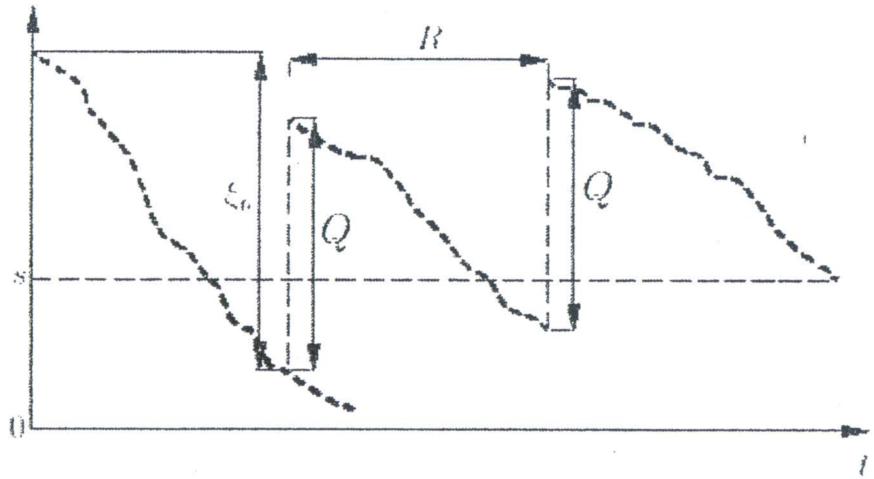
Université A. Mira – Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Master 2

Module T.A.G.S

Techniques Avancées de Gestion de Stock



Pr Djamil Aïssani
Dr Boualem Rabta
Dr Zahir Mouhoubi

Béjaia - 2012/2013

Table des Matières

Introduction

Les problèmes de gestion des stocks demeurent parmi les plus étudiés par les spécialistes de la recherche opérationnelle. On les rencontre fréquemment et lorsqu'ils peuvent être contrôlés par les techniques quantitatives, les bénéfices réalisés sont appréciables [11].

Les modèles stochastiques de gestion des stocks sont plus réalistes, car ils prennent en considération le comportement incertain de certains paramètres. Cependant, ils sont plus difficiles à analyser. Ils peuvent contenir un grand nombre de paramètres. En général, ces modèles sont très compliqués et ne peuvent être résolus que d'une manière approximative.

Lorsqu'on peut estimer, par exemple à partir de données historiques, les distributions de probabilité de la demande sur un intervalle de temps et celles du délai de livraison (ou encore la distribution de probabilité de la demande durant le délai de livraison), on peut, en principe, exprimer le coût espéré de stockage, de commande et de rupture, en fonction des variables de décision, par des expressions faisant intervenir les fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires pertinentes. Mais, même alors, la détermination de la valeur optimale des variables de décision (point de commande, taille de lot, arriéré de commandes), ne peut généralement pas être obtenue analytiquement comme dans le cas déterministe [5].

Considérons par exemple le modèle (R, s, S). Il n'existe que des expressions approximatives de la P2 – mesure de service (taux dec remplissage), i.e., la proportion de la demande satisfaite directement du stock en main [12]. Aussi, les valeurs optimales de s et S ne sont pas connues en une forme finale pour des lois générales de demande [15]. Pour établir les expressions des coûts et des mesures de service pour le problème à horizon infini, on utilise des techniques de la théorie du renouvellement (voir par exemple [7] , [9]). Les distributions stationnaires des différentes chaînes de Markov incluse dans le modèle sont données en fonction de la fonction de renouvellement associée à la loi de demande. Encore une fois, le calcul de la fonction de renouvellement n'est pas toujours une tâche facile. On fait intervenir la transformée de Laplace et il n'est pas toujours aisé d'obtenir des résultats analytiques [10].

Les méthodes numériques sont souvent utilisées pour l'obtention des approximations des quantités d'intérêt. Cela nous amène à remplacer le système réel, généralement très compliqué par un autre système (idéal) qui lui est proche dans un certain sens, mais qui est plus simple en structure et/ou en composantes, et qui peut être analysé. Ajoutons à cela le fait qu'en pratique les paramètres sont estimés à partir de données empiriques (historiques des ventes, consommations,...). Ici, le modèle est encore une fois sujet à des perturbations. C'est pour cela que l'étude des propriétés qualitatives, en particulier la stabilité, peut avoir un intérêt pour les modèles de gestion de stocks, car elle permet de délimiter le domaine dans lequel le modèle mathématique peut être utilisé comme une représentation fidèle (dans un certain sens) du système réel (cf. [13], [14]).

Le cours ***T.A.G.S.*** (*Techniques Avancées de Gestion des Stocks*) intégré dans le programme de l'option « *Modélisation Mathématique et Techniques de Décision* » du Master2 Recherche Opérationnelle, a pour but d'expliquer le pourquoi de l'intérêt pour les problèmes de stocks [1]. En effet, en pratique, on rencontre plusieurs situations différentes et chacune nécessite une analyse sur mesure. Une attention particulière sera accordée aux modèles stochastiques de gestion de stocks. Lorsque les modèles comportent un grand nombre de paramètres, nous nous attardons sur les méthodes d'approximation.

Chapitre 1

Les systèmes de gestion des stocks

Le stock peut être vu comme l'accumulation de produits qui peut être utilisée pour satisfaire une demande future. Les stocks représentent un capital immobilisé et entraînent des coûts pour leur maintien. Ils représentent aussi un potentiel de risque (cas de produits périssables ou à obsolescence rapide). Cependant, toutes les entreprises aussi petites soient-elles et jusqu'à l'individu lui-même conservent des produits en stocks.

Avant de voir comment les stocks peuvent être gérés, il semble nécessaire de cerner le pourquoi des stocks. Ce qui suit n'est que quelques raisons de l'existence des stocks.

1.1 La fonction des stocks

Le premier motif est d'ordre financier. Il est lié à l'idée d'économie d'échelle dès que le nombre de commande est réduit. En effet, on remarque l'existence d'un coût fixe de commande, i.e, un coût qui est entraîné par le lancement d'une commande et qui ne dépend pas de la quantité commandée. Le fait de commander des quantités plus importantes (qui seront stockées) permet de réduire le nombre de commande et induit naturellement, la baisse des charges dues à la passation de commandes. En 1913, dans la première formulation de modèle de gestion des stocks, Harris mettait en évidence cette notion en intégrant à son modèle un coût fixe de commande [33]. Cette notion à été reprise par la plupart des recherches qui ont suivi le travail de Harris.

Le second motif, d'ordre financier, est lié aux possibilités spéculatives des stocks. Si l'on peut prévoir les hausses (ou les baisses) des prix, l'entreprise a tout intérêt à constituer des stocks. Ainsi, elle peut éviter d'acheter plus tard à un prix plus élevé. Les produits stockés peuvent aussi être vendus à des prix supérieurs.

Un autre motif d'ordre financier est lié toujours à l'idée d'économie. L'entreprise peut bénéficier d'escomptes sur quantité en achetant des quantités plus importantes. Les remises peuvent être intéressantes et importantes par rapport au coût du stockage.

Les stocks jouent un rôle important pour garantir l'indépendance des activités dans une entreprise industrielle. En effet, à l'intérieur de l'entreprise, une activité doit disposer des produits dont elle a besoin d'une manière instantanée, i.e, la demande doit être satisfaite immédiatement. Par contre, l'entreprise acquiert ces produits auprès de ses fournisseurs dans des délais qui peuvent être beaucoup plus longs. La constitution des stocks permet de garantir la continuité des activités et permet à l'entreprise de produire à un rythme stable.

Les stocks peuvent servir aussi, pour parer aux fluctuations de la demande des clients (elle peut être plus importante que prévu) et pour pallier aux longs délais de livraison (des retards peuvent se produire). Le stock agit donc contre l'effet de l'incertitude. Si par exemple, la demande d'un produit particulier fluctue de façon saisonnière, il est souvent plus avantageux de stocker en période creuse que d'ajuster le rythme de production à celui de la demande, puisqu'il faudrait alors maintenir une capacité suffisante pour répondre à la demande de pointe et encourir des coûts d'embauche, de surtemps et de licenciement de la main d'œuvre [18].

1.2 La gestion des stocks

La gestion des stocks tente de réaliser l'équilibre entre deux impératifs apparemment contradictoire. D'un côté, un niveau élevé des stocks entraîne des coûts élevés de stockage. On a donc tendance à réduire le niveau moyen des stocks, car ces stocks représentent une immobilisation du capital. De l'autre côté, un niveau faible des stocks augmente le risque de rupture et peut provoquer l'arrêt de production. L'utilisateur souhaite que sa demande soit satisfaite dans les délais et conçoit difficilement l'absence de stock. Pour le satisfaire, on a tendance à augmenter le niveau des stocks. Essentiellement, la gestion des stocks considère deux questions :

- comment peut-on maintenir le stock à un niveau suffisamment élevé ?
- que signifie exactement "suffisamment" ici ?

Le but de la gestion des stocks est justement de déterminer les moments et les quantités optimales de commande afin de satisfaire la demande des clients en minimisant les coûts. Le critère usuel d'optimisation est celui de l'espérance des coûts (par période, dans le long terme), éventuellement sous contrainte de niveau de service. Les modèles d'optimisation stochastique ainsi obtenus sont souvent très complexes et ne peuvent être résolus que de façon approximative. Enfin, de nombreuses autres caractéristiques peuvent venir enrichir les modèles considérés : délai de livraison connu ou aléatoire, capacité de stockage et de production limitées, ristournes accordées en fonction de la quantité commandée, quantités livrées ou rendements aléatoires, stocks multi-échelons et/ou à localisations multiples, ... [23].

La mise en place d'un système efficace de gestion des stocks commence par la sélection des articles à stocker. En règle générale, les articles stockés ne doivent pas tous être gérés de la même façon. Les principaux critères de différenciation étant la valeur de l'article et sa consommation en valeur. Suivant l'un où l'autre de ces critères, la composition des stocks des entreprises présente une grande similitude en ce sens qu'un faible pourcentage du nombre d'articles stockés représente souvent un pourcentage considérable de la valeur de l'ensemble des stocks.

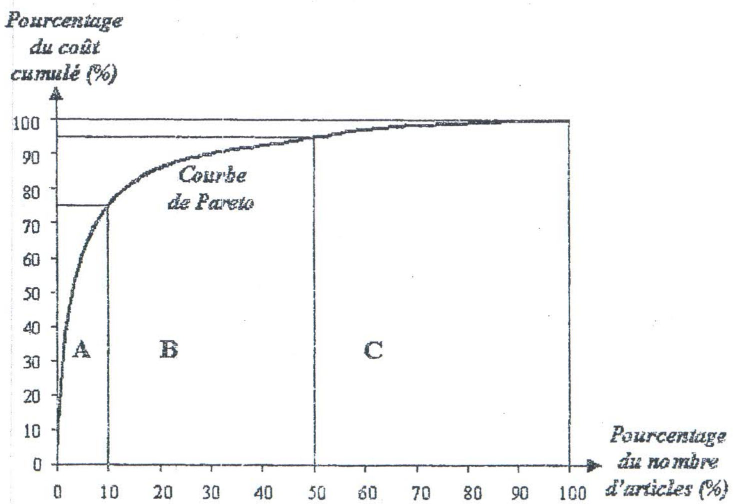


FIG. 1.1 – Analyse ABC (de Pareto).

Plusieurs règles empiriques ont été proposées pour classer les articles selon leur valeur [18]. La méthode ABC (où analyse de Pareto), par exemple, consiste à classifier les articles en trois catégories. La catégorie A contenant une petite proportion (généralement 10 %) du nombre des articles stockés mais représentant près de 75 % de la valeur totale. La catégorie B contenant environ 40 % des articles stockés et représentant près de 20 % de la valeur totale. Enfin, la catégorie C contenant environ 50 % des articles et représentant près de 5 % de la valeur totale. Lorsqu'on utilise cette classification, on applique des méthodes d'analyse et de contrôle rigoureuses aux articles de la catégorie A, des méthodes souples pour les articles de la classe B et des choix raisonnés pour les articles classés en C [18].

1.3 Les éléments de la gestion des stocks

Depuis le modèle de Harris, des milliers d'articles sont apparus dans le domaine des sciences de gestion et de la recherche opérationnelle. On peut se demander pourquoi une telle attention a été donnée aux modèles de gestion des stocks. L'explication est simplement qu'en pratique on rencontre plusieurs situations différentes et chacune nécessite une analyse sur mesure [9]. Par exemple, les modèles peuvent différer par rapport aux aspects suivants : nombre de locations et échelons, nombre de produits, processus de la demande, structure des coûts, exigences et mesures de service, possibles moments de commande, traitement des ruptures, délai de livraison des commandes, ... Examinons les éléments constituant ces modèles :

- **Structure de stockage :** C'est la manière dont les magasins qui stockent le produit sont organisés. Une structure est à un seul niveau (ou échelon) si le même magasin reçoit le produit du fournisseur et le délivre aux utilisateurs. A l'opposé, dans une structure multi-niveaux (multi-échelons), un magasin, souvent appelé magasin central (ou encore dépôt), reçoit le produit du fournisseur et le transfère vers d'autres magasins, qui, eux-mêmes, peuvent servir d'autres magasins et ce, jusqu'aux magasins (appelés souvent détaillants) qui fournissent directement aux utilisateurs (figure 1.2). Dans notre analyse, on ne considère que les modèles de gestion des stocks mono-échelon.
- **Horizon de la planification :** C'est la durée de temps sur laquelle le niveau des stocks est contrôlé. Cet horizon peut être fini ou infini, déterministe ou aléatoire. On s'intéresse par la suite uniquement aux modèles à horizon infini.

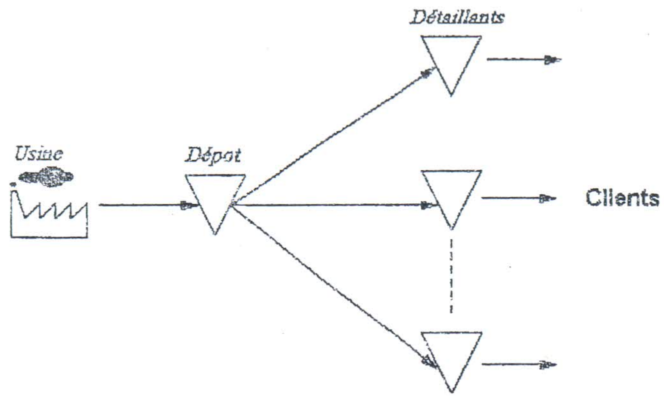


FIG. 1.2 – Système multi-échelons.

- **Produits :** La gestion des stocks peut concerner un ou plusieurs produits. Les produits stockés peuvent différer les uns des autres et il peut y avoir des interactions entre eux. Certains produits doivent être stockés sous des conditions contrôlées (humidité, température, ...), d'autres sont périssables ou sujets à l'obsolescence et il est naturel qu'ils doivent être gérés d'une manière différente.

  La plupart des modèles de gestion des stocks considèrent un seul article et suppose que son stock peut être géré indépendamment des stocks des autres articles. Quoique cette supposition soit souvent valide, il existe évidemment un très grand nombre de problèmes où tous les types de produits doivent être gérés simultanément. En général, cette gestion simultanée est nécessaire car les divers produits doivent partager les ressources disponibles (espace de stockage, budget,...) [48]. Dans les modèles qu'on traitera par la suite, on considère un seul article non périssable qui peut être stocké indéfiniment.
- **La revue :** Pour contrôler le système, le gestionnaire a besoin de connaître l'état des stocks. Cela veut dire qu'il doit inspecter le système à certains moments. On distingue entre deux types de revue :
  - Les systèmes à revue continue : Ce sont des systèmes où toutes les transactions pertinentes (demandes, commandes, réceptions des commandes,...) sont enregistrées aussitôt qu'elles prennent place, de sorte que le gestionnaire connaît l'état du

système à tout moment dans le temps [48].

