. Statistical mechanics of large networks (Rocquencourt, 1996).

[4] V. Ahuja. *Design and Analysis of Computer Communication Networks.* McGraw Hill, New York, 1992.

[5] T. ALTIOK and R. RANJAN. Analysis of production lines with general service times and finite buffers : A two-node decomposition approach. *Engineering Costs and Production Economics*, 17 :155–165, 1988.

[6] V. Anantharam and M. Benchekroun. A technique for computing sojourn times in large networks of interacting queues. 7 :441–464, 1993.

[7] V. Anantharam and T. Konstantopoulos. A functional central limit theorem for the jump counts of Markov processes with an application to Jackson networks. *Adv. in Appl. Probab.*, 27(2) :476–509, 1995.

[8] Søren Asmussen. Light traffic equivalence in single server queues. *Preprint*, 1991.

[9] D. Aïssani and all. Evaluation des performances des réseaux de télécommunication. *Séminaire du Laboratoire d'Informatique de Marseille*, juin 2001, 2002.

[10] D. Aïssani and A. Bouguerra. Cours de théorie de file d'attente. *U.E.R. Math-Informatique,EA*, 1986.

[11] F. Baccelli, P. Boyer, and G. Hebuterne. Single-server queues with impatient customers. *aap*, 16 :887–905, 1984.

[12] F. Baccelli and P. Brémaud. *Palm Probabilities and Stationary Queues*, volume 41 of *Lecture Notes in Statistics.* Springer-Verlag, 1987.

[13] F. Baccelli and P. Brémaud. Virtual customers in sensitivity and light traffic analysis. *Preprint*, March 1991.

[14] F. Baccelli and S. Foss. On the saturation rule for the stability of queues. rapport de recherche 2015, September 1993.

[15] F. Baccelli and S. Foss. Ergodicity of Jackson-type queueing networks. *Queueing Systems Theory Appl.*, 17(1-2) :5–72, 1994.

[16] F. Baccelli and H. Gérard. On queues with impatient customers. Technical Report 94, 1981.

[17] F. Baccelli, F. I. Karpelevich, M. Ya. Kel'bert, A. A. Puhalskii, A. N. Rybko, and Yu. M. Suhov. A mean-field limit for a class of queueing networks. *J. Statist. Phys.*, 66(3-4) :803–825, 1992.

[18] Gang Bao and Christos G. Cassandras. First and second derivative estimators of a closed queueing network throughput using perturbation analysis techniques. *Preprint*, feb 1992.

[19] A. D. Barbour and T. C. Brown. The Stein-Chen method, point processes and compensators. *Ann. Probab.*, 20(3) :1504–1527, 1992.

[20] A. D. Barbour, H. Lars, and J. Svante. *Poisson approximation.* The clarendom Press Oxford University Press, New York, 1992.

[21] Y. Bard. *Some extensions to multiclass queueing network analysis.* in Performance of Computer Systems, 1979.

[22] F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz, and F. G. Palacios. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. *J. ACM.*, 22 :248–260, 1975.

[23] F. Bause and P. Buchholz. Queueing petri nets with product form solution. *Performance Evaluation*, 32(4) :265–299, 1998.

[24] N. G. Bean, R. J. Gibbens, and S. Zachary. The performance of single resource loss systems in multiservice networks. Technical Report 93-10, Statistical Laboratory, University of Cambridge, 1993.

[25] V. E. Benes. Markov processes representing traffic in connecting networks. 42(6), 1963.

[26] D. Bertsekas and R. Gallager. *Data Networks.* Prentice-Hall International, 2nd edition, 1992.

[27] Partha P. Bhattacharya and Anthony Ephremides. Stochastic monotonicity properties of multiserver queues with impatient customers. 28 :673–682, 1991.

[28] A. Birman and Y. Kogan. Asymptotic evaluation of closed queueing networks with many stations. 8(3) :543–563, 1992.

[29] G. R. Bitran and S. Dasu. A review of open queueing network models of manufacturing systems. *Queueing Systems*, 12 :95–134, 1992.

[30] R. P. Blanc and I. W. Contton. *Compuer Network*. Ed. IEEE Press, 1979.

[31] G. Bloch, H. Greiner, H. Meer, and K. S. Trivedi. *Queueing Network and Markov Chains Modelling and Performance Evaluation with Computer Science Applications*. Wiley, 1998.

