



Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Béjaïa, Faculté de Technologie,
Laboratoire de Technologie des Matériaux
et Génie des Procédés, LTMGP



Université Paris-Est Marne-la-Vallée,
Laboratoire de Modélisation et Simulation
Multi-Echelle (MSME),
UMR 8208 CNRS

THESE

Préparée dans le cadre de convention de co-tutelle pour l'obtention du diplôme de

Docteur en Sciences de l'Université de Béjaïa
Spécialité : Génie - Civil. Option : Matériaux et Structures

et de

Docteur de l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée
Spécialité : Génie - Civil

Titre

Contribution à la modélisation numérique de la réponse sismique des ouvrages avec interaction sol-structure et interaction fluide-structure

Application à l'étude des barrages poids en béton

Présentée par

Abdelghani SEGHIR

Soutenue publiquement le 22 Novembre 2010 devant le jury composé de

DAHMANI Abdelnasser	Président	Professeur	Université de Béjaïa
TAHAKOURT Abdelkader	Directeur de thèse	Professeur	Université de Béjaïa
BONNET Guy	Directeur de thèse	Professeur	Université Paris-Est
KADRI Mohamed	Rapporteur	Maître de conférences HDR	Université de Boumerdes
NAIT ABDELAZIZ Moussa	Rapporteur	Professeur	Université Lille 1
SIAD Larbi	Examineur	Professeur	Université de Reims

Route de Targua Ouzemmour, 06000, Béjaïa, Algérie.

05 Boulevard Descartes, Champs-Sur-Marne, 77454, Marne-la-Vallée CEDEX 2, France.

*A ma femme bien aimée : sans son soutien permanent, cette thèse n'aurait jamais vu le jour.
A mon adorable fils qui a grandi en même temps que cette thèse : j'espère pouvoir lire la sienne.*

Remerciements

Le présent manuscrit met fin à une longue période dans laquelle je partageais mon temps entre mes travaux de doctorat et l'exercice de mes tâches pédagogiques. Durant cette période particulièrement difficile, pour moi comme pour tous mes collègues inscrits en thèse, j'ai appris que le travail permanent, la volonté de faire, la rigueur, la persévérance, ... toutes ces qualités ne sont pas suffisantes pour mener à terme une thèse de doctorat tout en assurant une fonction d'enseignant à plein temps. Mais, la curiosité que provoque la trouvaille d'une idée qu'on essaie à tout prix de tester, la satisfaction que donne un résultat numérique ou une courbe de bonne qualité, le plaisir d'une discussion riche et passionnante avec un ami ou un collègue intéressé, les critiques d'un directeur de thèse qui attire l'attention ou soulève un questionnement, les encouragements et le soutien moral de personnes bienveillantes ... tout cela pousse à publier, à montrer et à partager, puis donne envie de rédiger et de terminer. Plus encore, cela maintient l'esprit de recherche et ouvre de grandes perspectives. Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à cet aboutissement trouvent ici mes remerciements, les plus sincères.

Le travail effectué durant cette période s'inscrit dans le cadre de cotutelle de thèse entre l'université A. Mira de Béjaïa et l'université Paris-Est, Marne-la-Vallée. Il a été dirigé par le Professeur Abdelkader Tahakourt et le Professeur Guy Bonnet, je les remercie vivement et leur témoigne de ma plus grande gratitude.

J'ai été continuellement soutenu et encouragé par Mr Tahakourt, il m'a fait découvrir en lui un homme très sage, généreux et très serviable. Il a toujours été disponible malgré son emploi du temps souvent très chargé. Je le remercie non seulement pour la co-direction et le suivi de cette thèse, la lecture et les corrections du manuscrit, ses critiques et conseils, mais aussi, pour tous les autres projets de recherche que nous avons réalisés.

Je dois à Mr Bonnet mon initiation à la BEM, je lui suis très reconnaissant pour m'avoir reçu à plusieurs reprises au laboratoire MSME, pour son hospitalité, pour toutes les corrections et le suivi continu de ma thèse, pour toutes les discussions et réflexions que nous avons eues notamment lors du développement de la formulation symétrique. Je ne peux trouver les mots qui peuvent exprimer ma gratitude envers lui pour m'avoir associé à cette nouvelle idée.

Mes plus sincères remerciements vont également aux membres du jury, Mr Dahmani, Mr Kadri, Mr Nait Abdelaziz et Mr Siad, qui ont accepté d'examiner, de lire et de commenter cette thèse. Leurs critiques et remarques me seront certainement d'un grand apport. Je leurs suis très reconnaissant pour leurs déplacements à Béjaïa, pour avoir donné de leurs temps, et pour les discussions et le débat très riches que nous avons eus durant et après la soutenance.

Finalement j'adresse un grand merci à mes amis et collègues, en particulier Ali Bereksi, Djamel Boumezrane, Hamid Becheur, Hamou Belhoucine et Abderrahmane Hammouche. Je n'oublierai pas l'équipe avec laquelle je trouve toujours grand plaisir à travailler, ces étudiants qui sont devenus collègues, amis et petits frères : Lyes Ramdani, Nouredine Belhamdi, Abdelhalim Bourouba, Riad Attal et Redouane Bendahmane.

Résumé :

La modélisation des problèmes d'interaction sol-structure et fluide-structure couvre plusieurs domaines de recherche très actifs qui traitent une multitude d'aspects tels que la géométrie non bornée du sol et dans certains cas de fluide stocké, les effets dissipatifs visqueux et radiatifs, l'application du chargement sismique, le choix des variables de base, les propriétés algébriques des systèmes d'équations résultant du couplage ... etc.

Dans le présent travail, différents modèles numériques de couplage sol-structure et fluide-structure ont été examinés. Les limites de troncature géométrique du sol et du fluide ont été traitées avec des éléments infinis dont les performances ont été comparées à celles des conditions de radiations. Le problème de vibrations libres couplées des systèmes fluide-structure a été résolu en introduisant de nouvelles techniques de symétrisation efficaces. De plus, une nouvelle formulation symétrique en éléments de frontière a été proposée. Cette formulation permet de produire une matrice symétrique définie positive et aboutit ainsi à un système algébrique similaire à celui qui découle de la discrétisation en éléments finis. La matrice bâtie dite "raideur équivalente" peut facilement être assemblée ou couplée avec les matrices de la formulation en éléments finis. Toutes les applications qui ont servi soit à comparer des modèles, soit à valider les programmes développés, ont été effectuées dans le cas des barrages poids en béton. Ce cas constitue un problème de couplage fluide-sol-structure typique.

Mots clés : interaction sol-structure, interaction fluide-structure, barrage poids en béton, éléments finis, éléments de frontière, symétrisation, réponse sismique.

Abstract :

Modeling fluid-structure and soil-structure interaction problems covers several research fields dealing with multiple aspects such as : unbounded geometry of soil media and in some cases of retained fluid, viscous and radiation dissipative effects, application of seismic loading, choice of the basic variables, algebraic properties of the resulting coupled system, ... etc.

In this work, different numerical models of soil-structure and fluid-structure coupling have been studied. The truncation boundaries of the soil and of the fluid domains have been considered by using infinite elements whose performances were compared to those of radiation conditions. The problem of the free coupled vibrations of the fluid-structure systems has been solved by introducing efficient symmetrization techniques. In addition, a new symmetric boundary element formulation is proposed. It allows to produce a positive definite and symmetric matrix and therefore to conduct to an algebraic system similar to the one obtained from finite element discretization. The produced matrix called "equivalent stiffness matrix" can easily be assembled or coupled to finite element matrices.

All applications which have been done in order to compare models or to validate the developed programs were built in the case of concrete gravity dams, which constitute typical coupled fluid-soil-structure problems.

Keywords : soil-structure interaction, fluid-structure interaction, concrete gravity dam, finite elements, infinite elements, boundary elements, symmetrization, seismic response.

Table des matières

Résumé	i
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	x
Liste des symboles utilisés	xii
Introduction générale	1
I : ELASTODYNAMIQUE ET INTERACTION SOL-STRUCTURE	7
1 Modélisation de la réponse sismique de la structure et du sol	9
1.1 Introduction	9
1.2 Equations du mouvement pour la structure	9
1.3 Conditions aux limites	11
1.4 Forme variationnelle des équations du mouvement	12
1.5 Discrétisation des équations du mouvement en éléments finis	12
1.6 Equations de mouvement du sol - Equations d'ondes	15
1.7 Equation de propagation d'onde unidimensionnelle dans un matériau viscoélastique	17
1.7.1 Résolution dans le domaine fréquentiel	18
1.8 Taille des éléments finis et pas d'intégration temporelle	22
1.9 Amortissement du mouvement dynamique	23
1.9.1 Amortissement matériel	24
1.9.2 Amortissement radiatif - Frontières absorbantes	31
1.10 Conclusion	33
2 Interaction sol-structure	35
2.1 Introduction	35
2.2 Modélisation à l'aide de l'impédance de fondation	36

2.3	Méthode globale	39
2.3.1	Méthode à déconvolution du mouvement sismique	39
2.3.2	Méthode de déplacement uniforme ajouté	41
2.3.3	Méthode de réduction de domaine	43
2.4	Méthode de sous structuration	45
2.5	Application	48
2.6	Conclusion	54
 II : PRESSIONS HYDRODYNAMIQUES		56
3	Modélisation du fluide en éléments finis	57
3.1	Introduction	57
3.2	Equations du mouvement	57
3.2.1	Formulation en pression	58
3.2.2	Formulation mixte en pression - potentiel des déplacements	59
3.3	Conditions aux limites	60
3.3.1	Contour complet	61
3.3.2	Condition à l'interface fluide - structure	61
3.3.3	Condition à la surface libre	62
3.3.4	Condition sur la surface en fond de réservoir	62
3.3.5	Condition à la limite sur la surface de troncature	65
3.4	Solutions analytiques simplifiées pour le cas des réservoirs de barrages	66
3.5	Condition de radiation	67
3.6	Discrétisation en éléments finis	70
3.6.1	Discrétisation de la formulation en pression	70
3.6.2	Discrétisation de la formulation mixte	72
3.7	Traitement de la troncature géométrique avec les éléments infinis	74
3.8	Validation	75
3.9	Conclusion	80
4	Nouvelle formulation du fluide en éléments de frontières	83
4.1	Formulation en équations intégrales de frontière	83
4.1.1	Solutions fondamentales et dérivées	84
4.2	Nouvelle formulation symétrique des équations intégrales de frontière	86
4.2.1	Potentiel de simple couche	86
4.2.2	Fonction d'énergie potentielle de frontière	87

4.2.3	Symétrie de l'opérateur d'énergie	89
4.2.4	Discrétisation en éléments de frontière de la formulation symétrique	91
4.2.5	Calcul des intégrales élémentaires	93
4.3	Validation de la formulation symétrique	109
4.4	Conclusion	110

III : COUPLAGE HYDROÉLASTIQUE 111

5 Couplage fluide - structure 113

5.1	Introduction	113
5.2	Système couplé fluide-structure	114
5.3	Symétrisation du problème des vibrations libres de la formulation en pression	115
5.3.1	Technique utilisant l'inversion des matrices fluides	116
5.3.2	Technique utilisant l'inversion de la matrice raideur fluide	116
5.3.3	Technique utilisant l'inversion de la matrice de rigidité de la structure	117
5.3.4	Technique utilisant l'inversion de la matrice de masse du fluide	118
5.3.5	Technique utilisant l'inversion de la matrice de masse de la structure	119
5.4	Etude d'un cas de système couplé barrage - réservoir	119
5.4.1	Modèles numériques utilisés	121
5.4.2	Analyse modale	122
5.4.3	Analyse de la réponse fréquentielle	124
5.4.4	Réponse temporelle	126
5.4.5	Effet de la compressibilité	129
5.4.6	Performances des méthodes de symétrisation	132
5.5	Conclusion	135

6 Couplage fluide - sol - structure 137

6.1	Introduction	137
6.2	Système matriciel couplé	137
6.3	Effet de la flexibilité du sol sur la réponse du système barrage-réservoir	137
6.4	Etude du cas du barrage de Oued Fodda	140
6.5	Conclusion	145

Conclusion générale	147
ANNEXES	149
A Intégration numérique	151
A.1 Quadrature Gauss-Legendre	154
A.2 Quadrature Gauss-Laguerre	155
A.3 Quadrature Gauss-Log	156
B Solutions analytiques des pressions hydrodynamiques dans les réservoirs de barrages	159
B.1 Solution de Westergaard	159
B.2 Solution de Chopra	160
B.3 Solution de Chakrabarti et Chopra	163
B.4 Solution de Humar et Roufaiel	164
B.5 Solution de Lee et Tsai	164
C Formulation des éléments infinis	165
C.1 Approche directe	165
C.1.1 Choix des fonctions de décroissance	166
C.1.2 Intégration des fonctions de forme	168
C.2 Approche inverse	170
D Mise en œuvre de la formulation BEM	173
E Programme FEMAT	181
Bibliographie	184

Table des figures

1.1	Géométrie d'un barrage et notation des conditions aux limites	12
1.2	Schématisation de la propagation d'onde dans une couche de sol	18
1.3	Schématisation de la propagation d'onde dans un dépôt de sol multicouches	21
1.4	Fonction de transfert $h(t)$ dans le domaine temporel	27
1.5	Evolution du taux d'amortissement de Rayleigh	29
2.1	Schématisation de l'interaction sol-structure	35
2.2	Modèle simplifié d'interaction sol-barrage [70]	38
2.3	Modélisation de l'ISS par le méthode globale [104]	40
2.4	Méthode de réduction de domaine - Notations	44
2.5	Sous-Structure	46
2.6	Géométries et maillages types utilisés pour la modélisation de l'interaction sol-barrage	48
2.7	Accélérogrammes enregistré en champ libre et calculé en profondeur à 300m	49
2.8	Fonction de transfert de la couche et spectres des accélérations en surface et en profondeur	50
2.9	Variations du déplacement horizontal relatif en crête du barrage	51
2.10	Accélération totale en champ libre et accélération en bord de maillage pour le cas avec ISS	52
2.11	Variations de la contrainte maximale au pied amont du barrage	53
2.12	Variations de la contrainte minimale au pied amont du barrage	53
2.13	Prise en compte de l'amortissement radiatif : Eléments infinis / CASTEM	54
2.14	Prise en compte de l'amortissement radiatif : Eléments infinis / Lysmer	55
3.1	Géométrie du réservoir - notations des bords	61
3.2	Fluctuations de surface libre	63
3.3	Condition aux limites sur le fond	63
3.4	Modèles du réservoir	75
3.5	Modes propres de fluctuation de la surface libre	77

3.6	Comparaison entre le modèle d'éléments finis (EF) et la solution exacte	77
3.7	Comparaison entre le modèle de couplage éléments finis - éléments infinis et solution exacte	78
3.8	Comparaison entre la solution exacte et l'opérateur AMOR de CASTEM	78
3.9	Pression maximale normalisée par la pression hydrostatique	79
3.10	Fluctuations de la surface libre	80
4.1	Domaine et son complémentaire	86
4.2	Domaine réel et domaine extérieur fictif	88
4.3	Cas régulier	95
4.4	Exemple de fonction à intégrer	97
4.5	Cas de nœuds communs entre éléments	98
4.6	Cas de singularité YZ : élément contenant \mathbf{y} et \mathbf{z}	99
4.7	Cas de singularité XZ : élément contenant \mathbf{x} et \mathbf{z}	103
4.8	Convergence Gauss-Log	108
4.9	Géométrie et définition du problème de validation	109
4.10	Solutions sur le bord gauche et le bord bas	110
5.1	Géométrie du système barrage - réservoir	120
5.2	Réponse fréquentielle du barrage avec et sans masse ajoutée	125
5.3	Déplacements en crête du barrage	125
5.4	Accélérations en crête du barrage	126
5.5	Coefficient de pressions hydrodynamiques à la base	126
5.6	Enregistrement des accélérations sismiques du Taft (S69E)	127
5.7	Réponse temporelle des déplacements et accélérations en crête	127
5.8	Réponse temporelle des déplacements en crête du barrage	128
5.9	Histoire de réponse temporelle des accélérations en crête du barrage	128
5.10	Histoire de réponse temporelle des pressions au pied amont du barrage	128
5.11	Distribution des pressions hydrodynamiques maximales sur le parement amont du barrage	128
5.12	Modes propres du système couplé : Déformée - Pression. Cas de fluide compressible	130
5.13	Modes propres du système couplé : Déformée - Pression. Cas de fluide incompressible	131
5.14	Effet de la compressibilité du fluide sur les déplacements du barrage (Modèle FE-IE)	132
5.15	Effet de la compressibilité du fluide sur les pressions au fond du barrage (Modèle FE-IE)	132
5.16	Déplacements en crête évalués avec CASTEM et FEMAT sans traitement de la troncature	133

5.17 Pressions au fond évaluées avec CASTEM et FEMAT sans traitement de la troncature	133
5.18 Déplacements en crête évalués avec CASTEM (AMOR) et FEMAT (FE-EI) . . .	133
5.19 Pressions au fond évaluées avec CASTEM (AMOR) et FEMAT (FE-EI)	134
5.20 Demandes en ressources système : temps d'exécution et mémoire de stockage . .	134
5.21 Dispersion des composantes des matrices couplées	135
6.1 Effet de la flexibilité du sol sur la réponse à l'accélérogramme de Taft	138
6.2 Effet de la flexibilité du sol sur la réponse à l'accélérogramme de Loma Prieta . .	138
6.3 Effet de la flexibilité du sol sur la distribution de la pression	139
6.4 Effet de la flexibilité du sol sur les fluctuations de la surface libre	139
6.5 Effet de l'inclinaison du fond sur les déplacements	139
6.6 Effet de l'inclinaison du fond sur les pressions	140
6.7 Enregistrements du séisme de Boumerdès de 2003 à la station de Keddara	141
6.8 Spectres de Fourier et spectre d'accélération de l'enregistrement de Keddara . . .	141
6.9 Déplacement en crête et contrainte au pied du barrage	142
6.10 Effet de l'IFS et de l'ISS sur les déplacements en crête	142
6.11 Effet de l'IFS et de l'ISS sur les pressions au pied du barrage	143
6.12 Effet de l'IFS et de l'ISS sur les pressions	143
6.13 Effet de l'IFS et de l'ISS sur les contraintes au pied du barrage	143
6.14 Effet de la composante verticale sur les déplacements en crête du barrage	144
6.15 Effet de la composante verticale sur les contraintes au pied du barrage	144
6.16 Effet de la composante verticale sur les pressions au pied du barrage	145
6.17 Effet de la composante verticale sur la distribution des pressions sur le parement du barrage et les fluctuations de la surface libre	145
C.1 Élément infini : approche directe	166
C.2 Élément infini : approche inverse	170

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques des ressorts équivalents d'une semelle rigide circulaire sur un milieu élastique isotrope et homogène	37
2.2	Dimensions et propriétés matérielles du barrage de Pine Flat	49
2.3	Périodes de vibrations libres (sec.) du barrage avec et sans ISS	50
4.1	Exemple d'intégration numérique d'un cas régulier	97
4.2	Erreur (%) de l'intégration numérique d'un exemple de singularité YZ	102
5.1	Dimensions et propriétés matérielles du barrage de Pine Flat	120
5.2	Périodes (en secondes) du barrage seul et du système barrage-réservoir	122
5.3	Taux de participation modale (%)	123
5.4	Effet de la compressibilité sur les périodes propres du système barrage-réservoir	130
6.1	Caractéristiques géométriques et mécaniques du barrage de Oued Fodda	140
6.2	Périodes propres (sec.) du barrage de Oued Fodda	141
A.1	Quadrature de Gauss-Legendre : $w(x) = 1$	154
A.2	Quadrature de Gauss-Laguerre : $w(x) = e^{-x}$	155
A.3	Quadrature Gauss-Log avec $w(x) = \ln(1/x)$	156
A.4	Quadrature Gauss-Log avec $w(x) = x \ln(1/x)$	157
A.5	Quadrature Gauss-Log avec $w(x) = x^2 \ln(1/x)$	158

Liste des symboles utilisés

Notations

c	Célérité des ondes de pressions
\mathbf{C}_S	Matrice d'amortissement de la structure
\mathbf{C}_F	Matrice d'amortissement du fluide
\mathfrak{D}	Tenseur d'élasticité
E	Module de Young
\mathbf{F}	Vecteur chargement
G	Fonction de Green
H	Dérivée normale de la fonction de Green
\mathcal{H}	Polynôme d'Hermite
k	Module de compressibilité volumique
\mathbf{K}_S	Matrice de rigidité (sol - structure)
\mathbf{K}_F	Matrice de "rigidité" fluide
\mathcal{L}	Polynôme de Lagrange
\mathbf{K}_E	Matrice de rigidité de frontière
\mathbf{M}_S	Matrice de masse de la structure
\mathbf{M}_F	Matrice de "masse" fluide
\mathbf{n}	Vecteur normale unitaire
N	Fonction de forme
p	Champ de pression continu
\mathbf{P}	Vecteur des valeurs discrètes des pressions
\mathbf{Q}	Matrice d'interaction fluide - structure
\mathbf{S}	Opérateur de dérivées de déplacements :
T	Période propres
Tr	Trace d'une matrice
\mathfrak{T}	Vecteur contrainte
\mathbf{u}	Vecteur du champ des déplacements continus
\mathbf{U}	Vecteur des valeurs discrètes des déplacements
$w(x)$	Fonction poids
w_i	poids de quadrature de Gauss
W	Fonction potentielle ou énergie
x	Abscisse d'un point
\mathbf{x}	Vecteur position dans l'espace
$_{,i}$	Dérivée partielle par rapport à x_i
$:$	Produit contracté
α	Angle entre un point et un élément de frontière
δ	Distribution de Dirac

δ_{ij}	Symbole de Kronecker (= 1 si $i = j$, 0 sinon)
∂	Opérateur de dérivée partielle
Δ	Opérateur Laplacien
ε	Tenseur des déformations
ϕ	Champ de potentiel continu
Φ	Vecteur des valeurs discrètes du potentiel
Φ	Matrice des modes propres
Γ_F	Surface délimitant le fond du réservoir
Γ_I	Surface d'interaction fluide structure
Γ_R	Surface de troncature du réservoir
Γ_S	Surface libre de réservoir
λ, μ	Coefficients de Lamé
∇	Opérateur gradient
ν	Coefficient de Poisson
Ω	Vecteur rotation
Ω_F	Domaine fluide
$\partial\Omega_F$	Frontière du domaine fluide
Ω_S	Domaine solide
$\partial\Omega_S$	Frontière du domaine solide
ρ	Masse volumique du fluide
ρ_s	Masse volumique de la structure
σ	Tenseur des contraintes
θ	Angle entre deux éléments de frontière

Abréviations

BEM	Boundary Element Method (Méthode des Eléments de Frontière)
DDL	Degrés de liberté
FE	Modèle d'Eléments Finis
IE	Modèle d'Eléments Infinis
FEM	Finite Element Method (Méthode des Eléments Finis)
FE–FE	Modèle de couplage FE barrage – FE réservoir
FE–IE	Modèle de couplage FE barrage – FE + IE réservoir
FE–BE	Modèle de couplage FE barrage – BE réservoir
IFS	Interaction fluide - structure (FSI)
IFSS	Interaction fluide - sol - structure (FSSI)
ISS	Interaction sol - structure (SSI)
MDA	Méthode de déplacement ajouté (AMM)
MRD	Méthode de réduction de domaine (DRM)
MSS	Méthode de sous structures (SSM)
net	Nombre d'éléments total du maillage
nnt	Nombre de nœuds total du maillage
Q4	Élément linéaire complet quadrilatère à 4 nœuds
Q8	Élément quadratique incomplet quadrilatère à 8 nœuds
SGBEM	Symmetric Galerkin Boundary Element Method (Méthode des Eléments de Frontière Symétrique type Galerkin)
DRBEM	Dual Reciprocity Boundary Element Method (Méthode des Eléments de Frontière à Réciprocité Duale)

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction

Tous les ouvrages de génie civil présentent un certain degré d'interaction ou de couplage avec les milieux environnants. Ce couplage peut être dû aux effets thermiques, inertiels, cinématiques, ou autres. Les structures de surface interagissent avec le sol à travers leurs fondations et le comportement des structures enterrées est conditionné par le couplage avec le rocher ou les couches de sol avoisinantes.

La flexibilité du sol d'assise modifie le comportement dynamique de la structure supportée qui, en retour, engendre des forces d'interaction qui perturbent le mouvement du sol. Ce phénomène désigné par interaction sol-structure constitue un domaine de recherche multidisciplinaire qui reste actif compte tenu de la complexité des phénomènes concernés. Les recherches, toujours en cours, visent à résoudre une multitude de problèmes rencontrés tant dans la pratique que dans la modélisation numérique [34, 39, 40, 42, 43, 104, 129, 130].

La nature non bornée du sol sous les ouvrages induit de grandes difficultés numériques dans toute modélisation qui se base sur une méthode de sous-domaines telle que la méthode des éléments finis [14, 15, 67, 68, 140]. Les domaines ouverts s'approprient mieux à un traitement par la méthode des éléments de frontière [16, 18, 24, 32, 48, 78], mais le couplage sol-structure est souvent traité à l'aide de la méthode des éléments finis qui permet de traiter le cas de comportement non linéaire. Dans ce cas, le sol doit alors être tronqué en utilisant une frontière fictive. Pour un chargement statique, le positionnement de cette frontière à une distance suffisamment grande de la structure où l'influence du chargement peut être considérée négligeable permet en principe, du point de vue pratique, de définir correctement le domaine à modéliser. Toutefois, pour un chargement dynamique, la frontière fictive peut introduire des réflexions d'ondes générées par les vibrations de la structure, ondes qui physiquement se propagent au contraire dans le sol infini sans raison d'être réfléchies. La frontière doit donc être capable de laisser propager vers l'infini toutes les ondes et d'empêcher toute réflexion parasite.

Les soucis d'économies de mémoire de stockage et de temps de calcul des ordinateurs, liés essentiellement à la taille du maillage, ont amené au développement de diverses méthodes visant l'élimination ou au moins l'atténuation des réflexions d'ondes parasites. Certaines des méthodes actuellement disponibles conduisent à des termes qui induisent une partie dissipative des équations d'équilibre dynamique du milieu de propagation, d'où la notion de l'amortissement radiatif ou de frontières absorbantes [4, 66, 84, 89, 114, 115, 121, 139, 142]. D'autres méthodes

se basent sur un couplage entre le domaine tronqué modélisé souvent en éléments finis et le reste du domaine infini qui est représenté par des éléments spéciaux comme les éléments infinis [11, 12, 19, 63, 126, 133, 135, 138, 141]. Finalement, on peut donc distinguer deux types d'amortissement dans les problèmes d'interaction sol-structure appliqués aux ouvrages de génie civil : l'amortissement matériel classique, qui peut être visqueux ou hystérétique, à prendre en compte en tout point du domaine et l'amortissement radiatif à appliquer uniquement sur les frontières fictives du sol lorsqu'il y a troncature géométrique. La représentation simultanée de ces deux effets et de celui de la structure donne un amortissement global non proportionnel.

Ces aspects font l'objet des deux premiers chapitres de la thèse qui sont dédiés à la modélisation des structures et des sols et à l'interaction sol-structure. Une courte présentation des éléments infinis, qui ont été utilisés, aussi bien pour le sol que pour le fluide, est donnée dans l'annexe C. Ces éléments sont insérés dans un programme de calcul par éléments finis développé dans le cadre de ce travail dans un esprit de programmation orientée objet [110]. Leurs performances ont été examinées en comparant la qualité des résultats obtenus par rapport à d'autres conditions de frontière disponibles dans d'autres codes de calcul par éléments finis [35]. Cette étude, qui a permis aussi de valider les programmes développés, est présentée dans le chapitre 2. La structure des programmes, quant à elle, est décrite dans l'annexe E.

Par ailleurs, le problème de l'application du chargement sismique en interaction sol-structure constitue une autre difficulté, compte tenu du fait que les ondes sismiques incidentes sont physiquement définies en milieu infini et considérées comme des ondes planes incidentes en provenance du foyer du séisme situé en profondeur et donc d'incidence verticale. Deux méthodes sont utilisées dans ce contexte ; les méthodes par sous-structuration, applicables dans le cas de comportement supposé linéaire du sol de fondation et les méthodes globales permettant de traiter le cas où le sol de fondation a un comportement non linéaire. Dans ce dernier cas, une partie du sol est modélisée par éléments finis, limitée à sa base par une surface horizontale où le mouvement sismique est appliqué. Le mouvement appliqué, inconnu a priori, est très différent de celui de la surface du sol, ou mouvement en champ libre, caractérisé par un accélérogramme qui est une donnée issue d'études géophysiques plus ou moins fines relatives au site considéré. L'obtention du mouvement appliqué à la base de la zone étudiée à partir du mouvement de surface en champ libre est nommée déconvolution. Une fois cette opération effectuée, le problème est ramené à l'étude d'un modèle, composé en partie d'éléments de sol et en partie d'éléments de structure, à la base duquel on impose le mouvement déconvolué.

L'une des variantes de la méthode globale, qui se base sur l'hypothèse de mouvement uniforme [129], permet de contourner cette étape de calcul en appliquant le mouvement enregistré sous forme de forces équivalentes qui s'exercent uniquement sur la structure. Un exposé des différentes méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure est donné dans le chapitre 2, il est suivi d'une application au cas d'un barrage poids.

Un autre aspect du présent travail concerne l'interaction fluide-structure [13, 90, 96, 139, 140].

Il est bien connu que cette interaction peut modifier fortement les caractéristiques dynamiques des structures en contact avec un fluide. Deux aspects clés doivent être pris en compte lors du développement d'un modèle numérique permettant de traiter le problème d'interaction fluide-structure. Le premier concerne, comme dans le cas du sol, les effets dissipatifs visqueux et radiatifs associés aux propriétés matérielles et aux limites du domaine, respectivement. Le second aspect est, en revanche, propre aux fluides, il concerne le choix des variables de base retenues pour la modélisation. Ce choix conditionne les propriétés algébriques du système d'équations discret résultant telles que la perte de symétrie, la présence de composantes nulles en diagonales des matrices, des matrices couplées mal conditionnées ou non définies positives ... etc.

En général, les déplacements de la structure et les pressions hydrodynamiques dans le fluide sont utilisés comme variables nodales des modèles d'éléments finis du système couplé fluide-structure. Dans le cas d'hypothèse de fluide compressible le système algébrique résultant n'est pas symétrique. Afin de rétablir la symétrie, plusieurs techniques de symétrisation ont été développées, mais pratiquement toutes utilisent l'inversion de matrices de taille importante à laquelle s'ajoute dans certains cas un changement de variables et une condensation statique. En conséquence, les matrices couplées perdent leurs structure originale de matrices bandes et creuses. Elles deviennent presque pleines et occupent un espace mémoire plus important [46, 51, 52, 92, 116, 140].

D'autres modèles utilisent deux variables pour décrire le fluide, en plus du champ de pression, une variable, représentant le potentiel des vitesses ou le potentiel des déplacements, est introduite afin de préserver la symétrie des équations couplées et du système final. D'autres formulations se basent sur la description Lagrangienne du fluide, car l'utilisation d'un champ de déplacement pour le fluide facilite énormément le traitement du couplage fluide-structure. Mais dans ces cas aussi, en plus de l'augmentation de la taille des matrices couplées, le conditionnement de la matrice globale du système est affecté et le calcul des modes propres du système complet est erroné car des modes parasites peuvent apparaître. [5, 27, 33, 86, 96, 97]

Une partie de ce travail a été consacrée à ce problème de symétrisation des systèmes fluide-structure. Deux techniques ont été développées. Leur efficacité se base essentiellement sur le concept de concentration des masses. Ce concept, souvent utilisé en dynamique des structures, est étendu, sans grande perte de précision, au cas des fluides. Il permet d'obtenir des matrices diagonales dont l'inversion ne pose aucune difficulté numérique et préserve la structure creuse originale des matrices couplées. D'importants gains en temps de calcul et mémoire de stockage ont ainsi été obtenus.

La formulation par éléments finis des équations de la dynamique du fluide a fait l'objet du chapitre 3. Dans le cas des réservoirs de barrage, il existe des solutions approchées utilisées en ingénierie qui sont applicables sous certaines conditions. Ces solutions sont rappelées en annexe B. L'une de ces solutions a servi pour la validation des parties du programme développé qui sont afférentes au fluide. Le couplage fluide-structure et l'exposé des techniques de symétrisation ont fait l'objet du chapitre 5.

Cependant, même si le problème de symétrie est résolu, la géométrie non bornée de certains cas d'interaction fluide-structure, comme les barrages-réservoirs, demeure une autre source de difficultés numériques notamment dans le cas des éléments finis. L'utilisation d'une frontière fictive, comme dans le cas des sols, munie d'une condition aux limites appropriée ou l'emploi d'éléments infinis sont des alternatives simples qui affectent toutefois la solution à fréquences élevées. Par contre, la méthode des éléments de frontière est particulièrement adaptée au traitement des milieux non bornés car elle représente exactement le comportement du domaine infini étudié, sous réserve que son comportement soit linéaire. Cette méthode est très répandue dans ce contexte et largement utilisée en acoustique et en dynamique des sols.

Toutefois, les solutions en éléments de frontières les plus simples s'obtiennent dans le domaine fréquentiel, la solution transitoire se déduisant par transformée de Fourier. C'est ce qui réduit les applications de la méthode aux cas de comportement linéaire. En outre, cette méthode présente deux caractéristiques essentielles mal appréciées. Elle induit, d'une part, des intégrales singulières, voire hypersingulières dans certaines variantes de la méthode, ce qui demande des traitements numériques et mathématiques particuliers, et d'autre part, elle produit des matrices pleines non symétriques. Cette propriété, retenue plus haut contre les modèles d'éléments finis utilisant les déplacements et les pressions comme variables de base, est un handicap par rapport aux méthodes classiques de résolution des systèmes algébriques. Plusieurs variantes de la méthode et divers schémas numériques ont été proposés afin de lever les problèmes de singularité [22, 25, 26, 26, 60, 72, 95, 117], mais afin d'améliorer les propriétés numériques du système algébrique, des formulations symétriques complètement différentes de la formulation de base ont été développées particulièrement dans le but de construire des modèles de couplage éléments finis - éléments de frontière [74, 78, 98, 136].

Dans la partie traitant le fluide du présent travail, une nouvelle formulation symétrique en équations intégrales de frontière a été développée [23, 112]. Elle fait l'objet du chapitre 4 de la thèse et les détails de sa mise en œuvre sont décrits dans l'annexe D. Cette nouvelle formulation permet d'aboutir à une matrice symétrique définie positive et produit ainsi un système algébrique similaire à celui des éléments finis. La matrice bâtie "*raideur équivalente*" peut facilement être assemblée ou couplée avec les matrices d'éléments finis. Le modèle numérique de couplage fluide-structure, utilisant cette formulation, a été appliqué avec succès au cas d'un système barrage-réservoir. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux issus d'autres modèles, ce qui fait l'objet du chapitre 5.

Finalement, le traitement du système complet fluide-sol-structure qui résulte de tout ce qui précède a fait l'objet du chapitre 6 dans lequel est présentée une étude sismique du barrage poids de Oued Fodda.

La thèse est clôturée par une conclusion générale qui retrace les grandes lignes du travail effectué et souligne les différents résultats obtenus tant du point de vue formulation et modélisation que du point de vue comportement dynamique et réponse sismique des systèmes couplés sol-barrage-réservoir.

I : ELASTODYNAMIQUE ET INTERACTION SOL-STRUCTURE

Modélisation de la réponse sismique de la structure et du sol

1.1 Introduction

Ce chapitre introductif ne comporte pas de développements originaux. Dans un premier temps, il rappelle la formulation classique par éléments finis en déplacement, utilisable pour la modélisation du sol et de la structure dans le cas de matériaux élastiques puis viscoélastiques. Dans un deuxième temps, les questions liées au traitement de l'amortissement hystérétique et aux frontières absorbantes sont traitées dans le cas de la propagation d'ondes planes, puis l'extension au cas de systèmes d'ondes plus complexes est abordé.

1.2 Equations du mouvement pour la structure

Les équations d'équilibre dynamique en termes de champ de déplacement continu \mathbf{u} d'une structure flexible, tel qu'un barrage poids, à comportement élastique soumise à un mouvement d'accélération $\ddot{\mathbf{u}}$, s'écrivent comme suit :

$$\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1.1)$$

Les indices i et j font référence à la direction spatiale et $(,j)$ désigne la dérivation par rapport à la coordonnées x_j . f_i est la composante des forces de volume agissant dans la direction i . ρ est la masse volumique du matériau constituant la structure. $\boldsymbol{\sigma}$, de composantes σ_{ij} désigne le tenseur d'ordre 2 des contraintes de Cauchy.

Les composantes du vecteur contrainte \mathfrak{T} agissant sur une surface de normale \mathbf{n} sont données par :

$$\mathfrak{T}_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.2)$$

Dans le cas où le matériau présente un comportement élastique linéaire, le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ par la loi :

$$\sigma_{ij} = \mathfrak{D}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.3)$$

où \mathfrak{D} est un champ de tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'élasticité du matériaux [7, 123]. Il est réel positif et présente différentes propriétés de symétrie. Si, de plus, le matériau est supposé isotrope, ce tenseur ne dépend que de deux paramètres et la loi de comportement élastique se

réduit à :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda e \delta_{ij} \quad (1.4)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé, et $e = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ est la trace du tenseur des déformations qui caractérise la variation relative du volume.

Le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ caractérise les variations de forme que subit un solide élastique sous l'effet des contraintes qui lui sont imposées [58]. Ses composantes sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (1.5)$$

Ces six relations produisent les neuf composantes du tenseur symétrique appelé tenseur déformation de Green.

Sous l'hypothèse des petites déformations (ou hypothèse de linéarisation géométrique), les gradients des déplacements sont considérés comme petits de sorte que leurs carrés et produits sont négligeables ($u_{k,i} \ll 1$ et $u_{k,i} u_{k,j} \ll u_{k,i}$). Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ se simplifie alors en tenseur déformation infinitésimale dont les composantes sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.6)$$

Pratiquement, pour que cette hypothèse de linéarisation soit applicable avec précision, il suffit que la rotation et la dilatation d'un segment infinitésimal reliant deux points voisins du solide soient petites. Dans les analyses dynamiques des structures, ces deux conditions sont généralement satisfaites.

Il est possible d'éliminer des équations précédentes les contraintes et les déformations et d'écrire les équations d'équilibre en fonction des déplacements uniquement. Dans le cas linéaire, la substitution de (1.6) dans (1.3), puis l'introduction de l'expression résultante dans (1.1) donne, tenant compte de la symétrie de \mathfrak{D} par rapport aux indices k et l , les équations de Navier qui s'écrivent :

$$\mathfrak{D}_{ijkl} u_{k,lj} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (1.7)$$

Ce système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre traduit la formulation en déplacements du problème d'élastodynamique sous hypothèse de linéarité géométrique et physique.

Les conditions aux limites données en terme de chargement se traduisent par un vecteur contrainte $\bar{\mathfrak{T}}$ imposé à la surface. Ces conditions sont réécrites en fonction des déplacements comme :

$$\mathfrak{D}_{ijkl} u_{k,l} n_j = \bar{\mathfrak{T}}_i \quad (1.8)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, caractérisé par les deux coefficients de Lamé λ et μ , les

équations de Navier (1.7) deviennent :

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (1.9)$$

et les conditions aux limites :

$$\lambda u_{k,k} n_i + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = \bar{\mathcal{T}}_i \quad (1.10)$$

La forme vectorielle de ces équations s'écrit comme suit :

$$(\lambda + \mu)\nabla e + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

avec $e = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$, ∇ est le vecteur gradient et $\Delta = \nabla^2$ est l'opérateur Laplacien.

1.3 Conditions aux limites

En général, en dynamique des structures, on rencontre deux types de conditions aux limites qui s'appliquent sur la frontière de la structure. Les conditions de type Dirichlet, qui correspondent au cas de déplacements imposés tel que le blocage au niveau des appuis et les encastremets, et les conditions de type Neumann, qui correspondent aux cas de contraintes imposées tel que le chargement surfacique. De ce fait, dans les modèles de calcul, les contours de domaines solides sont divisés en trois parties, une pour chacune des deux conditions et une troisième correspondant au cas de surface libre (qui correspond aussi au cas de chargement nul).

Dans le cas des structures en contact avec un fluide comme les barrages, tel qu'illustré sur la figure 1.1, les contraintes agissant sur l'interface fluide-structure sont provoquées par les pressions du fluide. Les conditions aux limites s'écrivent, en respectant les notations de la figure, comme suit :

$$\sigma_{ij}n_j = pn_i \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (1.12a)$$

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad \text{sur } \Gamma_S \quad (1.12b)$$

$$u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_U \quad (1.12c)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la frontière et p est la pression du fluide agissant sur l'interface fluide-structure Γ_I .

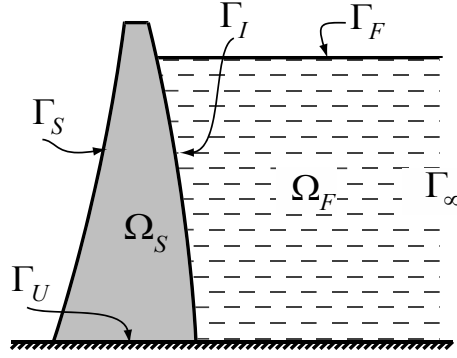


Figure 1.1 : Géométrie d'un barrage et notation des conditions aux limites

1.4 Forme variationnelle des équations du mouvement

La formulation variationnelle associée aux équations locales de mouvement (1.9) s'obtient, selon la méthode des résidus pondérés, en multipliant chaque équation i des trois équations par une fonction poids égale à la perturbation δu_i , puis en intégrant le produit sur le domaine Ω_S

$$\int_{\Omega_S} \delta u_i ((\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + f_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega_S = 0 \quad (1.13)$$

Classiquement, la forme intégrale faible de (1.9) s'écrit comme suit :

$$-\int_{\Omega_S} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\partial\Omega_S} \delta u_i \mathfrak{T}_i d\Gamma + \int_{\Omega_S} \delta u_i f_i d\Omega - \int_{\Omega_S} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (1.14)$$

Cette expression est celle du principe des travaux virtuels qui traduit l'égalité des travaux effectués par les forces d'inertie, les forces intérieures et le chargement extérieur, lors d'un déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$ provoquant des déformations $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, tel que $\delta \mathbf{u} = 0$ sur Γ_u .

L'intégrale sur $\partial\Omega_S$ est subdivisée en fonction des conditions aux limites appliquées sur le contour du solide. Dans le cas d'un barrage, la seule partie du contour qui est chargée est l'interface barrage-réservoir Γ_I et l'intégrale se réduit à :

$$\int_{\partial\Omega_S} \delta u_i \mathfrak{T}_i d\Gamma = \int_{\Gamma_I} \delta u_i p n_i d\Gamma \quad (1.15)$$

1.5 Discrétisation des équations du mouvement en éléments finis

Afin de faciliter la construction des matrices constituant le système algébrique d'équations différentielles qui décrivent le mouvement de la structure, on adopte l'écriture vectorielle des tenseurs des contraintes et des déformations. On exploitera aussi leurs symétries et on se limitera au cas

bidimensionnel.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

La relation déformation – déplacement s’écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{soit : } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} \quad (1.17)$$

Alors, la relation contrainte - déplacement devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{soit : } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u} \quad (1.18)$$

où

$$d_3 = \frac{1}{2}(d_1 - d_2)$$

d_1 et d_2 sont donnés, dans le cas de contraintes planes par :

$$d_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad d_2 = \nu d_1$$

et dans le cas des déformations planes, par :

$$d_1 = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{1 - \nu}$$

E et ν sont respectivement le module d’Young et le coefficient de Poisson du matériau constituant le corps solide. Ils sont liés aux coefficients de Lamé par

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

L’expression du principe des travaux virtuel (1.14) prend la forme compacte suivante

$$- \int_{\Omega_S} \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega_S} \delta\mathbf{u}\rho\ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega_S} \delta\mathbf{u}\mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_I} \delta\mathbf{u}\mathbf{p}\mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (1.19)$$

où \mathbf{D} et \mathbf{S} sont respectivement la matrice d’élasticité et l’opérateur des gradients des déplacements (equation (1.18)).

Il est à noter que le terme d’intégration sur Γ_I est fonction de la pression totale agissant sur

l'interface fluide-structure. Dans les études sismiques, il est préférable d'isoler la partie hydrodynamique de la partie statique et de les appliquer séparément. L'une, statique, étant connue, et l'autre, hydrodynamique, fait partie du problème couplé fluide-structure et nécessite une formulation complète du fluide, ce qui constitue l'objet des deux chapitres 3 et 4.

La forme discrète de l'équation (1.14) s'obtient par l'approximation du vecteur \mathbf{u} avec l'interpolation nodale suivante.

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \mathbf{U} \quad (1.20)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des déplacements nodaux et $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}$ est la matrice $2 \times n_{ne}$ des fonctions de forme de l'élément utilisé pour la discrétisation. La géométrie du solide est subdivisée en un ensemble d'éléments de forme géométrique simple. Chaque élément est défini par un ensemble de n_{ne} nœuds.

En substituant (1.20) dans (1.14), on obtient le système algébrique discret suivant :

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_S \mathbf{U} - \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (1.21)$$

dans lequel \mathbf{M}_S et \mathbf{K}_S sont les matrices classiques assemblées de masse et de rigidité de la structure. Leurs expressions explicites sont

$$\mathbf{M}_S = \sum_{e=1}^{N_{\Omega_S^{(e)}}} \int_{\Omega_S^{(e)}} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \rho \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (1.22)$$

$$\mathbf{K}_S = \sum_{e=1}^{N_{\Omega_S^{(e)}}} \int_{\Omega_S^{(e)}} [\mathbf{S} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}]^T \mathbf{D} [\mathbf{S} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}] \, d\Omega \quad (1.23)$$

L'exposant (e) fait référence à l'élément fini de surface élémentaire $\Omega_S^{(e)}$, et le signe somme Σ s'interprète comme l'opération d'assemblage sur l'ensemble des éléments constituant le maillage de la structure. Le vecteur \mathbf{F} contient les forces de volume extérieures telles que les forces transmises par le sol à la base de la structure.

Il est à noter que la matrice de masse cohérente telle que donnée en (1.22) est souvent remplacée par sa forme condensée telle qu'introduite dans [140] donnant la matrice diagonale suivante :

$$\mathbf{M}_S = \sum_{e=1}^{N_{\Omega_S^{(e)}}} \int_{\Omega_S^{(e)}} \rho \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \, d\Omega \quad (1.24)$$

L'introduction de la matrice de masse condensée affecte peu le comportement dynamique de la structure (lorsque le spectre de Fourier de l'excitation ne comporte pas de fréquences trop élevées) et comporte des avantages reconnus sur le plan numérique.

La matrice d'interaction \mathbf{Q} qui apparaît dans l'équation (1.26) s'obtient en discrétisant la condition aux limites (1.12a). Elle est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{Q} = \sum_{e=1}^{N_{\Gamma_I(e)}} \int_{\Gamma_I(e)} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \quad (1.25)$$

Cette matrice résulte de l'assemblage sur les éléments de la frontière $\Gamma_I = N_{\Gamma_I(e)}$ du chargement venant de la discrétisation de la pression hydrodynamique p . Cette discrétisation peut provenir d'un modèle d'élément finis ou d'éléments de frontière ou d'un autre procédé de représentation du domaine fluide en contact avec la structure.

Finalement en introduisant un amortissement de type "visqueux" dans le système (1.21), l'équation d'équilibre dynamique de la structure devient :

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_S \mathbf{U} - \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (1.26)$$

où \mathbf{C}_S est la matrice d'amortissement visqueux.

Le comportement de la structure n'est généralement pas de type visqueux, mais de type "hystérique" caractérisé par un amortissement critique ξ . Une façon d'approcher ce type de comportement est d'utiliser la matrice d'amortissement classique de Rayleigh construite par combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité :

$$\mathbf{C}_S = \alpha \mathbf{M}_S + \beta \mathbf{K}_S \quad (1.27)$$

où α et β sont des constantes fonctions des fréquences propres de vibration de la structure :

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_n} \begin{Bmatrix} \omega_1 \omega_n \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

ξ est le taux d'amortissement critique de la structure, ω_1 est la pulsation du mode fondamental et ω_n est celle du mode supérieure qui contribue principalement à la réponse. En général, on prend ξ de l'ordre de 5% et $n = 2$ ou $n = 3$. Cette forme est dite amortissement proportionnel. Elle ne constitue pas l'unique façon de représenter les effets dissipatifs du mouvement vibratoire, et la section 1.9.1 complète cette première introduction sur l'amortissement matériel dans les structures.

1.6 Equations de mouvement du sol - Equations d'ondes

Le mouvement à la surface libre d'un dépôt de sol provient dans de nombreuses situations de la propagation d'ondes de cisaillement (ondes S) à partir du rocher. En général, le dépôt se compose de plusieurs couches ayant des propriétés mécaniques distinctes.

Le concept de propagation d'onde est fondamental en élastodynamique des sols ; il permet de décrire convenablement, avec des modèles mathématiques, la transmission d'énergie à travers des couches de caractéristiques géologiques différentes, ainsi que l'atténuation par absorption ou radiation du mouvement induit.

Dans les modèles numériques simplifiés, les couches sont considérées comme horizontales et gardent un comportement élastique linéaire (voire viscoélastique) durant le calcul de la réponse. Comme approximation du comportement inélastique du sol, certains modèles se basent sur la méthode dite "linéaire équivalente". Selon cette méthode, le module de cisaillement G diminue et le coefficient d'amortissement critique ξ augmente en fonction de la déformation maximale observée lors d'un calcul linéaire de la réponse sismique. Un calcul par approximations successives permet d'obtenir de façon simple la réponse du sol en prenant en compte de façon simplifiée le comportement inélastique du sol [57]. Ce genre de modèles est très efficace pour l'évaluation de l'amplification dynamique du mouvement sismique par les dépôts de sol.

En interaction sol-structure, il faut noter, comme déjà mentionné dans l'introduction, que c'est le mouvement en champ libre à la surface du sol qui est généralement imposé et que le mouvement en profondeur doit être obtenu par "déconvolution". Souvent, un modèle unidimensionnel de propagation d'onde de cisaillement (SH) est suffisant pour mettre en œuvre ce processus de déconvolution.

L'équation de mouvement (1.11) qui régit les déplacements de la structure dans le cadre de la théorie d'élasticité linéaire isotrope s'applique aussi au cas du sol. La masse volumique, étant dans ce cas celle du sol, est désignée par ρ_s et le déplacement dû à la propagation des ondes sismiques est appelé déplacement de champ libre. En décomposant le Laplacien comme suit

$$\Delta \mathbf{U} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{U} \quad (1.29)$$

où les symboles \cdot et \wedge désignent, respectivement, le produit scalaire et le produit vectoriel, l'équation du mouvement peut être écrite sous la forme suivante

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{U} + \mathbf{F} - \rho_s \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (1.30)$$

La décomposition du champ des déplacements en deux parties facilite la résolution des équations de l'élastodynamique. Selon le théorème d'Helmholtz [9], il est toujours possible de décomposer un champ de vecteurs \mathbf{U} en la somme du gradient d'un potentiel scalaire ϕ et du rotationnel d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$.

$$\mathbf{U} = \nabla\phi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} \quad ; \quad u_i = \phi_{,i} + \psi_{k,j} - \psi_{j,k} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1.31)$$

où les deux potentiels sont continus et différentiables en tout point et où le déplacement est défini et continu. Cette décomposition transforme le problème à trois inconnus u_i , ($i = 1, 2, 3$) en un

problème à quatre inconnus ϕ et ψ_i . Une condition supplémentaire est ajoutée aux équations d'équilibre :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (1.32)$$

Une solution de (1.30), en tenant compte de (1.32), est obtenue si les potentiels vérifient les deux équations découplées suivantes :

$$\delta\phi - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\phi} = 0 \quad (1.33)$$

$$\delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

dans lesquelles :

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s} \quad (1.35)$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho_s} \quad (1.36)$$

où c_p et c_s sont les vitesses de propagations des ondes de compression (ondes primaires P) et des ondes de cisaillement (ondes secondaires S). Ces deux types d'ondes sont appelées ondes de volume. Elles se propagent à l'intérieur du volume du sol contrairement aux ondes de surface. Les ondes de compression-dilatation se propagent plus rapidement que les ondes de cisaillement.

1.7 Equation de propagation d'onde unidimensionnelle dans un matériau viscoélastique

Les mouvements horizontaux résultant de la propagation verticale d'une onde plane de cisaillement dans un milieu non borné peuvent être décrits par l'équation unidimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.37)$$

dans laquelle t désigne le temps et z la coordonnée verticale mesurée à partir de la surface du sol de masse volumique ρ_s . La variation, en fonction de la profondeur, du déplacement horizontal $u(z)$ provoque des déformations de glissement γ qui donnent naissance à la contrainte de cisaillement τ . Le sol est maintenant caractérisé par un comportement viscoélastique de type "Kelvin-Voigt". Dans ces conditions, la contrainte de cisaillement τ est reliée à γ par l'intermédiaire du module de cisaillement $G = \mu$ et du coefficient de viscosité η à l'aide de la relation suivante :

$$\tau = G\gamma + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (1.38)$$

La substitution de cette relation dans l'équation de mouvement (1.37) donne, compte tenu de $\gamma = \partial u / \partial z$, l'équation d'onde unidimensionnelle avec un terme dissipatif :

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \quad (1.39)$$

La vitesse V de propagation de l'onde de cisaillement dans le cas élastique est égale à $\sqrt{G/\rho_s}$. L'équation (1.39) peut être résolue dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel. La résolution du problème dans le domaine fréquentiel permet un traitement complètement analytique.

1.7.1 Résolution dans le domaine fréquentiel

L'équation (1.39) peut être résolue pour une onde harmonique qui se propage dans une colonne d'un dépôt de sol multicouche. Afin d'illustrer la méthode de résolution, on considère en premier lieu le cas d'un monocouche : une seule couche de sol repose sur un substratum rocheux tel que montré sur la figure 1.2. En second lieu, suivra l'extension au cas d'un dépôt multicouches.

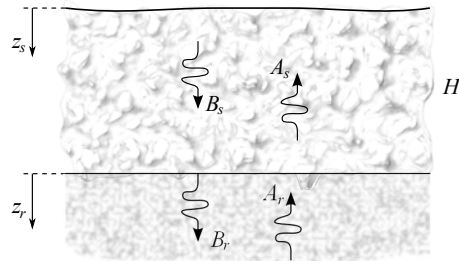


Figure 1.2 : Schématisation de la propagation d'onde dans une couche de sol

Cas d'un monocouche

En utilisant les indices s et r pour désigner la couche de sol et le rocher respectivement, les déplacements horizontaux dus à la propagation verticale le long de la coordonnée z d'une onde S harmonique dans les deux milieux peuvent s'écrire comme suit [87, 103, 106] :

$$u_s(z_s, t) = A_s e^{i(\omega t + k_s^* z_s)} + B_s e^{i(\omega t - k_s^* z_s)} \quad (1.40)$$

$$u_r(z_r, t) = A_r e^{i(\omega t + k_r^* z_r)} + B_r e^{i(\omega t - k_r^* z_r)} \quad (1.41)$$

où $i = \sqrt{-1}$ et ω est la pulsation de l'onde.

L'amplitude des ondes traversant la couche de sol de bas en haut est notée par A_s . Elle est transmise par le rocher. L'amplitude de l'onde réfléchiée par le toit de la couche (la surface libre dans le cas d'une seule couche de sol) est notée B_s . De même, l'onde incidente dans le rocher est

d'amplitude A_r et l'onde réfléchie est d'amplitude B_r .

Le nombre d'onde k^* à valeurs complexes est donné par

$$k_s^* = \frac{\omega}{V_s^*} \quad , \quad k_r^* = \frac{\omega}{V_r^*} \quad (1.42)$$

où la vitesse moyenne de propagation d'ondes de cisaillement V^* à valeurs complexes est fonction du module de cisaillement complexe G^* et de la densité ρ du milieu :

$$V_s^* = \sqrt{G_s^*/\rho_s} \quad , \quad V_r^* = \sqrt{G_r^*/\rho_r} \quad (1.43)$$

Le module de cisaillement complexe G^* fait intervenir la partie dissipative de la solution. Il peut être défini pour un matériau à comportement "viscoélastique hystérétique" par

$$G_s^* = G_s(1 + 2i\xi_s) \quad , \quad G_r^* = G_r(1 + 2i\xi_r) \quad (1.44)$$

où ξ_s et ξ_r sont les taux d'amortissement critique du sol et du rocher respectivement, supposés constants.

Compte tenu des faibles valeurs des taux d'amortissement critiques, les vitesses complexes peuvent être approchées comme suit [73] :

$$V^* = \sqrt{\frac{G(1 + 2i\xi)}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{G}{\rho}} (1 + i\xi) = V(1 + i\xi) \quad (1.45)$$

L'expression de la contrainte de cisaillement dans la couche de sol est alors :

$$\tau(z_s, t) = G_s^* \gamma(z_s, t) = G_s^* \frac{\partial u_s(z_s, t)}{\partial z_s} \quad (1.46)$$

Le fait que la contrainte de cisaillement s'annule à la surface du sol se traduit par

$$\tau(0, t) = 0 \quad \text{soit} \quad G_s^* \frac{\partial u_s(0, t)}{\partial z_s} = 0 \quad (1.47)$$

La substitution de (1.40) dans (1.47) donne après différentiation en $z_s = 0$

$$G_s^* i k_s (A_s - B_s) e^{i\omega t} = 0 \quad (1.48)$$

qui n'est vérifiée pour toutes les valeurs de ω et de t que si $A_s = B_s$.

La condition de compatibilité des déplacements et des contraintes à l'interface sol-rocher implique

$$u_s(z_s = H, t) = u_r(z_r = 0, t) \quad , \quad \tau_s(z_s = H, t) = \tau_r(z_r = 0, t) \quad (1.49)$$

La première condition donne en la substituant dans (1.40) et (1.41)

$$A_s \left(e^{ik_s^* H} + e^{-ik_s^* H} \right) = A_r + B_r \quad (1.50)$$

A partir de la seconde condition, on peut écrire, compte tenu de la définition des contraintes en (1.46) :

$$A_s i G_s^* k_s^* \left(e^{ik_s^* H} - e^{-ik_s^* H} \right) = i G_r^* k_r^* (A_r - B_r) \quad (1.51)$$

ou bien

$$\alpha_z^* A_s \left(e^{ik_s^* H} - e^{-ik_s^* H} \right) = (A_r - B_r) \quad (1.52)$$

Le paramètre α_z^* est le rapport d'impédance complexe, il est donné par :

$$\alpha_z^* = \frac{G_s^* k_s^*}{G_r^* k_r^*} \quad (1.53)$$

ou bien, en utilisant (1.43) et (1.45)

$$\alpha_z^* = \frac{\rho_s V_s (1 + i\xi_s)}{\rho_r V_r (1 + i\xi_r)} \quad (1.54)$$

En résolvant les deux équations (1.50) et (1.52), on obtient les expressions des amplitudes A_r et B_r en fonction de A_s

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{2} A_s \left((1 + \alpha_z^*) e^{ik_s^* H} + (1 - \alpha_z^*) e^{-ik_s^* H} \right) \\ B_r &= \frac{1}{2} A_s \left((1 - \alpha_z^*) e^{ik_s^* H} + (1 + \alpha_z^*) e^{-ik_s^* H} \right) \end{aligned} \quad (1.55)$$

A_r étant l'amplitude de l'onde de cisaillement incidente dans le rocher (celle de l'excitation sismique). En absence de la couche de sol, le mouvement à la surface du rocher serait $A = 2A_r$ à cause de la réflexion à la surface libre. En présence du sol, on enregistre un mouvement d'amplitude $2A_s$, la solution donne ainsi le rapport d'amplitudes des mouvements sismiques entre le rocher et le sol. Ce rapport noté $F(\omega)$ est appelé fonction de transfert de la couche du sol, elle s'exprime comme suit :

$$F(\omega) = \frac{2A_s}{2A_r} = \frac{2}{(1 + \alpha_z^*) e^{ik_s^* H} + (1 - \alpha_z^*) e^{-ik_s^* H}} \quad (1.56)$$

et peut aussi être écrite, grâce aux formules d'Euler sous la forme suivante :

$$F(\omega) = \frac{1}{\cos(k_s^* H) + i\alpha_z^* \sin(k_s^* H)} \quad (1.57)$$

Cas d'un dépôt de sol multicouches

Dans le cas d'un dépôt de sol multicouches, la fonction de transfert $F(\omega)$ doit tenir compte des transmissions et réflexions d'ondes entre couches adjacentes. On considère uniquement la propagation verticale d'onde de cisaillement tel que schématisé sur la figure 1.3. Chaque couche de numéro j est de hauteur H_j , de module de cisaillement G_j et de masse volumique ρ_j .

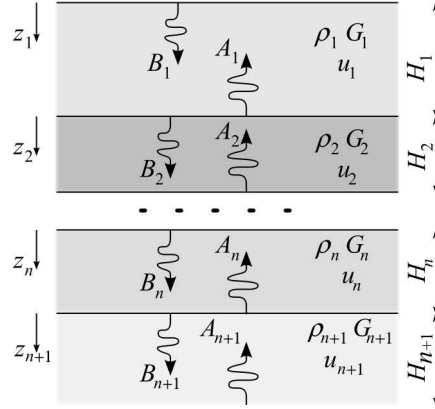


Figure 1.3 : Schématisation de la propagation d'onde dans un dépôt de sol multicouches

Le déplacement horizontal u_j dans la couche j évolue dans le temps en fonction de la coordonnée locale z_j selon l'expression (1.40)

$$u_j(z_j, t) = \left(A_j e^{ik_j^* z_j} + B_j e^{-ik_j^* z_j} \right) e^{i\omega t} \quad (1.58)$$

Sur l'interface entre deux couches j et $j + 1$, la compatibilité des déplacements et la continuité des contraintes donnent par analogie à (1.55) et (1.53) :

$$\begin{aligned} A_{j+1} + B_{j+1} &= A_j e^{ik_j^* H_j} + B_j e^{-ik_j^* H_j} \\ A_{j+1} - B_{j+1} &= \alpha_j^* \left(A_j e^{ik_j^* H_j} - B_j e^{ik_j^* H_j} \right) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Dans ce cas, α_j^* est le rapport d'impédance entre les couches adjacentes j et $j + 1$.

$$\alpha_j^* = \frac{G_j^* k_j^*}{G_{j+1}^* k_{j+1}^*} \quad (1.60)$$

Les amplitudes de l'onde dans la couche $j + 1$ s'obtiennent en fonction de celles de la couche j en résolvant (1.59)

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= \frac{1}{2} A_j (1 + \alpha_j^*) e^{ik_j^* H_j} + \frac{1}{2} B_j (1 - \alpha_j^*) e^{-ik_j^* H_j} \\ B_{j+1} &= \frac{1}{2} A_j (1 - \alpha_j^*) e^{ik_j^* H_j} + \frac{1}{2} B_j (1 + \alpha_j^*) e^{-ik_j^* H_j} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Au niveau de la surface du sol ($z_1 = 0$), la condition de contrainte nulle se traduit par $A_1 = B_1$. En appliquant récursivement l'équation (1.61) à toutes les couches au dessus de la couche numérotée $j + 1$, on relie ses amplitudes A_{j+1}, B_{j+1} à celles de la surface du sol A_1 et B_1 .

$$A_{j+1} = a_{j+1}(\omega)A_1 \quad , \quad B_{j+1} = b_{j+1}(\omega)B_1 \quad (1.62)$$

Les fonctions $a_{j+1}(\omega)$ et $b_{j+1}(\omega)$ représentent les effets d'interaction d'ondes entre toutes ces couches. Finalement, la fonction de transfert reliant le mouvement aux sommets de deux couches m et n peut se mettre sous la forme suivante

$$F_{mn}(\omega) = \frac{|u_m|}{|u_n|} = \frac{a_m(\omega) + b_m(\omega)}{a_n(\omega) + b_n(\omega)} \quad (1.63)$$

Cette fonction est donnée par le produit des fonctions de transfert de monocouches tel qu'exposé dans la section précédente.

La solution du problème de propagation d'ondes produites par un mouvement non harmonique quelconque tel qu'un accélérogramme s'obtient en effectuant une décomposition du mouvement à l'aide de la transformation de Fourier en une somme finie de mouvements harmoniques. Chacune des harmoniques obtenue est individuellement transférée entre couches du sol à l'aide de la fonction de transfert. Ensuite la recombinaison des harmoniques transférées donne le mouvement complet. Ce processus est à double sens par rapport à la colonne de sol. Un mouvement en profondeur peut être acheminé à la surface et donne un problème de propagation et un mouvement de surface peut servir à retrouver le mouvement en profondeur qui l'a produit, ceci correspondant au problème de déconvolution. Une fois les déplacements déterminés, les vitesses et les accélérations se calculent par simple dérivation numérique du mouvement combiné, ou directement dans l'espace de Fourier en utilisant : $\ddot{u} = -\omega^2 u$.