    Il va de soit que l'implantation d'un système de ce genre est très coûteuse. Toutefois, une fois installés, ces systèmes sont généralement les plus avantageux puisqu'ils permettent un contrôle des opérations à chaque demande [48]. Ce contrôle peut prendre plusieurs formes et il est déterminé par la politique de commande.
  - Les systèmes à revue périodique : Dans ce type de systèmes, l'état du système est examiné seulement à certains points discrets dans le temps. Le gestionnaire peut donc contrôler ces systèmes aux points de revue seulement [48]. Ces systèmes ont l'avantage de pouvoir rassembler les commandes de plusieurs produits en une seule commande, en choisissant la même période pour tous les produits. Mais, il a l'inconvénient de nécessiter un niveau de sécurité plus élevé.
- **Le processus de la demande :** Diverses hypothèses peuvent également être posées concernant les caractéristiques de la demande. La plus simple, est de considérer la demande connue (déterministe) et constante dans le temps. C'est l'hypothèse du modèle classique de la quantité économique de commande (EOQ). Cependant, cette hypothèse est en général peu réaliste. Il convient donc de considérer des demandes déterministes variables, des demandes aléatoires connues en probabilité et des demandes inconnues. La demande peut être également stationnaire ou dynamique, discrète ou continue. Nous nous intéressons au cas stochastique et l'on distingue deux cas :
  - Demande stationnaire : On suppose dans ce cas que le processus stochastique qui représente la demande est stationnaire. Si ξ_i est la variable aléatoire représentant la demande totale durant la période i, les ξ_i, $i = 1, 2, ...$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Dans une période de temps donnée de longueur t, ce processus est composé de deux éléments distincts :
    - Le nombre de clients qui arrivent dans la période.
    - Le nombre d'articles demandés par chaque client.

    Chacun de ces deux éléments peut être aléatoire et on pourra écrire le processus de la demande :

$$\xi_i(t) = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{N(t)}$$

    où $N(t)$ est la variable aléatoire discrète donnant le nombre de clients qui se présentent durant une période de temps de longueur t, et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes qui obéissent à la même loi, et qui donnent le nombre d'articles demandés par le $i^{ième}$ client.

Lorsque les clients arrivent d'une façon aléatoire à un taux moyen constant λ, le nombre de clients $N(t)$ suit une loi de Poisson avec paramètre λt. La distribution obtenue pour le nombre total d'articles demandés $\xi_i(t)$, est appelée *Poisson composée*. Elle possède les propriétés suivantes :

$$\mathbb{E}(\xi_i(t)) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1)$$

$$\mathbb{V}(\xi_i(t)) = \lambda t \mathbb{V}(Y_1^2)$$

- Demande non stationnaire : Dans ce cas, les variables aléatoires ξ_i^l ne sont pas identiquement distribuées. Dans la période i, ξ_i^l a pour distribution de probabilité :

$$\phi_i(x) = P(\xi_i^l < x)$$

On distingue, le cas d'une *demande modulée Markov* ou simplement *demande markovienne*, i.e, une demande dont la distribution dans la période i ne dépend que de la chaîne markovienne associée au système dans la même période [15, 13, 20, 55]. Soit I_k l'état du système en période k. La distribution de la variable aléatoire ξ_k^l représentant la demande dans la période k, est donnée conditionnellement à I_k :

$$\phi_k(x) = P(\xi_k^l < x | I_k = i_k)$$

- **Délai de livraison :** Il dénote le temps entre le moment du lancement d'une commande et le moment de sa réception. La manière de prendre en compte ce délai de livraison a une grande influence sur la complexité du modèle. Le plus simple, est de le considérer nul ; l'approvisionnement sera dit instantané. Il est également courant de le considérer comme fixe. Cependant, des modèles plus élaborés considèrent le délai de livraison comme aléatoire (voir par exemple [68]). Dans ce cas, l'analyse devient extrêmement compliquée et pour la simplifier, on suppose généralement que les commandes ne peuvent pas se croiser dans le temps, i.e, elles arrivent dans l'ordre de leurs lancements. Des modèles avec un mécanisme de commande plus général peuvent être trouvés dans la littérature (voir par exemple [32]).
- **Ruptures :** Lorsque une demande arrive alors que le niveau des stocks est nul, on a une rupture de stock. La manière dont le système réagit à cette situation est importante pour la structure du modèle. Généralement, on considère deux possibilités suivant lesquelles les problèmes de gestion des stocks se divisent en deux catégories :

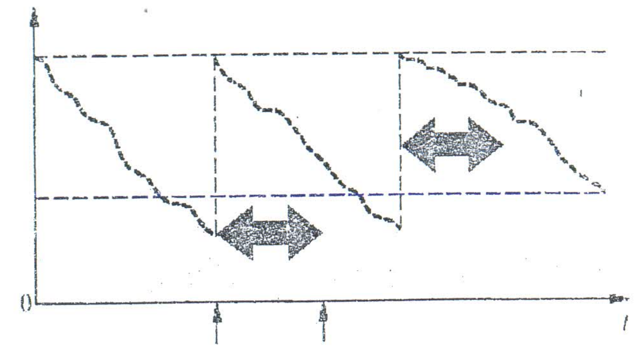


FIG. 1.3 – Les délais de livraisons (en flèches plaines).

- Modèles avec arriérés de commandes : Les demandes en excès sont satisfaites à la prochaine période dès la réception d'une commande.
- Modèles avec ventes perdues : Les demandes en excès sont tout simplement ignorées.

Il est également possible de développer des modèles avec une mixtures de ces deux hypothèses.

Historiquement, les études sur la gestion des stocks ont commencé par des problèmes de gestion de l'inventaire des pièces de rechange pour des applications militaires. Dans ce cadre, il est naturel de supposer que la demande en excès ne sera pas ignorée, mais reportée à la prochaine période. Ainsi, les modèles de gestion des stocks avec arriérés de commandes furent les plus étudiés.

- **Capacité :** Une autre propriété qui peut compliquer considérablement l'analyse des modèles de gestion des stocks, est de supposer que la quantité que peut acquérir le gestionnaire suite à une commande est limitée ou même aléatoire. Cette limitation peut être liée à la capacité de stockage ou de la chaîne de production, mais aussi à d'autres considérations (capacité du fournisseur, par exemple).
- **Coûts :** L'objectif de la gestion des stocks est d'assurer la disponibilité des articles considérés sur un horizon donné tout en minimisant les coûts encourus. Trois types de coûts sont généralement pris (plus ou moins) explicitement en compte pour évaluer la qualité d'une politique de gestion des stocks : coûts de commande, coûts de posses-

sion et coûts de rupture de stock. Dans la plupart des modèles classiques, ces coûts sont considérés comme des paramètres fixes. Par contre, des approches plus récentes envisagent les coûts de stockage comme des variables dont la valeur peut (doit) être influencée par des investissements appropriés.

- Coûts de commande : Ce sont des coûts encourus à chaque lancement de commande et qui incluent les coûts administratifs, coûts d'inspection du stock, tests, ... Ces coûts peuvent être divisés en deux parties : ceux qui ne dépendent pas de la quantité commandée et ceux qui en dépendent. Les premiers sont regroupés en un coût fixe appelé *coût de lancement* (ou coût fixe de commande). C'est un coût fixe entraîné par le lancement d'une commande. Les autres sont fonction de la quantité commandée et l'hypothèse la plus courante est qu'il sont proportionnels à la quantité commandée, i.e, la fonction des coûts de commande est linéaire. Cependant, en cas d'escompte sur quantité ou réduction de prix, cette fonction peut être convexe, concave ou encore générale. Il est à noter que l'inclusion de coût de lancement dans un modèle augmente considérablement sa complexité.
- Coûts de possession : Ce sont des coûts entraînés directement par le système et ils sont le résultat direct du maintien d'une quantité donnée d'articles en stock et incluent : taxes, assurance, coûts d'immobilisation du capital, coûts d'obsolescence, coûts de fonctionnement (éclairage, chauffage, ...), ... Il est en général très difficile de recenser tous ces coûts avec précision et par suite des simplifications sont nécessaires. Le plus courant est de supposer que ces coûts sont proportionnels au niveau du stock et qu'ils varient directement avec la durée de stockage, i.e, les coûts de possession sont linéaires. Plus précisément, dans un système à revue continue, ces coûts sont évalués continûment alors que dans le cas de revue périodique, ils peuvent être calculés à la fin de chaque période.
- Coûts de rupture (pénuries) : Ce sont des coûts liés à l'absence de produits en cas de demande. Ils sont les plus délicats à définir et ils sont généralement très difficiles à estimer. En cas de ventes perdues, le coût de pénurie peut être assimilé au manque à gagner correspondant à une commande. Il correspond souvent à une dépense supplémentaire pour approvisionner exceptionnellement l'article manquant. Parfois, le coût de pénurie est parfaitement connu ; il figure dans certains contrats sous forme d'astreintes. Selon le cas, il peut être une somme forfaitaire, intervenant dans le calcul au moment où se produit la pénurie et indépendante du temps. Dans le cas contraire, il peut être proportionnel au nombre d'articles manquants et au nombre de périodes pendant lesquelles se poursuit la pénurie.

- **Mesures de service :** Certains auteurs (et de nombreux gestionnaires) observent que les coûts énumérés peuvent être difficilement mesurables. Ceci est vrai, en particulier, pour les coûts de rupture de stock (ou pénuries). Pour cette raison, le risque de rupture est fréquemment modélisé à travers une contrainte de maintien d'un niveau de service prédéterminé [23]. Les trois mesures de service suivantes sont les plus utilisées :
  - P_1–mesure ou mesure de non-rupture : la proportion de cycles dans lesquels aucune rupture n'est enregistrée. Un cycle est l'intervalle de temps entre la réception de deux commandes consécutives.
  - P_2–mesure ou mesure de taux de remplissage : la proportion de demandes satisfaites directement du stock en main.
  - P_3–mesure ou mesure de taux de disponibilité : la proportion de temps où le niveau du stock est positif.

Dans le cas où les coûts de pénuries peuvent être déterminés, on peut utiliser l'approche coût. Dans cette approche, on essaye de trouver la règle de contrôle optimale par minimisation de la moyenne du coût total (somme des coûts). Si par contre, les coûts de pénuries ne peuvent pas être déterminés, ce qui est souvent le cas, on essaye de trouver la règle de contrôle optimale en minimisant les coûts de commande et de possession sous contrainte de niveau de service. C'est ce qu'on appelle l'approche niveau de service.

Finalement, on observe que d'autres situations peuvent surgir (exemple : le prix comme variable de décision, escomptes sur quantité, concurrence entre entreprises, incertitude sur la reception des commandes, plusieurs fournisseurs, fluctuations aléatoires de l'environnement [26], fournisseurs non fiables [51], ...). On se rend compte que pour décrire toutes les possibilités qui peuvent surgir, il faut développer des milliers de modèles. Les systèmes réels sont en général très complexes et ne peuvent pas être représentés avec une fidélité complète.

1.4 Règles de contrôle

Pour contrôler le système, le gestionnaire peut choisir entre plusieurs règles de contrôle. Pour les systèmes à revue continue, on cite les politiques de commande les plus connues :

- Politique (s, S) : Cette politique est caractérisée par les paramètres de contrôle s et S. Quand le niveau du stock est inférieur ou égal à s, une commande est immédiatement placée. La quantité commandée est telle que le niveau du stock devient S.
- Politique (S, S) : C'est un cas particulier de la politique (s, S) $(s = S)$. Suivant cette politique, chaque demande d'articles par les clients entraîne le lancement d'une commande. elle est utilisée essentiellement dans les systèmes de gestion des stocks d'éléments réparables (éléments chers à faible demande).
- Politique (s, nQ) : Suivant cette politique, lorsque le niveau des stocks x chute au dessous du niveau s (point de commande), une commande de nQ articles est lancée où, Q est la quantité de commande de base et n est le plus petit entier vérifiant $x + nQ > s$.

Pour les systèmes à revue périodique, des politiques équivalentes sont utilisées pour le contrôle du système :

- Politique (R, s, S) : Cette politique est équivalente à la politique (s, S) pour les systèmes à revue continue. Le système est examiné chaque R unités de temps, et si la quantité en stock est inférieure ou égale à s, on commande suffisamment d'articles pour atteindre le niveau S.
- Politique (R, S) : Suivant cette politique, le système est examiné chaque R unités de temps et une commande est lancée pour atteindre le niveau S. Notons qu'il s'agit d'un cas particulier de la politique (R, s, S), avec $s = S$.
- Politique (R, s, nQ) : C'est l'équivalent de la politique (s, nQ) pour les systèmes à revue continue. Le système est examiné chaque R unités de temps et les commandes sont lancées aux moments de la revue si la quantité en stock est inférieure ou égale à s.

Il existe plusieurs variantes de ces politiques de commande, toutefois, elles sont rarement utilisées en pratique.

Le premier modèle de gestion des stocks est celui de la quantité économique de commande (EOQ) présenté par Ford Harris en 1913 [33]. Dans ce modèle, on considère un seul produit non périssable. Le temps est continu et l'horizon est infini. Le niveau initial des stocks est nul, la demande est déterministe et stationnaire à taux constant. Harris à introduit le concept d'optimisation d'une fonction de coût en gestion des stocks. Ce type de modèles[1] a été popularisé par Wilson [65] dans les années 30. Ce n'est qu'après la deuxième

[1] EOQ : Appelés en France "Modèles Wilsoniens".

guerre mondiale que les recherches sur les modèles stochastiques de la gestion des stocks ont commencé. Dans ces modèles, la demande est un processus stochastique. L'article de Arrow et al. (1951) [6] est l'un des premiers dans ce cadre.

Pour l'optimisation des problèmes de gestion des stocks, les spécialistes s'intéressent à deux questions essentielles : déterminer la règle de contrôle optimale puis calculer ses paramètres optimaux.

L'un des grands progrès dans l'étude mathématique de la gestion des stocks était la preuve de l'optimalité de la politique (s, S) pour certains problèmes. Les premiers travaux dans ce cadre pour les modèles dynamiques de gestion des stocks avec demandes aléatoires et coût de lancement fixe sont ceux de Arrow et al. (1951) [6], Dvoretzky et al. (1953) [25], Karlin (1958) [38], Scarf (1960) [54], Iglehart (1963) [35] et Veinott (1966) [62]. Scarf a développé le concept de $K-$convexité et l'a utilisé pour montrer l'optimalité des politiques (s, S) pour les problèmes de gestion des stocks à horizon fini avec coût fixe de commande. L'optimalité d'une politique (s, S) stationnaire pour le problème à horizon infini a été prouvée par Iglehart (1963) [35]. Ce dernier a obtenu la distribution stationnaire du niveau net des stocks avec une politique (s, S) en utilisant des arguments de la théorie de renouvellement (voir aussi [38, 39]). Il a également développé une expression explicite du coût moyen stationnaire $\mathcal{L}(s, S)$, $s < S$ associé à la politique (s, S). Veinott et Wagner (1965) [63] ont aussi prouvé l'optimalité de la politique (s, S) en considérant une demande discrète et en établissant une version discrète des résultats de Iglehart. Notons ici, que les preuves dans [35] et [63] sont basées sur un certain nombre d'hypothèses implicites. Récemment, les deux articles ont été révisés par Beyer et Sethi (1999) dans [14]. On peut aussi trouver dans la littérature des articles établissant l'optimalité de certaines politiques sous différentes conditions. Pour des récents travaux, voir par exemple [66, 55].

