

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mira Abderrahmane de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle

# Mémoire de fin de cycle

*en vue de l'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle  
Option : Modélisation Mathématiques et Techniques de Décision*

## Thème

# Étude analytique du modèle d'attente M/G/1 avec pannes et réparations

Presenté par:

- *M<sub>elle</sub>* Mizi Sabrina
- *M<sub>elle</sub>* Mokhtari Latifa

Devant le jury composé de:

<b><u>Présidente:</u></b>	<i>M<sub>me</sub></i> Bouamara Z.	MAA	Université de Béjaïa.
<b><u>Encadreur:</u></b>	<i>M<sub>r</sub></i> Abbas K.	Professeur	Université de Béjaïa.
<b><u>Examineur:</u></b>	<i>M<sub>r</sub></i> Ouazine S.	MCB	Université de Béjaïa.
<b><u>Examineur:</u></b>	<i>M<sub>r</sub></i> Soufit M.	Doctorant	Université de Béjaïa.

Juin 2018



*Dix-huit ans d'études vont être couronnés avec ce mémoire. C'est grâce au grand Dieu tout puissant qui nous a donné courage et patience que nous avons pu réaliser cette tâche .*

*Au terme de ce travail, nous tenons à exprimer notre gratitude et nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation.*

*Nous tenons à remercier les membres du jury, dont monsieur K.ABBAS, notre encadreur, pour ses conseils, son encouragement et sa disponibilité dans ce projet.*

*Nous présentons nos sincères remerciements à la famille Mokhtari et la famille Mizi.*

*Nos profonds remerciements à nos amis qui ont témoigné de leur amitié, soutien et sympathie .*

*Et à toutes les personnes qui nous sont chères et qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*



*Je dédie ce modeste travail en principe aux personnes les plus importantes de ma vie; mon père et ma mère qui ont été présents pour moi pendant tout mon cursus et ma vie, mais surtout qui ont toujours su trouver les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient à aller de l'avant.*

*Pour tous les instants passés, les fous-rires et le désespoir, la colère et la joie qui ont accompagné ce travail, et même pour sa simple présence, je dédie ce mémoire à mon binôme **SABRINA** sans laquelle il n'aurait pas pu être réalisé.*

*Je dédie aussi ce travail à toutes ma famille qui était toujours derrière moi pour me fortifier pendant mes moments difficiles, en particulier:*

*★ Mes soeurs: **AMEL, KATIA.***

*Je veux aussi dédier ce travail à mes chères amies qui ne nous ont jamais oubliées et qui étaient présentes en cas de besoin: **NAOUAL, KAHINA, THANINA, LILIA.***

*Enfin à toutes personnes qui me sont chères et que j'aime.*

**LATIFA**



*Je dédie ce modeste travail en principe aux personnes les plus importantes de ma vie; mon père et ma mère qui ont été présents pour moi pendant tout mon cursus et ma vie, mais surtout qui ont toujours su trouver les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient à aller de l'avant.*

*Pour tous les instants passés, les fous-rires et le désespoir, la colère et la joie qui ont accompagné ce travail, et même pour sa simple présence, je dédie ce mémoire à mon binôme LATIFA sans laquelle il n'aurait pas pu être réalisé.*

*Je dédie aussi ce travail à toutes ma famille qui était toujours derrière moi pour me fortifier pendant mes moments difficiles, en particulier:*

*\* Mon frère: KAMEL .*

*\* Mes soeurs: DALILA, MARINA, NINA.*

*\* Sans oublier mes cousines et cousins.*

*Je veux aussi dédier ce travail à mes chères amis qui ne nous ont jamais oubliés et qui étaient présents en cas de besoin: NABIL, NOUARA, LILIA, NAOUAL, KAHINA, SYLIA, MASSINISSA.*

*Enfin à tous ceux que j'aime et qui m'aiment.*

**SABRINA**

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels sur les systèmes de files d'attente</b>	<b>4</b>
1.1 Files d'attente . . . . .	4
1.1.1 Types de files d'attente . . . . .	5
1.1.2 Structures de base . . . . .	5
1.1.3 Classification des files d'attente . . . . .	6
1.1.4 Notation de Kendall . . . . .	8
1.2 Mesures de performance . . . . .	9
1.2.1 Formule de Little . . . . .	9
1.3 Transformation . . . . .	10
1.3.1 Transformée en $z$ . . . . .	11
1.3.2 Transformée de Laplace . . . . .	12
1.4 Systèmes de files d'attente M/M/1 et M/G/1 . . . . .	12
1.4.1 Système de files d'attente M/M/1 . . . . .	12
1.4.2 Système de files d'attente M/G/1 . . . . .	15
1.5 Conclusion . . . . .	25
<b>2 Système M/G/1 avec pannes</b>	<b>26</b>
2.1 Système de files d'attente M/G/1 avec pannes . . . . .	27
2.1.1 Description du modèle et position du problème . . . . .	27
2.1.2 Calcul sous forme développée . . . . .	28
2.1.3 Ergodicité . . . . .	32
2.1.4 Mesures de performance . . . . .	33
2.2 Système de files d'attente M/G/1 avec pannes répétitives . . . . .	35
2.2.1 Description du modèle et position du problème . . . . .	35
2.2.2 Calcul sous forme développée . . . . .	36
2.2.3 Ergodicité . . . . .	37
2.2.4 Mesures de performance . . . . .	38
2.3 Conclusion . . . . .	39