[32] F. T. Boesch. *Large Scale Networks : Theory and Desing*. Ed. IEEE Press, 1976.

[33] J. C. Bolot and A. U. Shankar. Analysis of a fluid approximation to flow control dynamics. In *Proceedings of INFOCOM'92*, pages 2398–2407, 1992.

[34] A. A. Borovkov and R. Schassberger. Ergodicity of a Jackson network with batch arrivals. 31(3) :847–853, 1994.

[35] A. A. Borovkov and R. Schassberger. Ergodicity of a polling network. 50(2) :253–262, 1994.

[36] S. C. Borst, O. J. Boxma, J. A. Morrisson, and R. Nú nez Queija. The equivalence between processor sharing and service in random order. SPOR Report 2002-01, Technische universiteit Eindhoven, January 2002.

[37] S. C. Borst, O. J. Boxma, and R. Nú nez Queija. Heavy tails : The effect of the service discipline. In T. Field, P.G. Harrison, J. Bradley, and U. Harder, editors, *Computer Performance Evaluation, Modelling Techniques and Tools 12th International Conference, TOOLS 2002*, number 2324 in Lecture Notes in Computer Science, pages 1–30. Springer, 2002.

[38] D. D. Botvich and A. A. Zamyatin. On fluid approximations for conservative networks. *Markov Process. Related Fields*, 1(1) :113–140, 1995.

[39] R. J. Boucherie. Product forms based on backward traffic equations. *J. Appl. Probab.*, 32(2) :508–518, 1995.

[40] O. J. Boxma. Static optimization of queueing systems. In *Recent trends in optimization theory and applications*, pages 1–16. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

[41] O. J. Boxma, S. G. Foss, J. M. Lasgouttes, and R. Nú nez Queija. Waiting time asymptotics in the single server queue with service in random order. 46(1) :35–74, 2004.

[42] O. J. Boxma and W. P. Groenendijk. Pseudoconservation laws in cyclic-service systems. *J. Appl. Probab.*, 24(4) :949–964, 1987.

[43] O. J. Boxma and I. A. Kurkova. The $M/G/1$ queue with two service speeds. *Adv. in Appl. Probab.*, 33(2) :520–540, 2001.

[44] T. C. Brown and D. Greig. Correction to : "Stein's method and point process approximation" [Stochastic Process. Appl. **43** (1992), no. 1, 9-31 ; MR 93k :60120] by A. D. Barbour and Brown. *Stochastic Process. Appl.*, 54(2) :291–296, 1994.

[45] T. C. Brown and P. K. Pollett. Some distributional approximations in Markovian queueing networks. *Adv. in Appl. Probab.*, 14(3) :654–671, 1982.

[46] T. C. Brown and P. K. Pollett. Poisson approximations for telecommunications networks. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B Appl. Math.*, 32(3) :348–364, 1991.

[47] S. C. Bruell and G. Balbo. *Computational Algorithms for Closed Queueing Networks.* North Holland, New York, 1980.

[48] P. J. Burke. The output of a queueing system. *Operations Research*, 4 :135–165, 1959.

[49] B. D. Buruijn. *An introduction to queueing theory.* Arnold, London, 1996.

[50] J. A. Buzacott and J. G. Shanthikumar. *Stochastic models of manufacuring systems.* Prentive Hall, Englewood Cliffs, 1993.

[51] J. Campos and M. Silva. Embedded product-form queueing networks and the improvement of performance bounds for petri net systems. *Performance Evaluation, vol. 18, no. 1*, pages 3–19, July 1993.

[52] Xi-Ren Cao. Realization probability in closed Jackson queueing networks and its application. *aap*, 19 :708–738, 1987.

[53] Xi-Ren Cao. Perturbation analysis of closed queueing networks with general service time distributions. 36(11) :1327–1331, 1991.

[54] Xi-Ren Cao. A new method of performance sensitivity analysis for non-Markovian queueing networks. 10 :313–350, 1992.

[55] Xi-Ren Cao and Dye-Jyun Ma. New performance sensitivity formulae for a class of product-form queueing networks. 1 :289–313, 1992.