Alors qu'il existe plusieurs publications sur les modèles avec arriérés de commandes, peu d'auteurs ont traité le cas de pertes de ventes (Veinott (1966) [62], Shreve (1976) [56], et Bensoussan et al. (1983) [12]). Ceci est peut-être car les preuves en cas de pertes de ventes sont souvent plus compliquées. Shreve et Bensoussan et al. ont établi l'optimalité de la politique de type (s, S) en utilisant le concept de $K-$convexité. Veinott a donné une preuve différente pour l'optimalité des politiques de type (s, S) dans le cas de pertes de ventes. Plus récemment, Cheng et Sethi (1999) [20] ont montré que sous certaines conditions sur les coûts, une variante de la politique (s, S) est optimale pour ce type de problèmes de gestion des stocks avec demande markovienne. On note que tous ces résultats ont été obtenus sous la condition de délai de livraison nul.

Plusieurs articles ont été consacrés au calcul des paramètres optimaux par le biais de construction d'algorithmes. Pour les systèmes de type (s, S), il s'agit de déterminer le couple (s^*, S^*) qui minimise le coût total. On cite par exemple, Stidham (1977) [57], Federguen et Zipkin (1984) [27], Zheng et Federguen (1991) [67], Hu et al. (1993) [34], Fu (1994) [31], ... et plus récemment, Feng et Xiao (2000) [28].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les éléments de base de la théorie de la gestion des stocks. Les problèmes concrets de gestion des stocks sont généralement très compliqués et ne peuvent être résolus qu'approximativement. De plus, pour décrire fidèlement les systèmes réels, on doit intégrer des hypothèses qui peuvent compliquer considérablement l'analyse.

Les élément de la gestion des stocks énumérés dans ce chapitre ne sont pas une liste exhaustive. Pour adapter un modèle mathématique aux spécificités de chaque entreprise, on peut intégrer d'autres éléments et on peut poser d'autres hypothèses.

Chapitre 2

Modèles stochastiques de gestion des stocks

Les modèles stochastiques de gestion des stocks constituent une part importante des recherches dans le domaine de la recherche opérationnelle. Diverses méthodes sont utilisées pour l'optimisation des problèmes de gestion des stocks (processus markoviens de décision, chaînes de Markov, programmation mathématique, simulation, théorie des jeux,...). Dans ce chapitre, les modèles de base de gestion des stocks sont présentés par une approche par processus régénératifs (cf. [53, 29, 9, 30]). Cette approche nous permet de déduire les différentes expressions de coûts et de mesures de service.

2.1 Notations

On commence par donner la définition d'un processus cadlag. Tous les processus qui vont être définis ici, et qui sont utilisés pour décrire le comportement du système sont cadlag.

Définition 2.1. Un processus X, défini sur l'espace fondamental $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui admet T comme ensemble associé au temps et E comme espace d'états (on suppose que E est muni d'une topologie. S'il est fini, on le muni de la topologie discrète), est dit *cadlag* si, pour tout élément ω de Ω, l'application (la trajectoire) $t \to X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point t de T. Si E est fini, cela signifie que chaque trajectoire de X est continue à droite et "fixe par morceaux".

Pour décrire le comportement du système de gestion des stocks, on considère un processus stochastique de demande $D = \{D(t), t \in T\}$ où l'espace d'états peut être $[0, \infty)$

ou $\mathbb{N}$. La variable aléatoire $D(t)$ représente la demande totale jusqu'au moment t. Par définition, le processus D de la demande est croissant et pour $T = [0, \infty)$, il est supposé que ce processus est cadlag.

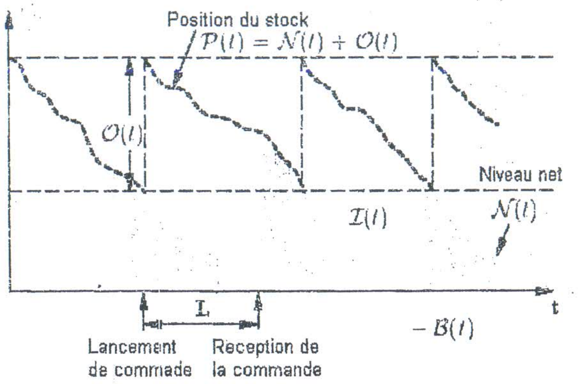


FIG. 2.1 – Les différents processus du stock.

Dans le cas où l'espace d'états est $[0, \infty)$, l'élément est dit indivisible (exemple : Gaz) et dans le cas où l'espace d'états est N, l'élément est dit divisible. On suppose que les clients arrivent suivant un certain processus de renouvellement $N = \{N(t), t \geq 0\}$ avec des temps d'inter-arrivées T_i, $i \in \mathbb{N}^*$, indépendants et identiquement distribués. La quantité demandée par le $n^{ème}$ client est une variable aléatoire Y_i. On suppose que les variables aléatoires Y_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition commune F_Y satisfaisant $F_Y(0) = 0$ et $F_Y(\infty) = 1$. On dira alors que la demande est un *processus de renouvellement composé*. Dans le cas particulier où les clients arrivent suivant un processus poissonnien, la demande sera un *processus de Poisson composé*. Il est également supposé que les demandes individuelles Y_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes du processus N d'arrivées des clients. De plus, pour définir les coûts associés à un modèle de gestion des stocks avec une certaine règle de contrôle, on a besoin d'introduire les différents processus suivants définis sur le même espace d'états que le processus de demande. On considère d'abord le processus $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(t), t \in T\}$ avec

$$\mathcal{I}(t) = \{\text{Nombre d'articles en stock à l'instant } t\}$$

qui est le processus du stock physique ou du stock en main. On l'appelle également niveau du stock. Comme le processus de la demande est cadlag, ce processus est aussi cadlag.

Il peut arriver que la quantité demandée par un client ne soit pas disponible en stock. Comme on l'a déjà vu, deux possibilités sont considérées. Dans notre analyse on suppose que

Hypothèse 2.1. *Les demandes arrivant lorsque le niveau de stock est nul peuvent être satisfaites plus tard, au moment où une commande est reçue.*

Cela veut dire que les demandes en excès ne seront jamais ignorées et qu'aucune vente n'est perdue. Les modèles avec cette hypothèse sont dits "modèles avec arriérés de commandes".
On définit maintenant le processus $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(t), t \in T\}$, donné par

$$\mathcal{B}(t) = \{\text{Nombre d'articles en attente à l'instant } t\}$$

En utilisant les deux processus stochastiques, on obtient la définition du processus du niveau net du stock $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(t), t \in T\}$, donnée par

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{I}(t) - \mathcal{B}(t)$$

pour tout $t \in T$. Ce processus peut décrire complètement le système. Toutes les expressions des coûts et des mesures de service peuvent être écrites en fonction de $\mathcal{N}$ uniquement. Pour simplifier l'analyse, on a besoin d'introduire un autre processus stochastique. Avant cela, on suppose que

Hypothèse 2.2. *Une commande lancée à un moment t donné arrive après un temps L, où L est une constante connue.*

Cela veut dire que dans notre analyse, on ne considère que les modèles à délai de livraison déterministe. On suppose également que

Hypothèse 2.3. *Au lancement de chaque commande, un coût fixe K est encouru. Ce coût est indépendant de la taille de la commande et on l'appelle "coût fixe de commande".*

Considérons maintenant le processus $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(t), t \geq 0\}$, donné par

$$\mathcal{O}(t) = \{\text{Nombre d'articles commandés et non encore reçus à l'instant } t\}$$

Il est maintenant possible de définir le processus de la position du stock $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(t), t \geq 0\}$ en écrivant,

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{N}(t) + \mathcal{O}(t)$$

L'analyse du système peut être réduite à l'analyse du processus de la position du stock. En effet, Sahin (cf. [53]) a montré la relation suivante entre le processus $\mathcal{N}$ du niveau net du stock et le processus $\mathcal{P}$ de la position du stock.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2 et si le processus D de la demande est cadlag alors*

$$\mathcal{N}(t+L) = \mathcal{P}(t) - (D(t+L) - D(t)), \text{ P-presque sûrement.} \tag{2.1}$$

pour tout $t \geq 0$.

Dans la suite, toutes les politiques de commande seront données en fonction du processus de la position du stock.

2.2 Les processus régénératifs

La théorie des processus régénératifs joue un rôle important dans l'analyse des modèles de gestion des stocks mono-article [9]. Pour notre cas, il est suffisant de considérer seulement les processus régénératifs purs (non retardés).

On introduit d'abord la définition d'une version simplifiée des processus régénératifs purs qu'on appellera *processus régénératifs purs simplifiés* [29]. Soit T l'axe du temps dénotant soit $[0, \infty)$ (cas continu) ou $\mathbb{N}$ (cas discret).

Définition 2.2. Un processus stochastique $X = \{X(t), t \in T\}$ dans un espace métrique $\mathcal{E}$ est dit processus régénératif pur simplifié s'il existe une certaine constante positive finie $\sigma \in T$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution du processus stochastique décalé $X_{n\sigma} = \{X(t + n\sigma), t \in T\}$ est indépendante de n.

Notons que les points $n\sigma$, $n \in N^*$, sont appelés *points de régénération* du processus régénératif pur simplifié X.

Définition 2.3. Un processus stochastique $X = \{X(t), t \in T\}$ dans un espace métrique $\mathcal{E}$ est dit processus régénératif pur s'il existe dans T une séquence croissante $\{\sigma_n, n \in \mathbb{N}\}$, avec $\sigma_0 = 0$, de points aléatoires satisfaisant

- Les variables aléatoires $\sigma_{n+1} - \sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition commune F_σ, continue à droite et vérifiant $F_\sigma(0) = 0$ et $F_\sigma(\infty) = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le processus stochastique $X_{\sigma_n} = \{X(t + \sigma_n), t \in T\}$ est indépendant des variables aléatoires σ_n, $n \in \mathbb{N}$.
- La distribution du processus X_{σ_n} est indépendante de n.

Dans le cas où les différences $\sigma_{n+1} - \sigma_n$ sont données par $\sigma = \sigma_{n+1} - \sigma_n$ avec probabilité 1, on retrouve la définition 2.2. Une conséquence importante de la définition d'un processus régénératif pur est donnée par le résultat suivant

Théorème 2.2. *(cf. [9]) Si le processus stochastique $X = \{x(t), t \in T\}$ est un processus régénératif pur dans un espace métrique $\mathcal{E}$ et avec une séquence croissante de points de régénération $\{\sigma_n, n \in N\}$ et si la fonction $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction Borélienne mesurable, alors le processus stochastique $\Phi o X = \{\Phi(X(t)), t \in T\}$ est un processus régénératif pur, avec la même séquence de points de régénération. De plus, si $T = [0, \infty)$ et la fonction Φ est continue, alors le processus stochastique $\Phi o X$ est cadlag si X est cadlag.*

Pour introduire une structure de coûts sur un processus régénératif, on considère une fonction Borélienne mesurable non-négative $f : E \to \mathbb{R}$, appelée fonction de coût. En utilisant cette fonction et en dénotant par $C = \{C(t) : t \in T\}$ avec $T = [0, \infty)$, le processus stochastique de coût donné par

$$C(t) = \int_0^t f(X(s))ds$$

Lorsque $T = \mathbb{N}$, il est donné par

$$C(t) = \sum_{n=0}^{t} f(X(n))$$

On suppose que ce processus C est bien défini et que $\mathbb{E}(C(t)) < \infty$ pour tout $t \in T$.

Théorème 2.3. *Si le processus $X = \{X(t),\ 0 \leq t < \infty\}$ est un processus régénératif pur avec comme points de régénération la séquence croissante σ_n, $n \in \mathbb{N}$ de points aléatoires satisfaisant $\mathbb{E}\sigma_1 < \infty$ et si f est la fonction Borèlienne mesurable vérifiant*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{\sigma_1} f(X(s))ds\right) < \infty$$

alors

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbb{E}(C(t))=\frac{1}{\mathbb{E}\sigma_1}\mathbb{E}\left(\int_0^{\sigma_1} f(X(s))ds\right)$$

Cette dernière limite est appelée *coût moyen* par rapport à la fonction de coût f.

2.3 Systèmes à revue continue

On suppose que le processus D de la demande est un processus de de renouvellement composé à taux d'arrivée $\lambda > 0$ et que les variables aléatoires Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, représentant les demandes individuelles des clients sont indépendantes et identiquement distribuées, avec une fonction de répartition commune F_Y, satisfaisant $F_Y(0) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$. Le processus D de la demande est alors donné par,

$$D(t)=\sum_{n=0}^{N(t)} Y_n,\quad Y_0=0$$

où $N = \{N(t), t \geq 0\}$ est le processus d'arrivée des clients. Les inter-arrivées des clients sont décrits par le processus T_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que les moments d'arrivées des clients sont donnés par $\sigma_n = T_1 + ... + T_n$, $n \in \mathbb{N}$, ($\sigma_0 = 0$) et le processus stochastique de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est donné par

$$N(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{I}_{\{\sigma_n\leq t\}}$$

Notons que les inter-arrivées T_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et que leur fonction de répartition commune F_T satisfait $F_T(0) = 0$ et $\mathbb{E}(T_1) = \lambda^{-1} < \infty$. On suppose également, que les demandes individuelles des clients Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes du processus N d'arrivée et que la fonction de coûts f utilisée vérifie

$$\mathbb{E}(\int_0^T f(N(s))ds) < \infty$$

pour tout $T \geq 0$.

2.3.1 Modèle (s, S)

Suivant cette politique, la position du stock est inspectée continûment dans le temps. Une commande est lancée si la position du stock au moment d'arrivée d'un client est inférieure ou égale au point de commande $s \leq S$. La taille de la commande est telle que

la position du stock sera remise au niveau S (figure 2.2). Les variables s et S sont des variables de décision qui doivent être choisies d'une manière optimale suivant la structure de la fonction de coûts considérée.

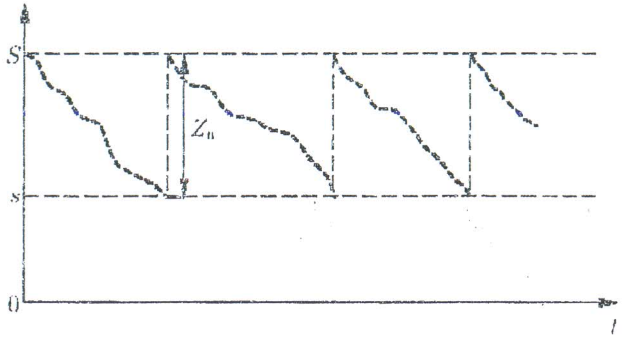


FIG. 2.2 – Le modèle (s, S).

On veut montrer que le processus stochastique

$$X=\{(\mathcal{P}(t), D(t+L)-D(t)), t\geq 0\}$$

est un processus régénératif pur, avec comme points de régénération la séquence σ_n, $n \in \mathbb{N}$, donnée par

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} T_k,\ \sigma_0=0$$

et on doit donc déterminer une distribution initiale

$$F(x,y)=P\left(\mathcal{P}(0)<x, D(L)<y\right) \tag{2.2}$$

pour laquelle la relation

$$F(x,y)=P\left(\mathcal{P}(\sigma_n)<x, D(\sigma_n+L)-D(\sigma_n)<y\right) \tag{2.3}$$

soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le moment aléatoire σ_n dénote le moment d'arrivée du $n^{ième}$ client et $D(\sigma_n+L)-D(\sigma_n)$ représente la demande totale durant l'intervalle $(\sigma_n, \sigma_n+L]$. On obtient en vertu des hypothèses que la variable aléatoire $D(\sigma_n+L)-D(\sigma_n)$ est indépendante de $\{D(t), t \leq \sigma_n\}$ et de même distribution que $D(L)$. De plus, la variable aléatoire $\mathcal{P}(\sigma_n)$ est complètement déterminée par sa valeur initiale à $t=0$ et par la réalisation du processus de la demande $\{D(t), t \leq \sigma_n\}$ et cela veut dire que $D(\sigma_n + L) - D(\sigma_n)$ est indépendante de $\mathcal{P}(\sigma_n)$. On peut donc écrire,

$$P\left(\mathcal{P}(\sigma_n) < x, D(\sigma_n + L) - D(\sigma_n) < y\right) = P\left(\mathcal{P}(\sigma_n) < x\right) P\left(D(L) < y\right) \tag{2.4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et par suite, on cherche une distribution invariante du processus stochastique $\{\mathcal{P}(\sigma_n), n \in \mathbb{N}\}$. Pour ce faire, considérons le processus stochastique $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$, donné par

$$V_n = S - \mathcal{P}(\sigma_n)$$

Par définition de la règle de contrôle, on a

$$V_{n+1} = (V_n + Y_{n+1})\mathbb{I}_{\{V_n+Y_{n+1}<S-s\}} \tag{2.5}$$

où Y_{n+1} dénote la demande du $(n+1)^{ème}$ client. Par hypothèse, la variable aléatoire Y_{n+1} est indépendante de V_n et comme les variables aléatoires Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes et identiquement distribuées, il s'en suit que V est une chaîne de Markov. Le théorème suivant donne la distribution invariante de la chaîne de Markov V.