<b>3</b>	<b>Analyse de sensibilité des mesures de performance du système d'attente M/G/1 non fiable</b>	<b>40</b>
3.1	Calcul numérique . . . . .	40
3.2	Analyse de sensibilité de performances du système de files d'attente M/G/1 avec pannes . . . . .	42
3.3	Analyse de sensibilité de performances du système de files d'attente M/G/1 avec pannes répétitives . . . . .	56
3.4	Conclusion . . . . .	60
	<b>Conclusion générale</b>	<b>61</b>
	<b>bibliographie</b>	<b>62</b>

# LISTE DES FIGURES

1.1	Structure générale d'un système de file d'attente. . . . .	6
1.2	La file d'attente $M/M/1$ . . . . .	13
1.3	Graphe d'état du système d'attente $M/M/1$ . . . . .	13
1.4	Graphe de la chaîne de Markov induite $P$ . . . . .	17
3.1	Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de $\theta$ . . . . .	42
3.2	Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de $\theta$ . . . . .	43
3.3	Variation du nombre moyen de clients dans le système en fonction de $\lambda$ . . . . .	44
3.4	Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de $\lambda$ . . . . .	45
3.5	Variation de probabilité $\pi_0$ en fonction du taux d'arrivée $\lambda$ . . . . .	46
3.6	Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de taux de réparation $\mu_0$ . . . . .	47
3.7	Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction du taux de réparation de $\mu_0$ . . . . .	48
3.8	Variation de probabilité $\pi_0$ en fonction de $\mu_0$ de réparation. . . . .	49
3.9	Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction du taux de service $\mu_1$ . . . . .	50
3.10	Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction du taux de service $\mu_1$ . . . . .	51
3.11	Variation de probabilité $\pi_0$ en fonction du taux de service $\mu_1$ . . . . .	52
3.12	Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de $\theta$ et $\rho$ . . . . .	53
3.13	Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de $\mu_1$ et $\mu_0$ . . . . .	54
3.14	Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de $\mu_1$ et $\mu_0$ . . . . .	55
3.15	Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de nombre de pannes répétitives $k$ . . . . .	57
3.16	Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de nombre de pannes répétitives $k$ . . . . .	58
3.17	Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de $\theta$ et $k$ . . . . .	59
3.18	Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de $\theta$ et $k$ . . . . .	59

# Introduction générale

La théorie des files d'attente, est l'un des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation des systèmes dynamiques.

Cette théorie a été initiée au Danemark, entre 1909 et 1915 avec le développement du téléphonie. La compagnie de Copenhague souhaitait à l'époque mettre en place une plateforme permettant aux utilisateurs d'être mis en relation par l'intermédiaire d'opérateurs, mais ne savait pas quelle taille devait avoir une telle structure, ni combien d'appels elle aurait à gérer. Si le centre était trop gros, l'entreprise risquait la faillite. Si elle voyait trop petit, les utilisateurs à défaut d'être connectés, auraient manifesté leur mécontentement. La compagnie a donc demandé à l'un de ses ingénieurs, "**Agner Krarup Erlang**", de travailler à une conceptualisation mathématique des files d'attente pour déterminer le nombre de circuits nécessaires afin de fournir un service téléphonique acceptable. Par la suite, les files d'attente ont été intégrés dans la modélisation de divers domaines d'activité. On a assisté alors à une évolution rapide de la théorie des files d'attente qu'on appliquera à l'évaluation des performances des systèmes informatiques et aux réseaux de communication.

Les chercheurs ouvrant dans cette branche d'activité ont élaboré plusieurs nouvelles méthodes qui ont été ensuite appliquées avec succès dans d'autres domaines, notamment dans le secteur de fabrication. On a aussi constaté une résurgence des applications pratiques de la théorie des files d'attente dans des secteurs plus traditionnels de la recherche opérationnelle, un mouvement mené par **Peter Kolesar** (1979) et **Richard Larson** (1987)[13]. La théorie mathématique des files d'attente s'est développée par la suite, grâce aux travaux de **Palm**, de **Kolmogorov** et de **Khintchin**. Grâce à tous ces développements, cette théorie est aujourd'hui largement utilisée et ses applications sont multiples.

On peut schématiser un système (ou phénomène) d'attente comme suite: un ensemble d'individus, qu'on appelle clients, arrivent suivant un processus quelconque (le plus souvent aléatoire) pour acquérir un service auprès d'un autre individu dit serveur. La constitution de la file d'attente commence à se manifester dès le taux des arrivées excède le taux de service (par taux, on entend le nombre moyen de clients arrivants ou servis par unité de temps). La file d'attente peut ne pas se manifester de façon personnifiée: on parle alors d'une file de machines en panne qui attendent la réparation dans un atelier, ou d'un ensemble de programmes qui attendent l'acquisition d'une composante de la machine,...

Un système de files d'attente comprend donc un espace de service avec un ou plusieurs dispositifs de service (serveurs) et un espace d'attente dans lequel se forme une éventuelle file d'attente.

Les systèmes de files d'attente à serveurs non fiables ont été étudiés par plusieurs chercheurs [3, 9, 8]. **White** et **Christie** [10] ont étudié un système de files d'attente avec pannes et leur relation avec le modèle prioritaire. **Avi-Itzhak** et al. [3] et **Gaver** [6] ont considéré le système d'attente  $M/G/1$  à serveur sujet à des pannes sous différentes disciplines de service. Récemment, d'autres variantes de système de files d'attente avec pannes et réparation ont été considérées par plusieurs auteurs. **Pearn** et al. [17] ont considéré une analyse de sensibilité pour le contrôle du système d'attente  $M/G/1$  avec serveur non fiable. D'autre part, **Abbas** et **Aïssani** [11] se sont intéressés à l'application de la méthode de stabilité forte pour le même modèle. Plus récemment, **Abbas** [12] a fait recours à une méthode d'approximation dans les systèmes de files d'attente à serveur non fiable.