[56] S. Chakravarthy and A. S. Alfa (editors). *Matrix Analytic Methods in Stochastic Models.* Marcel Dekker, New York, 1996.

[57] X. Chao, M. Miyazawa, and M. Pinedo. *Queueing Networks : Customers, Signal and Product Form Solutions.* 1999.

[58] C. Cheng-Shang and N. Randolph. Perturbation analysis of the $M/M/1$ queue in a Markovian environment via the matrix-geometric method. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 9(2) :233–246, 1993.

[59] E.D. Coffman and P.J. Denning. *Operating system theory.* Prentice-Hall, 1973.

[60] J. W. Cohen. *The Single Server Queue.* North-Holland, 1982.

[61] J. W. Cohen. *On Regenerative Processes in Queueing Theory*, volume 121 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer Verlag, 1999.

[62] A. E. Conway and N. D. Georganas. *Queueing Networks – Exact Computational Algorithms : A Unified Theory Based on Decomposition and Aggregation.* MIT Press. Cambridge, MA., 1989.

[63] P. J. Courtois. *Decomposability : Queueing and Computer System Applications.* Academic Press, New York, 1997.

[64] D. R. Cox and P. A. Lewis. *The Statistical Analysis of Series of Events.* Methuem and Co, 1966.

[65] A. J. Coyle, W. Henderson, C. E. M. Pearce, and P. G. Taylor. A general formulation for mean-value analysis in product-form batch-movement queueing networks. 16 :363–372, 1994.

[66] J. Dai and S. Meyn. Stability and convergence of moments for multiclass queueing networks via fluid limit models. 40(11) :1889–1904, 1995.

[67] D. J. Daley. Queueing output processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 8 :395–415, 1976.

[68] J. F. Dantzer and R. Philippe. Fluid limits on string valued Markov processes. *aap*, 12(3) :860–889, 2002.

[69] R. Disney and P. Kiessler. *Traffic Processes in Queueing Networks : A Markov Renewal Approach.* Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1987.

[70] R. L. Dobrushin, M. Ya. Kelbert, A. N. Rybko, and Yu. M. Suhov. *Qualitative methods of queueing network theory.* Stochastic cellular systems : ergodicity, memory, morphogenesis, pages 183-224, Manchester University Press, Manchesrer, 1990.

[71] V. Dumas. Harris ergodicity of a multiclass queuing network via its associated fluid limit model. Technical Report RR-2177, INRIA, 1993.

[72] J. H. Dshalalow (editor). *Advance in queueing : theory, Methods and Open Problems.* CRC Press, Boca Raton, 1995.

[73] G. Fayolle and editors J. M. Lasgouttes. Special issue on statistical mechanics of large networks. *Markov Processes and Related Fields*, 3, 1997.

[74] G. Fayolle and J. M. Lasgouttes. Asymptotics and scalings for large closed product-form networks via the Central Limit Theorem. 2(2) :317–348, 1996.

[75] G. Fayolle, V. A. Malyshev, and M. V. Menshikov. *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains.* Cambridge University Press, 1995.

[76] G. Fayolle, I. Mitrani, and R. Iasnogorodski. Sharing a processor among many job classes. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 27(3) :519–532, 1980.

[77] G. Fayolle and A. A. Zamyatin. Controlled random walks in Z_+^N and their applications to queueing networks. *Preprint*, 1993. To appear.

[78] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II.* John Wiley & Sons, 2 edition, 1971.

[79] P.D. Finch. The output process of the queueing system M/G/1. *J. R. Statist. Soc.*, B 21 :375–380, 1975.

[80] C. Flores. *Diffusion approximations for computer communications networks.* in : H. Takagi, Ed., Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems (North-Holland, Amsterdam, 1990).

[81] G. J. Foschini. Equilibria for diffusion models of pairs of communicating computers - symmetric case. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-28 :273–284, 1982.

[82] G. J. Foschini and J. Salz. Basic dynamic routing problem and diffusion. *IEEE Transactions on Communications*, COM-26 :320–327, 1978.

[83] S. G. Foss. Some properties of open queueing networks. *Problemy Peredachi Informatsii*, 25(3) :90–97, 1989.

[84] J. M. Foureau and D. Verchère. G-networks with triggered batch state-dependent movement. presented at IEEE MASCOT'95 conference, 1995.