1.8 Taille des éléments finis et pas d'intégration temporelle

Dans les modèles bi- et tridimensionnel construits avec une discrétisation en éléments finis, le sol est représenté par un ensemble d'éléments dont la taille doit être assez petite pour pouvoir représenter correctement la transmission d'ondes. Il est reconnu qu'une dizaine de nœuds d'interpolation par longueur d'onde λ est suffisante pour représenter convenablement la propagation d'onde [15, 40, 67, 129], ce qui correspond à une taille d'éléments Δh telle que

$$\Delta h \leq \frac{\lambda}{10} = \frac{v}{10f_{\max}} \quad (1.64)$$

où v est la plus petite vitesse de propagation d'onde dans le modèle. Elle correspond en général à la vitesse des ondes de cisaillement $v = V_s$. La fréquence f_{\max} est la plus grande fréquence contenue dans le signal de l'excitation sismique. Cette fréquence peut être obtenue par le calcul

du spectre de Fourier du signal.

Par ailleurs, la précision et la stabilité de la solution dynamique temporelle d'un problème de propagation d'ondes dans le sol modélisé par éléments finis est contrôlée non seulement par la taille des éléments Δh mais aussi par le pas de temps Δt utilisé dans les méthodes d'intégration directe du système d'équations. Ce pas de temps doit être limité afin d'assurer la stabilité du schéma d'intégration et conditionne également la précision des résultats vers lesquels la solution converge. Les exigences de stabilité dépendent fortement des procédures d'intégration mais il est souvent admis que :

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.1 \quad (1.65)$$

où T_n la plus petite période fondamentale du système étudié [57].

D'une manière similaire à la discrétisation spatiale (1.64), la discrétisation temporelle préconise avec la condition (1.65) une dizaine de pas de temps pour inclure la plus petite période fondamentale T_n [43, 57, 102]. Un deuxième critère de stabilité est lié à la taille des éléments Δh et à la plus grande vitesse de propagation d'onde par :

$$\Delta t < \frac{\Delta h}{v} \quad (1.66)$$

Les considérations précédentes concernant la stabilité et la précision de la solution temporelle ne demeurent pas nécessairement valables lorsque le comportement non linéaire est pris en compte dans la modélisation. Le pas de temps à choisir afin d'assurer la stabilité doit être plus petit que celui d'une analyse élastique linéaire. Il reste cependant très difficile à prédire puisqu'il dépend de plusieurs facteurs tel que le modèle de comportement, le chargement appliqué, la méthode de résolution, ... etc. Suite à un certain nombre de tests, il a été suggéré de prendre un pas de temps égal à celui de l'analyse élastique réduit d'au moins 60% [10]. Il reste que la manière la plus sûre pour s'assurer d'un bon choix du pas de temps est de vérifier la convergence lorsque le pas diminue.

1.9 Amortissement du mouvement dynamique

Lors de la propagation d'une onde de déformation, une partie de l'énergie transportée se dissipe dans le milieu par divers mécanismes complexes tels que ceux dus aux glissements et frottements entre grains conduisant à la transformation d'une partie de l'énergie élastique en chaleur [50, 113]. Cette dissipation s'accompagne d'une atténuation dans le temps et dans l'espace des amplitudes des vibrations induites par la propagation.

Les mécanismes de dissipation sont une source d'incertitude importante dans de nombreux problèmes d'ingénierie. En effet, il est admis que toute prédiction de l'amortissement des structures ou des sols doit être considérée avec prudence. De même, toute valeur d'amortissement obtenue en

laboratoire est à utiliser avec précaution puisqu'on ne dispose d'aucune méthode de mesure *in situ* permettant de quantifier d'une manière satisfaisante l'énergie dissipée [2, 39, 43, 50, 59, 113, 129]. Par ailleurs, même dans le cas d'un comportement non dissipatif, lorsque le front d'onde se propage en s'éloignant de la source qui génère les vibrations, il se dilate et l'amplitude des déplacements décroît tout en gardant constante l'énergie totale du mouvement de toutes les particules comprises dans le volume atteint par la propagation [3]. Cette atténuation "apparente" est désignée par "amortissement géométrique" ou "radiatif" et n'a aucun lien avec celle due aux propriétés dissipatives des matériaux [104]. A distance suffisamment grande de la source, il est possible d'assimiler le front d'onde à un plan et l'"amortissement géométrique" est alors nul. Dans ce qui suit, l'amortissement matériel et l'amortissement radiatif sont successivement abordés.

1.9.1 Amortissement matériel

Amortissement visqueux

L'amortissement visqueux est caractérisé par le fait que les "forces dissipatives" induites par l'amortissement en un point sont proportionnelles à la vitesse en ce point.

$$F_d(t) = c\dot{u}(t) \quad (1.67)$$

où le coefficient c est une constante. Ce type d'amortissement est connu sous le nom d'amortissement visqueux par analogie à la viscosité des fluides. Même avec cette restriction de proportionnalité uniquement à la vitesse, il permet de donner une image simple assez représentative des effets dissipatifs des structures et des sols. La totalité des effets de dissipation sont ainsi ramenés au seul facteur de proportionnalité c communément appelé constante d'amortissement pour un oscillateur simple et matrice d'amortissement pour un système à plusieurs degrés de libertés.

Si l'on considère un oscillateur à un degré de liberté, de masse m et de pulsation propre ω_n , le "taux d'amortissement critique" est défini par la relation :

$$c = 2\xi\omega_n m \quad (1.68)$$

Il peut être évalué en utilisant plusieurs méthodes qui sont décrites dans la majorité des ouvrages de dynamique des structures ou des sols (exemple [34, 43, 59, 102, 106]). Les plus courantes sont le décrément logarithmique, la méthode de la demi-puissance, et la mesure de la déperdition d'énergie par cycle. Cette dernière définit ξ pour un cycle charge-décharge comme étant le rapport entre la quantité de l'énergie dissipée par cycle W_d et la quantité d'énergie élastique cumulée ΔW par le matériau s'il est parfaitement élastique :

$$\xi = \frac{W_d}{4\pi\Delta W} \quad (1.69)$$

Il est possible de montrer que dans le cas de comportement viscoélastique linéaire tel que celui introduit précédemment, l'énergie dissipée par cycle dépend linéairement de la fréquence. Or pour de nombreux matériaux, [43] l'énergie dissipée par cycle est indépendante de la fréquence sur une large bande de fréquences. Ce type de comportement est dénommé "amortissement hystérétique".

Amortissement hystérétique

La notion d'amortissement hystérétique fournit un modèle mathématique qui conduit à la propriété d'indépendance par rapport à la fréquence du coefficient d'amortissement critique. Il est souvent considéré que dans le cas des sols, l'amortissement hystérétique est plus réaliste que l'amortissement visqueux [125], spécialement dans le cas de matériaux granulaires comportant peu d'argile. La force F_d correspondant à ce type d'amortissement est en phase avec la vitesse mais proportionnelle aux déplacements. Son expression est alors :

$$F_d(t) = i \zeta k u(t) \quad (1.70)$$

où ζ est le coefficient de l'amortissement hystérétique qui définit les forces de dissipation comme fraction des forces élastiques $F_s = ku$. L'introduction de la constante imaginaire $i = \sqrt{-1}$ assure que la force est en phase avec la vitesse.

La combinaison de ces deux forces, élastique et dissipative produit la raideur complexe

$$k^* = k(1 + i \zeta) \quad (1.71)$$

Afin d'obtenir une solution de l'équation dynamique identique à celle utilisant un amortissement visqueux tout en assurant l'indépendance par rapport à la fréquence, la valeur du coefficient d'amortissement doit être le double de celle du taux d'amortissement critique

$$\zeta = 2\xi \quad (1.72)$$

ce qui ramène l'expression de la raideur complexe à

$$k^* = k(1 + 2i\xi) \quad (1.73)$$

telle qu'utilisée pour le module de cisaillement complexe dans l'équation (1.44). Cette expression est parfois reliée au principe de correspondance utilisé pour l'étude de matériaux viscoélastiques dans l'espace de Laplace-Carson. [6, 45, 132], Compte tenu de ce qui précède, il est clair que la solution amortie peut être obtenue à partir de la solution élastique en remplaçant les constantes élastiques à valeurs réelles par des constantes correspondantes à valeurs complexes obtenues en multipliant les constantes élastiques par le facteur $(1 + 2i\xi)$.

Comme ordre de grandeur, on peut noter que la valeur numérique de $\zeta = 0.1$ a été utilisée dans

la référence [53] comme amortissement hystérétique du barrage poids de Pine Flat. Cette valeur correspond au taux d'amortissement critique 5% fixée pour tous les modes des vibrations.

Comparativement à l'amortissement visqueux, l'utilisation de l'amortissement hystérétique sur une bande de fréquences infinie viole le principe de causalité, ce qui est physiquement inacceptable. Cet inconvénient peut être mis en évidence en examinant, dans les deux cas d'amortissement, les deux expressions de la réponse d'un oscillateur de masse m , de rigidité k et d'amortissement c soumis à une excitation arbitraire $f(t)$.

Cette réponse s'obtient soit dans le domaine temporel par l'intégrale de convolution suivante

$$u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (1.74)$$

ou bien dans le domaine fréquentiel par la relation suivante

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(i\omega)F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.75)$$

où $h(t)$ et $H(i\omega)$ sont les fonctions de transfert de l'oscillateur. Elles sont reliées par la paire de transformée de Fourier et son inverse.

Dans le cas de l'amortissement visqueux, c est une constante donnée par (1.68), et les deux fonctions de transfert ont les expressions connues suivantes :

$$H(i\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i2\xi\beta} \quad (1.76)$$

et

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_D} \sin(\omega_D t) e^{-\xi\omega t} \quad (1.77)$$

où $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ est la pulsation amortie et $\beta = \omega/\omega_n$ est le rapport de fréquence.

Dans le cas de l'amortissement hystérétique, la fonction $H(i\omega)$ est facile à obtenir : il suffit de prendre la transformée de Fourier de l'équation d'équilibre dans laquelle la rigidité complexe est donnée par (1.73).

$$H(i\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \beta^2 + i2\xi} \quad (1.78)$$

Cette expression ne diffère de celle de l'amortissement visqueux (1.76) que par l'absence de β dans le troisième terme du dénominateur.

La fonction $h(t)$ est la partie réelle de la transformée de Fourier inverse de H

$$h(t) = \mathcal{R} \left(\frac{-i}{m\omega_z} e^{-i\omega_z t} \right) = \frac{-1}{m\omega_r} \cos(\eta\omega t + \varphi) e^{-\frac{\xi}{\eta}\omega t} \quad (1.79)$$

avec

$$\begin{aligned}\omega_z &= \omega_n \sqrt{1 + 2i\xi} \\ \omega_r &= \omega_n \sqrt{1 + 2\xi^2} \\ \eta &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\xi^2})} \\ \varphi &= \arctan \sqrt{(\sqrt{1 + 4\xi^2} + 1)/(\sqrt{1 + 4\xi^2} - 1)}\end{aligned}$$

L'expression (1.79) peut être simplifiée pour les petites valeurs de ξ . Elle se met sous la forme suivante qui reste valable tant que $\xi \leq 50\%$

$$h(t) = \frac{-1}{m\omega_r} \cos(\omega_r t + \varphi) e^{-\xi\omega t} \quad ; \quad \varphi \approx \arctan \left(\frac{1}{\xi} + \frac{3}{2}\xi \right) \quad (1.80)$$

La figure 1.4 montre une comparaison entre les expressions de la fonction de transfert temporelle pour deux exemples d'oscillateurs de même fréquence naturelle $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$. L'un est amorti avec un taux d'amortissement critique $\xi = 10\%$ et l'autre avec $\xi = 30\%$. On voit que les fonctions de transfert sont pratiquement les mêmes lorsque l'amortissement est assez faible, mais elles diffèrent quelque peu lorsque l'oscillateur est plus fortement amorti. Cette différence s'accroît avec les faibles valeurs de ω_n , et inversement, elle diminue lorsque ω_n augmente même si ξ est grand.

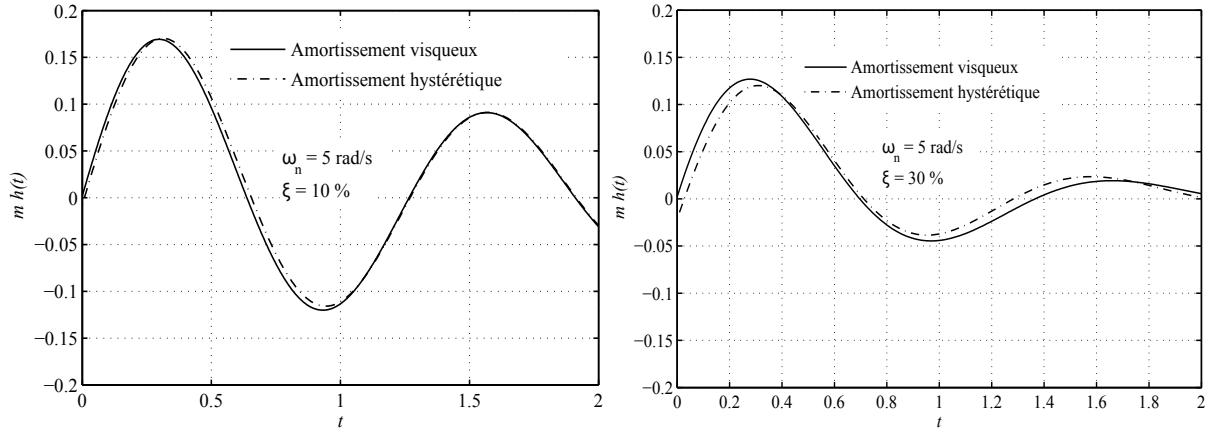


Figure 1.4 : Fonction de transfert $h(t)$ dans le domaine temporel

Le plus important à souligner à partir de la figure 1.4 est que la courbe de réponse à amortissement hystérétique ne commence pas par 0. La réponse précède l'excitation, ceci est physiquement invraisemblable et contraire au principe de causalité. Ce principe requiert que l'effet doit être nul avant la cause. La cause étant une impulsion unitaire à $t = 0$, $h(0)$ doit être nulle, cette condition sur les fonction de transfert est bien discutée dans [2, 59]. Il semble que ce problème conceptuel, souvent ignoré sans conséquences dans les situations pratiques, est le prix à payer

lorsque l'amortissement est indépendant de la fréquence sur une bande de fréquence infinie. Il est par ailleurs possible d'obtenir un amortissement constant sur une bande de fréquences finie, mais à condition d'introduire une variation de la vitesse de propagation avec la vitesse, dite "dispersion" de la vitesse.

Amortissement de Rayleigh et amortissements voisins.

La généralisation du concept de coefficient d'amortissement aux systèmes à plusieurs degrés de liberté est effectuée comme indiqué précédemment à l'aide de la matrice d'amortissement \mathbf{C} "proportionnelle" aux matrices de masse et de rigidité, telle que donné en équation (1.27), traduisant l'"amortissement de Rayleigh". Un des avantages de ce type d'amortissement est d'assurer l'orthogonalité des termes contenant l'amortissement par rapport aux modes propres et donc le découplage des équations du mouvement dans la base modale. De plus, ce procédé permet d'éviter d'assembler la matrice correspondant aux termes d'amortissement. Cet amortissement, dit de Rayleigh, est un cas particulier de l'"amortissement de Caughey" qui est appelé aussi "amortissement de Rayleigh généralisé". La généralisation permet d'inclure un nombre n de modes.

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{p=0}^n a_p [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}]^p \quad (1.81)$$

Lorsque $n = 2$, on retrouve l'expression de l'amortissement de Rayleigh, et lorsque $n = 1$, \mathbf{C} devient proportionnelle uniquement à la masse. Dans certaines études cependant, c'est plutôt une matrice proportionnelle à la rigidité qui est utilisée pour simplifier l'expression de l'amortissement car, contrairement au premier cas, c'est avec ce type d'amortissement que les modes supérieurs sont le plus amortis [43, 56, 61, 99, 100, 107, 124].

Les coefficients a_i s'obtiennent en résolvant, pour les n modes considérés, l'équation suivante :

$$2\omega_i \xi_i = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \omega_i^{2p} \quad (1.82)$$

où ξ_i et ω_i sont, respectivement, le taux d'amortissement critique et la pulsation des modes désignés par i .

En prenant deux modes de contrôle ($n = 2$), on retrouve les deux équations qui donnent les coefficients de proportionnalité α et β de l'amortissement de Rayleigh

$$2\xi_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (1.83)$$

Si, en plus, on choisit d'amortir le 1^{er} et le $n^{\text{ème}}$ mode avec un même taux d'amortissement critique, on obtient les expressions (1.28).

Il faut noter que, le choix d'un ξ identique pour deux modes ne signifie pas qu'il le soit aussi

pour tous les autres modes. L'équation (1.83) montre bien qu'il décroît comme $1/x$ pour les faibles valeurs de ω (inférieures à $\sqrt{\alpha/\beta}$), ensuite il croît linéairement lorsque ω augmente. Cette variation est montrée sur la figure 1.5 pour un exemple d'amortissement des cinq premiers modes propres du barrage poids de Oued-Fodda. En fixant ξ à 5% pour les deux premiers modes dont les périodes propres sont respectivement 0.2558 et 0.1241 secondes, on obtient $\alpha = 1.6539$ et $\beta = 0.0013$. Les valeurs de ξ qui correspondent au reste des modes augmentent comme suit : $\xi_3 = 5.75\%$, $\xi_4 = 6.85\%$ et $\xi_5 = 9.58\%$

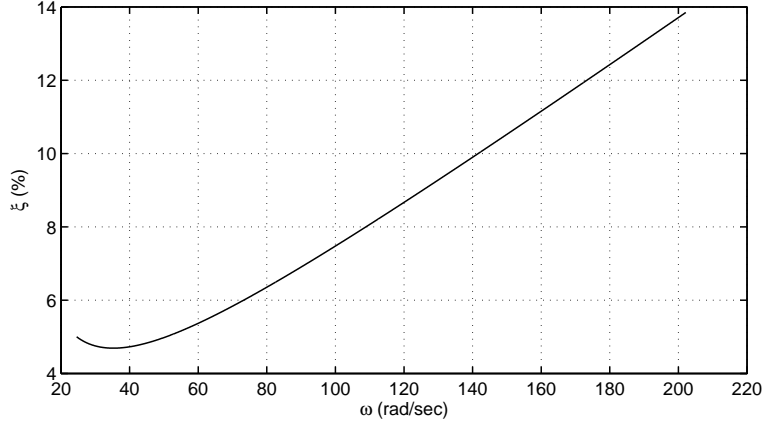


Figure 1.5 : Evolution du taux d'amortissement de Rayleigh

La variation non linéaire au début de la courbe se situe entre les deux valeurs de ω qui ont servi à l'évaluation des coefficients. En choisissant donc deux autres modes à la place des deux premiers, il faut faire attention à ne pas sous-amortir, sans le vouloir, les modes intermédiaires aux deux modes et sur-amortir en même temps les modes inférieurs, notamment le mode fondamental.

Dans le cas où l'on veut cibler une répartition linéaire de ξ entre deux modes quelconques, il faut procéder par essai/correction comme suggéré par Chowdhury et Dasgupta [39]. En général, une tendance proche de la valeur ciblée peut être obtenue avec une ou deux corrections.

Amortissement à contribution modale

Il est possible d'amortir chaque mode de vibration avec une valeur bien déterminée, en particulier un taux constant peut être fixé pour tous les modes inclus dans le calcul de la réponse. Il suffit d'inverser la relation de projection sur la base modale de la matrice d'amortissement \mathbf{C} . En notant \mathbf{c} cette projection et Φ la matrice des vecteurs propres, on a :

$$\mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi \quad ; \quad \mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi \mathbf{d} \Phi^T \mathbf{M} \quad (1.84)$$

où \mathbf{d} est une matrice diagonale dont les composantes sont $d_i = 2\xi_i\omega_i/m_i$, et où

$$m_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i \quad (1.85)$$

est la masse modale du mode i .

Chaque mode de vibration affecté d'un taux d'amortissement modal ξ_i contribue à l'amortissement total avec la matrice individuelle $\mathbf{C}_i = \mathbf{M}\Phi_i d_i \Phi_i^T \mathbf{M}$, d'où

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \left[\sum_{i=1}^n \frac{2\xi_i \omega_i}{m_i} \Phi_i \Phi_i^T \right] \mathbf{M} \quad (1.86)$$

Dans cette équation, on voit que ce sont uniquement les modes explicitement inclus dans la somme qui contribuent à l'amortissement. Les autres modes ne seront pas amortis.

Amortissement visqueux dans le cas de comportement viscoélastique quelconque

L'amortissement visqueux introduit précédemment correspond à un modèle viscoélastique de "Kelvin-Voigt". Ce type d'amortissement et l'amortissement hystérétique ne sont pas les seuls modèles permettant de décrire les effets dissipatifs dans les systèmes viscoélastiques.

Mathématiquement n'importe quel modèle qui donne une expression de l'énergie de dissipation définie positive est valable comme amortissement [2, 131]. L'expression la plus générale dans le cas de matériaux viscoélastique linéaire relie les forces d'amortissement actuelles au temps t à tous les mouvements antérieurs $\mathbf{u}(\tau \leq t)$ par l'intégrale de convolution suivante :

$$\mathbf{F}_d(t) = \int_{-\infty}^t \mathfrak{C}(t - \tau) \dot{\mathbf{u}}(\tau) d\tau \quad (1.87)$$

où $\mathfrak{C}(t)$ est une matrice de noyaux de fonctions qui sont désignées dans la littérature par plusieurs appellations comme par exemple "fonctions d'hérédité" ou "fonctions de relaxation". Ces fonctions sont souvent définies dans le domaine fréquentiel. Quelques expressions proposées par différents auteurs peuvent être trouvées dans [2]. Golla et Hughes [64] ont établi les conditions qui doivent être satisfaites par la transformée de Laplace de $\mathfrak{C}(t)$

Dans le cas particulier où $\mathfrak{C}(t - \tau) = \mathbf{C}\delta(t - \tau)$, où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac et \mathbf{C} est une matrice à valeurs constantes, l'expression générale (1.87) se réduit à celle de l'amortissement visqueux.

Il est possible de choisir un modèle rhéologique viscoélastique permettant d'obtenir un amortissement constant sur une plage de fréquence arbitraire, la vitesse de propagation apparente variant linéairement dans la plage de fréquence retenue. Ce procédé dit "Nearly Constant Quality Factor" (en abrégé NCQ) est le meilleur procédé pour assimiler un matériau à comportement de type "hystérétique" à un matériau viscoélastique. Une extension de ce type de modélisation dans le cas non-linéaire peut être trouvée dans Delépine *et al.* [47].

1.9.2 Amortissement radiatif - Frontières absorbantes

Tout modèle d'éléments finis (non infinis!) utilise un maillage d'une géométrie bien délimitée et à frontière fermée. En interaction sol-structure, on est donc amené à modéliser une partie du sol en pratiquant une troncature géométrique. Des conditions aux limites bien spécifiques doivent être appliquées sur ces frontières fictives afin d'éliminer, ou tout au moins de réduire, les réflexions d'ondes qu'elles induisent. Plusieurs adjectifs sont attribués à ces frontières lorsqu'elles sont munies de conditions aux limites appropriées, elles sont dites frontières absorbantes, radiatives, silencieuses, visqueuses, transmissives, ...etc.

Les conditions aux limites de troncature géométrique peuvent être classées en deux catégories : conditions globales et conditions locales. Une condition est dite globale si elle lie le comportement de tout point de la frontière à celui de tous les autres points de la frontière que ce soit en espace et en temps. Dans une condition locale, par contre, le comportement d'un point de la frontière à tout instant ne dépend que de ses propres coordonnées et peut être des points voisins. Contrairement aux conditions globales qui peuvent être exactes [94], les conditions locales sont approximatives mais faciles à mettre en œuvre et très pratiques du point de vue numérique.

La première condition de radiation locale, sans doute la plus connue et la plus utilisée, est celle de Lysmer et Kuhlemeyer établie en 1969 [84] telle que citée dans plusieurs références comme par exemple [39, 82, 83, 107, 129, 142]. Elle est similaire à un ensemble d'amortisseurs répartis le long de la surface de troncature. A ces amortisseurs, des ressorts ont été par la suite ajoutés afin d'améliorer l'absorption d'onde et d'assurer la stabilité numérique des modèles, comme le suggère Luco [83]. Les références [62, 127] donnent plus de détails sur les frontières absorbantes et leurs disponibilité dans les logiciels et codes de calcul dédiés au calcul dynamique et à l'interaction sol-structure.

La "condition de Lysmer" est très simple à établir dans le cas unidimensionnel, comme on va le voir maintenant, car elle consiste en un ensemble d'amortisseurs à positionner sur la frontière fictive. Pour déterminer les expressions de ces amortisseurs, on considère la propagation d'une onde élastique plane dans une direction donnée, soit celle de l'axe des x par exemple. L'équation de la dynamique d'un volume élémentaire défini au voisinage d'un point qui subit un déplacement u s'écrit dans la direction considérée comme suit :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.88)$$

où t désigne le temps et σ est la contrainte axiale qui se développe sous l'effet d'une extension axiale $\varepsilon = \partial u / \partial x$ et qui est donnée par la loi de l'élasticité linéaire :

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon \quad (1.89)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du sol et ρ sa densité. En remplaçant ε par la dérivé

de u et on rapportant la relation dans l'équation d'équilibre, on retrouve l'équation d'onde de compression ou "onde P" :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.90)$$

dans laquelle $V_p = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$ est la vitesse de propagation de l'onde.

La solution de cette équation pour une onde harmonique de pulsation ω est le déplacement d'expression

$$u(x, t) = \bar{u}(\sin(\omega t - \omega x/V_p) + \cos(\omega t - \omega x/V_p)) \quad (1.91)$$

La vitesse $\dot{u} = \partial u / \partial t$ est

$$\dot{u}(x, t) = \bar{u}\omega(\cos(\omega t - \omega x/V_p) - \sin(\omega t - \omega x/V_p)) \quad (1.92)$$

qui donne l'expression de l'extension axiale en fonction de la vitesse

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{1}{V_p} \dot{u}(x, t)$$

et par suite, dans le cas élastique, celle de la contrainte

$$\sigma(x, t) = -\frac{\lambda + 2\mu}{V_p} \dot{u}(x, t) = -\rho V_p \dot{u}(x, t) \quad (1.93)$$

Cette condition contribue à la forme intégrale faible des équations du mouvement par le terme

$$\int_{\Gamma} \delta u \sigma \, d\Gamma \quad (1.94)$$

σ est la composante du vecteur contrainte (cas unidimensionnel) sur la frontière fictive et u est la composante du déplacement. ρ et V_p étant des constantes, l'intégrale donne

$$\rho V_p \int_{\Gamma} \delta u \dot{u} \, d\Gamma \quad (1.95)$$

Sa discrétisation, en considérant des éléments de type "constant", mène au terme d'amortissement élémentaire

$$c_n = \rho V_p A_n \quad (1.96)$$

où A_n est la surface affectée à un noeud de la frontière fictive. Ce coefficient d'amortissement relie la force nodale appliquée au noeud considéré à la vitesse particulière en ce même noeud.

Cette expression se traduit par un amortisseur de constante c_e placé perpendiculairement à la surface de l'élément. Dans la majorité des codes de calcul par éléments finis, il est facile d'introduire des amortisseurs sur tous les noeuds de la frontière. Leurs constantes sont définies par $\rho V_p A_n$ comme indiqué précédemment.

La condition de Lysmer est précise si l'incidence de l'onde est perpendiculaire à la frontière et dans une gamme de fréquences raisonnables. Pour une incidence inclinée, l'absorption d'énergie par les amortisseurs n'est pas complète et une partie de l'énergie est réfléchi. D'autres conditions et méthodes ont été développées afin d'améliorer la qualité des frontières absorbantes, telles que les frontières artificielles graduellement amorties [82], le couplage avec des éléments spéciaux comme SEM [80–82] ou les éléments infinis présentés en annexe C.

1.10 Conclusion

Ce chapitre concerne la première partie de ce travail qui traite des aspects liés au comportement des solides dans le système complet fluide-sol-structure. Les équations de l'élastodynamique classique et leur discrétisation en éléments finis sont bien connues et décrites dans plusieurs ouvrages, et le rappel effectué ici a été introduit dans le but de préciser le cadre du travail qui sera réalisé dans la suite. La description de la structure et du sol par éléments finis ainsi que la propagation d'onde dans le sol ne pose pas de difficultés tant que celle-ci est limitée au domaine de comportement élastique linéaire.

Toutefois, la formulation de l'amortissement est d'une grande complexité. Il a été souligné que dans le cas de la structure, l'amortissement visqueux, communément utilisé, est dépendant de la fréquence et l'amortissement proportionnel dit de Rayleigh nécessite une attention particulière pour bien contrôler le taux d'amortissement de chaque mode inclus dans les calculs. De plus, l'amortissement hystérétique indépendant de la fréquence s'adapte bien au cas des sols et des structures. Il s'adapte mieux à une formulation dans le domaine fréquentiel. Cependant, s'il offre ce grand avantage d'indépendance de la fréquence, il est nécessaire de traiter avec attention la question liée à la causalité dans le traitement numérique.

Par ailleurs, la difficulté majeure que pose la modélisation du sol réside dans sa géométrie non bornée. Le recours aux formulations en éléments de frontières qui sont bien adaptées aux domaines ouverts s'accompagne souvent de plusieurs autres soucis liés au couplage entre le sol et la structure et aux différences entre ce type d'éléments et les éléments finis. Les conditions aux limites appliquées sur les frontières de troncature des modèles d'éléments finis, et l'utilisation d'éléments spéciaux comme les éléments infinis, constituent des solutions approximatives acceptables en général dans les cas pratiques. Le problème de radiation d'onde dans les sols en particulier et dans les domaines non bornés en général, reste encore un sujet de recherche très actif même si plusieurs solutions sont actuellement disponibles. Dans ce travail, on utilisera dans la suite les éléments infinis et les conditions de radiation de Lysmer.

Interaction sol-structure

2.1 Introduction

Dans le calcul sismique des structures, l'excitation est définie par un ou plusieurs enregistrements d'accélération souvent mesurées à la surface du sol en l'absence de toute construction. Ces enregistrements donnent les accélérogrammes en champ libre. En présence d'un bâtiment ou d'une quelconque autre construction, les mouvements au voisinage des fondations peuvent différer de ceux existant en champ libre. En effet, les forces au contact entre la structure et sa fondation perturbent le mouvement du sol, et le moment d'encastrement à la base provoque la rotation de celle-ci. Ce phénomène est désigné par "Interaction Sol - Structure" ou "ISS". Ce chapitre de nature bibliographique est destiné à synthétiser les différentes méthodologies utilisées pour modéliser l'ISS, développées généralement avec pour objectif le calcul sismique des bâtiments. Une application au calcul sismique de barrage poids est proposée en fin de chapitre, permettant la comparaison de différentes méthodes entre elles.

L'interaction entre le sol et la structure peut être mise en évidence à l'aide d'un modèle simple dans lequel la structure est représentée par une poutre console de raideur correspondant aux voiles ou poteaux sollicités en cisaillement contenant des masses correspondant principalement à celle des planchers. Ce système a donc plusieurs degrés de liberté. L'interaction avec le sol peut être représentée par des ressorts agissant à la translation ou à la rotation reliés à une base mobile se déplaçant suivant le mouvement sismique imposé.

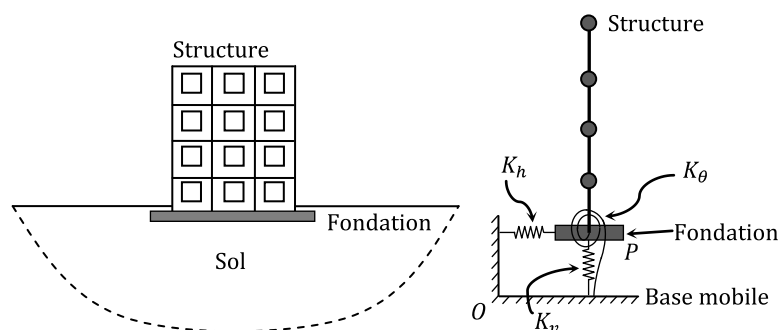


Figure 2.1 : Schématisation de l'interaction sol-structure

Le mouvement de la base mobile est celui qui est défini en champ libre par un accélérogramme, tandis que le mouvement de la fondation du bâtiment, dépend de la masse de la structure et de la raideur des ressorts qui représentent le sol. Ces deux mouvements sont donc différents, leur

écart étant d'autant plus accentué que le sol est plus déformable.

En général, dans les études des structures courantes, les propriétés du sol ne sont pas prises en compte. Le modèle le plus utilisé comporte un encastrement parfait à la base à laquelle on impose directement le mouvement. Cela entraîne évidemment une approximation dans le calcul de la réponse. Les erreurs ainsi introduites peuvent être importantes dans le cas d'un sol très déformable : la période du premier mode est sous-estimée et il en résulte une erreur par excès ou par défaut sur la valeur de l'accélération selon la zone où l'on se situe sur le spectre de calcul. On est par conséquent amené à concevoir des modèles dans lesquels le sol est représenté soit par des ressorts soit par des éléments finis ou par d'autres types de modélisation permettant de reproduire son comportement.

En fonction de ces aspects et des hypothèses retenues pour les deux milieux sol et structure, les modèles et les méthodes proposés pour la prise en compte de l'interaction sol-structure sont très diverses. Parmi elles, on peut distinguer les méthodes globales, qui résolvent en bloc le problème couplé sans tenir compte de la forme particulière du système matriciel correspondant, et les méthodes par sous-structure qui s'appuient sur une décomposition du système en deux ou trois parties ou sous systèmes selon que l'on tienne compte ou non de la fondation et du sol proche. Hors ces méthodes orientées vers un traitement numérique par éléments finis ou de frontière, il existe des approches simplifiées basées sur des modèles à ressorts tels que celui représenté en figure 2.1. Ce chapitre a pour but d'exposer ces méthodes et de présenter une application traitant le problème d'interaction sol-structure dans le cas des barrages poids en béton.

2.2 Modélisation à l'aide de l'impédance de fondation

La manière la plus simple de prendre en compte le sol dans les modèles de calcul des structures est de le représenter par des ressorts reliant un ou plusieurs noeuds à une base rigide à laquelle on impose le mouvement. Dans le cas d'un modèle plan par exemple et d'une fondation de surface, l'interaction avec une semelle isolée peut être représentée par deux ressorts agissant en translation et un ressort en rotation. Dans le cas d'une fondation rigide, si le mouvement est quelconque, la fondation peut être représentée par la relation entre le torseur des efforts appliqués (trois composantes de réaction et trois composantes de moments) et les composantes des déplacements de corps rigide de la fondation. Dans le cas d'un comportement du sol linéaire (élastique ou viscoélastique), cette relation est caractérisée par une matrice 6x6 dite "impédance de la fondation". Cette impédance est complexe en raison de l'amortissement radiatif et matériel et dépend généralement de la fréquence.

Sous une semelle filante ou un radier, il est également possible de modéliser le sol par une série de ressorts et d'amortisseurs horizontaux et verticaux placés en un ensemble de noeuds constituant les points de calcul ou de discrétisation. La raideur de ces ressorts est généralement calculée de façon à reproduire l'impédance de la fondation lorsque celle-ci se comporte de façon

rigide. Les propriétés dynamiques du sol étant en général mal connues, on emploie souvent des hypothèses simplificatrices pour évaluer les impédances de la fondation à partir des données expérimentales. On peut ainsi assimiler le sol à un milieu visco-élastique infini caractérisé par un module d'élasticité E et un coefficient de Poisson ν , et la construction à un disque rigide de rayon R . Les expressions des coefficients de raideur repris dans le tableau 2.1 sont disponibles dans la plupart des ouvrages de dynamique des sols et des structures, comme par exemple : [31, 34, 50, 57, 103, 129]). Ces expressions permettent d'estimer la limite "basse fréquence" de certains termes de l'impédance de fondation. A ces termes, il convient d'ajouter la partie imaginaire de l'impédance de fondation caractérisant l'amortissement (combinaison de l'amortissement radiatif produit par la radiation des ondes élastiques à partir de la fondation et de l'amortissement intrinsèque du sol) ainsi qu'une variation de la partie réelle en fonction de la fréquence.

Tableau 2.1 : Caractéristiques des ressorts équivalents d'une semelle rigide circulaire sur un milieu élastique isotrope et homogène

Direction	Raideur	Amortissement	Masse
Verticale	$k_v = \frac{4}{1-\nu}GR$	$c_v = 1.79\sqrt{k_v\rho R^3}$	$m_v = 1.50\rho R^3$
Horizontale	$k_h = \frac{32(1-\nu)}{(7-8\nu)}GR$	$c_h = 1.08\sqrt{k_h\rho R^3}$	$m_h = 0.28\rho R^3$
Renversement	$k_\theta = \frac{8}{3(1-\nu)}GR^3$	$c_\theta = 0.47\sqrt{k_\theta\rho R^5}$	$m_\theta = 0.49\rho R^5$
Torsion	$k_\alpha = \frac{16}{3(1-\nu)}GR^3$	$c_\alpha = 1.11\sqrt{k_\alpha\rho R^5}$	$m_\alpha = 0.70\rho R^5$

Dans ces expressions $G = \frac{1}{2}E/(1+\nu)$ désigne le module de cisaillement du sol. Les raideurs dépendent de ce module qui lui même varie en fonction du taux de déformation de glissement.

Les expressions du tableau 2.1 sont valables uniquement pour des petites déformations, elles doivent être utilisées en tenant compte d'une valeur de glissement à ne pas dépasser. En général, selon Dowrick [50], si on désigne par k_o la valeur de l'une des raideurs du tableau 2.1 calculée aux faibles déformations, alors des valeurs de raideur de translation entre $0.5k_o$ et k_o peuvent être utilisées dans les études paramétriques. Cet intervalle augmente lorsqu'il s'agit de la raideur de renversement qui peut varier entre $0.3k_o$ à k_o . Les travaux précités fournissent également la partie imaginaire de l'impédance ainsi que la variation de la partie réelle et de la partie imaginaire en fonction de la fréquence.

Les expressions des amortissements visqueux équivalents données dans le tableau 2.1 correspondent à l'amortissement radiatif d'un sol dans un demi-espace homogène et isotrope. Les valeurs des constantes d'amortissement sont en général largement réduites si le sol est multicouches à cause des réflexions d'ondes aux interfaces des couches. Inversement, les termes de

raideur augmentent si le sol est inhomogène avec une couche plus raide à une distance du niveau de fondation de l'ordre des dimensions de la fondation.

Lorsque la fondation est rectangulaire de largeur B et de longueur L , les expressions des raideurs deviennent [31, 50] :

$$k_v = \frac{\beta_z}{1-\nu} G\sqrt{BL} \quad , \quad k_h = 2\beta_x(1+\nu)G\sqrt{BL} \quad \text{et} \quad k_\theta = \frac{\beta_\theta}{1-\nu} GBL^2$$

ou $\beta_x, \beta_z, \beta_\theta$ sont des coefficients de forme fonctions du rapport L/B [50].

Lorsque les termes de couplage de la matrice sont faibles devant les termes diagonaux, l'impédance peut être remplacée par des "ressorts" de translation et de rotation.

Cette modélisation par des ressorts a été utilisée par Inaudi *et al. et al.* [70] comme approche simplifiée afin d'inclure la flexibilité de la fondation dans le calcul des modes propres d'un barrage poids en béton. La structure du barrage a été modélisée par des éléments finis et le sol a été représenté par des ressorts équivalents concentrés au centre de gravité de l'interface sol-barrage (figure 2.2). Les raideurs des ressorts ont été prises comme suit :

$$k_h = 2E_s b \quad , \quad k_v = 4.3 \frac{E_s b}{2(1+\nu_s)(1-\nu_s)} \quad \text{et} \quad k_\theta = 2 \frac{E_s b^3}{(1+\nu_s)(1-\nu_s)}$$

où E_s et ν_s sont le module de Young et le coefficient de Poisson du sol, respectivement, et b est la demi largeur du barrage. La fondation a été supposée carré $2b \times 2b$ et les expressions correspondent aux valeurs des coefficients β suivantes : $\beta_x = 1.0$, $\beta_z = 4.3$ et $\beta_\theta = 0.5$.

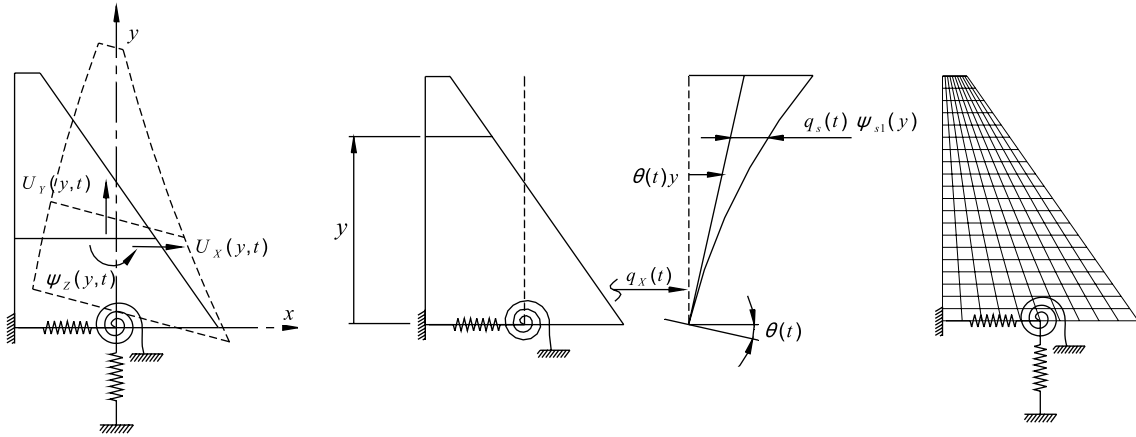


Figure 2.2 : Modèle simplifié d'interaction sol-barrage [70]

En outre une procédure de couplage simplifiée a été présentée par Inaudi [70]. Elle se base sur la définition d'un déplacement horizontal total à trois composantes :

$$u_x(x, y, t) = q_x(t) + \theta(t) y + q_s(t) \phi_1(y) \quad (2.1)$$

où $q_x(t)$ et $\theta(t)$ sont le déplacement et la rotation de corps rigide induits par la fondation. Le troisième terme est dû aux déformations du mode propre fondamental $\phi_1(y)$ dont la variation temporelle est décrite par $q_s(t)$. Les formules de Chopra [54, 55] peuvent être utilisées comme approximation satisfaisante pour ce mode propre.

Cette méthode simplifiée a donné de bon résultats pour les basses fréquences, elle a été recommandée par les auteurs comme première estimation de la répartition des forces d'inertie sismiques sur la structure du barrage.

En résumé, la prise en compte de l'interaction sol-structure à partir de la matrice d'impédance est particulièrement bien adaptée dans le contexte industriel où la représentation du sol est complètement découplée de la représentation de la structure, ces deux opérations pouvant être réalisées indépendamment par des spécialistes des deux domaines.

2.3 Méthode globale

La méthode globale (ou méthode directe) traite le problème d'interaction sol-structure en un tout : le modèle numérique se base sur la discrétisation spatiale de la structure et du sol. L'analyse du système complet s'effectue en une seule étape [104, 127]. Cette méthode permet d'inclure en principe tout comportement non linéaire du sol ou de la structure et toute hétérogénéité présente dans le sol. Il est aussi possible de traiter avec ce genre de méthode, les conditions de contact à l'interface sol-structure et la condition de radiation et de dissipation d'énergie dans la partie infinie du sol non borné. Les principales techniques utilisées pour traiter cette condition sont : l'utilisation de frontières absorbantes, le couplage éléments finis - éléments de frontière et le couplage éléments finis - éléments infinis ainsi que d'autres techniques. La section 1.9.2 consacrée à l'amortissement radiatif donne plus de détails. Un problème important affaissant à cette méthode réside dans la mise en œuvre du chargement sismique à appliquer au modèle numérique. On distingue trois variantes qui sont rapportées dans les sections suivantes

2.3.1 Méthode à déconvolution du mouvement sismique

Cette méthode, esquissée dans les sections précédentes, est reprise ici en détail. La problématique de la résolution du problème d'interaction sol-structure par une méthode globale par déconvolution est constituée des deux étapes telles que schématisées sur la figure 2.3 [104] :

- 1) Le mouvement sismique de dimensionnement connu et donné à la surface du sol, en champ libre permet d'obtenir l'accélération à la base du modèle numérique. Cette base est choisie à une profondeur suffisante pour que la présence d'une structure en surface n'affecte pas le mouvement. Cette étape connue sous le nom de déconvolution du mouvement sismique se ramène au problème de résolution de la propagation d'onde dans le sol, en général dans le domaine fréquentiel (Section 1.7.1). Par ailleurs, Rajasankar *et al.* [108] proposent une nouvelle

méthode de déconvolution dans le domaine temporel.

- 2) Ensuite le mouvement déconvolué est imposé uniformément à la base du système sol-structure et la réponse est calculée par résolution du système d'équations décrivant le problème entier.

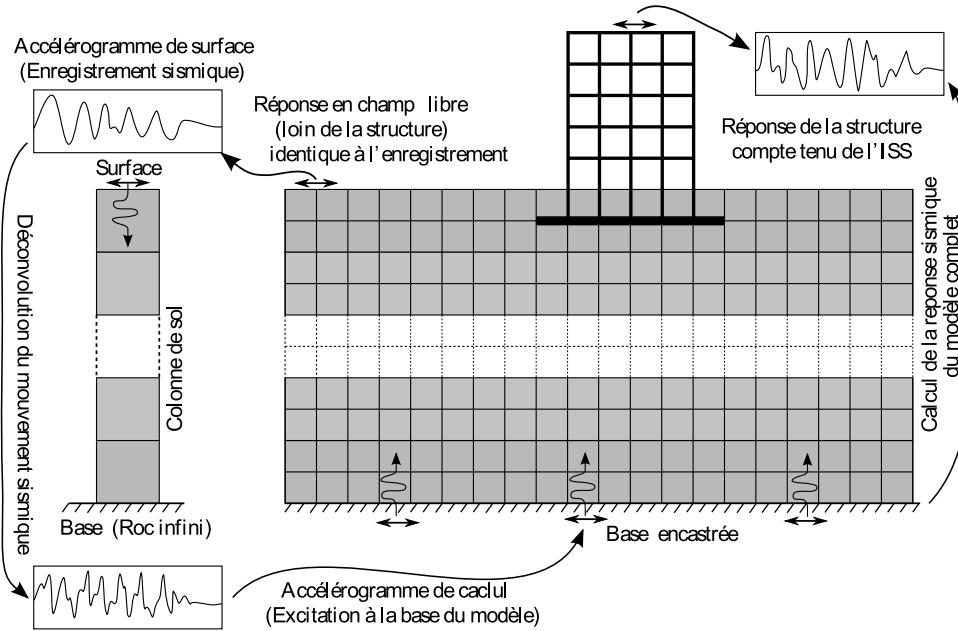


Figure 2.3 : Modélisation de l'ISS par le méthode globale [104]

Le système matriciel découlant de la discrétisation du problème complet s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

où les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} désignent la masse, l'amortissement et la rigidité du système complet. Le vecteur \mathbf{F} comprend les forces d'excitation sismique agissant à la base du modèle. Le vecteur \mathbf{U} contient les déplacements des nœuds du modèle par rapport à la base mobile. Les dérivées temporelles $\dot{\mathbf{U}}$ et $\ddot{\mathbf{U}}$ sont les vitesses et les accélérations.

Si les accélérations sismiques $\ddot{u}_g(t)$ sont connues en profondeur alors le vecteur \mathbf{F} est tout simplement le produit de la masse totale par le vecteur des accélérations sismiques ramenées aux nœuds du modèle, \mathbf{I} est le vecteur de couplage dynamique dont les composantes qui correspondent aux degrés de liberté de même direction que le mouvement sismique sont égales à un et les autres sont nulles.

$$\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{u}_g(t) \quad (2.3)$$

2.3.2 Méthode de déplacement uniforme ajouté

Le système (2.2) est composé de sous matrices qui décrivent les trois parties constituant le problème global à savoir la structure, la fondation et le sol. On utilise l'indice **b** pour désigner la structure (barrage, bâtiment ...), l'indice **f** pour désigner la fondation ou les nœuds communs à la structure et au sol et l'indice **s** pour le sol.

Par ailleurs, le vecteur des déplacements se décompose en deux parties : un vecteur **v** qui représente les déplacements du sol sans la structure (déplacement de champ libre) et un déplacement relatif ou vecteur d'interaction **u**. Chacun de ces vecteurs comprend trois ensembles de composantes qui correspondent aux trois sous systèmes du système global.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{v}_f \\ \mathbf{v}_s \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Le système (2.2) peut ainsi être réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fb} & \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_b \\ \ddot{\mathbf{u}}_f \\ \ddot{\mathbf{u}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{fb} & \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fs} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{sf} & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathbf{u}}_f \\ \dot{\mathbf{u}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \quad (2.5)$$

Le vecteur **R** représente la différence entre les forces sismiques agissant à la base du modèle et les forces dynamiques dues au mouvement de champ libre.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{K}\mathbf{v} \quad (2.6)$$

Sans la présence de la structure, l'équation du mouvement en champ libre qui donne l'équilibre dynamique du sol est :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff}^{(s)} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_f \\ \ddot{\mathbf{u}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ff}^{(s)} & \mathbf{C}_{fs} \\ \mathbf{C}_{sf} & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_f \\ \dot{\mathbf{u}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff}^{(s)} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \quad (2.7)$$

où l'exposant (s) désigne la partie des matrices associée aux nœuds communs et dont les composantes viennent uniquement de l'assemblage des éléments du sol. La substitution de cette équation dans (2.6) réduit le vecteur **R** à :

$$\mathbf{R} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fb} & \mathbf{M}_{ff}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{v}}_b \\ \ddot{\mathbf{v}}_f \\ \ddot{\mathbf{v}}_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{fb} & \mathbf{C}_{ff}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_b \\ \dot{\mathbf{v}}_f \\ \dot{\mathbf{v}}_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{v}_f \\ \mathbf{v}_s \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Dans ce cas, par l'exposant (b) on désigne les parties des matrices venant des contributions

des éléments finis de la structure. On voit bien que dans le vecteur \mathbf{R} n'interviennent que les matrices de la structure, toutes les composantes de ces matrices incluses. Ce vecteur est fonction des déplacements en champ libre. Il est la somme, outre les forces liées à l'amortissement, des forces d'inertie et des forces liées à la raideur. Lorsque les premières sont prédominantes (cas de fondation rigide ou de structure très lourde), l'interaction est dite inertielle. A l'inverse, si ce sont les forces de raideur qui sont prédominantes, l'interaction est dite cinématique ; c'est le cas par exemple d'un pieu rigide dans un sol mou.

Si le mouvement en champ libre est uniforme, \mathbf{v}_f dans les équations précédentes est constant, alors le vecteur \mathbf{v}_b correspond à un déplacement de corps rigide de la structure, et on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{v}_f \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

ce qui réduit le vecteur \mathbf{R} , en négligeant la faible contribution des forces d'amortissement, à l'expression suivante :

$$\mathbf{R} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fb} & \mathbf{M}_{ff}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{v}}_b \\ \ddot{\mathbf{v}}_f \\ \ddot{\mathbf{v}}_s \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Cette expression fait intervenir uniquement la masse de la structure. Les valeurs du vecteur \mathbf{R} sont nulles sur tous les nœuds du maillage sauf ceux de la structure, d'où l'expression :

$$\mathbf{R} = - [\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{\mathbf{v}} \quad (2.11)$$

qui permet de répartir les forces sismiques uniquement sur la partie structure à l'aide du vecteur de couplage dynamique \mathbf{I}_b .

Cette formulation est adoptée dans le présent travail pour modéliser les effets de l'interaction sol-structure sur la réponse des barrages poids en béton. La base du barrage étant assez rigide et le sol d'assise étant généralement rocheux ou dur, l'hypothèse d'uniformité du mouvement en champ libre au niveau de la base du modèle est souvent bien justifiée dans les calculs des structures [129].

Dans le cas général, le déplacement n'est pas uniforme et il est préférable alors d'utiliser au lieu de (2.4) le changement de variable suivant :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_f \\ \mathbf{v}_s \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

où \mathbf{u}_b est un déplacement absolu ; il comprend à la fois le déplacement de champ libre et celui dû à l'interaction. La substitution de (2.12) dans (2.5) donne l'équation de l'équilibre dynamique du système complet en termes de déplacements absolus.

Le vecteur chargement \mathbf{R} s'obtient par soustraction de la réponse du sol de celle du système :

$$\mathbf{R} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_f \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fb} & \mathbf{M}_{ff}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{v}}_f \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Cette expression peut être réduite si on néglige la contribution de l'inertie des éléments de contact appartenant à la structure ou en connectant celle-ci à la fondation avec des ressorts sans masse.

$$\mathbf{R} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bf} \\ \mathbf{K}_{ff}^{(b)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{v}_f \right\} \quad (2.14)$$

Cette expression fait apparaître clairement que les forces à appliquer au modèle sont dues uniquement à la rigidité des éléments de contact coté structure. Ce sont ainsi des forces concentrées au niveau de la base de la structure, ce qui nécessite en général, d'inclure dans la résolution un grand nombre de modes propres ou une intégration directe du système d'équilibre dynamique en entier sans aucune troncature modale à moins d'utiliser une base modale constituée de vecteurs de Ritz dépendant du chargement (LDR) [129].

2.3.3 Méthode de réduction de domaine

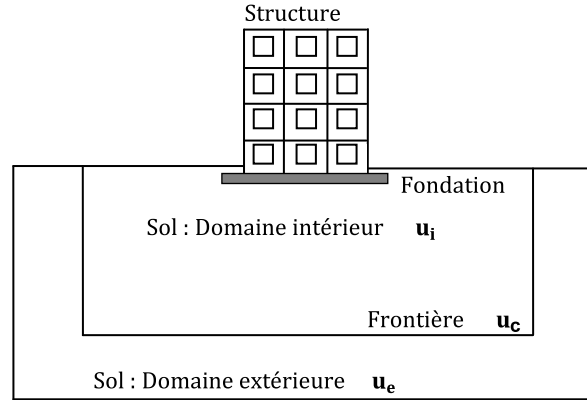
Cette méthode récemment développée spécialement pour l'analyse sismique par Bielak *et al.* [20, 107, 134, 137] est une méthode dynamique qui permet de réduire le domaine du sol de grande dimension à un domaine réduit plus petit, ce qui induit des gains en ressources système. L'idée principale de cette méthode consiste à ramener les forces agissant sur le système sol-structure global à une surface continue entourant la structure et une petite partie du sol. La méthode est de ce fait une variante de la méthode globale ayant la réduction du domaine sol comme apport (figure 2.4).

Le domaine complet est divisé en deux parties.

-Une partie proche ou interne désignée par \mathbf{i} et constituée de la structure et d'une partie du sol avoisinant, de dimensions suffisamment grandes.

-La seconde partie désignée par \mathbf{e} désigne la reste du domaine. Celui-ci est considéré comme assez éloigné pour être assimilé au milieu extérieur. Il peut alors être tronqué. La frontière fictive entre les deux parties est désignée par un contour noté \mathbf{c} .

En omettant les termes d'amortissement afin d'alléger les équations, l'expression de l'équilibre


Figure 2.4 : Méthode de réduction de domaine - Notations

dynamique du système complet peut être réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ic} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{ci} & \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_{ce} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ec} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_c \\ \ddot{\mathbf{u}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ic} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ci} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ce} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ec} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_e \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

L'indice **i** désigne toute la partie interne du problème, celle constituée de la structure et de la partie du sol proche. L'indice **c** fait référence aux nœuds du contour fictif qui constitue la frontière entre la partie proche et la partie éloignée ou extérieure, celle désignée par **e**.

Les matrices \mathbf{M}_{cc} et \mathbf{K}_{cc} tiennent compte des contributions à la masse et à la rigidité des nœuds appartenant à la frontière du domaine extérieur. Le déplacement total \mathbf{u}_e des points appartenant au domaine extérieur est la somme du déplacement relatif \mathbf{v}_e et d'un déplacement résiduel \mathbf{w}_e , comme dans le cas de la décomposition (2.4).

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{v}_e + \mathbf{w}_e \quad (2.16)$$

Cette décomposition n'est pas une superposition, elle s'applique à tout instant t et elle reste valable pour les calculs non linéaires.

En substituant (2.16) dans (2.15), on obtient après réarrangement du second membre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ic} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{ci} & \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_{ce} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ec} & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_c \\ \ddot{\mathbf{w}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ic} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ci} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ce} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ec} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_c \\ \mathbf{w}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{ce}\ddot{\mathbf{v}}_e - \mathbf{K}_{ce}\mathbf{v}_e \\ \mathbf{P}_e - \mathbf{M}_{ee}\ddot{\mathbf{v}}_e - \mathbf{K}_{ee}\mathbf{v}_e \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Par ailleurs la troisième équation du système (2.15) donne le vecteur \mathbf{P}_e

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{M}_{ec}\ddot{\mathbf{v}}_c + \mathbf{M}_{ee}\ddot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{K}_{ec}\mathbf{v}_c + \mathbf{K}_{ee}\mathbf{v}_e \quad (2.18)$$

La substitution dans (2.17) donne le vecteur des forces fictives \mathbf{P}_{eff} due à la partie extérieure du domaine et agissant sur la frontière \mathbf{c} :

$$\mathbf{P}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{\text{ce}}^{(e)} \ddot{\mathbf{v}}_{\text{e}} - \mathbf{K}_{\text{ce}}^{(e)} \mathbf{v}_{\text{e}} \\ -\mathbf{M}_{\text{ec}}^{(e)} \ddot{\mathbf{v}}_{\text{c}} - \mathbf{K}_{\text{ce}}^{(e)} \mathbf{v}_{\text{c}} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Ce changement de variable permet d'appliquer le chargement sismique sous forme d'une force au lieu d'un déplacement imposée à la base du modèle, ce qui donne plus de flexibilité dans l'application des conditions aux limites. En effet, un chargement sous forme de déplacement imposé conduit en général à des conditions aux limites introduisant des réflexions d'onde alors qu'un chargement sous forme de forces imposées permet d'appliquer des frontières absorbantes.

L'équation (2.19) montre que seules les matrices des éléments appartenant à la limite entre le domaine extérieur et le domaine intérieur sont nécessaires au calcul de la force effective \mathbf{P}_{eff} . Ces matrices sont multipliées par le déplacement et l'accélération du champ libre. Par conséquent \mathbf{P}_{eff} peut être déterminé à partir du problème auxiliaire de la réponse sismique du dépôt de sol (section 1.7).

2.4 Méthode de sous structuration

Cette méthode s'appuie sur le principe de superposition. Le système global est subdivisé en deux parties désignées par sous-structures qui concernent la structure elle-même et le sol sur lequel elle est posée. Chacune des sous structures peut être analysée séparément et la réponse totale est obtenue par la superposition des contributions des deux réponses à l'interface liant les deux sous structures [103]. La méthode permet de réduire considérablement la taille du problème : elle est par conséquent beaucoup plus rapide que la méthode globale. Toutefois, le fait qu'elle soit basée sur le principe de superposition restreint son domaine d'application aux cas linéaires. Elle est inadaptée aux problèmes d'interaction tenant compte du comportement non linéaire des matériaux. En utilisant la décomposition et les notations schématisées sur la figure 2.5, on écrit les équations d'équilibre de chaque sous-système dans le domaine fréquentiel tout en assurant les équations de compatibilité à l'interface qui se traduisent par la continuité des vecteurs des déplacements et des contraintes.

Toutes les grandeurs du problème tels que les déplacements \mathbf{u} et les forces \mathbf{Q} s'expriment par leurs transformées de Fourier

$$\mathbf{u} = \sum_n \tilde{\mathbf{u}}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \quad , \quad \mathbf{Q} = \sum_n \tilde{\mathbf{Q}}(\omega) e^{i\omega_n t} \quad (2.20)$$

Pour une harmonique de pulsation ω donnée représentant l'une des ω_n , on écrit les équations des

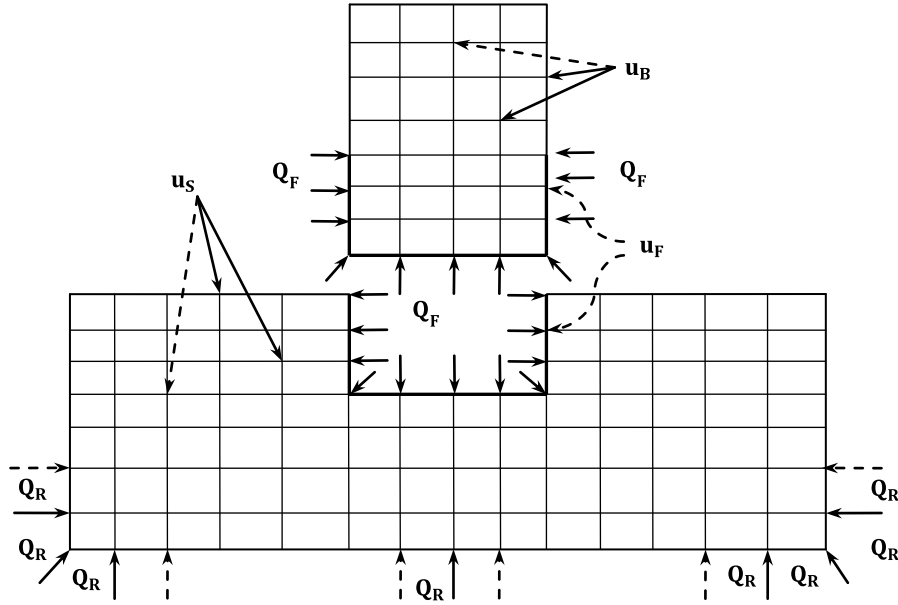


Figure 2.5 : Sous-Structure

différents sous-systèmes comme suit :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{bf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ \tilde{\mathbf{u}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ \tilde{\mathbf{u}}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_f \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{fs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_f \\ \tilde{\mathbf{u}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_f \\ \tilde{\mathbf{u}}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tilde{\mathbf{Q}}_f \\ \tilde{\mathbf{Q}}_r \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Comme précédemment, dans les équations (2.21) et (2.22) l'indice **b** désigne les nœuds de la structure (bâtiment, barrage, ...), l'indice **f** ceux de la fondation (interface sol-structure) et **s** ceux du sol. Les réactions à l'interface sol-structure sont désignées par le vecteur \mathbf{Q}_f et le chargement extérieur s'appliquant sur les bords latéraux et le bas du modèle est désigné par \mathbf{Q}_r . Le vecteur est nul partout sur les nœuds du modèle sauf sur ceux de la frontière extérieure.

Les équations (2.21) et (2.22) ont été partitionnées de façon à isoler dans chacun des deux sous-systèmes les équations d'équilibre des nœuds communs à l'interface sol-structure. Ces nœuds sont repérés dans le sous-système structure par les indices **bf** et dans le sous-système sol par **fs**. La compatibilité des déplacements a été prise en compte par l'écriture d'un même déplacement commun identique dans les deux sous-systèmes, et la continuité des efforts par l'équivalence des réactions $+\tilde{\mathbf{Q}}_f$ et $-\tilde{\mathbf{Q}}_f$ entre les deux sous-systèmes.

Considérons maintenant l'équilibre du modèle de sol sans la présence de la structure et notons

ses déplacements par \mathbf{v} . Le système d'équations du mouvement est :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{fs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_f \\ \tilde{\mathbf{v}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_f \\ \tilde{\mathbf{v}}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_r \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Dans ce cas, le vecteur force ne fait pas intervenir les réactions dues à la présence de structure. Il est constitué uniquement des forces extérieures.

On introduit à présent un vecteur d'interaction \mathbf{w} défini par :

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (2.24)$$

La soustraction de (2.23) de (2.22) donne :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{fs} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_f \\ \tilde{\mathbf{w}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_f \\ \tilde{\mathbf{w}}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tilde{\mathbf{Q}}_f \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Ce système d'équations peut être utilisé pour éliminer tous les degrés de liberté qui n'appartiennent pas à l'interface sol-structure. Ce processus, appelé condensation, permet de relier les déplacements de l'interface aux réactions en ces nœuds de la manière suivante :

A partir de la deuxième équation du système (2.25), on a :

$$[\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss}] \tilde{\mathbf{w}}_s + \mathbf{K}_{sf} \tilde{\mathbf{w}}_f = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

d'où

$$\tilde{\mathbf{w}}_s = -[\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss}]^{-1} \mathbf{K}_{sf} \tilde{\mathbf{w}}_f \quad (2.27)$$

En remplaçant maintenant dans la première équation du système (2.25) on obtient l'expression du vecteur réaction

$$\left[\mathbf{K}_{ff} - \mathbf{K}_{fs} [\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \mathbf{M}_{ss}]^{-1} \mathbf{K}_{sf} - \omega^2 \mathbf{M}_{fs} \right] \tilde{\mathbf{w}}_f = \tilde{\mathbf{Q}}_f \quad (2.28)$$

Soit, sous forme condensée

$$\mathbf{S}_f(\omega) \tilde{\mathbf{w}}_c = -\tilde{\mathbf{Q}}_f(\omega) \quad (2.29)$$

où $\mathbf{S}_f(\omega)$ est appelée *matrice d'impédance* de la fondation qui constitue l'interface sol-structure et qui désigne ici l'ensemble des nœuds communs aux deux sous-systèmes.