Théorème 2.4. *La distribution invariante de la chaîne de Markov $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$, donné par la relation (2.5) est de la forme*

$$F_{inv}(v) = \frac{1+H(v)}{1+H(S-s)}, \quad 0 \leq v \leq S-s$$

où $H = \sum_{n=1}^{\infty} F_Y^{n*}$ est la fonction de renouvellement associée à la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y_1.

On a ensuite le résultat suivant :

Théorème 2.5. *Pour tout modèle (s, S), avec comme processus de demande un processus de renouvellement composé, et si les hypothèses (2.1) et (2.2) sont vérifiées, alors le processus stochastique*

$$X = \{(\mathcal{P}(t), D(t+L) - D(t)), t \geq 0\}$$

ayant la distribution initiale

$$P\left(\mathcal{P}(0) < x, D(L) < y\right) = P(S - V_{eq} < x)P(D(L) < y)$$

avec V_{eq} la variable aléatoire distribuée suivant la distribution

$$P(V_{eq} < v) = \frac{1+H(v)}{1+H(S-s)}, \quad 0 \leq v \leq S-s$$

et V_{eq} indépendante du processus D de la demande, est un processus régénératif par avec comme points de régénération la séquence $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_0 = 0$, contenant le sous ensemble de points de lancement des commandes.

En utilisant la relation (2.1), on peut écrire

$$\mathcal{N}(t+L) = \mathcal{P}(t) - (D(t+L) - D(t)) \stackrel{d}{=} S - V_{eq} - D(t+L), \quad P-\text{p.s.} \tag{2.6}$$

pour tout $0 \leq t < \sigma_1 = T_1$, où le symbole $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité en distribution.

Il est maintenant possible de déterminer le coût moyen associé à la politique (s, S). Posons

$$D_1(t) = D(t) + V_{eq}$$

Théorème 2.6. *Si le processus de demande est un processus de renouvellement composé, sous les conditions du théorème (2.5), le coût moyen $\Phi(s, S)$ est donné par*

$$\lambda K P\left(Y_1 + D_1(0) \geq S - s\right) + \lambda \mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} f(S - D_1(t+L))dt\right)$$

Cette expression peut être simplifiée pour un processus de demande Poisson composé.

Théorème 2.7. *Si le processus de demande est un processus de Poisson composé, sous les conditions du théorème (2.5), le coût moyen $\Phi(s, S)$ de la politique (s, S) pour une fonction de coûts f non négative et coût de commande $K > 0$, est donné par*

$$\lambda K P\left(Y_1 + D_1(0) \geq S - s\right) + \mathbb{E}\left(f(S - D_1(L)\right)$$

Le nombre moyen de demandes mises en attente par unité de temps, le niveau moyen du stock physique par unité de temps et la P_3−mesure de service pour le modèle (s, S) sont donnés par

Théorème 2.8. *Si le processus de demande est un processus de renouvellement composé, sous les conditions du théorème (2.5), le nombre moyen $B_1(s,S)$ de demandes mises en attente par unité de temps est donné par*

$$B_1(s,S) = \lambda\mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} \max\{D_1(t+L) - S, 0\}\, dt\right)$$

le niveau moyen $B_2(s,S)$ du stock physique est donné par

$$B_2(s,S) = \lambda\mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} \max\{S - D_1(t+L), 0\}\, dt\right)$$

La proportion de temps $P_3(s,S)$ où le niveau du stock est positif est égale

$$P_3(s,S) = \lambda\mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} \mathbb{1}_{\{S-D_1(t+L)>0\}} dt\right)$$

D'autres expressions de coûts et de mesures de service peuvent être obtenues.

Théorème 2.9. *Si le processus de demande est un processus de renouvellement composé, sous les conditions du théorème (2.5), le nombre moyen $B_3(s,S)$ de rupture est donné par*

$$B_3(s,S) = \lambda\left(P\left(D_1(L) \le S\right) - P\left(D_1(L) + Y_1 \le S\right)\right)$$

la mesure de non rupture $P_1(s,S)$ est donnée par

$$P_1(s,S) = 1 - P\left(D(L) + V_{eq} \le S\right) + P\left(D(L) + Y_1 + V_{eq} \le S\right)$$

Le nombre moyen $B_4(s,S)$ d'unités en rupture est donné par

$$B_4(s,S) = \lambda\left(\mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}\left(\max\left(S - D_1(L) - Y_1, 0\right)\right) - \mathbb{E}\left(\max S - D_1(L), 0\right)\right)$$

le taux de remplissage du stock $P_2(s,S)$ (P_2-mesure de service) est donné par

$$P_2(s,S) = \frac{\mathbb{E}\left(\max\left(S - D_1(L), 0\right)\right) - \mathbb{E}\left(\max S - D_1(L) - Y_1, 0\right)}{\mathbb{E}(Y_1)}$$

2.3.2 Modèle (s, nQ)

Suivant cette politique, une commande est lancée au moment où la position du stock devient inférieure ou égale au niveau s. La taille de la commande est un multiple de Q et est telle que la position du stock devient entre s et $s+Q$ (figure 2.3). Ici, s et parfois Q sont des variables de décision.

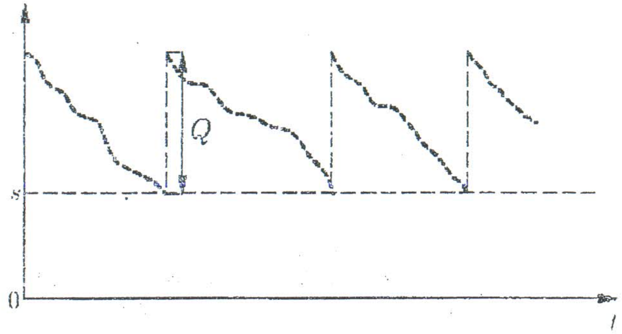


FIG. 2.3 – Le modèle (s, nQ).

Il s'en suit de la définition de la politique (s, nQ) qu'une commande n'est lancée que si

$$\mathcal{P}(\sigma_n^-) - Y_n \le s$$

et que

$$s < \mathcal{P}(\sigma_n) \le s + Q$$

Cela veut dire que pour éléments divisibles (resp. éléments indivisibles), $\mathcal{P}(\sigma_n)$ est à espace d'états $\{s+1, ..., s+Q\}$ (resp. $(s, Q]$). Si l'on veut montrer que le processus

$$X = \{\{\mathcal{P}(t), D(t+L) - D(t)\}, t \ge 0\}$$

est un processus régénératif pur, avec comme points de régénération les points σ_n, on doit trouver une distribution initiale

$$F(x,y) = P\left(\mathcal{P}(0) < x, D(L) < y\right)$$

telle que

$$F(x,y) = P\left(\mathcal{P}(\sigma_n) < x, D_{\sigma_n}(L) < y\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $D_{\sigma_n}(L) = D(\sigma_n + L) - D(\sigma_n)$. Comme σ_n est le moment d'arrivée du $n^{ème}$ client et $D_{\sigma_n}(L) = D(\sigma_n + L) - D(\sigma_n)$ est la demande totale durant l'intervalle

$(\sigma_n, \sigma_n + L]$, on obtient en vertu des hypothèses que $D_{\sigma_n}(L) = D(\sigma_n + L) - D(\sigma_n)$ est indépendante de $\{D(t), t \leq \sigma_n\}$. De plus, il s'en suit que la variable aléatoire $\mathcal{P}(\sigma_n)$ est complètement déterminée par sa valeur initiale à $t = 0$ et par la réalisation du processus de la demande $\{D(t), t \leq \sigma_n\}$, et cela veut dire que $D(\sigma_n + L) - D(\sigma_n)$ est indépendante de $\mathcal{P}(\sigma_n)$ et qu'elle est distribuée comme $D(L)$. On peut donc écrire,

$$P(\mathcal{P}(\sigma_n) < x, D(\sigma_n + L) - D(\sigma_n) < y) = P(\mathcal{P}(\sigma_n) < x)\, P(D(L) < y) \quad (2.7)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et par suite, on cherche une distribution invariante du processus stochastique $\{\mathcal{P}(\sigma_n), n \in \mathbb{N}\}$. Par définition de la règle du contrôle, on a

$$\mathcal{P}(\sigma_{n+1}) = \mathcal{P}(\sigma_n) - Y_{n+1} + \tau_n Q$$

avec Y_{n+1} est la demande du $(n+1)^{ème}$ client et

$$\tau_n = \min\{k \in \mathbb{N}/s - (\mathcal{P}(\sigma_n) - Y_{n+1}) \geq (k-1)Q\}$$

Considérons le processus stochastique $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$, donné par

$$V_n = s + Q - \mathcal{P}(\sigma_n)$$

Il s'en suit que $0 \leq V_n < Q$. En substituant la définition de V_n dans celle de τ_n on obtient

$$\tau_n = \min\{k \in \mathbb{N}/V_n + Y_{n+1} \geq kQ\}$$

et aussi

$$V_{n+1} = V_n + Y_{n+1} - \tau_n Q = (V_n + Y_{n+1}) \mod Q$$

De l'indépendance des variables aléatoires Y_n et de la variable aléatoire Y_{n+1} de V_n, on déduit que V est une chaîne de Markov dont la distribution invariante est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2.10. *La distribution invariante de la chaîne de Markov $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ à espace d'états $[0, Q)$ est donnée par*

$$F_{inv}(x) = \frac{x}{Q}, \quad 0 \leq x < Q$$

et quand l'espace d'états est $\{0, 1, ..., Q-1\}$

$$F_{inv}(x) = \frac{x}{Q}, \quad x \in \{0, 1, ..., Q-1\}$$

Donc, si U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1)$

$$V_0 \stackrel{d}{=} QU \Rightarrow V_n \stackrel{d}{=} QU$$

On obtient le même résultat pour le cas d'éléments divisibles en prenant une variable aléatoire U distribuée uniformément sur l'ensemble $\left\{0, \frac{1}{Q}, ..., \frac{Q-1}{Q}\right\}$.

Théorème 2.11. *Pour tout modèle (s, nQ) avec comme processus de demande un processus de renouvellement composé, et sous les hypothèses (2.2) et (2.1), le processus stochastique*

$$X = \{(\mathcal{P}(t), D(t+L) - D(t)), t \geq 0\}$$

ayant la distribution initiale

$$P(\mathcal{P}(0) < x, D(L) < y) = P(s + Q - QU < x) P(D(L) < y)$$

où U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1)$ et indépendante du processus D, est un processus régénératif pur avec comme séquence croissante de points de régénération les points $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_0 = 0$. De plus, l'ensemble des points σ_n contient le sous ensembles de points de lancement des commandes.

En remarquant que

$$\mathcal{N}(t+L) = \mathcal{P}(t) - (D(t+L) - D(t)) \stackrel{d}{=} s + Q - QU - D(t)$$

et que $\mathcal{P}(\sigma_n + t)$ est indépendante de la variable aléatoire $D(\sigma_n + t + L) - D(\sigma_n + t)$ pour tout $t \geq 0$, on pourra déterminer le coût moyen associé à la politique (s, nQ). Posons

$$D_2(t) = D(t) + QU$$

Théorème 2.12. *Si le processus de demande est un processus de renouvellement composé et sous les conditions du théorème (2.11), il s'en suit que le coût moyen $\Phi(s, nQ)$ de la politique (s, nQ) avec une fonction de coûts f non négative et coût de commande $K > 0$ est donné par*

$$\lambda K P(D_2(0) + Y_1 \geq Q) + \lambda \mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} f(s + Q - D_2(t+L))dt\right)$$

Pour le cas particulier où le processus de la demande est un processus de Poisson composé, ces expressions peuvent être simplifiées.

Théorème 2.13. *Si le processus de demande est un processus de Poisson composé et sous les conditions du théorème (2.11), le coût moyen $\Phi(s, nQ)$ de la politique (s, nQ) avec une fonction de coûts f non négative et coût de commande $K > 0$ est donné par*

$$\lambda K P\left(D_2(0) + Y_1 \geq Q\right) + \mathbb{E}\left(f(s + Q - D_2(L))\right)$$

D'autre expressions de coûts et de mesures de services peuvent être obtenues.

Théorème 2.14. *Si le processus de demande est un processus de Poisson composé et sous les conditions du théorème (2.11), il s'en suit que le nombre moyen $B_1(s, nQ)$ de demandes mises en attente par unité de temps est égale*

$$B_1(s, Q) = \lambda \mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} \max\left\{D_2(t + L) - (s + Q), 0\right\} dt\right)$$

et le niveau moyen du stock physique $B_2(s, Q)$ est donné par

$$B_2(s, Q) = \lambda \mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} \max\left\{(s + Q) - D_2(t + L), 0\right\} dt\right)$$

De plus, la proportion de temps $P_3(s, Q)$ où le niveau net du stock est positif est donnée par

$$P_3(s, Q) = \lambda \mathbb{E}\left(\int_0^{T_1} \mathbb{1}_{((s+Q) - D_2(t+L) > 0)} dt\right)$$

D'autres expressions de coûts et de mesures de service peuvent être obtenues.

Théorème 2.15. *Si le processus de demande est un processus de renouvellement composé, sous les conditions du théorème (2.11), le nombre moyen $B_3(s, Q)$ de rupture est donné par*

$$B_3(s, Q) = \lambda\left(P\left(D_2(L) \leq s + Q\right) - P\left(D_2(L) + Y_1 \leq s + Q\right)\right)$$

la mesure de non rupture $P_1(s, Q)$ est donnée par

$$P_1(s, Q) = 1 - P\left(D_2(L) \leq s + Q\right) + P\left(D_2(L) + Y_1 \leq s + Q\right)$$

Le nombre moyen $B_4(s, Q)$ d'unités en rupture est donné par

$$B_4(s, Q) = \lambda\left(\mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}\left(\max(s + Q - D_2(L) - Y_1, 0)\right) - \mathbb{E}\left(\max s + Q - D_2(L), 0\right)\right)$$

le taux de remplissage du stock $P_2(s, Q)$ (P_2-mesure de service) est donné par

$$P_2(s, Q) = \lambda\left(\mathbb{E}\left(\max(s + Q - D_2(L), 0)\right) - \mathbb{E}\left(\max s + Q - D_2(L) - Y_1, 0\right)\right)$$

2.4 Systèmes à revue périodique

Dans cette section, on suppose que le processus D de la demande est un processus de Poisson composé avec un taux d'arrivée $\lambda > 0$ et que la fonction de répartition F_Y des demandes individuelles Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, satisfait $F_Y(0) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$. Cela signifie que

$$D(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} Y_i, \quad Y_0 = 0$$

avec $N = \{N(t), t \geq 0\}$ dénote le processus poissonnien d'arrivée des clients et les demandes individuelles indépendantes et identiquement distribuées Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendantes de N. De plus, la fonction de coûts f satisfait

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f(\mathcal{N}(s)) ds\right) < \infty$$

pour tout $T > 0$.