[85] C. Fricker, P. Robert, E. Saada, and D. Tibi. Analysis of some networks with interaction. *Ann. Appl. Probab.*, 4(4) :1112–1128, 1994.

[86] C. Fricker, P. Robert, and D. Tibi. On the rates of convergence of Erlang's model. *J. Appl. Probab.*, 36(4) :1167–1184, 1999.

[87] D. P. Gaver. A waiting line with interrupted service, including priorities. *Roy. Stat. Soc. J*, B 24 :73–90, 1962.

[88] D. P. Gaver. A comparison of queue disciplines when service orientation times occur. 10 :219–235, 1963.

[89] Pawel Gazdzicki, Ioannis Lambadaris, and Ravi R. Mazumdar. Blocking probabilities for large multirate Erlang loss systems. *aap*, 25(4) :997–1009, 1993.

[90] E. Gelenbe and I. Mitrani. *Analysis and Synthesis of Computer Systems*. Academic-Press, 1980.

[91] Wei-Bo Gong and Jian-Qiang Hu. The MacLaurin series for the GI/G/1 queue. *Preprint*, August 1990.

[92] D. Gross and C. M. Harris. *Fundamentals of queuein theory*. Wiley, Chichester, 1985.

[93] L. GUN and A. M. MAKOWSKI. *An approximation method for general tandem queueing systems subject to blocking*. in Perros and Altiok, (Eds.),Proc. First International Workshop on Queueing Networks with Blocking, 1989.

[94] R. W. Hall. *Queueing Methods : For Services and Manufacturing*. Prentice Hall, 1991.

[95] P. J. F. Hayes. *Modeling and Analysis of Computer Communication Networks*. Plenum Publications, New York, 1984.

[96] Yu-Chi Ho and Xi-Ren Cao. Optimization and perturbation analysis of queueing networks. 40 :559–582, 1983.

[97] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[98] D. L. Iglehart and G. S. Shedler. *Regenerative Simulation of Response Times in Networks of Queues*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[99] B. Avi. Itzhak and S. Halfin. Responce times in gated m/g/1 queues : the processor-sharing case. *Queueing Systems*, 4(3) :263–279, 1989.

[100] P. Varaiya J. Walrand. *High-Performance Communication Networks*. The Morgan Kaufmann Series in Networking, 1996.

[101] J. R. Jackson. Jobshop-like queueing systems. 10, 1963.

[102] J. R. Jackson. Networks of waiting lines. *Mathematics of Operations Research*, 5 :1957, 518-521.

[103] R. Jain. *The Art of Computer Systems Performance Analysis Techniques for Experimental Design, Measurment, Simulation, and Modeling.* J. Wiley & Sons, 1991.

[104] A. Jean-Marie and P. Robert. On the transient behavior of the processor sharing queue. *Queueing Systems Theory Appl.*, 17(1-2) :129–136, 1994.

[105] M. A. Johnson. An empirical study of queueing approximations based on phase-type approximations. *Stochastic Models*, 9, 1993.

[106] E. G. Coffman Jr. and M. I. Reiman. *Diffusion approximations for storage processes in computer systems.* in : Proceedings of the ACM SIGMETRICS Conference (Minneapolis, 1983).

[107] M. Ya. Kel'bert and Yu. M. Sukhov. Mathematical theory of queueing networks. *Journal of Soviet Mathematics*, 50(3) :1527–1600, 1990.

[108] F. P. Kelly. *Dependence of sojourn times in closed queueing networks.* in : Mathematical Computer Performance and Reliability, Proceedings of the International Workshop (Pisa, Italy, 1983)(North-Holland, Amsterdam, 1984) 111-121.

[109] F. P. Kelly. *Reversibility and stochastic networks.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1979.

[110] F.P. Kelly. The Clifford Paterson lecture, 1995 modelling communication networks, present and future. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 354 :437–463, 1996.

[111] P. J. Kühn. Approximate analysis of general queueing networks by decomposition. *IEEE Trans. Commun.*, 27 :113–126, 1979.

[112] J. P. King. *Computer and Communication Systems Performance Modelling.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1990.

[113] R. A. King. The covariance structure of the departure process from m/g/1 queues with finite waiting lines. *J. R. Statist. Soc.*, B 33 :401–406, 1971.