La réaction du sol $\tilde{\mathbf{Q}}_f(\omega)$ reste toujours inconnue. Elle peut être éliminée en reportant (2.29) dans (2.21) avec la prise en compte de la décomposition des déplacements en (2.24). L'équation

du mouvement de la structure devient alors

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{bf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ \tilde{\mathbf{u}}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ \tilde{\mathbf{u}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_c(\omega)\tilde{\mathbf{v}}_c \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

2.5 Application

Pour terminer ce chapitre, on présente une application traitant le problème d'interaction sol-structure dans le cas du barrage de Pine Flat. Les modèles d'éléments finis utilisés ainsi que la géométrie du système sol-barrage sont représentés sur la figure 2.6. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure du barrage sont données dans le tableau 2.2. Ce barrage a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. On utilisera pour la comparaison des résultats le modèle de Wilson tel que décrit au chapitre 16 de son ouvrage [129]. Les propriétés mécaniques du sol sont supposées les mêmes que celles du barrage. On s'intéresse ici beaucoup plus à la validation des modèles et des programmes développés qu'au traitement d'une application réelle. On utilisera le code de calcul CASTEM [35] pour valider certaines parties du programme d'analyse et de modélisation par éléments finis développé dans le cadre de ce travail sous l'environnement MATLAB. Ce programme portant le nom de FEMAT, est décrit dans l'annexe E.

Un modèle utilisant le couplage éléments finis - éléments infinis pour représenter le sol, a été réalisé afin d'examiner l'apport des éléments infinis dans la prise en compte de sa nature non bornée. Ce modèle schématisé sur la figure 2.6(b) se base sur la méthode globale à mouvement uniforme ajouté (MMA) qui permet d'appliquer l'accélérogramme de surface sans la déconvolution. L'avantage qu'offre ce modèle est qu'il ne nécessite aucune condition aux limites sur les frontières de troncature du sol.

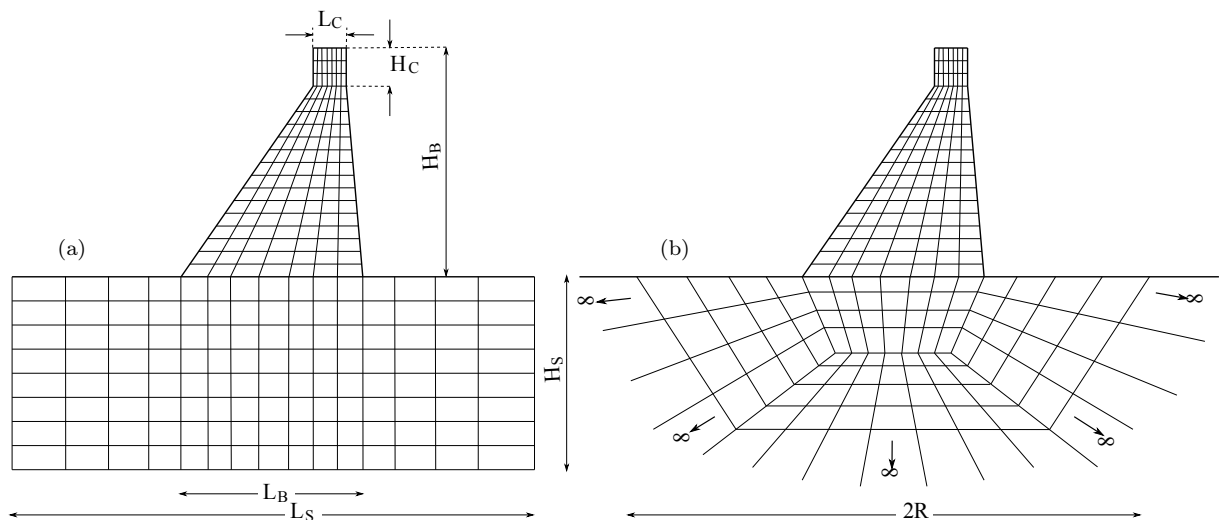


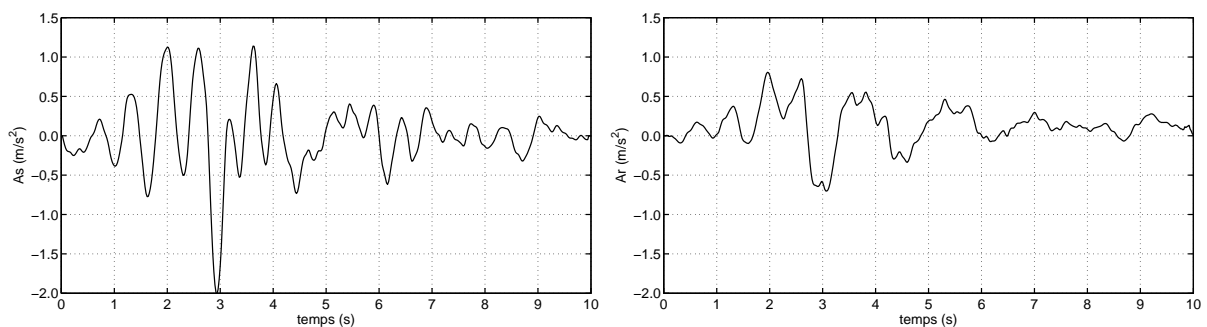
Figure 2.6 : Géométries et maillages types utilisés pour la modélisation de l'interaction sol-barrage

Tableau 2.2 : Dimensions et propriétés matérielles du barrage de Pine Flat

Dimensions (m)						Propriétés matérielles		
H_b	H_c	L_b	L_c	L_s	H_s	E (GPa)	ν	ρ_b (Kg/m ³)
122.0	18.5	96.0	9.75	600.0	300.0	34.47	0.2	2483.0

L'excitation sismique utilisée dans cette application est l'enregistrement des 10 premières secondes du séisme de Loma Prieta à la station San Francisco Bay Area. Cet enregistrement a été repris de Wilson après l'avoir corrigé de sorte à annuler toute accélération, vitesse et déplacement non significatifs en début et en fin des 10 secondes. On l'utilise ici afin de pouvoir comparer les résultats obtenus dans le présent travail avec FEMAT et CASTEM et ceux donnés par Wilson [129]. Dans tous les calculs, le taux d'amortissement critique est fixé à 5% aussi bien pour la structure du barrage que pour le sol.

La figure 2.7 montre l'accélérogramme enregistré et celui calculé en profondeur à l'aide de la déconvolution. La couche de sol de hauteur $H_s = 300$ m est considérée comme homogène et isotrope et reposant sur un substratum infiniment rigide. Elle est modélisée par une colonne de surface unitaire divisée en un ensemble de 300 éléments quadrilatéraux linéaires de même taille égale à 1×1 m. L'accélérogramme de surface est d'abord appliqué à la base. La solution pas à pas de l'équation de la dynamique pour la colonne de sol permet d'évaluer l'accélérogramme amplifié par la couche. Le rapport des transformées de Fourier des deux accélérogrammes donne la fonction de transfert entre la base du maillage et la surface du sol. Ensuite en divisant par cette fonction la transformée de l'accélérogramme enregistré, on obtient l'accélérogramme au rocher. La transformée inverse donne alors l'accélérogramme recherché en profondeur. Ce procédé de déconvolution s'applique aussi pour un multi-couche et à d'autres accélérogrammes. Il permet d'éviter, d'un côté, la résolution de l'équation d'onde (section 1.7.1) lorsqu'on ne dispose pas d'un outil de calcul approprié, et d'un autre côté, il constitue un bon moyen de validation des programmes développés.

**Figure 2.7** : Accélérogrammes enregistré en champ libre et calculé en profondeur à 300m

La fonction de transfert calculée par le modèle d'éléments finis de la couche est comparée à l'expression (1.57) qui se réduit à $F(\omega) = 1/\cos(k_s^*H)$ puisque le rocher situé dessous est supposé

infiniment rigide.

Les courbes tracées dans la figure 2.8 montrent à quel point les résultats sont proches. Les pics de la fonction correspondent bien aux fréquences des vibrations libres de la couche qui sont données par $f_n = (2n - 1)V_s/(4H)$. On trouve d'ailleurs les valeurs exactes de ces fréquences par extraction des modes propres du modèle. On montre aussi dans la figure 2.8 l'amplification du mouvement sismique par la couche en traçant les spectres de réponse des accélérogrammes de surface et de profondeur.

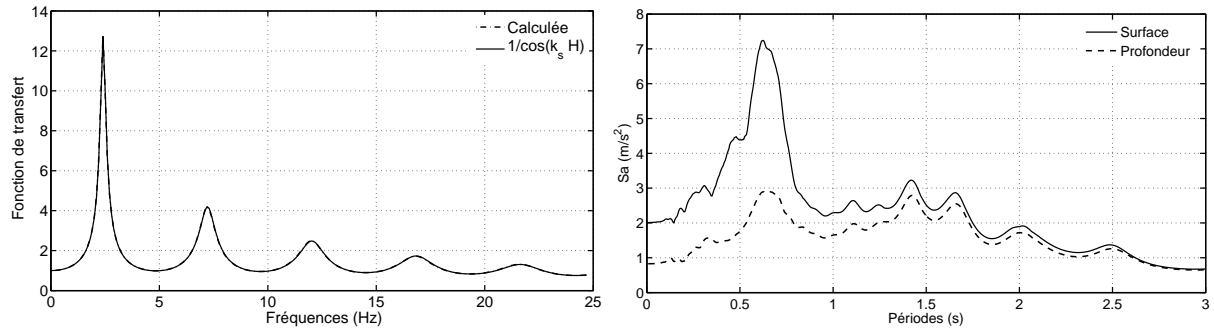


Figure 2.8 : Fonction de transfert de la couche et spectres des accélérations en surface et en profondeur

Une fois la déconvolution faite, on dispose de deux accélérogrammes, l'un calculé en profondeur et l'autre enregistré à la surface. On utilisera le premier dans la méthode globale à déconvolution (MGD) et le second dans la méthode de mouvement uniforme ajouté (MMA). L'équivalence entre les deux méthodes sera examinée en comparant leurs résultats respectifs.

Dans une première analyse, on vérifie les programmes FEMAT à travers le calcul des modes propres du barrage encastré et ceux du système complet sol - barrage. Les résultats, comparés à ceux obtenus en utilisant CASTEM et à ceux de Wilson, sont rapportés dans le tableau 2.3. Les effets du réservoir sont pris en compte en utilisant le concept de masses ajoutées de Westergaard exposé dans l'annexe B.

Tableau 2.3 : Périodes de vibrations libres (sec.) du barrage avec et sans ISS

Mode	Sans ISS			Avec ISS		
	FEMAT	CASTEM	Wilson ^[129]	FEMAT	CASTEM	Wilson ^[129]
1	0.329	0.327	0.335	0.465	0.467	0.455
2	0.157	0.155	0.158	0.385	0.382	0.371

Dans les modèles utilisés pour le calcul de ces modes, le sol est supposé encastré à la profondeur $H_s = 300 m$. Il est tronqué à une largeur de $L_s = 700 m$ qui est largement plus grande que $4H_B$, souvent considérée comme suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de troncature géométrique [130]. Le sol tronqué a été modélisé avec des éléments Q4 d'une taille fixée approximativement à $10 m$ selon la condition (1.64). La fréquence qui correspond à l'amplitude maximale du spectre de Fourier de l'accélérogramme est $f_{max} = 13.8 Hz$, d'où une taille maximale que

peuvent avoir les éléments de l'ordre de 17 *m*. Le maillage du barrage est plus raffiné. La taille des éléments est réduite à 5 *m* afin de mieux représenter les chargements et la continuité des efforts à l'interface sol - barrage. Cette discrétisation donne un maillage total de 2712 éléments et 2846 nœuds dans le programme FEMAT, et 2735 éléments avec 2821 nœuds dans CASTEM. Les périodes obtenues avec ces deux modèles sont très proches de celles calculées par Wilson, que ce soit avec ou sans la prise en compte de l'interaction sol-barrage.

Dans une seconde étude, on s'intéresse à la réponse temporelle du barrage. Les déplacements nodaux ont été déterminés par résolution de l'équation dynamique de la structure seule ou du système complet, c'est à dire avec ou sans prise en compte de l'ISS. La méthode pas à pas basée sur l'algorithme de Newmark a été utilisée dans CASTEM, et la méthode de superposition modale a été utilisée dans FEMAT.

Lors de la résolution pas à pas, la matrice d'amortissement a été évaluée selon l'amortissement de Rayleigh en prenant un taux d'amortissement critique de 5% pour le premier et le second mode de vibrations libres. Ceci revient à amortir les modes supérieurs avec des taux de plus en plus grands allant jusqu'à 10% pour le 20^{ème} mode et 14% pour le 50^{ème} mode. Lors de la résolution par superposition modale tous les modes ont été amortis avec le même taux d'amortissement de 5% et 50 modes ont été pris en compte dans la superposition. Mais compte tenu des faibles contributions des modes supérieurs, ces deux méthodes ont donné pratiquement les mêmes résultats comme le montre le tracé des déplacements en crête du barrage sur la figure 2.9(a). Dans cette réponse obtenue sans la prise en compte de l'ISS, on a trouvé un déplacement maximal de 1.78 *cm* avec FEMAT et de 1.74 *cm* avec CASTEM. Ces valeurs sont proches du déplacement maximal de 1.65 *cm* donné par Wilson.

La comparaison avec la réponse qui tient compte de l'ISS, tracée dans la figure 2.9(b), montre à quel point les déplacements relatifs entre la base et la crête peuvent être amplifiés à cause de la flexibilité de la fondation. Les valeurs maximales sont dans ce cas de l'ordre de 3.05 *cm* et 2.97 *cm* tels que calculés avec FEMAT et CASTEM, respectivement. Ces valeurs sont, elles aussi, proches de celle trouvée par Wilson et qui est 3.32 *cm*.

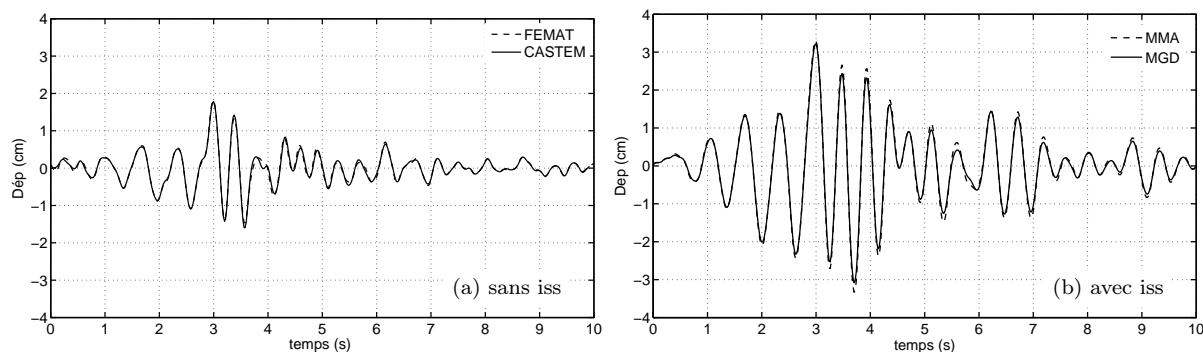


Figure 2.9 : Variations du déplacement horizontal relatif en crête du barrage

Par ailleurs, on voit aussi dans le tracé des déplacements sur la figure 2.9(b) que la prise en compte de l'ISS par la méthode globale à mouvement uniforme ajouté (MMA) donne exactement les mêmes résultats que la méthode globale à déconvolution (MGD). On rappelle que la méthode MMA se base sur l'hypothèse d'uniformité du mouvement en champ libre, ce mouvement ne variant pas le long de la base de la structure. Ceci est parfaitement justifié dans le cas des barrages poids en béton reposant généralement sur une base assez rigide, et les résultats le montrent bien.

Dans la méthode MMA, le mouvement de surface est appliqué tel quel, mais dans les forces d'inerties n'intervient que la masse de la structure. Cette méthode est adaptée donc aux structures massives de surfaces pour lesquelles l'interaction inertielle est prépondérante. Dans la méthode MGD, par contre, qui est plus générale, le mouvement de profondeur est appliqué à la base du modèle, mais il doit être d'abord déterminé par un calcul initial, et on doit vérifier que la réponse globale reproduit le mouvement de surface.

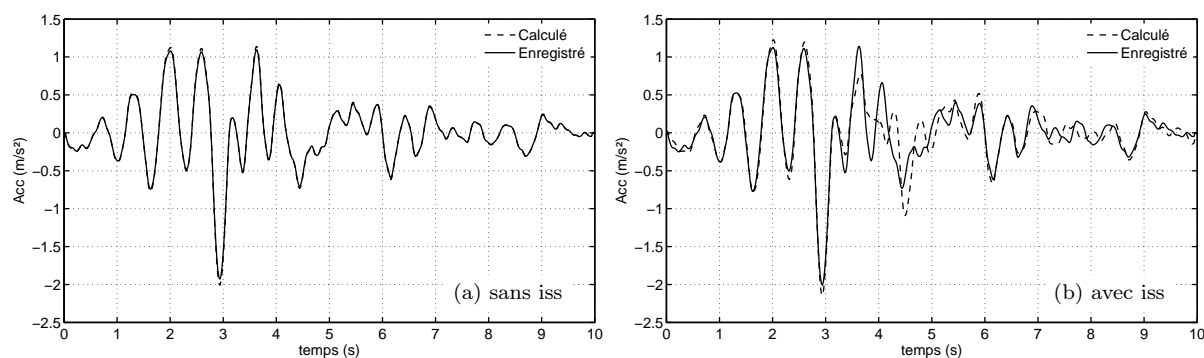


Figure 2.10 : Accélération totale en champ libre et accélération en bord de maillage pour le cas avec ISS

La comparaison, qu'on voit dans la figure 2.10, entre les accélérations d'un nœud à l'extrémité du maillage du sol et l'accélérogramme enregistré, montre que l'on obtient bien le mouvement en champ libre d'origine. Dans le cas où l'ISS n'est pas prise en compte, la réponse du sol en terme d'accélérations est exactement identique à l'accélérogramme enregistré (figure 2.10a). L'effet de l'ISS peut se voir dans la réponse globale (2.10b) où le mouvement de surface est quelque peu perturbé notamment dans les faibles accélérations enregistrées au delà des quatre premières secondes.

L'amplification de la réponse sismique du barrage par l'ISS peut être appréciée d'avantage en examinant les contraintes qui se développent à sa base au niveau du pied amont. Les contraintes sont indépendantes du repère des déplacements, les calculer avec le déplacement total ou relatif, ne change rien à leurs valeurs. Les figures 2.11 et 2.12 montrent respectivement l'évolution dans le temps des contraintes sismiques principales maximales et minimales calculées au pied amont du barrage avec et sans la prise en compte de l'ISS. On voit que l'amplification des efforts internes dus uniquement au chargement sismique peut atteindre 50%, le chargement statique

n'étant pas considéré dans ces calculs. La valeur de la contrainte de traction maximale passe de 2.89 MPa à 4.43 MPa lorsqu'on tient compte de la flexibilité du sol. Celle de la contrainte de compression augmente de 3.91 MPa à 4.57 MPa. Ces valeurs sont calculées avec CASTEM. Celles calculées avec FEMAT sont très proches. Les courbes montrées dans les deux figures sont presque identiques et l'écart entre les deux calculs ne dépasse pas 7%. Cette petite différence est due en grande partie au fait que les contraintes sont calculées différemment dans CASTEM et FEMAT. Elles sont évaluées dans FEMAT au centre de l'élément alors que dans CASTEM, elles sont évaluées aux points de Gauss avant d'être ramenées aux nœuds de l'élément.

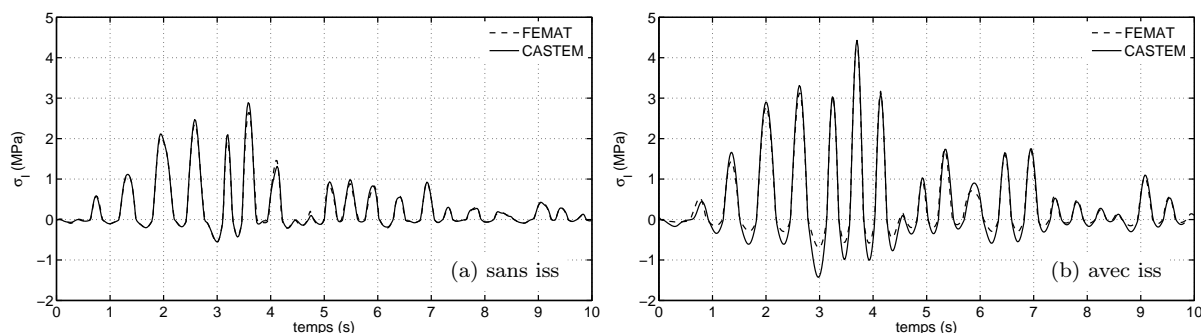


Figure 2.11 : Variations de la contrainte maximale au pied amont du barrage

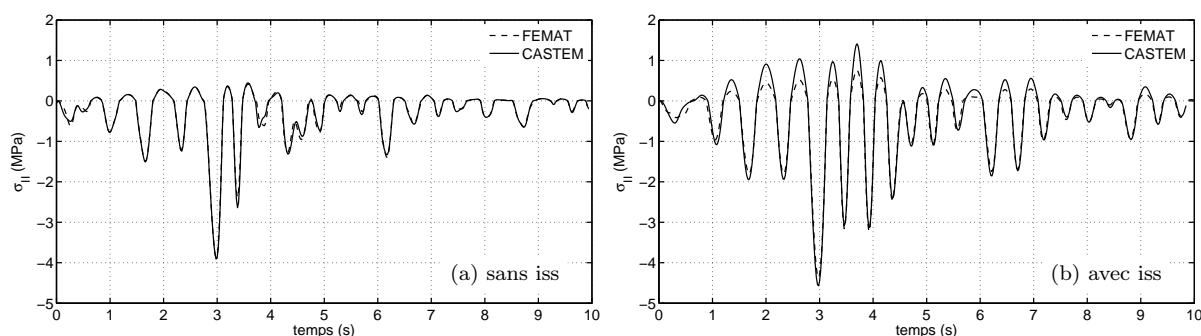


Figure 2.12 : Variations de la contrainte minimale au pied amont du barrage

On peut noter aussi à partir de la figure 2.11 que la contrainte de traction peut être très élevée, voire excéder la contrainte admissible du béton en traction notamment si l'on ajoute les contraintes statiques dues au poids propre et aux pressions hydrostatiques. La contrainte totale atteinte dans cet application est ainsi de l'ordre de 3.7 MPa en compression et 5.1 MPa en traction.

Finalement, on termine cette application en examinant l'apport de trois techniques de traitement de la troncature du domaine non borné du sol. La couche est supposée toujours limitée à la profondeur de 300 m telle que fixée au début, mais sa largeur est réduite de 700 m à 300 m puis à 150 m. Comme première technique (EFCR), les deux bords gauche et droit du domaine sont munis d'amortisseurs d'une constante d'amortissement calculée selon l'expression (1.96). Dans

un deuxième modèle (EFEI), des éléments infinis sont utilisés comme une extension naturelle du domaine tronqué. Enfin, une troisième solution exploitant l'opérateur AMOR de CASTEM est utilisée. Cet opérateur calcule la matrice d'amortissement d'une frontière absorbante de type White ou Lysmer pour des modélisations 2D. Par défaut c'est la condition de Lysmer qui est appliquée [44].

Les réponses, en termes de déplacements relatifs en crête du barrage, obtenues avec ces trois techniques, désignées par EFCR, EFEI et AMOR, respectivement, sont montrées sur les figures 2.13 et 2.14 pour les deux longueurs du sol tronqué.

On peut constater à partir des figures que lorsque la troncature géométrique est réalisée loin de la structure, les trois solutions sont équivalentes notamment en terme de valeurs maximales. De plus, elles sont proches de la solution obtenue par éléments finis sans traitement de la troncature. Les valeurs du déplacement maximal trouvées, lorsque $L_s = 300$ m, sont 2.63, 2.93, et 2.97 cm telles que calculées avec FFCR, FEEI et AMOR respectivement. Celle du modèle ne comportant aucun traitement de la troncature est 3.27 cm.

Cependant, lorsque la largeur du sol est réduite jusqu'à $L_s = 150$ m, la solution utilisant les amortisseurs (EFCR) amortit plus que celle utilisant les éléments infinis (EFEI) et celle de CASTEM utilisant l'opérateur AMOR. Ces deux dernières ont d'ailleurs donné des résultats presque identiques. En termes de valeurs maximales, les déplacements trouvés avec EFCR, EFEI et AMOR valent 2.75, 3.16 et 3.01 cm, respectivement. Par ailleurs, la solution qui n'utilise aucune condition de troncature conduit à une amplification des déplacements. La valeur maximale augmente jusqu'à 3.9 cm.

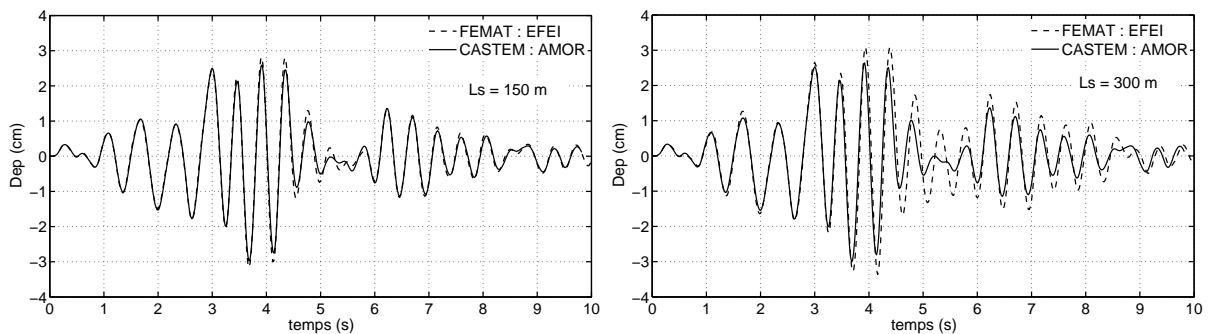


Figure 2.13 : Prise en compte de l'amortissement radiatif : Eléments infinis / CASTEM

2.6 Conclusion

A travers l'application traitant le cas d'un barrage poids en béton, réalisée en fin de ce chapitre, il a été montré que la méthode globale basée sur le mouvement uniforme ajouté (MMA) convient très bien aux structures massives de surface pour lesquelles l'interaction inertielle est prépondérante. Par rapport à la méthode de réduction de domaine (DRM) et à la méthode globale utilisant

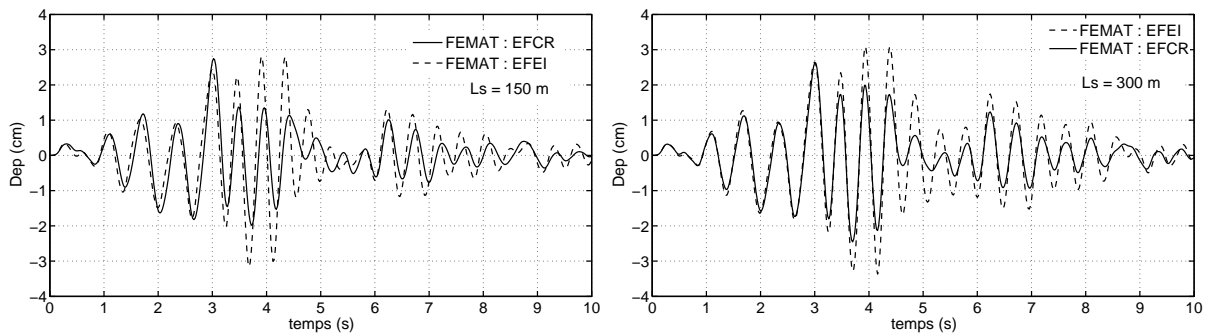


Figure 2.14 : Prise en compte de l'amortissement radiatif : Eléments infinis / Lysmer

la déconvolution du mouvement sismique (MGD), elle permet d'appliquer l'accélérogramme de surface sous forme de forces équivalentes en incluant uniquement l'inertie de la structure. Le calcul préliminaire de déconvolution est ainsi évité puisque cette méthode ne nécessite pas de déterminer la répartition du mouvement sismique en profondeur ou à la base du modèle. Cet avantage est renforcé par la possibilité d'effectuer les calculs dans le domaine temporel et de prendre en compte tout type de comportement du sol ou de la structure et toute condition de contact sol-structure.

Finalement, le traitement de la condition à la limite de troncature du sol a révélé que les éléments infinis sont équivalents à l'opérateur AMOR de CASTEM.

II : PRESSIONS HYDRODYNAMIQUES

Modélisation du fluide en éléments finis

3.1 Introduction

Ce chapitre présente la modélisation du fluide par la méthode des éléments finis. Les équations auxquelles on s'intéresse ici sont applicables aux mouvements de vibrations de petites amplitudes sans écoulement. Elles permettent de décrire les ondes de pressions hydrodynamiques générées par une source vibrante à l'intérieur du fluide ou répartie sur son contour. L'objectif visé est la préparation de la modélisation de l'interaction fluide-structure avec une application particulière aux cas des systèmes barrage-réservoir.

Les deux formulations les plus connues, à savoir la formulation en pression et la formulation mixte pression - potentiel de déplacements sont d'abord exposées. Elles sont suivies par la description des conditions aux limites nécessaires à la résolution du problème des réservoirs de barrages poids pour lesquels quelques solutions analytiques approchées existent. Un bref exposé de ces solutions est donné par la suite et les détails sont reportés à l'annexe B. La solution de Lee et Tsai est utilisée en fin de chapitre pour la validation des programmes développés sur la base des modèles d'éléments finis présentés ici. La solution de Westergaard bien connue comme concept de masse ajoutée est utilisée dans l'étude de la réponse sismique des barrages.

Le chapitre aborde aussi le problème de la troncature géométrique. On rapporte d'un côté, les conditions aux limites de radiation, qui sont en général, développées pour la formulation en pression et se basent sur les solutions analytiques, et on donne, de l'autre côté, les expressions des matrices élémentaires permettant le traitement de la troncature géométrique avec les éléments infinis.

3.2 Equations du mouvement

Lors d'une excitation sismique imposée à un système barrage-réservoir, les mouvements subis par la masse d'eau du réservoir font apparaître des pressions hydrodynamiques $p(\mathbf{x}, t)$ variant dans le temps et dans l'espace en fonction du mouvement imposé par la structure d'une part et par les parois de la retenue, d'autre part. Ces pressions s'ajoutent aux pressions hydrostatiques p_s dues à la gravité. La pression totale P régnant dans la masse d'eau en vibration est donc subdivisée en ces deux composantes et on s'intéresse ici à la composante hydrodynamique.

3.2.1 Formulation en pression

Il est connu que, dans le cadre de l'interaction fluide structure dans le cas des barrages, la contribution des contraintes dues aux effets visqueux est faible comparée aux effets induits par les forces d'inertie. Si l'on néglige les contraintes visqueuses, l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (3.1)$$

où \mathbf{v} est la vitesse particulaire et p la pression. Sous hypothèse de fluide linéairement compressible, le changement relatif de volume ($\Delta v/v$) est relié, selon la théorie de l'élasticité linéaire, à la pression appliquée p par le coefficient d'incompressibilité

$$p = -K \frac{\Delta v}{v} = -K \text{Tr}(\varepsilon) \quad (3.2)$$

où K est le module d'incompressibilité du fluide et ε est le tenseur des déformations dont la trace est la divergence du champ des déplacements \mathbf{u}_ℓ des particules du fluide :

$$\text{Tr}(\varepsilon) = \nabla \cdot \mathbf{u}_\ell \quad (3.3)$$

La dérivée de (3.2) par rapport au temps donne :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.4)$$

tenant compte de

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_\ell = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_\ell}{\partial t}$$

La vitesse \mathbf{v} peut être éliminée des équations en prenant la divergence de (3.1) et la dérivée par rapport au temps de (3.4)

$$\Delta p = -\rho \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -K \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

D'où l'équation de propagation d'ondes de pression :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Le milieu est caractérisé par sa densité et son coefficient d'incompressibilité dont le rapport est égale au carré de la vitesse de propagation d'onde :

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, le changement de volume $\Delta v/v$ reste quasiment nul quelle que soit la pression appliquée, ce qui donne un coefficient d'incompressibilité infini et donc une propagation d'onde instantanée ($c = \infty$). L'équation (3.5) se réduit alors à l'équation de Laplace :

$$\Delta p = 0 \quad (3.6)$$

Bien que cette dernière équation ne décrive pas la propagation et l'atténuation des surpressions hydrodynamiques, elle constitue cependant une bonne approximation pour l'estimation des effets du réservoir sur la réponse sismique des barrages. Elle est ainsi utilisée dans beaucoup de travaux traitant les problèmes de réponse sismique avec interaction fluide - structure [75, 79, 85].

3.2.2 Formulation mixte en pression - potentiel des déplacements

Dans cette formulation, le comportement de l'eau du réservoir est décrit par deux variables : la pression hydrodynamique p et le potentiel de déplacements ϕ . L'écoulement étant supposé irrotationnel, il est admis que les déplacements \mathbf{u}_ℓ des particules liquides dérivent d'un potentiel ϕ :

$$\mathbf{u}_\ell = \nabla \phi \quad (3.7)$$

Par conséquent, le champ des vitesses est donné par :

$$\mathbf{v} = \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.8)$$

L'équation de la dynamique (3.1) est réécrite en fonction de ϕ et p :

$$\rho \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\nabla p \quad (3.9)$$

A cette équation est ajoutée l'équation de conservation de la masse qui s'écrit pour un fluide homogène comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (3.10)$$

où la densité $\rho = \rho(t)$ est supposée constante dans l'espace.

Par ailleurs, l'équation de compressibilité linéaire (3.4) combinée à cette équation, permet de relier la variation de la densité à celle de la pression en éliminant $\nabla \mathbf{v}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.11)$$

En introduisant cette relation dans (3.10) on aboutit après simplification par ρ à :

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.12)$$

Les deux équations (3.9) et (3.12), associées à des conditions aux limites appropriées, permettent de décrire convenablement le comportement du réservoir. Toutefois leur utilisation directe afin de développer un modèle d'éléments finis conduit à des matrices non symétriques et à des termes de couplage dans la matrice d'amortissement du système algébrique couplé. Ceci complique, par rapport à la formulation en pression, le calcul des modes de vibrations du système complet barrage - réservoir.

Il convient donc de réécrire les équations précédentes sous d'autres formes. L'une d'elles, exposée dans [96] vient de la différentiation de l'équation du mouvement (3.9) par rapport aux variables d'espace.

$$\Delta p + \rho \Delta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.13)$$

Une autre possibilité introduite dans [96, 105] consiste à intégrer les deux équations, l'une par rapport à l'espace et l'autre par rapport au temps.

$$p + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.14)$$

$$p + \rho c^2 \Delta \phi = 0 \quad (3.15)$$

à partir desquelles on peut obtenir une équation d'onde pour le potentiel ϕ en éliminant p .

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.16)$$

Cette équation pose exactement le même problème que celui de la formulation en pression. Elle n'est d'aucun apport vis-à-vis de la symétrie de la formulation de l'interaction fluide-structure.

Finalement, pour décrire le réservoir avec une formulation mixte (ϕ, p) symétrique, on retient les deux équations (3.13) et (3.15). On verra par la suite que leur discrétisation conduit à un système linéaire symétrique.

3.3 Conditions aux limites

En se référant à la figure (3.1), la frontière du réservoir est constituée de la surface libre (Γ_S), du fond (Γ_F), et de l'interface avec le barrage (Γ_I). Dans la direction amont, le réservoir s'étend sur une grande distance supposée ici infinie. Une limite fictive de troncature géométrique est par conséquent insérée dans le modèle d'éléments finis. La condition de Sommerfield est utilisée en premier lieu, ensuite d'autres conditions et techniques seront présentées dans la section 3.5.

Dans ce qui suit, les conditions aux limites du problème de vibration du réservoir seront traitées en même temps pour les deux types de formulation présentées.

3.3.1 Contour complet

Sur tout le contour du réservoir l'équation (3.9) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + \rho \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_F \quad (3.17)$$

où $\ddot{\phi} = \partial^2 \phi / \partial t^2$ et $\partial\Omega_F = \Gamma_I \cup \Gamma_F \cup \Gamma_T \cup \Gamma_S$.

Cette condition permet d'annuler l'intégrale de surface présente dans la formulation variationnelle faible de (3.13).

3.3.2 Condition à l'interface fluide - structure

Sur l'interface fluide-structure Γ_I , on considère la continuité du champ des vitesses et des efforts (contraintes coté solide et pressions coté fluide) pour la formulation en pression et la continuité des déplacements pour la formulation mixte (ϕ, p) . L'équation d'équilibre (3.1) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho \ddot{\mathbf{u}}_I \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (3.18)$$

où $\ddot{\mathbf{u}}_I = \partial \mathbf{v} / \partial t$ représente l'accélération des particules solides à l'interface. Dans le cas d'une structure rigide en translation, ces accélérations sont égales à celles du sol $\ddot{\mathbf{u}}_g$ qui sont supposées connues. Par contre, dans le cas d'une structure souple elles restent inconnues et font partie du problème couplé. Elles comprennent toujours les accélérations sismiques $\ddot{\mathbf{u}}_g$ auxquelles s'ajoutent celles provenant des déformations de la structure $\ddot{\mathbf{u}}_s$. Il convient donc de les décomposer en ces deux composantes : $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_s + \ddot{\mathbf{u}}_g$.

Cette condition s'écrit pour la formulation mixte (ϕ, p) comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (3.19)$$

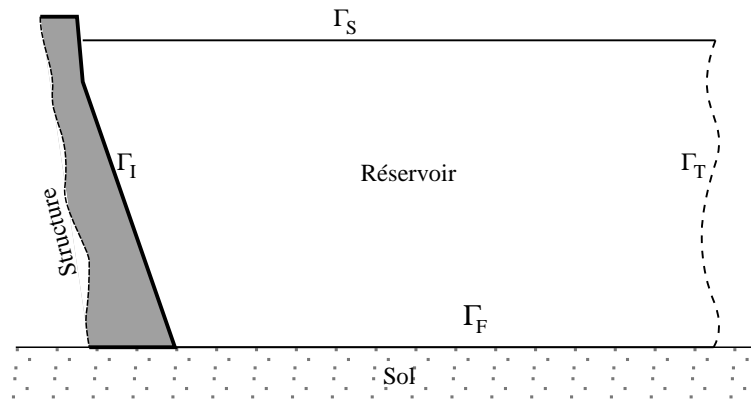


Figure 3.1 : Géométrie du réservoir - notations des bords

où \mathbf{u}_I est le déplacement couplé des particules fluides et solides à l'interface.

3.3.3 Condition à la surface libre

La condition la plus simple consiste à prendre une pression hydrodynamique nulle sur la surface de l'eau, ce qui revient à négliger les fluctuations de la surface libre. Ceci conduit également à un potentiel nul sur la surface.

$$p = 0 \quad ; \quad \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (3.20)$$

Cette condition est utilisée dans la plupart des travaux traitant le problème de la réponse sismique des barrages. De plus il a été montré que les effets de ballonnement ou de fluctuation de la surface libre de l'eau sur le comportement dynamique de l'ensemble barrage-réservoir sont souvent négligeables [65, 139]. Toutefois une approche simplifiée mais efficace permet de quantifier ces effets [140]. Elle revient à interpréter par une pression hydrostatique toute élévation ou abaissement de hauteur h de la surface libre par rapport à sa position initiale (figure 3.2).

La pression relative par rapport au niveau initial de la surface libre est :

$$p = \rho gh$$

Cette relation donne directement la condition à la limite sur le gradient du potentiel des déplacements :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = h = \frac{p}{\rho g} \quad \text{sur } \Gamma_S \quad (3.21)$$

L'application de l'équation de la dynamique (3.1) permet de relier la hauteur h à la pression p par l'intermédiaire de la vitesse particulaire évaluée à la surface libre ($\mathbf{v} = \partial h / \partial t$) :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{sur } \Gamma_S \quad (3.22)$$

Cette condition est connue sous le nom d'onde de surface linéarisée. Elle contribue à l'inertie du volume d'eau (matrice de masse) et son effet est important lorsque le liquide est contenu dans un réservoir de dimensions finies. Il est d'autant plus important que le rapport largeur/hauteur est plus faible [109].

3.3.4 Condition sur la surface en fond de réservoir

Le fond du réservoir est constitué de couches de sédiments saturés pouvant être considérés comme des solides poroélastiques. Ces couches peuvent avoir des épaisseurs très variables d'un barrage à un autre. Il a été montré dans plusieurs travaux que ces couches peuvent avoir un effet d'absorp-

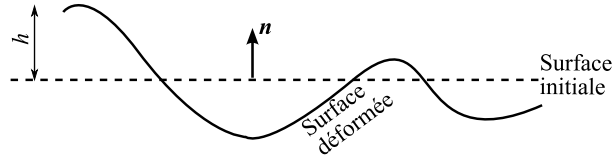


Figure 3.2 : Fluctuations de surface libre

tion sur les ondes de pression [29, 30, 49, 54, 69] pour des matériaux relativement perméables.

Si l'on néglige cet effet d'absorption, et si l'on considère le sol comme non poreux, on retrouve la même condition que celle de l'interface barrage - réservoir donnée par (3.18) et (3.19).

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho \ddot{\mathbf{u}}_f \cdot \mathbf{n} \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.23)$$

Les vecteurs déplacements et accélérations sont constitués chacun de la composante sismique \mathbf{u}_g et d'une composante due aux déformations du sol. Pour le cas d'un fond horizontal et d'excitation sismique aussi horizontale, le vecteur déplacement \mathbf{u} et le vecteur normal \mathbf{n} étant perpendiculaires, la condition se réduit simplement à :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.24)$$

Une méthode simple permettant de tenir compte des effets d'absorption d'onde consiste à exprimer le gradient normal de la pression et celui du potentiel en fonction des dérivées temporelles et des accélérations du sol. Pour cela, il est supposé que le sol est constitué d'une seule couche infinie et homogène dans laquelle, l'onde se propage perpendiculairement à l'interface eau - sol, ce qui donne un problème de propagation axiale selon la normale \mathbf{n} (Figure 3.3).

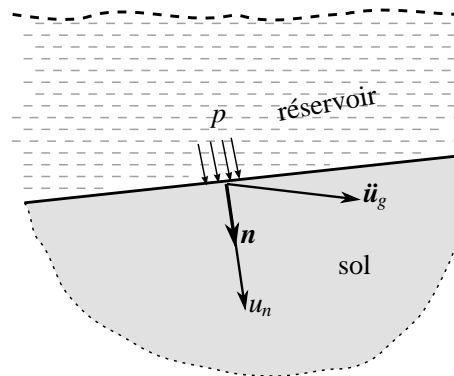


Figure 3.3 : Condition aux limites sur le fond

On note u_n la composante du champ des déplacements du sol dans la direction \mathbf{n} . Avec l'hypothèse d'élasticité linéaire, dans le cas uni-axial, la pression est liée à la déformation normale $\varepsilon_n =$

$\partial u_n / \partial \mathbf{n}$ par le module d'Young axial E_n de la couche.

$$p = -E_n \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.25)$$

Le gradient de pression est donné, selon l'équation d'équilibre (3.1), en fonction de l'accélération normale totale comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho(\ddot{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} + \ddot{u}_n) \quad (3.26)$$

Par ailleurs, l'équation d'ondes de compression "ondes P" s'applique pour u_n [103, 106] ; elle a pour expression :

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = 0 \quad (3.27)$$

$c_s^2 = E_n / \rho_s$ est la vitesse de propagation d'ondes P dans la couche homogène de densité ρ_s .

En supposant que la couche du sol est d'une épaisseur infinie, la seule onde incidente est celle réfractée à l'interface sol-eau. La solution de d'Alembert de l'équation (3.27) est : $u_n = G(r + c_s t)$, où r étant la distance mesurée dans la direction de \mathbf{n} .

En notant par G' la dérivée totale de G :

$$G' = dG/d(r + c_s t)$$

on peut écrire :

$$\frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_n}{\partial r} = G' \quad ; \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} = c_s G' \quad (3.28)$$

d'où :

$$\frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{c_s} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad (3.29)$$

Cette expression est reportée dans (3.25) puis, après dérivation par rapport au temps, on obtient une relation entre les accélérations relatives de la couche du sol et la pression de l'eau à l'interface sol-réservoir.

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\frac{c_s}{E_n} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.30)$$

L'équation d'équilibre à l'interface (3.26) peut maintenant être écrite comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \ddot{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} - \frac{\rho}{\rho_s c_s} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.31)$$

Cette relation est souvent donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial n} + q \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho \ddot{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.32)$$

Dans cette expression, on retrouve bien le cas d'interface rigide sol-eau pour lequel $c_s = \infty$ et $q = 0$. Le paramètre $q = \rho/(\rho_s c_s)$ est le coefficient d'amortissement, il est aussi appelé admittance. Il caractérise les effets d'absorption d'onde de pression hydrodynamique.

En remplaçant p par $-\rho_f \ddot{\phi}$, selon l'équation (3.14), la condition (3.32) s'écrit pour le potentiel des déplacements, après une double intégration par rapport au temps, comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = q \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.33)$$

Si le sol de fondation est compris dans le modèle numérique, les conditions (3.18) et (3.19) deviennent suffisantes. Les effets de dissipation seront pris en compte par la déformabilité de l'interface sol-eau et par les conditions aux limites qui seront appliquées à la partie modélisée du sol.

3.3.5 Condition à la limite sur la surface de troncature

Le principal effet dynamique dans cette région est dû à la propagation d'ondes de pression voyageant à partir de l'interface fluide-structure vers l'amont du réservoir supposé étendu assez loin pour être considéré comme infini et sans source de réflexion d'ondes. La solution générale de d'Alembert de l'équation (3.5) peut alors s'écrire comme suit :

$$p = F(x - c t) + G(x + c t)$$

Loin de la zone d'interaction, le front d'onde est supposé plan et fonction uniquement de la coordonnée horizontale x . En omettant la partie réfléchie $G(x + ct) = 0$, on peut alors écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = F' \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -c F' \quad (3.34)$$

avec

$$F' = \frac{dF(x - c t)}{d(x - c t)}$$

d'où :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{-1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma_T \quad (3.35)$$

Cette condition, appelée condition de radiation de Sommerfield, a été appliquée pour les problèmes d'interaction fluide-structure par Zienkiewicz [139, 142].

Cette même condition s'applique pour le potentiel des déplacements puisque ϕ est aussi régi par l'équation d'onde (équation 3.16).

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{-1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma_T \quad (3.36)$$

Plusieurs autres conditions de radiation ainsi que diverses techniques de couplage avec les éléments infinis ou éléments de frontière ont été introduites, essentiellement pour la pression ; la section 3.5 comporte plus de détails.

3.4 Solutions analytiques simplifiées pour le cas des réservoirs de barrages

Les méthodes d'analyse simplifiée de la réponse sismique des barrages sont très utiles aux ingénieurs . Ces méthodes sont d'ailleurs reprises dans les recommandations de calcul. Les pressions hydrodynamiques entrant dans les calculs de barrages sont couramment évaluées en utilisant le concept de masse ajoutée de Westergaard proposé en 1933 [128]. La solution harmonique de Westergaard est basée sur l'hypothèse de barrage rigide à parement vertical. Elle est limitée à une gamme des fréquences d'excitation déterminée à partir de la fréquence du mode fondamental du réservoir. Chopra [37] en 1967 a développé une méthode applicable pour toute la gamme des fréquences d'excitation. La restriction de l'hypothèse de barrage rigide a été levée dans une autre solution semi-analytique qui utilise la superposition modale [36] pour inclure les déformations du barrage. D'autres solutions ont par la suite été proposées, apportant chacune une contribution et une amélioration de la solution ou traitant un aspect particulier du problème.

Les solutions de Westergaard et de Chopra fournissent les pressions hydrodynamiques générées par des vibrations harmoniques imposés aux niveau du parement amont du barrage. Le parement est supposée vertical et la condition de pression nulle loin de l'interface est respectée en faisant tendre vers l'infini la coordonnée horizontale x . La solution de Humar et Roufaïel [71] permet de considérer le réservoir avec une largeur finie et d'inclure à une distance $x = L$ la condition à la limite de Sommerfield (3.35). Par ailleurs, ces auteurs proposent à partir de leur solution une condition de radiation fonction de la fréquence de l'excitation.

Les effets d'absorption d'onde par le fond du réservoir sont inclus dans la solution de la référence [28] qui reprend celle de Fenves et Chopra [53, 54]. Elle est obtenue dans le domaine fréquentiel et fournit une expression de la pression comportant 12 termes fonctions de la fréquence. Dans cette solution, le barrage est supposé rigide et le parement amont vertical.

L'inclinaison du parement amont est prise en compte dans la solution de Chwang [119] pour laquelle la compressibilité du réservoir a été négligée.

Une réponse transitoire à une excitation quelconque incluant les déformations du barrage a été développée par Lee et Tsai [77] en utilisant les transformées de Laplace. Cette expression sera utilisée ultérieurement pour la validation des modèles numériques des réservoirs de barrages.

Il est à souligner que dans toutes les solutions analytiques connues, il n'est tenu compte que des effets du barrage sur le réservoir. La modification des propriétés dynamiques de la structure par les pressions n'est pas directement prise en compte. Seule une solution du problème couplé peut rendre compte convenablement des effets d'interaction fluide-structure.

On a reporté dans l'annexe B les solutions de Westergaard et de Chopra qui sont les plus connues, et on donne brièvement d'autres solutions notamment celle de Humar et Roufaïel [71] et celle de Lee et Tsai [77].

3.5 Condition de radiation

La nature de la condition aux limites à imposer sur le bord amont du réservoir dépend de la forme géométrique de la cuvette. Généralement, les réservoirs des grands barrages s'étendent sur une distance très éloignée de la structure du barrage. Les ondes de pressions hydrodynamiques générées par les vibrations de la structure se propagent vers l'amont du réservoir sans se réfléchir et on admet qu'à une distance supposée infinie, la pression s'annule.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x, y, t) = 0$$

x est la distance horizontale mesurée à partir de l'interface barrage-réservoir.

Dans les modèles numériques nécessitant une troncature géométrique, une limite fictive doit être placée à une position fixée aussi proche que possible de l'interface afin de limiter la taille du système d'équations à résoudre. Une condition doit ainsi être appliquée à cette limite afin de représenter la partie du domaine tronquée, d'où les conditions aux frontières de radiation.

Il existe aussi une multitude de techniques qui permettent de représenter les milieux non bornés avec différents niveaux de difficulté et d'efficacité, parmi lesquelles on peut citer les couches absorbantes, les éléments infinis, les éléments de frontière, ... etc. Un exposé détaillé de ces méthodes est présenté par Givoli [62].

Plusieurs conditions aux limites de troncature, dites aussi conditions de radiation ont été développées par plusieurs auteurs. Dans cette section, ne seront reprises que celles qui sont très répandues en dynamique des barrages. La plus utilisée des conditions de radiation est sans doute celle de Sommerfeld (équations 3.35 et 3.36). Cependant, il est souvent noté que cette condition n'est pas assez performante et nécessite une position de la surface de troncature assez éloignée de la structure. De plus elle s'est avérée non satisfaisante pour les fréquences d'excitation supérieures à celle du mode fondamental du réservoir [71, 75, 85, 86, 114].

La condition de Sommerfeld peut être considérée comme la première condition de radiation qui a servi au développement d'autres conditions plus générales. En particulier, la solution de Higdom d'ordre N s'exprime pour une fonction $u(x, y)$ comme suit [66] :

$$\prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, y) = 0 \quad (3.37)$$

Les termes c_i sont des paramètres physiques du problème. La condition de Sommerfeld apparaît

comme condition de Higdom d'ordre 1 avec $c_1 = c$, célérité des ondes de pression.

En se basant sur la condition de Higdom, Parrinello et Borino [101] ont proposé une condition alternative à celle de Sommerfield en utilisant une formulation du réservoir en déplacements plutôt qu'en pression. Un schéma d'intégration pas à pas des équations à été modifié au prix de certaines complications pour inclure les conditions d'ordre 1 et d'ordre 2.

La plupart des conditions de radiation développées pour la formulation en pression se basent sur les solutions analytiques rapportées dans l'annexe B. Hummar et Roufaiel [71] proposent à partir de leur solution (équation B.12) une condition fonction du rapport entre la fréquence d'excitation ω et la fréquence ω_1 du mode fondamental du réservoir, qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < \omega_1 \\ -\frac{1}{c} \sqrt{1 - (\omega_1/\omega)^2} \frac{\partial p}{\partial t} & \text{si } \omega > \omega_1 \end{cases} \quad (3.38)$$

Pour les grandes valeurs de ω , cette expression se réduit à celle de Sommerfield (3.35). Lorsque $\omega > \omega_2$ la condition n'est pas tout à fait exacte, les termes venant de modes supérieurs ayant été négligés. Les auteurs ont trouvé qu'à une position à $L = 3H$ de la limite de troncature la condition donne de meilleurs résultats que celle de Sommerfield pour les fréquences d'excitation $0 < \omega < \omega_2$.

Sharan [114, 115] a montré que la condition $\partial p/\partial x = 0$ ne représente pas correctement le comportement de la pression à l'infini si le fluide est incompressible. Elle n'est autre que la condition de Sommerfield avec $c = \infty$. En utilisant la solution analytique sous l'hypothèse de réservoir incompressible et de barrage rigide avec parement vertical, il trouve la condition suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\pi}{2H} p \quad (3.39)$$

Avec cette condition, la surface de troncature peut être positionnée à proximité de la structure. De plus les résultats ont montré que cette condition est également applicable au cas d'un parement incliné. Dans le cas d'un réservoir compressible, la condition dépend de la fréquence d'excitation et se met sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\omega}{c} \beta p \quad (3.40)$$

dans laquelle α et β sont des paramètres d'amortissement pouvant être obtenus avec le rapport $\xi = (\partial p/\partial x)/(\partial p/\partial t)$ tiré de la solution de Chopra (B.7)

$$\xi = \frac{\partial p}{\partial x} / \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{i \sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-\mu_n x/H} \cos(\lambda_n y)}{\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\mu_n} e^{-\mu_n x/H} \cos(\lambda_n y)} \quad (3.41)$$

k_n et μ_n sont définis dans (B.8). Sachant $\partial p/\partial t = i\omega p$, alors $\alpha = \Re(\xi)$ et $\beta = \Im(\xi)$

Les résultats obtenus par Sharan en utilisant cette condition ont montré que la limite de troncature peut être rapprochée de la structure jusqu'à $x = 0.2H$ quelque soit la fréquence d'excitation utilisée. Les coefficients d'amortissement α et β dépendent des coordonnées des points sur la surface de troncature. Il est cependant possible de négliger les seconds termes et les suivants dans les sommes de l'expression de ξ si la fréquence de l'excitation est inférieure à celle du second mode de vibration ($\omega < \frac{3\pi}{2} \frac{c}{H}$), notamment pour une position de troncature assez éloignée de la structure. ξ peut être approché par :

$$\xi \approx \frac{1}{\omega H} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega H}{c}\right)^2}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \text{ et } \beta = -\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\Omega}\right)^2 - 1} & \text{pour } \Omega < \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2\Omega}\right)^2} \text{ et } \beta = 0 & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \Omega < 3\frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad \Omega = \frac{\omega H}{c}$$

Si $\Omega > 3\pi/2$, le second terme de la somme n'est pas négligeable même si x est très grand. Dans ce cas, les valeurs des paramètres d'amortissement deviennent très sensibles à la position (x, y) des points de la limite de troncature. La condition de Sommerfield peut être appropriée comme estimation ($\alpha = 1$ et $\beta = 0$)

Dans le cas du réservoir incompressible, Maity [85] trouve l'expression du coefficient ξ comme suit :

$$\xi = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n+1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x/H} \cos(\lambda_n y)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n+1}}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n x/H} \cos(\lambda_n y)} ; \quad \lambda_n = -(2n-1)\pi/2 \quad (3.42)$$

L'auteur a montré, par plusieurs exemples traités avec un modèle d'éléments finis, que la taille du maillage du réservoir peut être considérablement réduite. La limite de troncature peut être positionnée à seulement $0.05H$ même si le parement amont est incliné ou comprend deux pentes différentes.

Une utilisation directe de la dérivée par rapport à x de la solution exacte pour un réservoir incompressible a été envisagée par Küçükarıslan [74, 74, 75]. L'expression

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2a\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n+1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x/H} \cos(\lambda_n y/H) ; \quad \lambda_n = -(2n-1)\pi/2 \quad (3.43)$$

a été discrétisée et introduite dans un modèle d'éléments finis. Cette procédure a permis de faire rapprocher la position de la surface de troncature jusqu'à $x = 0.1H$

3.6 Discrétisation en éléments finis

Le domaine géométrique du fluide (réservoir) est subdivisé en éléments isoparamétriques. Les variables de champ continues p et ϕ sont remplacées par des interpolations nodales entre les valeurs qu'elles prennent aux nœuds des éléments. La pression et le potentiel des déplacements sont approchés comme suit :

$$\begin{aligned} p &\approx \sum_{i=1}^{n_{ep}} N_{pi} p_i \quad ; \quad p \approx \mathbf{N}_p \mathbf{P}_e \\ \phi &\approx \sum_{i=1}^{n_{e\phi}} N_{\phi i} \phi_i \quad ; \quad \phi \approx \mathbf{N}_\phi \boldsymbol{\Phi}_e \end{aligned} \quad (3.44)$$

où n_{ep} et $n_{e\phi}$ désignent le nombre de nœuds des éléments choisis pour la discrétisation des variables p et ϕ respectivement. A noter qu'il est tout à fait possible de choisir deux types d'approximations différentes pour les deux variables, d'où la distinction dans les fonctions de forme qui sont regroupées dans deux vecteurs lignes \mathbf{N}_p et \mathbf{N}_ϕ . Les vecteurs colonnes \mathbf{P} et $\boldsymbol{\Phi}$, contiennent les valeurs nodales inconnues de p et ϕ . Les valeurs discrétisées des gradients des deux variables sont :

$$\nabla p \approx \nabla \mathbf{N}_p \mathbf{P}_e \quad ; \quad \nabla \phi \approx \nabla \mathbf{N}_\phi \boldsymbol{\Phi}_e \quad (3.45)$$

avec :

$$\nabla \mathbf{N} = \left[\nabla N_{p_1} \quad \nabla N_{p_2} \quad \dots \quad \nabla N_{p_{n_e}} \right] \quad (3.46)$$

n_e est le nombre de nœuds de l'élément utilisé pour la discrétisation de p ou ϕ .

Les perturbations sont remplacées par :

$$\delta p \approx \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{N}_p^T \quad ; \quad \delta \phi \approx \delta \boldsymbol{\Phi}_e^T \mathbf{N}_\phi^T \quad (3.47)$$

et leurs gradients par :

$$\nabla \delta p \approx \delta \mathbf{P}_e^T \nabla \mathbf{N}_p^T \quad ; \quad \nabla \delta \phi \approx \delta \boldsymbol{\Phi}_e^T \nabla \mathbf{N}_\phi^T \quad (3.48)$$

Les transposées sont introduites dans les écritures de discrétisation par éléments finis. Elles assurent la simplification des vecteurs lignes contenant les perturbations.

3.6.1 Discrétisation de la formulation en pression

La forme intégrale faible de l'équation d'onde de pression (3.5) est :

$$-\int_{\Omega_F} \nabla \delta p \cdot \nabla p \, d\Omega - \int_{\Omega_F} \delta p \frac{1}{c^2} \ddot{p} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \delta p \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma = 0 \quad (3.49)$$

Le contour $\partial\Omega_F$ est constitué des quatre parties décrites dans la section 3.3. L'intégrale de contour est par conséquent subdivisée en quatre intégrales prenant en compte chacune des conditions citées.

$$\int_{\partial\Omega_F} \delta p \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = - \int_{\Gamma_S} \delta p \frac{1}{g} \ddot{p} d\Gamma - \int_{\Gamma_I} \delta p \rho (\dot{\mathbf{u}}_s + \dot{\mathbf{u}}_g) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_F} \delta p (\rho \ddot{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} + q\dot{p}) d\Gamma - \int_{\Gamma_T} \delta p \frac{1}{g} \dot{p} d\Gamma \quad (3.50)$$

Il est à rappeler que dans le modèle d'interaction complet contenant le sol de fondation, le calcul de l'intégrale sur Γ_F n'est pas nécessaire. De même, le dernier terme qui prend en compte les effets de troncature par la condition de radiation de Sommerfield peut changer d'expression en fonction du choix de la condition de radiation. Il peut aussi être remplacé par d'autres termes découlant de l'utilisation d'éléments de frontière, d'éléments infinis ou d'autre techniques de prise en compte de la troncature géométrique.

En utilisant les approximations (3.44), la forme intégrale faible ci-dessus conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{C}_F \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}_F \mathbf{P} = \mathbf{F}_P \quad (3.51)$$

dont les matrices sont appelées, par analogie aux matrices découlant de la discrétisation des solides, "matrice masse fluide" \mathbf{M}_F , "matrice amortissement" \mathbf{C}_F et "matrice rigidité" \mathbf{K}_F . Le vecteur \mathbf{F}_P tient compte de l'excitation par le transfert des accélérations des bords solides en chargement équivalent.

La matrice \mathbf{M}_F tient compte des effets d'inertie du volume entier et des effets des fluctuations de la surface libre.

$$\mathbf{M}_F = \sum_{\Omega_F^{(e)}} \int_{\Omega_F^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p d\Omega + \sum_{\Gamma_S^{(e)}} \int_{\Gamma_S^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{g} \mathbf{N}_p d\Gamma \quad (3.52)$$

Le signe \sum désigne l'opérateur d'assemblage sur les éléments. Les éléments de volume sont désignés par $\Omega_F^{(e)}$ et ceux de la surface libre par $\Gamma_S^{(e)}$. Les fonctions de forme évaluées sur la surface se réduisent à celles des éléments linéiques pour un problème plan et à celles des éléments surfaciques pour un problème 3D.

La matrice \mathbf{C}_F regroupe les deux types de dissipation d'onde : par radiation au niveau de la limite de troncature et par absorption au niveau du fond.

$$\mathbf{C}_F = \sum_{\Gamma_T^{(e)}} \int_{\Gamma_T^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{c} \mathbf{N}_p d\Gamma + \sum_{\Gamma_F^{(e)}} \int_{\Gamma_F^{(e)}} \mathbf{N}_p^T q \mathbf{N}_p d\Gamma \quad (3.53)$$

Dans le calcul des matrices élémentaires des éléments du bord définissant le fond du réservoir, intervient uniquement le terme $(\delta p q \dot{p})$ qui contribue à la dissipation. Le second terme de la condition à la limite (3.32) contribue au vecteur chargement.