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant, en pratique, on dénombre souvent des cas où les serveurs sont sujet à des pannes aléatoires et par conséquent, durant un certain intervalle de temps, le service des clients est interrompu. L'étude de tels systèmes est sans aucun doute très importante par les applications pratiques car la fiabilité des serveurs influe beaucoup sur les caractéristiques du système considéré. En particulier, plus les indices de fiabilité des serveurs sont bas, plus le nombre des usagers dans la file est élevé et plus la durée d'attente de chaque usager dans la file est longue. Par conséquent, le comportement de la file d'attente ne peut pas être étudié sans prendre en considération ces interruptions.

Les systèmes de files d'attente avec pannes aléatoires des serveurs sont de grande importance. Nous les rencontrons dans la modélisation de plusieurs applications, et en particulier dans le cadre de l'évaluation des performances des systèmes informatisés de production et de télécommunication.

Dans ce mémoire, nous considérons une étude analytique du modèle de file d'attente  $M/G/1$  avec pannes et réparations. En utilisant la méthode de la chaîne de Markov induite, nous obtenons la fonction génératrice du nombre moyen de clients dans le système, ainsi plusieurs mesures de performance du modèle étudié. De même, une autre variante de ce système sera étudiée, tout en suivant la même démarche d'analyse. En plus, dans la dernière partie de ce mémoire, nous intéressons à l'analyse de sensibilité de certaines performances des deux modèles étudiés par rapport à la variabilité de leurs paramètres.

Ce mémoire comprend une introduction générale et trois chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous présentons les concepts de base des systèmes de file d'attente. Par la suite, nous introduisons quelques systèmes de file d'attente classiques.
- Dans le deuxième chapitre, nous présentons les résultats que nous avons obtenu, en utilisant la technique de la fonction génératrices. Deux modèles d'attente non fiables de type  $M/G/1$  seront considérés. Ainsi, nous présentons également plusieurs performances obtenues pour les deux modèles étudiés.
- Le dernier chapitre sera consacré à l'analyse de sensibilité de mesures de performance des modèles d'attente non fiable étudiés par rapport au variation des valeurs de leurs paramètres. Cette analyse sera illustrée par plusieurs exemples numériques.
- Finalement, nous terminerons par une conclusion générale et une bibliographie.

# 1

## Rappels sur les systèmes de files d'attente

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie quotidienne. Nous avons tous attendu au moins une fois dans une file d'attente que ce soit à l'épicerie, à la banque, à l'hôpital, guichet de poste, trafic routier, centrale téléphonique, atelier de réparation, etc. Bref beaucoup trop souvent, nous avons perdu notre temps dans une file d'attente. La théorie de files d'attente a été introduite afin de minimiser le temps d'attente dans votre organisation. Celle-ci est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui étudie les solutions optimales de gestion des phénomènes d'attente. L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

Dans ce chapitre, on présentera quelques concepts de base et les éléments essentiels relatifs au formalisme des files d'attente. On accordera une attention particulière à la présentation de certaines files d'attente à capacité infinie.

### 1.1 Files d'attente

#### Définition 1.1.

*Une **file d'attente** ou **queue** est un système stochastique composé d'un espace d'attente, d'un ou plusieurs serveurs et des clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système.*

*La théorie des files d'attente consiste à modéliser et à analyser de nombreuses situations en apparence très diverses. La théorie des files d'attente fut développée pour fournir des modèles permettant de prévoir le comportement des systèmes répondant à des demandes*

aléatoires.

*Les files d'attente sont généralement considérées comme outil très puissant d'évaluation des mesures de performance de divers systèmes réels.*

### 1.1.1 Types de files d'attente

À partir de regroupement d'individus attendant un service, on pourra obtenir plusieurs types de files d'attente telles que :

**Files séparées :** une file par guichet (par exemple : caisses des supermarchés). Ce système a l'inconvénient de générer des frustrations lorsque certaines files sont plus rapides que d'autres, ou lorsqu'un guichet supplémentaire s'ouvre, permettant aux derniers de passer les premiers ;

**File distribuée (mutualisée) :** une seule file alimente plusieurs guichets ;

**File virtuelle :** une prise de ticket permet de conserver l'ordre d'arrivée, sans avoir à faire la file physiquement : par exemple, les personnes peuvent s'asseoir en attendant leur tour ;

**File virtuelle mobile :** les nouvelles technologies permettent maintenant de prendre rang par internet ou par téléphone, et d'être prévenu par SMS lorsque son tour approche. Le temps d'attente ne nécessitant plus une présence physique ;

**File prioritaire :** des files plus rapides peuvent être créées, par exemple pour les personnes ayant un handicap, ou pour les personnes ayant une carte de fidélité. Parfois, des files prioritaires payantes peuvent être proposées.

### 1.1.2 Structures de base

On parle des phénomènes d'attentes chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des stations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire . [5] Si un poste de service est libre, le client se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi. Sinon, il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant leur ordre d'arrivée comme il est représenté dans la figure (1.1).