[114] J. F. C. Kingman. Inequalities in the theory of queues. *Journal of the Royal Statistical Society*, B. 32 :102–110, 1970.

[115] L. Kleinrock. *Queueing Systems, Volume 1 : Theory.* John Wiley and Sons, New York, 1975.

[116] L. Kleinrock. *Queueing Systems Volume 2 : Computer Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1976.

[117] R. L. Klevans and W. Stewart. From queueing networks to markov chains : the xmarca interface. *Performance Evaluation*, 24 :23–45, 1995.

[118] E. Koenigsberg. Twenty five years of cyclic queues and closed queue network : A review. *J. Opl.Res. Soc.*, 33 :605–619, 1982.

[119] Y. Kogan. Another approach to asymptotic expansions for large closed queueing networks. 11 :317–321, 1992.

[120] Y. Kogan and A. Birman. Asymptotic analysis of closed queueing networks with bottlenecks. In T. Hasegawa, H. Takagi, and Y. Takahashi, editors, *Proceedings of the International Conference on Performance of Distributed Systems and Integrated Communication Networks*, pages 237–252, Kyoto, 1991.

[121] Y. Kogan and R. Sh. Lipster. Limit non-stationary behavior of large closed queueing networks with bottlenecks. 14(1-2) :33–55, 1993.

[122] Ya. A. Kogan and E. V. Krichagina. *Closed exponential queueing networks with blocking in heavy trafic.* in : Queueing Networks with Blocking (Raleigh, USA, 1988) (North-Holland, Amsterdam, 1989).

[123] Ya. A. Kogan and S. G. Nersesyan. Asymptotic methods for the analysis of closed queueing networks with heavy trafic. *Automation and Remote Control*, 45 :1039–1047, 1984, Part 2.

[124] Ya. A. Kogan and A. A. Pukhalskii. *On tandem queues with blocking in heavy trafic.* in : E. Gelenbe, Ed., Models of Computer System Performance, Proceedings of Performance '84 (Paris, France, 1984) (North-Holland, Amsterdam, 1985).

[125] Ya. A. Kogan and A. A. Pukhalskii. Tandem queue with finite intermediate waiting room and blocking in heavy trafic. *Problems of Control and Information Theory*, 17 :3–13, 1988.

[126] A. G. Konheim and B. Meister. Waiting lines and times in a system with polling. *Journal of the ACM*, 21(3) :470–490, 1974.

[127] A. G. KONHEIM and M. A. REISER. A queueing model with finite waiting room and blocking. *J. ACM*, 23 :328–341, 1976.

[128] P. Konstantopoulos and M. Zazanis. Sensitivity analysis for stationary and ergodic queues. *aap*, 24(3) :738–750, 1992.

[129] P. Konstantopoulos and M. Zazanis. Sensitivity analysis for stationary and ergodic queues : Additional results. *aap*, 26 :556–560, 1994.

[130] M. Kramer. Stationary distributions in a queueing system with vacation times and limited service. *Queueing Systems Theory Appl.*, 4(1) :57–68, 1989.

[131] D. P. Kroese and V. F. Nicola. Efficient simulation of a tandem jackson network. *In Second International Workshop on Rare Event Simulation, RESIM'99*, pages 197–211, 1999.

[132] D. P. Kroese and V. Schmidt. A continuous polling system with general service times. *aap*, 2(4) :906–927, 1992.

[133] S. Kumar and P. R. Kumar. Performance bounds for queueing networks and scheduling policies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-39 :1600–1611, August 1994.

[134] G. A. Larissa, G. Fayolle, and L. V. Nazarov. Preliminary models for moving servers networks. Technical Report 2469, inria, year = 1995, January.

[135] J.-M. Lasgouttes. *Contribution à l'analyse de réseaux stochastiques et application aux systèmes de transport.* Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1995.

[136] J. B. Lasserre. Exact formula for sensitivity analysis of Markov chains. *Preprint*, 1991.

[137] S. Lavenberg. *Computer Performance Modelling Handbook.* Academic-Press, 1983.

[138] E. D. Lazowska. *Quantitative System Performance : Computer system analysis using queueing network models.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.

[139] E. D. Lazowska. *Quantitative System Performance : Computer system analysis using queueing network models.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.