La matrice \mathbf{K}_F est usuelle. Elle vient de la discrétisation de l'opérateur Laplacien

$$\mathbf{K}_F = \sum_{\Omega_F^{(e)}} \int_{\Omega_F^{(e)}} \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega \quad (3.54)$$

Le vecteur du chargement \mathbf{F}_P est une concentration des forces de surface induites par les accélérations des points aux interfaces Γ_I et Γ_F .

$$\mathbf{F}_P = \sum_{\Gamma_I^{(e)}} \int_{\Gamma_I^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \ddot{\mathbf{u}}_s \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \sum_{\Gamma_I^{(e)}} \int_{\Gamma_I^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \ddot{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \sum_{\Gamma_F^{(e)}} \int_{\Gamma_F^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \ddot{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.55)$$

Dans le cas où le barrage est considéré comme flexible, les accélérations de l'interface Γ_I sont inconnues et le vecteur $\ddot{\mathbf{u}}_s$ doit être remplacé par sa forme discrétisée $\ddot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{N}_u \ddot{U}$. Le premier terme de (3.55) disparaît du vecteur \mathbf{F}_P mais donne naissance à la matrice d'interaction :

$$\mathbf{Q} = \sum_{\Gamma_I^{(e)}} \int_{\Gamma_I^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.56)$$

A souligner que si le sol est compris dans le modèle numérique, la contribution de Γ_F à la matrice \mathbf{C}_F dans (3.53) s'annule mais rentre dans la matrice d'interaction qui devient :

$$\mathbf{Q} = \sum_{\Gamma_I^{(e)}} \int_{\Gamma_I^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \sum_{\Gamma_F^{(e)}} \int_{\Gamma_F^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.57)$$

3.6.2 Discrétisation de la formulation mixte

Afin d'aboutir à un terme de couplage qui ne serait pas différent, du moins par sa forme, de celui obtenu dans les formes intégrales précédentes, le problème variationnel associé aux équations de la formulation mixte (ϕ, p) s'écrit en multipliant (3.13) et (3.15) par les fonctions poids $\delta\phi$ et δp , respectivement.

$$\int_{\Omega_F} \delta\phi (\Delta p + \rho \Delta \ddot{\phi}) \, d\Omega = 0 \quad ; \quad \int_{\Omega_F} \delta p (p + \rho c^2 \Delta \phi) \, d\Omega = 0 \quad (3.58)$$

La forme intégrale faible de la première équation est :

$$-\int_{\Omega_F} \nabla \delta\phi \cdot (\nabla p + \rho \nabla \ddot{\phi}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \delta\phi \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + \rho \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\Gamma = 0 \quad (3.59)$$

Compte tenu de (3.17) l'intégrale de surface sur $\partial\Omega_F$ s'annule et la forme intégrale faible se réduit à :

$$\int_{\Omega_F} \nabla \delta\phi \cdot \nabla p \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \nabla \delta\phi \cdot \rho \nabla \ddot{\phi} \, d\Omega = 0 \quad (3.60)$$

En divisant par ρc^2 , la seconde intégrale de (3.58) s'écrit sous la forme faible suivante :

$$\int_{\Omega_F} \delta p \frac{1}{\rho c^2} p \, d\Omega - \int_{\Omega_F} \nabla \delta p \cdot \nabla \phi \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \delta p \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma = 0 \quad (3.61)$$

Comme précédemment, on subdivise l'intégrale de surface en quatre parties pour prendre en compte les différentes conditions aux limites sur le potentiel des déplacements.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_F} \delta p \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_I} \delta p (\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_g) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_S} \delta p \frac{1}{\rho g} p \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_T} \delta p \frac{1}{c} \dot{\phi} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_F} \delta p (q\dot{\phi} + \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.62)$$

Comme il a été procédé pour la discrétisation de la forme intégrale associée à la formulation en pression, l'utilisation des approximations de p et de ϕ dans les formes intégrales mixtes (3.60) et (3.61) ci-dessus fournit, compte tenu de (3.62), les deux systèmes algébriques suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\phi p} \mathbf{P} + \mathbf{M}_{\phi\phi} \ddot{\phi} = 0 \\ \mathbf{K}_{pp} \mathbf{P} + \mathbf{K}_{p\phi} \phi + \mathbf{C}_{p\phi} \dot{\phi} = \mathbf{F}_\phi \end{cases} \quad (3.63)$$

avec :

$$\mathbf{K}_{p\phi} = \mathbf{K}_{\phi p}^T = \sum_{\Omega_F^{(e)}} \int_{\Omega_F^{(e)}} \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_\phi \, d\Omega \quad (3.64)$$

$$\mathbf{M}_{\phi\phi} = \sum_{\Omega_F^{(e)}} \int_{\Omega_F^{(e)}} \nabla \mathbf{N}_\phi^T \rho \nabla \mathbf{N}_\phi \, d\Omega \quad (3.65)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = \sum_{\Omega_F^{(e)}} \int_{\Omega_F^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho c^2} \mathbf{N}_p \, d\Omega + \sum_{\Gamma_S^{(e)}} \int_{\Gamma_S^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho g} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \quad (3.66)$$

$$\mathbf{C}_{p\phi} = \sum_{\Gamma_T^{(e)}} \int_{\Gamma_T^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{c} \mathbf{N}_\phi \, d\Gamma + \sum_{\Gamma_F^{(e)}} \int_{\Gamma_F^{(e)}} \mathbf{N}_p^T q \mathbf{N}_\phi \, d\Gamma \quad (3.67)$$

$$\mathbf{F}_\phi = \sum_{\Gamma_I^{(e)}} \int_{\Gamma_I^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \sum_{\Gamma_I^{(e)}} \int_{\Gamma_I^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \sum_{\Gamma_F^{(e)}} \int_{\Gamma_F^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.68)$$

Les deux équations (3.63) peuvent être réécrites en un seul système couplé symétrique comme

suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{P}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\mathbf{P}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{P}\mathbf{P}} & \mathbf{K}_{\mathbf{P}\phi} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{P}\phi}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_\phi \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

Pour une analyse du réservoir seul, il est possible d'exprimer le vecteur \mathbf{P} en fonction de $\boldsymbol{\phi}$ à partir de la première équation de (3.63) :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{K}_{\phi\mathbf{P}}]^{-1} [\mathbf{M}_{\phi\phi}] \ddot{\boldsymbol{\phi}} \quad (3.70)$$

et de le remplacer dans le deuxième système afin d'obtenir une seule équation matricielle différentielle du second ordre pour $\boldsymbol{\phi}$:

$$([\mathbf{K}_{\mathbf{P}\mathbf{P}}][\mathbf{K}_{\phi\mathbf{P}}]^{-1}[\mathbf{M}_{\phi\phi}]) \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{C}_{\mathbf{P}\phi} \dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{K}_{\mathbf{P}\phi} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{F}_\phi \quad (3.71)$$

Dans le cas où les deux variables p et ϕ sont discrétisées au même degré d'interpolation, les fonctions de forme sont les mêmes ($\mathbf{N}_p = \mathbf{N}_\phi$), alors $\mathbf{M}_{\phi\phi} = \rho\mathbf{K}_{\phi\mathbf{P}}$ et aucune inversion matricielle n'est nécessaire dans les calculs. De plus, une fois que la solution est obtenue pour le vecteur $\boldsymbol{\phi}$, le vecteur \mathbf{P} s'obtient facilement avec multiplication par ρ .

3.7 Traitement de la troncature géométrique avec les éléments infinis

L'objectif visé avec l'emploi des éléments infinis dans l'analyse du domaine fluide non borné est de réduire la taille du maillage et de réaliser des économies en terme de mémoire de stockage et de temps d'exécution. Ces éléments permettent aussi d'éviter la construction de la matrice \mathbf{C}_F associée à la condition de radiation. En général, deux approches peuvent être utilisées pour la construction des éléments infinis. L'approche directe par des fonctions de forme décroissantes et l'approche inverse par des transformations géométriques ascendantes. Ces deux approches sont décrites dans l'annexe C. L'approche directe par des fonctions décroissantes est appliquée dans ce travail afin d'établir des éléments infinis à partir des l'éléments finis isoparamétriques à huit nœuds (Q8) et à quatre nœuds (Q4).

Les modifications requises par l'insertion de cet élément dans un programme de calcul par éléments finis concernent essentiellement l'intégration numérique et l'évaluation des nouvelles fonctions de forme et de leurs dérivées. Les points et poids d'intégration numérique sont calculés selon la méthode de Gauss-Laguerre (annexe A.2) puis modifiés pour l'intervalle $[-1, +\infty]$. Les matrices élémentaires "masse fluide" et "rigidité fluide" prennent, pour les éléments infinis, les expressions suivantes :

$$[\mathbf{K}_{\mathbf{Fe}}^\infty]_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\infty} [\mathcal{N}_{j,\xi}^\infty \quad \mathcal{N}_{j,\eta}^\infty] \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_{i,\xi}^\infty \\ \mathcal{N}_{i,\eta}^\infty \end{Bmatrix} \det(\mathbf{J}) \, d\xi \, d\eta \quad (3.72)$$

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{Fe}}^\infty]_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\infty} \mathcal{N}_j^\infty \frac{1}{c^2} \mathcal{N}_i^\infty \det(\mathbf{J}) \, d\xi \, d\eta \quad (3.73)$$

où \mathbf{J} est le Jacobien de l'élément.

3.8 Validation

On considère un domaine fluide rectangulaire représentant un réservoir d'un barrage de hauteur H . Le domaine est délimité à gauche par le parement amont du barrage supposé infiniment rigide. Le fond est horizontal et le sol est supposé indéformable en mouvement vibratoire horizontal $\ddot{u}_g(t)$. Le domaine est considéré comme ouvert du côté droit et le réservoir s'étend à l'infini vers l'amont.

Dans le modèle obtenu par éléments finis (EF), représenté sur la figure 3.4a, la géométrie est tronquée à une distance L_F mesurée à partir de la paroi rigide. La partie tronquée est représentée soit par des éléments infinis (modèle EFEI fig 3.4b) soit par une frontière absorbante (modèle AMOR, figure 3.4c).

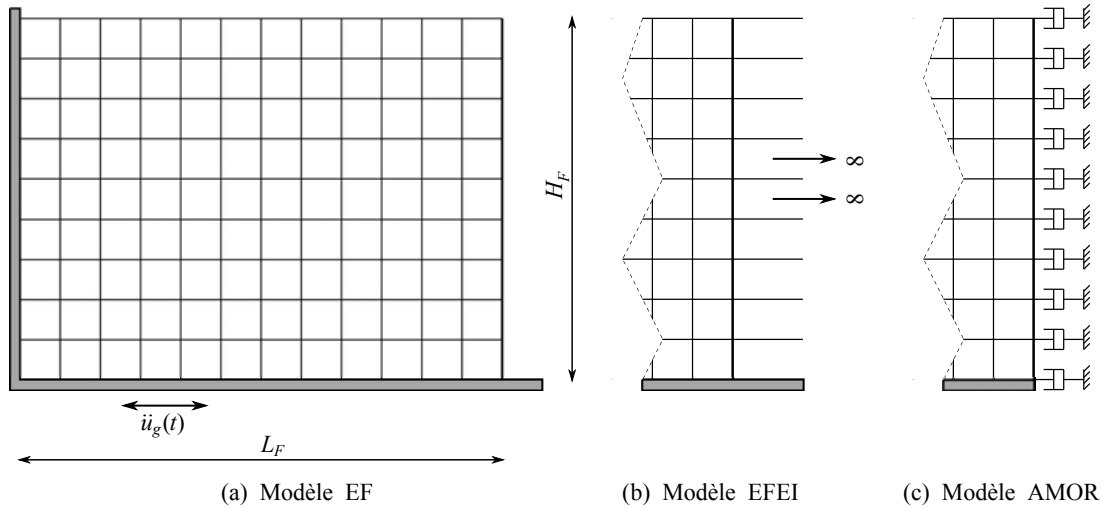


Figure 3.4 : Modèles du réservoir

Dans une première analyse, on s'intéresse à l'évaluation du comportement dynamique du domaine fluide à travers le calcul des périodes propres. Ensuite on détermine les pressions hydrodynamiques dues à des accélérations sismiques imposées sur le bord droit par une paroi rigide. Pour cela, on réutilise l'enregistrement des 10 premières secondes du séisme de Loma Prieta à la station San Francisco Bay Area décrit dans la section 2.5 et tracé dans la figure 2.7. Les calculs seront effectués avec le programme FEMAT (annexe E) et les résultats seront confrontés à ceux obtenus avec le code CASTEM et à la solution exacte de Lee et Tsai [77] (annexe B).

Les périodes propres des quatre premiers modes du réservoir, évaluées avec les deux modèles EF

et EFEI de FEMAT pour deux positions de la limite de troncature sont 0.28, 0.093, 0.056 et 0.040 secondes. Dans l'extraction de ces modes on tient compte de leurs taux de participation modale. Pour les autres modes, les calculs produisent des résultats convergents, mais les taux de participation obtenus sont nuls ou très faibles et les périodes propres correspondantes ne sont pas rapportées.

Les valeurs des périodes propres trouvées en utilisant les deux modèles (EF et EFEI) sont les mêmes quelle que soit la position de la limite de troncature. De plus elles coïncident exactement avec celles évaluées en utilisant CASTEM et avec les valeurs exactes données par l'expression (B.5) de l'annexe B. Ce résultat nous permet de valider les programmes de construction des matrices fluides \mathbf{K}_F et \mathbf{M}_F constituant le système d'équations (3.51). Le calcul de la réponse temporelle permettra quant à lui de vérifier la matrice \mathbf{C}_F , le vecteur force \mathbf{F} et l'apport des éléments finis. La matrice d'interaction \mathbf{Q} sera vérifiée ailleurs par un calcul de la réponse d'un système couplé barrage-réservoir

Les périodes propres du domaine fluide en termes de pressions peuvent être interprétées comme étant le temps que prend un volume élémentaire de la masse fluide pour se dilater ou se comprimer puis revenir à son état initial avant le passage de l'onde. Ces modes sont obtenus par la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres associé à l'équation de la dynamique (3.51) en annulant les termes du chargement et de dissipation.

On précise que les ondes de surface n'ont pas été prises en compte dans le calcul des valeurs précédentes. La condition de pression nulle a été imposée aux nœuds de la surface libre. Les matrices \mathbf{K}_F et \mathbf{M}_F ont été ainsi rendues définies positives. Dans le cas où l'on veut prendre en compte ces ondes, il faut faire attention à l'extraction des modes. En effet, aucune condition aux limites n'est appliquée sur la matrice \mathbf{K}_F à l'inverse de \mathbf{M}_F à laquelle on ajoute des termes de surface. Ceci rend le problème aux valeurs et vecteurs propres mal conditionné. La solution contient d'ailleurs un mode à fréquence nulle qu'il faut éviter par un décalage spectral approprié.

Les valeurs des périodes propres trouvées précédemment en imposant une pression nulle restent les mêmes dans le cas où les ondes de surface sont prises en compte. En plus de ces périodes propres, on trouve celles correspondant aux modes de ballottement ou de fluctuation de la surface libre. Le nombre de ces modes est le même que le nombre de nœuds de la surface. Les quatre premiers sont représentés sur la figure 3.5. Ils sont tous normalisés et tracés en fonction de la distance adimensionnelle x/L . Cette forme ne dépend pas de la longueur du domaine fluide.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la réponse temporelle. L'équation de la dynamique (3.51) est résolue pas à pas, directement dans le domaine temporel, en utilisant l'intégration numérique. Le pas de temps est fixé à 0.005 secondes et la taille des éléments est prise approximativement égale à 5m selon la longueur et 2.5m selon la hauteur, ce qui donne un nombre de 40 éléments selon la hauteur et un nombre d'éléments selon la largeur variable en fonction de la position de la limite de troncature .

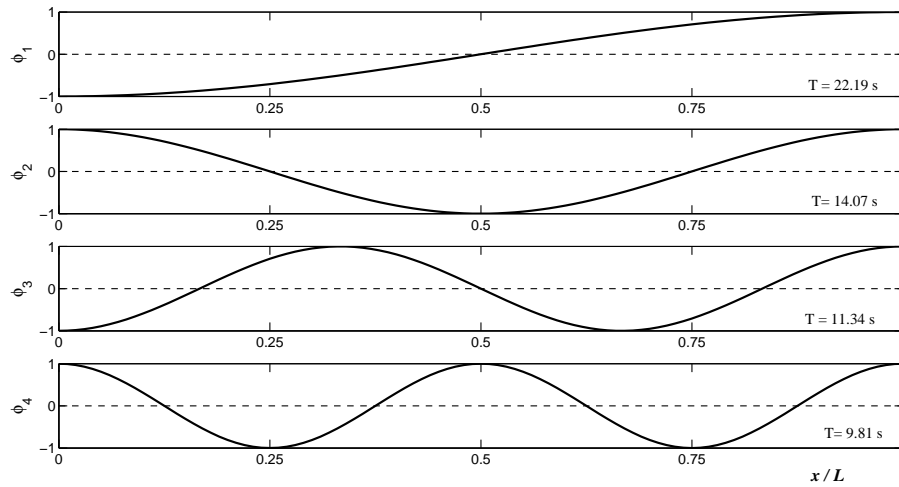


Figure 3.5 : Modes propres de fluctuation de la surface libre

L'intégration directe est imposée par la nature de l'amortissement non proportionnel lorsque la limite de troncature est traitée par la condition de radiation. Ce choix devient facultatif dans le cas où les éléments infinis sont utilisés à la place d'une condition de radiation de type dissipative.

Les figures 3.6, 3.7 montrent l'évolution de la pression hydrodynamique, s'exerçant au coin situé en bas et à gauche, calculée en utilisant les modèles EF et EFEI du FEMAT, respectivement. La pression obtenue en utilisant un modèle à amortissement radiatif (AMOR) dans CASTEM est reproduite dans la figure 3.8. Toutes ces solutions sont calculées pour deux positions de la limite de troncature : Une position $L = 3H$ jugée suffisamment éloignée de la source d'excitation pour pouvoir négliger les effets de troncature, et une position assez proche $L = 0.5H$ pour accentuer ces effets et vérifier les performances des deux types de traitement de la troncature. La qualité de la solution est appréciée pour chaque calcul en la comparant avec la solution de Lee et Tsai [77].

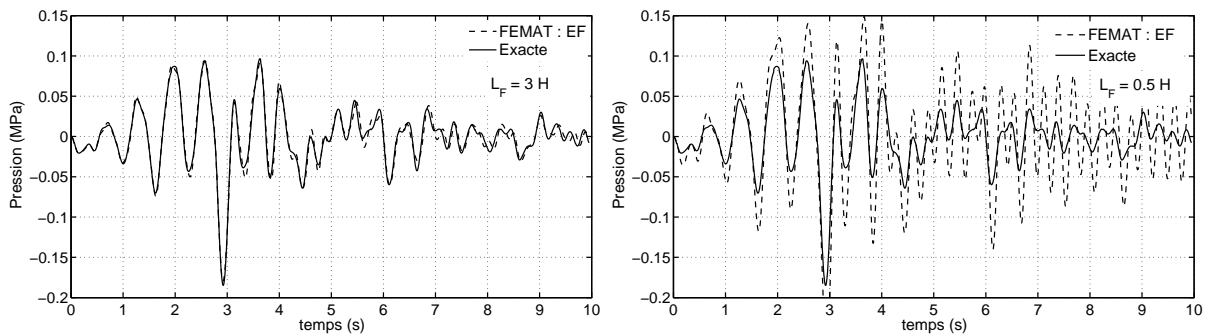


Figure 3.6 : Comparaison entre le modèle d'éléments finis (EF) et la solution exacte

On voit à partir des trois figures que lorsque la limite de troncature est positionnée loin de la source de l'excitation, à $3H$, tous les modèles donnent pratiquement la même solution, identique à

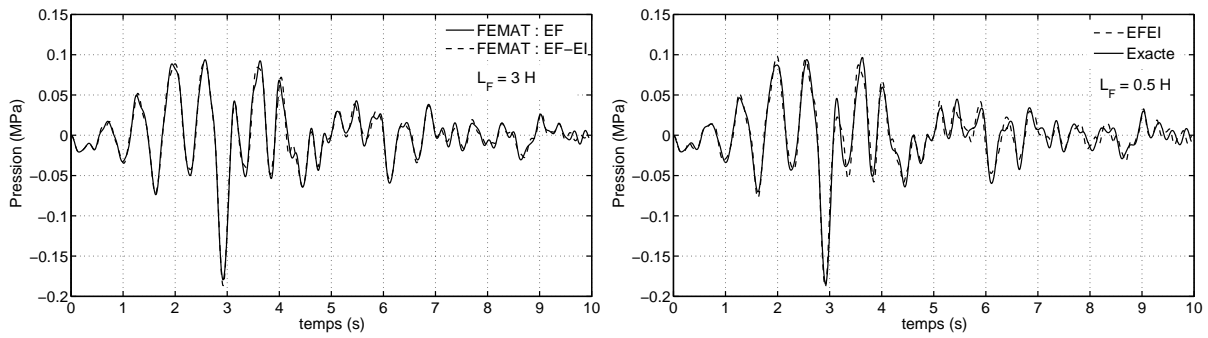


Figure 3.7 : Comparaison entre le modèle de couplage éléments finis - éléments infinis et solution exacte

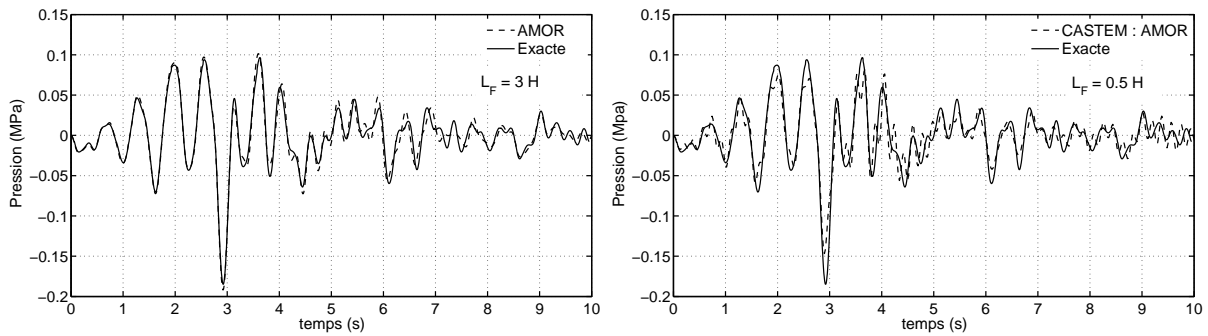


Figure 3.8 : Comparaison entre la solution exacte et l'opérateur AMOR de CASTEM

la solution exacte. Il est à noter que ces solutions sont légèrement amorties avec un amortissement visqueux d'un taux d'amortissement critique de 1%. Sans cet amortissement les réponses ont tendance à s'amplifier par rapport à la solution exacte notamment après les pics au voisinages de 4 secondes.

Cependant, lorsque la limite de troncature est rapprochée du bord d'application de l'excitation sismique, à $0.5H$, d'importantes amplifications de la réponse sont obtenues avec le modèle EF qui n'utilise aucun traitement de la limite de troncature (figure 3.6). Ces amplifications sont absorbées par les éléments infinis du modèle EFEI comme par les amortisseurs du modèle AMOR de CASTEM. On voit bien sur les figures 3.7 et 3.8 que la solution change peu ou pas du tout avec la position de la limite de troncature. Les amortisseurs ont tendance à absorber plus d'énergie que les éléments infinis. La solution obtenue avec le modèle AMOR prend des valeurs plus faibles que la solution de référence même si aucun amortissement visqueux n'est introduit dans les calculs.

Les amplifications de la réponse à cause de la troncature géométrique et l'absorption induite par les éléments infinis et les amortisseurs de frontière peuvent aussi être appréciées à travers l'examen de l'enveloppe de la pression hydrodynamique s'exerçant sur le bord gauche. Cette enveloppe s'obtient en prenant le maximum de pression qui s'est exercée à chaque niveau y le long de la hauteur H . Ce maximum est normalisé par rapport à la pression hydrostatique maximale $\rho g H$, et tracé sur la figure 3.9 le long de la coordonnée normalisée y/H . Cette figure

montre aussi à quel point les modèles sont équivalents lorsque $L = 3H$. Les amplifications du modèle EF à $L = 0.5H$ sont très visibles. De plus, on voit ici clairement que les amortisseurs (modèle AMOR) absorbent plutôt trop par rapport aux éléments infinis (EFEI). L'avantage des éléments infinis, notamment ceux issus de l'approche directe, vient du paramètre de sévérité qui offre la possibilité d'ajuster le taux d'absorption. Ce paramètre doit être dans ce cas aussi élevé que possible, des valeurs supérieures à 20 donnant de bons résultats.

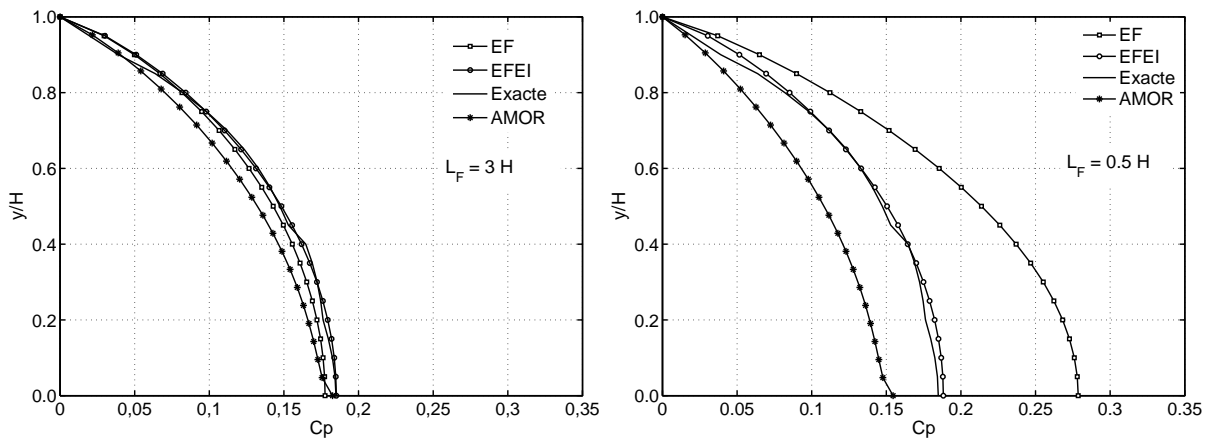


Figure 3.9 : Pression maximale normalisée par la pression hydrostatique

Finalement, avant de terminer cette application, on montre sur la figure 3.10 les fluctuations de la surface libre à des temps bien déterminés. Ces courbes sont obtenues en relâchant la condition de pression nulle à la surface libre et en prenant en compte le terme d'intégrale sur la limite de troncature dans la matrice de masse. La solution est calculée avec le modèle EF en positionnant la frontière de troncature à $3H$ et en prenant en compte la dissipation par radiation et par effet visqueux. Une fois la solution ainsi calculée, on extrait la pression des nœuds de surface qu'on divise par ρg pour trouver la hauteur équivalente. Cette hauteur est ensuite tracée à chaque pas de temps en fonction de la coordonnée horizontale. On reproduit sur la figure 3.10 l'allure de la surface libre aux instants d'abaissement maximal à $t = 1.9s$ et de surélévation maximale à $t = 2.95s$. Le début de la formation d'une onde de surface à $t = 5.9s$ et celui de fin d'application du séisme à $t = 10s$ sont aussi représentés pour montrer la formation et la propagation des vagues vers l'amont. On voit que durant toute la durée d'application de l'accélérogramme, la surface reste pratiquement non perturbée à l'amont à partir de $180 m$. Le soulèvement maximal atteint est de l'ordre de $40 cm$, ce qui reste très petit par rapport aux problèmes de déversement ou d'endommagement d'équipement dans les barrages. De plus, leurs influence sur les pressions hydrodynamiques est faible. C'est pour cette raison qu'elles ne sont souvent pas prises en compte dans les études d'interaction barrage - réservoir.

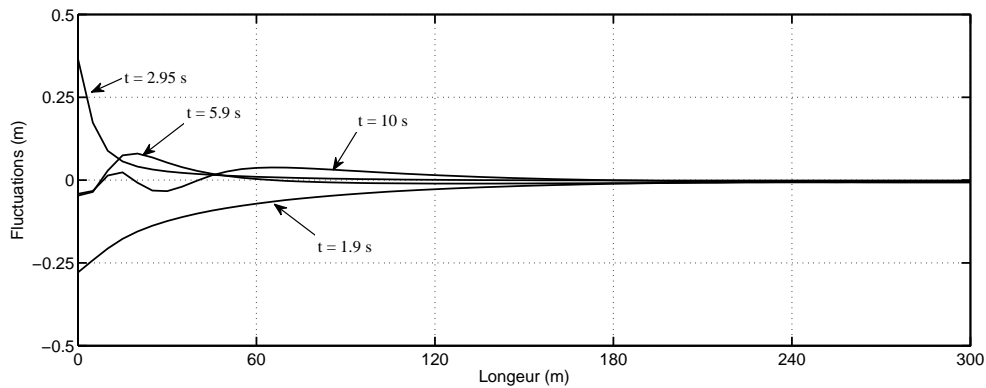


Figure 3.10 : Fluctuations de la surface libre

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation par éléments finis du comportement hydrodynamique vibratoire d'un domaine fluide soumis à des accélérations sismiques. Les deux formulations les plus utilisées, à savoir la formulation en pression (p) et la formulation mixte (ϕ, p) basée sur deux variables (pression et potentiel des déplacements), ont été présentées et discrétisées. Les systèmes matriciels d'équations différentielles du second ordre découlant de ces deux formulations sont semblables aux systèmes décrivant le comportement dynamique des structures. Les matrices ont été appelées par analogie, masse, raideur et amortissement du fluide bien que leurs signification ne soit pas exactement les mêmes que pour les structures.

La formulation en pression (p) a été implantée dans le programme FEMAT qui a été développé dans le cadre de ce travail, et la formulation mixte (ϕ, p) est utilisable dans le code CASTEM. Les calculs effectués dans la partie validation ont montré que ces deux formulations donnent les mêmes résultats. L'introduction de la variable supplémentaire ϕ a pour objectif de faciliter l'étude du couplage fluide structure. Dans le cas du fluide seul, il est plus économique d'utiliser la formulation en pression seule.

Une des difficultés rencontrées dans la modélisation du domaine fluide semi-infini, soumis à des accélérations sismiques sur un de ses bords, réside dans le positionnement de la surface de troncature et le traitement de la partie tronquée. Il a été montré que l'utilisation d'une frontière absorbante peut conduire à une surestimation de la dissipation pour certaines positions de la limite de troncature. L'utilisation d'éléments infinis basés sur l'approche indirecte permet d'ajuster ce taux d'absorption grâce au paramètre de sévérité introduit dans les fonctions de forme de ces éléments. Cependant, ce paramètre peut changer en fonction de la position de la limite de troncature et de l'accélérogramme utilisé comme excitation sismique. Une étude paramétrique est nécessaire pour le déterminer.

Par ailleurs, il a été vérifié que les ondes de surface sont sans effet significatif sur la réponse

en terme de pressions. Leur étude permet toutefois d'estimer la surélévation de la surface libre, dont il faut tenir compte dans les cas de risque d'inondation ou de déversement. Toutefois, ce type de risque est généralement circonvenu dans le cas des barrages en adoptant une hauteur suffisamment grande entre le niveau de la crête et le niveau normal de retenue.

Finalement, il a été constaté que même si l'amortissement visqueux n'apparaît pas dans le traitement du fluide, contrairement au cas des structures, il est tout de même nécessaire d'amortir la solution, même faiblement, en utilisant un taux d'amortissement critique de l'ordre de 1%.

Nouvelle formulation du fluide en éléments de frontières

4.1 Formulation en équations intégrales de frontière

Dans cette partie, une nouvelle formulation en éléments de frontière indirecte régularisée est exposée puis utilisée pour modéliser le domaine fluide. Une matrice de raideur équivalente symétrique et définie positive est obtenue. Elle conduit à un système algébrique pour la pression similaire à celui découlant d'une discrétisation par éléments finis. Cette formulation est présentée en détail dans la référence [23] pour les deux cas de problèmes de potentiel intérieur et extérieur. Elle est ensuite appliquée au problème d'interaction barrage-réservoir dans [112]. Cette section reprend la formulation du fluide qui représente un problème intérieur pour le champ de pressions hydrodynamiques dans le cas des réservoirs. Avant l'exposé de la nouvelle formulation, on reprend quelques éléments sur les équations intégrales de frontière des équations de champ continu régissant les pressions hydrodynamiques dans le fluide.

Une formulation dans le domaine fréquentiel de l'équation d'onde est d'abord envisagée. Le traitement de l'équation de Laplace sera directement déduit par suppression du terme décrivant la dépendance temporelle. Pour une excitation harmonique de pulsation ω , la solution de l'équation d'onde est aussi harmonique de même pulsation $p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, i est le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$ et $p(\mathbf{x})$ est l'amplitude de la pression qui est fonction uniquement de la position dans le domaine géométrique. L'équation d'onde (3.5) devient :

$$\Delta p(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2}p(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.1)$$

qui est l'équation d'Helmholtz. Le terme ω/c est le nombre d'onde noté k .

En multipliant par une fonction de pondération $w(\mathbf{x})$ la forme intégrale de (4.1) s'écrit :

$$\int_{\Omega_F} w(\mathbf{x}) (\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x})) \, d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

La formule de Gauss donne :

$$\int_{\Omega_F} w(\mathbf{x}) \Delta p(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \, dS_x - \int_{\Omega_F} \nabla w(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (4.3)$$

et inversement :

$$\int_{\Omega_F} p(\mathbf{x}) \Delta w(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} p(\mathbf{x}) \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \, dS_x - \int_{\Omega_F} \nabla w(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (4.4)$$

d'où :

$$\int_{\Omega_F} w(\mathbf{x}) \Delta p(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \, dS_x + \int_{\Omega_F} p(\mathbf{x}) \Delta w(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} p(\mathbf{x}) \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \, dS_x \quad (4.5)$$

ce qui donne finalement la relation suivante :

$$\int_{\Omega_F} p(\mathbf{x}) (\Delta w(\mathbf{x}) + k^2 w(\mathbf{x})) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} w(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \, dS_x - \int_{\partial\Omega_F} p(\mathbf{x}) \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \, dS_x = 0 \quad (4.6)$$

La fonction poids est choisie comme solution fondamentale, c'est à dire solution au point \mathbf{y} de l'équation d'Helmholtz avec impulsion de Dirac appliquée au point \mathbf{x} .

$$\Delta w(\mathbf{y}) + k^2 w(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.7)$$

On note cette solution $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. L'équation (4.6) devient :

$$\kappa(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \, dS_y - \int_{\partial\Omega_F} p(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \, dS_y \quad (4.8)$$

Le terme $\kappa(\mathbf{x})$ prend la valeur 1 si le point \mathbf{x} se trouve à l'intérieur du domaine Ω_F , et 0 si \mathbf{x} est à l'extérieur. Lorsque le point \mathbf{x} se rapproche de la frontière $\partial\Omega_F$, $\kappa(x)$ est défini par la limite suivante lorsqu'une surface sphérique (3D) (ou une courbe circulaire en 2D) Ω_ε entourant le point \mathbf{x} a un rayon ε qui tend vers zéro [24].

$$\kappa(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \, dS_y \quad (4.9)$$

4.1.1 Solutions fondamentales et dérivées

La solution fondamentale de l'équation d'Helmholtz est donnée par [24]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k r) \quad (4.10)$$

$H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0 [1, 120]. $r = r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est la distance radiale entre le point \mathbf{x} source d'application de l'impulsion de Dirac et le point courant \mathbf{y} .

Pour l' de Laplace, qui s'applique au réservoir dans le cas de fluide incompressible, la formulation reste la même et l'expression (4.8) est aussi applicable. Seule diffère la solution fondamentale qui devient [16, 24, 32] :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (4.11)$$

La dérivée de la solution fondamentale à la surface par rapport à la normale $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ est égale à :

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \quad (4.12)$$

avec

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{r} \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad ; \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (4.13)$$

et

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (4.14)$$

dans le cas de l'équation de Laplace, et

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} = -\frac{i}{4} k H_1^{(1)} \quad ; \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.15)$$

dans le cas de l'équation d'Helmholtz. $H_1^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 1.

Les fonctions de Hankel, appelées aussi fonction de Bessel de troisième espèce [21], s'écrivent en fonction des fonctions de Bessel de première et de second espèce comme suit :

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(z) &= J_m(z) + i Y_m(z) \\ H_m^{(2)}(z) &= J_m(z) - i Y_m(z) \end{aligned} \quad ; \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.16)$$

avec

$$J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m}$$

et

$$Y_m(z) = \frac{J_m(z) \cos(m\pi) - J_{-m}(z)}{\sin(m\pi)}$$

Le nombre m n'est pas nécessairement entier et Γ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad ; \quad a > 0$$

4.2 Nouvelle formulation symétrique des équations intégrales de frontière

4.2.1 Potentiel de simple couche

Pour tout point \mathbf{x} intérieur au domaine Ω_F , l'équation (4.8) donne (le terme $\kappa(\mathbf{x})$ étant égal à 1 pour un point interne au domaine) :

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_F} [q(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - p(\mathbf{y})H(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS(\mathbf{y}) \quad (4.17)$$

où :

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \quad ; \quad q(\mathbf{y}) = \frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \quad (4.18)$$

sont le gradient de la solution fondamentale et le gradient de la pression, respectivement.

En écrivant l'équation pour un domaine complémentaire $\Omega_c = \mathbb{R}^2 - \Omega_F$, avec \mathbb{R}^2 l'espace bidimensionnel Euclidien (Fig. 4.1), et en notant par p_c et q_c la solution de l'équation de Laplace (ou d'Helmholtz) et son gradient dans Ω_c , on obtient :

$$0 = \int_{\partial\Omega_F} [q_c(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - p_c(\mathbf{y})H(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y \quad (4.19)$$

puisque $\kappa(\mathbf{x}) = 0$ lorsque \mathbf{x} est en dehors de Ω_F .

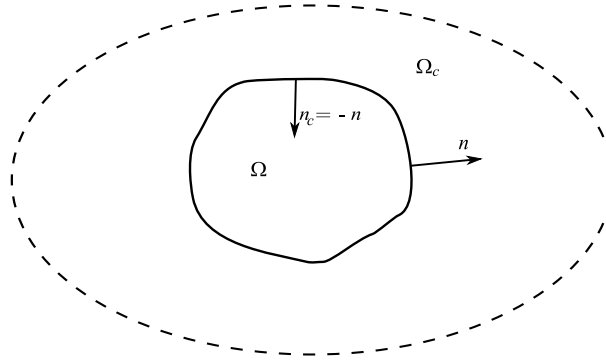


Figure 4.1 : Domaine et son complémentaire

Par soustraction de (4.19) de (4.17), on peut écrire pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega_F$:

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_F} \left([q(\mathbf{y}) - q_c(\mathbf{y})] G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - [p(\mathbf{y}) - p_c(\mathbf{y})] H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) dS_y \quad (4.20)$$

Maintenant, on considère que le champ de pression est continu au passage de la frontière ($p = p_c$) et on introduit une fonction ϕ pour quantifier le saut du gradient de pression (ou de flux) au

travers de la frontière :

$$\phi(\mathbf{y}) = q(\mathbf{y}) - q_c(\mathbf{y}) = (\nabla p(\mathbf{y}) + \nabla p_c(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (4.21)$$

on déduit l'écriture de la représentation intégrale de p par le potentiel de simple couche de densité ϕ dont l'expression est :

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_F} \phi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_y \quad (4.22)$$

Cette expression est valable aussi pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega_F$ puisque ϕ est supposée continue a travers $\partial\Omega_F$. Par conséquent, le flux $q(\mathbf{x})$ s'obtient par simple dérivation par rapport à la normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x} \in \partial\Omega_F$:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \int_{\partial\Omega_F} \phi(\mathbf{y}) H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, dS_y \quad (4.23)$$

Dans les expressions précédentes, les points \mathbf{y} sont pour \mathbf{x} les sources de potentiel de simple couche. Ce type de représentation est qualifié d'indirecte, les inconnues de base (potentiels de simple couche) sont des variables fictives qui sont simplement reliées à la physique du problème.

4.2.2 Fonction d'énergie potentielle de frontière

A partir de la représentation intégrale avec le potentiel de simple couche, il est possible de définir une autre fonction potentielle qui permet de quantifier l'énergie W à fournir afin de produire un accroissement linéaire de la pression de 0 à la valeur p en tout point \mathbf{y} de $\partial\Omega_F$:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} q(\mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) \, dS_y \quad (4.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}) &= \int_{\partial\Omega_F} G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) \, dS_z \\ q(\mathbf{y}) &= \int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}) \, dS_x \end{aligned} \quad (4.25)$$

où la variable \mathbf{z} est introduite afin de souligner le fait que les deux intégrales sont indépendantes. L'expression (4.24) est similaire à celle donnant la puissance d'un signal acoustique décrit par l'équation d'Helmholtz et qui est :

$$W = \frac{1}{2} \int_S \text{Re}(\bar{p}(\mathbf{y}) q(\mathbf{y})) \, dS_y$$

\bar{p} est le nombre complexe conjugué de p .

L'expression de W s'écrit donc comme suit :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} \left[\int_{\partial\Omega_F} \phi(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_x \cdot \int_{\partial\Omega_F} \phi(\mathbf{z}) G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \, dS_z \right] \, dS_y \quad (4.26)$$

ou bien :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} \int_{\partial\Omega_F} \int_{\partial\Omega_F} \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{z})H(\mathbf{x}, \mathbf{y})G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) dS_x dS_y dS_z \quad (4.27)$$

L'inconvénient de cette expression est qu'elle fait intervenir le terme singulier dû à la fonction $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})$. Afin de lever la singularité, elle doit être réécrite sous la forme régularisée en suivant la méthodologie décrite dans la référence [24] et reprise dans [23].

On considère que les sources ϕ sont continues et définies non seulement sur la frontière $\partial\Omega_F$ mais aussi à son voisinage. On peut introduire ainsi un domaine Ω_e contenant Ω_F de frontière $\partial\Omega_e$ sur laquelle sont localisées les sources. On note aussi p_e le champ induit par la répartition des sources sur $\partial\Omega_e$:

$$p_e(\mathbf{y}) = \int_{\partial D_e} \phi(\mathbf{z})G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) dS_z$$

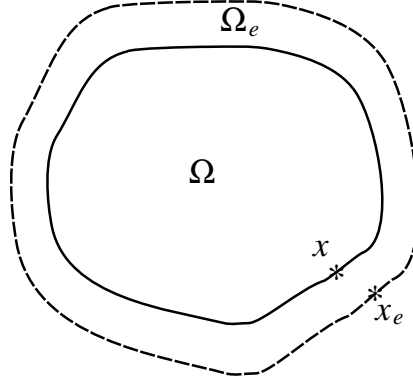


Figure 4.2 : Domaine réel et domaine extérieur fictif

L'expression de l'énergie le long de $\partial\Omega_F$ due à cette répartition de sources est :

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} \left[\int_{\partial\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{x}) dS_x \cdot p_e(\mathbf{y}) \right] dS_y \quad (4.28)$$

En interchangeant l'ordre de l'intégration entre $\partial\Omega_F$ et $\partial\Omega_e$, on obtient :

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_e} \phi(\mathbf{x}) \left[\int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot p_e(\mathbf{y}) dS_y \right] dS_x \quad (4.29)$$

Lorsque $\partial\Omega_e$ tend vers $\partial\Omega_F$, $p_e(\mathbf{y})$ tend vers $p(\mathbf{y})$ et l'intégration de la fonction de Green ne pose pas problème même si les sources sont distribuées sur la frontière $\partial\Omega_F$. La limite de l'expression (4.29) est donc la même que celle de l'expression suivante :

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_e} \phi(\mathbf{x}) \left[\int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) dS_y \right] dS_x \quad (4.30)$$

On considère à présent l'intégrale sur $\partial\Omega_F$, notée I

$$I = \int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) \, dS_y \quad (4.31)$$

Cette intégrale est singulière lorsque le point \mathbf{x} est sur $\partial\Omega_F$. Cependant, elle peut être régularisée si la fonction p présente des conditions de régularité suffisantes [24].

Le point \mathbf{x} est externe au domaine Ω (il est sur $\partial\Omega_e$), d'où :

$$\int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS_y = 0 \quad (4.32)$$

La soustraction de cette expression de I après sa multiplication par $p(\mathbf{x})$ donne :

$$I = \int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{x})] \, dS_y \quad (4.33)$$

Cette intégrale est maintenant régulière lorsque \mathbf{x} est sur $\partial\Omega_F$.

Finalement la fonction d'énergie W peut être obtenue à partir de la limite de W_1 ou de W_2 lorsque $\partial\Omega_e$ se rapproche de $\partial\Omega_F$

$$W = \lim_{\partial\Omega_e \rightarrow \partial\Omega_F} W_1 = \lim_{\partial\Omega_e \rightarrow \partial\Omega_F} W_2$$

qui donne l'expression finale suivante

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} \phi(\mathbf{x}) \int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{x})] \, dS_y \, dS_x \quad (4.34)$$

dans laquelle, la différence de pression entre les deux points \mathbf{x} et \mathbf{y} est donnée selon l'équation (4.22) par :

$$p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_F} \phi(\mathbf{z}) [G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{x})] \, dS_z \quad (4.35)$$

4.2.3 Symétrie de l'opérateur d'énergie

Comme il a été souligné auparavant, l'inconvénient, cité souvent dans la littérature, de la méthode des éléments de frontière est la perte de la symétrie qui est justement à la base reliée au théorème de réciprocité de Maxwell-Betti. L'un des avantages de la présente formulation réside dans le fait qu'elle préserve la symétrie du problème, après discrétisation. La symétrie résulte directement de celle de l'opérateur présent dans la fonction W . Pour une paire de points (\mathbf{x}, \mathbf{z}) où sont définies deux sources $\phi(\mathbf{x})$ et $\phi(\mathbf{z})$, la symétrie s'exprime par :

$$W(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z})) = W(\phi(\mathbf{z}), \phi(\mathbf{x}))$$

Cette relation est démontrée ci-après.

Selon l'équation (4.30) W peut s'écrire comme suit :

$$W(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z})) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} \int_{\partial\Omega_F} \mathfrak{K}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{z}) dS_x dS_z \quad (4.36)$$

Le noyau qui apparaît dans cette équation es donné par :

$$\mathfrak{K}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int_{\partial\Omega_F} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS_y \quad (4.37)$$

En utilisant le théorème de Green on peut remplacer l'intégrale de contour par l'intégrale de volume :

$$\mathfrak{K}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int_{\Omega_F} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega + \int_{\Omega_F} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nabla G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d\Omega \quad (4.38)$$

où Δ et ∇ sont les opérateurs Laplacien et gradient définis par les dérivées par rapport aux coordonnées du point \mathbf{y} .

Il est évident que la seconde intégrale de l'expression précédente est symétrique par rapport à (\mathbf{x}, \mathbf{z}) . En revanche pour la première intégrale la symétrie va être montrée séparément pour les équations de Laplace et d'Helmholtz.

Pour le cas de l'équation de Laplace, on a

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega &= \int_{\Omega_F} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega \\ &= G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

d'où la symmétrie de \mathfrak{K} et par conséquent celle de W .

Dans le cas de l'équation d'Helmholtz, G est solution de

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega &= \int_{\Omega_F} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) d\Omega \\ &= G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) - k^2 \int_{\Omega_F} G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega \end{aligned}$$

qui est aussi tout à fait symétrique par rapport aux points \mathbf{x} et \mathbf{z} .

4.2.4 Discrétisation en éléments de frontière de la formulation symétrique

Dans le but de faciliter le couplage du modèle d'éléments de frontière découlant de cette formulation avec les modèles d'éléments finis, il est préférable d'utiliser des éléments au moins linéaires qui ont le même degré d'interpolation que les bords des éléments finis. Les éléments constants souvent utilisés dans les modèles d'éléments de frontière ne s'adaptent pas bien à un couplage direct. Dans l'immédiat, la discrétisation est abordée sans faire d'hypothèse sur le niveau de discrétisation. Le contour $\partial\Omega_F$ du domaine fluide est subdivisé en éléments de frontière isoparamétriques. Sur chaque élément la variable de potentiel de simple couche ϕ est remplacée par son interpolation nodale :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})\phi_i \equiv \mathbf{N}_i\phi_{e_i} \quad (4.39)$$

où \mathbf{N} est le vecteur des n fonctions de forme d'éléments linéiques bidimensionnels (ou surfaciques tridimensionnels en 3D). Les ϕ_i sont les valeurs nodales de ϕ évaluées aux points \mathbf{x}_i de l'élément e_i .

Discrétisation de la fonction d'énergie

En introduisant un autre indice j pour désigner les valeurs que prend ϕ aux noeuds de coordonnées \mathbf{z}_j , appartenant à l'élément e_j , l'expression discrète de l'équation d'énergie (4.34) tenant compte de (4.35) s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{e_i=1}^{n_e} \sum_{e_j=1}^{n_e} \int_{e_i} \int_{e_j} \mathbf{N}_i \phi_{e_i} \mathfrak{J}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \partial\Omega_F) \mathbf{N}_j \phi_{e_j} dS_x dS_z \quad (4.40)$$

L'expression (4.40) conduit, pour la paire d'éléments (e_i, e_j) à celle de l'énergie élémentaire W_e :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{e_i} \int_{e_j} \phi_e^T \mathbf{N}^T(\mathbf{z}) \mathfrak{J}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \partial\Omega_F) \mathbf{N}(\mathbf{x}) \phi_e dS_x dS_z \quad (4.41)$$

qui s'écrit sous forme condensée comme suit :

$$W_e = \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{A}_{ij}^{(e)} \boldsymbol{\Phi}_i \quad (4.42)$$

où $\mathbf{A}_{ij}^{(e)}$ est une matrice élémentaire de $n \times n$. Le terme $\mathfrak{J}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \partial\Omega_F)$ est donné par :

$$\mathfrak{J}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \partial\Omega_F) = \int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{x})) dS_y \quad (4.43)$$

Sa discrétisation donne la somme suivante :

$$\mathfrak{J} \approx \sum_{e_k} \int_{e_k} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{x})) dS_y \quad ; \quad \mathbf{y} = \sum N_i \mathbf{y}_i \quad (4.44)$$

Pour le cas d'éléments linéaires dont les deux nœuds sont notés 1 et 2, la matrice $\mathbf{A}^{(e)}$ est explicitée comme suit :

$$\mathbf{A}_{ij}^{(e)} = \int_{\mathbf{x}_{i1}}^{\mathbf{x}_{i2}} \int_{\mathbf{z}_{j1}}^{\mathbf{z}_{j2}} \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\mathbf{y}_{k1}}^{\mathbf{y}_{k2}} \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{z}) \\ N_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{x})) \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & N_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} dS_y dS_z dS_x \quad (4.45)$$

L'assemblage pour tous les éléments donne l'énergie totale apportée par la répartition des sources le long de toute la frontière $\partial\Omega_F$:

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} \quad (4.46)$$

Il est à préciser ici que, même s'il apparaît que la matrice élémentaire $\mathbf{A}_{ij}^{(e)}$ n'est pas symétrique, la matrice globale \mathbf{A} , par contre, l'est grâce aux égalités des contributions venant des paires d'éléments (e_i, e_j) et (e_j, e_i) .

En discrétisant maintenant l'équation (4.22) on obtient les valeurs discrètes du vecteur $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{G}_{ij}^{(e)} = \int_{e_j} \mathbf{N}^T G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) dS_y \quad (4.47)$$

qui seront reportées dans l'équation (4.46) pour aboutir à :

$$W = \frac{1}{2} \{\mathbf{P}\}^T [\mathbf{G}^{-1}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{G}^{-1}] \{\mathbf{P}\} \quad (4.48)$$

La matrice \mathbf{G} est la matrice régulière obtenue dans les discrétisations classiques en éléments de frontière.

Matrice de rigidité de frontière

L'expression (4.48) correspond à celle qui donne l'énergie potentielle dans les discrétisations en éléments finis. Dans le cas où le vecteur \mathbf{P} correspond à des déplacements, l'expression serait celle de l'énergie potentielle de déformation.

On considère à présent, la discrétisation de l'expression (4.24) ; elle donne :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{e_i} \int_{e_i} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^T q(\mathbf{y}) dS_y \quad (4.49)$$

qui se met sous la forme suivante :

$$W = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_q \quad ; \quad \mathbf{F}_q = \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{N}^T q(\mathbf{y}) \, dS_y \quad (4.50)$$

La comparaison entre (4.50) et (4.48), permet d'écrire l'égalité suivante après simplification du vecteur ligne \mathbf{P}^T des cotés gauches des deux expressions.

$$[\mathbf{G}^{-1}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{G}^{-1}] \mathbf{P} = \mathbf{F}_q \quad (4.51)$$

Ceci est un système d'équations d'équilibre équivalent à celui découlant de la méthode des éléments finis. On définit alors la matrice de rigidité de frontière comme suit

$$\mathbf{K}_E = [\mathbf{G}^{-1}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{G}^{-1}] \quad (4.52)$$

Cette matrice s'obtient si la matrice \mathbf{G} est inversible. Une attention particulière doit donc être prêtée à certains problèmes plans qui peuvent conduire à des difficultés d'inversion de \mathbf{G} [41].

Comparé aux systèmes algébriques d'éléments de frontière standard, la matrice de cette formulation est symétrique et peut être facilement couplée ou assemblée à celles des éléments finis.

4.2.5 Calcul des intégrales élémentaires

La construction de la matrice de raideur de frontière (4.52) nécessite l'évaluation de la matrice \mathbf{G} (4.47) et de la matrice \mathbf{A} (4.45). Dans l'expression des composantes de \mathbf{G} , lorsque l'élément $e_j = [\mathbf{y}_{j1}, \mathbf{y}_{j2}]$ contient le point \mathbf{x}_i , la solution fondamentale présente une singularité au point $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$. L'évaluation numérique par quadrature de Gauss de l'intégrale devient donc peu précise à moins d'utiliser un très grand nombre de points d'intégration ou d'adopter une autre méthode particulièrement adaptée. D'où la distinction, dans les calculs, entre les composantes diagonales et les composantes extra-diagonales de \mathbf{G} .

Les composantes extra-diagonales sont calculées en utilisant l'intégration numérique avec la quadrature de Gauss-Legendre. Un nombre de quatre points de Gauss est souvent suffisant aussi bien pour les éléments constants que pour les éléments linéaires. Par contre, pour les composantes diagonales, des expressions explicites issues de l'intégration analytique sur la longueur L de l'élément sont disponibles dans beaucoup d'ouvrages d'éléments de frontières. On reprend à partir de [32] celle des éléments constants :

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} \frac{L}{2} \left(1 - \ln \frac{L}{2} \right) \quad (4.53)$$

et celles des éléments linéaires :

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{2} \left[\frac{3}{2} - \ln L, \frac{1}{2} - \ln L \right] \quad (4.54)$$

Le calcul des composantes de la matrice \mathbf{A} fait intervenir une intégrale sur la totalité du contour donnée par l'équation (4.43) et sa forme discrète (4.44). Lors du calcul de la somme dans (4.44), il arrive que l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ soit confondu avec l'un des éléments $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]$ ou $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ ou bien avec les deux à la fois. Ces situations correspondent respectivement aux égalités suivantes entres indices de l'expression (4.45)

$$k = j \neq i \quad ; \quad k = i \neq j \quad ; \quad k = i = j$$

Pour les éléments linéiques linéaires ou constants, ou bien même d'ordre supérieur mais qui restent des segments de droite, selon (4.57) si $\mathbf{x} \in [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ (cas $k = i, \forall j$), alors toute l'expression sous intégrale dans (4.55) est nulle.

Par contre, si $\mathbf{x} \notin [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ mais $\mathbf{z} \in [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ (cas $k = j \neq i$) alors le rayon r_{zy} peut s'annuler lorsque \mathbf{y} et \mathbf{z} varient de 0 à L indépendamment l'un de l'autre, ce qui cause une singularité dans l'expression à intégrer. De même, si $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ mais $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ (cas $i = j \neq k$), le rayon r_{zx} peut s'annuler lorsque maintenant \mathbf{x} et \mathbf{z} varient dans l'élément. On désigne ces deux cas par "*Singularité YZ*" et "*Singularité XZ*" respectivement, et l'élément siège de singularité est appelé indifféremment *élément double* ou *élément singulier*.

Dans les sections qui suivent, ces singularités sont levées en rapportant toutes les expressions au repère local de l'élément double dont le premier nœud est pris comme origine du repère. On s'intéressera au problème de l'équation de Laplace et on traitera d'abord le cas des éléments constants, ensuite on donnera les modifications à apporter aux expressions qui seront obtenues pour les appliquer au cas des éléments linaires. Auparavant, l'intégration du cas régulier est traitée.

Cas réguliers

Compte tenu de (4.11) à (4.14), les intégrales élémentaires sur S_y intervenant dans l'expression de $\mathbf{A}_{ij}^{(e)}$ sont de la forme suivante :

$$I_y = \int_{\mathbf{y}_1}^{\mathbf{y}_2} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \right) dS_y = \int_{\mathbf{y}_1}^{\mathbf{y}_2} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{4\pi^2 r_{xy}^2} \ln \frac{r_{zy}}{r_{zx}} dS_y \quad (4.55)$$

La figure 4.3 montre trois éléments distincts comportant les points \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} . Lorsque chacun de ces points évolue dans l'élément auquel il appartient, les rayons r_{zy} , r_{zx} et r_{xy} varient chacun d'une valeur initiale à une valeur finale sans s'annuler et l'intégrale (4.55) peut donc être évaluée sans difficulté en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre avec un changement de variable adéquat.

Pour un point $\mathbf{y} \in [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ où $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ est un segment de droite (élément constant ou linéaire), la transformation géométrique suivante permet de ramener le domaine d'intégration à un élément

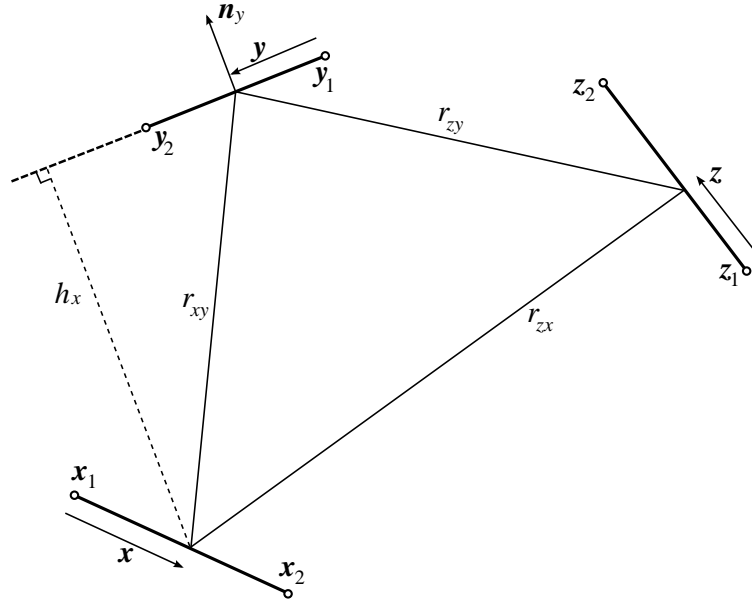


Figure 4.3 : Cas régulier

de référence $[-1, +1]$:

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1(\eta) \\ y_2(\eta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \eta & 1 + \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad -1 \leq \eta \leq +1 \quad (4.56)$$

où $\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de \mathbf{y}_1 et $\begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ sont celles de \mathbf{y}_2 .

Pour une intégration sur \mathbf{y} , les points \mathbf{x} et \mathbf{z} restent fixes et donc r_{zx} est constant. De plus, le produit scalaire $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y$ est aussi constant. Il s'agit de la projection du vecteur \vec{r}_{xy} sur la normale \mathbf{n}_y , une projection perpendiculaire à l'élément qui donne la hauteur h_x du point \mathbf{x} par rapport à cet élément.

$$h_x = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{L} \left((y_{12} - y_{22})x_1 + (y_{21} - y_{11})x_2 + y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12} \right) \quad (4.57)$$

où L est la longueur de l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du point \mathbf{x} .

L'élément de segment dS_e est déterminé à partir de (4.56)

$$dS_y = \sqrt{(dy_1)^2 + (dy_2)^2} = \frac{L}{2} d\eta$$

L'expression (4.55) devient :

$$I_y = \frac{1}{4\pi^2} h_x \frac{1}{2} L \int_{-1}^{+1} \frac{1}{r_{xy}^2(\eta)} \ln \frac{r_{zy}(\eta)}{r_{zx}} d\eta \quad (4.58)$$

qui peut être approchée par la somme suivante :

$$I_y \approx \frac{h_x L}{8\pi^2} \sum_{i=1}^{n_p} w_i \frac{1}{r_{xy}^2(\eta_i)} \ln \frac{r_{zy}(\eta_i)}{r_{zx}} \quad (4.59)$$

dans laquelle η_i et w_i sont les points et poids d'intégration de Gauss-Legendre.

Le nombre de points d'intégration n_p conditionne la précision de l'intégration. L'intégrale est exacte si la fonction à intégrer est un polynôme d'ordre $2n_p - 1$. Cependant, l'expression (4.59) contient une fonction logarithme d'un rayon et l'inverse d'un autre rayon, les carrés des rayons sont des polynômes d'ordre 2 en η .

$$\begin{aligned} r_{zy}^2 &= \frac{1}{4}L^2 \eta^2 + s_{zc} \eta + r_{zc}^2 \\ r_{xy}^2 &= \frac{1}{4}L^2 \eta^2 + s_{xc} \eta + r_{xc}^2 \end{aligned}$$

où $r_{xc} = \mathbf{y}_c - \mathbf{x}$ et $r_{zc} = \mathbf{y}_c - \mathbf{z}$ sont les distances entre le centre \mathbf{y}_c de l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ et les points \mathbf{x} et \mathbf{z} , respectivement.

Le rayon r_{zx} est la distance entre les points \mathbf{x} et \mathbf{z} :

$$r_{zx}^2 = (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2$$

Les facteurs s_{xc} et s_{yc} sont les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} s_{xc} &= \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}_c} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} = (y_{c1} - x_1)(y_{21} - y_{11}) + (y_{c2} - x_2)(y_{22} - y_{12}) \\ s_{zc} &= \overrightarrow{\mathbf{z}\mathbf{y}_c} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} = (y_{c1} - z_1)(y_{21} - y_{11}) + (y_{c2} - z_2)(y_{22} - y_{12}) \end{aligned}$$

$$y_{c1} = \frac{1}{2}(y_{11} + y_{12}) \quad ; \quad y_{c2} = \frac{1}{2}(y_{12} + y_{22})$$

En général, lorsque l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ ne contient pas les points \mathbf{x} et \mathbf{z} , un nombre de points d'intégration variant de 4 à 6 donne, selon la taille L , une erreur variant de 10% à 1%, qui est souvent jugée trop grande pour l'évaluation des intégrales élémentaires [24], un nombre de 7 points a donc été retenu.

Exemple

Comme exemple d'illustration, on considère un élément $[\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}]$ où les points \mathbf{x} et \mathbf{z} sont fixés à $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. L'intégrale (4.58) sans les constantes s'écrit comme suit :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{r_{xy}^2} \frac{1}{2} \ln \frac{r_{zy}^2}{r_{zx}^2} d\eta = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln(\eta^2 - \eta + \frac{1}{2})}{\eta^2 + \eta + \frac{1}{2}} d\eta$$

La courbe de la fonction à intégrer est montrée sur la figure 4.4, c'est une courbe régulière qui

ne présente aucune discontinuité de valeur ni de dérivée.

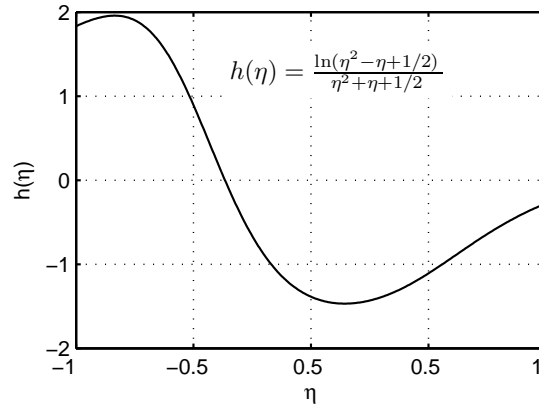


Figure 4.4 : Exemple de fonction à intégrer

L'intégration exacte donne la valeur de -0.4140 . Les résultats de l'intégration numérique en utilisant un nombre de points de Gauss variant de 2 à 6 sont rapportés dans le tableau 4.1 :

Tableau 4.1 : Exemple d'intégration numérique d'un cas régulier

Nombre de points	Valeur de l'intégrale	Erreur relative(%)
2	0.3781	191.33
3	-0.4921	18.85
4	-0.4673	12.88
5	-0.3818	7.78
6	-0.4217	1.84
7	-0.4145	0.13

Si maintenant, le point \mathbf{z} fait partie d'un élément $[\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}]$ sur lequel on veut faire une seconde intégration, par rapport à S_z , l'expression à évaluer sans les constantes est :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{2 \ln 2}{\eta^2 + (1 + \eta)^2} \ln \frac{(z - \eta)^2 + (z - 1)^2}{1 + 4z^2} d\eta dz$$

Le rayon r_{zx} n'est plus constant.

La valeur exacte de cette intégrale est : 0.9093. Une valeur très proche de 0.8985, qui correspond à une erreur relative de 1.19%, peut être obtenue avec 4×4 points d'intégration.

De même, si $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}]$ sur lequel on calcule une troisième intégration, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}(x - 1)}{\eta^2 + 2x\eta + 1 - 2x + 2\mathbf{x}^2} \ln \frac{(z - \eta)^2 + (z - 1)^2}{2(x^2 + z^2)} d\eta dz dx$$

La valeur exacte est 0.4105. Elle est obtenue avec une erreur relative de 1.7% en utilisant $3 \times 3 \times 3$ points.

Dans tous les calculs précédents, la borne supérieure de l'intégration est fixée à $\frac{1}{2}$ pour \mathbf{x} et \mathbf{z} afin d'éviter les cas particuliers où les éléments contiennent les bornes d'intégration de \mathbf{y} . Ces cas sont traités en déplaçant à 1 la borne supérieure de la triple intégrale précédente. La valeur exacte est alors 0.1610 et l'erreur relative de l'intégration numérique ne commence à chuter au dessous des 5% qu'à partir de 6 points de Gauss. Elle est de 1.8% pour une intégration numérique de $7 \times 7 \times 7$ points qui a donné la valeur de 0.1580. Cette augmentation du nombre de points d'intégration est due à la singularité de la fonction au nœud commun aux éléments $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ et $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]$, (lorsque $\eta = 1$ et $x_1 = 0$). Le nœud commun aux éléments $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ et $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ ($\eta = -1$ et $z_2 = 0$) ne pose pas de problème puisque $h_x = 0$ lorsque $\mathbf{x} \in [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$. La figure 4.5 montre ces deux situations.