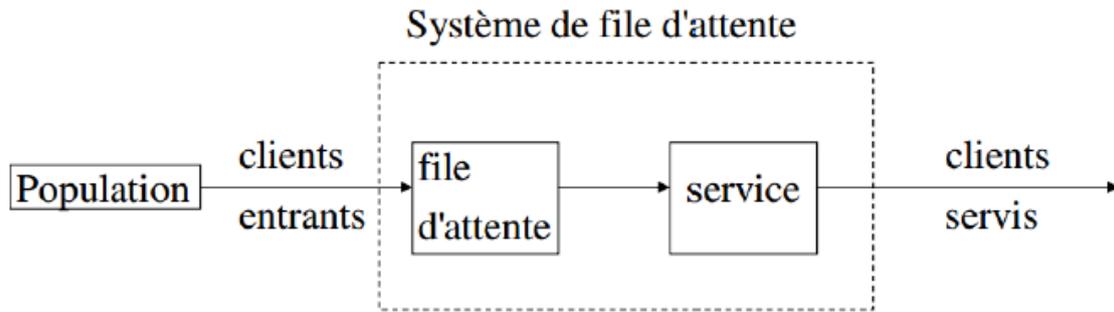


FIG. 1.1 – Structure générale d'un système de file d'attente.

**Population :** La population constitue la source de clients potentiels. Elle est caractérisée par son nombre d'éléments (fini ou infini).

**File d'attente :** La file d'attente est caractérisée par le nombre maximum permis de clients en attente (fini ou infini).

**Clients :** Les clients (issus de la population) se joignent au système avec un taux moyen d'arrivée.

**Service :** Le service peut être assuré par un ou plusieurs serveurs. Le temps qui s'écoule entre le début et la fin de service d'un client est dénoté le temps de service suivant une loi de probabilité. Le taux de service est une autre caractéristique du système.

**Stratégie de service :** La stratégie de service réfère à l'ordre selon laquelle les clients sont servis : premier arrivé premier servi, au hasard, selon des priorités, ...

### 1.1.3 Classification des files d'attente

La classification des files d'attente simple se base principalement sur trois éléments :

- Le processus stochastique décrivant l'arrivée des clients dans le système;
- Le nombre de serveurs;
- La loi probabiliste décrivant la durée des services.

À ces trois éléments, il faut par fois ajouter d'autres caractéristiques comme :

- Le nombre de places d'attente;
- Le nombre total de clients existants;
- Les règles spécifiant l'ordre de traitement des clients.

### **1. *Processus d'arrivée***

Le processus d'arrivée spécifie les instants aux quels les clients arrivent dans le système. Dans la théorie classique des files d'attente, on fait le plus souvent l'hypothèse que les clients arrivent de manière isolée et indépendamment les uns des autres. Sous ces hypothèses, les intervalles de temps entre deux arrivées successives forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

La liste qui suit résume les lois de probabilités les plus couramment rencontrées ainsi que les symboles associées:

- La lettre  $M$  désigne la loi exponentielle (abréviation de Markovian ou Memoryless). Un processus d'arrivée de type  $M$  n'est rien d'autre qu'un processus de Poisson et les intervalles de temps entre deux arrivées successives de clients sont des variables aléatoires exponentielles i.i.d.
- La lettre  $D$  correspond à une loi dégénérée (constante). Dans un tel processus, les arrivées de clients sont régulièrement espacées dans le temps.
- Le symbole  $E_k$  désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi d'Erlang d'ordre  $k$  (somme de  $k$  variables exponentielles i.i.d.).
- Abréviation de générale, la lettre  $G$  est utilisée lorsqu'aucune hypothèse particulière n'est faite sur le processus d'arrivée. Ce dernier étant alors un processus de renouvellement quelconque.

### **2. *Processus de service***

Les temps de service nécessaires au traitement des clients sont supposés être des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La description du processus de service revient alors à spécifier la loi de probabilités de ces variables aléatoires. Les symboles utilisés pour décrire les processus de service sont les mêmes que ceux introduits ci-dessus pour les processus d'arrivée.

### **3. *Nombre de serveurs***

Le nombre de serveurs correspond au nombre maximal de clients pouvant être traités simultanément. Tous les serveurs sont généralement supposés identiques, en particulier les temps de services sont indépendants d'un serveur à l'autre et distribués selon la même loi de probabilité.

### **4. *Capacité de la file***

La capacité d'accueil d'une file correspond au nombre maximal de clients pouvant

être présents dans le système à un instant quelconque. Il est égal à la somme du nombre de serveurs et du nombre de places d'attente disponibles. Si un client arrive dans une file ayant atteint sa capacité maximale d'accueil, il est refoulé et doit quitter le système sans avoir été servi.

### 5. *Taille de la population*

Le plus souvent, le nombre de clients susceptibles d'accéder au serveur est supposé illimité et leur fréquence d'arrivée constante. Certaines situations sont, cependant, caractérisées par un nombre fixe et limité de clients. Chaque client présent dans le système diminue alors le nombre d'arrivées potentielles, le taux d'arrivée dans la file n'est donc plus constant mais dépend du nombre de clients présents dans le système. Dans un tel cas, le processus d'arrivée décrit le temps nécessaire à un client entre le moment où il quitte le système et celui où il y revient.