[140] E.D. Lazowska, J. Zahorjan, G.S. Graham, and K.S. Sevcik. *Quantitative System Performance : Computer System Analysis Using Queuing Networks Theory.* Prentice-Hall, 1984.

[141] E. A. Lebedev and A. A. Chechelnitskii. Diffusion approximation of queueing networks of open type. *Ukrainian Mathematical Journal*, 41 :95–99, 1989.

[142] A. J. Lemoine. *Networks of queues - a survey of weak convergence results.* Management Science, 24 (1978).

[143] Torgny Lindvall. Stochastic monotonicities in Jackson queueing networks. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 11(1) :1–9, 1997.

[144] W. S. Litchman and D. I. Epstein. Markov processes in communication networks. *Communication and Electronics*, jul, 1963.

[145] Z. Liu, P. Nain, and D. Towsley. Exponential bounds with applications to call admission. *J. ACM*, 44(3) :366–394, 1997.

[146] L. I. Lukashuk. Diffusion approximation of a closed jackson network. *Cybernetics*, 25 :36–40, 1989.

[147] V. Madisetti, S. Parekh, and J. Walrand. Sojourn times in jackson networks in heavy trafic. *IEEE International Symposium on Information Theory (Ann Arbor, 1986)*, 60.

[148] A. V. Makarichev. A two-phase system with identical service in the case of different service disciplines and heavy load. *Soviet Journal of Computer and Systems Sciences*, 24 :136–140, 1986.

[149] V. Malyshev and A. Yakovlev. Condensation in large closed Jackson networks. 6(1) :92–115, 1996.

[150] J. B. Martin. Stochastic bounds for fast Jackson networks. draft.

[151] J. B. Martin. Point processes in fast Jackson networks. *Ann. Appl. Probab.*, 11(3) :650–663, 2001.

[152] J. B. Martin and Yu. M. Suhov. Fast Jackson networks. *Ann. Appl. Probab.*, 9(3) :854–870, 1999.

[153] L. F. Martins and H. J. Kushner. Routing and singular control for queueing networks in heavy trafic. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28 :1209–1233, 1990.

[154] L. Massoulié. Stability of non-Markovian polling systems. *Queueing Systems Theory Appl.*, 21(1-2) :67–95, 1995.

[155] G. E. Masterson and S. Sherman. On queues in tandem. 34 :300–307, 1963.

[156] J. McKenna, D. Mitra, and K. G. Ramakrishnan. A class of closed Markovian queueing networks : Integral representations, asymptotic expansions and generalizations. Technical report, AT&T Bell Laboratories, 1990.

[157] N. M. Mirasol. The output of an $m/g/\infty$ queuing system is poisson. 11(2) :282–284, March/April 1963.

[158] D. Mitra and J. McKenna. Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 33(3) :568–592, 1986.

[159] M. F. NEUTS. Two-queues in series with a finite, intermediate waiting room. *J. Appl. Probab. 5*, 123-142 :1968, 1968.

[160] M. F. Neuts. *Matrix-geometric solutions in stochastic models : an algorithmic approach.* Johns Hopkins University Press, 1981.

[161] G. F. Newell. Applications of queueing theory. 1971.

[162] G. F. Newell. *Approximate Stochastic Behavior of n-Server Service Systems with Large n.* Springer, 1973.

[163] G.F. Newell. *Approximations of Queueing Theory.* 2nd ed.. Chapman & Hall, New York, 1982.

[164] R. O. Onvural and I. F. Akyildiz. *Queueing Networks with Finite Capacity.* Proceedings of the Second International Conference, Research Triangle Park, N.C., USA. North Holland Amsterdam, 1993.

[165] C. D. Pack. The output of an M/D/1 queue. *Oper. Res.*, 23 :750–760, 1975.

[166] H. G. Perros. *Queueing Networks With Blocking : Exact and Approximate Solutions.* Oxford Univ. Press, New York, 1994.

[167] H. G. PERROS and T. ALTIOK. Approximate analysis of open networks of queues with blocking : tandem configurations. *IEEE Trans. Soft. Eng.*, 12 :450–461, 1986.

[168] H. G. Perros and T. Altiok (editors). *Queueing Networks with Blocking.* Proceedings of the First International Workshop, Raleigh, NC, USA, May 20, 1988. North-Holland, Amsterdam, 1989.