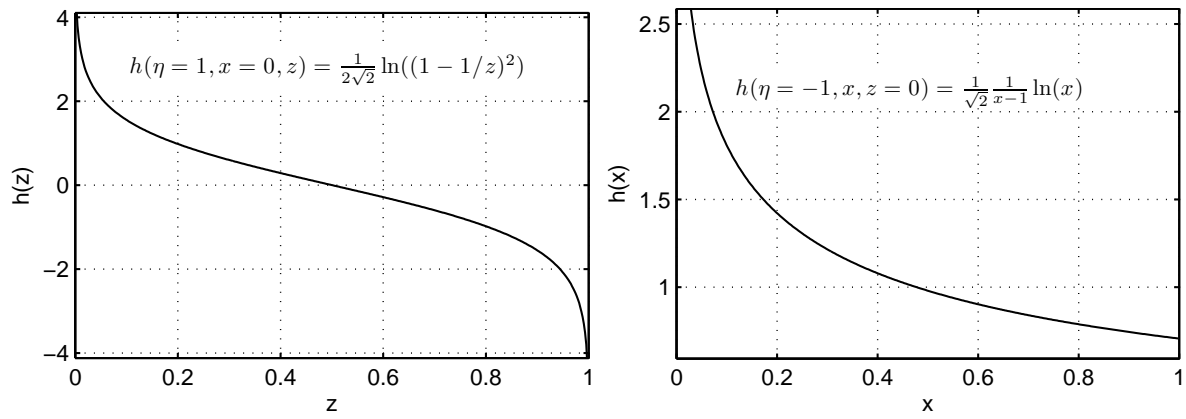


Figure 4.5 : Cas de nœuds communs entre éléments

Cas de singularité YZ

Dans le cas de singularité YZ, les points \mathbf{y} et \mathbf{z} appartiennent à un même élément. Ces deux points sont localisés sur la figure 4.6 par les rayons r_y et r_z variant de 0 à la longueur totale L de l'élément. La projection du point \mathbf{x} sur l'élément est notée r_x , et sa distance par rapport à cette projection est h_x . Ces deux quantités restent constantes par rapport à l'origine, le point \mathbf{x} étant fixe par rapport à l'élément.

Le changement de variable est utilisé uniquement pour \mathbf{y} , il servira pour l'intégration numérique des expressions qui seront obtenues après l'intégration analytique sur r_z . Une double intégration analytique produit des expressions trop longues qui demanderaient sans doute plus en temps d'exécution que la sommation sur les points de Gauss. Une intégration mixte est ainsi proposée par compromis entre rapidité des calculs et précision des résultats.

Les rayons intervenants dans les intégrales sont exprimés comme suit :

$$r_{zy}^2 = (r_y - r_z)^2 \quad ; \quad r_{xy}^2 = (r_x - r_y)^2 + h_x^2 \quad ; \quad r_{zx}^2 = (r_x - r_z)^2 + h_x^2$$

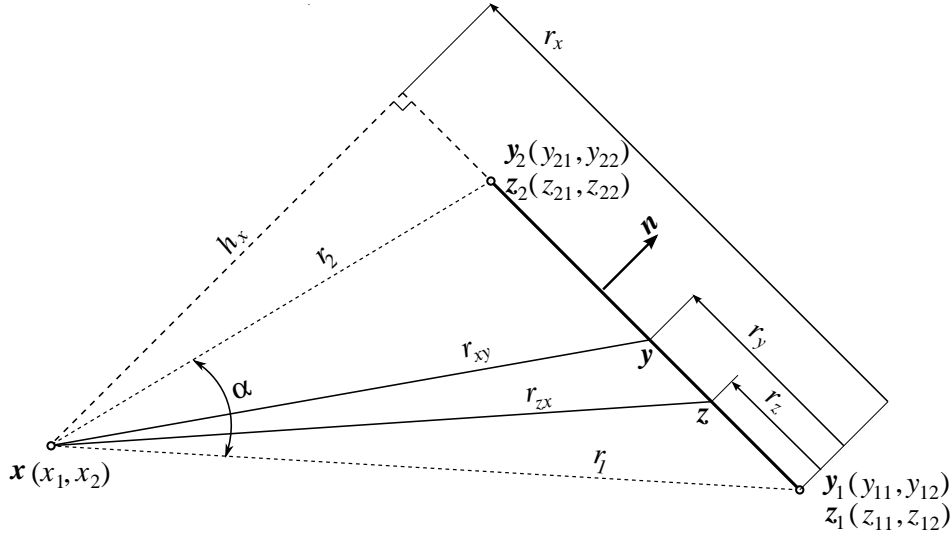


Figure 4.6 : Cas de singularité YZ : élément contenant y et z

L'expression (4.45) donne pour un point \mathbf{x} fixe et sans la constante $1/(4\pi^2)$:

$$I_c = h_x \int_0^L \int_0^L \frac{1}{(r_x - r_y)^2 + h_x^2} \frac{1}{2} \left(\ln(r_y - r_z)^2 - \ln((r_x - r_z)^2 + h_x^2) \right) dr_z dr_y \quad (4.60)$$

Cette intégrale est évaluée en deux étapes, une première intégration par rapport à r_z est obtenues avec les trois termes suivants :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^L \ln(r_y - r_z)^2 dr_z &&= r_y \ln r_y + (L - r_y) \ln(L - r_y) - L \\ I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^L \ln((r_x - r_z)^2 + h_x^2) dr_z &&= h_x \alpha - L + r_x \ln r_1 - (r_x - L) \ln r_2 \\ I_3 &= \int_0^L \frac{1}{(r_x - r_y)^2 + h_x^2} dr_y &&= \frac{\alpha}{h_x} \end{aligned}$$

où r_1 et r_2 sont les distances qui séparent le point \mathbf{x} des deux nœuds de l'élément. L'angle α délimité par ces deux rayons est donné par :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_x}{h_x}\right) - \arctan\left(\frac{r_x - L}{h_x}\right) \quad \text{ou bien : } \alpha = \frac{\vec{y}_1 \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{y}_2 \vec{\mathbf{x}}}{r_1 r_2} \quad (4.61)$$

En séparant maintenant du reste les termes indépendants de r_y , (4.60) peut être écrite, si $h_x \neq 0$, comme suit :

$$I_c = \alpha \left(r_x \ln \frac{r_2}{r_1} - L \ln r_2 - h_x \alpha \right) + h_x \int_0^L \frac{r_y \ln r_y + (L - r_y) \ln(L - r_y)}{(r_x - r_y)^2 + h_x^2} dr_y \quad (4.62)$$

Pour le premier terme sous l'intégrale, on utilise le changement de variable

$$r_y = \eta L \quad ; \quad dr_y = L d\eta \quad ; \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

on obtient :

$$I_a = h_x L^2 \ln L \int_0^1 \frac{\eta}{(r_x - \eta L)^2 + h_x^2} d\eta + h_x L^2 \int_0^1 \frac{\eta \ln \eta}{(r_x - \eta L)^2 + h_x^2} d\eta \quad (4.63)$$

Quant au deuxième terme, on utilise le changement de variable

$$r_y = L(1 - \eta) \quad ; \quad dr_y = -L d\eta \quad ; \quad 1 \geq \eta \geq 0$$

il s'écrit :

$$I_b = h_x L^2 \ln L \int_0^1 \frac{\eta}{(r_x + \eta L - L)^2 + h_x^2} d\eta + h_x L^2 \int_0^1 \frac{\eta \ln \eta}{(r_x + \eta L - L)^2 + h_x^2} d\eta \quad (4.64)$$

La somme $I_a + I_b$ donne quatre termes dont deux sont facilement intégrables

$$\begin{aligned} I_f &= h_x L^2 \ln L \int_0^1 \eta \left(\frac{1}{(r_x - \eta L)^2 + h_x^2} + \frac{1}{(r_x + \eta L - L)^2 + h_x^2} \right) d\eta \\ &= \alpha L \ln L \end{aligned} \quad (4.65)$$

et deux autres non intégrables analytiquement :

$$I_{cn} = h_x L^2 \int_0^1 \eta \ln \eta \left(\frac{1}{(r_x - \eta L)^2 + h_x^2} + \frac{1}{(r_x + \eta L - L)^2 + h_x^2} \right) d\eta \quad (4.66)$$

Cependant, ces deux derniers termes sont de la forme $f(\eta) \ln \eta$, ils peuvent être évalués numériquement par la quadrature logarithmique de Gauss, appropriée à ce type d'expression, et très répandue en éléments de frontière (voir par exemple [16]). Les abscisses et les poids d'intégration sont donnés dans l'annexe A.3.

$$\int_0^1 f(\eta) \ln \frac{1}{\eta} d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_p} \hat{w}_i f(\hat{\eta}_i) \quad (4.67)$$

où

$$f(\eta) = -\frac{\eta}{(r_x - \eta L)^2 + h_x^2} - \frac{\eta}{(r_x + \eta L - L)^2 + h_x^2} \quad (4.68)$$

est une fonction qui ne présente aucune singularité dans l'intervalle $0 \leq \eta \leq 1$. Un nombre de 2 à 4 points d'intégration est suffisant même si le point \mathbf{x} appartient à un élément adjacent à l'élément singulier.

Par ailleurs, on présente à toutes fins utiles, une solution analytique basée sur le développement

en séries de la fonction $f(\eta)$. Elle permet d'approcher l'intégrale I_{cn} avec seulement quatre termes comme suit :

$$\begin{aligned} f(\eta) &\approx s_1\eta + s_2\eta^2 + s_3\eta^3 + s_4\eta^4 ; \\ s_1 &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \\ s_2 &= 2(L/r_1^2)(r_x/r_1^2) + 2(L/r_2^2)(r_x - L)/r_2^2 \\ s_3 &= 2(L/r_1^2)^2(r_x^2/r_1^2) + 2(L/r_2^2)^2(r_x - L)^2/r_2^2 - L^2(1/r_1^4 + 1/r_2^4) \\ s_4 &= 4(L/r_1^2)^3 r_x(r_1^2 - 2h_x^2)/r_1^2 + 4(L/r_2^2)^3(r_x - L)(r_2^2 - 2h_x^2)/r_2^2 \end{aligned}$$

Comme :

$$\int_0^1 -\eta^n \ln \eta \, d\eta = \frac{1}{(1+n)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

l'intégrale (4.66) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} I_{cn} &= \frac{-1}{4} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - \frac{2}{9} L h_x \left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_2^4} \right) + \frac{1}{16} L^2 \left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{23}{9} \frac{1}{r_2^4} \right) - \frac{1}{4} L^2 r_x^2 \left(\frac{1}{r_1^6} + \frac{1}{r_2^6} \right) \\ &\quad - L^3 \left(\frac{4}{25} \frac{r_x}{r_1^6} - \frac{41}{100} \frac{L}{r_2^4} + \frac{33}{50} \frac{r_x}{r_2^4} \right) + \frac{8}{25} L^3 h_x^2 \left(\frac{r_x}{r_1^8} - \frac{r_x - L}{r_2^8} \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Finalement, l'expression de l'intégrale (4.60) est la somme de tous les termes obtenus précédemment :

$$I_c = r_x \alpha \ln \frac{r_2}{r_1} - \alpha L \ln \frac{r_2}{L} - h_x \alpha^2 + h_x L^2 I_{cn} \quad (4.70)$$

Le dernier terme I_{cn} est évalué numériquement en utilisant la quadrature logarithmique de Gauss (4.67). L'angle α et la hauteur h_x sont donnés par (4.61) et (4.57), respectivement. Le rayon r_x est la projection du rayon $\vec{y}_1 \vec{x} = \vec{r}_1$ sur l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$

$$r_x = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1}{|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|} = \frac{1}{L} \left((x_1 - y_{11})(y_{21} - y_{11}) + (x_2 - y_{12})(y_{22} - y_{12}) \right) \quad (4.71)$$

Les deux rayons r_1 et r_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r_x^2 + h_x^2} &= \sqrt{(y_{11} - x_1)^2 + (y_{12} - x_2)^2} \\ r_2 &= \sqrt{(r_x - L)^2 + h_x^2} &= \sqrt{(y_{21} - x_1)^2 + (y_{22} - x_2)^2} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Les calculs effectués sur plusieurs exemples ont montré que lorsque le point \mathbf{x} est situé loin d'au moins une longueur d'élément, l'erreur relative de l'intégration numérique ne dépasse pas 1% que ce soit en utilisant la somme (4.69) ou la quadrature logarithmique de Gauss avec quatre points. Par contre, lorsque le point \mathbf{x} se rapproche de l'élément, la somme perd en précision plus rapidement que la quadrature. Elle est inadaptée lorsque \mathbf{x} appartient à un élément adjacent à celui contenant les points \mathbf{y} et \mathbf{z} . Dans cette situation nous ne disposons que de la quadrature

logarithmique de Gauss. Le tableau suivant montre comment évolue l'erreur en fonction de la position de \mathbf{x} par rapport à l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$.

Tableau 4.2 : Erreur (%) de l'intégration numérique d'un exemple de singularité YZ

$R = L$ h_x/L	Nombre de points d'intégration	
	2 points	4 points
1.25	0.81E-2	0.35E-4
1.00	0.39E-1	0.13E-3
0.75	0.15	0.12E-3
0.50	0.46	0.94E-2
0.25	0.79	0.89E-1
0.20	2.54	0.29
0.10	6.99	0.15

Cas de singularité XZ

On considère maintenant le cas où les éléments $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ et $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]$ sont confondus mais distincts de l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ ($i = j \neq k$). L'expression (4.45) est ramenée au repère local de l'élément. Elle est d'abord intégrée analytiquement selon S_z afin de réduire la singularité venant de $\ln r_{zx}$. L'intégration selon S_x et S_y est effectuée en deux parties à l'aide des quadratures linéaire et logarithmique de Gauss.

Dans le cas d'éléments constants, l'intégrale (4.45) sans la constante $1/(4\pi^2)$ peut s'exprimer comme suit

$$A^{(e)} = \iint \frac{h_x}{r_{xy}^2} \left(\int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} (\ln(r_{zy}) - \ln(r_{zx})) dS_z \right) dS_x dS_y \quad (4.73)$$

Cette expression est constituée de deux parties dont la première, celle qui contient r_{zy} ne pose aucun problème de singularité et peut être évaluée sans difficulté. La seconde partie, par contre, contient r_{zx} qui peut s'annuler lorsque les deux points \mathbf{x} et \mathbf{z} évoluent dans un même élément.

Sur la figure 4.7, les points \mathbf{x} et \mathbf{z} sont localisés par les rayons r_x et r_z variant de 0 à la longueur L de l'élément. La projection du point \mathbf{y} sur l'élément est noté r_y , et sa distance par rapport à cette projection est notée h_y . Pour un point \mathbf{y} fixe par rapport à l'élément, faisant partie d'un ensemble de points d'intégration numérique sur l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$, r_y et h_y sont des constantes.

En utilisant le changement de variables suivant : $r_x = \xi L$ et $r_z = \zeta L$, on a :

$$\begin{aligned} r_{zx}^2 &= (r_x - r_z)^2 &= L^2(\xi - \zeta)^2 \\ r_{xy}^2 &= (r_x - r_y)^2 + h_y^2 &= (\xi L - r_y)^2 + h_y^2 \\ r_{zy}^2 &= (r_z - r_y)^2 + h_y^2 &= (\zeta L - r_y)^2 + h_y^2 \end{aligned}$$

Inversement à h_x , h_y est la hauteur du point \mathbf{y} par rapport à l'élément $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, et r_y est la distance algébrique mesurée entre sa projection sur l'élément et le nœud \mathbf{x}_1 origine du repère

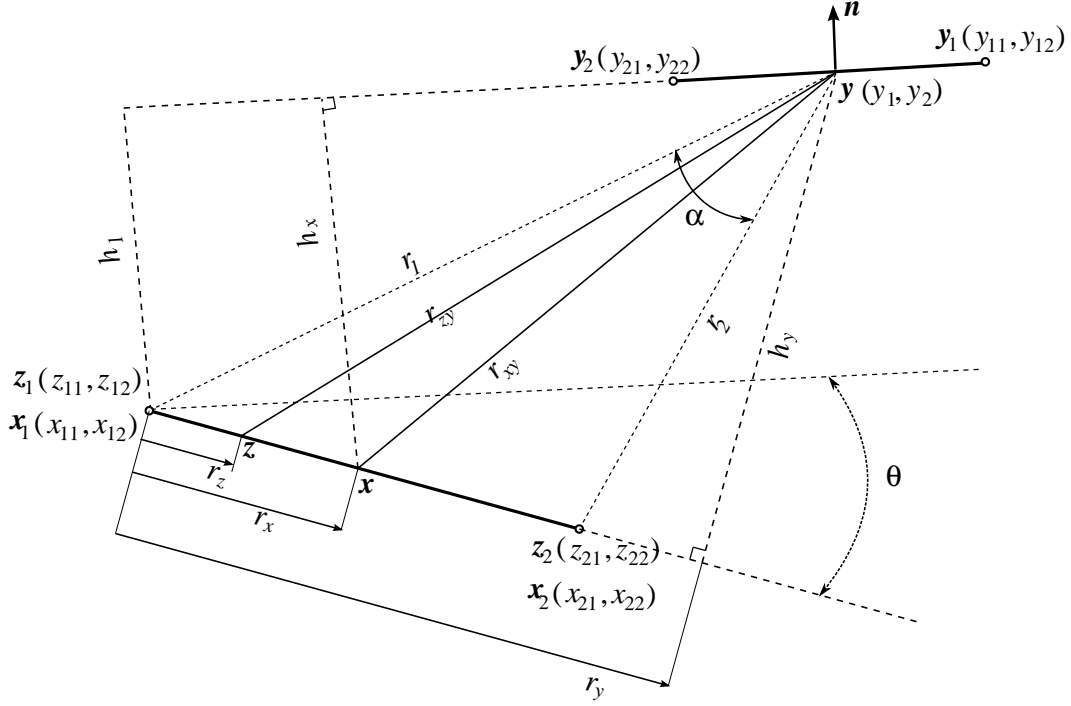


Figure 4.7 : Cas de singularité XZ : élément contenant \mathbf{x} et \mathbf{z}

local.

$$h_y = \frac{1}{L} \left((x_{12} - x_{22})y_1 + (x_{21} - x_{11})y_2 + x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \right) \quad (4.74)$$

$$r_y = \frac{1}{L} \left((y_1 - x_{11})(x_{21} - x_{11}) + (y_2 - x_{12})(x_{22} - x_{12}) \right) \quad (4.75)$$

A préciser que L désigne maintenant la longueur de l'élément $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, siège de la singularité et dont les coordonnées sont notées $\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{i1} \\ z_{i2} \end{pmatrix}$. Le point \mathbf{y} est localisé par $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

L'intégration de (4.73) suivant S_z donne, dans le repère local :

$$\begin{aligned} I_{zc} &= \int_{z_1}^{z_2} (\ln r_{zy} - \ln r_{zx}) dS_z \\ &= \int_0^1 \frac{L}{2} \left(\ln \left((r_y - \zeta L)^2 + h_y^2 \right) - \ln \left(L^2 (\xi - \zeta)^2 \right) \right) d\zeta \\ &= L \ln \frac{r_2}{L} - r_y \ln \frac{r_2}{r_1} + h_y \alpha - L \xi \ln \xi - L(1 - \xi) \ln(1 - \xi) \end{aligned} \quad (4.76)$$

où α , r_1 et r_2 sont mesurés à partir du point \mathbf{y} et délimités par l'élément $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \left(\frac{r_y}{h_y} \right) - \arctan \left(\frac{r_y - L}{h_y} \right) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}_2 \mathbf{y}}}{r_1 r_2} \\ r_1^2 &= r_y^2 + h_y^2 = (x_{11} - y_1)^2 + (x_{12} - y_2)^2 \\ r_2^2 &= (r_y - L)^2 + h_y^2 = (x_{21} - y_1)^2 + (x_{22} - y_2)^2 \end{aligned} \quad (4.77)$$

On exprime à présent h_x dans le repère local par :

$$h_x = h_1 + r_x \sin \theta \quad (4.78)$$

La distance h_1 est la hauteur du nœud \mathbf{x}_1 par rapport à l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$, expression (4.57), et θ est l'angle entre les deux éléments $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ et $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{LL'} \overrightarrow{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2} \\ \sin \theta &= \frac{1}{L'} \left((y_{21} - y_{11})(x_{22} - x_{12}) - (y_{22} - y_{12})(x_{21} - x_{11}) \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

L' est la longueur de l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$.

La seconde intégration de (4.73) par rapport à \mathbf{x} se met, compte tenu de (4.76), sous la forme d'une somme des trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(L \ln \frac{r_2}{L} - r_y \ln \frac{r_2}{r_1} + h_y \alpha \right) L \int_0^1 \frac{h_1 + \xi L \sin \theta}{(\xi L - r_y)^2 + h_y^2} d\xi \\ I_2 &= -L^2 \int_0^1 \frac{h_1 + \xi L \sin \theta}{(\xi L - r_y)^2 + h_y^2} \xi \ln \xi d\xi \\ I_3 &= -L^2 \int_0^1 \frac{h_1 + \xi L \sin \theta}{(\xi L - r_y)^2 + h_y^2} (1 - \xi) \ln(1 - \xi) d\xi \end{aligned}$$

On pose :

$$I_{xc} = \int_0^1 L \frac{h_1 + \xi L \sin \theta}{(\xi L - r_y)^2 + h_y^2} d\xi = \frac{h_1}{h_y} \alpha + \frac{r_y}{h_y} \alpha \sin \theta + \ln \frac{r_2}{r_1} \sin \theta \quad (4.80)$$

La première intégrale contenant les constantes par rapport à \mathbf{x} , s'évalue donc analytiquement et vaut :

$$I_1 = c_{zc} I_{xc} \quad ; \quad c_{zc} = L \ln \frac{r_2}{L} - r_y \ln \frac{r_2}{r_1} + h_y \alpha \quad (4.81)$$

Elle peut aussi être évaluée numériquement avec la quadrature de Gauss-Legendre puisqu'elle ne présente aucune singularité mais en utilisant un autre changement de variable ramenant les bornes d'intégration à $[-1, +1]$.

La seconde et la troisième intégrales I_2 et I_3 sont évaluées avec la quadrature logarithmique de Gauss.

$$I_2 = L^2 \sum_{i=1}^{n_p} \hat{w}_i \hat{\xi}_i \frac{h_1 + \hat{\xi}_i L \sin \theta}{(\hat{\xi}_i L - r_y)^2 + h_y^2} \quad (4.82)$$

Dans la troisième, un changement de variable : $\hat{\xi} = 1 - \xi$ donne :

$$I_3 = L^2 \sum_{i=1}^{n_p} \hat{w}_i \hat{\xi}_i \frac{h_1 + (1 - \hat{\xi}_i) L \sin \theta}{(L - \hat{\xi}_i L - r_y)^2 + h_y^2} \quad (4.83)$$

où $\hat{\xi}_i$ et \hat{w}_i sont les points et poids d'intégration logarithmique donnés dans l'annexe A.3.

Finalement le calcul de (4.73) s'achève avec l'intégration numérique par quadrature linéaire de Gauss par rapport à \mathbf{y} de la somme $I_1 + I_2 + I_3$.

Extension au cas d'éléments linéaires

Les méthodes de calcul d'intégrales élémentaires présentées pour le cas d'éléments constants s'appliquent aussi aux éléments linéaires moyennant quelques modifications. Dans le cas régulier, il n'y a rien à changer à l'intégration suivant \mathbf{y} , l'expression (4.58) reste la même, mais la seconde et la troisième intégration par rapport à \mathbf{z} et à \mathbf{x} doivent contenir les fonctions de forme des éléments linéaires : il suffit de multiplier par les fonctions $N(\xi)$ et $N(\eta)$.

Les cas de singularité, par contre méritent quelques ajustements dans les expressions obtenues pour l'élément constant. Il faut avant tout tenir compte des bornes d'intégration qui deviennent $[0, L]$ ou $[0, 1]$. Les fonctions de formes doivent être redéfinies en fonction de cet intervalle, ensuite d'autres intégrales générées par les multiplications par ces fonctions de formes doivent être calculées.

Cas de la singularité YZ Dans le cas de la singularité YZ ($\mathbf{y} \in [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]$ mais sans \mathbf{x} , $j = k \neq i$), on n'a besoin de modifier que les fonctions de forme en \mathbf{z} , les bornes étant $[0, L]$:

$$N_{z_1} = 1 - \frac{r_z}{L} \quad ; \quad N_{z_2} = \frac{r_z}{L}$$

L'expression (4.60) est multipliée par ces fonctions avant intégration. La multiplication par 1 redonne exactement la formule (4.70) de l'élément constant et la multiplication par r_z/L conduit selon les mêmes étapes à :

$$I_\ell = \frac{1}{2} \frac{r_x^2 - h_x^2}{L} \alpha \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{2} \alpha L \ln \frac{r_2}{L} - h_x \frac{r_x}{L} \alpha^2 + \frac{1}{2} h_x L^2 I_{\ell n} \quad (4.84)$$

où $I_{\ell n}$ est la partie de l'intégrale à évaluer avec la quadrature logarithmique de Gauss.

$$I_{\ell n} = \int_0^1 g(\eta) \ln \frac{1}{\eta} d\eta = \sum_{i=1}^{n_p} \hat{w}_i g(\hat{\eta}_i) \quad (4.85)$$

$\hat{\eta}_i$ et \hat{w}_i sont les points et poids de la quadrature logarithmique de Gauss (annexe A.3)

La fonction $g(\eta)$ diffère quelque peu de $f(\eta)$ (4.68). Elle s'écrit comme suit :

$$g(\eta) = -\frac{\eta^2}{(r_x - \eta L)^2 + h_x^2} - \frac{2\eta - \eta^2}{(r_x + \eta L - L)^2 + h_x^2} \quad (4.86)$$

Finalement, pour le cas d'éléments linéaires, la quantité à intégrer suivant S_x est le vecteur $[(I_c - I_\ell) \quad I_\ell]$ et la quadrature linéaire de Gauss peut être utilisée sans difficulté puisque \mathbf{x}

appartient à un autre élément. L'expression de la matrice élémentaire est :

$$A_{ij}^{(e)}|_{e_j=e_k} = \sum_{i=1}^{n_p} J_x w_i \begin{bmatrix} N_1(\xi_i) \\ N_2(\xi_i) \end{bmatrix} \left[I_c(\xi_i) - I_\ell(\xi_i), I_\ell(\xi_i) \right] \quad (4.87)$$

$I_c(\xi_i)$ et $I_\ell(\xi_i)$ sont fonctions de r_x et de h_x qui à leurs tours doivent être évalués à chaque point d'intégration ξ_i . J_x est le jacobien de l'élément $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ et $N_{1,2}(\xi)$ sont les fonctions de formes standards de l'élément de référence $[-1, +1]$:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad ; \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Cas de la singularité XZ Lorsque maintenant $\mathbf{x} \in [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2]$ mais sans \mathbf{y} , le cas $i = j \neq k$, il faut introduire dans le calcul de l'intégrale (4.76) les fonctions de forme :

$$N_{z_1}(\zeta) = 1 - \zeta \quad ; \quad N_{z_2} = \zeta$$

Les formules (4.81), (4.82) et (4.83) doivent être réévaluées avec les nouvelles expressions et en tenant compte des multiplications par les fonctions de forme en \mathbf{x}

$$N_{x_1} = 1 - \xi \quad ; \quad N_{x_2} = \xi$$

La présence de 1 dans les fonctions de forme permet de retrouver les expressions qui ont été calculées pour l'élément constant, mais les termes issus des multiplications par ξ et ζ induisent quelques complications.

La multiplication de (4.76) par ζ donne :

$$\begin{aligned} I_{z\ell} &= \int_0^1 \frac{L}{2} \zeta \left(\ln((ry - \zeta L)^2 + hy^2) - \ln(L^2(\xi - \zeta)^2) \right) d\zeta \\ &= c_{z\ell} - \frac{1}{2} L \xi^2 \ln \xi - \frac{1}{2} L (1 - \xi^2) \ln(1 - \xi) + \frac{1}{2} L \xi \end{aligned} \quad (4.88)$$

où $c_{z\ell}$ représente la quantité indépendante de ξ .

$$c_{z\ell} = \frac{1}{2L} (h_y^2 - r_y^2) \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2} L \ln \frac{r_2}{L} + \frac{1}{L} r_y h_y \alpha - \frac{1}{2} r_y \quad (4.89)$$

La différence $I_{zc} - I_{z\ell}$ donne le résultat de la multiplication par $1 - \zeta$. Elle est obtenue par la soustraction (4.76) - (4.88) et se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I_{zc} - I_{z\ell} &= c_{zcl} - \frac{1}{2} L \xi (2 - \xi) \ln \xi - \frac{1}{2} L (1 - \xi)^2 \ln(1 - \xi) - \frac{1}{2} L \xi \\ c_{zcl} = c_{zc} - c_{z\ell} &= \frac{1}{2} L \ln \frac{r_2}{L} + \frac{h_y}{L} (L - r_y) \alpha - \frac{1}{2L} (2h_y^2 - r_2^2 + L^2) \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2} r_2 \end{aligned} \quad (4.90)$$

La réévaluation des expressions (4.81) à (4.83) après multiplication par ξ nécessite le calcul de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I_{x\ell} &= \int_0^1 L\xi \frac{h_x}{r_{xy}^2} d\xi \\ &= \left(1 + \frac{r_y^2 - h_y^2}{Lh_y}\alpha + \frac{2r_y}{L} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) \sin \theta + \frac{h_1 r_y}{Lh_y}\alpha + \frac{h_1}{L} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \quad (4.91)$$

d'où, la multiplication par $1 - \xi$ qui s'obtient par la soustraction (4.80)–(4.91). Elle donne :

$$I_{xcl} = \int_0^1 L(1 - \xi) \frac{h_x}{r_{xy}^2} d\xi = I_{xc} - I_{x\ell} \quad (4.92)$$

De plus le dernier terme ($\frac{1}{2}\xi L$) obtenu dans (4.88) conduit, après multiplication par ξ , à l'évaluation de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I_{xq} &= \int_0^1 L^2 \xi^2 \frac{h_x}{r_{xy}^2} d\xi \\ &= \left(\frac{r_y^2 - 3h_y^2}{Lh_y} r_y \alpha + \frac{3r_y^2 - h_y^2}{L} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2}L + 2r_y\right) \sin \theta \\ &\quad + \left(1 + \frac{r_y^2 - h_y^2}{Lh_y}\alpha + 2\frac{r_y}{L} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) h_1 \end{aligned} \quad (4.93)$$

On peut à présent calculer les termes de la matrice, notée \mathbf{a} , qui servira à calculer, avec intégration par rapport à \mathbf{y} sur toute la frontière, la matrice élémentaire $\mathbf{A}^{(e)}$ d'un élément double contenant \mathbf{x} et \mathbf{z} .

$$\mathbf{A}_{ij}^{(e)}|_{e_i=e_j} = \sum_{k=1}^{net} \int_{\mathbf{y}^{k_1}}^{\mathbf{y}^{k_2}} \mathbf{a} dS_y \quad ; \quad \mathbf{a} = L \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} \frac{h_x}{r_{xy}^2} \begin{bmatrix} I_{zc} - I_{z\ell}, I_{z\ell} \end{bmatrix} d\xi \quad (4.94)$$

Les quatre composantes de \mathbf{a} sont déterminées comme suit :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} I_{xc} - I_{x\ell} \\ I_{x\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{zc} - c_{z\ell} & c_{z\ell} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} LI_{x\ell} - I_{xq} \\ I_{xq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{I} + \mathbf{J} \quad (4.95)$$

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \frac{1}{2} L^2 \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - \xi & \xi \end{bmatrix} \frac{h_x}{r_{xy}^2} \xi \ln \frac{1}{\xi} d\xi \quad (4.96)$$

$$\mathbf{J} = \int_0^1 \frac{1}{2} L^2 \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 + \xi \end{bmatrix} \frac{h_x}{r_{xy}^2} (1 - \xi) \ln \frac{1}{1 - \xi} d\xi \quad (4.97)$$

Les matrices \mathbf{I} et \mathbf{J} sont évaluées avec la quadrature logarithmique de Gauss. Les points d'intégration $\hat{\xi}_i$ doivent être décalés à $1 - \hat{\xi}_i$ avant de les utiliser pour la matrice \mathbf{J} .

Le calcul d'un exemple de deux éléments adjacents perpendiculaires, qui reproduit le cas d'un coin d'une frontière, a donné une erreur relative maximale de 0.035% en utilisant 6 points pour l'intégration linéaire et 3 points pour l'intégration logarithmique. En comparaison, l'erreur minimale pouvant être atteinte en utilisant uniquement la quadrature linéaire est de 1.73% mais avec le nombre maximal de points d'intégration de $6 \times 39 \times 40$, le cas étant considéré comme régulier. Cette erreur peut augmenter jusqu'à 14.7% si le nombre de points est réduit à $6 \times 6 \times 7$.

Remarque :

Il est possible d'enlever le terme ξ des expressions à singularité logarithmique précédentes (4.82), (4.83), (4.68), (4.86), ..., en utilisant une quadrature logarithmique plus générale :

$$\int_0^1 f(\xi) \xi^q \ln(1/\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_p} \hat{w}_i f(\hat{\xi}_i) \quad ; \quad q \in \mathbb{R}^2$$

Le terme $\xi^q \ln(1/\xi)$ est appelé fonction poids et est généralement noté par $w(x)$. Il peut prendre plusieurs expressions dans les problèmes d'intégration numérique (voir annexe A).

L'utilisation de cette quadrature permet dans certains cas de réduire le nombre de points d'intégration mais sans que ce soit une règle générale. En effet, un exemple de calcul dans lequel les éléments $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ et $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ forment un angle droit, montre que les trois cas où $r = 1$, $r = 2$ et $r = 3$ ne convergent pas de la même manière en changeant la position de l'élément $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$ par rapport à l'élément $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ (figure 4.8). Toutefois, à partir d'un nombre de 7 points d'intégration, les trois quadratures convergent avec une même erreur relative faible.

Les points et poids d'intégration des quadratures logarithmiques sont données pour $r = 0$ et $r = 1$ dans les tableaux A.4 et A.5 de l'annexe A.3.

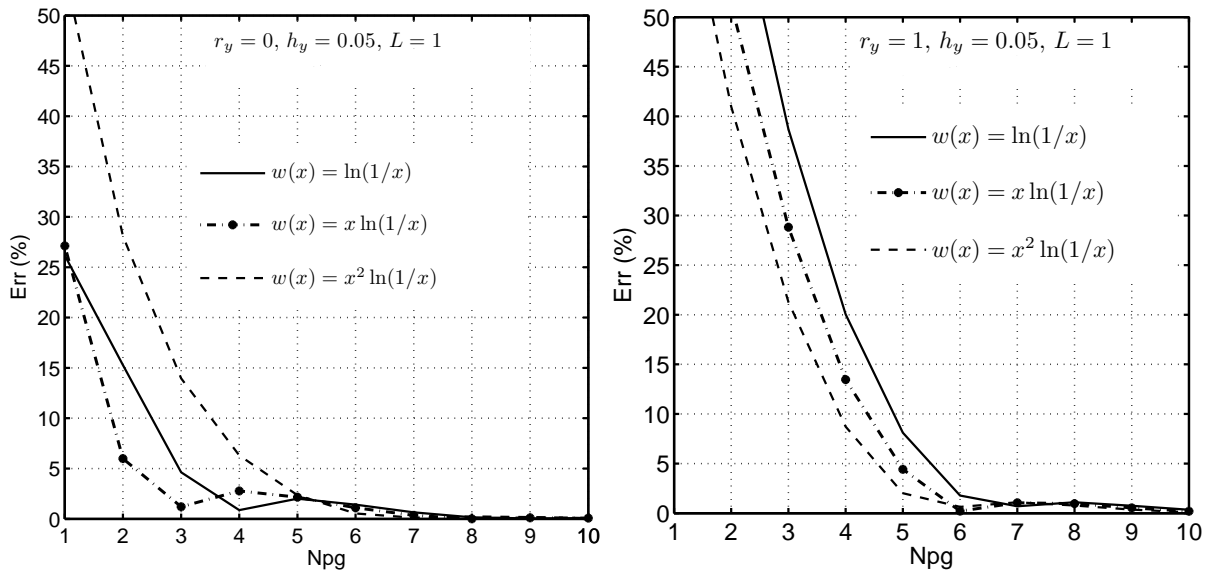


Figure 4.8 : Convergence Gauss-Log

4.3 Validation de la formulation symétrique

Sur la base de la formulation présentée dans ce chapitre et les détails de sa mise en œuvre donnés ci-dessus, un programme à été développé. Sa structure et les fonctions implantées sous MATLAB sont décrites dans l'annexe D. L'exemple numérique qui a servi à sa validation est présenté dans cette section. Dans cet exemple, on considère une fonction u régie par l'équation de Laplace et définie sur un domaine carré de hauteur unité ($\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$), avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \begin{cases} a \cos(ay) & \text{sur le bord gauche } (x = 0) \\ ae^{-a} \cos(ay) & \text{sur le bord droit } (x = 1) \\ 0 & \text{sur le bord bas } (y = 0) \end{cases}$$

et $u(x, 1) = 0$ sur le bord supérieur. La constante a est prise égale à $3\pi/2$. La solution exacte de ce problème est : $u = e^{-ax} \cos(ay)$.

Le vecteur force \mathbf{F}_q est calculé selon l'expression (4.50). Il peut aussi être obtenu par simple concentration des flux sur les nœuds. La condition aux limites de Dirichlet est appliquée par élimination dans la matrice résultante \mathbf{K}_E des degrés de libertés associés aux nœuds du bord supérieur. La figure 4.9 montre le modèle d'éléments de frontière construit en divisant la bordure du domaine en éléments de longueur 0.04 à raison de 25 éléments par coté. Ceci donne un total de 100 éléments et 100 nœuds. La matrice assemblée \mathbf{K}_E est réduite à 74×74 après application de la condition de Dirichlet.

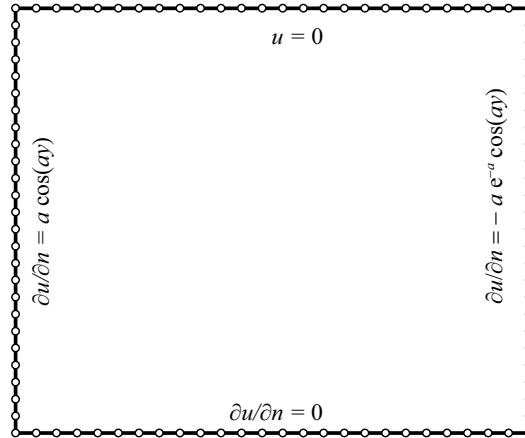


Figure 4.9 : Géométrie et définition du problème de validation

La solution numérique obtenue sur les bords gauche et bas est tracée et comparée à la solution exacte sur la figure 4.10. Ces résultats montrent bien la qualité de la solution obtenue par le modèle.

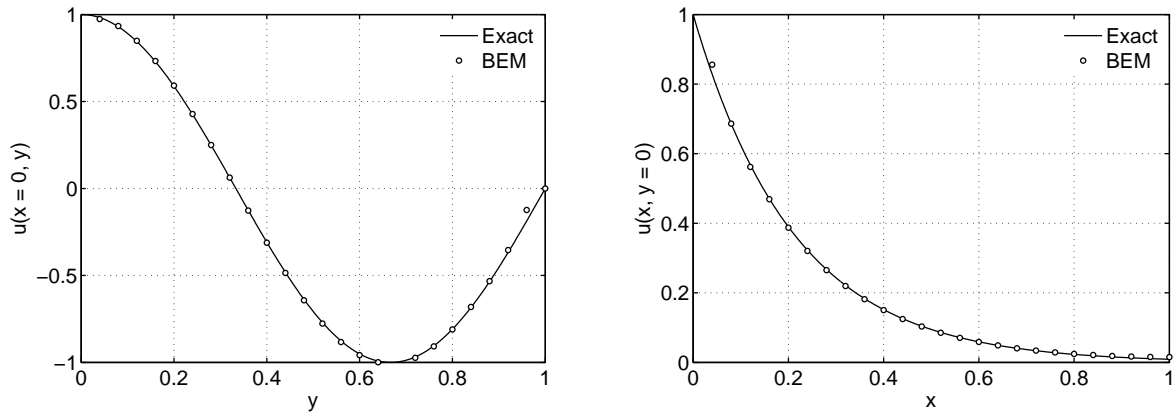


Figure 4.10 : Solutions sur le bord gauche et le bord bas

4.4 Conclusion

La méthode présentée dans ce chapitre permet de construire une matrice de raideur de frontière d'un domaine régi par l'équation de Laplace ou d'Helmholtz. Seul le cas de l'équation de Laplace a été finalisé. Ce cas correspond au réservoir d'un barrage sous hypothèse d'eau incompressible. La matrice a été obtenue par la discrétisation de l'énergie potentielle produite par une répartition de sources sur la frontière. Le premier avantage de cette méthode est qu'elle produit une matrice symétrique sans utilisation de variables intermédiaires. Le second avantage réside dans le fait qu'elle est basée sur la régularisation utilisée pour la méthode de collocation, ce qui permet d'éviter les intégrales hypersingulières que l'on obtient par la méthode symétrique de type SGBEM [22]. L'exemple de validation traité a permis de montrer la qualité de la solution obtenue.

III : COUPLAGE HYDROÉLASTIQUE

Couplage fluide - structure

5.1 Introduction

Dans les équations de l'élastodynamique décrites au chapitre 1, nous avons fait intervenir les forces de pressions hydrodynamiques qui apparaissent lorsque la structure étudiée est en contact avec un fluide. Dans l'écriture (1.26) du système d'équations discrètes, le vecteur des pressions provient du processus de discrétisation. Les valeurs discrètes sont traduites en une partie des forces d'équilibre de la structure grâce à la matrice d'interaction. L'écriture du système reste aussi valable pour le cas d'interaction sol-structure et seule la matrice d'interaction doit changer en fonction du changement de l'interface fluide-solide.

Les chapitres qui ont suivi ont été consacrés à l'étude de la discrétisation du domaine fluide. Deux formulations éléments finis, dont l'une est symétrique et l'autre non, et une nouvelle formulation symétrique en éléments de frontières ont été exposées et validées. Dans les exemples traités, nous avons supposé que les excitations du domaine fluide proviennent des mouvements d'une paroi rigide. Ils sont traduits en conditions aux limites sur les gradients des pressions.

Cette partie du travail porte sur le couplage des deux systèmes fluide et solide. En application, on se focalise sur la réponse sismique des barrages avec la prise en compte des effets d'interaction fluide - structure. La structure du barrage est considérée maintenant comme déformable et l'eau du réservoir est d'abord supposée incompressible. Ensuite cette hypothèse sera relâchée, afin d'examiner les effets de la compressibilité sur la réponse.

Dans le cas de l'hypothèse d'eau compressible, nous nous pencherons sur le problème afférent à la symétrisation de la formulation du problème des vibrations couplées fluide-structure. Quatre techniques de symétrisation dont deux proposées ici seront exposées et discutées. Dans le cas de l'hypothèse d'eau incompressible, on examinera à travers une étude de cas les performances des modèles d'interaction fluide-structure utilisant les deux types de discrétisation du fluide, à savoir, celle basée sur la nouvelle formulation en éléments de frontière symétrique, et celle basée sur le couplage éléments finis - éléments infinis.

5.2 Système couplé fluide-structure

L'écriture du système global couplé s'obtient en regroupant les deux systèmes (3.51) et (1.26) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_S \\ \mathbf{F}_P \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Les matrices portant l'indice S se rapportent au solide, c'est à dire aussi bien au barrage seul qu'à l'ensemble sol-barrage. Ce système provient aussi du couplage des deux équations (3.51) et (2.10). La matrice \mathbf{Q} change en fonction de la surface de contact fluide-solide.

Dans le cas d'un mouvement sismique imposé à la base du modèle sous forme d'un accélérogramme $\ddot{u}_g(t)$, les deux vecteurs forces se mettent sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}_S = -\mathbf{M}_S \mathbf{I} \ddot{u}_g(t) \quad ; \quad \mathbf{F}_P = \sum_{\Gamma_I^{(e)}} \int_{\Gamma_I^{(e)}} \mathbf{N}_p^T \rho \ddot{u}_g \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (5.2)$$

où $\Gamma_I^{(e)}$ désigne l'interface fluide-solide de normale \mathbf{n} .

En ajoutant les accélérations sismiques à celles de la structure et en reformulant les équations en termes d'accélérations totales

$$\ddot{\mathbf{U}}_T(t) = \ddot{\mathbf{U}}(t) + \ddot{u}_g(t)$$

le système (5.1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_T \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Ce système couplé qui tient compte de la compressibilité de l'eau peut être réduit à un système décrivant uniquement l'équilibre de la structure si l'eau est considérée comme incompressible. Dans ce cas, l'équation d'onde de pression se ramène à l'équations de Laplace et la matrice \mathbf{M}_F disparaît, ce qui donne au lieu de la seconde équation de (5.3) :

$$\mathbf{K}_F \mathbf{P} = \rho \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{U}}_T \quad ; \quad \mathbf{P} = \rho \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{U}}_T \quad (5.4)$$

En reportant (5.4) dans la première équation du système (5.3), on trouve l'équation classique du mouvement dynamique à masse ajoutée :

$$\mathbf{M}_A \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_S \mathbf{U} = -\mathbf{M}_A \mathbf{I} \ddot{u}_g \quad (5.5)$$

avec :

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_S + \rho \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (5.6)$$

Dans le cas de la formulation du réservoir en variables mixtes pression - potentiel des déplacements, le système couplé s'écrit en regroupant les équations (1.26) et (3.69) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\mathbf{P}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{K}_{\mathbf{P}\mathbf{P}} & \mathbf{K}_{\mathbf{P}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\mathbf{P}\phi}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_S \\ \mathbf{F}_\phi \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

De même que dans le cas du système (5.3), si les forces d'excitation sont dues à des accélération sismiques, le vecteur force du système (5.7) devient :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{M}_{FS} \mathbf{I} \ddot{u}_g(t) \quad (5.8)$$

où \mathbf{M}_{FS} est la matrice masse couplée du système (5.7).

5.3 Symétrisation du problème des vibrations libres de la formulation en pression

Le problème des vibrations libres du système fluide-structure s'obtient en omettant des équations précédentes les termes d'amortissement et les termes de chargement. Avec la formulation du fluide en variables mixtes pression - potentiel des déplacements, le problème aux valeurs et vecteurs propres associé à l'équation (5.7) est tout a fait symétrique. Il suffit de condenser le vecteur \mathbf{P} pour contourner les problèmes numériques que poseraient les zéros en diagonale. Il est aussi possible d'inverser le problème de valeurs propres en cherchant l'inverse des fréquences propres.

Le cas de fluide incompressible ne pose pas de difficultés, car toutes les matrices sont dans ce cas symétriques et définies positives y compris la matrice \mathbf{M}_A . En revanche, le cas de fluide compressible donne, avec la formulation en pression, des matrices couplées non symétriques comme le montre l'expression suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

où ω représente l'ensemble des pulsations propres du système couplé.

En conséquence de la perte de symétrie, les méthodes classiques d'extraction de modes propres et de résolutions par découplage et superposition modale ne sont pas directement applicables. Une symétrisation va permettre de faciliter l'application des algorithmes de calcul des valeurs et vecteurs propres. Il existe bien sûr des algorithmes spécifiques aux problèmes des modes propres non symétriques, aux problèmes tenant compte de l'amortissement non proportionnel et aux

problèmes non linéaires. La thèse de T. M. Nguyen [93] en est une bonne référence. Mais ces algorithmes ne sont pas très répandus, et la symétrisation lorsqu'elle est possible est toujours préférable. Différentes techniques ont été mises au point par plusieurs auteurs. Par exemple Filippa [52] donne huit techniques. Quatre autres techniques sont présentées ici, dont deux sont propres au présent travail.

5.3.1 Technique utilisant l'inversion des matrices fluides

Cette technique due à Zienkiewicz [140] se base sur le changement de variable suivant :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{c^2} \mathbf{M}_F \mathbf{P} \quad (5.10)$$

La seconde équation du système (5.9) est réécrite comme suit :

$$\mathbf{K}_F \mathbf{P} - \omega^2 \rho \mathbf{Q}^T \mathbf{U} - \omega^2 c^2 \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

à partir de laquelle le vecteur \mathbf{P} est exprimé en fonction de \mathbf{U} et \mathbf{V} , puis remplacé dans la première équation. Ceci donne :

$$\mathbf{K}_S \mathbf{U} - \omega^2 (\mathbf{M}_S + \rho \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T) \mathbf{U} - \omega^2 c^2 \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

La symétrie peut ensuite être achevée par multiplication de l'équation (5.11) par \mathbf{K}_F^{-1} , avec division par ρ et remplacement de \mathbf{P} par $c^2 \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{V}$.

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{c^2}{\rho} \mathbf{M}_F^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_S \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{c^2}{\rho} \mathbf{K}_F^{-1} & \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} & \mathbf{M}_S + \rho \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

On voit bien que ce système symétrique nécessite l'inversion des deux matrices masse et rigidité fluide. Ceci rend inévitable la condition aux limites de pression nulle afin de rendre les matrices \mathbf{M}_F et \mathbf{K}_F définies positives. De ce fait, cette technique ne peut être utilisée que pour les problèmes où la pression est connue au moins sur une partie du contour du domaine fluide. Particulièrement, à la surface libre du réservoir, on doit prendre la pression nulle et les effets de fluctuations ne peuvent être inclus.

5.3.2 Technique utilisant l'inversion de la matrice raideur fluide

Cette seconde technique de symétrisation a été suggéré par Ohayon [96]. Elle introduit une variable additionnelle définie par : $\mathbf{P} = \omega^2 \mathbf{V}$ qui ajoute une troisième équation au système (5.9)

$$\mathbf{M}_F \mathbf{P} - \omega^2 \mathbf{M}_F \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

Ensuite le système est réécrit en utilisant en même temps les deux variables \mathbf{P} et \mathbf{V}

$$\left(\begin{bmatrix} \rho \mathbf{K}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \rho \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \rho \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_F \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_F & -\mathbf{K}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

la première équation étant multipliée par ρ .

Ce système algébrique est certes symétrique grâce aux symétries des sous matrices le constituant, mais il présente un bloc de termes diagonaux nuls. L'extraction des modes propres peut poser de sérieuses difficultés numériques. C'est pour cela que la condensation statique de la variables \mathbf{V} est utilisée afin d'éliminer les zéros diagonaux d'une part, et de réduire la taille du système d'autre part. A partir de la troisième équation de (5.15) on peut exprimer \mathbf{V} comme suit

$$\mathbf{V} = \rho \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{U} + \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \mathbf{P} \quad (5.16)$$

En remplaçant dans les deux premières équations, on obtient le système symétrique

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\rho_F} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \rho \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T & \mathbf{Q} \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \\ \mathbf{M}_F \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}^T & \frac{1}{\rho_F} \mathbf{M}_F \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

De même, comme il a été souligné dans la technique de Zienkiewicz, l'inversion de la matrice \mathbf{K}_F requiert l'application de la condition de pression nulle en surface. De ce fait, cette technique non plus ne permet pas de prendre en compte les fluctuations de la surface libre. La condition $\mathbf{P} = 0$ doit être appliquée sur Γ_F .

5.3.3 Technique utilisant l'inversion de la matrice de rigidité de la structure

Cette technique proposée par Daniel [46] utilise, comme variable inconnue, le vecteur accélération au lieu du vecteur déplacement. Ce vecteur est calculé à partir de la première équation du système (5.9)

$$\ddot{\mathbf{U}} = \omega^2 \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}} - \omega^2 \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P} \quad (5.18)$$

La multiplication à gauche par \mathbf{M}_S produit une des équations recherchées

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}} - \omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}} + \omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

A présent le vecteur déplacement peut être éliminé du système. Il est d'abord exprimé par :

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P} \quad (5.20)$$

Il est ensuite remplacé dans la deuxième équation de (5.9) pour donner :

$$\mathbf{K}_F \mathbf{P} - \omega^2 (\mathbf{M}_F + \rho \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{P} + \omega^2 \rho \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

qui est divisé par ρ pour produire la seconde équation du système symétrique

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_F} \mathbf{K}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_F} \mathbf{M}_F + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q} & -\mathbf{Q}^T \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \\ -\mathbf{M}_S \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{Q} & \mathbf{M}_S \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{M}_S \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

Le plus gros avantage de cette technique comparée au deux premières est qu'elle évite l'inversion des matrices liées au domaine fluide. Aucune condition naturelle n'est alors nécessaire et les effets de la surface libre peuvent être pris en compte. De plus pour une structure fixée sur une partie de son contour, la matrice de rigidité \mathbf{K}_S est toujours définie positive, son inversion ne devrait pas poser de problème.

Le seul inconvénient pouvant être retenu contre cette technique concerne le changement de variable. L'utilisation des accélérations comme inconnues induit des calculs supplémentaires pour l'évaluation des déplacements. Par conséquent, cette technique est préférable pour les problèmes où l'intérêt est porté essentiellement sur la partie fluide.

5.3.4 Technique utilisant l'inversion de la matrice de masse du fluide

Cette technique qui constitue un des apports originaux de ce mémoire, utilise le même changement de variable que dans la méthode de Ohayon ($\mathbf{P} = \rho \omega^2 \mathbf{V}$) mais ici c'est le vecteur \mathbf{P} qui est éliminé du système d'équation. La seconde équation du système (5.9) est réécrite en introduisant \mathbf{V} comme suit :

$$\rho \omega^2 \mathbf{K}_F \mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{Q}^T \mathbf{U} - \omega^2 \mathbf{M}_F \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

Ensuite, \mathbf{P} est exprimé en fonction des deux vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V}

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{M}_F^{-1} (\mathbf{K}_F \mathbf{V} - \mathbf{Q}^T \mathbf{U}) \quad (5.24)$$

puis remplacé dans la première équation de (5.9) pour conduire à la première équation du système recherché :

$$(\mathbf{K}_S + \rho \mathbf{Q} \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{Q}^T) \mathbf{U} - \omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{U} - \rho \mathbf{Q} \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{K}_F \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

Pour achever la symétrisation, la seconde équation s'obtient en multipliant à gauche de (5.24) par \mathbf{K}_F^T et en remplaçant \mathbf{P} par $\rho \omega^2 \mathbf{V}$. Le système final s'écrit :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S + \rho \mathbf{Q} \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{Q}^T & -\rho \mathbf{Q} \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{K}_F \\ -\rho \mathbf{K}_F^T \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{Q}^T & \rho \mathbf{K}_F^T \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{K}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{K}_F^T \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

On voit qu'on utilise ici l'inversion de la matrice de masse fluide qui est définie positive quelle que soit la nature des conditions aux limites utilisées pour la pression. Particulièrement, les fluctuations de la surface libre peuvent être idéalisées par la condition d'onde de surface linéarisée. Ceci est l'un des avantages de cette technique. Un autre avantage concerne l'aspect numérique : dans le cas où la matrice de masse concentrée est adoptée pour la masse du fluide, \mathbf{M}_F devient une matrice diagonale et son inverse s'obtient rapidement par simple inversion de ses composantes diagonales. De plus, le nombre d'opérations nécessaires au triple produit matriciel entrant dans tous les systèmes symétriques peut être considérablement réduit avec la matrice diagonale.

5.3.5 Technique utilisant l'inversion de la matrice de masse de la structure

Cette technique, également originale, a été introduite pour la première fois dans [122], puis reprise dans [111]. Elle est reproduite dans [88] mais sans tirer profit de la structure diagonale que pourrait prendre \mathbf{M}_S . Cette technique ne nécessite aucun changement de variable, le système symétrique s'obtient uniquement par simples manipulations matricielles.

A partir de la première équation de (5.9), on a :

$$\omega^2 \mathbf{U} = \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{K}_S \mathbf{U} - \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P} \quad (5.27)$$

En remplaçant dans la seconde équation, on obtient la première équation du système symétrique :

$$(\mathbf{K}_F + \rho \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{P} - \rho \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{K}_S \mathbf{U} - \omega^2 \mathbf{M}_F \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

La multiplication à gauche de (5.27) par \mathbf{K}_S^T donne la seconde équation. Le système symétrique final s'écrit, après division par de (5.28) par ρ_F , comme suit :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{K}_S & -\mathbf{K}_S^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{K}_S & \frac{1}{\rho_F} \mathbf{K}_F + \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{Q} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\rho_F} \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.29)$$

Avec l'inversion de la matrice masse de la structure, cette technique présente les mêmes avantages que la précédente technique mais de plus, elle évite l'inconvénient inhérent au changement de variable. Cependant, pour les modèles d'éléments finis incluant les degrés de liberté de rotation pour lesquels les composantes de la matrice masse sont nulles, tel que les barres, les poutres et les coques, la condensation statique de ces degrés de liberté peut s'avérer nécessaire afin de pouvoir inverser \mathbf{M}_S .

5.4 Etude d'un cas de système couplé barrage - réservoir

Cette section a pour objectif d'examiner les performances des modèles d'interaction fluide-structure notamment sous l'hypothèse de fluide incompressible. L'effet de la compressibilité sera

traité à part. Le cas d'interaction étudié concerne à nouveau le barrage de Pine Flat qui a fait l'objet d'applications dans les sections précédentes (section : 2.5).

La géométrie du système barrage-réservoir est montrée sur la figure 5.1, dans laquelle sont spécifiés aussi les modèles utilisés. Ces modèles sont décrits en détail dans la section suivante. Les dimensions du barrage et du réservoir sont données dans le tableau 5.1 avec les propriétés mécaniques du béton constituant la structure du barrage.

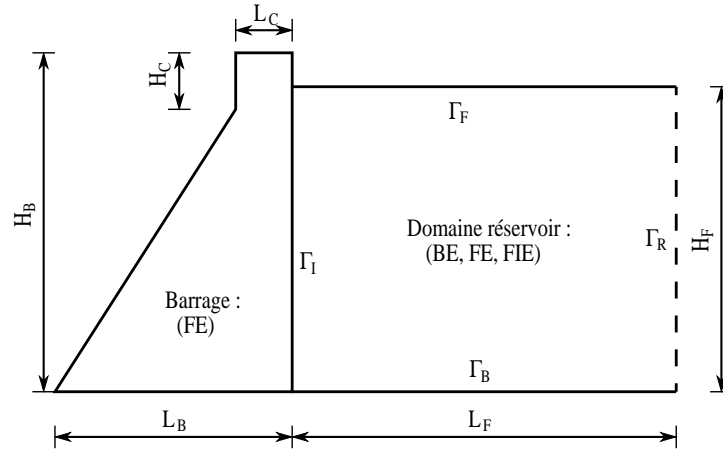


Figure 5.1 : Géométrie du système barrage - réservoir

Tableau 5.1 : Dimensions et propriétés matérielles du barrage de Pine Flat

Dimensions (m)						Propriétés matérielles		
H_B	H_C	L_B	L_C	L_F	H_F	E (GPa)	ν	ρ_b (Kg/m ³)
122.0	18.5	96.0	9.75	366.0	116.0	34.47	0.2	2483.0

La longueur horizontale L_F de la retenue d'eau correspond à la position de la limite de troncature du domaine fluide qui est fixée pour une première analyse à $L_F = 3H_B$. Il est connu que cette position est suffisamment éloignée de l'interface fluide-structure pour pouvoir éviter l'utilisation d'une condition de radiation dans les modèles d'éléments finis. Une fois que les résultats sont obtenus et confrontés à ceux de la référence [33] et à d'autres résultats issus du modèle simplifié de Westergaard, cette position de la limite de troncature sera rapprochée de l'interface fluide-structure afin d'examiner les performances des modèles numériques étudiés. Les résultats correspondant à $L_F = 0.25H_B$ seront rapportés comme étant un exemple de position très proche de l'interface.

Dans toute l'étude conduite ici, le barrage a été modélisé en éléments finis quadrilatéraux linéaires (Q4) d'une taille fixée approximativement à 5 m, ce qui donne 620 éléments avec 672 nœuds.

5.4.1 Modèles numériques utilisés

Dans cette première partie de l'étude, le fluide est modélisé selon quatre modèles numériques qui donnent les quatre types de couplage suivants :

- 1) FE-AM : Le réservoir est représenté par le concept de masse ajoutée de Westergaard. Une masse équivalente, sans rigidité, de forme parabolique représentant la partie du réservoir affectée par les vibrations d'ensemble est ajoutée à la structure du barrage. L'expression de la forme parabolique est $7/8\sqrt{H_F(H_F - y)}$ où y est la coordonnées verticale le long du parement amont mesurée à partir du fond (annexe B).
- 2) FE-FE : Le réservoir aussi bien que le barrage sont modélisés avec des éléments finis. Aucune condition à la limite de troncature n'est utilisée pour prendre en compte la partie infinie tronquée du réservoir. Le système d'équation à résoudre est donné par (5.5) où la matrice \mathbf{K}_F correspond à celle de l'expression (3.54).
- 3) FE-IE : La partie finie du réservoir est modélisée de la même manière que dans le modèle précédent (FE-FE) et la partie infinie est représentée par des éléments infinis appropriés basés sur les fonctions de décroissance exponentielle (annexe C). Une autre application de ce modèle portant sur le barrage-réservoir de Oued-Fodda, peut être trouvée dans les références [122] et [111].
- 4) FE-BE : Sur la base des développements mathématiques présentés dans le chapitre 4, le réservoir est modélisé suivant la nouvelle formulation en équations intégrales de frontières, avec des éléments de frontières linéiques linéaires (à deux nœuds). La partie infinie du réservoir est prise en compte simplement en laissant le domaine ouvert, ce qui revient à prendre en compte la dissipation des pressions hydrodynamique avec une décroissance logarithmique en fonction de la coordonnée horizontale dans la direction amont.

Dans les trois derniers modèles, l'interaction barrage-réservoir est prise en compte. La taille des éléments finis ou de frontière du réservoir est ajustée de façon à correspondre avec celle des éléments finis du barrage afin de pouvoir juxtaposer les deux maillages. On rappelle que le couplage se fait de manière directe en imposant la continuité des efforts à l'interface fluide-structure.

Pour $L_F = 3H_B$, le modèle éléments finis du réservoir consiste en 925 éléments et 988 nœuds. Ceci donne 950 DDLs après application de la condition de pression nulle à la surface libre. Le nombre d'éléments est réduit à 125 lorsque $L_F = 0.25H_B$. La partie tronquée du réservoir est représentée dans le modèle FE-IE par 25 éléments infinis quadrilatéraux à quatre nœuds (Q4), ce qui ajoute 52 DDLs supplémentaires par rapport au modèle FE-FE. Le modèle FE-BE est constitué uniquement de 100 éléments et 62 DDLs lorsque $L_F = 3H_B$. Ce maillage est réduit jusqu'à 34 éléments et 28 DDLs lorsque $L_F = 0.25H_B$.

5.4.2 Analyse modale

L'analyse des vibrations libres du barrage seul et du système barrage-réservoir constitue l'objet de la première étape de cette étude. On s'intéresse à l'extraction des modes et périodes propres à partir des matrices de masse et de raideur construites selon les quatre modèles décrits plus haut. Le tableau 5.2 répertorie les valeurs des périodes obtenues pour les cinq premiers modes de vibration et pour les deux cas de position de la frontière de troncature du réservoir.

Tableau 5.2 : Périodes (en secondes) du barrage seul et du système barrage-réservoir

Mode	1	2	3	4	5
Barrage seul					
FE	0.2595	0.1293	0.0926	0.0737	0.0491
Barrage avec masse ajoutée					
FE-AM	0.3296	0.1566	0.0964	0.0885	0.0629
Système barrage-réservoir : modèles numériques avec ($L_F = 3H_B$)					
FE-FE	0.3044	0.1439	0.0928	0.0799	0.0519
FE-IE	0.3044	0.1439	0.0928	0.0799	0.0519
FE-BE	0.3078	0.1457	0.0929	0.0808	0.0525
Système barrage-réservoir : modèles numériques avec ($L_F = 0.25H_B$)					
FE-FE	0.3418	0.1565	0.0938	0.0822	0.0536
FE-IE	0.3020	0.1427	0.0926	0.0797	0.0519
FE-BE	0.3004	0.1431	0.0944	0.0883	0.0559

On peut noter à partir de ce tableau que lorsque le domaine réservoir est tronqué à une distance $L_F = 3H_B$ de l'interface barrage-réservoir, les trois variantes de modèles numériques fournissent pratiquement les mêmes résultats pour la totalité des modes retenus dans les calculs. De plus, ces résultats ne diffèrent pas trop de ceux fournis par l'application du concept de masse ajoutée de Westergaard.

Cependant, lorsque la position de la frontière de troncature est rapprochée à $L_F = 0.25H_B$, les résultats du modèle de couplage (FE-FE) divergent de ceux des autres modèles. L'utilisation des éléments infinis ou des éléments de frontière dans la modélisation du réservoir semblent donner des résultats concordants et de bonne qualité par rapport à ceux du cas où la frontière de troncature est positionnée à $3H_B$.