2.4.1 Modèle (R, S)

Suivant cette règle, la position du stock est inspectée chaque R unités de temps et une commande est lancée si le niveau de la position du stock est inférieur à S. De plus, la taille de la commande est telle que toute demande en excès jusqu'au moment de la revue soit complètement satisfaite et la position du stock soit remise au niveau S. Ici, les variables $R > 0$ et $S > 0$ sont des variables de décision et doivent être choisies d'une manière optimale suivant la structure de la fonction de coûts. Sans nuire à la généralité, le niveau initial de la position du stock est supposé égale à S, i.e, $\mathcal{P}(0) = S$.

Théorème 2.16. *Pour tout modèle (R, S) de gestion des stocks avec un processus de demande Poisson composé, sous les hypothèses (2.2) et (2.1), le processus stochastique*

$$X = \{(\mathcal{P}(t), D(t + L) - D(t)), t \geq 0\}$$

avec $\mathcal{P}(0) = S$ est un processus régénératif pur simplifié avec séquence croissante de points de régénération donnée par nR, $n \in \mathbb{N}$, contenant le sous ensemble de points de lancement des commandes.

Par définition de la politique (R, S) on observe que le processus de la position du stock $\mathcal{P}$ jusqu'au moment s est complètement déterminé par $\{D(t), t \leq s\}$. Cela implique, en vertu des accroissements indépendants et stationnaires d'un processus de Poisson composé, que les variables aléatoires $\mathcal{P}(t+nR)$ et $D(t+nR+L)-D(t+nR)$ sont indépendantes pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $0 \leq t < R$ on a

$$\mathcal{N}(t+L) = S - D(t+L)$$

En appliquant le théorème (2.16), il est maintenant facile de déterminer le coût moyen d'un modèle (R, S).

Théorème 2.17. *Pour un processus de demande Poisson composé, et sous les conditions du théorème (2.16), le coût moyen $\Phi(R,S)$ d'une politique (R,S) avec une fonction de coût f non négative et coût de commande $K>0$ est donné par*

$$\Phi(R,S) = \frac{K(1-\exp(-\lambda R)) + \int_0^R \mathbb{E}(f(S-D(t+L))dt}{R}$$

Théorème 2.18. *Pour un processus de demande Poisson composé, et sous les conditions du théorème (2.16), le nombre moyen $B_1(R,S)$ de demandes mises en attente par unité de temps est donné par*

$$B_1(R,S) = \frac{\int_0^R \mathbb{E}(\max\{D(t+L)-S,0\})dt}{R}$$

et le stock physique moyen $B_2(R,S)$ par unité de temps est donné par

$$B_2(R,S) = \frac{\int_0^R \mathbb{E}(\max\{S-D(t+L),0\})dt}{R}$$

De plus, La proportion de temps P_3 où le niveau du stock est positif est égale à

$$P_3 = \frac{\int_0^R P(D(t+L)-S>0)dt}{R}$$

Pour toute variable aléatoire D, on a

$$\max\{S-D,0\} - \max\{D-S,0\} = S-D \tag{2.8}$$

et comme D est un processus de Poisson composé, on obtient

$$\mathbb{E}(\max\{S-D(t),0\}) - \mathbb{E}(\max\{D(t)-S,0\}) = S - \lambda t\mathbb{E}(Y_1) \tag{2.9}$$

pour tout $t \geq 0$. Cela montre en vertu du théorème (2.18) que,

$$B_2 - B_1 = S - \frac{\lambda\mathbb{E}(Y_1)((R+L)^2 - L^2)}{2R}$$

qui est une relation entre niveau moyen du stock physique par unité de temps et le nombre moyen de demande mise en attente par unité de temps. De plus, et comme il est facile de verifier que pour une variable aléatoire non négative D

$$\mathbb{E}(\max\{S-D,0\}) = \int_0^S P(D \leq y)\,dy \tag{2.10}$$

on obtient pour toute distribution cumulative continue F_Y des demandes individuelles Y_n

$$B_2(R,S) = \int_0^S P_3(R,y)dy \tag{2.11}$$

où P_3 dénote la proportion de temps où le niveau du stock est positif en utilisant une politique (R,y).

D'autres expressions de coûts et de mesures de service sont données par le résultat suivant :

Théorème 2.19. *Pour un processus de demande Poisson composé, et sous les conditions du théorème (2.16), la mesure de non rupture $P_1(R,S)$ est donnée par*

$$P_1(R,S) = 1 - P(D(L) \leq S) + P(D(R+L) \leq S)$$

Le nombre moyen $B_4(R,S)$ d'unités en rupture est donné par

$$B_4(R,S) = \lambda\mathbb{E}(Y_1) + \frac{\mathbb{E}(\max(S-D(R+L),0)) - \mathbb{E}(\max S - D(L),0)}{R}$$

Le taux de remplissage du stock $P_2(R,S)$ (P_2-mesure de service) est donné par

$$P_2(R,S) = \frac{\mathbb{E}(\max(S-D(L),0)) - \mathbb{E}(\max S - D(R+L),0)}{\lambda R\mathbb{E}(Y_1)}$$

2.4.2 Modèle (R, s, S)

Suivant cette règle, le niveau de la position du stock est inspecté chaque R unités de temps et une commande est lancée si le processus de la position du stock juste avant la date nR satisfait

$$\mathcal{P}((nR)^-) = \lim_{t \to nR} \mathcal{P}(t) \leq s \leq S$$

Remarquons que pour $s = S$, on obtient le modèle (R, S) précédent. Si le niveau $\mathcal{P}((nR)^-)$ n'est pas inférieur ou égal à s, aucune commande n'est lancée et on attend jusqu'à la prochaine date de revue. La taille de la commande est telle que toute demande en attente

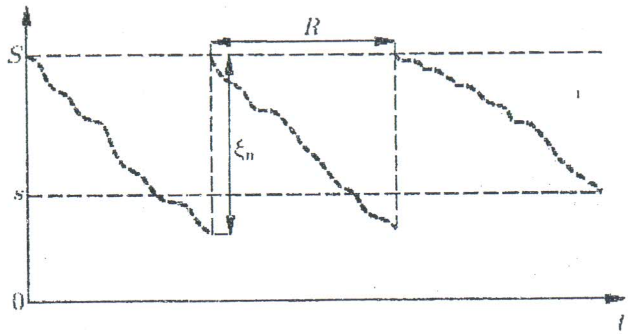


FIG. 2.4 – Le modèle (R, s, S).

soit complètement satisfaite et la position du stock soit remise au niveau S (figure 2.4). Les variables de décision sont R, s et S.

Si l'on veut montrer que le processus

$$X = \{(\mathcal{P}(t), D(t+L) - D(t)), t \geq 0\}$$

est un processus régénératif pur simplifié avec comme points de régénération la séquence nR, $n \in \mathbb{N}$, on doit chercher une fonction de répartition initiale

$$F(x, y) = P\left(\mathcal{P}(0) < x, D(L) < y\right)$$

satisfaisant

$$F(x, y) = P\left(\mathcal{P}(nR) < x, D_{nR}(L) < y\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

$$D_{nR}(L) = D(nR + L) - D(nR)$$

Pour ce faire, remarquons d'abord que les variables aléatoires $\mathcal{P}(t)$ et $D(t+L) - D(t)$ sont indépendantes pour tout $t \geq 0$. Cela revient au fait que la variable aléatoire $\mathcal{P}(t)$ est complètement déterminée par le processus stochastique $\{D(s), s \leq t\}$ et que le processus poissonnien composé de la demande est à accroissements indépendants et stationnaires. Il

s'en suit que

$$P\left(\mathcal{P}(nR) < x, D_{nR}(L) < y\right) = P\left(\mathcal{P}(nR) < x\right) P\left(D_{nR}(L) < y\right) = P\left(\mathcal{P}(nR) < x\right) P\left(D(L) < y\right)$$

et on cherche donc une distribution invariante du processus cadlag $\{\mathcal{P}(nR), n \in \mathbb{N}\}$. Par définition de la règle de contrôle, il découle immédiatement que $s < \mathcal{P}(nR) \leq S$ et pour trouver la distribution invariante du processus $\{\mathcal{P}(nR), n \in \mathbb{N}\}$, il est plus commode de considérer le processus

$$V_n = S - \mathcal{P}(nR)$$

à espace d'états $[0, S-s)$ s'il s'agit d'éléments indivisibles et $\{0, 1, ..., S-s-1\}$ s'il s'agit d'éléments divisibles. De la définition de la règle de contrôle, il s'en suit que

$$V_{n+1} = (V_n + \xi_n)\mathbb{I}_{\{V_n + \xi_n < S - s\}} \tag{2.12}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec ξ_n la variable aléatoire représentant la demande totale durant la période $[nR, (n+1)R)$. Comme le processus de demande considéré est un processus de Poisson composé, les variables aléatoires ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de répartition commune

$$F_\xi(x) = P\left(\xi_1 < x\right) = P\left(D(R) < x\right) = F_{D(R)}$$

Aussi, ξ_n est indépendante de V_n. Donc, le processus $\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov. Le résultat suivant donne la distribution invariante de la chaîne de Markov V définie par la relation (2.12).

Théorème 2.20. *La distribution invariante de la chaîne de Markov $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ donnée par la relation 2.12 est de la forme*

$$F_{inv}(v) = \frac{1 + H(v)}{1 + H(S-s)}$$

où $H = \sum_{n=1}^{\infty} F_{D(R)}^{n*}$ est la fonction de renouvellement associée à la fonction de répartition de la variable aléatoire $D(R)$.

Il est maintenant possible d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 2.21. *Pour tout modèle (R, s, S) avec un processus de demande Poisson composé, sous les hypothèses (2.2) et (2.1), le processus stochastique*

$$X = \{(\mathcal{P}(t), D(t+L) - D(t)), t \geq 0\}$$

ayant la distribution initiale

$$P(\mathcal{P}(0) < x, D(L) < y) = P(S - V_{eq} < x)P(D(L) < y)$$

avec V_{eq} la variable aléatoire distribuée suivant la distribution

$$P(V_{eq} < v) = \frac{1 + H(v)}{1 + H(S - s)}, \quad 0 \leq v \leq S - s$$

et V_{eq} indépendante du processus D de la demande, est un processus régénératif pur simplifié avec comme points de régénération la séquence nR, $n \in \mathbb{N}$ contenant le sous ensemble de points de lancement des commandes.

Comme pour le modèle (R, S), on a

$$\mathcal{N}(t + L) = \mathcal{P}(0) - D(t + L) \stackrel{d}{=} S - V_{eq} - D(t + L) \tag{2.13}$$

pour tout $0 \leq t \leq R$.

Par ailleurs, il vient du fait que le processus Poisson composé est à accroissements indépendants et stationnaires et de l'indépendance de la variable aléatoire V_{eq} du processus D de la demande, que la variable aléatoire $\mathcal{P}(t + nR)$ est indépendante de la variable aléatoire $D(t + nR + L) - D(t + nR)$. Il est maintenant possible de déterminer, en utilisant la relation (2.13) et le théorème (2.21), le coût moyen du modèle (R, s, S). Posons

$$D_1(t) = D(t) + V_{eq}$$

Théorème 2.22. *Pour un processus de demande Poisson composé et sous les conditions du théorème (2.21), le coût moyen $\Phi(R, s, S)$ de la politique (R, s, S) avec une fonction de coûts f non négative et coût de commande $K > 0$, est donné par*

$$\frac{KP(D_1(R) \geq S - s) + \int_0^R \mathbb{E}(f(S - D_1(t + L))\,dt}{R}$$

Les expressions du nombre moyen de demandes mises en attente par unité de temps, du niveau moyen du stock physique et la P_3-mesure de service sont données par le résultat suivant :

Théorème 2.23. *Pour un processus de demande Poisson composé et sous les conditions du théorème (2.21), le nombre moyen $B_1(R, s, S)$ de demandes mises en attente par unité de temps est donné par*

$$B_1(R, s, S) = \frac{\int_0^R \mathbb{E}(\max\{D_1(t + L) - S, 0\})\,dt}{R}$$

Le niveau moyen $B_2(R, s, S)$ du stock physique est donné par

$$B_2(R, s, S) = \frac{\int_0^R \mathbb{E}(\max\{S - D_1(t + L), 0\})\,dt}{R}$$

La proportion de temps $P_3(R, s, S)$ où le niveau du stock est positif est égale

$$P_3(R, s, S) = \frac{\int_0^R P\{S - D_1(t + L) > 0\}\,dt}{R}$$

D'autres expressions de coûts et de mesures de service peuvent être obtenues et sont données par le résultat suivant :

Théorème 2.24. *Si le processus de demande est un processus de Poisson composé, sous les conditions du théorème (2.21), le nombre moyen $B_3(R, s, S)$ de rupture est donné par*

$$B_3(R, s, S) = \frac{(P(D_1(L) \leq S) - P(D_1(R + L) \leq S))}{R}$$

la mesure de non rupture $P_1(R, s, S)$ est donnée par

$$P_1(R, s, S) = 1 - P(D_1(L) \leq S) + P(D_1(R + L) \leq S)$$

Le nombre moyen $B_4(R, s, S)$ d'unités en rupture est donné par

$$B_4(R, s, S) = \lambda\mathbb{E}(Y_1) + \frac{\mathbb{E}(\max(S - D_1(L), 0)) - \mathbb{E}(\max S - D_1(R + L), 0)}{\lambda R\mathbb{E}(Y_1)}$$

le taux de remplissage du stock $P_2(R, s, S)$ (P_2−mesure de service) est donné par

$$P_2(R, s, S) = \frac{\mathbb{E}(\max(S - D_1(L), 0)) - \mathbb{E}(\max S - D_1(R + L), 0)}{\lambda R\mathbb{E}(Y_1)}$$

2.4.3 Modèle (R, s, nQ)

Suivant cette politique, le niveau de la position du stock est inspecté chaque R unités de temps et une commande est lancée si

$$\mathcal{P}((nR)^-) = \lim_{t \to nR} \mathcal{P}(t) \leq s$$

si ce n'est pas le cas, aucune commande n'est lancée et l'on attend jusqu'au prochain moment de revue. La taille de la commande est un multiple de Q et telle que toute demande en attente sera satisfaite et la position du stock au moment nR, $n \in \mathbb{N}$, sera entre s et $s+Q$, i.e.

$$s < \mathcal{P}(nR) \leq s+Q$$

Cela veut dire que pour éléments indivisibles (resp. éléments divisibles) la position du stock varie dans $(s, s+Q]$ (resp. dans $\{s+1, s+2, ..., s+Q\}$) (figure 2.5). Dans ce type de modèles, les variables R, s et parfois Q sont des variables de décision qui doivent être choisies d'une manière optimale suivant la structure de la fonction de coûts.

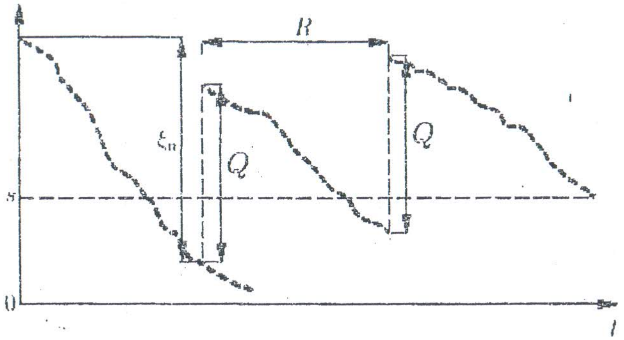


FIG. 2.5 – Le modèle (R, s, nQ).