[169] W. P. Peterson. A heavy trafic limit-theorem for networks of queues with multiple customer types. *Mathematics of Operations Research*, 16 :90–118, 1991.

[170] Tolya Puhalskii. Some inequalities for a multiphase queueing system. *Probl. Inform. Transmiss.*, no. 4., 1982.

[171] G. Pujolle and S. Fdida. *Modèles de systèmes et de réseaux Tome 1 : Performances.* Eyrolles, 1989.

[172] G. Pujolle and S. Fdida. *Modèles de systèmes et de réseaux Tome 2 : Files d'attente.* Eyrolles, 1989.

[173] A. A. Pukhalskii. pages 1073–1081, 51 (1991) Part 1.

[174] V. Ramaswami and M. F. Neuts. Some explicit formulas and computational methods for infinite- server queues with phase-type arrivals. *Journal of Applied Probability*, 17 :498–514, 1980.

[175] E. Reich. waiting times when queues are in tandem. *Annals of Mathematical Statistics*, 28 :768–773, 1957.

[176] E. Reich. Note on queues in tandem. *Ann. Math. Statist.*, 34 :338–341, 1963.

[177] M. I. Reiman. *The heavy trafic Diffusion approximation for sojourn times in Jackson networks.* in : R.L. Disney and T.J. Ott, Eds., Applied Probability - Computer Science : The Interface, Proceedings of the ORSA/TIMS Boca Raton Symposium, Vol. II (Birkhauser, Boston, Cambridge, Mass., 1982).

[178] M. I. Reiman. Open queueing networks in heavy trafic. *Mathematics of Operations Research*, 9 :441–458, 1984.

[179] M. I. Reiman and B. Simon. A network of priority queues in heavy trafic : one bottleneck station. *Queueing Systems*, 6 :33–57, 1990.

[180] M. Reiser and S. S. Lavenberg. Corrigendum : "Mean-value analysis of closed multichain queuing networks" [J. Assoc. Comput. Mach. **27** (1980), no. 2, 313-322 ; MR 81d :60107]. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 27(2) :629, 1980.

[181] H. Robbins and S. Monro. A stochastic approximation method. *Annals of Mathematical Statistics*, 22 :400–407, 1951.

[182] T. G. Robertazzi. *Computer Networks and Systems : Queueing Theory and Performance Evaluation, 2nd Edition.* Springer Verlag, New York, 1994.

[183] R. Y. Rubinstein. *Monte Carlo Optimization, Simulation, and Sensitivity of Queueing Networks.* Wiley, New York, 1986.

[184] H. Saito. The departure process of an n/g/1 queue. *Performance Evaluation*, 11 :241–251, 1990.

[185] R. Schassberger. Stability of polling networks with state-dependent server routing. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 9(4) :539–550, 1995.

[186] M. Schwartz. *Telecommunication Networks.* Addison-Wesley, 1989.

[187] T. I. Seidman. First come first serve can be unstable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :2166–2170, October 1994.

[188] R. F. Serfozo. Markovian network processes : Congestion-dependent routing and processing. 5 :5–36, 1989.

[189] D. N. Shanbhag. On infininite server queues with batch arrivals. *Journal of Applied Probability*, 3 :274–279, 1966.

[190] J. G. Shanthikumar and D. D. Yao. Stochastic monotonicity in general queueing networks. *J. Appl. Probab.*, 26(2) :413–417, 1989.

[191] G. S. Shedler. *Regeneration and Networks of Queues (Applied Probability).* Springer Verlag, 1987.

[192] A. L. Stolyar. The asymptotics of stationary distribution for a closed queueing system. *Problemy Peredachi Informatsii*, 25(4) :80–92, 1989.

[193] D. Stoyan. *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models.* John Wiley & Sons, Chichester, 1983.

[194] S. Suresh and W. Whitt. The heavy-trafic bottleneck phenomenon in open queuing-networks. *Operations Research Letters*, 9 :355–362, 1990.

[195] R. Syski. *Introduction to Congestion Theory in Telephones.* 2nd ed. Elsevier Ltd, 1986.

[196] W. Szczotka and F. P. Kelly. Asymptotic stationarity of queues in series and the heavy trafic approximation. *Annals of Probability*, 18 :1232–1248, 1990.