Par ailleurs, en plus des valeurs des périodes propres du barrage données par Wilson [129], on rapporte aussi celles trouvées par Calayir *et al.*[33] : 0.2558, 0.1241 et 0.0921 secondes. Pour le cas du système couplé barrage-réservoir les périodes données par Calayir pour un niveau de retenue de $H_F = 104 m$ sont : 0.2810, 0.1375 et 0.0930 secondes et celles calculées avec le programme FEMAT (annexe E) pour ce même niveau d'eau, avec $L_F = 3H_B$, sont pratiquement les mêmes : 0.2807, 0.1372 et 0.0929 secondes.

On précise que le système couplé barrage-réservoir est modélisé par Calayir [33] en utilisant des éléments finis aussi bien pour le barrage que pour le réservoir. La formulation du réservoir s'est basée sur les deux approches Lagrangienne et Eulerienne. Dans l'approche Eulerienne, l'eau

a été considérée comme incompressible alors que dans l’approche Lagrangienne elle était prise compressible et le cas incompressible a été reproduit en augmentant la valeur du coefficient de compressibilité. Dans toute l’étude de la référence [33], la frontière de troncature a été fixée à $3H_B$.

En complément de l’analyse modale, on donne dans le tableau 5.3 les taux de participation modale calculés pour les cinq premiers modes de vibration évalués selon les quatre modèles. Le cumul des contributions de tous les modes est aussi reporté.

Tableau 5.3 : Taux de participation modale (%)

Mode	1	2	3	4	5	Cumul
Barrage seul						
FE	35.61	25.42	11.46	9.75	8.30	90.52
Barrage avec masse ajoutée						
FE-AM	42.30	25.92	8.69	7.64	5.61	90.17
Système barrage-réservoir : modèles numériques avec ($L_F = 3H_B$)						
FE-FE	45.33	26.21	7.01	8.70	5.56	92.81
FE-IE	45.31	26.20	6.99	8.67	5.57	92.75
FE-BE	45.82	26.43	6.91	8.41	5.26	92.82
Système barrage-réservoir : modèles numériques avec ($L_F = 0.25H_B$)						
FE-FE	57.95	24.17	5.12	4.58	1.80	93.62
FE-IE	43.85	25.86	7.27	9.35	6.14	92.47
FE-BE	32.09	23.74	10.95	14.32	8.41	89.52

Dans ce cas aussi on remarque un très bon accord entre les résultats de tous les modèles dans le cas où la limite de troncature du réservoir est placée loin de l’interface fluide-structure ($L_F = 3H_B$).

Contrairement aux valeurs des périodes, qui changent peu quand la limite de troncature est rapprochée de l’interface barrage-réservoir, les quatre modèles conduisent à des valeurs des taux de participation modale différentes. Néanmoins, leurs cumuls changent peu d’un modèle à l’autre.

Sur la base de ce calcul, on peut voir que la nouvelle formulation symétrique en équations intégrales présentée dans ce travail conduit non seulement à un système à matrice de raideur équivalente qui permet d’effectuer un calcul modal, mais aussi, elle donne des résultats semblables à ceux des modèles d’éléments finis avec traitement de la condition de troncature géométrique.

Du point de vue numérique, en plus du fait qu’elle permette d’éviter l’évaluation d’intégrales singulières, la performance de cette nouvelle méthode comparée à la méthode des éléments de frontière classique réside essentiellement dans sa flexibilité dans l’assemblage ou le couplage avec les éléments finis. Comparée aux éléments finis, la méthode peut faire gagner de l’espace mémoire d’ordinateur moyennant un surcoût en temps d’exécution apporté par les calculs des triples intégrales. Ce temps peut cependant être largement réduit grâce aux techniques de calcul parallèle qui sont à présent très répandues.

Comme exemple de ressources système mobilisées dans le cas où $L_F = 0.25H_B$, la construction de la matrice de raideur de frontière \mathbf{K}_E et son inversion ont nécessité 12.25 Ko et 21 secondes

alors que celle du modèle FE–FI a demandé 195.703 Ko et 2 secondes. Le gain en mémoire de stockage est de l'ordre de 1500%, la taille de la matrice pleine \mathbf{K}_E est $28 \times 28 \times 8$ octets, ce qui donne le total de 12.25 Ko avec son inverse \mathbf{K}_E^{-1} . Par contre le modèle d'éléments finis produit une matrice \mathbf{K}_F creuse de 125×125 dont l'inverse est une matrice pleine de taille $125 \times 125 \times 8$ octets, ce qui donne une taille mémoire de 122.07 Ko. Le reste de la mémoire occupée par la matrice elle-même dépend de l'algorithme de stockage des matrices creuses. Bien entendu, ces valeurs sont faibles puisque la taille du maillage du réservoir est très réduite, mais, elles peuvent devenir beaucoup plus importantes dans d'autres cas qui nécessitent des maillages plus importants ou lors du passage à des calculs tridimensionnels.

En outre, ce gain en taille entraîne un gain en temps de calcul des modes propres et de résolution dynamique par superposition modale ou par intégration directe pas à pas. Dans le cas présent le temps de calcul des cinq premiers modes est réduit de 1.02s à 0.42s lorsque l'on change de modèle du FE–FE à FE–BE.

5.4.3 Analyse de la réponse fréquentielle

Pour une excitation horizontale harmonique d'amplitude unitaire et de pulsation ω , appliquée à la base du barrage : $\ddot{x}_g(t) = e^{i\omega t}$, ω variant de 0 à 150 rad/sec, l'équation (1.26) est résolue pour les déplacements du barrage $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\max} e^{i\omega t}$ en utilisant un taux d'amortissement critique de la structure $\xi = 5\%$. Le vecteur des accélérations nodales est ensuite calculé puis utilisé pour évaluer le vecteur des pressions \mathbf{P} selon l'équation (5.4) mais la matrice de raideur doit correspondre au modèle utilisé pour idéaliser le réservoir comme indiqué plus haut dans la description des quatre modèles. Dans le cas du modèle à masse ajoutée, la pression ne peut être calculée puisque son expression repose sur l'hypothèse de barrage rigide, (formule de Westergaard [86, 128], équation B.4).

Dans la figure 5.2 sont représentés les déplacements maximums et les accélérations correspondantes du barrage seul (FE) et ceux du système barrage-réservoir évalués avec le modèle de masse ajoutée (FE–AM). On voit bien l'amplification des pics et leur décalage vers les basses fréquences.

Les figures 5.3, 5.4 et 5.5 montrent la réponse fréquentielle en déplacements, accélérations et pressions hydrodynamiques, respectivement. Cette réponse est évaluée avec les modèles numériques prenant en compte l'interaction fluide-structure et ce pour les deux cas de position de la limite de troncature géométrique du réservoir. Dans la figure 5.5, la pression hydrodynamique est représentée en utilisant un coefficient adimensionnel, dit "coefficient de pressions hydrodynamiques" qui caractérise un taux de surpression par rapport à la pression hydrostatique : $C_p = p/(\rho g H_F)$.

Cette analyse montre que lorsque le réservoir est tronqué à la position $L_F = 3H_B$, les trois modèles numériques fournissent, pour toute la gamme des fréquences de calcul, exactement les mêmes résultats aussi bien pour les déplacements et accélérations du barrage que pour les pressions

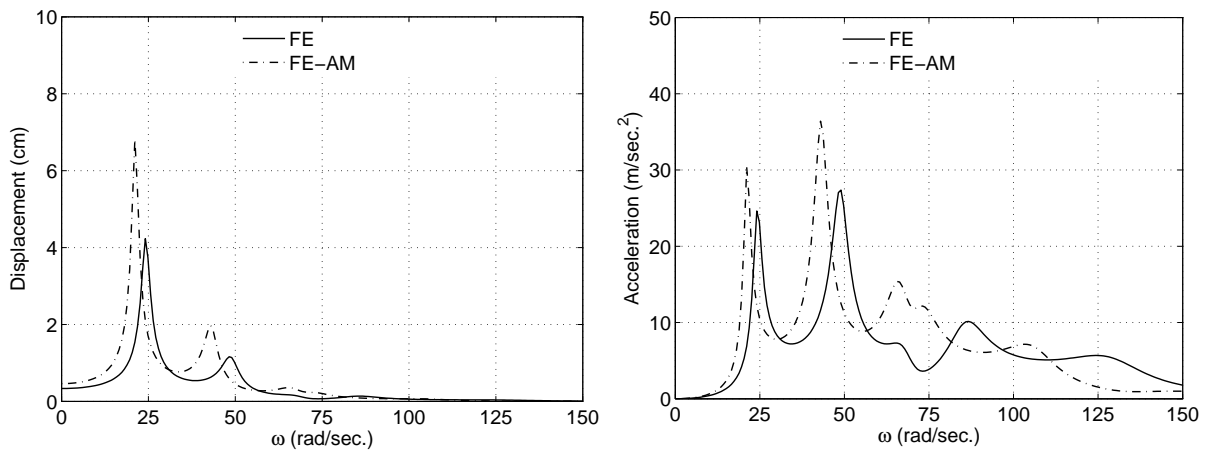


Figure 5.2 : Réponse fréquentielle du barrage avec et sans masse ajoutée

hydrodynamiques au fond du réservoir. De plus, ces résultats sont assez proches de ceux du modèle simplifié à masse ajoutée (FE-AM).

En revanche, lorsque la position de la troncature géométrique est rapprochée de l'interface barrage-réservoir à $L_F = 0.25H_B$, de larges amplifications de la réponse sont observées dans les résultats du modèle (FE-FE) tandis que les résultats des deux modèles FE-IE et FE-BE restent très proches et ne s'écartent pas de la solution obtenue avec $L_F = 3H_B$.

En outre, on peut remarquer que, contrairement aux accélérations et aux pressions, les déplacements sont moins sensibles à la position de la frontière de troncature. L'évaluation de la réponse en terme de déplacements uniquement peut s'avérer insuffisante.

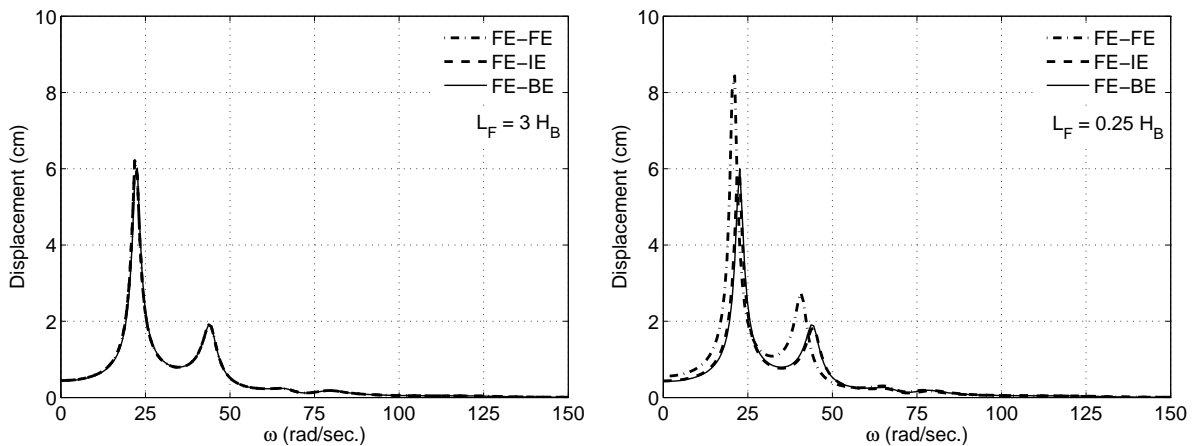


Figure 5.3 : Déplacements en crête du barrage

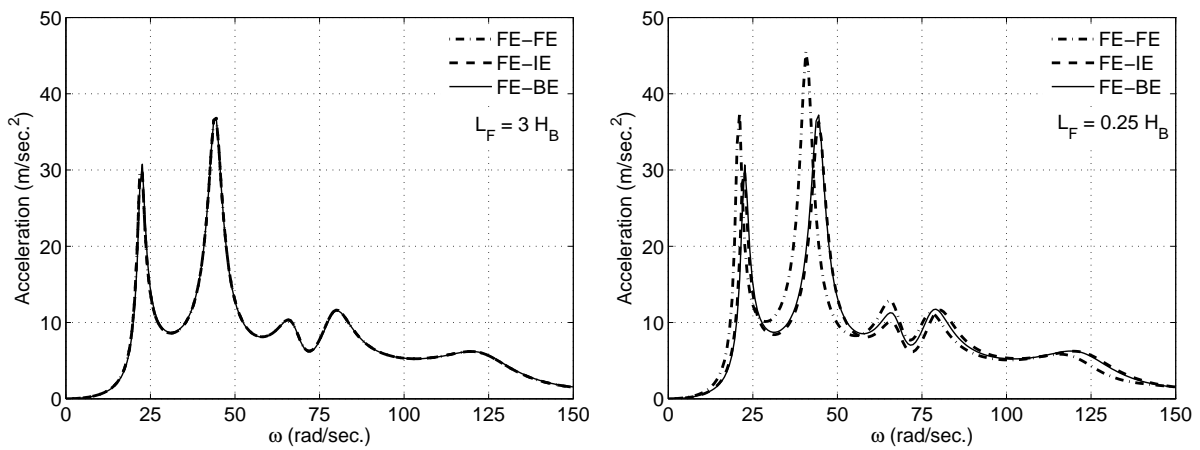


Figure 5.4 : Accélérations en crête du barrage

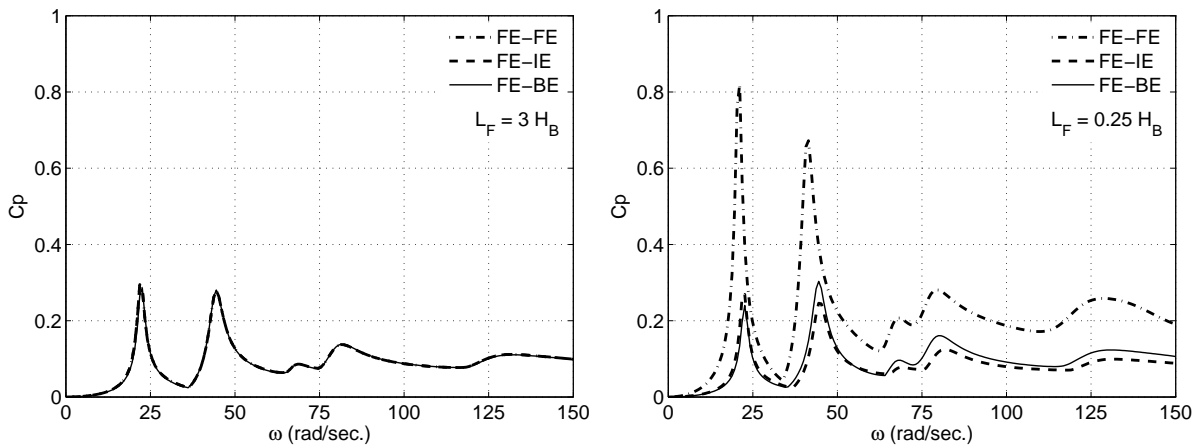


Figure 5.5 : Coefficient de pressions hydrodynamiques à la base

5.4.4 Réponse temporelle

Dans cette dernière analyse, on s'intéresse à l'évaluation de la réponse temporelle du système barrage - réservoir. Elle permet d'examiner dans de meilleures conditions les performances des modèles numériques utilisés, notamment celles des méthodes proposées dans ce mémoire. Les accélérations utilisées pour l'excitation du système sont les enregistrements sismiques horizontaux du séisme du Taft (S69E) montrés sur la figure 5.6. Uniquement les 10 premières secondes sont considérées, celles qui apparaissent les plus critiques pour le système et qui peuvent montrer clairement les différences entre les modèles.

Les solutions ont été calculées avec la méthode de superposition modale en utilisant 30 modes tous amortis avec un taux d'amortissement critique fixé à $\xi = 5\%$. La réponse temporelle fournit les déplacements et accélérations aux nœuds du maillage du barrage. Les pressions sont ensuite calculées à chaque pas de temps pour tous les nœuds du réservoir. Les résultats reportés

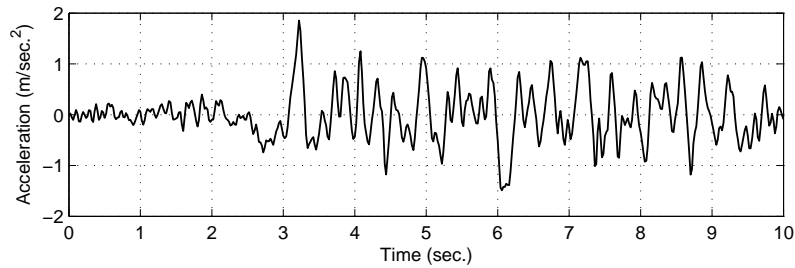


Figure 5.6 : Enregistrement des accélérations sismiques du Taft (S69E)

concernent les déplacements au sommet du barrage, les pressions agissant au pied amont et la distribution des pressions maximales sur le parement amont du barrage.

Les figures 5.7 montrent la réponse en déplacements et accélérations du barrage seul (FE) et du barrage avec masse ajoutée (FE-AM). Les amplifications et les modifications de la réponse du barrage à cause de la masse ajoutée sont bien visibles.

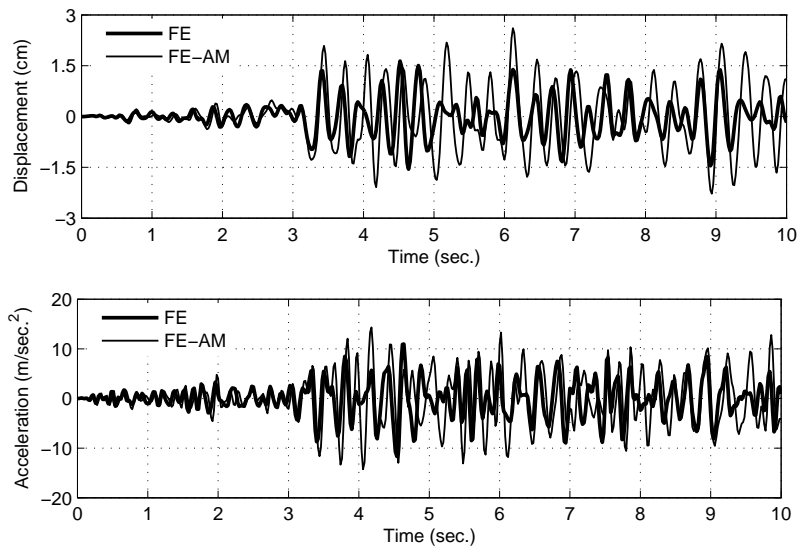


Figure 5.7 : Réponse temporelle des déplacements et accélérations en crête

Les déplacements et accélérations en crête du barrage, évalués selon les trois modèles numériques qui tiennent compte de l'interaction barrage - réservoir, sont montrés sur les figures 5.8 et 5.9 pour les deux positions de la limite de troncature.

Une fois les accélérations déterminées pour tous les pas de temps, les pressions sont évaluées pour chaque pas de temps en utilisant l'équation (5.4) où la matrice de "raideur fluide" est calculée selon le modèle d'éléments finis ou d'éléments de frontière. La figure 5.10 montre l'histoire temporelle de la pression s'exerçant au fond du réservoir au niveau du pied amont du barrage. Elle est évaluée selon les trois modèles pour les deux positions de la limite de troncature. La répartition de la pression maximale qui s'exerce le long de l'interface barrage-réservoir est illustrée sur la figure 5.11. Elle est exprimée en terme de coefficient de pression C_p .

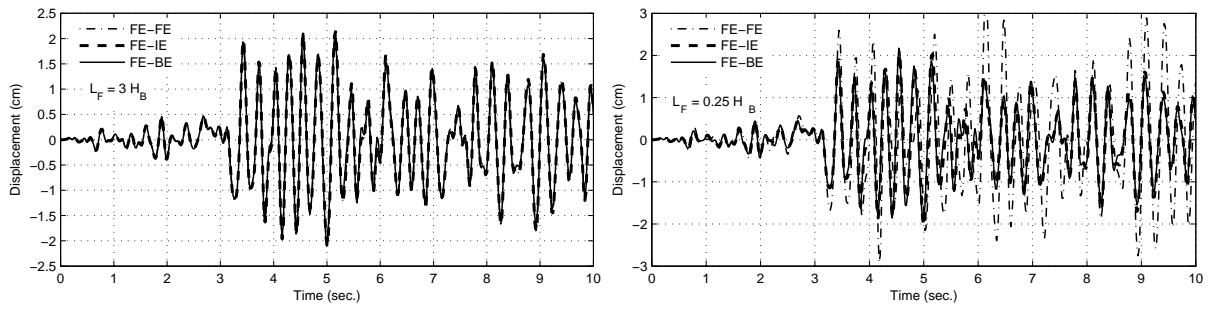


Figure 5.8 : Réponse temporelle des déplacements en crête du barrage

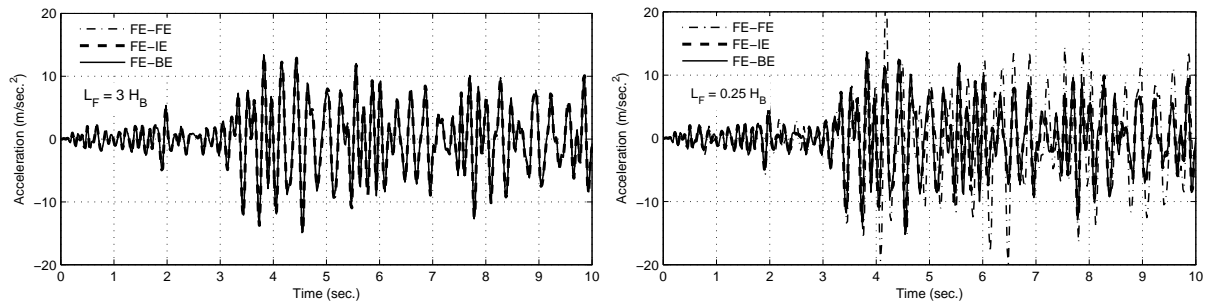


Figure 5.9 : Histoire de réponse temporelle des accélérations en crête du barrage

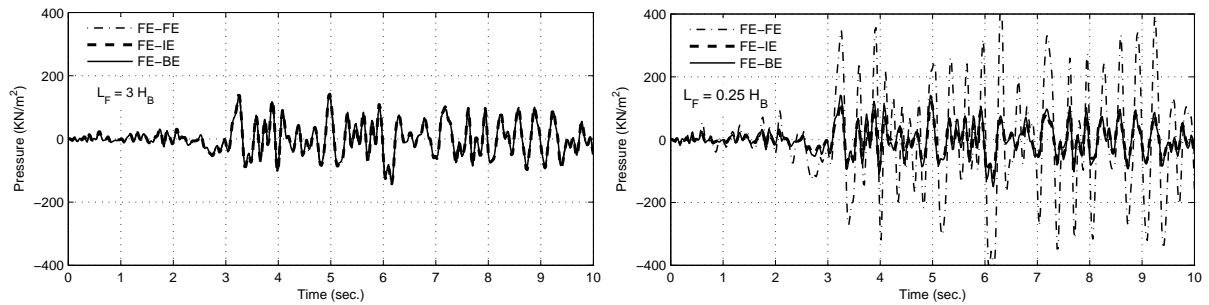


Figure 5.10 : Histoire de réponse temporelle des pressions au pied amont du barrage

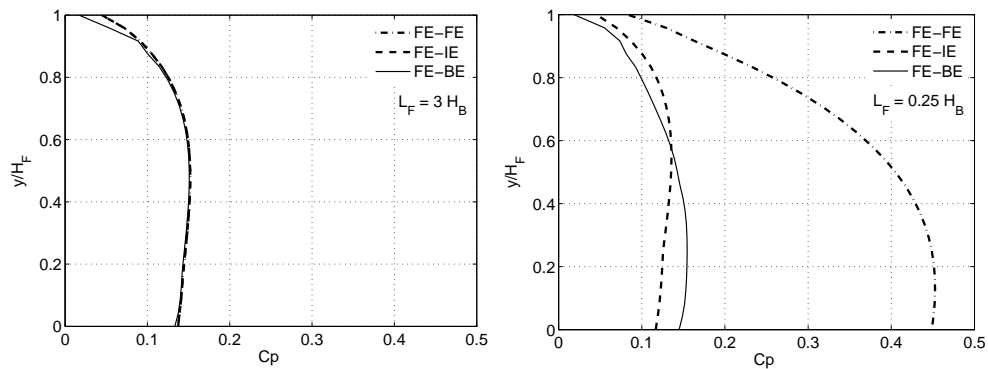


Figure 5.11 : Distribution des pressions hydrodynamiques maximales sur le parement amont du barrage

Dans cette étude aussi, on voit le rapprochement des résultats des différents modèles utilisés lorsque la limite de troncature géométrique du réservoir est placée assez loin de l'interface fluide-structure, ce qui montre une fois de plus l'équivalence entre les modèles d'éléments finis et le modèle d'éléments de frontière.

En outre, les amplifications importantes dans la réponse temporelle induites par le modèle d'éléments finis sans traitement de la condition de troncature (FE-FE) montrent, d'une part, combien sont importantes les techniques de prise en compte des effets de troncature géométrique, et d'autre part, l'efficacité des éléments de frontière et du couplage éléments finis - éléments infinis. Les différences entre les résultats des deux modèles sont très faibles. De plus ces deux modèles semblent être peu sensibles à la position de la limite de troncature.

Par ailleurs, il faut souligner que l'objectif recherché dans le rapprochement de la position de la limite de troncature de l'interface fluide-structure n'est autre que la réduction de la taille du maillage et par conséquent celui des matrices résultantes et de leur demande en mémoire de stockage. Cet objectif est atteint dès lors que la discrétisation du domaine entier est évitée, le modèle FE-BE s'avère dans ce cas non seulement efficace mais également économique.

Finalement, il est intéressant de souligner par ailleurs que l'approche simplifiée de masse ajoutée de Westergaard donne des résultats acceptables par rapport aux modèles numériques sophistiqués. Cette méthode reste une référence très utile pour les investigations numériques et un moyen de calcul d'ingénierie rapide et efficace.

5.4.5 Effet de la compressibilité

On examine à présent l'effet de la compressibilité de l'eau sur la réponse du système couplé. On s'intéresse en premier lieu aux modes propres, puis on étudiera cet effet sur la réponse en termes de déplacements en crête du barrage, de pressions au pied amont et de la répartition verticale des pressions sur le parement.

Modes propres

Les périodes calculées avec FEMAT selon la formulation en pression, avec les deux modèles du réservoir FE et FE-EI, sont comparées à celles trouvées avec CASTEM qui utilise la formulation mixte pression - potentiel des déplacements. Le tableau 5.4 montre les valeurs calculées pour les deux positions de la limite de troncature $L_F = 0.25H_B$ et $L_F = 3H_B$.

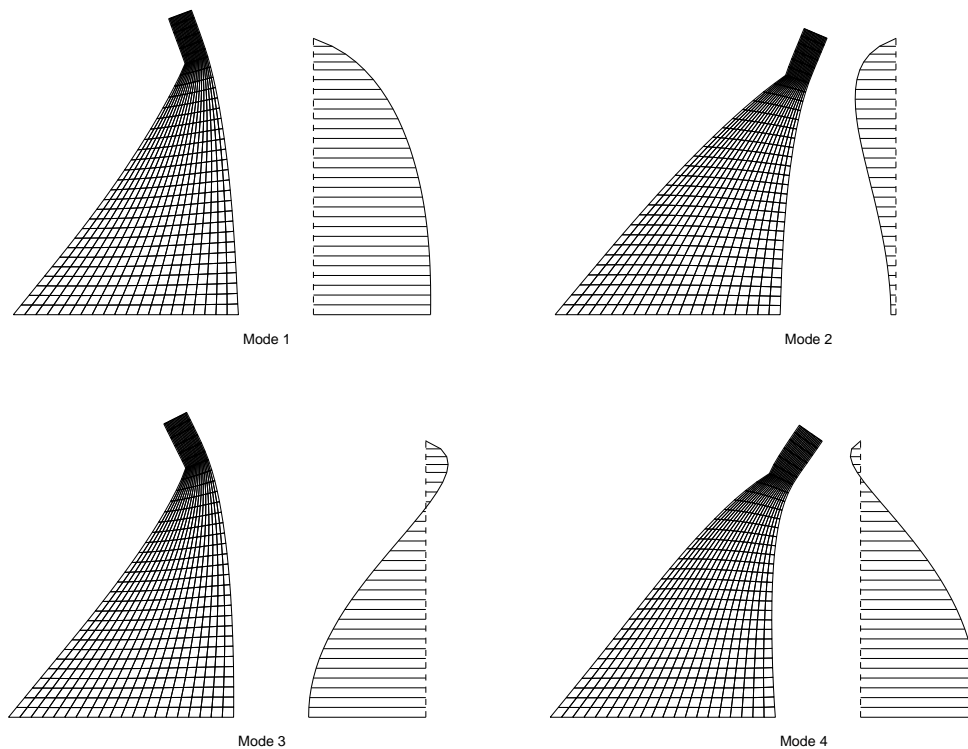
Les quatre premiers modes du système couplé sont tracés sur les figures 5.12 et 5.13 pour les deux hypothèses de réservoir compressible et incompressible. Pour chaque mode, on trace la déformée du barrage et la répartition correspondante des pressions hydrodynamiques sur le parement amont. Toutes les déformées sont normalisées puis amplifiées de 20 fois alors que les pressions correspondantes sont simplement normalisées.

Tableau 5.4 : Effet de la compressibilité sur les périodes propres du système barrage-réservoir

Mode		1	2	3	4	5
$L_F = 0.25H_B$						
	CASTEM	0.4158	0.2445	0.1343	0.1021	0.0917
	EF-EF	0.4157	0.2444	0.1343	0.1021	0.0917
	EF-EI	0.3346	0.2477	0.1447	0.1165	0.1025
$L_F = 3H_B$						
	CASTEM	0.3477	0.2952	0.2423	0.1761	0.1375
	EF-EF	0.3479	0.2977	0.2472	0.1830	0.1427
	EF-EI	0.3457	0.3116	0.2820	0.2437	0.1908

On constate à partir du tableau 5.4 que, même dans le cas où la compressibilité de l'eau est prise en compte, la position de la troncature à $3H_B$ peut être considérée comme assez éloignée pour pouvoir utiliser indifféremment un modèle d'éléments finis avec ou sans traitement de la condition de troncature. Par contre, lorsque cette limite est très proche de l'interface fluide-structure, l'amplification, notamment de la période fondamentale dans le modèle FE, est accentué par la compressibilité, comparativement à l'amplification observée dans le cas incompressible (5.2).

Par ailleurs, on note aussi à partir de ce tableau que les deux formulations du réservoir : (ϕ, p) de CASTEM et (p) du modèle EF-EF de FEMAT donnent exactement les mêmes valeurs quelle que soit la position de la troncature. Les périodes trouvées par le modèle FE-FE de FEMAT sont

**Figure 5.12** : Modes propres du système couplé : Déformée - Pression. Cas de fluide compressible

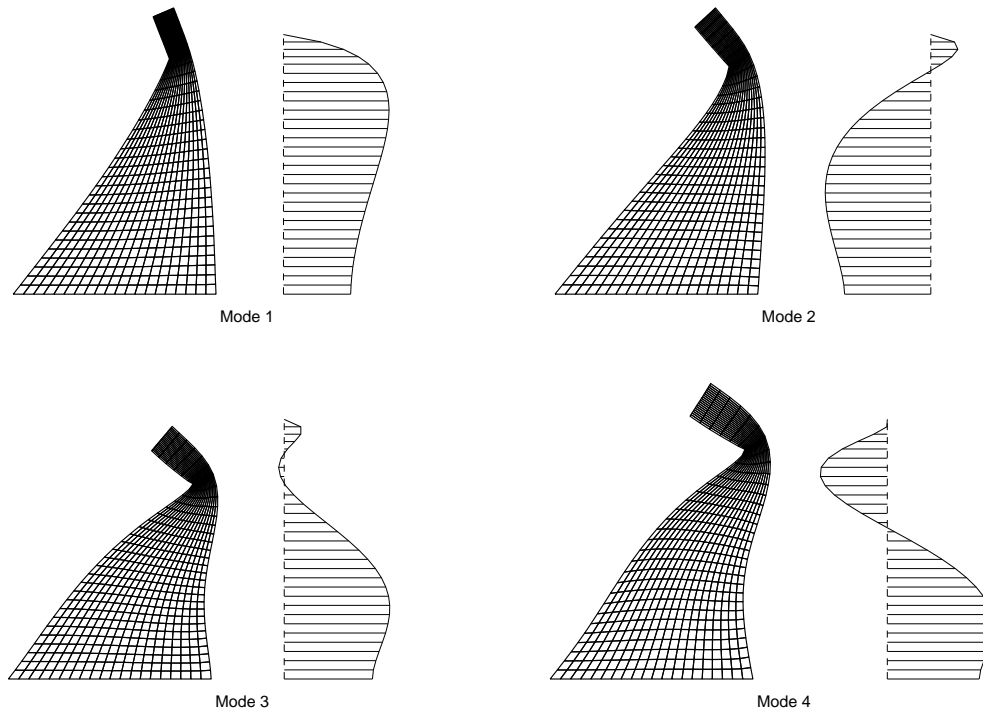


Figure 5.13 : Modes propres du système couplé : Déformée - Pression. Cas de fluide incompressible

les mêmes quelle que soit la technique de symétrisation adoptée.

Comparativement aux modes propres du cas d'eau incompressible tracés dans la figure 5.13, il semble, dans le cas compressible, qu'à chaque mode de déformation du barrage, il corresponde deux modes de répartition des pressions hydrodynamiques. Les déformées des modes 1 et 3 sur la figure 5.12 sont pratiquement les mêmes mais la distribution des pressions diffère. De même pour les deux modes 2 et 4. Par contre, toutes les déformées de la figure 5.13 sont différentes et la distribution des pressions qui leur correspondent aussi.

Réponse temporelle

On s'intéresse à présent à la réponse temporelle du système couplé. On examine l'évolution dans le temps du déplacement en crête et de la pression au pied du barrage. L'effet de la compressibilité sur ces deux quantités est d'abord montré dans les figures 5.14 et 5.15 pour les deux positions de la limite de troncature du réservoir. La troncature a été traitée en utilisant les éléments infinis (modèle FE-IE). On voit que pour les deux cas de position de la limite de troncature, les pressions sont beaucoup plus sensibles à la compressibilité du fluide que les déplacements. Elles sont tellement amplifiées qu'elles affectent sensiblement les déplacements qui en retour contribuent aussi à cet amplification. De plus, contrairement à la pression, le déplacement est moins sensible à la position de la limite de troncature, que ce soit dans le cas de fluide compressible

ou incompressible.

On voit sur les figures 5.16 et 5.17 que si l'on ne traite pas la limite de troncature, les amplifications de la réponse deviennent énormes surtout à $L_F = 0.25H_B$. Ces deux figures montrent aussi que le modèle FE-FE du programme FEMAT, développé sur la base de la formulation en pression, donne pratiquement les mêmes réponses que CASTEM qui utilise la formulation mixte (ϕ, p) . Par contre les figures 5.18 et 5.19 permettent de comparer entre l'utilisation de la condition de Lysmer avec l'opérateur AMOR de CASTEM et les éléments infinis implantés dans FEMAT. On voit que les réponses restent toujours identiques lorsque $L_F = 3H_B$, mais lorsque la limite de troncature est très rapprochée de l'interface fluide-structure, $L_F = 0.25H_B$, la réponse devient très amortie avec l'opérateur AMOR de CASTEM. Les fortes vibrations en fin de réponse ne sont plus reproduites par CASTEM.

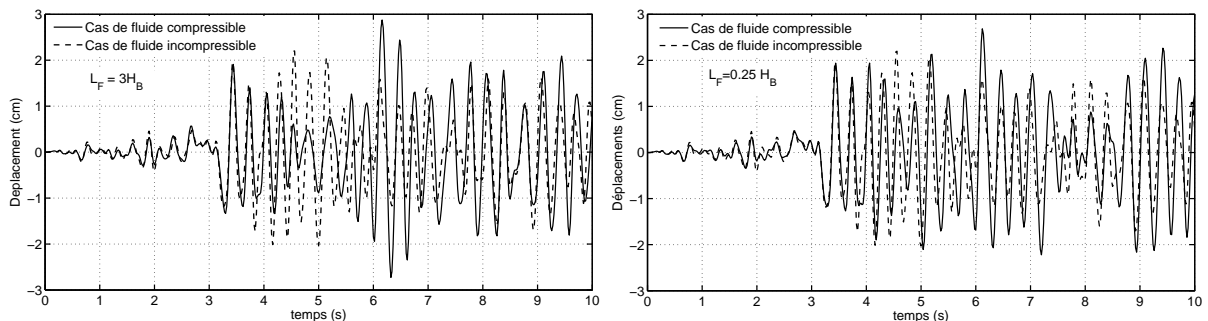


Figure 5.14 : Effet de la compressibilité du fluide sur les déplacements du barrage (Modèle FE-IE)

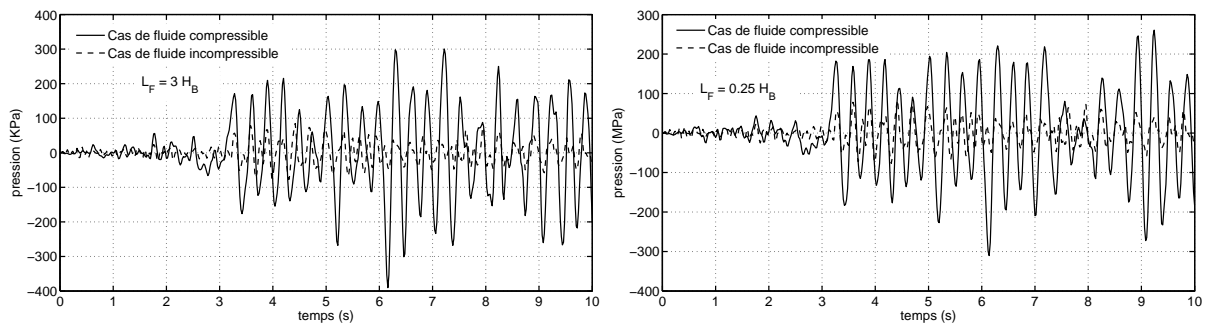


Figure 5.15 : Effet de la compressibilité du fluide sur les pressions au fond du barrage (Modèle FE-IE)

5.4.6 Performances des méthodes de symétrisation

On termine cette étude de cas avec les performances des techniques de symétrisation du problème de vibrations libres du système couplé, exposées dans la section 5.3. On examine ces performances à travers les demandes en ressources machines mobilisées par le programme afin de construire les matrices couplées. La figure 5.20 montre le temps d'exécution (t/t_r) et la capacité mémoire (m/m_r) qu'a nécessité chacune des quatre techniques pour construire le système symétrique. Les

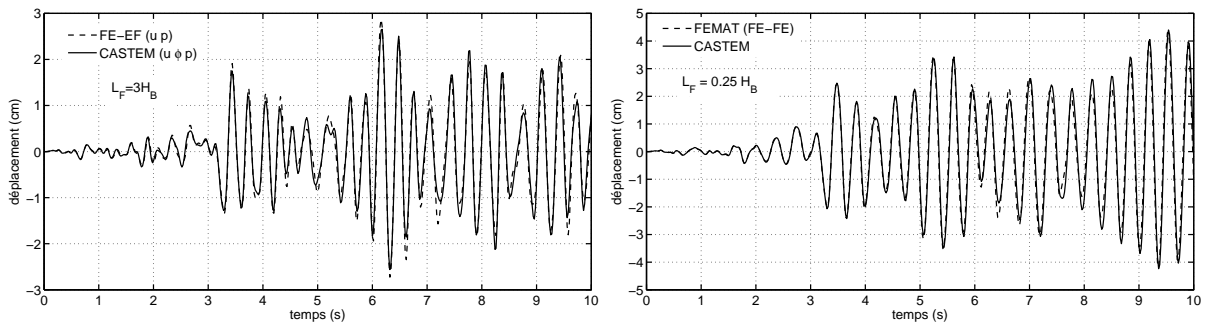


Figure 5.16 : Déplacements en crête évalués avec CASTEM et FEMAT sans traitement de la troncature

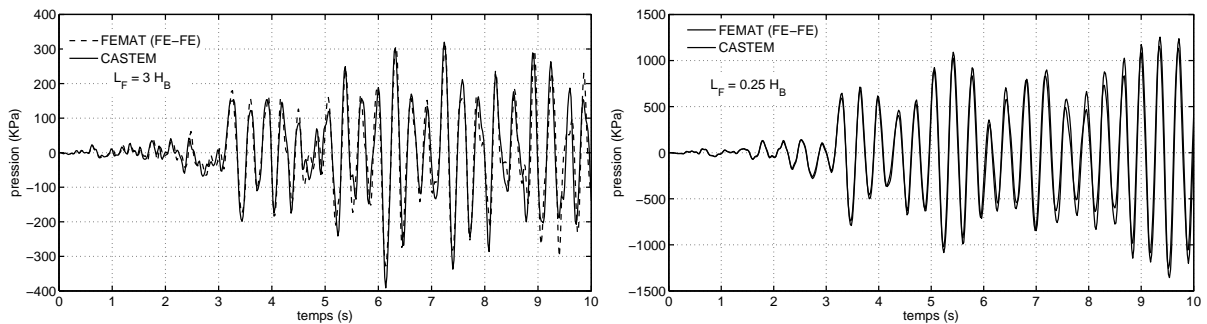


Figure 5.17 : Pressions au fond évaluées avec CASTEM et FEMAT sans traitement de la troncature

valeurs relatives sont normalisées par rapport au temps t_r et à la capacité m_r demandés par le simple assemblage du système non symétrique. La première barre (a) des deux tracés est de hauteur unité et les barres (b) à (f) correspondent aux techniques dans le même ordre que celui avec lequel elles sont exposées dans la section 5.3.

On voit que les hauteurs des barres (e) et (f) sont proches de l'unité (hauteur de la barre a). Le temps de calcul et la quantité de mémoire demandés par les deux techniques proposées ici, sont légèrement supérieurs à ceux requis par l'assemblage du système non symétrique. Cette performance revient essentiellement à la concentration des masses aux noeuds qui donne des matrices diagonales faciles à inverser.

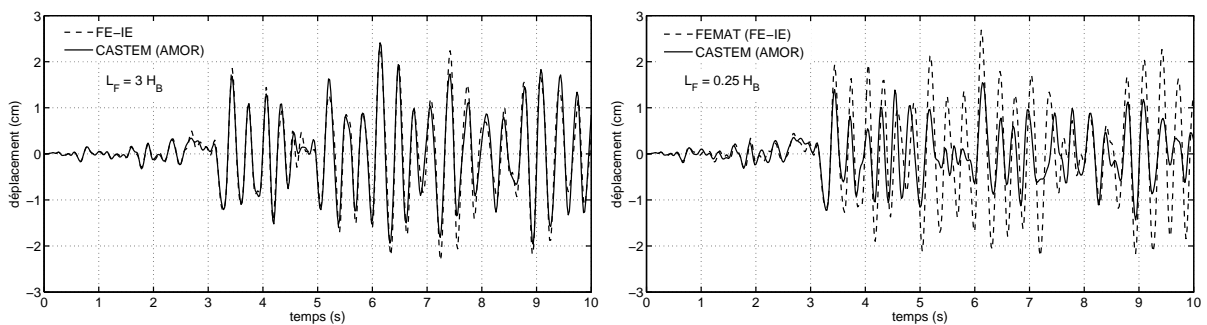


Figure 5.18 : Déplacements en crête évalués avec CASTEM (AMOR) et FEMAT (FE-IE)

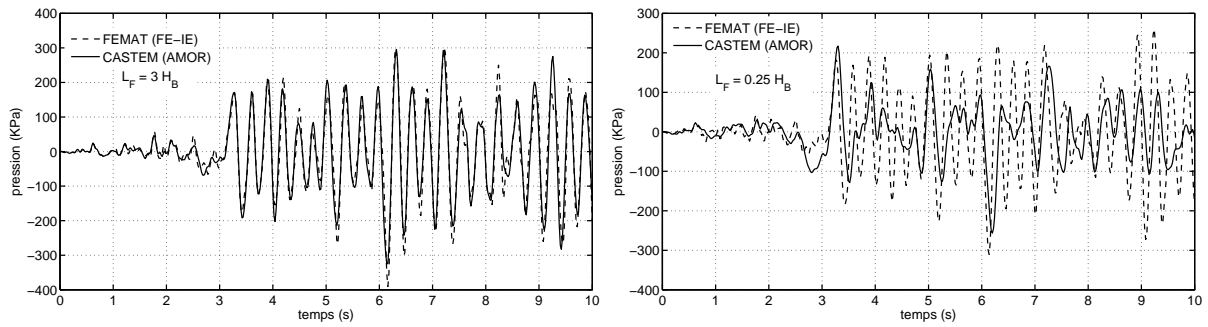


Figure 5.19 : Pressions au fond évaluées avec CASTEM (AMOR) et FEMAT (FE-EI)

Les barres (b) et (c) qui correspondent aux méthodes de Zienkiewicz et de Ohayon sont inférieures à la barre (d) qui correspond à la méthode de Daniel à cause de la taille des matrices inversées. Les matrices fluides sont généralement de taille inférieure à celle des matrices solides puisque le nombre de degrés de liberté en déplacements est le double ou le triple du nombre de nœuds. Cette situation reste vraie tant que la taille des maillages des deux milieux sont du même ordre. Elle peut s'inverser si la taille du fluide est trop importante. Par exemple si la position de la limite de troncature est éloignée de l'interface.

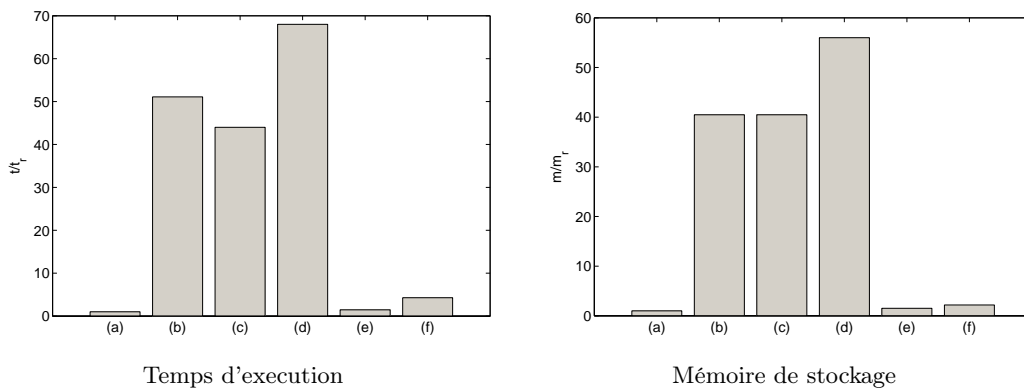


Figure 5.20 : Demandes en ressources système : temps d'exécution et mémoire de stockage

La dernière comparaison entre les techniques de symétrisation qui va être montrée concerne la forme des matrices couplées. En général, les matrices d'éléments finis sont des matrices bandes très creuses. Elles sont sauvegardées en mémoire sous une forme particulière qui prend en compte leur structure ou moyennant un algorithme de gestion de matrices dites éparses, qui ne sauvegarde que les composantes non nulles. Les gains en mémoire pouvant ainsi être réalisés sont d'autant plus importants que les matrices sont creuses. Or l'inversion d'une matrice bande donne souvent une matrice pleine, la structure initiale n'est que rarement préservée par l'inversion matricielle comme dans le cas des matrices diagonales.

Toutes les techniques de symétrisation exposées s'appuient sur l'inversion et le triple produit matriciel. Les matrices couplées symétrisées perdent la forme des matrices initiales. La figure

5.21 montre ce qu'elles deviennent après la symétrisation par chacune des quatre techniques. Le nombre de composantes non nulles n_z est précisé dans chaque cas. On voit que la structure bande d'origine dans la figure 5.21(a) n'est préservée que par les deux techniques proposées (e) et (f). Ces deux techniques gardent aussi le nombre de composantes non nulles n_z le plus proche de celui d'origine. Cet avantage est perdu lorsque l'on utilise les matrices masse cohérentes au lieu des masses concentrées.

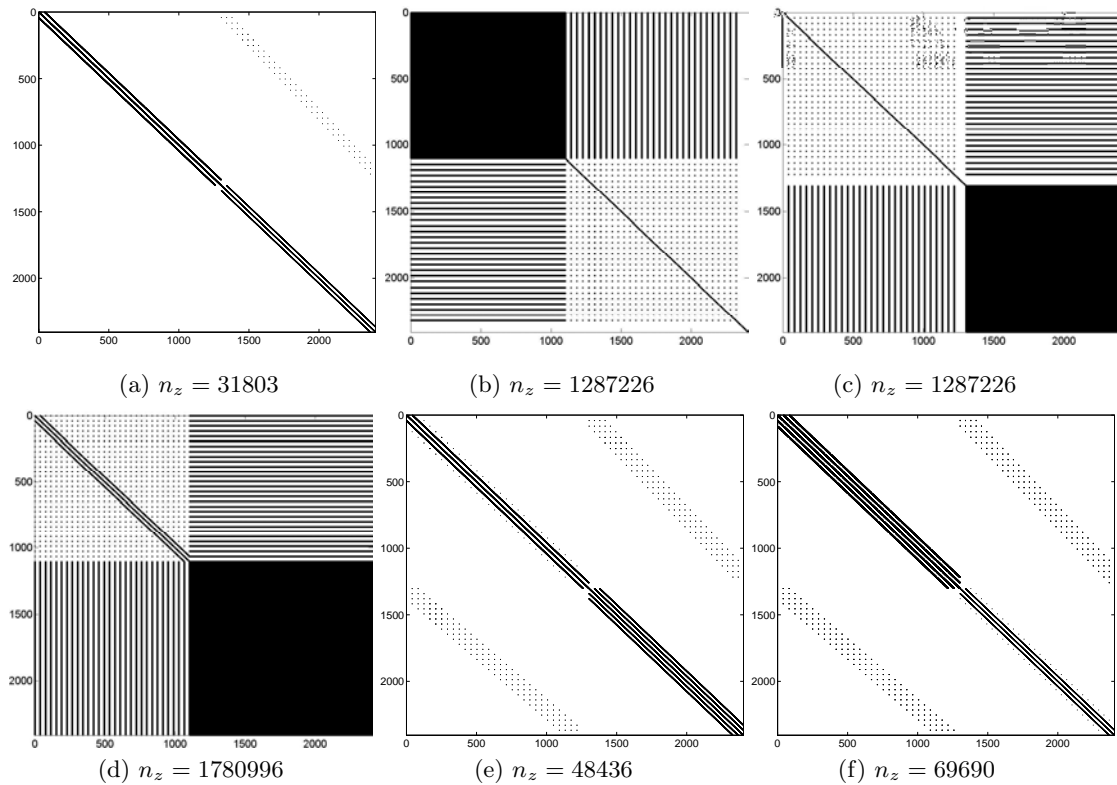


Figure 5.21 : Dispersion des composantes des matrices couplées

5.5 Conclusion

Dans cette partie du travail portant sur le couplage fluide-structure à travers l'étude de la réponse sismique des barrages avec prise en compte des effets du réservoir, nous nous sommes intéressés en première étape aux cas de réservoirs où le fluide est supposé incompressible. Dans cette étape, nous avons examiné les performances du modèle d'interaction basé sur la nouvelle formulation symétrique en éléments de frontière.

La géométrie du réservoir non bornée stimule en effet la recherche de nouvelles techniques pour la prise en compte des conditions de troncature. La méthode classique des éléments de frontière s'adapte bien pour le traitement des milieux non bornés mais conduit à des matrices pleines et non symétriques. La technique développée dans le présent travail et appliquée au cas du barrage

de Pine Flat permet non seulement d'éviter cet inconvénient de matrices non symétriques et de produire une matrice de raideur de frontière symétrique, de forme équivalente à celle découlant de la méthode des éléments finis. Elle facilite ainsi le couplage éléments finis - éléments de frontière (MEF/BEM).

Les résultats obtenus, examinés par confrontation à d'autres résultats issus de différents modèles d'éléments finis, sont de bonne qualité.

En deuxième étape, nous avons examiné les effets de la compressibilité sur la réponse. Dans cette étape les performances des différentes techniques de symétrisation du problème des vibrations libres ont été étudiées. En outre, le calcul de la réponse temporelle a montré que les effets de la compressibilité sur les déplacements sont moins importants que sur les pressions. Ces dernières peuvent par contre être fortement amplifiées.

Couplage fluide - sol - structure

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés au couplage fluide-structure. Dans l'écriture des équations couplées, nous avons souligné que ces équations restent valables dans le cas où les matrices correspondant aux solides comprennent celles de la structure et celles du sol. Dans ce chapitre, nous allons d'abord expliciter l'écriture du système complet fluide-sol-structure. Ensuite nous terminerons l'étude du barrage de Pine Flat par l'examen des effets de la compressibilité du sol. Et enfin, on terminera par une étude du barrage de Oued Fodda situé en zone très sismique au nord ouest de l'Algérie.

6.2 Système matriciel couplé

L'écriture explicite du système d'équations (5.1) ou du système (5.3) avec la prise en compte de l'interaction sol-structure donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BS} & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{Q}_{BS}^T & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_{BS} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{BS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{BS} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BS} & -\mathbf{Q}_{BS} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{BS} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BS} \\ \rho \mathbf{Q}_{BS}^T \end{bmatrix} \mathbf{I}_{BS} \ddot{u}_g(t) \quad (6.1)$$

Les indices **BS** font référence au système couplé sol-structure. Les matrices correspondantes sont un assemblage des matrices de chacun des deux sous systèmes comme montré dans le chapitre 2. Le vecteur \mathbf{I}_{BS} est le vecteur de couplage dynamique permettant de ramener les accélérations sismiques aux nœuds du modèle. Lorsque le mouvement sismique de surface est utilisé selon la méthode de mouvement uniforme ajouté, les composantes de ce vecteur qui correspondent aux nœuds du sol sont nulles. Si le mouvement est déconvolué puis appliqué à la base du modèle, toutes les composantes du vecteur qui correspondent aux translations de même direction que le séisme sont égales à 1.

6.3 Effet de la flexibilité du sol sur la réponse du système barrage-réservoir

Dans cette étude, on considère que le sol sous le barrage de Pine Flat est déformable. Il est supposé avoir les mêmes caractéristiques mécaniques que le barrage. En premier lieu, on examine l'effet de l'ISS sur les déplacements du barrage et les pressions hydrodynamiques qui s'exercent au pied amont du barrage. La figure 6.1 montre la différence entre les deux réponses dans les deux cas de

sol souple et de sol rigide. On voit que les déplacements relatifs entre la crête du barrage et sa base sont moins influencés par la flexibilité du sol que les pressions. Celles-ci sont considérablement réduites par l'interaction sol-structure alors que les déplacements sont très légèrement amplifiés.

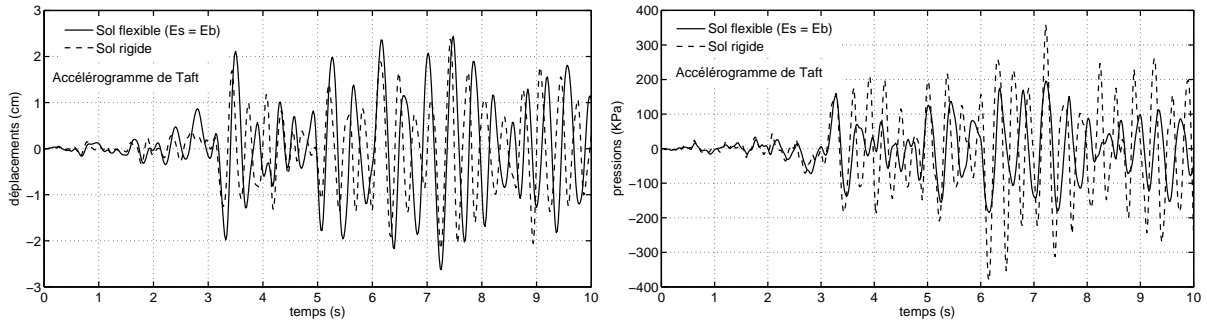


Figure 6.1 : Effet de la flexibilité du sol sur la réponse à l'accélérogramme de Taft

Ce constat n'est pas indépendant de l'excitation sismique appliquée. Si on applique l'accélérogramme de Loma Prieta, utilisé dans le chapitre 2, pour l'interaction sol-barrage, les amplifications des déplacements relatifs deviennent nettement plus importantes alors que les pressions deviennent moins sensibles à l'interactions sol-structure, figure 6.2

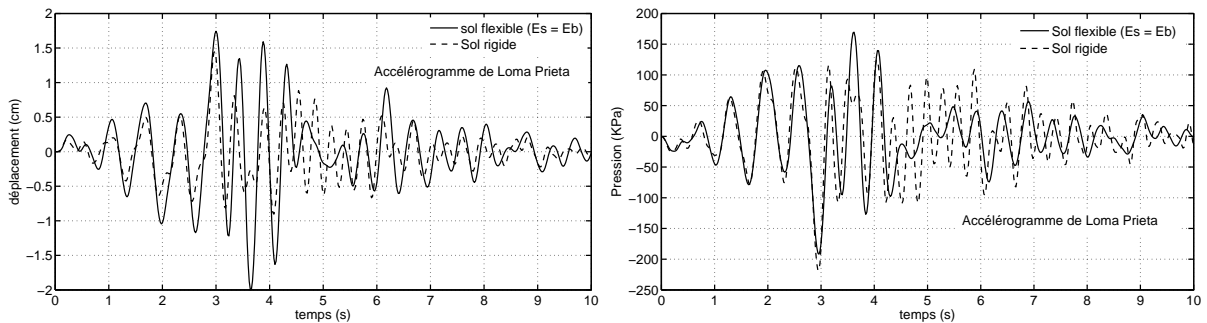


Figure 6.2 : Effet de la flexibilité du sol sur la réponse à l'accélérogramme de Loma Prieta

On montre cette différence entre les accélérogrammes utilisés à travers l'enveloppe de la répartition des pressions sur le parement du barrage. Cette enveloppe, correspondant au coefficient de pression C_p défini au chapitre précédent, est représentée dans la figure 6.3 dans laquelle on voit que l'amplification, due à l'interaction sol-structure, dépend fortement de l'accélérogramme appliqué. A l'inverse, les surélévations de la surface libre (figure 6.4) semblent être insensibles à la flexibilité du sol quelque soit l'accélérogramme.

Finalement, on termine par l'examen de l'applicabilité de la méthode globale à mouvement uniforme ajouté (MMA). On teste le cas où le fond du réservoir est incliné de 10%. Ceci nous permet aussi d'apprécier l'effet de cette inclinaison sur la réponse. Les figures 6.5 et 6.6 montrent, d'une part, que contrairement à la méthode globale à déconvolution (MGD), la méthode MMA

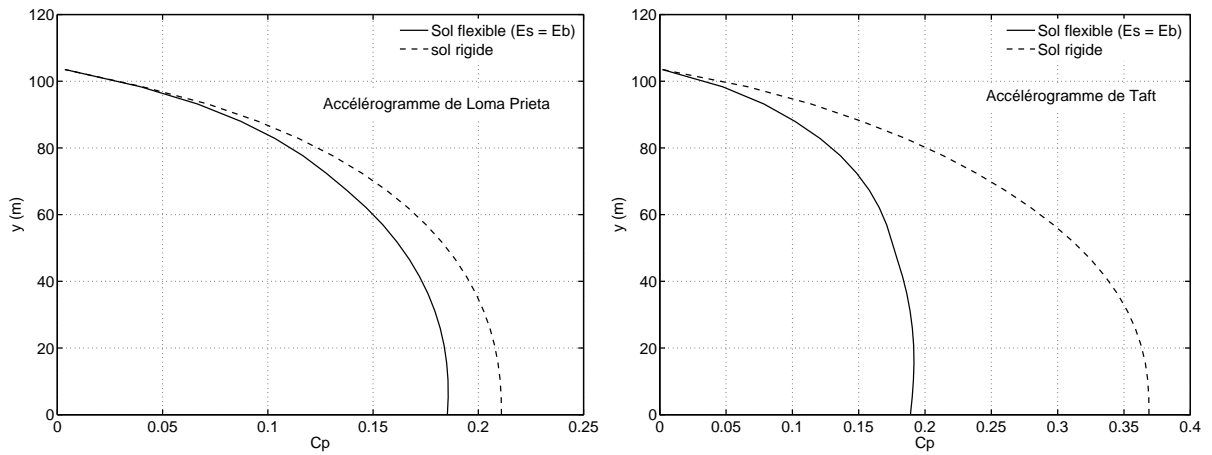


Figure 6.3 : Effet de la flexibilité du sol sur la distribution de la pression

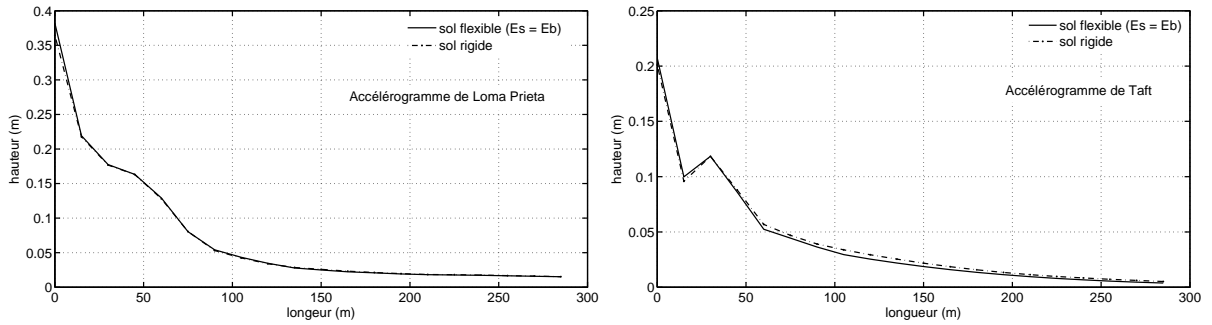


Figure 6.4 : Effet de la flexibilité du sol sur les fluctuations de la surface libre

ne capte pas cet effet, et d'autre part, que la différence entre les réponses est faible à cause de la valeur faible de la pente.

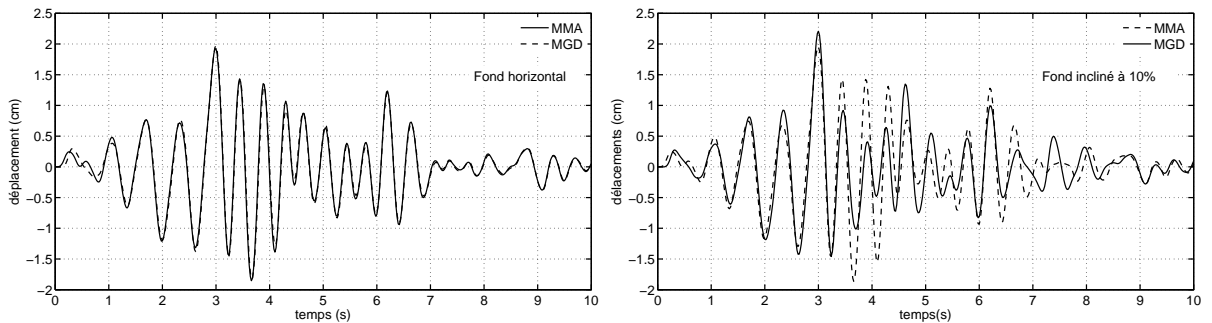


Figure 6.5 : Effet de l'inclinaison du fond sur les déplacements

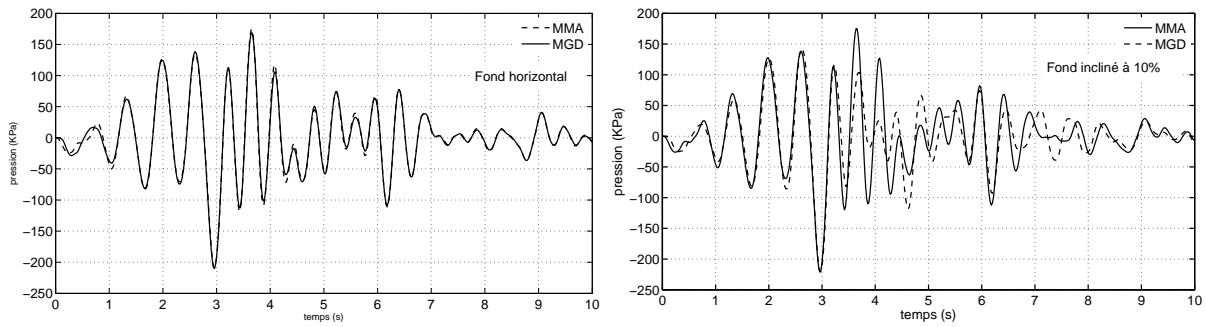


Figure 6.6 : Effet de l'inclinaison du fond sur les pressions

6.4 Etude du cas du barrage de Oued Fodda

On traite dans cette section un second cas d'étude. Il concerne le barrage de Oued Fodda situé dans la Wilaya de Chlef au Nord Ouest de l'Algérie. Cette zone est classée zone de forte sismicité dans l'actuel règlement parasismique Algérien. Elle a été déjà secouée par un séisme de forte magnitude (M7) en 1980. Malheureusement, nous ne disposons que d'un enregistrement d'une réplique de ce séisme. De ce fait, nous utiliserons un accélérogramme du seime de Boumerdes de 2003 enregistré à la station de Keddara. Ce dernier seime qui a frappé encore le nord de l'Algérie est de même magnitude que celui de Chlef, mais il a causé beaucoup plus de dégâts humains et matériels.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du barrage sont indiquées dans le tableau 6.1. Le barrage est semblable au barrage de Pine Flat mais son parement amont est incliné de 10%. La taille du maillage du réservoir et celle du sol sont fixées toutes deux horizontalement à la même valeur de 400 m. La profondeur du sol est prise égale à 300 m et on garde les mêmes caractéristiques du sol que dans le cas de Pine Flat. Le sol sous le barrage de Oued Fodda est de type calcaire, selon Moussaoui [91] qui a pris dans une étude paramétrique un ensemble de modules de cisaillement proches de celui du barrage.