Si l'on veut montrer que le processus cadlag

$$X = \{(\mathcal{P}(t), D(t+L) - D(t)), t \geq 0\}$$

est un processus régénératif pur simplifié avec points de régénération donnés par la séquence nR, $n \in \mathbb{N}$, on doit déterminer une distribution initiale

$$F(x,y) = P(\mathcal{P}(0) < x, D(L) < y)$$

telle que

$$F(x,y) = P(\mathcal{P}(nR) < x, D_{nR}(L) < y)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $D_{nR}(L) = D(nR+L) - D(nR)$. Par un raisonnement analogue au cas du modèle (R, s, S), on trouve que

$$P(\mathcal{P}(nR) < x, D_{nR}(L) < y) = P(\mathcal{P}(nR) < x) P(D_{nR}(L) < y)$$

et donc, on doit déterminer la distribution invariante du processus stochastique $\{\mathcal{P}(nR), n \in \mathbb{N}\}$. Par définition de la règle de contrôle, on a

$$\mathcal{P}((n+1)R) = \mathcal{P}(nR) - \xi_n + \tau_n Q \tag{2.14}$$

avec ξ_n la variable aléatoire représentant la demande totale durant la période $[nR, (n+1)R)$ et

$$\tau_n = \min\{k \in \mathbb{N}/s - (\mathcal{P}(nR) - \xi_n) \geq (k-1)Q\} \tag{2.15}$$

Introduisons maintenant le processus stochastique $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$, donné par

$$V_n = s + Q - \mathcal{P}(nR) \tag{2.16}$$

Il s'en suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq V_n < Q$. De plus, en substituant la définition de V_n dans la relation (2.15) il vient que

$$\tau_n = \min\{k \in \mathbb{N}/V_n + \xi_n \geq kQ\}$$

et en remplaçant dans (2.14) on aura

$$V_{n+1} = V_n + \xi_n - \tau_n Q = (V_n + \xi_n) \mod Q \tag{2.17}$$

Comme le processus de demande est supposé Poisson composé, les variables aléatoires ξ_n sont indépendantes et identiquement distribuées. Aussi, ξ_n est indépendante de V_n. Cela montre que le processus V est une chaîne de Markov dont la distribution invariante est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2.25. *La distribution invariante de la chaîne de Markov $V = \{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ à espace d'états $[0, Q)$ est donnée par*

$$F_{inv}(x) = \frac{x}{Q}, \quad 0 \leq x < Q$$

et quand l'espace d'états est $\{0, 1, ..., Q-1\}$

$$F_{inv}(x) = \frac{x}{Q}, \quad x \in \{0, 1, ..., Q-1\}$$

Cela veut dire que la distribution invariante de la chaîne de Markov V est donnée par la loi uniforme sur $[0, Q)$ (resp. sur $\{0, 1, ..., Q-1\}$) s'il s'agit d'éléments indivisibles (resp. éléments divisibles). On peut donc écrire,

$$V_0 \stackrel{d}{=} QU \Rightarrow V_n \stackrel{d}{=} QU$$

où U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1)$ (resp. sur $\left\{0, \frac{1}{Q} ..., \frac{Q-1}{Q}\right\}$).

Théorème 2.26. *Pour tout modèle (R, s, nQ) avec un processus de demande Poisson composé, sous les hypothèses (2.2) et (2.1), le processus stochastique*

$$X = \{(\mathcal{P}(t), D(t+L) - D(t)), t \geq 0\}$$

ayant la distribution initiale

$$P(\mathcal{P}(0) < x, D(L) < y) = P(s + Q - QU < x) P(D(L) < y)$$

où U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1)$ et indépendante du processus D, est un processus régénératif pur simplifié avec comme séquence croissante de points de régénération les points nR, $n \in \mathbb{N}$. De plus, l'ensemble des points nR, $n \in \mathbb{N}$, contient le sous ensemble de points de lancement des commandes.

De même, par un raisonnement analogue à celui des cas (R, S) et (R, s, S) on montre que

$$\mathcal{N}(t+L) = \mathcal{P}(t) - (D(t+L) - D(t)) \stackrel{d}{=} s + Q - QU - D(t+L) \tag{2.18}$$

pour tout $0 \leq t < R$. De plus, la variable aléatoire $\mathcal{P}(t + nR)$ est indépendante de $D(t + nR + L) - D(t + nR)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$D_2(t) = D(t) + QU$$

Théorème 2.27. *Pour un processus de demande Poisson composé et sous les conditions du théorème (2.26), il s'en suit que le coût moyen $\Phi(R, s, nQ)$ de la politique (R, s, nQ) avec une fonction de coûts f non négative et coût de commande $K > 0$ est donné par*

$$\frac{KP(D_2(R) \geq Q) + \int_0^R \mathbb{E}(f(s + Q - D_2(t+L)))\, dt}{R}$$

Les expressions du nombre moyen de demandes mises en attente par unité de temps, le niveau moyen du stock physique par unité de temps et de la P_3−mesure associées au modèle (R, s, nQ) sont données par le résultat suivant :

Théorème 2.28. *Pour un processus de demande Poisson composé et sous les conditions du théorème (2.26), il s'en suit que le nombre moyen $B_1(R, s, nQ)$ de demandes mises en attente par unité de temps est égale*

$$B_1(R, s, Q) = \frac{\int_0^R \mathbb{E}(\max\{D_2(t+L) - (s+Q), 0\})\, dt}{R}$$

et le niveau moyen du stock physique $B_2(R, s, Q)$ est donné par

$$B_2(R, s, Q) = \frac{\int_0^R \mathbb{E}(\max\{(s+Q) - D_2(t+L), 0\})\, dt}{R}$$

De plus, la proportion de temps $P_3(R, s, Q)$ où le niveau net du stock est positif est donnée par

$$P_3(R, s, Q) = \frac{\int_0^R P((s+Q) - D_2(t+L) > 0)\, dt}{R}$$

D'autres expressions de coûts et de mesures de service peuvent être obtenues.

Théorème 2.29. *Si le processus de demande est un processus de Poisson composé, sous les conditions du théorème (2.26), le nombre moyen $B_3(R, s, Q)$ de rupture est donné par*

$$B_3(R, s, Q) = \frac{P(D_2(L) \leq s + Q) - P(D_2(R+L) \leq s + Q)}{R}$$

La mesure de non rupture $P_1(R, s, Q)$ est donnée par

$$P_1(R, s, Q) = 1 - P(D_2(L) \leq s + Q) + P(D_2(R+L) \leq s + Q)$$

Le nombre moyen $B_4(R, s, Q)$ d'unités en rupture est donné par

$$B_4(R, s, Q) = \lambda\mathbb{E}(Y_1) + \frac{\mathbb{E}(\max(s + Q - D_2(R+L), 0)) - \mathbb{E}(\max s + Q - D_2(L), 0)}{R}$$

le taux de remplissage du stock $P_2(R, s, Q)$ (P_2−mesure de service) est donné par

$$P_2(R, s, Q) = \frac{\mathbb{E}(\max(s + Q - D_2(L), 0)) - \mathbb{E}(\max s + Q - D_2(R+L), 0)}{\lambda R\mathbb{E}(Y_1)}$$

Conclusion

La théorie des processus régénératifs peut être utilisée efficacement pour l'analyse des modèles de gestion des stocks. Elle permet l'obtention des différentes expressions de coûts et de mesures de service. Cependant, nous pouvons remarquer que ces expressions mathématiques ont besoin d'être raffinées. Elles ne sont pas faciles à calculer. On est souvent contraint d'utiliser des méthodes numériques.

Sommaire

Chapitre 10

Synthèse sur les systèmes de production et de gestion des stocks

«Mathematicians are like lovers. Grant a mathematician the least principle, and he will draw from it a consequence which you must also grant him, and from this consequence another.»

FONTENELLE

Introduction

Stocker, c'est engager des dépenses pour acquérir des biens qui ne produiront des revenus qu'ultérieurement. Selon ce que l'on stocke, en quelle quantité et suivant la durée, ces dépenses peuvent s'avérer conséquentes. Il existe une hiérarchie des produits nécessaires à l'activité, une classification en fonction de leur prix, des quantités utilisées, de leur fréquence d'utilisation, des quantités minimales d'achat, des délais, etc. Une classification commode est la classification représentée par le diagrammes de PARETO (cf. BRETON et ZACCOUR [58]).

A) produits très chers, rares, délais longs, etc. Ils représentent un taux de 10% du nombre total d'articles stockés et 75% de la valeur totale.

B) produits moyennement chers, disponibilité aléatoire sur le marché, etc. Ils constituent approximativement 40% des produits stockés et 20% de la valeur totale.

C) produits courants, peu chers, etc; et représentant près de 50% des articles stockés et 5% de la valeur totale.

Les modèles classiques ainsi que la plus grande partie des modèles actuels de gestion des stocks ont pour objectif de minimiser leur coût de gestion en évitant deux situations extrêmes. À savoir le «sur-stockage» et le «sous stockage». Dans ce système de contraintes, il est alors clair qu'en fonction de sa classe, chaque produit aura un mode de gestion spécifique. En effet, le coût de gestion du stock est obtenu en additionnant le coût de passation et le coût de détention. Par conséquent, le choix de la politique de contrôle est lié à la minimisation du coût. Nous présentons dans ce chapitre les éléments importants qui déterminent les systèmes de gestion des stocks et de production, ainsi qu'une revue historique et une synthèse bibliographique concernant la stabilité pour ce type de systèmes.

10.1 Approche heuristique des règles de contrôle

L'existence de stocks au sein de l'entreprise amène le gestionnaire à se poser la question du niveau optimal de ces derniers, en évitant deux principaux écueils :

1. Le sur-stockage qui est source de coût pour l'entreprise (coût du stockage physique, locaux et surfaces utilisés), coûts annexes tels que les assurances et gardiennage ainsi que le coût des capitaux immobilisés dans le stock et ne générant pas d'intérêts.
2. Le sous-stockage qui risque d'aboutir à des ruptures de stocks préjudiciables à l'activité de production ou à l'activité commerciale de l'entreprise (arrêt de la production, perte de ventes, perte de clientèle, etc.).

Par conséquent, la gestion de stock nécessite une règle ou politique de contrôle ou de réapprovisionnement. Définir une politique de réapprovisionnement consiste essentiellement à répondre à trois questions :

- Quand faut-il réapprovisionner ou une commande doit être émise?
- Quelle quantité doit être commandée ou combien faut-il réapprovisionner?
- Quel produit doit-on commander?

Suivant les combinaisons des réponses, il est donc possible de définir quatre politiques de base pour un réapprovisionnement du stock. Chaque politique est adaptée à un produit ou à une catégorie de produits. Cela conduit fréquemment à l'utilisation de plusieurs politiques, voire les quatre politiques simultanément. La difficulté pour le gestionnaire consiste à choisir la meilleure politique adaptée à chaque produit, afin d'éviter les ruptures de stock et les immobilisations financières importantes. Ce double objectif, apparemment contradictoire, fait constamment appel à l'arbitrage et au compromis, il faudra sans cesse minimiser ou maximiser un paramètre soumis à plusieurs contraintes, par exemple : minimiser la quantité stockée sous contrainte de non rupture de stock et en achetant des quantités de manière économique.

Réapprovisionnement à date et quantité fixes

Dite aussi méthode «calendaire», les livraisons des commandes se font à dates fixes. Les quantités livrées sont égales et peuvent se rapprocher de la «quantité économique» ou correspondre à une livraison partielle d'un contrat annuel. Cette méthode s'applique essentiellement à des produits :

- dont la consommation est régulière.
- de faible valeur.
- de classe (C).

Avantages

- Simplicité de la gestion des stocks.
- Gains d'échelle négociables par les acheteurs.

Inconvénient

- Si la quantité de réapprovisionnement est mal calculée ou si la consommation n'est pas régulière, il y a risque «d'inflation» ou de rupture de stock.
- Les livraisons urgentes ou hors contrat, peuvent être très coûteuses (recours au fret aérien, lancement spécial chez le fournisseur, etc.).

Réapprovisionnement à date fixe et quantité variable

Pour chaque produit un niveau optimum de stock est défini. À période fixe, le magasinier analyse son stock et commande la quantité permettant de compléter au niveau requis. Cette méthode s'applique essentiellement à des produits :

- dont la consommation est régulière.
- coûteux, périssables ou encombrants.

Il est possible de faire des périodes d'inventaire ou d'analyse différentes suivant la catégories des produits.

Avantages

- Gestion des stocks simples.
- Immobilisation financière faible ou maîtrisée.

Inconvénient Si la quantité de réapprovisionnement est mal calculée ou si la consommation n'est pas régulière, il y a risque « d'inflation » ou de rupture de stock.

Réapprovisionnement à date variable et quantité fixe

Plus connue sous le nom de méthode du point de commande, celle-ci consiste à définir, dans un concept de flux tiré et de juste à temps, le niveau de stock qui déclenche l'ordre d'achat, de façon à être livré juste au moment de l'utilisation de la dernière pièce. Ce niveau de stock (point de commande) doit permettre de satisfaire les besoins durant le délai allant de la date de déclenchement de commande à la date de livraison. Le point de commande s'appelle également seuil de commande ou seuil de réapprovisionnement.

Cette technique est utilisée essentiellement pour les articles de classe (A) car elle demande un suivi permanent des stocks entraînant un coût de gestion élevé. Notons que la méthode de Kanban est une forme d'approvisionnement à point de commande (cf. ARROW [17]).

Avantages

- Permet d'éviter les ruptures de stocks.
- Adapté à une consommation partiellement irrégulière.

Inconvénient

- Impose un suivi permanent des stocks pouvant entraîner des coûts administratifs importants.
- Peut encourager à faire des stocks de sécurité.

Réapprovisionnement à date et quantité variables

Cette méthode est principalement utilisée pour les articles de classe (A) dont les prix de revient varient fortement ou dont la disponibilité n'est pas permanente.

Exemple 10.1. *Métaux précieux , bois exotiques, etc.*

L'achat se fait sur estimation en fonction des opportunités du marché. Dans les estimations, il faudra prévoir les besoins pour les commandes spécifiques, les fabrications de l'entreprise, les aléas de fabrication, etc.

Avantages Permet, éventuellement, de profiter des tarif très intéressants.

Inconvénient

- Il faut faire un suivi permanent des coûts du marché pour effectuer les achats les plus intéressants.
- Il ne peut être utilisé que pour un nombre réduit d'articles sinon l'entreprise risque de se fragiliser.
- Il peut favoriser la spéculation.

10.2 Composantes des systèmes de gestion des stocks

Le premier modèle classique de gestion des stocks est le modèle déterministe de la quantité économique de commandes (QEC) et dont la dénomination universelle est « EOQ model ». Ce modèle a été introduit en 1913 par F. W. HARRIS [143] en considérant pour la première fois le problème d'optimisation d'une fonction de coût dans la gestion des stocks. Dans ce modèle, très simplificateur, on considère un seul article non périssable et on suppose que le processus des demandes est déterministe, le temps est continue, l'horizon est infini et le niveau initial du stock est nul. Ce modèle a été profondément analysé par WILSON en 1934 qui a établi une formule basée sur un modèle mathématique simplificateur dans lequel on considère que la demande est stable sans tenir compte des évolutions de prix, des risques de rupture et des variations dans le temps des coûts de commande et de lancement : on dit aussi « en avenir certain » (cf. [293]). Il est important de signaler que ce modèle est le plus utilisé, de nos jours, dans la gestion des stocks par les petites entreprises. Pour une analyse exhaustive de ce type de modèles, on peut se référer à la synthèse de WOLD et JURÉEN [295].