### 6. *Discipline de la file*

La **discipline de la file**, ou **discipline de service**, est la règle de priorité déterminant l'ordre dans lequel les clients vont accéder à la ressource modélisée par le serveur. Les disciplines de service classiques, ainsi que leurs acronymes, sont:

- **FIFO**: acronyme de l'anglais *First In First Out*, soit « premier arrivé, premier servi ». C'est la discipline de service employée le plus souvent et c'est celle qui sera admise par défaut;
- **LIFO**: acronyme de l'anglais *Last In First Out*, soit « dernier arrivé, premier servi ». Cette discipline correspond au cas où les clients en attente forment une pile, le dernier arrivé étant au-dessus de la pile et donc le prochain à être servi;
- **SIRO**: acronyme de l'anglais *Service In Random Order*. Cette discipline correspond aux situations, où le prochain client servi est choisi au hasard parmi tous ceux en attente;
- **RR**: acronyme de l'anglais *Round Robin*. Cette discipline est utile pour modéliser un serveur multitâche, où les clients sont servis à tour de rôle pendant un intervalle de temps fixe, appelé *quantum*;
- **PS**: acronyme de l'anglais *Processor Sharing*. Cette discipline est le cas limite de la discipline RR lorsque le quantum tend vers zéro.

#### 1.1.4 Notation de Kendall

La notation suivante, introduite par Kendall reprise par de nombreux auteurs, permet de ramener la description textuelle des différents éléments constituant une file d'attente simple à une formule symbolique. Dans sa version étendue, un modèle est spécifié par une suite de six symboles:

$A/S/m/K/P/D$ .

La signification de chacun de ces symboles est :

- $A$  nature de processus d'arrivée;
- $S$  nature de processus de service;
- $m$  nombre de serveurs;
- $K$  capacité d'accueil de la file;
- $P$  taille de la population;
- $D$  discipline de la file.

Dans sa version courte, seuls les trois premiers symboles  $A/S/m$  sont utilisés. Il est sous-entendu que  $K = +\infty$ ,  $P = +\infty$  et  $D = FIFO$ .

## 1.2 Mesures de performance

L'analyse théorique d'un modèle de files d'attente a pour objet de saisir qualitativement et quantitativement le fonctionnement du système en question. Pour cela, il faut définir les critères et les mesures susceptibles d'atteindre cet objectif afin de déterminer à l'avance les performances du système. Pour un système composé d'une seule file d'attente, les principales mesures de performances sont :

- $Q$ : le nombre moyen de clients dans le système;
- $L_q$ : le nombre moyen de clients dans la file d'attente;
- $W$ : la durée moyenne de séjour dans le système (attente et service);
- $W_q$ : la durée moyenne d'attente d'un seul client.

Une mesure très importante, qui décrit le comportement asymptotique (lorsqu'il existe) du système tout entier, est la distribution stationnaire notée par  $\pi$ . La plupart des performances précédentes peuvent être exprimées à l'aide de la distribution  $\pi$ .

### 1.2.1 Formule de Little

La formule de Little est l'un des résultats les plus utiles en théorie de files d'attente. Soit  $\alpha(t)$  le nombre d'arrivées dans le système jusqu'au temps  $t$ , et  $\lambda_t = \alpha(t)/t$  comme le taux moyen d'arrivée pendant l'intervalle du temps  $[0,t]$ . Soit  $W$  la durée moyenne de séjour dans le système (attente et service). Dénoter enfin le nombre moyen de clients dans le système durant  $[0,t]$  par  $Q_t$ . La relation entre ces deux mesures de performance est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 1.1.** [2]

Si la limite  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$  et  $W$  existent, alors la limite  $Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t$  existe aussi, et la relation

$$Q = \lambda W \tag{1.1}$$

est vérifiée.

Les valeurs de mesures de performance sont liées les unes aux autres par les relations suivantes [2]:

$$Q = \lambda W, \tag{1.2}$$

$$L_t = \lambda W_t, \tag{1.3}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}, \tag{1.4}$$

$$Q = L_q + \frac{\lambda}{\mu}. \tag{1.5}$$

Tel que  $\mu$  est le taux de service. Les deux premières relations sont appelées **Formules de Little**.

### 1.3 Transformation

L'obtention de la moyenne, de la variance et, plus généralement, des moments d'une variable aléatoire peut être une opération pénible: calcul compliqué de sommes pour une variable discrète ou d'intégrales pour une variable continue. Les méthodes de transformation permettent souvent de lever la difficulté en modifiant les calculs à effectuer. Une transformation n'est, bien entendu, utile que si l'on est capable d'effectuer l'opération inverse.

**Définition 1.2.**

A une variable aléatoire  $X$ , continue ou discrète, on associe la fonction génératrice de moments  $\psi_X$  définie par  $\psi_X(\theta) = E[e^{\theta X}]$  pour tout  $\theta$  tel que  $E[e^{\theta X}]$  est finie:

$$\psi_X(\theta) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\theta k} P[X = k] & \text{si } X \text{ est discrète,} \\ \int_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\theta k} f_X(x) dx & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

### Propriété 1.1.

1.  $\psi_X(0) = 1$ .
2.  $\psi_X = \psi_Y \Leftrightarrow X$  et  $Y$  ont la même fonction de répartition.
3. Le moment d'ordre  $n$  de la variable aléatoire  $X$  s'obtient à partir de la fonction génératrice de moment en dérivant cette dernière  $n$  fois par rapport à  $\theta$  et en posant dans l'expression obtenue  $\theta = 0$ :

$$E[X^n] = \frac{d^n \psi_X(\theta)}{d\theta^n} \Big|_{\theta=0}$$

4. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $\psi_{X+Y}(\theta) = \psi_X(\theta)\psi_Y(\theta) \forall \theta$ .