La taille des éléments finis est de l'ordre de 5 m pour le barrage et de 10 m pour le sol et le réservoir. Les limites de troncature ont été dotées d'éléments infinis quadrilatéraux. Les taux d'amortissement critique de la structure et du sol sont fixés à 5% durant tous les calculs.

Tableau 6.1 : Caractéristiques géométriques et mécaniques du barrage de Oued Fodda

Dimensions (m)						Propriétés mécaniques			
H_B	H_C	L_B	L_C	L_F	H_F	f_a	E (GPa)	ν	ρ_b (Kg/m ³)
101.0	4.6	65.5	5.0	400	96.0	0.1	24.6	0.2	2460.0

f_a : inclinaison du parement amont

Les périodes propres du système calculées avec et sans prise en compte des interactions sol-structure et fluide-structure sont montrées dans le tableau 6.2 . Ces valeurs montrent que le barrage présente le même type de comportement que le barrage de Pine Flat. A noter que les

périodes du système complet sol-barrage-réservoir dépendent fortement de la taille du maillage du sol. Il est intéressant de relever que les valeurs des périodes propres sont d'autant plus rapprochées que l'on tient compte des interactions.

Tableau 6.2 : Périodes propres (sec.) du barrage de Oued Fodda

Mode	1	2	3	4
Barrage seul	0.2708	0.1057	0.0893	0.0584
Barrage-réservoir	0.3263	0.2618	0.2331	0.1907
Sol-barrage-réservoir	0.5210	0.3877	0.3559	0.3384

La réponse sismique du barrage est évaluée en utilisant, comme excitation, l'enregistrement de Kaddara. La composante horizontale Est-Ouest est plus forte que la composante Nord-Sud. On utilisera cette composante dont le pic a atteint $0.33g$. La composante verticale n'étant pas négligeable, avec un pic de $0.2g$, on l'utilisera afin de voir comment elle affecte la réponse. Les accélérogrammes de ces deux composantes sont montrés sur la figure 6.7. Le spectre de Fourier et le spectre d'accélération de la composante horizontale tracés dans la figure 6.8 montrent que ces excitations touchent plus les structures rigides dont la fréquence est proche de $5Hz$ (ou de périodes propres de l'ordre de $0.2s$).

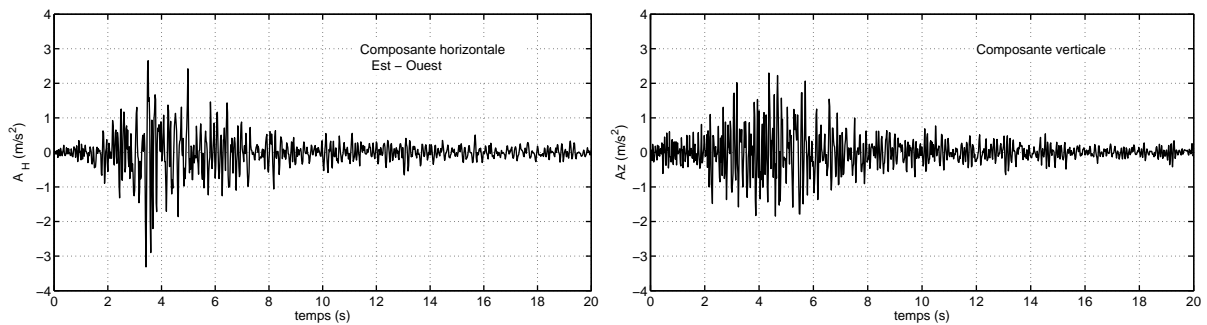


Figure 6.7 : Enregistrements du séisme de Boumerdès de 2003 à la station de Keddara

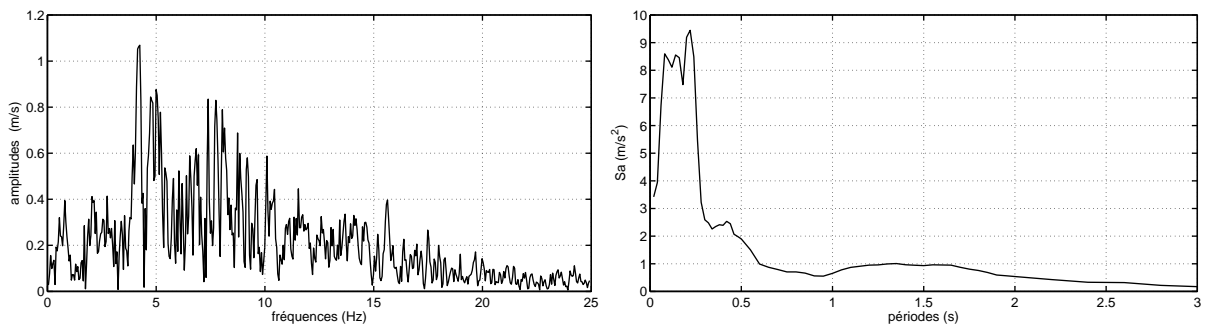


Figure 6.8 : Spectres de Fourier et spectre d'accélération de l'enregistrement de Keddara

On montre en premier lieu les déplacements en crête et les contraintes au pied du barrage calculés sans la prise en compte des interactions. Ces résultats peuvent servir de comparaison

pour l'appréciation des effets du réservoir et du sol. Le déplacement maximal atteint est de 1.44 cm alors que les contraintes sismiques sont de l'ordre de 2.2MPa . La période de 3s à 8s est la plus courte pour le barrage seul (supposé vide reposant sur un sol infiniment rigide).

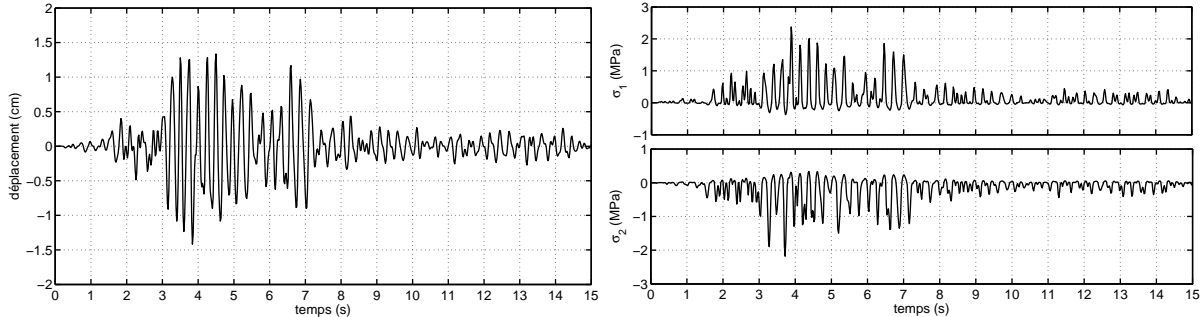


Figure 6.9 : Déplacement en crête et contrainte au pied du barrage

Les effets de l'interaction fluide-structure et fluide-sol-structure sur les déplacements relatifs du barrage se voient dans la figure 6.10 qui montre une légère amplification de la réponse notamment dans le cas où le sol est considéré comme infiniment rigide. La flexibilité du sol a pour rôle de dissipation et d'absorption des effets d'amplification du réservoir.

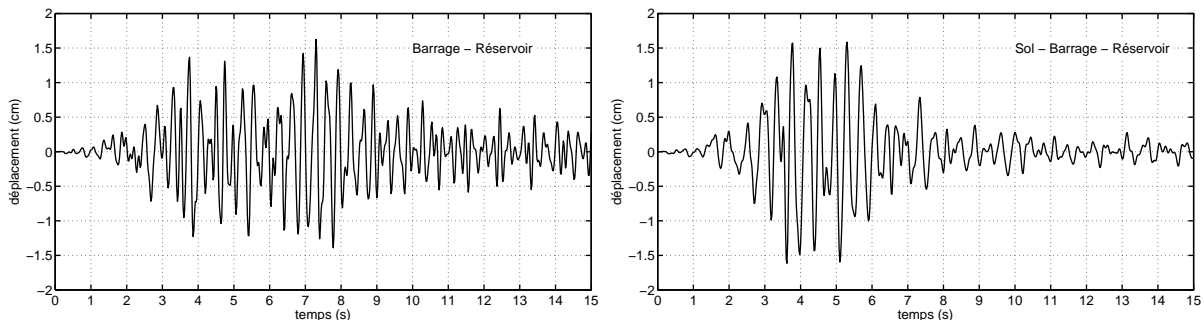


Figure 6.10 : Effet de l'IFS et de l'ISS sur les déplacements en crête

L'absorption par le sol se voit très bien dans les pressions qui s'exercent au niveau du pied du barrage. Deux réponses en pression, l'une prenant en compte la flexibilité du sol et l'autre non, sont montrées sur la figure 6.11. La différence entre les deux réponses est importante. Les valeurs des pressions diminuent de 300 kPa à 150 kPa si l'on tient compte du sol dans le modèle.

Cette diminution se voit aussi bien dans la courbe enveloppe de la distribution des pressions sur le parement amont du barrage 6.12. On voit aussi sur cette figure que les fluctuations de la surface libre ne sont pas du tout influencées par la flexibilité du sol. On perçoit à peine un très léger soulèvement au niveau du parement amont.

Cependant, l'absorption des ondes de pressions par le sol ne s'accompagne pas forcément de la diminution des contraintes dans le barrage. Au contraire, la figure 6.13 montre que les contraintes qui se développent au pied du barrage peuvent être amplifiées par les effets conjugués des interac-

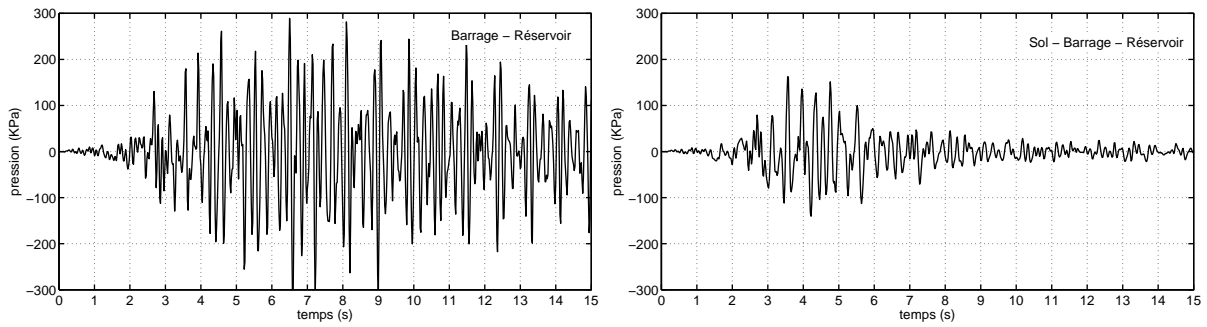


Figure 6.11 : Effet de l'IFS et de l'ISS sur les pressions au pied du barrage

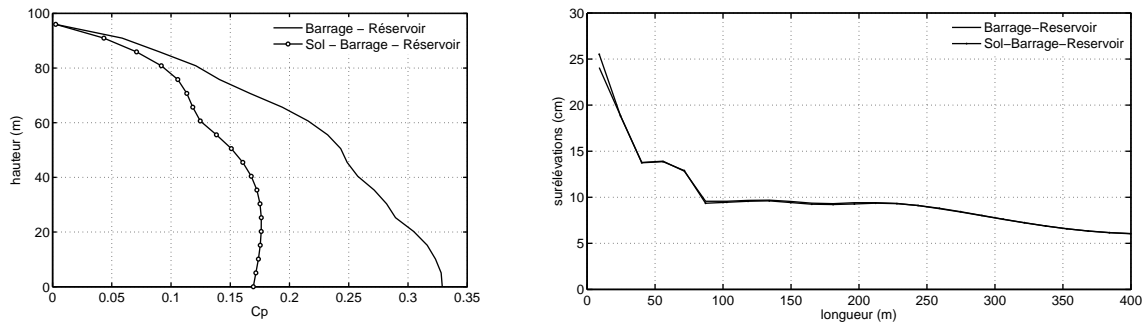


Figure 6.12 : Effet de l'IFS et de l'ISS sur les pressions

tions fluide-structure et sol-structure. Par rapport à la réponse du barrage seul, elles s'amplifient avec l'inclusion du réservoir et du sol dans l'analyse. Bien entendu, ce constat ne concerne que l'étude actuelle, il ne peut être généralisé à tous les barrages et toutes les excitations sismiques, comme il a été souligné dans le cas du barrage de Pine Flat. En effet ce constat est fonction aussi bien des caractéristiques dynamiques du système fluide-sol-structure que du contenu fréquentiel de l'excitation sismique.

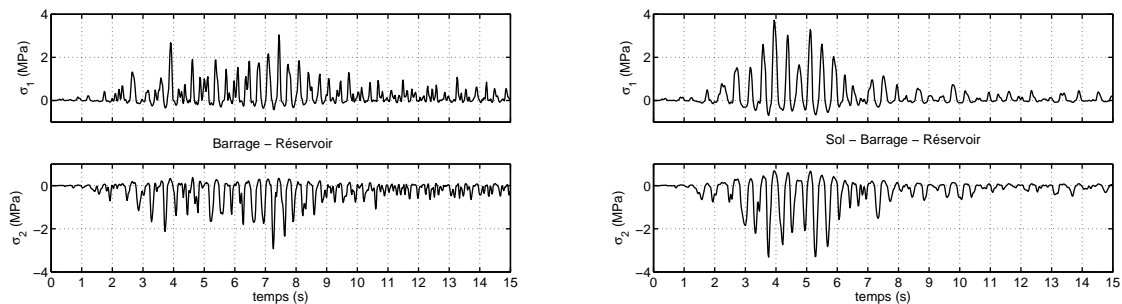


Figure 6.13 : Effet de l'IFS et de l'ISS sur les contraintes au pied du barrage

Toutes les réponses montrées jusqu'ici ont été calculées sous l'excitation horizontale. Le but était d'examiner les effets du réservoir et du sol. On inclut à présent la composante verticale afin d'apprécier ses effets sur la réponse du système dans les deux cas de sol rigide ou flexible.

Le déplacement horizontal en crête du barrage n'est évidemment influencé par la composante verticale que si l'on tient compte des interactions fluide - sol - structure. Les résultats obtenus avec le modèle du barrage seul donnent exactement les mêmes courbes que celles de la figure 6.9. Par contre ceux obtenus avec le modèle qui ne tient compte que de l'interaction fluide-structure (figure 6.14) montrent de grandes amplifications des déplacements et des vibrations fortes sur pratiquement toute la durée du séisme. L'interaction sol-structure réduit, dans ce cas aussi, ces amplifications dues au fluide du moins sur la durée dépassant 8 secondes où les accélérations sismiques sont les moins fortes. Toutefois, les valeurs des pics restent encore élevées par rapport au cas où l'excitation ne comprend pas la composante verticale. Cette même remarque s'applique aussi sur les contraintes comme on peut le voir sur la figure 6.15.

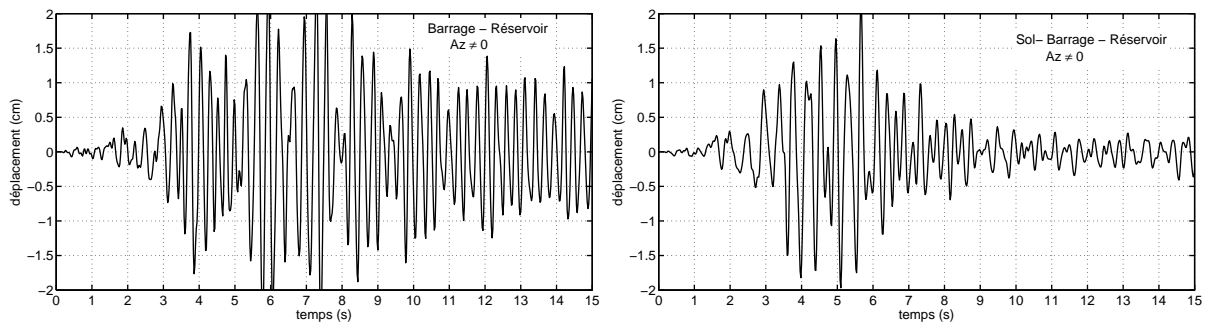


Figure 6.14 : Effet de la composante verticale sur les déplacements en crête du barrage

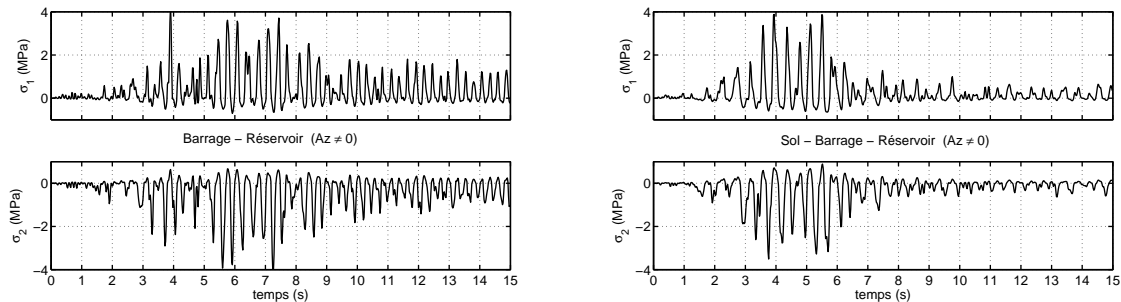


Figure 6.15 : Effet de la composante verticale sur les contraintes au pied du barrage

Ce calcul révèle que les pressions hydrodynamiques sont les plus influencées par la composante verticale et la comparaison entre les figures 6.11 et 6.16 montre à quel point elles peuvent être amplifiées, notamment, si les accélérations verticales du séisme sont fortes comme dans le cas présent (0.2g). Ces amplifications se voient aussi dans la représentation de l'enveloppe des pressions maximales agissant sur le parement amont, et dans l'enveloppe des fluctuations maximales de la surface libre du réservoir, figure 6.17. Les surélévations d'eau peuvent atteindre 30 cm même à distance importante du barrage.

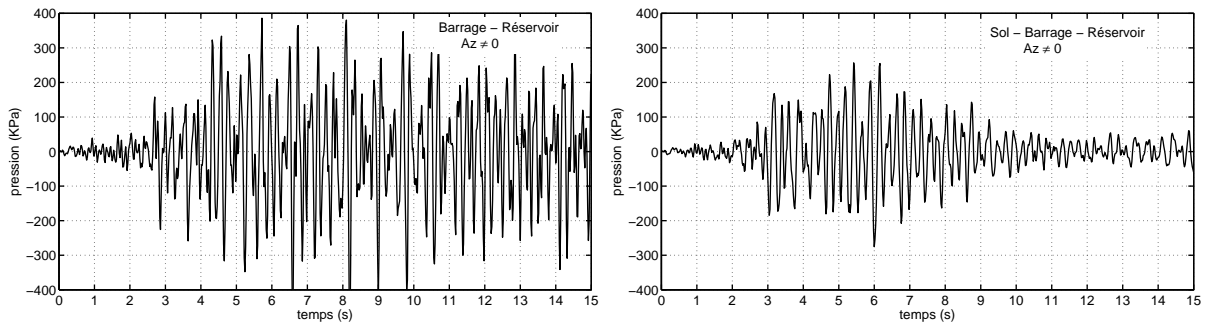


Figure 6.16 : Effet de la composante verticale sur les pressions au pied du barrage

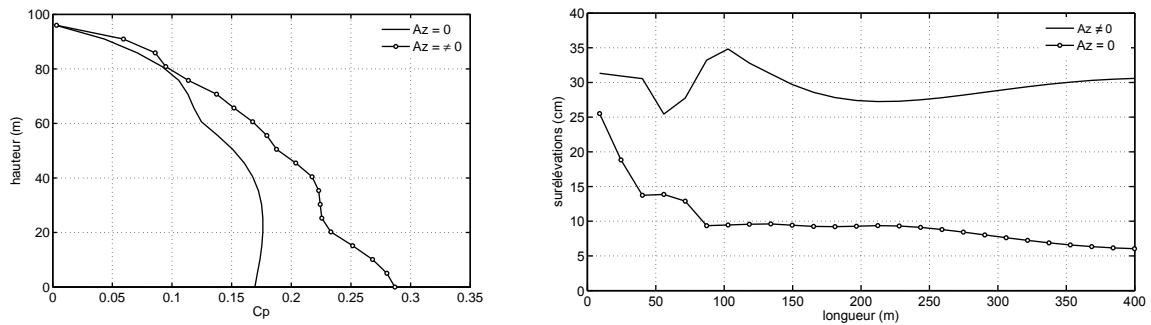


Figure 6.17 : Effet de la composante verticale sur la distribution des pressions sur le parement du barrage et les fluctuations de la surface libre

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les effets de la déformabilité du sol sur la réponse sismique des systèmes fluide structure sont prises en compte par inclusion des matrices correspondant au sol dans le système d'équations global . Cette formulation de l'interaction fluide-sol-structure permet d'appliquer l'excitation sismique selon les deux méthodes globales utilisées précédemment.

En premier lieu, nous avons terminé l'étude du barrage de Pine Flat, dans laquelle on a montré essentiellement que l'interaction sol-structure dépend fortement de l'excitation sismique. En outre nous avons vu que la méthode globale à mouvement uniforme ajouté ne permet pas de capter les effets d'inclinaison ou d'irrégularité du fond du réservoir sur la réponse sismique du barrage.

Ensuite, l'étude du cas du barrage de Oued Fodda a montré que l'interaction fluide-structure amplifie la réponse alors que l'interaction sol-structure réduit surtout les pressions. Les contraintes et les déplacements peuvent être également amplifiée. Finalement, nous avons vu que la composante verticale de l'excitation sismique induit une amplification de la réponse sismique, particulièrement en ce qui concerne les pressions hydrodynamiques.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

Ce travail a pour but d'apporter une contribution à l'étude des effets d'interactions fluide-structure et sol-structure sur la réponse sismique des ouvrages de génie civil, et plus spécifiquement les barrages poids en béton.

Une première contribution originale est la formulation symétrique en éléments de frontière. Cette nouvelle méthode permet de construire directement une matrice de raideur équivalente d'une frontière définissant un domaine régi par l'équation de Laplace. Cette matrice semblable à celles découlant de la discrétisation en éléments finis facilite énormément le couplage fluide-structure et conduit à l'écriture d'une équation dynamique de la structure avec masse ajoutée.

La seconde contribution concerne la symétrisation du problème des vibrations libres issu du couplage déplacements – pression. Les techniques existantes font intervenir l'inversion de matrices assemblées et des triples produits matriciels, ce qui fait augmenter la demande en espace mémoire et en temps d'exécution. Les performances des techniques proposées s'appuient sur le concept de masses concentrées qui donne des matrices diagonales aussi bien pour la structure que pour le fluide. Des gains significatifs en temps et espace mémoire ont été obtenus sans perte de précision des résultats.

Un autre aspect du travail concerne une étude comparative des modèles numériques et des différentes techniques d'application de l'excitation sismique et de la prise en compte des effets de la troncature géométrique. Il a été montré que la méthode globale basée sur le mouvement uniforme ajouté convient très bien aux structures massives de surface pour lesquelles l'interaction inertielle est prépondérante. Cette méthode permet d'appliquer l'accélérogramme de surface sous forme de forces équivalentes en incluant uniquement l'inertie de la structure et permet d'éviter le calcul préliminaire de déconvolution. Le traitement de la condition de troncature du sol ou du fluide a montré que les éléments infinis sont équivalents à une condition aux limites de radiation. L'emploi d'une technique de prise en compte de la troncature permet de réduire la taille du maillage et de réaliser des gains en ressources informatiques. L'avantage des éléments infinis réside dans la possibilité d'ajuster le paramètre de décroissance et d'utiliser des fonctions de décroissance adaptées au problème étudié.

Par ailleurs, la formulation de l'amortissement est d'une grande complexité notamment dans le cas du sol. Il a été rappelé que dans le cas de la structure, l'amortissement visqueux, communément utilisé, est dépendant de la fréquence et l'amortissement proportionnel dit de Ray-

leigh nécessite une attention particulière pour bien contrôler le taux d'amortissement de chaque mode inclus dans les calculs. De plus, l'amortissement hystérétique indépendant de la fréquence s'adapte bien au cas des sols et des structures en béton et s'apprête mieux à une formulation dans le domaine fréquentiel. Même s'il offre ce grand avantage d'indépendance de la fréquence, il nécessite des précautions d'emploi en raison du fait qu'un amortissement hystérétique sur une bande de fréquences infinie est non causal.

En ce qui concerne l'effet de la compressibilité du fluide, il a été constaté que pour les barrages poids en béton, la réponse de la structure en termes de déplacements n'est pas très influencée, par contre les pressions hydrodynamiques s'amplifient notamment en profondeur. L'étude du cas du barrage de l'Oued Fodda a montré que l'interaction fluide-structure amplifie la réponse alors que l'interaction sol-structure réduit surtout les pressions, les contraintes et les déplacements pouvant être aussi amplifiées. Finalement, nous avons vu que la composante verticale de l'excitation sismique a induit une amplification de la réponse sismique, particulièrement des pressions hydrodynamiques.

En perspectives, il serait intéressant d'étendre la formulation symétrique des éléments de frontière au cas compressible. La fonction de Green de l'acoustique existe dans ce cas et la méthode adoptée dans ce mémoire peut s'adapter à cette nouvelle situation. Enfin, on pourra envisager l'extension au cas de l'élastodynamique. Les applications pourront ainsi s'étendre à d'autres problèmes d'ingénierie liés à l'acoustique et à l'élastodynamique. En ce qui concerne l'interaction fluide structure, les méthodes développées dans ce mémoire permettent des gains significatifs au plan numérique. Une extension à des calculs tridimensionnels permettra à ces méthodes de trouver leur plein emploi. Par ailleurs, tous les résultats décrits dans ce mémoire ont été obtenus dans le cadre de l'élasticité linéaire. Il reste un large champ d'application dans le cas de comportement non-linéaire du sol et de la structure.

ANNEXES

Intégration numérique

La méthode de l'intégration numérique avec la quadrature de Gauss est très répandue dans les calculs des matrices d'éléments finis et d'éléments de frontière. Elle se base sur le développement de la fonction intégrant $f(x)$ en polynômes d'interpolation d'Hermite et l'utilisation des points d'interpolation x_k de sorte qu'après intégration, les valeurs des polynômes et celles des dérivées de f n'entrent pas dans la formule de quadrature. Ceci nécessite que les points en question x_j soit des racines d'un polynôme faisant partie d'un ensemble de polynômes orthogonaux. Les racines des polynômes orthogonaux sont généralement réelles, distinctes et toutes contenues dans un intervalle particulier. Ainsi ce système de racines est utilisé comme nœuds de quadrature, pour assurer certaines propriétés telles que la positivité et la minimisation de l'erreur.

On considère la fonction $f(x)$ définie, continue et différentiable sur un intervalle $x \in [a, b]$ et une fonction poids $w(x)$ définie et intégrable sur le même intervalle. La formule de quadrature de Gauss permet d'approximer l'intégrale du produit $f(x)w(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n_p} f(x_i) w_i$$

Le polynôme d'interpolation d'Hermite de degré $2n + 1$ pour la fonction f est : [118]

$$f(x) \approx \mathcal{H}_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (h_k(x) f(x_k) + g_k(x) f'(x_k)) \quad (\text{A.1})$$

où h_k et g_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des polynômes d'ordre $2n + 1$ donnés par :

$$\begin{aligned} h_k(x) &= \left(\mathcal{L}_k(x) \right)^2 \left(1 - 2\mathcal{L}'_k(x_k)(x - x_k) \right) \\ g_k(x) &= \left(\mathcal{L}_k(x) \right)^2 (x - x_k) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}_k(x)$ sont les polynômes de Lagrange

$$\mathcal{L}_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}'_k(x) = \frac{d\mathcal{L}_k(x)}{dx}$$

Pour $n = 0$, on pose $\mathcal{L}_0(x) \equiv 1$, d'où $h_0(x) = 1$ et $g_0(x) = x - x_0$

En remplaçant dans (A.1) $f(x)$ par $\mathcal{H}_k(x)$

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) + \sum_{k=0}^n v_k f'(x_k)$$

avec

$$w_k = \int_a^b w(x) h_k(x) dx \quad ; \quad v_k = \int_a^b w(x) g_k(x) dx$$

Un avantage évident apparaît ici dans le choix des points x_k qui annuleraient v_k afin d'éviter les dérivées de f dans l'interpolation. Tenant compte de la définition de $g_k(x)$:

$$v_k = \int_a^b w(x) (\mathcal{L}_k(x))^2 (x - x_k) dx = \mathcal{C}_n \int_a^b w(x) \wp_{n+1}(x) \mathcal{L}_k(x) dx$$

$$\wp_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$\mathcal{C}_n = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i} \quad , \quad n > 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_0 = 1$$

Les valeurs v_k ($k = 1, \dots, n$) sont nulles si \wp_{n+1} est orthogonal par rapport à $w(x)$ à tous les polynômes \mathcal{L}_k d'ordre inférieur. Donc les x_k , $k = 1, \dots, n$ sont solutions d'un polynôme d'ordre $n+1$. Les polynômes orthogonaux par rapport à une fonction donnée $w(x)$ peuvent être construits à partir de la relation de récurrence suivante [76]

$$\wp_0(x) = 1 \quad ; \quad \wp_1(x) = x - \alpha_0 \quad ; \quad \wp_{n+1}(x) = (x - \alpha_k) - \beta_k \wp_{k-1}(x)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\gamma_k} \int_a^b w(x) x (\wp_k(x))^2 dx \quad , \quad k = 0, \dots, n \\ \beta_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} \quad , \quad k = 1, \dots, n \\ \gamma_k &= \int_a^b w(x) (\wp_k(x))^2 dx \end{aligned}$$

Puisque les v_k sont nuls, les poids w_k sont donnés par :

$$w_k = \int_a^b w(x) (\mathcal{L}_k(x))^2 dx$$

Ces étapes de calcul des points et poids de quadrature sont introduites dans un script MAPLE conçu en deux fonctions dont l'une **wop** construit les polynômes orthogonaux et l'autre **qgp** extrait les racines x_k du polynôme et calcule les poids w_k .

```

1 > # Fonction wop : génération de polynômes orthogonaux par rapport
2 > # à une fonction poids w(x) sur un intervalle [a, b]
3 > wop := proc(n,w,a,b)
4 >     local k,pk,pkm, pkp, hk, hkm, ak,bk;
5 >     if n=0 then return 1 end if;
6 >     pkm := 1;
7 >     hkm := int(w(x)*pkm^2,x=a..b);
8 >     ak := 1/hkm*int(w(x)*x*pkm^2, x=a..b);
9 >     pk := x-ak;
10 >     for k from 2 to n do
11 >         hk := int(w(x)*pk^2,x=a..b);
12 >         ak := 1/hk*int(w(x)*x*pk^2, x=a..b);
13 >         bk := hk/hkm;
14 >         pkp := (x-ak)*pk - bk*pkm;
15 >         pkm := pk; pk :=pkp; hkm :=hk;
16 >     end do :
17 >     return simplify(pk);
18 > end proc :
19 >
20 > # Fonction gqp : génération de points et poids de quadrature de Gauss
21 > gqp := proc(n,a,b,w)
22 >     local i,k, xi, wi, Lk;
23 >     Digits := 20;
24 >     xi := [fsolve(wop(n,w,a,b))];
25 >     wi := [seq(0,k=1..n)];
26 >     for k from 1 to n do
27 >         Lk := 1.0;
28 >         for i from 1 to n do
29 >             if i<>k
30 >                 then Lk := Lk*(xi[i]-x)/(xi[i]-xi[k])
31 >             end if;
32 >         end do;
33 >         wi[k] := int(w(x)*Lk^2,x=a..b);
34 >         printf("%3d % 2.20E %2.20E\n", k, xi[k], wi[k])
35 >     end do :
36 >     return(xi, wi);
37 > end proc :

```

Pour générer les points et poids d'intégration, il suffit de taper l'une des commandes suivantes selon le cas :

Quadrature	$w(x)$	Commande
Gauss-Legendre	1	> xi,wi := gqp(n,-1,1,x->1.0);
Gauss-Laguerre	e^{-x}	> xi,wi := gqp(3,0,infinity,x->exp(-x));
Gauss-Log	$\ln 1/x$	> xi,wi := gqp(3,0,1,x->ln(1/x));
	$x \ln 1/x$	> xi,wi := gqp(3,0,1,x->xln(1/x));

Les points et poids calculés avec ce script sont reportés dans les tableaux suivants.

A.1 Quadrature Gauss-Legendre

Tableau A.1 : Quadrature de Gauss-Legendre : $w(x) = 1$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n_p} w_i f(x_i)$$

n_p	$\pm x_i$	w_i
2	0.5773 5026 9189 6257 6451	1.0000 0000 0000 0000 0000
3	0.0000 0000 0000 0000 0000 0.7745 9666 9241 4833 7704	0.8888 8888 8888 8888 8889 0.5555 5555 5555 5555 5556
4	0.3399 8104 3584 8562 6480 0.8611 3631 1594 0525 7522	0.6521 4515 4862 5461 4263 0.3478 5484 5137 4538 5737
5	0.0000 0000 0000 0000 0000 0.5384 6931 0105 6830 9104 0.9061 7984 5938 6639 9280	0.5688 8888 8888 8888 8889 0.4786 2867 0499 3664 6804 0.2369 2688 5056 1890 8751
6	0.2386 1918 6083 1969 0863 0.6612 0938 6466 2645 1366 0.9324 6951 4203 1520 2781	0.4679 1393 4572 6910 4739 0.3607 6157 3048 1386 0757 0.1713 2449 2379 1703 4504
7	0.0000 0000 0000 0000 0000 0.4058 4515 1377 3971 6691 0.7415 3118 5599 3944 3986 0.9491 0791 2342 7585 2453	0.4179 5918 3673 4693 8776 0.3818 3005 0505 1189 4495 0.2797 0539 1489 2766 6790 0.1294 8496 6168 8696 9327
8	0.1834 3464 2495 6498 0494 0.5255 3240 9916 3289 8582 0.7966 6647 7413 6267 3959 0.9602 8985 6497 5362 3168	0.3626 8378 3378 3619 8297 0.3137 0664 5877 8872 8734 0.2223 8103 4453 3744 7054 0.1012 2853 6290 3762 5915
10	0.1488 7433 8981 6312 1088 0.4333 9539 4129 2471 9080 0.6794 0956 8299 0244 0623 0.8650 6336 6688 9845 1073 0.9739 0652 8517 1717 2008	0.2955 2422 4714 7528 7017 0.2692 6671 9309 9963 5509 0.2190 8636 2515 9820 4400 0.1494 5134 9150 5805 9315 0.0666 7134 4308 6881 3759
20	0.0765 2652 1133 4973 3375 0.2277 8585 1141 6450 7808 0.3737 0608 8715 4195 6067 0.5108 6700 1950 8270 9800 0.6360 5368 0726 5150 2545 0.7463 3190 6460 1507 9261 0.8391 1697 1822 2188 2339 0.9122 3442 8251 3259 0587 0.9639 7192 7277 9137 9127 0.9931 2859 9185 0949 2479	0.1527 5338 7130 7258 5070 0.1491 7298 6472 6037 4679 0.1420 9610 9318 3820 5133 0.1316 8863 8449 1766 2690 0.1181 9453 1961 5184 1731 0.1019 3011 9817 2404 3504 0.0832 7674 1576 7047 4872 0.0626 7204 8334 1090 6357 0.0406 0142 9800 3869 4133 0.0176 1400 7139 1521 1831

A.2 Quadrature Gauss-Laguerre

Tableau A.2 : Quadrature de Gauss-Laguerre : $w(x) = e^{-x}$

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x} dx = \sum_{i=1}^{n_p} w_i f(x_i)$$

n_p	x_i	w_i
2	0.5857 8643 7626 9049 5120	0.8535 5339 0593 2737 6220
	3.4142 1356 2373 0950 4880	0.1464 4660 9406 7262 3780
3	0.4157 7455 6783 4790 8331	0.7110 9300 9929 1730 1545
	2.2942 8036 0279 0417 1982	0.2785 1773 3569 2408 4880
	6.2899 4508 2937 4791 9687	0.0103 8925 6501 5861 3575
4	0.3225 4768 9619 3923 1180	0.6031 5410 4341 6336 0164
	1.7457 6110 1158 3465 7569	0.3574 1869 2437 7996 8664
	4.5366 2029 6921 1279 8328	0.0388 8790 8515 0053 8427
	9.3950 7091 2301 1331 2923	0.0005 3929 4705 5613 2745
5	0.2635 6031 9718 1409 1020	0.5217 5561 0582 8086 5248
	1.4134 0305 9106 5167 9222	0.3986 6681 1083 1759 2745
	3.5964 2577 1040 7220 8122	0.0759 4244 9681 7075 9539
	7.0858 1000 5858 8375 5692	0.0036 1175 8679 9220 4845
	12.6408 0084 4275 7826 5943	0.0000 2336 9972 3857 7623
6	0.2228 4660 4179 2606 8946	0.4589 6467 3949 9635 9357
	1.1889 3210 1672 6230 3074	0.4170 0083 0772 1209 9411
	2.9927 3632 6059 3140 7769	0.1133 7338 2074 0449 7574
	5.7751 4356 9104 5105 0184	0.0103 9919 7453 1490 7490
	9.8374 6741 8382 5899 1772	0.0002 6101 7202 8149 3206
	15.9828 7398 0601 7017 8251	0.0000 0089 8547 9064 2962
8	0.1702 7963 2305 1009 9979	0.3691 8858 9341 6375 2992
	0.9037 0177 6799 3799 1219	0.4187 8678 0814 3429 5608
	2.2510 8662 9866 1306 8931	0.1757 9498 6637 1718 0570
	4.2667 0017 0287 6587 9365	0.0333 4349 2261 2156 5152
	7.0459 0540 2393 4656 9728	0.0027 9453 6235 2256 7252
	10.7585 1601 0180 9952 2406	0.0000 9076 5087 7335 8213
	15.7406 7864 1278 0045 7803	0.0000 0084 8574 6716 2725
	22.8631 3173 6889 2641 0570	0.0000 0000 1048 0011 7487
10	0.1377 9347 0540 4924 3083	0.3084 4111 5765 0201 4155
	0.7294 5454 9503 1704 9816	0.4011 1992 9155 2735 5152
	1.8083 4290 1740 3160 4823	0.2180 6828 7611 8094 2159
	3.4014 3369 7854 8995 1448	0.0620 8745 6098 6777 4739
	5.5524 9614 0063 8036 3242	0.0095 0151 6975 1811 0055
	8.3301 5274 6764 4967 0024	0.0007 5300 8388 5875 3878
	11.8437 8583 7900 0655 6492	0.0000 2825 9233 4959 9566
	16.2792 5783 1378 1020 9953	0.0000 0042 4931 3984 9627
	21.9965 8581 1980 7619 5128	0.0000 0000 1839 5648 2398
	29.9206 9701 2273 8915 5991	0.0000 0000 0000 9911 8272

A.3 Quadrature Gauss-Log

Tableau A.3 : Quadrature Gauss-Log avec $w(x) = \ln(1/x)$

$$\int_0^1 f(x) \ln(1/x) dx = \sum_{i=1}^{n_p} w_i f(x_i)$$

n_p	x_i					w_i				
2	0.1120	0880	6166	9761	8296	0.7185	3931	9030	3844	4067
	0.6022	7690	8118	7381	0276	0.2814	6068	0969	6155	5933
3	0.0638	9079	3087	3254	0499	0.5134	0455	2232	3633	2513
	0.3689	9706	3715	6187	6555	0.3919	8004	1201	4875	5481
	0.7668	8030	3938	9414	5542	0.0946	1540	6566	1491	2006
4	0.0414	4848	0199	3832	2080	0.3834	6460	8145	1351	2485
	0.2452	7491	4320	6022	5194	0.3868	7531	7774	7626	2734
	0.5561	6545	3560	2758	3718	0.1904	3512	6950	1424	1536
	0.8489	8239	4532	9851	7465	0.0392	2548	7129	9598	3245
5	0.0291	3447	2151	9720	5330	0.2978	9347	1782	8944	5727
	0.1739	7721	3320	8976	2870	0.3497	7622	6513	2241	8038
	0.4117	0252	0284	9020	4318	0.2344	8829	0044	0524	1889
	0.6773	1417	4582	8203	8070	0.0989	3045	9516	6331	4697
	0.8947	7136	1031	0082	8364	0.0189	1155	2143	1957	9649
6	0.0216	3400	5844	1169	4899	0.2387	6366	3578	5475	6972
	0.1295	8339	1154	9507	9613	0.3082	8657	3273	9467	9297
	0.3140	2044	9914	7655	0880	0.2453	1742	6563	2103	8599
	0.5386	5721	7351	8021	4455	0.1420	0875	6566	4766	8542
	0.7569	1533	7377	4028	5216	0.0554	5462	2324	8862	9001
	0.9226	6885	1372	1202	3733	0.0101	6895	8692	9322	7588
8	0.1978	7102	9326	1880	5379	0.2268	4198	4431	9191	2637
	0.7018	1452	9939	0999	6384	0.0578	7221	0717	7820	7239
	0.3541	5399	4351	9094	1967	0.1757	5407	9006	0702	4499
	0.9533	2645	0056	3597	8877	0.0036	8640	7104	0276	1901
	0.8493	7932	0441	1066	7605	0.0209	7907	3742	1329	7804
	0.5294	5857	5234	9172	7771	0.1129	2403	0246	7590	5185
	0.0133	2024	4160	8924	6501	0.1644	1660	4728	0028	8683
	0.0797	5042	9013	8949	3841	0.2375	2561	0023	3060	2050
10	0.0090	4263	0962	1996	5064	0.1209	5513	1954	5705	1499
	0.0539	7126	6222	5006	2950	0.1863	6354	2564	0718	7033
	0.1353	1182	4639	2507	7487	0.1956	6087	3277	7599	8271
	0.2470	5241	6287	1598	2422	0.1735	7714	2182	9069	2084
	0.3802	1253	9609	3323	3397	0.1356	9567	2995	4842	0167
	0.5237	9231	7971	8432	0116	0.0936	4675	8538	1105	2599
	0.6657	7520	5516	4245	9722	0.0557	8772	7351	4158	7408
	0.7941	9041	6011	9662	1736	0.0271	5981	0899	2333	3115
	0.8981	6109	1219	0035	3817	0.0095	1518	2602	8485	1500
	0.9688	4798	8718	6335	3939	0.0016	3815	7633	5982	6325

Tableau A.4 : Quadrature Gauss-Log avec $w(x) = x \ln(1/x)$

$$\int_0^1 f(x)x \ln(1/x) dx = \sum_{i=1}^{n_p} w_i f(x_i)$$

n_p	x_i	w_i
2	0.2358 1992 7232 0151 0819	0.1366 4787 5805 1484 4957
	0.6959 4477 8650 3378 3299	0.1133 5212 4194 8515 5043
3	0.1451 8377 9694 2351 3207	0.0709 8882 2818 6600 5284
	0.4683 1287 3145 0906 2879	0.1297 5503 1283 3369 3899
	0.8128 6778 0516 8335 4406	0.0492 5614 5898 0030 0817
4	0.0982 8422 3109 9947 3591	0.0395 0056 9197 7790 6578
	0.3296 9280 2251 1523 9450	0.1013 1526 7163 4148 5576
	0.6212 3986 5295 1720 5916	0.0854 8119 5851 0106 9125
	0.8742 1911 0574 4911 4819	0.0237 0296 7787 7953 8722
5	0.0709 6271 3738 8633 3213	0.0235 8153 8988 4758 6414
	0.2428 5453 8393 4456 0574	0.0727 6893 9118 6141 7859
	0.4778 6504 0524 2443 0503	0.0877 6238 7289 8707 3329
	0.7199 9220 3859 9960 0972	0.0533 1241 9753 4712 2920
	0.9099 4752 3901 2617 4776	0.0125 7471 4849 5679 9478
6	0.0536 6533 4955 7356 1454	0.0149 3625 8741 9183 3862
	0.1857 2453 1164 0469 9023	0.0517 0245 0118 7003 3853
	0.3748 9250 4320 4540 5881	0.0762 4806 8899 2804 0852
	0.5878 2454 6952 0193 1736	0.0662 0898 9663 6621 1193
	0.7858 3500 3428 3714 0559	0.0336 8114 3889 5816 3700
	0.9324 5674 9462 8415 1533	0.0072 2308 8686 8571 6540
8	0.0338 1082 1024 3292 2420	0.0068 6833 1117 0737 0917
	0.1182 6964 9696 3910 5973	0.0271 6364 0243 8620 2062
	0.2452 7556 6283 1347 9931	0.0496 8191 1216 7877 7127
	0.4012 4452 4841 8983 9895	0.0604 1648 3064 8189 5155
	0.5688 6567 4138 0947 5230	0.0536 4405 1699 9802 3445
	0.7292 3426 2207 3335 2046	0.0346 5335 9133 7167 5534
	0.8641 0830 0950 5566 2071	0.0147 2256 8359 1066 9663
	0.9580 6016 1778 6851 5629	0.0028 4965 5164 6538 6098
10	0.0232 6831 3529 8413 5322	0.0036 0843 5628 0433 8313
	0.0817 2837 8272 3954 8292	0.0153 6681 2128 0009 3234
	0.1717 1714 6219 9750 0519	0.0314 1032 9041 0084 2935
	0.2868 2049 2182 0436 9902	0.0447 5690 4554 6690 2055
	0.4184 6167 1846 4930 7105	0.0498 1836 7223 2992 3907
	0.5566 4551 8659 4881 5290	0.0449 7884 8987 1579 3113
	0.6907 7537 3208 5075 3484	0.0328 6082 8690 6539 3211
	0.8105 0424 9171 5606 0239	0.0186 1383 3504 0067 4084
	0.9065 6036 4564 6977 7786	0.0072 5230 9902 9279 1939
	0.9714 8002 0859 2253 2871	0.0013 3333 0340 2324 7210

Tableau A.5 : Quadrature Gauss-Log avec $w(x) = x^2 \ln(1/x)$

$$\int_0^1 f(x)x^2 \ln(1/x) dx = \sum_{i=1}^{n_p} w_i f(x_i)$$

n_p	x_i	w_i
2	0.3352 6304 1806 4983 2140	0.0508 6349 2690 9334 4347
	0.7543 4269 2960 5267 6821	0.0602 4761 8420 1776 6764
3	0.2199 4518 9702 0767 0498	0.0208 4369 5335 7910 0509
	0.5412 0230 3551 2303 3762	0.0603 2498 4603 4626 0072
	0.8438 6964 7763 9160 4947	0.0299 4243 1171 8575 0530
4	0.1548 7119 5767 0328 4301	0.0091 5668 0339 1766 2242
	0.3980 5395 1750 7593 4754	0.0394 5079 3900 9231 7249
	0.6697 9682 0874 2583 0178	0.0467 1331 2114 5529 0882
	0.8923 1360 5016 2979 2187	0.0157 9032 4756 4584 0738
5	0.1148 2862 4325 4448 4071	0.0043 8042 2799 4520 7072
	0.3023 7211 9687 4614 1989	0.0235 4925 9224 0361 3579
	0.5307 9356 1239 8170 1961	0.0416 5434 6305 4746 1932
	0.7527 6046 1826 3891 6244	0.0325 9056 4557 9764 4983
	0.9213 4489 0297 2756 5166	0.0089 3651 8224 1718 3545
6	0.0885 0774 3445 4712 0189	0.0022 6192 3493 0616 6555
	0.2365 0646 8562 1710 5913	0.0139 7117 5329 4916 7827
	0.4260 8127 8269 5469 8600	0.0311 1083 8506 8683 5310
	0.6275 4729 2427 2661 1619	0.0360 7329 4699 3100 0169
	0.8086 4608 2132 2134 6537	0.0223 1037 0081 5717 9643
	0.9400 7297 1415 6794 0471	0.0053 8350 9000 8076 1606
8	0.0571 9321 2215 8135 6089	0.0007 2488 6738 4418 0353
	0.1552 5690 4837 2214 9787	0.0052 6222 7773 1096 4058
	0.2878 5639 6845 6457 8377	0.0150 4514 1466 7845 7316
	0.4420 0280 4976 1169 0587	0.0255 0036 5092 6613 0582
	0.6021 7512 4176 0491 4027	0.0290 0832 7098 8434 5843
	0.7520 4641 2485 1640 3225	0.0224 7105 5635 3502 5662
	0.8762 3474 7841 9075 2696	0.0108 3292 5708 0496 4072
	0.9619 3324 4212 0849 8929	0.0022 6618 1597 8704 3224
10	0.0399 9418 0746 7675 0448	0.0002 7957 1011 4387 3156
	0.1093 8784 2023 1924 0936	0.0022 1890 4126 8087 4149
	0.2057 9063 0533 8699 6193	0.0072 2547 3459 8991 0616
	0.3227 7505 9045 4040 5070	0.0146 9005 4014 7598 3063
	0.4522 7684 3454 2642 5387	0.0215 5276 8341 9326 2147
	0.5852 3969 9223 8467 7329	0.0241 4035 7995 1923 1081
	0.7122 9124 7657 8820 0205	0.0208 3317 8217 8314 0852
	0.8244 3174 2976 0703 9562	0.0133 7299 2674 7050 9176
	0.9136 9149 3362 6970 2118	0.0056 9220 8343 1330 4899
	0.9737 0714 5758 4702 9308	0.0011 0560 2925 4102 1972

Solutions analytiques des pressions hydrodynamiques dans les réservoirs de barrages

B.1 Solution de Westergaard

Cette solution simplifiée et efficace s'appuie sur la solution analytique en déplacement du problème plan de vibrations du réservoir sous hypothèses de barrage infiniment rigide, de réservoir rectangulaire semi-infini et d'excitation sismique harmonique et horizontale d'expression :

$$\ddot{u}_x = a g \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{à } x = 0$$

dans laquelle a est le coefficient d'accélération sismique, un taux d'accélération rapporté à la constante de gravité g , $2\pi/T$ est la pulsation du signal d'excitation et t désigne le temps.

La géométrie du réservoir de hauteur H est rapportée à un repère (Oxy) dont l'axe Ox est confondu avec le fond et l'axe Oy avec le parement du barrage rigide. La pression hydrodynamique est supposée nulle au niveau de la surface libre et dans tout le domaine loin de l'interface barrage-réservoir. De plus, le fond du réservoir est supposé sans déplacement vertical. Ces conditions s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} p(x, y = H) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} p(x, y) = 0 \\ u_y(x, y = 0) = 0 \\ u_x(x = 0, y) = -a g T^2 / (4\pi^2) \cos(2\pi t / T) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

La solution du problème donne l'évolution dans le temps des deux composantes du champ des déplacements $u_x(x, y, t)$ et $u_y(x, y, t)$. La pression hydrodynamique est ensuite évaluée à l'aide de la relation de compressibilité linéaire $p = K(\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y)$. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$p(x, y, t) = \frac{8a\rho g H}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 c_n} e^{-q_n x} \sin\left(n\pi \frac{H-y}{2H}\right) \right) \quad (\text{B.2})$$

q_n et c_n sont définis comme suit :

$$q_n = \frac{n\pi c_n}{2H} \quad ; \quad c_n = \sqrt{1 - \frac{16H^2}{n^2 c^2 T^2}}$$

$c = \sqrt{K/\rho}$ est la célérité des ondes de pressions dans l'eau. La pression au niveau de l'interface barrage-réservoir ($x = 0$) est maximale lorsque $t = kT$, k entier. Elle s'exprime par :

$$p_{\max}(y) = p(0, y, kT) = \frac{8a\rho gH}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 c_n} \sin(n\pi \frac{H-y}{2H}) \right) \quad (\text{B.3})$$

Cette expression est de forme sensiblement parabolique. Elle atteint sa valeur maximale au fond et s'annule à la surface. En notant à partir de l'équation (B.2) que la pression possède la même pulsation et la même phase que le signal sismique, Westergaard a proposé de remplacer l'expression (B.3) par une autre plus simple qui donne un effet d'inertie équivalent en considérant une certaine masse d'eau qui vibre d'une manière solidaire avec le parement amont, d'où l'introduction du concept de masse ajoutée. La largeur b de cette masse varie en fonction de la hauteur comme suit :

$$b = \frac{7}{8} \sqrt{H(H-y)} \quad (\text{B.4})$$

Le concept de masse ajoutée de Westergaard est très utilisé dans les calculs pratiques des problèmes d'interaction fluide-structure. L'expression (B.4) est d'une grande simplicité, elle permet de prendre en compte l'effet du réservoir sur le comportement dynamique du barrage en ajoutant une masse fictive sans rigidité.

La solution de Westergaard (B.2) est valide si les valeurs de c_n sont réelles, soit :

$$1 - \frac{16H^2}{n^2 c^2 T^2} \geq 0$$

qui donne :

$$T > \frac{4H}{nc} \quad ; \quad n = 2i - 1, i = 1, 2, 3, \dots$$

Le terme

$$T_i = \frac{4H}{(2i-1)c} \quad (\text{B.5})$$

correspond à la $i^{\text{ème}}$ période propre du réservoir. Par conséquent la solution de Westergaard n'est valide que lorsque la période de l'excitation sismique est supérieure à la période fondamentale du réservoir $T_1 = 4H/c$.

B.2 Solution de Chopra

Chopra a proposé une autre solution proche de celle de Westergaard pour le cas d'un barrage rigide à parement vertical soumis aux deux composantes horizontale et verticale du mouvement sismique. Dans le cas des fréquences d'excitation inférieures à la fréquence fondamentale du réservoir, les deux solutions sont les mêmes. Par contre pour les fréquences plus élevées, qui causent

des déphasages dans la réponse, les pressions hydrodynamiques ne peuvent être représentées par des effets d'inertie d'une masse ajoutée fictive. La solution de Chopra s'appuie sur la résolution de l'équation d'onde de pression avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} p(x, y = H) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x, y = 0) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x}(x = 0, y) = -\rho \ddot{u}_g \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Pour une excitation sismique harmonique : $\ddot{u}_g = e^{i\omega t}$ avec $i = \sqrt{-1}$, la pression hydrodynamique est donnée par

$$p(x, y, t) = \frac{4\rho}{\pi} e^{i\omega t} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{k_n}{\mu_n} e^{-\mu_n x} \cos(\lambda_n y) \quad (\text{B.7})$$

avec :

$$k_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad ; \quad \mu_n = \sqrt{\lambda_n^2 - (\omega/c)^2} \quad ; \quad \lambda_n = \frac{\omega_n}{c} = (2n-1) \frac{\pi}{2H} \quad (\text{B.8})$$

En comparant à la solution de Westergaard, pour une excitation d'amplitude ag

$$\ddot{u}_g = ag e^{i\omega t} = ag \cos(\omega t) + i ag \sin(\omega t) \quad ; \quad \omega = 2\pi/T \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

La pression au niveau de l'interface barrage-réservoir ($x = 0$) s'obtient en prenant la partie réelle de la solution

$$\begin{aligned} p(0, y, t) &= \frac{4a\rho g}{\pi} \sin(\omega t) \sum_{n=1}^{N_m} \frac{k_n}{\sqrt{(\omega/c)^2 - \lambda_n^2}} \cos(\lambda_n y) \\ &+ \frac{4a\rho g}{\pi} \cos(\omega t) \sum_{n=N_m}^{\infty} \frac{k_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - (\omega/c)^2}} \cos(\lambda_n y) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

dans laquelle N_m est la valeur minimale de n qui donnerait $\lambda_n > \omega/c$. Cette valeur correspond au nombre de modes dont les fréquences propres sont inférieures à celle de l'excitation sismique ($\omega > \omega_n$)

Si la fréquence du signal sismique est inférieure à celle du mode fondamental du réservoir ($\omega < \omega_1$) alors $\lambda_1 > \omega/c$ et $N_m = 1$, le premier terme de l'expression (B.9) s'annule et l'on retrouve la solution de Westergaard.

Il suffit que $\omega > \omega_1$ pour que le terme induisant $\sin \omega t$ ne soit pas nul. Il donne la partie de la pression hydrodynamique en phase opposée à celle de l'excitation. Cette solution couvre ainsi toutes les gammes de fréquences.

Toutefois, il est à noter dans la variation de la pression en fonction de x , le terme $e^{-\mu_n x}$ ne s'annule pas lorsque $x \rightarrow \infty$ pour $\omega > \omega_1$. La condition de radiation à l'infini n'est pas vérifiée pour tous les modes propres. Lorsque $\omega_n < \omega < \omega_{n+1}$, les n premiers modes ne seront pas amortis par les effets de radiation.

La solution de l'équation d'onde de pression à la composante verticale de l'excitation sismique $\ddot{u}_y = a g \cos(\omega t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$p(y, t) = \frac{\rho a g}{\omega/c} \frac{\sin((H-y)\omega/c) - \frac{g}{\omega c} \cos((H-y)\omega/c)}{\cos(H\omega/c) + \frac{g}{\omega c} \sin(H\omega/c)} \cos(\omega t) \quad (\text{B.10})$$

Cette solution indépendante de x suppose un mouvement sismique uniforme, appliqué au fond du réservoir via la condition à la limite :

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\rho \ddot{u}_y$$

De plus, elle tient compte des fluctuations de la surface libre par satisfaction de la condition (3.22) qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=H} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Le facteur $g/(\omega c)$ représente la contribution à la solution totale des fluctuations de la surface libre (ou ondes de surface). Sa valeur est petite compte tenu de la valeur de c et de la gamme des fréquences des enregistrements sismiques qui descend rarement au dessous de 1 rad/s (une période de plus 6.3 s). Exemple, pour un réservoir de hauteur $H = 100 \text{ m}$, la période fondamentale est de $T_1 = 4H/c = 0.27 \text{ s}$, $c = 1440 \text{ m/s}$, la pulsation de l'excitation qui donnerait une résonance est $\omega = 23.27 \text{ s}$, ce qui donne la valeur de $g/(\omega c) \approx 3 \times 10^{-4}$ qui est une faible valeur devant celles des pressions hydrodynamiques.

L'erreur induite en négligeant les ondes de surface est petite et l'expression (B.10) peut être remplacée par :

$$p(y, t) = \frac{\rho a g}{\omega/c} \frac{\sin((H-y)\omega/c)}{\cos(H\omega/c)} \cos(\omega t) \quad (\text{B.11})$$

Remarque :

Le cas du réservoir incompressible s'obtient en prenant la limite de p lorsque c tend vers l'infini.

Les deux expressions précédentes se réduisent à

$$\begin{aligned} p(y, t) &= \rho a g \left(H - y - \frac{g}{\omega^2} \right) \cos(\omega t) && \text{avec ondes de surface} \\ p(y, t) &= \rho a g (H - y) \cos(\omega t) && \text{sans ondes de surface} \end{aligned}$$

Ce qui donne comme réponse à une l'excitation sismique verticale, une distribution linéaire de la pression maximale le long du parement amont. Cette distribution est indépendante de la fréquence d'excitation si les ondes de surface sont négligées. Il peut être aussi vérifié que pour l'excitation horizontale, la solution de Westergaard (B.2) et celle de Chopra (B.7), donnent toutes les deux la même pression maximale indépendante de ω .

B.3 Solution de Chakrabarti et Chopra

La solution de Chopra a été étendue par Chakrabarti et Chopra [36] au cas d'un barrage souple. La flexibilité du barrage est introduite par le biais de ses modes propres. La solution est composée de la solution de barrage rigide (B.7) et d'une partie construite par superposition modale. En écrivant à $x = 0$, $p(y, t) = \bar{P}(y, \omega)e^{i\omega t}$:

$$\bar{p}(y, \omega) = \bar{P}_0(y, \omega) + \sum_{k=1}^m \ddot{Y}_k(\omega) \bar{P}_k(y, \omega)$$

où m est le nombre de modes considéré dans les calculs, \ddot{Y}_k sont les amplitudes des accélérations généralisées (projetées sur la base modale) $\bar{P}_0(y, \omega)$ correspond à l'amplitude de la pression dans l'équation (B.9) et $\bar{P}_k(y, \omega)$ est donnée par :

$$\bar{P}_k(y, \omega) = \frac{-2\rho}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{kn}}{\mu_n} \cos(\lambda_n y)$$

I_{kn} est fonction du $k^{\text{ème}}$ mode propre Φ_k .

$$I_{kn} = \int_0^H \Phi_k(y) \cos(\lambda_n y) dy$$

La détermination analytique des modes propres du barrage n'est pas une tâche facile. En générale, dans la pratique, les modes sont évalués à l'aide d'un modèle numérique. C'est pour cette raison que cette solution est dite semi-analytique. Cependant, il est possible de ne considérer que le mode fondamental de la structure, dont la variation selon la hauteur du déplacement horizontal est approximée par Chopra [38] comme suit :

$$\Phi_1(y) = \frac{y}{H_B} \left(1.181 + 0.819 \frac{y}{H_B} \right)$$

où H_B est la hauteur totale du barrage.

B.4 Solution de Humar et Roufaiel

L'expression de la solution de Humar et Roufaiel est [71] :

$$p(x, y, t) = \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\mu_n} \frac{e^{\mu_n(L-x)} + Z_n e^{-\mu_n(L-x)}}{e^{\mu_n L} - Z_n e^{-\mu_n L}} \cos(\lambda_n y) e^{i\omega t} \quad (\text{B.12})$$

k_n , μ_n et λ_n sont les mêmes que dans (B.8), et

$$Z_n = \frac{\mu_n - i\omega/c}{\mu_n + i\omega/c} ; \quad i = \sqrt{-1}$$

B.5 Solution de Lee et Tsai

Dans la solution de Lee et Tsai [77], les accélérations du parement amont entrant dans la condition à la limite à $x = 0$ sont décomposées en deux composantes : celle due au mouvement sismique $\ddot{u}_g(t)$ et celle dus aux déformations du parement $\ddot{u}(y, t)$. Cette dernière est une combinaison des accélérations modales exprimées en coordonnées généralisées $\ddot{Y}_n(t)$.

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho(\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(y, t)) = -\rho \left(\ddot{u}_g(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(y) \ddot{Y}_m(t) \right)$$

La transformation de Laplace de l'équation d'onde et de ses conditions aux limites a permis de trouver la solution avec séparation de variables. Ensuite la transformée inverse a produit l'expression suivante :

$$p(x, y, t) = \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(\lambda_n y) \int_0^{t-x/c} \ddot{u}_g(\tau) J_0(z_{n\tau}) d\tau + \frac{2\rho c}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\lambda_n y) \int_0^H \Phi_m(y) \cos(\lambda_n y) dy \int_0^{t-x/c} \ddot{Y}_m(\tau) J_0(z_{n\tau}) d\tau \quad (\text{B.13})$$

avec $z_{n\tau} = \lambda_n c \sqrt{(t-\tau)^2 - (x/c)^2}$, k_n et λ_n sont définis dans l'équation (B.8) et J_0 est la fonction de Bessel de première espèce.

Pour le cas d'un parement vertical rigide, la distribution des pression le long du parement ($x = 0$) est :

$$p_0(0, y, t) = \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(\lambda_n y) \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0(\lambda_n c(t-\tau)) d\tau \quad (\text{B.14})$$

Formulation des éléments infinis

Cette annexe donne une brève présentation des deux approches, directe et inverse, utilisées pour la formulation des éléments infinis. L'intégration des fonctions de forme décroissantes de l'approche directe sera aussi abordée.

Selon Beteess [19], les premiers éléments infinis apparus ont été introduits par Ungless et Anderson en 1973, mais leur travail n'a été publié qu'en 1977. Ainsi, la première publication portant sur les éléments infinis est l'article de Zienkiewicz et Bettess paru en 1975 [141].

L'idée introduite dans l'élément de Ungless et Anderson était l'utilisation d'une fonction de forme qui varie comme $1/(1+r)$ dans la direction radiale r . Ceci est suffisamment simple pour manier la plupart des opérations analytiquement. L'élément est tridimensionnel à base triangulaire définie dans le plan local xy et s'étend à partir de cette base à l'infini dans la direction z . Les matrices élémentaires sont calculées en utilisant l'intégration analytique dans la plan xy et l'intégration numérique par la règle des trapèzes dans la direction z après une transformation géométrique.