L'étude des modèles de gestion des stocks avec un processus de demande aléatoire n'a débutée qu'après la seconde guerre mondiale. C'est ce type de modèles qu'on appelle modèles stochastiques de la gestion des stocks. La règle de contrôle de la gestion des stocks inclut plusieurs types de problèmes tels que statistiques (analyse des données, inférence, estimation des paramètres, etc.), informatique (maintenir le niveau du stock dans une base de données adéquate) et recherche opérationnelle (modélisation et détermination d'une règle de contrôle optimale ou raisonnable). Différents types de systèmes de gestion des stocks peuvent être considérés tels que les systèmes purs de gestion des stocks où seulement la gestion du stock est prise en considération. D'autres systèmes sont ceux de la gestion des stocks et de production, où les processus de production sont inclus dans l'analyse de ce type de systèmes. Il est à noter que notre travail concernera des modèles dans les systèmes mixtes de production et de gestion des stocks.

Chaque problème particulier a ses propres caractéristiques dont les plus importantes sont citées ci dessous.

- **Horizon de planification :** Il représente la durée de temps à travers laquelle le niveau du stock est contrôlé. Cet horizon peut être considéré fini, infini, déterministe ou stochastique (aléatoire). Dans les modèles que nous étudierons, on considère que l'horizon est infini.
- **Produits :** Le stock peut être constitué de plusieurs types de produits. À cet effet, les produits stockés peuvent se distinguer les uns des autres par des

conditions de stockages particulières à chaque type (taux d'humidité, température, sensibilité à la poussière, etc.). Ainsi, les produits périssables ou qui peuvent être sujets à l'obsolescence doivent naturellement être gérés et stockés d'une manière différente. De plus, des interactions entre les différents produits ne sont pas à écarter. Dans notre analyse, on considérera que des modèles de gestion des stocks avec un seul article. En fait, la plupart des modèles de gestion des stocks concernent des stocks à un seul produit. En effet, dans le cas des problèmes de gestion de plusieurs types de produits, il est supposé une gestion simultanée à cause des ressources disponibles telles que l'espace de stockage, budget unique, etc.

♦ **Processus de demandes :** Le processus de demande peut se produire d'une manière continue dans le temps ou seulement à certains instants fixés. Les demandes peuvent êtres de tailles discrètes $\{1, 2, \ldots\}$ tel que les composants électroniques ou continues $(0, +\infty)$ tel que le gaz. Le processus de demande peut être stationnaire ou non stationnaire. De plus, il peut être déterministe ou stochastique. Dans le cas des demandes aléatoires on peut considérer le processus à accroissement indépendant (POISSON composée) ou non (processus de renouvellement composé), connu ou non. La plus simple hypothèse est que le processus de demande soit déterministe et stationnaire à taux constant. Cette hypothèse est vérifiée dans les modèles à quantité de demande économique (EOQ).

♦ **L'inspection (la revue) :** Le contrôle du niveau du stock peut s'effectuer d'une façon continue ou périodique.

1. Dans le cas d'une inspection continue, le niveau du stock est connu à chaque instant dans le temps mais la décision de lancer une commande, due à des restrictions extérieures, ne peut être effectuée qu'à des instants donnés (points discrets) dans le temps. Ce type de système est d'un niveau de sécurité élevé mais il s'avère en général très coûteux.
2. Dans le cas d'une inspection périodique, le niveau du stock n'est connu qu'à des instants particuliers (points discrets) dans le temps. Comme exemple illustratif, citons l'inspection après la fin de chaque journée permet d'évaluer l'état du stock et la décision de lancer une commande ne peut se faire qu'à ces instants. Notons que ces moments représentent le début d'une nouvelle période.

♦ **Délais de livraison :** Il représente le laps de temps qui sépare le moment de lancement d'une commande et l'instant de sa réception. On peut considérer un délai de livraison déterministe ou stochastique. Dans le premier cas, le temps de livraison peut être considérer nul [143] (remplacement instantané) ou positif. Or, lorsque le délai de livraison est supposé aléatoire, l'analyse du système peut s'avérer très complexe. Dans ce cas, on suppose que les commandes ne peuvent pas se croiser. En d'autres termes, les commandes arrivent suivant l'ordre de leur lancement dans le temps. On considérera dans notre analyse ce dernier type de modèles.

♦ **Rupture ou manque :** Dans le cas où une demande arrive alors que le niveau du stock est nul ou n'est pas disponible à répondre à la demande, alors on a une rupture ou manque de stock. La façon dont le système réagit à cette situation est fondamentale pour la structure du processus. D'une manière générale, deux possibilités sont offertes. Ou bien la demande est perdue ou elle sera satisfaite durant la prochaine période si c'est possible.

1. **Modèles avec arriérées de commandes :** Les demandes en excès sont satisfaites à la prochaine période dès la reception d'une commande. Les deux prochains chapitres 11 et 12 concerneront deux modèles avec arriérées de commandes.
2. **Modèles avec ventes perdues :** Les commandes en excès sont simplement ignorées.
3. **Modèles mixtes :** Plusieurs variantes peuvent être considérées. Ainsi, on peut choisir d'ignorer une partie des demandes et de laisser une partie à satisfaire la prochaine période. Une autre variante est liée à la volonté du client qui est près à attendre un certain temps fixe pour que sa demande soit satisfaite sinon il retire sa commande.

♦ **Capacité :** Un paramètre important qui complique l'analyse d'un système de gestion des stocks est l'hypothèse que la quantité que peut acquérir le gestionnaire suite à une commande est limitée ou même aléatoire. Cette limitation peut être liée à la capacité de stockage, de la chaîne de production ou de la capacité du fournisseur (capital, moyens de transports, moyens humains, etc.). Dans les modèles considérés aux chapitres 11 et 12, on supposera que la capacité de production et de stockage est finie.

♦ **Coûts :** La fonction coût est une caractéristique importante dans les systèmes de gestion des stocks. En fait, le but recherché est la minimisation de cette fonction tandis qu'on essaye de garantir la disponibilité des produits. Plusieurs types de coût peuvent être envisagés.

1. **Coûts d'approvisionnement :** À chaque fois qu'une commande d'achat ou un ordre de fabrication est lancé, cela coûte de l'argent à l'entreprise. Il faut en effet penser aux dépenses indirectes induites par ces opérations. Ces coûts peuvent être partitionnés en deux catégories :
   (a) Il s'agit d'un coût qui dépend de la taille de la commande. Ainsi, il est associé à la passation de la commande, à sa réception et au règlement de la facture du fournisseur. Les propriétés et la complexité de la fonction des coûts associés au modèle dépendent de l'hypothèse faite sur ce coût. Ainsi, la fonction des coûts peut être concave, convexe, ou générale. En règle générale, on suppose que ces coûts sont proportionnels à la taille de la commande, ce qui exprime le caractère linéaire de la fonction des coûts.
   (b) Ce coût ne dépend pas de la taille de la commande et est appelé coût marginal de la commande supplémentaire.
2. **Coûts de stockage ou de possession :** Ils sont dus à la structure du système et considérés comme le résultat direct du maintien des produits en stock. Citons à titre indicatif le coût d'intérêt (le stock est un capital immobilisé), le coût d'obsolescence (par exemple dans l'industrie de la mode), le coût concernant le loyer et le stockage (électricité, réfrigération, chauffage, etc.) et le coût concernant les taxes, assurances et pillage. La prise en compte de tous les coûts n'est pas facile à entreprendre et des hypothèses simplificatrices sont nécessaires. À cet effet, dans un système à revue périodique ces coûts sont évalués à la fin de chaque période alors que dans un système à inspection continue, ils sont calculés continûment.

FRY appela ce type de problème, le **problème du marchand de journaux** qu'il considéra comme le plus simple parmi les problèmes de congestion dans lesquels les demandes de service sont engendrées par des sources multiples agissant chacune plus au moins indépendamment de l'autre. La loi de POISSON est considérée comme la base fondamentale sur laquelle la majorité des problèmes ont été résolus.

La probabilité qu'une demande pour j articles soit effectuée est $P(j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$. Avec $\lambda = 10$, la solution du problème proposé dans cet exemple représente le stock de sécurité $S^* = 10$ obtenue comme solution du problème d'optimisation

$$S^* = \min\{n : \sum_{j=n}^{+\infty}(j-n)p_j \leq \frac{\lambda}{100}\}. \tag{10.1}$$

Relativement à la distribution de POISSON, FRY établit l'équation différentielle

$$\frac{dP(j)}{dx} = c[P(j-1) - P(j)],\ \lambda = cx.$$

Il montra que la distribution de POISSON peut être considérée comme un cas limite de la loi Binomiale en utilisant les données de BORTKIEWICZ sur le nombre de soldats tués dans une course aux chevaux [53].

FRY tenta de justifier d'une manière heuristique son critère donné par la relation (10.1) (cf. [117]). Cependant, ARROW, T. HARRIS et MARSCHAK [17] trouvèrent une approche exacte pour un critère plus réaliste et une règle de contrôle de type (s, S). Ainsi, à l'instant 0, ils choisirent la valeur moyenne actuelle de la somme totale à perdre dans un horizon future comme suit

$$L(y) = L(y|s,S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \mathbb{E}^y_{s,S}[l(Y_n)]. \tag{10.2}$$

Avec l est la période de perte, le facteur de discontinuité α, l'espérance mathématique $\mathbb{E}^y_{s,S}$ de la loi de probabilité déterminée par le stock initial y et les paramètres de décision (s, S). Notons que Y_n représente le niveau du stock à la $n^{\text{ième}}$ période.

La dynamique du modèle stochastique de la gestion des stocks est décrit en termes de deux processus aléatoires. Le premier concerne le processus des demandes aléatoires $\mathcal{D} = (D_k; k = 0, 1 \ldots)$ décrit par la suite de variables aléatoires identiquement distribuées de variable générique D et de fonction de répartition $\mathbb{F}_D$, où D_n représente la quantité demandée sur l'intervalle de temps $(n, n+1)$. Par ailleurs, on note respectivement par Y_n, Q_n le niveau du stock et la quantité commandée durant la $n^{\text{ième}}$ période avec un délai de livraison nul. Alors, le processus du stock en main est défini par la formule récursive

$$Y_{n+1} = \max(Y_n + Q_n - D_n, 0). \tag{10.3}$$

Dans le cas de la règle de contrôle de type (s, S) avec $0 < s < S$, le processus du stock en main donné par la relation (10.3) est spécifié comme suit

$$Y_{n+1} = \begin{cases} \max(S - D_n, 0) & \text{si } Y_n \leq s, \\ \max(Y_n - D_n, 0) & \text{si } Y_n > s. \end{cases} \tag{10.4}$$

Si de plus, la suite de variables aléatoires $\mathcal{D}$ sont indépendantes stochastiquement, alors le processus $Y = (Y_n; n = 0, 1, \ldots)$ est markovien d'après l'équation (10.4).

Par conséquent, l'espérance mathématique dans l'équation (10.2) est bien déterminée (cf. [110]). Par ailleurs, d'après l'équation récursive (10.2), on obtient

$$L(y) = l(y) + \alpha\mathbb{E}[L(Y_1)]. \tag{10.5}$$

En réduisant l'équation (10.5) à la forme standard de l'équation intégrale de la théorie de renouvellement (cf. [111, 94]), ARROW, T. HARRIS et MARSCHAK obtiennent explicitement la solution L et minimisèrent ainsi les paramètres s^* et S^* [17].

Par conséquent, le stock optimal sous la règle de contrôle (s, S) se réduit à minimiser une fonction à deux variables. Ceci constitue une solution du problème de choix de la politique optimale et consiste à optimiser dans l'ensemble $\mathcal{H}$ des politiques de type (s, S) (cf. [17]). Cependant, il semble que dans des modèles plus généraux ayant comme équation de balance (d'équilibre) l'équation (10.4), la règle optimale n'appartient pas nécessairement à l'ensemble $\mathcal{H}$.

D'après la conception de ARROW, l'aspect réaliste du problème de décision est séquentiel et incertain. À cet effet, WALD décrit l'incertain par un processus aléatoire $D = (D_n; n = 0, 1, \ldots)$ dont la distribution est connue comme un élément d'un ensemble de distributions $\widetilde{\mathcal{H}}$ (cf. [287]). Dans le problème de décision d'un point de vue statistique de WALD, l'expérimentation est séquentielle, ce qui signifie que les observations sont faites sur certaines variables du processus D et à différents niveaux. À cet effet, le contrôle de l'expérimentation avec la décision finale peuvent être décrits ensemble par une fonction statistique de décision notée δ. Par conséquent, le problème de décision d'un point de vue statistique peut être appréhendé comme la somme nulle entre deux joueurs. Plus précisément, on a

1. Le premier joueur est la nature qui choisit un élément $\mathbb{F}_D$ de $\widetilde{\mathcal{H}}$ pour être la vraie distribution de D.
2. Le deuxième joueur est le statisticien qui choisit la décision δ.

Le résultat est le risque $r(\delta, \mathbb{F}_D)$ qui est constitué de la moyenne de perte plus la moyenne du coût d'expérimentation (cf. [287]). De la même manière, DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ considérèrent le problème de gestion des stocks où la distribution $\mathbb{F}_D$ du processus de demande est inconnue, δ est une règle de contrôle et $r(\mathbb{F}_D, \delta)$ représente la valeur actuelle de la moyenne totale de perte (cf. [99, 97]). Par conséquent, si une mesure de probabilité μ est donnée sur $\widetilde{\mathcal{H}}$, alors une règle de contrôle δ_μ ayant la propriété

$$\int_{\widetilde{\mathcal{H}}} r(\mathbb{F}_D, \delta_\mu) d\mu(\mathbb{F}_D) = \min_\delta \int_{\widetilde{\mathcal{H}}} r(\mathbb{F}_D, \delta) d\mu(\mathbb{F}_D)$$

est dite solution de BAYES relative à une distribution *a priori* μ donnée. Dans [98, 99], une solution de BAYES pour un problème de gestion des stocks dans un nombre fini d'intervalles de temps (Horizon fini), a été construite par une méthode récursive comme dans [287, Chapitre 4, §1]. Cette approche constitue une autre alternative pour étudier ce type de problème d'un point de vue statistique et d'optimisation.

Rappelons que l'équation (10.5) représente le coût moyen d'escompte pour le stock en main relativement à une règle de contrôle. Or, même pour des modèles généraux, le coût moyen peut se diviser en deux parties : le coût engagé dans la première période et la moyenne du coût futur d'escompte. À cet effet, DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ ont trouvé le coût total d'escompte f, pour un système de gestion des stocks contrôlé par une règle optimale et un stock initial y, par une fonctionnelle

$$f(y) = \inf_{z \geq y} \left\{ v(y,z) + \alpha \int_0^z f(z-x) d\mathbb{F}_D(x) \right\}, \tag{10.6}$$

où $v(y,z)$ est le coût de commande au point de commande z. Celle-ci est établie dans le cas de stationnarité et d'indépendance, ce qui signifie que la suite des variables aléatoires représentant le processus des demandes sont indépendantes et identiquement distribuées dont la distribution commune est donnée par $\mathbb{F}_D$. L'ensemble $\overline{\mathcal{H}}$ des règles admissibles contient des règles qui contrôlent une quantité positive ou ne contrôlent absolument rien. Dans [98, 99], l'existence et l'unicité des solutions pour de telles fonctionnelles a été démontrée. Notons que dans la pratique, de simples structures pour les règles de contrôle sont préférables à des solutions numériques.