### 1.3.1 Transformée en $z$

#### Définition 1.3.

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles, la transformée en  $z$  (aussi appelée fonction génératrice) de  $X$  est obtenue à partir de la fonction génératrice de moments en posant  $\theta = \ln z$  :

$$F(z) = \psi_X(\ln z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n \text{ pour } |z| < 1.$$

Notation:  $F(z) \Leftrightarrow \pi_n \Leftrightarrow X$ .

#### Propriété 1.2.

1.  $F(1) = 1$ .
2. La moyenne et le moment d'ordre 2 de  $X$  sont données par :

$$E[X] = \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{z=1}.$$

$$E[X^2] = \frac{d^2 F(z)}{dz^2} \Big|_{z=1} + E[X].$$

3. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes

$$F(z) \Leftrightarrow \pi_n \Leftrightarrow X,$$

$$G(z) \Leftrightarrow q_n \Leftrightarrow Y.$$

La transformée en  $z$  associée à la variable aléatoire  $Z$ , somme de  $X$  et de  $Y$

$$H(z) \Leftrightarrow r(n) = \sum_{k=0}^n \pi_k q_{n-k} = \pi \otimes q(n) \Leftrightarrow Z = X + Y$$

et donnée par:

$$H(z) = F(z)G(z).$$

## 1.3.2 Transformée de Laplace

### Définition 1.4.

Si  $X$  est une variable aléatoire continue à valeurs positives ou nulles, la transformée de Laplace de  $X$  est obtenue à partir de la fonction génératrice de moments en posant  $\theta = -s$ :

$$F^*(s) = \psi_X(-s) = \int_0^\infty e^{-st} f_X(t) dt.$$

Notation:  $F^*(s) \Leftrightarrow f_X(t) \Leftrightarrow X$ .

### Propriété 1.3.

1.  $F^*(0) = 1$ .
2. Le moment d'ordre  $n$  de  $X$  est donné par:

$$E[X^n] = (-1)^n \frac{d^n F^*(s)}{d_s^n} \Big|_{s=0}.$$

3. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires continues indépendantes

$$F^*(s) \Leftrightarrow f_X(t) \Leftrightarrow X,$$

$$G^*(s) \Leftrightarrow g_Y(t) \Leftrightarrow Y.$$

La transformée de Laplace associée à la variable aléatoire  $Z$ , somme de  $X$  et  $Y$

$$H^*(s) \Leftrightarrow h_Z(t) = \int_0^t f_X(x) g_Y(t-x) dx = f_X \otimes g_Y(t) \Leftrightarrow Z = X + Y$$

est donnée par:

$$H^*(s) = F^*(s)G^*(s).$$

## 1.4 Systèmes de files d'attente M/M/1 et M/G/1

### 1.4.1 Système de files d'attente M/M/1

On considère un système de file d'attente de capacité infinie, d'un unique serveur et la discipline de service est *FIFO*. Le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$  (ce que équivalent à dire que les inter-arrivées ont une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ ) et le temps de service d'un client est une variable aléatoire ayant une distribution exponentielle de taux  $\mu$ . Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/1$ .

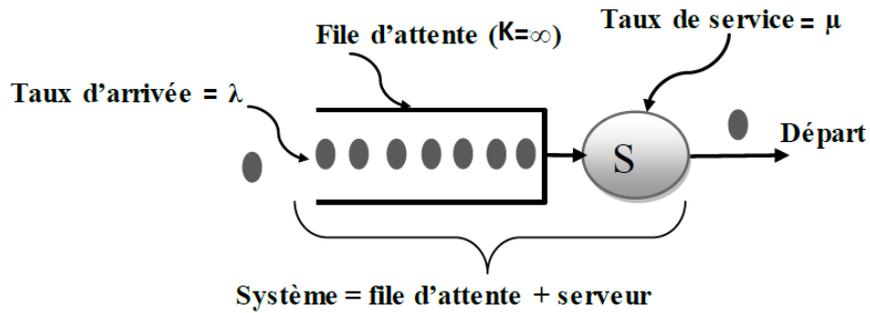


FIG. 1.2 – La file d'attente  $M/M/1$ .

### Étude analytique du système:

Le système  $M/M/1$  se rapporte facilement à un processus de naissance et de mort, où  $n(t)$  représente le nombre de clients dans le système. Chaque arrivée est considérée comme une naissance et chaque fin de service est considérée comme une mort.

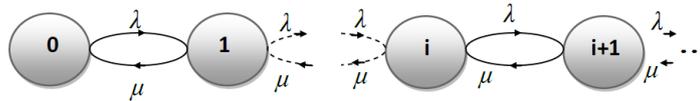


FIG. 1.3 – Graphe d'état du système d'attente  $M/M/1$ .