Une autre origine de la formulation des éléments infinis, totalement différente est décrite par Bettess[19]. Le domaine de l'élément est étendu à l'infini en utilisant n'importe quel élément fini comme base. Les fonctions de forme initiales sont multipliées par des fonctions de décroissance appropriées au problème traité. Une décroissance de type exponentielle a été d'abord utilisée et les matrices élémentaires obtenues comprenaient des termes de polynômes multipliés par e^{-r} . Les intégrales ont été simplement évaluées analytiquement.

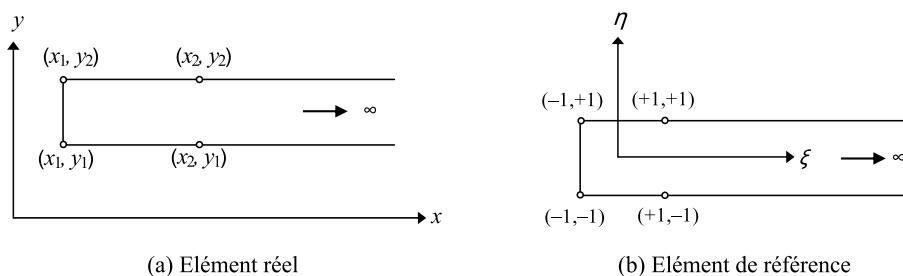
Ces deux origines de formulations d'éléments infinis ont constitué les deux lignes principales de développement de nouveaux types d'éléments. C'est ce qui a conduit la classification des éléments infinis en deux approches, approche directe par fonctions de décroissance et approche indirecte par transformation géométrique.

Il est à noter que quelle que soit l'approche considérée, les éléments infinis correspondants ne sont pas isoparamétriques.

C.1 Approche directe

L'approche directe consiste à étendre à l'infini le domaine de définition des coordonnées naturelles et des coordonnées de référence d'un élément fini. Des fonctions de décroissance sont utilisées pour forcer les fonctions de forme initiales à s'annuler dans la direction de décroissance. La Figure C.1 montre un exemple d'élément infini obtenu à base d'élément fini quadrilatéral linéaire

(Q4).

**Figure C.1** : Elément infini : approche directe

Avec cette définition, les mêmes fonctions de transformation géométrique sont retenues pour le calcul du Jacobien, mais le domaine d'intégration s'allonge à l'infini dans la direction de la décroissance considérée. Chaque fonction d'interpolation notée ici \mathcal{N}_i^∞ associée au nœud i de l'élément infini est obtenue par la multiplication de la fonction de forme initiale N_i de l'élément fini de base par un terme h_i décroissant d'une façon asymptotique vers zéro à l'infini. Les nouvelles fonctions d'interpolations \mathcal{N}_i^∞ s'écrivent :

$$\mathcal{N}_i^\infty(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) h_i(\xi, \eta) \quad ; \quad h_i \rightarrow 0 \text{ si } \{\xi \text{ et/ou } \eta\} \rightarrow \infty \quad (\text{C.1})$$

Chacune des fonctions de décroissance choisies h_i doit être égale à l'unité au nœud i du même numéro et aucune autre condition n'est imposée sur les valeurs quelle doit prendre aux autres nœuds. La somme des fonctions de forme "infinies" \mathcal{N}_i^∞ devient différente de l'unité, en effet, il peut être montré que la somme est un polynôme en ξ , ou en η selon la direction considérée infinie, d'ordre au moins égal à celui de l'élément.

C.1.1 Choix des fonctions de décroissance

Le choix des fonctions de forme est dicté a priori par la nature du problème traité. Si n'importe quelle information sur la nature de la solution en champ lointain est connue, elle peut être exploitée pour le choix du type de décroissance à utiliser. Dans certains cas, la solution à l'infini peut différer de zéro, être constante ou varier dans le temps. Alors, la construction des fonctions qui seront combinées avec les fonctions de formes standards pour tendre vers cette solution peut être une tâche pénible. Dans la plupart des cas pratiques, des fonctions simples de décroissance exponentielle ou en puissance aboutissent à des résultats satisfaisants.

Les fonctions de décroissance exponentielle e^{-x} possèdent l'avantage de dominer le comportement de n'importe quel polynôme $p(x)$ lorsque x devient grand, ce qui assure la convergence vers zéro à l'infini des fonctions de formes construites avec ce type de décroissance. Plus précisément, pour une décroissance dans la direction de ξ de l'élément de référence, ces fonctions ont pour

expression :

$$h_i = (\xi, \eta) = e^{(\xi_i - \xi)/L} \quad (\text{C.2})$$

L'introduction de ξ_i assure $\mathcal{N}_i^\infty(\xi_i, \eta) = 1$ Pour une décroissance dans les deux directions x et η en même temps, l'expression des h_i devient :

$$h_i = (\xi, \eta) = e^{(\xi_i - \xi)/L_1 + (\eta_i - \eta)/L_2} \quad (\text{C.3})$$

Le paramètre L (L_1, L_2) est une longueur permettant de contrôler la sévérité de la décroissance. Il est aussi possible de contrôler la sévérité par la distance entre les nœuds de l'élément réel dans le maillage du problème physique à étudier, mais il est préférable de faire varier L que de changer le maillage. Dans les cas où la tendance de la solution théorique du problème posé est connue à priori en champ lointain, la valeur du paramètre L peut être estimée, mais, généralement elle est déterminée par une étude paramétrique.

Pour une décroissance en ξ , les expressions des fonctions de forme et de leurs dérivées sont :

$$\mathcal{N}_i^\infty(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{(\xi_i - \xi)/L} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{N}_i^\infty(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{N_i(\xi, \eta)}{L} \right) e^{(\xi_i - \xi)/L} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{N}_i^\infty(\xi, \eta) = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} e^{(\xi_i - \xi)/L} \quad (\text{C.6})$$

Dans le cas des problèmes présentant un comportement de type R/r où R est une longueur constante spécifique au problème et r est un rayon assez grand pour être considéré comme infini, il est naturel de chercher un élément infini dont le comportement soit essentiellement dominé par la même forme de comportement. Ceci peut être réalisé par l'utilisation des fonctions décroissantes de type puissance, prenant la forme suivante :

$$h_i(\xi) = \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \quad (\text{C.7})$$

où ξ_0 est un point origine quelconque appelé pôle. Ce point doit être hors de l'élément, dans la face opposée à celle s'étendant à l'infini. Si la décroissance est dans la direction positive de ξ alors $\xi_0 < -1$ afin d'éviter des singularités à l'intérieur de l'élément. Le paramètre de sévérité n , contrôlant la décroissance en puissance, doit être supérieur au plus haut ordre des termes en ξ intervenant dans les fonctions de forme standard N . Ceci permet d'assurer que quand ξ augmente, les fonctions de forme 'infinies' \mathcal{N}_i^∞ tendent vers $1/\xi$ qui est le comportement attendu du problème à traiter. Il n'existe aucune règle simple pour déterminer n . Dans l'état actuel des

reccherches, seule l'expérimentation numérique permet de le déterminer. Cependant, il est clair que si n est trop petit, les fonctions de forme complètes infinies deviennent ascendantes. S'il est trop grand, d'importantes propriétés physiques du problème peuvent être mal représentées ou même omises.

La généralisation de la décroissance pour les deux directions donne :

$$h_i(\xi) = \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \left(\frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right)^m \quad (\text{C.8})$$

Les deux paramètres n et m ne sont pas nécessairement des entiers. Ils peuvent être égaux, ce qui est généralement supposé pour simplifier l'étude paramétrique.

Les expressions des fonctions de forme et de leurs dérivées s'écrivent pour la décroissance dans la direction ξ comme suit :

$$\mathcal{N}_i^\infty(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{N}_i^\infty(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{n}{\xi - \xi_0} N_i(\xi, \eta) \right) \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{N}_i^\infty(\xi, \eta) = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \left(\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right)^n \quad (\text{C.11})$$

C.1.2 Intégration des fonctions de forme

Au début du développement des premiers éléments infinis, les matrices élémentaires ont été évaluées par intégration analytique du fait que les intervalles d'intégration sont les bornes de $[-1, \infty[$. Ceci ajoute des contraintes aux choix des fonctions de forme et limite l'ordre des éléments. Cependant, la méthode d'intégration numérique de Gauss-Laguerre (Annexe A.2) permet d'évaluer numériquement les intégrales de la forme :

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx$$

L'intégration numérique est exacte si la fonction $f(x)$ est un polynôme et le nombre n_p de points est supérieur à la moitié du degré du polynôme. Cette méthode convient bien aux éléments utilisant des fonctions à décroissance exponentielle. Un changement de variable permet de ramener la borne -1 à 0 . Les composantes des matrices élémentaires font intervenir des multiplications des fonctions de formes et/ou de leurs dérivées. Les intégrales à évaluer prennent la forme suivante :

$$I = \int_{-1}^\infty q(\xi) e^{-a\xi/L} \quad (\text{C.12})$$

avec $a = 2$, pour la plus part des cas, et $q(\xi, \eta)$ est un polynôme résultant des produits intervenant

sans les expressions des matrices élémentaires Le changement de variable $\chi \zeta$ est défini comme suit :

$$\zeta = \frac{a}{L}(\xi + 1) \quad ; \quad d\zeta = \frac{a}{L} d\xi$$

L'intégrale (C.12) devient :

$$I = \int_0^\infty q\left(\frac{L}{a}\zeta - 1\right)e^{\frac{a}{L}\zeta - \zeta} \frac{L}{a} d\zeta = \frac{L}{a}e^{\frac{a}{L}} \int_0^\infty f(\zeta)e^{-\zeta} d\zeta$$

Les points et poids de Gauss-Laguerre doivent donc être modifiés comme suit :

$$\xi_i = \frac{L}{a}\zeta_i - 1 \quad ; \quad w_i = \frac{L}{a}e^{a/L}w_{0i} - 1$$

ζ_i et w_{0i} sont les points et poids d'intégration d'origine.

Il est également possible d'utiliser l'intégration numérique de Gauss-Laguerre pour les fonctions de décroissance du type puissance, ne contenant pas un terme exponentiel. Il suffit tout simplement de les multiplier par e^x .

$$I = \int_{-1}^\infty q(\xi) d\xi = \int_{-1}^\infty (q(\xi)e^\xi)e^{-\xi} d\xi$$

Ceci peut fonctionner uniquement dans le cas où la fonction se comporte raisonnablement bien quand x tend vers l'infini. Une autre possibilité d'intégrer les fonctions de décroissance du type puissance serait de concevoir une méthode d'intégration spécifique. Cependant, la technique actuellement utilisée est de transformer le domaine d'intégration infini en domaine fini puis d'utiliser l'intégration numérique de Gauss-Legendre dans le domaine $[-1, 1]$. Une façon de réaliser une telle transformation est le changement de variable suivant :

$$x = \frac{a-s}{s-b} \quad ; \quad dx \frac{b-a}{(s-b)^2} ds$$

qui permet d'évaluer les intégrales de 0 à ∞

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_a^b f\left(\frac{a-s}{s-b}\right) \frac{1}{(s-b)^2} ds$$

La borne 0 peut être décalée à -1 avec une seconde transformation

$$\xi = x - 1 = (a + b - 2s)/(s - b)$$

ce qui permet d'évaluer les intégrales des matrices élémentaire en prenant $a = -1$ et $b = +1$.

$$\int_{-1}^\infty f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta}\right) \frac{2}{(1-\zeta)^2} d\zeta$$

Les points et poids de la méthode de Gauss-Legendre doivent être modifiés comme suit :

$$\xi_i = \frac{2\zeta_i}{1 - \zeta_i} \quad ; \quad w_i = w_{0i} \frac{2}{(1 - \zeta_i)^2}$$

C.2 Approche inverse

Contrairement à l'approche directe, cette seconde approche de construction d'éléments infinis, implique presque toujours une projection ou transformation du domaine. Parfois, deux transformations sont utilisées, l'une pour les fonctions de formes et l'autre pour la formule d'intégration. Le domaine de définition de l'élément de référence ainsi que les fonctions d'interpolation initialement définies pour l'élément fini de base sont gardés. Par contre, les fonctions de transformation géométrique, sont construites de façon à être ascendantes avec une singularité aux nœuds d'extrémités de telle sorte à projeter à l'infini les nœuds correspondants de l'élément naturel. La première projection explicitement énoncée a été réalisée par Beer et Meek [17] qui ont utilisé une transformation incluant un terme de forme $1/(1 - \xi)$ et permettant de projeter le domaine fini de ξ en un domaine infini pour x . La transformation était divisée en deux parties dont la seconde est similaire à celle proposée plus tard par Zienkiewicz et qui est actuellement la plus utilisée. La méthode de construction des fonctions de forme pour les éléments infinis, se basant sur cette transformation, sera exposée dans cette section.

L'élément représenté sur la figure (C.2) s'étend du point x_1 , en passant par x_2 , à x_3 qui est supposé se trouver à l'infini. La transformation de Zienkiewicz [138] a pour expression

$$x = \frac{-\xi}{1 - \xi}x_0 + \left(1 + \frac{\xi}{1 - \xi}\right)x_2 \quad (\text{C.13})$$

Le pôle x_0 représente le centre à partir duquel la perturbation prend naissance.

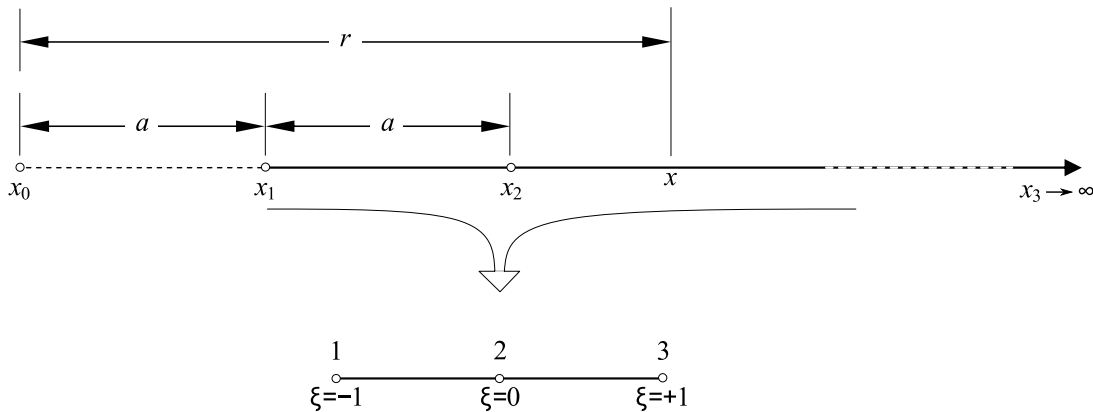


Figure C.2 : Élément infini : approche inverse

La transformation peut aussi s'écrire explicitement en fonction des seules coordonnées de l'élé-

ment infini en éliminant x_0 de l'expression précédente

$$x = M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2 \quad ; \quad M_1(\xi) = \frac{-2\xi}{1-\xi} \quad ; \quad M_2(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi} \quad (\text{C.14})$$

ce qui définit les fonctions de transformation géométrique M_1 et M_2 de l'élément. Une caractéristique importante de ces fonctions est qu'elles conduisent à une transformation indépendante de l'origine du système des coordonnées car : $\sum M_i(\xi) = 1$. En effet un décalage Δx de l'origine donne

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= M_1(\xi)(x_1 + \Delta x) + M_2(\xi)(x_2 + \Delta x) \\ &= M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2 + (M_1(\xi) + M_2(\xi)) \Delta x \end{aligned}$$

qui est vrai si $M_1(\xi) + M_2(\xi) = 1$

L'approximation d'une fonction inconnue $u(\xi)$ dans l'élément de référence s'écrit

$$u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots \quad (\text{C.15})$$

Les coefficients α_i sont des combinaisons linéaires des valeurs nodales u_i . ξ peut être exprimé en fonction de x en inversant (C.13)

$$\xi = (x - x_2)/(x - x_0) = 1 - 2a/r \quad ; \quad a = x_2 - x_0, \quad r = x - x_0 \quad (\text{C.16})$$

r est la distance radiale mesurée à partir du pôle et a est fixé en fonction de maillage d'éléments finis. Il correspond en général à la position de la limite de troncature.

La substitution de (C.16) dans (C.15) donne pour l'élément quadratique une approximation de la forme

$$u(x(\xi)) = c_0 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \dots \quad (\text{C.17})$$

les paramètres c_i sont aussi des combinaisons linéaires des u_i , en particulier $c_0 = 0$ si $u \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

Le grand avantage de cette transformation est qu'elle permet de modéliser le comportement asymptotique en champ lointain en choisissant le nombre de termes à considérer dans (C.17) selon l'ordre de l'élément. Elle utilise les polynômes ordinaires d'éléments finis et l'intégration numérique standard de Gauss-Legendre. Le seul changement requis pour modifier un programme d'élément finis dans le but d'intégrer des éléments infinis de type indirect consiste en un nouveau calcul de la matrice Jacobienne avec les dérivées des fonctions de transformation M_i au lieu de

celles des fonctions de formes N_i .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} M \\ \frac{\partial}{\partial \eta} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

où \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont les vecteurs regroupant les coordonnées des nœuds de l'élément.

La généralisation de la transformation de Zienkiewicz aux éléments de n'importe quel ordre permet d'écrire les transformation géométriques comme suit :

$$M_i = N_i \bar{h}_i \quad ; \quad \bar{h}_i = ((1 - \xi_i)/(1 - \xi))^2 \quad (\text{C.19})$$

où les \bar{h}_i sont des fonction croissantes. Cette écriture s'applique aussi bien pour les éléments bi- et tri-dimensionnels.

Mise en œuvre de la formulation BEM

La construction de la matrice (4.52) et la résolution du système d'équations algébriques (4.51) ont fait l'objet du développement d'un programme dont les détails des routines le constituant sont exposées ici. Le corps du programme fait appel à plusieurs fonctions, chacune étant dédiée à une tâche bien précise. Sa structure est la suivante :

Début du programme

```

1   Préparation de la géométrie.
2   Discrétisation en éléments de frontières
   |   Résultat : table des éléments et table des coordonnées
3   Spécification des conditions aux limites
   |   Résultat : (numéros des nœuds, flux imposés)
   |               (numéros des nœuds, potentiel imposé)
4   Construction de la matrice K (Equation 4.52)
5   Assemblage du vecteur F avec les flux imposés
6   Application des conditions aux limites de potentiel imposé
   |   Résultat : Vecteur F réévaluée, Matrice K réduite
7   Résolution du système  $K U = F$  avec inclusion du potentiel imposé
   |   Résultat : Solution vecteur U en tout nœud de la frontière
8   Poste-traitement de la solution
   |   Résultat : Courbes, tableaux, ...
Fin du programme

```

L'étape la plus importante est la construction de la matrice \mathbf{K}_E . Elle comporte l'assemblage de la matrice \mathbf{G} (4.47) et de la matrice \mathbf{A} (4.45). Cette étape constitue le corps de la fonction MatKbem suivante

Début de la fonction MatKbem

```

!   Entrées :
!           net : nombre total d'éléments
!           nnt : nombre total de nœuds
!           els : table des éléments (net×2)
!           nds : table des nœuds (nnt×2)
!   Sortie :
!           Matrice K
!
1   Assemblage de la matrice G   (Appel de la fonction MatG)
2   Inversion de la matrice G   (Appel de la fonction inverse)
3   Assemblage de la matrice A (Appel de la fonction MatA)
4   Calcul de la matrice  $K = G^{-1T} A G^{-1}$ 
Fin de la fonction MatKbem

```


La construction de la matrice \mathbf{G} est classique, elle est largement documentée. Une fonction `MatG` a été mise en œuvre dans laquelle les composantes extra-diagonales de la matrice sont évaluées avec la méthode de quadrature de Gauss-Legendre en utilisant 4 points d'intégration numérique. Les composantes diagonales sont explicitement calculées avec l'une des expressions (4.53) ou (4.54) selon le type de l'élément de frontière utilisé pour la discrétisation.

```

Début de la fonction MatG
!   Entrées :
!
!       net : nombre total d'éléments
!       nnt : nombre total de nœuds
!       els : table des éléments (net×2)
!       nds : table des nœuds (nnt×2)
!
!   Sortie :
!
!       Matrice G

1   Initialisation de la matrice globale G = [0]
2   Appel des points et poids de Gauss [ξ,W] = wpGauss(4)
3   Boucle i sur les nœuds
4       Extraction du point source Xi  $\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix} = \text{nds}(i)$ 
5       Boucle j sur les éléments
6           Extraction des nœuds de l'élément : [els(j) els(j+1)]
7           Extraction des coordonnées de l'élément : [X1=nds(j) X2=nds(j+1)]
8           Calcul du jacobien de l'élément : J
9           Test si l'élément contient le nœud i
10              Alors G = Expression (4.54) ou (4.53)
11              Sinon Initialisation de Ge
12                  Boucle ip sur les points de de Gauss
13                      Evaluation des fonctions de forme  $N = N(\xi_{ip})$ 
14                      Calcul du point  $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = N[X1 X2]$ 
15                      Calcul du rayon  $r = \sqrt{X1^2 + X2^2}$ 
16                      Evaluation de la solution fondamentale  $g = -1/(2\pi) \ln(r)$ 
17                      Contribution du point de Gauss  $Ge := Ge + N \cdot W \cdot J \cdot g$ 
18                  Fin de la boucle ip
19                  Assemblage de Ge dans G(i,els(j))
20          Fin du test
21      Fin la boucle j
22  Fin de la boucle i
Fin de la fonction MatG

```

Dans le cas où l'élément constant est utilisé pour l'interpolation nodale, il n'y a pas lieu de multiplier par les fonctions de forme à la ligne 17. Cependant, ces fonctions restent nécessaires pour le calcul du point X à partir du point de Gauss (ligne 14), leur évaluation à la ligne 13 est donc indispensable pour les deux types d'éléments.

Les points et poids d'intégration par quadrature de Gauss sont stockés dans un fichier. Il sont chargés à l'aide de la fonction `wpGaus` qui prend comme argument le nombre de points désiré. La fonction peut charger, ou calculer si nécessaire, un nombre de points allant de 2 à 40. La table des éléments `els` est utilisée dans tous les programmes, elle sert à localiser dans les matrices globales

la destination des contributions venant des éléments. Cette partie de la programmation commune aux éléments finis et aux éléments de frontière est appelée assemblage. La programmation sous MATLAB facilite l'assemblage par l'utilisation des sous matrices auxquelles on peut accéder ici par `els(j)`.

L'inversion de la matrice G a été effectué à l'aide de la fonction `inverse` de MATLAB qui utilise les routines `DLANGE`, `DGETRF`, `DGECOM` et `DGETRI` de la bibliothèque LAPACK [8]

La construction de la matrice A intervenant dans (4.46) nécessite l'assemblage des $A_{ij}^{(e)}$ d'expression (4.45) et dont les intégrales élémentaires sont traitées dans la section précédente. Le corps de la fonction qui assemble A est constitué de deux boucles qui comptent les contributions des éléments (i, j) . La troisième boucle calcule I_y (4.59) définie sur toute la frontière.

Début de la fonction `Mata`

```

1   Entrées :
1       net : nombre total d'éléments
1       nnt : nombre total de nœuds
1       els : table des éléments (net×2)
1       nds : table des nœuds (nnt×2)
1   Sortie :
1       Matrice A

1   Initialisation de la matrice globale A
2   Boucle ix = 1 à net (sur les éléments [xi, xi+1])
3       Extraction des noeuds de l'élément : ix
4       Traitement du cas de singularité XZ par appel de la fonction : SingXZ
5       Boucle iz = ix+1 à net (sur les éléments [zj, zj+1])
6           Extraction des noeuds de l'élément : iz
7           Calcul de la matrice élémentaire Ae par appel à la fonction IntAx
8           Assemblage de la matrice Ae dans A
9           i = [els(ix), els(ix+1)]
9           j = [els(iz) els(iz+1)]
10          A(i,j) := A(i,j) + Ae
11      Fin de la boucle iz
12  Fin de la boucle ix
13  Evaluation de la partie inférieure de la matrice et division sur 4π2
Fin de la fonction Mata

```

La singularité XZ est traitée à l'aide de la fonction `SingXZ` à la ligne 4 placée juste avant la boucle sur les éléments j , qui commence à partir de $i + 1$ puisque la matrice est symétrique. Par contre la cas de singularité YZ est contrôlé dans la troisième boucle et traité dans la fonction `SingYZ`.

Pour la clarté et la simplicité des programmes, les trois boucles sont implantées chacune dans une fonction à part : `IntAx`, `IntAz` et `IntAy`.

Dans le cas régulier, la fonction `IntAx` fait appel à `IntAz` à chaque point de Gauss donnant le point \mathbf{x} , et la fonction `IntAz` fait appel à `IntAy` à chaque point de Gauss donnant le point \mathbf{z} .

Début de la fonction IntAx

```

!   Entrées :
!
!       els : table des éléments
!       nds : table des nœuds
!       iex : indice de l'élément contenant x
!       iez : indice de l'élément contenant z
!       npx : nombre de point de Gauss sur l'élément iex
!       npz : nombre de point de Gauss sur l'élément iez
!
!   Sortie :
!
!       Matrice Ae
!
1   Initialisation de la matrice élémentaire Ae
2   Extraction des coordonnées [X1 X2] de l'élément iex :  $X1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$  ,  $X2 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ 
3   Appel points et poids de Gauss [ $\xi$  , Wx]
4   Evaluation du Jacobien de l'élément Jx
5   Boucle ipx = 1 à npx sur les points de Gauss
6       Evaluation des fonctions de forme aux points de Gauss :  $Nx = Nx(\xi_{ipx})$ 
7       Calcul du point X :  $X = Nx \cdot [X1 \ X2]$ 
8       Intégration sur Z : appel de la fonction Sz = IntAz
9       Contribution à la matrice élémentaire Ae := Ae + W Jx N Sz
10  Fin de boucle ipx
Fin de la fonction IntAx

```

Début de la fonction IntAz

```

!   Entrées :
!
!       els : table des éléments
!       nds : table des nœuds
!       X : point courant sur l'élément iex
!       iez : indice de l'élément contenant z
!       npz : nombre de point de Gauss sur l'élément iez
!
!   Sortie :
!
!       Somme Sz : vecteur [Sz1 Sz2]
!
1   Extraction des coordonnées de l'élément iez [ $Z1 \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}$  ,  $Z2 \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}$ ]
!   Initialisation de la somme Sz avec le calcul du cas de singularité YZ
2   Sz = SingYZ
3   Continue avec les autres éléments Y : les cas réguliers
4   Chargement des points et poids de Gauss [ $\zeta$  , Wz]
5   Evaluation du Jacobien de l'élément Jz
6   Boucle ipz = 1 à npz sur les points de Gauss
7       Evaluation des fonctions de forme aux points de Gauss :  $Nz = Nz(\zeta_{ipz})$ 
8       Calcul du point Z correspondant  $\zeta_{ipz}$  :  $Z = Nz \cdot [Z1 \ , \ Z2]^T$ 
9       Intégration du cas régulier sur Y : Sy = IntAy
10      Contribution à la somme Sz := Sz + Wz Jz [Nz1 Nz2] Sy
11  Fin de boucle ipz
Fin de la fonction IntAz

```

La fonction IntAy qui calcule les intégrales de cas régulier produit un scalaire Sy qui sera utilisé dans les contributions à la somme Sz. A la somme Sy contribuent tous les éléments du contour sauf celui confondu avec l'élément iez qui est traité à part avec la fonction SingYZ. Cette fonction permet d'ailleurs d'initialiser le vecteur Sz. Dans le cas des éléments constants, Sz est un scalaire

et la seule modification à apporter à la fonction `intAz` concerne la ligne 10 dans laquelle il faut enlever la multiplication par les fonctions de forme `[Nz1 Nz2]`.

Début de la fonction `IntAy`

```

1  Entrées :
2      els : table des éléments
3      nds : table des nœuds
4      iex : indice de l'élément iex
5      iez : indice de l'élément iez
6      X : point courant sur l'élément iex
7      Z : point courant sur l'élément iez
8  Sortie :
9      Somme Sy

10 Initialisation de la somme Sy = 0
11 Appel des points et poids de Gauss [ $\eta$ , Wy]
12 Calcul du rayon Rzx
13 Calcul de  $G(z, x) = -1/(2\pi) \ln(Rzx)$ 
14 Boucle iey = 1 à net sur tous les éléments du contour
15     Test si iey  $\stackrel{?}{=} iex$ 
16     alors Se = 0
17     Incrémenter la boucle (élément suivant)
18 Fin du test
19     Test si iey  $\stackrel{?}{=} iez$ 
20     alors Se = 0
21     Incrémenter la boucle (élément suivant)
22     Le cas de singularité YZ est traité dans SingYZ
23 Fin du test
24 Le code suivant traite le cas régulier, il n'est exécuté que si les
25 deux tests précédents ne sont pas vérifiés
26     Extraction des coordonnées de l'élément iey  $\left[ Y1 \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}, Y2 \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} \right]$ 
27     Evaluation du Jacobien de l'élément Jy
28     Initialisation de la somme Se (contributions des points de Gauss)
29     Boucle ipy = 1 à npg sur les points de Gauss
30         Evaluation des fonctions de forme aux points de Gauss :  $Ny = Ny(\eta_{ipy})$ 
31         Calcul du point Y correspondant  $\eta_{ipy}$  :  $Y = Ny \cdot [Y1 Y2]^T$ 
32         Calcul des rayons Rzy et Rxy
33         Calcul du gradient de r par rapport à n :  $drdn = (Y-X) n / Rxy$ 
34         Calcul de  $Hxy = -1/(2\pi)(1/Rxy)drdn$ 
35         Calcul de  $Gzy = -1/(2\pi) \ln(Rzy)$ 
36         Contribution du point à la somme Se := Se + Wy Jy Hxy (Gzy - Gzx )
37     Fin de boucle ipy
38 Contribution de l'élément à la somme totale Sy := Sy + Se
39 Fin de boucle iey
40 Fin de la fonction IntAy

```

La fonction `SingYZ` inverse l'ordre des intégration sur les deux éléments `iez` et `iey`. Elle produit le vecteur `S1 S2` qui sera utilisé ensuite.

Début de la fonction `SingYZ`

```

Entrées :
X : coordonnées du point courant sur l'élément iex
Y1 Y2 : coordonnées de l'élément contenant les points Y et Z
Sortie :
[Sz1 Sz2]

1 Chargement des points et poids de quadrature logarithmique de Gauss
  [ $\hat{\eta}$ ,  $\hat{w}$ ] = wpgLog(4)
2 Calcul de la longueur L de l'élément [Y1 Y2]
3 Calcul du jacobien  $J_x$  de l'élément [X1 X2]
4 Initialisation des sommes S0 = 0 et S1 = 0
5 Calcul de  $h_x$  (eq.4.57)
6 Test si  $h_x \stackrel{?}{=} 0$ 
7   alors itérer la boucle et passer au point suivant
8 Fin du test
9 Calcul des rayons rx, r1 et r2 (eq. 4.71 et 4.72)
10 Calcul de  $\alpha$  (eq. 4.61)
11 Calcul de  $I_c$  et  $I_\ell$  (eq. 4.70 et 4.84)
12 Initialisation des sommes S0 =  $I_c$  et S1 =  $I_\ell$ 
13 Boucle i = 1 npy sur les points d'intégration logarithmique
14   Calcul de  $f_i = f(\hat{\eta}_i)$  (eq. 4.68)
15   Calcul de  $g_i = g(\hat{\eta}_i)$  (eq. 4.86)
16   Contribution à la somme S0 := S0 +  $h_x L^2 \hat{w}_i f_i$ 
17   Contribution à la somme S1 := S1 +  $\frac{1}{2} h_x L^2 \hat{w}_i g_i$ 
18 Fin de boucle j
19 Arrangement dans le vecteur Sz : [Sz1 = S0-S1 , Sz2=S1]
Fin de la fonction SingYZ

Début de la fonction SingXZ
Entrées :
X1 X2 : coordonnées de l'élément iex contenant les points X et Z
els : table des éléments
nds : table des nœuds
npx : nombre de point de Gauss (Log) sur l'élément iex
npy : nombre de point de Gauss (Lin) sur l'élément iey
Sortie :
Matrice élémentaire Ae (2 × 2)

1 Chargement des points et poids d'intégration
  Linéaire [ $\eta_i, w_i$ ], et Logarithmique [ $\hat{\xi}_i, \hat{w}_i$ ]
2 Calcul de la longueur  $L_x$  de l'élément [X1 X2]
3 Initialisation de la matrice élémentaire Ae = [0]2×2
4 Boucle iey sur tous les éléments els
5   Extraction des coordonnées [Y1 Y2] de l'élément iey
6   Calcul de la longueur  $L_y$  de l'élément iey
7   Calcul de  $h_1$  (4.57)
8   Calcul de  $s = \sin \theta$  (4.79)
9   Boucle j sur les points de quadrature linéaire
10   Calcul du point Y( $\eta_j$ )
11   Calcul de quantités :  $h_y$ ,  $r_y$ ,  $\alpha$ ,  $r_1$  et  $r_2$  (eqs : 4.75 et 4.77)
12   Calcul de  $c_{zc}$  (4.81),  $c_{z\ell}$  (4.89),  $I_{xc}$  (4.80),  $I_{x\ell}$  (4.91) et  $I_{xq}$  (4.93)
13   Initialisation de a à l'expression (4.95) sans I et J

```

```
14     Boucle i sur les points de quadrature logarithmique
15     Evaluation de  $h_x = h_1 + s\hat{\xi}L_x$ ,  $r_{xy}^2 = (\hat{\xi}L_x - r_y)^2 + h_y^2$ 
16     Calcul de I (4.96)
17     Décalage des points d'intégration :  $\hat{\xi}_i := 1 - \hat{\xi}_i$ 
18     Réévaluation de  $h_x$  et  $r_{xy}^2$ 
19     Calcul de J (4.97)
20     Contribution du point  $\hat{\xi}_i$  à la matrice a :  $\mathbf{a} := \mathbf{a} + \hat{w}_i(\mathbf{I} + \mathbf{J})$ 
21     Fin de boucle sur i
22     Contribution du point  $\eta_j$  à la matrice élémentaire  $\mathbf{Ae} := \mathbf{Ae} + w_j \frac{1}{2} L_y \mathbf{a}$ 
23     Fin de boucle j
24     Fin de boucle ieyz
Fin de la fonction SingXZ
```


Programme FEMAT

Le programme FEMAT est un ensemble de scripts MATLAB écrits dans un esprit de programmation orientée objet. Les objets sont définis, suivant la nature de la méthode des éléments finis, en les regroupant en quatre groupes. Le premier constitue la base et concerne la définition des éléments, leurs propriétés et leurs méthodes. Le second concerne la géométrie et donc le maillage. Toutes les fonctions concernant la création du maillage et sa manipulation sont imbriquées en un seul objet appelé maillage. Le troisième type d'objets concerne les matériaux constituant les solides définis par une géométrie. Dans ce type d'objet, il n'est actuellement défini que le matériau élastique isotrope, les simulations auxquelles nous nous intéressons sont limitées à ce cas. Enfin un objet concernant la formulation ou le modèle qui associe une géométrie et un matériau regroupe toutes les méthodes permettant la création des matrices, leur manipulation et les méthodes de résolution matricielles. Ces objets sont décrits dans les sections suivantes.

Construction d'objet élément

Les types d'éléments définis dans FEMAT dérivent tous d'un objet parent `elbase` qui regroupe les méthodes communes qui seront héritées par tous les éléments. Deux méthodes sont actuellement disponibles : La méthode `localise` calcule la table des localisations à partir de la table des connectivités, et la méthode `dFFtodN` évalue les valeurs des dérivées des fonctions de forme dans le repère global à partir de leurs valeurs dans le repère local.

On dérive à partir de cet élément les éléments bidimensionnels surfaciques `e12D` linéiques `e1L2`. Les éléments surfaciques sont divisés en deux groupes, les triangulaires `eltri` (dont dérivent le linéaire `e1T3` et le quadratique `e1T6`), et les quadrilatéraux `elquad` dont le linéaire `e1Q4` et le quadratique `e1Q8`.

Les éléments infinis sont construits selon les deux approches : `elinfd` pour l'approche directe et `elinfi` l'approche inverse. Ces deux éléments héritiers de `elquad` redéfinissent les méthodes de calcul du Jacobien et des fonctions de forme ainsi que certaines propriétés comme le nombre de nœuds et les points et poids de Gauss.

En parallèle à la définition géométrique, on définit les éléments par leurs comportement. Sont disponibles les éléments élastiques `el elast` et les éléments acoustiques `el acoustic`. Les premiers sont de deux types : `e1DP` destinés aux problèmes en déformations planes, et `e1CP` pour les problèmes de contraintes planes.

La combinaison des deux définitions donne les éléments prêts pour l' utilisation. Ces éléments

sont : `e1DPQ4`, `e1CPQ4`, `e1DPQ8`, `e1CPQ8`, `e1DPT3`, `e1CPT3`, `e1DPT6` et `e1CPT6` pour l'élasticité bi-dimensionnelle. Pour les éléments acoustiques, il suffit de remplacer DP ou CP par AC. Dans la modélisation de l'interaction fluide - structure, nous avons utilisé les paires d'éléments suivantes (`e1ACQ4,e1DPQ4`) et (`e1ACQ8,e1DPQ8`). Dans les deux cas, les éléments infinis sont définis par héritage du même type d'élément.

Construction d'objet maillage

Le maillage dans FEMAT est un objet constitué d'un nombre `net` d'éléments et de `nnt` nœuds organisés en deux tables. Une table `els` pour les connectivités des éléments et une table `nds` pour les coordonnées des nœuds.

La table des éléments est constituée de `nel` lignes et `nne` colonnes, où `net` est le nombre de nœuds de l'élément utilisé dans la modélisation. La table des nœuds est constituée de `nnt` lignes et 2 colonnes contenant les coordonnées x et y .

L'objet maillage peut être construit de deux manières comme suit :

```
ms = femesh(g,n1,n2,e1)
```

Permet de créer un objet maillage `ms` à l'aide d'une géométrie `g` fermée constituée de quatre cotés droits ou courbes. `n1` et `n2` sont les nombres de subdivisions sur les deux cotés adjacents, et `e1` est le type de l'élément fini. `e1Q4` et `e1Q8` sont actuellement disponibles pour ce constructeur.

```
ms = femesh(els,nds)
```

Permet de créer un objet maillage `ms` avec les des deux tables `els` et `nds` qu'on charge à partir d'un fichier au format texte ou à partir du maillage de MATLAB. Le fichier est généralement construit avec un autre programme de maillage externe.

L'objet maillage est doté de l'opérateur `+` qui permet de jumeler deux maillages tout en supprimant les nœuds communs. Il est ainsi possible de mailler des géométries plus ou moins complexes pourvu qu'elles soient décomposables en plusieurs géométries plus simples. Une fois maillée, chaque géométrie peut être manipulée grâce à plusieurs méthodes comme :

- La rotation d'un angle `a` : `ms2 = rot(ms1,a)`,
- La symétrie par rapport à un vecteur `v` : `ms2 = symet(ms1, v)`,
- La translation selon un vecteur `v` : `ms2 = ms1 + v`,
- La mise à l'échelle à l'aide d'un facteur scalaire `a` : `ms2 = ms1*a`

L'objet offre aussi quelques méthodes d'accès à ses propriétés telles que :

- La taille du maillage : `[net nnt] = size(ms)`, `net = size(ms,1)`, `nnt = size(ms,2)`.
où `net` est le nombre d'éléments et `nnt` est le nombre de nœuds
- Extraction de coordonnées : `c = coords(ms, i)`, `[x y] = coords(ms, i)`.

L'argument `i` est un vecteur d'entiers contenant les numéros des nœuds dont on veut extraire les coordonnées. La première syntaxe rend les deux vecteurs `x` et `y` en une matrice `c`. Dans

les deux cas on peut omettre le vecteur `i` pour obtenir les coordonnées de tous les nœuds du maillage.

- Extraction d'éléments : `ets = elements(ms, i)`.

L'argument `i` contient l'ensemble des éléments dont on veut extraire les connectivités

- Extraction de nœuds : `nds = nodes(ms, c, v, tol)`

Renvoie un vecteur `nds` contenant les numéros des nœuds du maillage qui répondent au critère `c` à valeurs `v` avec une tolérance `tol` égale par défaut à 10^{-5} . Les critères actuellement disponibles sont :

'x' ou 'y' : on cherche les nœuds dont la coordonnée spécifiée est proche de la valeur `v`.

'd' : on cherche les nœuds appartenant à la droite $y = ax + b$, `v = [a b]`.

's' : on cherche les nœuds contenus dans un segment de droite délimité par deux nœuds `nd1` et `nd2`, `v = [nd1 nd2]`.

'c' : on cherche les nœuds appartenant à un cercle de centre (x_c, y_c) et de rayon `r`, `v = [xc yc r]`.

Lorsque l'argument `c` est un maillage `ms2`, l'argument `v` doit être omis et la méthode produit les nœuds communs aux deux maillages `ms` et `ms2`.

Un maillage bidimensionnel peut être transformé en un maillage tridimensionnel par extrusion à l'aide de la méthode `extrude(ms, z)`, où `z` est un vecteur qui contient les coordonnées dans la direction normale à la surface, sur lesquelles on réalise l'extrusion. Dans le cas d'un maillage linéique cette méthode renvoie un maillage surfacique tridimensionnel comme les éléments de plaques et coques, et dans le cas d'un maillage surfacique, elle renvoie un maillage d'éléments massifs.

Une fois le maillage construit, il peut être tracé comme suit : `plot(ms, opt)` où `opt` est une structure qui permet de personnaliser quelques options d'affichage telles que les numéros des nœuds et de éléments (`opt.nods`, `opt.elts`), les couleur des lignes (`opt.color`) et taille des caractères (`opt.fontsize`).

Construction d'objet matériau

Le constructeur de cet objet associe à un objet maillage `ms` des propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité `E`, le coefficient de Poisson `nu`, la masse volumique `rho` ou la vitesse de propagation d'ondes sonores `Cson` dans la cas des fluides.

Les deux syntaxes de ce constructeur sont :

```
mat = fematerial(ms, E, nu, rho)
```

```
mat = fematerial(ms, Cson)
```

Les méthodes permettant d'accéder aux propriétés d'un seul ou d'un ensembles d'élément désignés par un vecteur `ie` sont : `young(mat, ie)`, `poisson(mat, ie)`, `rho(mat, ie)` et `cson(mat, ie)`.

Cet objet est doté d'une méthode qui permet d'affecter une propriété à un ensemble d'éléments. Sa syntaxe est `add(mat,ie, E, nu, rho)` ou `add(mat,ie, Cson)`

Construction d'objet modèle

L'objet modèle nommé `femodel` associe une géométrie définie par un maillage `ms`, un matériau défini par l'objet `mat` et une formulation définie par un type d'élément `e1`. Il se construit comme suit : `femodel(e1, ms, mat)`

Une fois le modèle construit, il peut être assemblé avec un autre modèle en respectant uniquement la condition de continuité où en forçant une condition d'interaction :

`assemble(fm1, fm2)` : deux modèle de même nature (condition de continuité)

`FSI(fm1, fm2)` : interaction fluide-structure

Les méthodes suivantes permettent de manipuler les matrices globales ou d'appliquer les conditions aux limites

`setmatrices(fm, 'kmc')` : force l'assemblage des matrices globales

`getmatrices(fm, 'kmc')` : extrait de l'une ou des matrices globales

`setbc(fm, bc)` : force l'application des conditions aux limites

`fixe(fm, nuds)` : force une condition d'encastrement

Objets solution

Cet objet offre les méthodes suivantes : `eigmods(fm, nmodes)` : extrait les modes propres d'un modèle `fm`

`modalsol(fm, acc, xi)` : évalue la solution par superposition modale à un accélérogramme `acc`

`THsol(fm, acc)` : évalue la solution par intégration pas à pas

`stresses(fm, U)` : évalue les contraintes qui correspondent aux déplacements `U`

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1972.
- [2] S. Adhikari. *Damping Models for Structural Vibration*. PhD thesis, Trinity College, Cambridge, 2000.
- [3] K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative Seismology*. University Science Books, 2nd edition, 1982.
- [4] B. Alpert, L. Greengard, and T. Hagstrom. Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent wave equation. *J. Comput. Phys*, 180 :270–296, 2002.
- [5] G. Altay and M. C. Dökmeci. Fluid-fluid and -solid interaction problems : Variational principles revisited. *International Journal of Engineering Science*, 47 :83–102, 2009.
- [6] R. D. Ambrosini. Material damping vs. radiation damping in soil-structure interaction analysis. *Computers and Geotechnics*, 33 :86–92, 2006.
- [7] Y. A. Amenzad. *Theory of Elasticity*. Mir Publishers, Moscow, 1979.
- [8] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK User's Guide, Third Edition*, 1999. http://www.netlib.org/lapack/lug/lapack_lug.html.
- [9] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego, 3rd edition, 1985.
- [10] J. Argyris and H. P. Mlejnek. *Dynamics of Structures*. Elsevier, USA, 1991.
- [11] R.J. Astley. Infinite elements for wave problems : a review of current formulations and an assessment of accuracy. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 49 :951–976, 2000.
- [12] R.J. Astley and J.A. Hamilton. The stability of infinite schemes for transient wave problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 195 :3553–3571, 2006.
- [13] F. Axisa. *Modelling of Mechanical Systems, Vol. 3 : Fluid-Structure Interaction*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [14] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., N.J., 1996.
- [15] K.J. Bathe and E. L. Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall Inc., 1983.
- [16] A.A. Becker. *The Boundary Element Method in Engineering. A complete course*. McGraw-Hill, UK, 1992.
- [17] G. Beer and J. L. Meek. Infinite domain elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 17 :43–52, 1981.
- [18] G. Beer, I. Smith, and S. Duenser. *The Boundary Element Method With Programming for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag/Wien, Germany, 2008.

-
- [19] P Bettess. *Infinite elements*. Penshaw Press, 1992.
- [20] J. Bielak, K. Loukakis, Y. Hashida, and C. Yoshimura. Domain reduction method for three-dimensional earthquake modelling in localized regions. Part I : Theory. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(2) :817–824, 2003.
- [21] M. L. Boas. *Mathematical methods in the physical science*. John Wiley & sons, 1983.
- [22] G. Bonnet. A general regularization of the hypersingular integrals in the Symmetric Galerkin Boundary Element Method. *Int. J. Numer. Meth. Engrng*, 80 :1110–1123, 2009.
- [23] G. Bonnet, A. Seghir, and A. Corfdir. Coupling BEM with FEM by direct computation of the boundary stiffness matrix. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198 :2439–2445, 2009.
- [24] M. Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontière*. Eyrolles,Ed., Paris, 1995.
- [25] M. Bonnet. Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15 :93–102, 1995.
- [26] M. Bonnet and M. Guiggiani. Direct evaluation of double singular integrals and new free terms in 2D (symmetric) Galerkin BEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :2565–2596, 2003.
- [27] N. Bouanani and F. Y. Lu. Assessment of potential-based fluid finite elements for seismic analysis of dam-reservoir systems. *Computers and Structures*, 87 :206–224, 2009.
- [28] N. Bouanani, P. Paultre, and J. Roulx. A closed-form formulation for earthquake-induced hydrodynamic pressure on gravity dams. *Journal of Sound and Vibration*, 261 :573–582, 2003.
- [29] S. Bougacha and J. L. Tassoulas. Seismic response of gravity dams. I : Modeling of sediments. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117(8) :1826–1837, 1991.
- [30] S. Bougacha and J. L. Tassoulas. Seismic response of gravity dams. II : Effects of sediments. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117(8) :1839–1850, 1991.
- [31] J. E. Bowles. *Foundation analysis and design*. McGraw-Hill, 5th edition, 1997.
- [32] C.A. Brebbia and J. Domínguez. *Boundary elements : An introductory course*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1998.
- [33] A. Calayir, A.A. Dumanoğlu, and A. Bayraktar. Earthquake analysis of gravity dam–reservoir systems using eulerian and lagrangian approaches. *Computers and Structures*, 59 :877–890, 1996.
- [34] A. Capra and V. Davidovici. *Calcul dynamique des structures en zone sismique*. Eyrolles, 1982.
- [35] CEA. *CASTEM 2000*. www.cea/castem, 2010.
- [36] P. Chakrabarti and A. K. Chopra. Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 2 :143–160, 1973.
- [37] A. K. Chopra. Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes. *J. Eng. Mechanics Division, ASCE*, 93(EM6) :205–223, 1967.
- [38] A. K. Chopra. Earthquake response of concrete gravity dams. Technical Report No. UCB/EERC-70/10, University of California, Berkeley, California, 1970.
- [39] I. Chowdhury and S. P. Dasgupta. *Dynamics of structure and foundation - A unified approach. I. Fundamentals*. CRC Press/Balkema, 2009.
- [40] I. Chowdhury and S. P. Dasgupta. *Dynamics of structure and foundation - A unified approach. II. Applications*. CRC Press/Balkema, 2009.

-
- [41] S. Christiansen. On two methods for elimination of non-unique solutions of an integral equation with a logarithmic kernel. *Appl. Anal*, 13 :1–18, 1982.
- [42] Z. Chuhan and J.P. Wolf. *Dynamic Soil-Structure Interaction. Current Research in China and Switzerland*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands, 1998.
- [43] R. W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of structures*. Computers & Structures, Inc., Berkeley, USA, 1995. Third Edition.
- [44] D. Combescure. *Eléments de dynamique des structures. Illustrations à l'aide de CAST3M*. www.cea/castem, 2006.
- [45] C.J. Cornejo Córdova. *Elastodynamics with Hysteretic Damping*. PhD thesis, Delft University, Netherlands, 2002.
- [46] W.J.T. Daniel. Modal methods in finite element fluid-structure eigenvalue problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 15 :1161–1175, 1980.
- [47] N. Delepine, L. Lenti, G. Bonnet, and Semblat J.F. Nonlinear viscoelastic wave propagation. an extension of nearly constant attenuation (ncq) models. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 135(13) :1305–1314, 2009.
- [48] J. Domínguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications/Elsevier, Southampton/Amsterdam, 1993.
- [49] J. Domínguez, R. Gallego, and B. Japón. Effects of porous sediments on seismic response of concrete gravity dams. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 123(4) :302–311, 1997.
- [50] D.J. Dowrick. *Earthquake Risk Reduction*. John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England, 2003.
- [51] G.C. Everstine. Finite element formulations of structural acoustics problems. *Computers and Structures*, 65(3) :307–321, 1997.
- [52] C. A. Felippa and R. Ohayon. Mixed variational formulation of finite element analysis of acousto-elastic/slosh fluid-structure interaction. *J. Fluids and Structures*, 4, 1990.
- [53] G. Fenves and A. K. Chopra. Earthquake analysis and response of concrete gravity dams. Technical Report No. UCB/EERC-84/10, University of California, Berkeley, California, 1984.
- [54] G. Fenves and A. K. Chopra. Reservoir bottom absorption effects in earthquake response of concrete gravity dams. *Journal of Sound and Vibration*, 111(3) :545–562, 1985.
- [55] G. Fenves and A. K. Chopra. Simplified earthquake analysis of concrete gravity dams. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 113(8) :1688–1708, 1987.
- [56] G. Fenves and L. M. Vargas-Loli. Nonlinear dynamic analysis of fluid-structure systems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 114(2) :219–240, 1988.
- [57] A. Filatrault. *Eléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures*. Presse de l'Ecole polytechnique de Montréal, 1996.
- [58] F. Frey. *Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des solides*. Série : Traité de Génie Civil sous la direction de Walter, R., Vol.3. Presses polytechniques et universitaire romandes, Lausanne, 1998.
- [59] L. P. Gatti and V. Ferrari. *Applied Structural and Mechanical Vibrations. Theory, methods and measuring instrumentation*. Taylor & Francis Group LLC, 2003.

-
- [60] H. Ghassemi and A.R. Kohansal. Numerical evaluation of various levels of singular integrals, arising in BEM and its application in hydrofoil analysis. *Applied Mathematics and Computation*, 213 :277–289, 2009.
- [61] A. Ghobarah, A. EI-Nady, and T. Aziz. Simplified dynamic analysis for gravity dams. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 120(9) :2697–2716, 1994.
- [62] D. Givoli. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*, chapter Computational Absorbing Boundaries, pages 145–166. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [63] P.N. Godbole. Nonlinear soil-structure interaction analysis using coupled finite-infinite elements. *Computers and Structures*, 36(6) :1089–1096, 1990.
- [64] D. F. Golla and P. C. Hughes. Dynamics of viscoelastic structures - a time domain finite element formulation. *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 52(4) :897–906, 1985.
- [65] J. F. Hall and A. K. Chopra. Hydrodynamic effects in the dynamic response of concrete gravity dams. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 10 :333–395, 1982.
- [66] R.L. Higdon. Radiation boundary condition for dispersive waves. *SIAM. J Numer. Anal.*, 31 :64–100, 1994.
- [67] T Hughes. *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall Inc., 1987.
- [68] D.V. Hutton. *Fundamentals of finite element analysis*. Mc Graw Hill, 2004.
- [69] Gogoi I. and Maity D. Influence of sediment layers on dynamic behavior of aged concrete dams. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 133(4) :400–413, 2007.
- [70] J.A. Inaudi, E.E. Matheu, R.L. Peoppleman, and A. Matusevich. Foundation flexibility effects on the seismic response of concrete gravity dams. In *Technical Memorandum of Public Works Reserarch Institute*, pages 269–284, 2005.
- [71] Humar J. and Roufaiel M. Finite element analysis of reservoir vibration. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 109(1) :215–229, 1983.
- [72] D.L. Karabalis. Non-singular time domain BEM with applications to 3D inertial soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24 :281–293, 2004.
- [73] S. L. Kramer. *Geotechnical earthquake engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1996.
- [74] S. Küçükarslan. Dynamic analysis of dam-reservoir-foundation interaction in time domain. *Computational Mechanics*, 33 :274–281, 2004.
- [75] S. Küçükarslan. An exact truncation boundary condition for incompressible-unbounded infinite fluid domains. *Applied Mathematics and Computation*, 163 :61–69, 2005.
- [76] P. K. Kytte and M. R. Schäferkötter. *Handbook of computational methods for integration*. Chapman & Hall/CRC Press, 2005.
- [77] G.C. Lee and C. S. Tais. Time-domain analyses of dam-reservoir system. i : Exact solution. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117(9) :1990–2006, 1991.
- [78] L. Lehmann and H. Antes. Dynamic structure-soil-structure interaction applying the Symmetric Galerkin Boundary Element Method (SGBEM). *Mechanics Research Communications*, 28(3) :297–304, 2001.

-
- [79] G. Lin, J. DU, and Z. HU. Earthquake analysis of arch and gravity dams including the effects of foundation inhomogeneity. *Front. Archit. Civ. Eng. China*, 1(1) :41–50, 2007.
- [80] G.R Liu. A combined finite element/strip element method for analyzing elastic wave scattering by cracks and inclusions in laminates. *Computational Mechanics*, 28 :76–81, 2002.
- [81] G.R. Liu and J. D. Achenbach. A strip element method for stress analysis of anisotropic linearly elastic solids. *Applied Mechanics Division, Transactions of the ASME*, 61 :270–277, 1994.
- [82] G.R. Liu and S.S. Quek Jerry. A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method. *Finite Elem. Anal. Des.*, 39 :403–417, 2003.
- [83] J.E. Luco. Approximate external boundaries for truncated models of unbounded media. In *3rd UJNR Workshop on Soil-Structure Interaction*, Menlo Park, California, USA, March 29-30 2004.
- [84] J. Lysmer and R.L. Kuhlemeyer. Finite dynamic model for infinite media. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 95 :859–877, 1969.
- [85] D Maity. A novel far-boundary condition for the finite element analysis of infinite reservoir. *Applied Mathematics and Computation*, 170 :1314–1328, 2005.
- [86] D. Maity and S.K. Bhattacharya. A parametric study on fluid–structure interaction problems. *Journal of Sound and Vibration*, 263 :917–935, 2003.
- [87] F. Medina and Domínguez J. Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects. I. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(3) :152–163, 1989.
- [88] S. Mitra and K.P. Sinhamahapatra. 2D simulation of fluid-structure interaction using finite element method. *Finite Elem. Anal. Des.*, 45 :52–59, 2008.
- [89] Grote M.J. *Nonreflecting Boundary Conditions*. PhD thesis, Stanford University, 1995.
- [90] H.J.-P Morand and R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction*. Wiley, New York, 1995.
- [91] S.E. Moussaoui and B. Tiliouine. Etude de l’effet de l’interaction dynamique sur le comportement sismique du barrage de l’Oued Fodda. In *Colloque International sur la vulnérabilité, 11–12 Octobre 2003, Alger, Algérie*, 2003.
- [92] P. Moussou. A kinematic method for the computation of the natural modes of fluid-structure interaction systems. *J. Fluids and Structures*, 20 :643–658, 2005.
- [93] T. M. Nguyen. *Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques couplés : Réduction de modèle et Identification*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, 2007.
- [94] A.H. Nielsen. Absorbing boundary conditions for seismic analysis in ABAQUS. In *ABAQUS Users’ Conference*, pages 359–376, 2006.
- [95] Z. Niu, C. Cheng, H. Zhou, and Z. Hu. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31 :949–964, 2007.
- [96] R. Ohayon. Vibrations of fluid-structure coupled systems. In *E. Oñate, J. Periot and A. Samuelson, Editors, Finite Elements in the 90’s*. Springer-Verlag/CIMNE, Barcelona, 1991.
- [97] L.G. Olson and K.J Bathe. Analysis of fluid-structure interactions : a direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential. *Computers and Structures*, 21(1/2) :21–32, 1985.
- [98] T. Panzeca, F. Cucco, and S. Terravecchia. Boundary discretization based on the residual energy using the SGBEM. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 44 :7239–7260, 2007.

-
- [99] D. Park and Y.M.A Hashash. Estimation of non-linear seismic site effects for deep deposits of the Mississippi embayment. Technical report, University of Illinois at Urbana-champaign, and National Science Foundation, Mid America Earthquake Center, 2004.
- [100] S.-H. Park and N. Antin. A space-time discontinuous Galerkin method for seismic soil-structure interaction analysis. In *16th ASCE Engineering Mechanics Conference, July 16th-18th*, University of Washington, Seattle, 2003.
- [101] F. Parrinello and G. Borino. Lagrangian finite element modelling of dam-fluid interaction : Accurate absorbing boundary conditions. *Computers and Structures*, 85 :932–943, 2007.
- [102] P. Paultre. *Dynamique des structures. Application aux ouvrages de génie civil*. Hermes Science Publishing, Lavoisier, 2005.
- [103] A. Pecker. *Dynamique des sols*. Presses Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1984.
- [104] A. Pecker. *Dynamique des ouvrages, dynamique des structures*. polycopié des cours, ENPC, website : <http://www.enpc.fr/fr/formations/école.vite/cours/pecker>, 2004.
- [105] P. M. Pinsky and N. N. Abboud. Two mixed variational principales for exterior fluid-structure interaction problems. *Computers and Structures*, 33(3) :621–635, 1989.
- [106] S. Prakash. *Soil dynamics*. Mcgraw-Hill, 1981.
- [107] M. Preisig and B. Jeremić. Nonlinear finite element analysis of dynamic soil-foundation-structure interaction. Technical report, University of California, Davis, 2005.
- [108] J. Rajasankar, N. R. Iyer, B.Y Swamy, N. Gopalakrishnan, and P. Chellapandi. SSI analysis of a massive concrete structure based on a novel convolution/deconvolution technique. *Sādhanā*, 32, Part 3 :215–234, 2007.
- [109] L. Ramdani and A. Seghir. Etude de la réponse sismique des réservoirs de stockage rectangulaires. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 13(1) :33–52, 2009.
- [110] A. H. Register. *A Guide to MATLAB Object-Oriented Programming*. Chapman & Hall/CRC - Taylor & Francis Group, 2007.
- [111] A. Seghir and A. Tahakourt. Analyse dynamique des systèmes barrage-reservoir avec couplage éléments finis – éléments infinis. In *7^{ème} Colloque de l'Association Française de Génie Parasismique*, 04 - 06 Juillet 2007.
- [112] A. Seghir, A. Tahakourt, and G. Bonnet. Coupling FEM and symmetric BEM for dynamic interaction of dam-reservoir systems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(10) :1201–1210, 2009.
- [113] T. K. Sen. *Fundamentals of Seismic Loading on Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, 2009.
- [114] S. K. Sharan. Finite element modeling of infinite reservoirs. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 111(12) :1457–1469, 1985.
- [115] S. K. Sharan. A non-reflecting boundary in fluid-structure interaction. *Computers and Structures*, 26(5) :841–846, 1987.
- [116] J.F. Sigrist and S. Garreau. Dynamic analysis of fluid-structure interaction problems with modal methods using pressure-based fluid finite element. *Finite Elem. Anal. Des.*, 15 :687–300, 2007.
- [117] R.N.L. Smith. Direct Gauss quadrature formulae for logarithmic singularities on isoparametric elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24 :161–167, 2000.

-
- [118] E. Süli and D. F. Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, U K, 2003.
- [119] Chwang A. T. Hydrodynamic pressures on sloping dams during earthquakes. *J. Fluid Mech.*, 165 :131–145, 1978.
- [120] K.T. Tang. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3 : Fourier Analysis, Partial Differential Equations and Variational Methods*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [121] L. L. Thompson and R. Huan. Computation of transient radiation in semi-infinite regions based on exact nonreflecting boundary conditions and mixed time integration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(6) :3095–3108, 1999.
- [122] B. Tiliouine and A. Seghir. A numerical model for time domain analysis of dams including fluid-structure interaction. In *Fourth International Conference on Computer Structures Technology, August 18th- 20th*. Civil-Comp Press, 18th - 20th August 1998.
- [123] S. P. Timoshenko. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill Book Co, New York - London, 1934.
- [124] R. Tinawi, P. Léger, M. Leclerc, and G. Cipolla. Seismic safety of gravity dams : From shake table experiments to numerical analyses. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 126(04) :518–529, 2000.
- [125] A. Verruijt. Soil dynamics. ebook version of lecture notes given at Delft University of Technology, <http://geo.verruijt.net>, 2006.
- [126] M.N. Viladkar, P.N. Godbole, and J. Noorzaei. Soil-structure interaction in plane frames using coupled finite-infinite elements. *Computers and Structures*, 39(5) :535–546, 1991.
- [127] J. Wang. Influence of different boundary conditions on analysis of SSI. In *18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 18)*, pages 3157–3164, Beijing, China, 2005.
- [128] H. M. Westergaard. Water pressures on dams during earthquakes. *Transactions of ASCE*, 98 :1303–1318, 1933.
- [129] E. Wilson. *Three-dimensional static and dynamic analysis of structures. A physical approach with emphasis on earthquake engineering*. Computers and Structures., August 7-12 2001.
- [130] J.P. Wolf. *Dynamic soil-structure-interaction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985.
- [131] J. Woodhouse. Linear damping models for structural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 215(3) :547–569, 1998.
- [132] W. H. Wu and C.Y. Chen. Simple lumped-parameter models of foundation using mass-spring-dashpot oscillators. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 24(6) :681–697, 2001.
- [133] H.R. Yerli, S. Kacin, and S. Kocak. A parallel finite-infinite element model for two-dimensional soil-structure interaction problems. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 23 :249–253, 2003.
- [134] C. Yoshimura, J. Bielak, and Y. Hashida. Domain reduction method for three-dimensional earthquake modeling in localized regions. Part II : Verification and examples. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(2) :825–840, 2003.
- [135] C.B. Yun, D.K. Kim, and J.M. Kim. Analytical frequency-dependent infinite elements for soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium. *Engineering Structures*, 22 :258–271, 2000.

-
- [136] X. Zeng and J. Bielak. Stable symmetric finite element-boundary integral coupling method for fluid-structure interface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15 :79–91, 1995.
- [137] Y. Zhang, Z. Yang, J. Bielak, J.P. Conte, and A. Elgamal. Treatment of seismic input and boundary conditions in nonlinear seismic analysis of a bridge ground system. In *16th ASCE Engineering Mechanics Conference, July 16th-18th*, University of Washington, Seattle, 2003.
- [138] O. C. Zienkiewicz, K. Bando, P Bettess, C. R. I. Emson, and C. Chiam, T. Mapped infinite elements for exterior wave problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21 :1229–1251, 1985.
- [139] O. C. Zienkiewicz and R. E. Newton. Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. In *Int. Sym. Finite Element Techniques*, 1st-15th May 1969.
- [140] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *Finite Element Method - Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, 2005.
- [141] O.C. Zienkiewicz and P. Bettess. Infinite elements in the study of fluid-structure interaction problems. In *Computing Methods in Applied Sciences, 2nd Int. Symp.*, 15-19 December 1975.
- [142] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, and P. Bettess. The Sommerfeld (radiation) condition on infinite domains and its modelling in numerical procedures. In *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering I*, pages 169–203. Springer Berlin / Heidelberg, Palo Alto, CA, 1971.