D'un autre côté, DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ ont étudié la règle de contrôle de type (s, S) mais seulement dans le cas statique dans une seule période d'intervalle de temps, un coût fixe de stockage et l'habituel coût de commande [98]

$$v(y,z) = p[1 - \mathbb{F}_D(z)] + cz + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } z = y, \\ K & \text{si } z < y. \end{array} \right\}. \tag{10.7}$$

Dans [98, Chapitre 2, §5], un exemple est exhibé où une règle optimale n'est pas de type (s, S). Cependant, pour un même coût $v(y,z)$ donné par(10.7), des conditions suffisantes d'optimalité pour une règle de type (s, S) peuvent être trouvées caractérisant la fonction de répartition des demandes $\mathbb{F}_D$ [97]. Ainsi, la même idée a été reprise par KARLIN pour une structure de coût plus générale et pour le cas dynamique. En utilisant la théorie des jeux, il considéra la structure des modèles de la programmation dynamique où il réussit à réduire le cas dynamique au cas statique. Il a pu établir des conditions suffisantes pour que la politique (s, S) soit optimale pour les modèles dynamiques AHM dans le cas des densités du processus de demandes est de type PÓLYA telles que la distribution Gamma, la distribution Normale tronquée, et les coûts du stock en main et de commandes sont purement de type linéaire (cf. [16, Chapitre 8 et 9] et [175]). D'un autre côté, SCARF détermina des conditions d'optimalité de la politique de commande de type (s, S) dans le cas dynamique. Les conditions qu'il établit ne dépendent pas explicitement de la distribution des demandes mais de la moyenne du coût par période qu'il appelle la K-convexité [253]. L'analyse présentée dans l'article [98, 99] est considérée comme une continuité du travail effectué dans [17], en considérant le cas d'une seule période ou une infinité de périodes d'intervalles de temps. Par ailleurs, il considéra le cas d'un nombre fini d'intervalles de temps, l'inter dépendance des demandes dans différents intervalles de temps, des demandes simultanées pour différents articles et autres. Récemment, il montra l'optimalité de la politique (s, S) lorsque les ventes sont faites d'une façon discrète et montra une nouvelle propriété de la K-concavité de la fonction coût [252].

BELLMAN, GLICKSBERG et GROSS trouvent un ensemble de fonctionnelles de type (10.6) comme un outil important pour la modélisation. Ainsi, ils ont étudié un nombre de telles fonctionnelles et ont pu déterminé non seulement l'existence, l'unicité et la convergence des approximations successives, mais aussi la structure de la politique (cf. [39]). La programmation dynamique utilisée est simple dans le cas déterministe, alors que le cas stochastique s'avère plus délicat dans le cas des processus markovien de décision [38]. Ainsi, une approche formalisée a été proposée

par BLACKWELL dans le cas d'un espace fini en 1962 et pour des espaces généraux en 1965 dans le cas stationnaire [44, 43]. Les modèles dynamiques non stationnaires généralisant les travaux de DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ, qui incluent le cas où la distribution des demandes n'est pas complètement connue, sont développés par HENDERER [150].

10.5 Problème de stabilité dans les modèles de gestion des stocks

En ce qui concerne l'analyse de stabilité pour les problèmes de gestion des stocks, il s'est posé pour la première fois par BOYLAN en 1969 [56]. L'approche qu'il considéra est liée au concept de continuité de l'équation du stock optimal relativement à un ensemble de paramètres. Plus précisément, il montra que la solution de l'équation du stock optimal donnée par une équation fonctionnelle de type (10.6) où $v(y,z) = \mathrm{g}(z) + \mathrm{h}(z-y)$, c'est-à-dire

$$f(y) = \inf_{z \geq y} \left\{ \mathrm{g}(z) + \mathrm{h}(z-y) + \alpha \int_0^z f(z-x) d\mathbb{F}_D(x) \right\}$$

dépend d'une façon continue des paramètres g, h, α et $\mathbb{F}_D$. Dans ce cas, $f(y)$ représente le coût moyen stationnaire optimal du stock dans une période avec un stock initial y. Par ailleurs, la fonction g dénote le coût de stockage ou de perte en cas de rupture, h représente le coût de commande, α un facteur d'escompte et $\mathbb{F}_D$ représente la fonction de répartition des demandes.

Cependant, la complexité des modèles de gestion des stocks a fait resurgir plusieurs approches pour l'étude de la stabilité de ce types de modèles. En 1994, FU et HU ont étudié la récurrence au sens de HARRIS pour les systèmes de gestion des stocks de type (s, S) avec un délais de livraison aléatoire où une analyse de la sensibilité de ce type de systèmes a été abordée [118]. À la même période, GLASSERMAN et TAYUR étudièrent la sensibilité de la capacité de production dans les systèmes de production et de gestion des stocks [127].

L'utilisation de certaines métriques probabilistes pour l'étude de la stabilité des modèles de gestion des stocks a fait l'objet en 1996 d'un travail de BULINSKAYA [62]. Notons que dans cet article, l'auteur a considéré un modèle à temps discret dont les processus de demande et d'approvisionnement sont tous les deux aléatoires.

GLASSERMAN a obtenu des bornes de certaines approximations asymptotiques pour le niveau critique du stock S^* [126].

Quant à De KOK et INDERFURTH, ils ont montré comment le plan de stabilité est affecté par les paramètres de contrôle si les politiques de contrôle de type (s, S), (s, nQ) et (R, S) sont considérées (appliquées) [194]. Ils ont montré que le point de commande s n'influe pas sur la stabilité alors que la taille des paramètres Q, $D = S - s$ et R peuvent avoir un impact considérable sur la nervosité du système relativement à la perturbation qui peut survenir sur le niveau des demandes dans chaque cycle de planification. Cependant, cette influence devient un peu différente en utilisant des mesures de sensibilité différentes lorsque on considère le point de lancement de la commande ou les déviations des quantités de commandes. D'autre part, CHEN et ZHENG ont montré que le coût de stock dans un modèle (R, s, S) est relativement insensible aux changements de $D = S - s$ [70]. L'analyse de la sensibilité de certaines approximations du niveau du stock, dans les systèmes à revue continue de type (Q,r) pour le cas des modèles à produits périssables, a été abordée par CHIU (1999) [75]. Notons que dans ce type de systèmes, le paramètre Q dénote la quantité à commander et r le point de commande.

Par ailleurs, la recherche d'une stratégie de gestion dans un horizon fini pour les modèles de gestion des stocks, soulève le problème de la sensibilité des performances du système relativement à la perturbation des décisions planifiées concernant les cycles de commandes. Cette sensibilité s'appelle nervosité du plan du système. Une comparaison entre les plans de stabilité sous les politiques (s,S) et (s,nQ) a été menée par HEISIG en 2000 [148]. Cette analyse constitue une continuité de son article paru en 1998 [149]. Il montra analytiquement comment le plan de stabilité, concernant les déviations des commandes planifiées dans toutes les périodes, pour un horizon de stabilité donné, est affecté par l'utilisation des politiques de contrôles (s,S) et (s,nQ). Plus précisément, il a établi que le point de commande s n'affecte pas la stabilité alors que la taille déterminant les paramètres $D = S - s$ et Q, ainsi que le niveau d'incertitude ont un impact considérable [148].

La théorie de perturbation n'a été considérée que très récemment par BULINSKAYA (1996) [62]. Ainsi, BULINSKAYA (2001) considéra de petites perturbations aléatoires, relativement à une métrique probabiliste pour l'étude de la stabilité de certains systèmes de gestion des stocks [61]. Notons aussi l'analyse globale que l'auteur a considéré en 2004 où il a étudié les différents ordres stochastiques dans les modèles de gestion des stocks [63]. Enfin notons le travail très récent de MOUHOUBI et D. AÏSSANI [221], et RABTA et AÏSSANI [235, 236]. Ils ont montré l'applicabilité de la méthode de stabilité forte pour l'analyse des systèmes de gestion des stocks. Ces deux derniers auteurs ont analysé la stabilité du niveau du stock en main dans les systèmes purs de gestion des stocks de type (R,s,S) avec délai de livraison nul [234, 237, 235, 236]. Cependant, leurs analyse ne concernait que les systèmes décrits par des chaînes de Markov finies contrairement à l'analyse faite par les deux premiers auteurs MOUHOUBI et D. AÏSSANI [221]. En effet, ils ont considéré des systèmes mixtes de production et gestion des stocks où le délais de livraison est aléatoire. Ceci les ramana à analyser des processus à espace d'états infini.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a tenté de donner les éléments indispensables pour la compréhension des systèmes de production et de gestion des stocks. De plus, l'origine historique du problème de stabilité dans les modèles de gestion des stocks et de production a été présentée. Les récents travaux concernant ce type de problèmes a été abordé. À cet effet, le chapitre 11 et 12 seront consacrés à l'analyse de l'aspect qualitatif et quantitatif de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte du processus de déficit dans deux modèles $\mathfrak{F}_3$ et $\mathfrak{F}_4$. Notons que $\mathfrak{F}_3$ est le modèle perturbé du modèle $\mathfrak{F}_4$ après perturbation de sa structure liée à sa décision de satisfaction des commandes qui arrivent au cours d'une période de production. De plus, pour les deux modèles, la perturbation concerne la distribution du processus des demandes.

Université A. Mira – Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle
Master 2

Module T.A.G.S
(Techniques Avancées de Gestion de Stock)

Travaux Dirigés n° 1
2012/2013

Problème:

On considère un modèle de gestion de stock du type (s,S) tel qu'aux dates t_n (n >=1) on observe l'état du stock X_n.

Lorsque $X_n \leq s$, on passe une commande de manière à ramener le stock au niveau S. Sinon, on ne passe aucune commande. Les délais de livraison sont supposés négligeables.

Durant la période (t_n, t_{n+1}), la demande est une variable aléatoire entière D_{n+1}. On suppose que les variables aléatoires D_n sont mutuellement indépendantes, identiquement distribuées, avec

$$a_k = \Pr\lfloor D_n = k \rfloor \quad (k = 0, 1, 2, ...).$$

a) Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène. Calculer sa matrice de transition et étudier son comportement asymptotique.

b) Sachant qu'à une date donnée le niveau du stock est égal à i ($0 \leq i \leq S$), calculer le nombre moyen de périodes jusqu'à l'épuisement du stock (on ne cherchera pas à résoudre explicitement le système).

c) Le coût de stockage est C_1 par unité de marchandise et par période (toute période commencée est due en entier). Le coût de pénurie est C_2 par unité de marchandise. Le coût d'une commande de quantité x est $C_3 + C_4$ x, si x > o, nul si x = o. Le revenu est v par unité vendue. Etablir, en régime stationnaire, l'expression du revenu moyen par période γ (exprimé en fonction de s, S, (α_k), π_i). (On pourra d'abord calculer le revenu r(j , k) d'une période (t_n, t_{n+1}), sachant $X_n = j$ et $D_{n+1} = k$, puis lever les conditions sur k et enfin sur j).

d) Application numérique (pour a) , b) , c)).

Loi de D :

K	0	1	2	3	4	5	6	$k \geq 7$
Pr (D=k)	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0

$C_1 = 5$; $C_2 = 10$; $C_3 = 10$, $C_4 = 5$, $v = 20$.
Comparer les deux politiques (s=1 ; S=3) et (s=2 ; S=4).

Université A/Mira Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle
Master 2

Module **T.A.G.S.**
(Techniques Avancées de Gestion de Stock)

Travaux Dirigés n° 2
2012/2013

Exercice 1 :

La demande journalière d'un certain produit est de 1600 unités. On commande au début de chaque période (de longueur T) une quantité Q de sorte à satisfaire complètement la demande et avoir un stock nul à la fin de la période. Le coût de stockage est de 0,05 DA par article et par jour. Le prix d'achat est de 45 DA par unité. De plus, un coût fixe de 1000 DA est encouru pour chaque commande.

Calculer la quantité de commande optimale ainsi que la période de réapprovisionnement correspondante.

Exercice 2 :

Considérons le modèle de gestion des stocks suivant. On achète une quantité Q d'un produit occasionnel destinée à la revente durant une seule période pour satisfaire une demande aléatoire D. Tout article non vendu à la fin de la période est soldé. Considérons les paramètres suivants :

C_o : coût de liquidation (d'articles non vendus) par unité.
C_u : coût de pénurie par unité.

Donner l'expression du coût total moyen ainsi que la quantité de commande Q^* qui le minimise, dans les cas suivants:

- La demande D suit une loi uniforme $U(\alpha, \beta)$.
- La demande D suit une loi exponentielle $E(\lambda)$.

Exercice 3 :

Soit le modèle de gestion des stocks mono-produit mono-echelon à revue périodique de type (R,s,S). L'état du stock est inspecté aux instants $t_n = nR$, ($n=0,1,2,...$ et $R>0$ constant). Si le niveau du stock en main au moment de la revue t_n est inférieur à s, on commande suffisamment d'articles pour atteindre le niveau S. Les commandes arrivent immédiatement. Soit X_n la quantité en stock à la fin de la période n (avec $X_0 = S$)

Supposons que les clients arrivent suivant un processus de Poisson et notons par N_i la variable aléatoire donnant le nombre de clients arrivés durant la période de temps i de longueur R. Le $j^{\text{ème}}$ client demande une quantité aléatoire ξ_j (les ξ_j sont i.i.d).

- Donner l'expression de la demande totale D_i durant chaque période i (D_i suit alors une loi de Poisson composée).
- Montrer que dans ce cas, $X=(X_n)_{n>=0}$ est une chaîne de Markov.
- En posant $a_k = P(D_1 = k)$, écrire la matrice de transition de X et montrer qu'elle admet une distribution stationnaire unique (sans la calculer).

REFERENCES

[1] Aïssani Djamil et Rabta Boualem, *Techniques Avancées de Gestion de Stock.* Cours de Master 2, Modélisation Mathématique et Techniques de Décision, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Année 2010/2011.

[2] Belkacem Salem et Bensalama Nassima, *Gestion des Stocks des Produits Finis au niveau de l'Entreprise « Les Moulins de la Soummam » Sidi Aïch SPA*, Mémoire d'Ingéniorat, Département : Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Septembre 2006 .

[3] Bordjah L. et Bedjaoui M., *Gestion Optimale des Réservoirs du Réseaux Hydraulique de la Ville de Sétif (Algérienne des Eaux).* Mémoire d'Ingéniorat, Département : Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Septembre 2004 (co-promoteur M. Bouraine).

[4] Bouhadj D. et Dib N., *Maintenance et Gestion des Stocks des Pièces de Rechange au sein de l'Entreprise Transbois.* Mémoire d'Ingéniorat, Département : Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Septembre 2004 (co-promoteur B. Rabta).

[5] Breton M. and Zaccour G., *La Gestion des Stocks*, CETAI, 1994.

[6] Dahmani B., *Gestion optimale des réservoirs du réseau hydraulique de la ville de Béjaïa.* Mémoire d'Ingéniorat, Département d'Hydraulique, I.N.E.S de Béjaïa, Juillet 1992.

[7] Frenk J., *Inventory control*, Eramus University, Rotterdam, 2002.

[8] Haddad S., Meftaly S., *Optimisation du parc de stockage des hydrocarbures au niveau d'un terminal marin.* Mémoire d'Ingéniorat, Département : Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Juin 1998 (co-promoteur S. Adjabi).

[9] Iglehart D., *Dynamic programming and stationary analysis of inventory problems, multistage inventory models and techniques.* In H. Scarf and all., Stanford University Press, 1963.

[10] Lyonnet P., *La Maintenance : Mathématiques et Méthodes.* T.E.C. et DOC., 2000.

[11] Martel A., *Techniques et Applications de la Recherche Opérationnelle*, Gaëtan Morin Ed., 1979.

[12] Moors J.J.A. and Strijbosch L.W.G., *Exact fill rates for (R,s,S) inventory control with Gamma distributed demand*, Tilburg University, 2001.

[13] Mouhoubi Zahir, *Bornes de Perturbation des Caractéristiques Transitoires et Stationnaires des Chaînes deMarkov à Espace de Phase Général. Application aux Systèmes avec Impatience et aux Modèles de Production et de Gestion de Stocks.* Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, décembre 2010.

[14] Rabta Boualem, *Nouvelles Conditions et Nouvelles Estimations de la Stabilité des Chaînes de Markov. Application aux Modèles de Stocks.* Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, Mai 2006.

[15] Vasquez F. and Cepeda M., *The phantom SPA Method: an inventory problem revisited*, Phoenix, 1999.