[197] H. Takagi. *Analysis of Polling Systems.* The MIT Press, Cambridge, Massachussets, 1986.

[198] H. Takagi. Queueing analysis of polling models : an update. In Hideaki Takagi, editor, *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems*, pages 267–318. North Holland, Amsterdam, 1990.

[199] M. Tanneri. *Practical Queueing Analysis (Book and disk).* McGraw Hill, 1995.

[200] H. C. Tijms. *Stochastic Modelling and Analysis : A Computational Approach.* John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[201] H. C. Tijms. *Stochastic Models : An Algorithmic Approach.* John Wiley & Sons, Chichester, 1994.

[202] Don Towsley. Queueing network models with state-dependant routing. *Journal of the ACM*, 27(2) :323–337, 1980.

[203] K. S. Trivedi. *Probability and Statistics with Reliability : Queuing, and Computer Science Applications.* Pretice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1982.

[204] P. Tsoucas and J. Walrand. Monotonicity of throughput in non-Markovian networks. 26 :134–141, 1989.

[205] N. M. Vandijk. *Queueing Networks and Product Forms : A Systems Approach.* (Wiley-Interscience Series in Systems and Optimization). Wiley, Chichester, 1993.

[206] P. K. Verman. *Performance Estimation of Computer Communication Networks.* Computer Science Press, New York, 1980.

[207] O. P. Vinogradov. A two-phase queueing system with identical servicing under conditions of a heavy load. *Engineering and Cybernetics*, 21 :108–113, 1983.

[208] V. L. Wallace. *On the Representation of Markovian Systems by Network Models.* Management Information Services, Detroit, 1969.

[209] J. Walrand. *Introduction to Queueing Networks.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1988.

[210] J. Walrand. *Communication Networks : A First Course.* Aksen Associates, Boston, 1991.

[211] Yorai Wardi, M. Zazanis, and M. Luo. Constistency of perturbation analysis for a queue with finite buffer space and loss policy. 68(1) :181–202, 1991.

[212] A. Shwartz A. Weiss. *Large Deviations for Performance Analysis : Queues, Communications, and Computing.* Chapman & Hall, London, 1995.

[213] J. A. White, J. W. Schmidt, and G. K. Bennett. *Analysis of Queueing Systems.* Academic Press, New York, 1975.

[214] P. Whittle. *Systems in Stochastic Equilibrium.* Wiley, 1986.

[215] R. W. Wolff. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1989.

[216] M. E. Woodward. *Communication and Computer Networks, Modelling with discrete-time queues.* IEEE Computer Society Press, 1994.

[217] K. Yamada. *A heavy trafic limit theorem for G=M=1 queueing networks.* in : Probability Theory and Mathematical Statistics (Kyoto, Japan, 1986), Lecture Notes in Mathematics, No. 1299 (Springer-Verlag, Berlin, 1988).

[218] D. D. Yao. *Stochastic modeling and analysis of manufacturing systems.* Springer-Verlag, 1994.

[219] Ping-Cheng Yeh. *Departure Process and Queueing Analyses for Several Classes of Single Server Queueing Systems.* PhD thesis, Department of Electrical Engineering National Taiwan University, 2000.

Lamos Edition, 2004.

Les auteurs :

* Djamil Aïssani a assuré les premiers cours de files d'attente et de Sûreté de Fonctionnement (Fiabilité) pour la première promotion des ingénieurs en informatique de l'ENITA (Ecole Nationale des Ingénieurs et Techniciens d'Algérie, Bordj-el-Bahri, Alger-1985 et 1986). Il a été responsable des modules de Post-Graduation "Modélisation et Simulation des Systèmes Industriels" (P.G. Institut d'Informatique - Université d'Annaba, 1987) et "Modélisation des Systèmes Informatiques" (P.G. Institut d'Informatique - U.S.T.H.B. Alger, 1988).

* Amar Aïssani est l'auteur des ouvrages "Phénomènes d'Attente dans les Systèmes Informatiques" (ENITA Ed., 1987) et "Modèles Stochastiques de la Théorie de Fiabilité" (O.P.U., 1992). Il est actuellement Doyen de la Faculté de Génie Electrique et d'Informatique de l'U.S.T.H.B. Alger.