### Régime transitoire et stationnaire:

Soit  $\pi_k(t)$  la probabilité d'observer  $k$  clients dans le système à l'instant  $t$ . Pour un processus de naissance et de mort quelconque, les probabilités  $\pi_k$  sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \pi = \pi P, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1. \end{cases}$$

Avec  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$  et  $P$  est la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant l'état de ce système:

$$P = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, les taux de naissance et de mort étant constants, ce système se simplifie et s'écrit :

$$\begin{cases} \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu \\ \pi_1 (\lambda + \mu) = \pi_0 \lambda + \pi_2 \mu \\ \vdots \\ \pi_n (\lambda + \mu) = \pi_{n-1} \lambda + \pi_{n+1} \mu \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

En remplaçant la première équation dans la deuxième, la deuxième dans la troisième et ainsi de suite, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu \\ \pi_1 \lambda = \pi_2 \mu \\ \vdots \\ \pi_n \lambda = \pi_{n+1} \mu \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

On notant  $\rho = \lambda/\mu$ , on a alors:

$$\pi_n = \rho \pi_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Ces équations sont insuffisantes pour calculer les différentes probabilités  $\pi_n$ . Elles permettent seulement de les exprimer toutes en fonction de  $\pi_0$ :

$$\pi_n = \rho^n \pi_0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Pour achever le calcul, on utilise la condition de normalisation de probabilités,  $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$ , qui en remplaçant  $\pi_n$  par sa valeur calculée précédemment, nous permet d'obtenir  $\pi_0$ :

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho.$$

À condition bien sûr que la série converge, ce qui est vrai si  $\rho < 1$ . Dans ce cas:

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

## Mesures de performance du système d'attente M/M/1

1. Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \sum_{n \geq 1} (n - 1)\pi_n = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}.$$

2. Le nombre moyen de clients dans le système :

$$Q = \sum_{n \geq 0} n\pi_n = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

3. Le temps moyen de séjour d'un client dans la file :

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

4. Le temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$W = \frac{1}{\mu(1 - \rho)}.$$

### 1.4.2 Système de files d'attente M/G/1

On revient à un système formé d'une file *FIFO* à capacité illimitée et d'un seul serveur. Le processus d'arrivée des clients dans la file est toujours supposé poissonien de taux  $\lambda$  mais, maintenant, le temps de service d'un client est distribué selon une variable aléatoire générale qui n'est plus supposée exponentielle. On suppose implicitement que les services successifs sont indépendants les uns des autres et distribués selon la même loi (donc que les variables aléatoires mesurant le temps de service des différents clients sont i.i.d.).

L'évolution du nombre de clients dans une telle file ne peut plus être modélisée par une chaîne de Markov à temps continu car si, à un instant quelconque  $t \geq 0$ ,  $n(t)$  clients sont présents, l'évolution future de la variable  $n(t)$  dépend non seulement de la valeur de  $n(t)$  mais également du temps  $Y(t)$  de service déjà alloué au client occupant le serveur. En effet, le temps de service nécessaire à chaque client n'étant plus exponentiel, le temps de traitement déjà alloué au client en service à l'instant  $t$  (à supposer que le système ne soit pas vide) a une influence sur le temps de service restant, ou résiduel, du client.

L'état  $\{n(t), Y(t)\}_{t \geq 0}$  est un processus sans mémoire. Le problème est que ce processus à espace d'état mixte:  $n(t)$  est une variable aléatoire discrète alors que  $Y(t)$  une variable aléatoire continue. Ce type de processus est très difficile à étudier. Notons cependant qu'il existe des méthodes dites « à variables supplémentaires » qui ont pour but d'étudier ce type de processus stochastique. Elle existe une méthode beaucoup plus simple permettant de se ramener à l'étude d'une simple chaîne de Markov à temps discret. Cette technique est connue sous le nom de « méthode de la chaîne de Markov incluse ou induite ».

### **Méthode des variables supplémentaires:**

Elle consiste à compléter l'information sur le processus  $\{n(t), t \geq 0\}$  de telle manière à lui donner le caractère markovien.

Ainsi, on se ramène à l'étude du processus  $\{n(t), A(t_1), \dots, A(t_n), t \geq 0\}$ . Les variables  $A(t_k)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  sont dites supplémentaires.

### **Méthode de la chaîne de Markov induite:**

La description de l'état d'un système de files d'attente du type  $M/G/1$  en instant donné  $t$ , nous exige de connaître non seulement le nombre de clients dans le système à cet instant, mais aussi le temps de service déjà écoulé  $A_1(t)$  d'un client à l'instant  $t$ .

Le processus bidimensionnel  $\{X(t), A_1(t); t \geq 0\}$  possède à nouveau la propriété de Markov; le calcul de son régime transitoire ferait intervenir des équations aux dérivées partielles.

Pour cela, on introduit la méthode de la chaîne de Markov induite, qui nous ramène à l'étude de ce processus au cas discret.

À cet effet, nous considérons les instants  $(d_n)$  de départ du  $n$ -ème client. Ainsi, on définit le processus à temps discret  $\{X(d_n), A_1(d_n); n = 1, 2, \dots\}$ , où  $X(d_n) = X_n$  et  $A_1(d_n) = 0$ , pour  $n = 1, 2, \dots$

La variable aléatoire  $X_n = X(d_n)$  représentant le nombre de clients dans le système juste après l'instant  $(d_n)$  est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus  $E_n$  "le nombre de clients qui entrent dans le système pendant que le  $n$ -ème client est servi".

Les variables aléatoires  $E_n$  sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$\mathbb{P}r[E_n = k] = a_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dH(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Alors:

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + E_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Avec:

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{Si } X_n > 0; \\ 0, & \text{Si } X_n = 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ceci montre que  $X_{n+1}$  ne dépend que de  $X_n$  et de  $E_{n+1}$  et non des valeurs de  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$ . Ce qui signifie que la suite  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  ainsi définie est la chaîne de Markov induite du processus  $\{X(t); t \geq 0\}$ .

**Régime transitoire:**

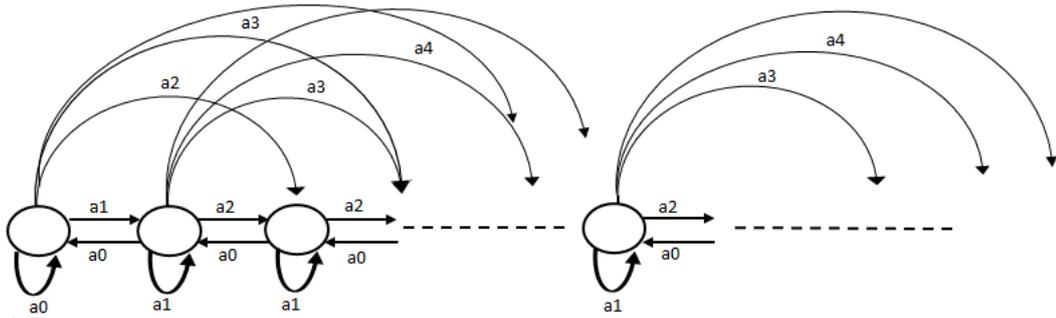


FIG. 1.4 – Graphe de la chaîne de Markov induite  $P$

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite  $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$  sont données par :

$$P_{ij} = \mathbb{P}r[X_{n+1} = j / X_n = i] = \begin{cases} P_{0j} = a_j, & \text{Si } j \geq 0, i = 0; \\ P_{ij} = a_{j-i+1}, & \text{Si } 1 \leq i \leq j + 1; \\ P_{ij} = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et la matrice des probabilités de transition prend la forme suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Où:

$$a_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f(x) dx.$$

Puisqu'on peut passer de chaque état à n'importe quel état, il s'agit donc d'une chaîne de Markov irréductible dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si  $\rho = \lambda/\mu < 1$ .

### Régime stationnaire:

Supposons que  $\rho < 1$  et soit  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ , où

$$\pi_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}r[X_n = k].$$

La distribution stationnaire  $\pi$  est la solution du système

$$\begin{cases} \pi = \pi P, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Sous forme développée le système (1.6) s'écrit:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 a_0 + \pi_1 a_0 \\ \pi_1 = \pi_0 a_1 + \pi_1 a_1 + \pi_2 a_0 \\ \vdots \\ \pi_k = \pi_0 a_k + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j a_{k-j+1} \\ \vdots \end{cases} \quad (1.7)$$

Afin de résoudre ce système, nous allons passer par la transformée en  $z$  avec  $z \in \mathbb{C}$ . On pose alors  $P(z)$  et  $V(z)$ , les transformées respectives des probabilités  $\pi_n$  et  $a_k$ :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k, \quad V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

En multipliant chacune des équations du système (1.7) par le terme  $z^k$  correspondant, on obtient le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_0 z^0 = \pi_0 a_0 z^0 + \pi_1 a_0 z^0 \\ \pi_1 z^1 = \pi_0 a_1 z^1 + \pi_1 a_1 z^1 + \pi_2 a_0 z^1 \\ \pi_2 z^2 = \pi_0 a_2 z^2 + \pi_1 a_2 z^2 + \pi_2 a_1 z^2 + \pi_3 a_0 z^2 \\ \pi_3 z^3 = \pi_0 a_3 z^3 + \pi_1 a_3 z^3 + \pi_2 a_2 z^3 + \pi_3 a_1 z^3 + \pi_4 a_0 z^3 \\ \vdots \\ \pi_k z^k = \pi_0 a_k z^k + z^k \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j a_{k-j+1} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (1.8)$$

On somme toutes les équations du système (1.8), on obtient:

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k \\ &= \pi_0 z^0 + \pi_1 z^1 + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \dots + \pi_k z^k + \dots \\ &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \pi_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \pi_2 z \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \pi_3 z^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \dots \\ &= \pi_0 V(z) + \pi_1 V(z) + \pi_2 z V(z) + \pi_3 z^2 V(z) + \dots \\ &= \pi_0 V(z) + V(z) [\pi_1 + \pi_2 z + \pi_3 z^2 + \dots] \\ &= \pi_0 V(z) + V(z) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^{k-1} - \frac{1}{z} \pi_0 \right] \\ &= \pi_0 V(z) + \frac{V(z)}{z} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k - \pi_0 \right] \\ &= \pi_0 V(z) + \frac{V(z)}{z} (P(z) - \pi_0) \\ &= \pi_0 V(z) + \frac{V(z)}{z} P(z) - \frac{V(z)}{z} \pi_0. \end{aligned}$$

Ainsi, on aura: 
$$P(z) - \frac{V(z)}{z}P(z) = \pi_0 V(z) - \frac{V(z)}{z}\pi_0,$$

Ce qui implique: 
$$\frac{z - V(z)}{z}P(z) = \frac{z - 1}{z}\pi_0 V(z).$$

Finalement, on obtient: 
$$P(z) = \frac{(1 - z)\pi_0 V(z)}{V(z) - z}.$$

Il reste à exprimer la distribution initiale  $\pi_0$ . Pour cela on applique la “règle de l’Hôpital” à  $P(z) = N(z)/D(z)$  où:

$$N(z) = \pi_0 V(z)(1 - z); \quad D(z) = V(z) - z.$$

Ainsi, on a:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{N(z) - N(1)}{D(z) - D(1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{N'(z)}{D'(z)}.$$

Comme on a  $N(1) = D(1) = 0$ , alors:

$$1 = P(1) = \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \frac{N'(1)}{D'(1)} = -\frac{\pi_0 V(1)}{V'(1) - 1}.$$

Or:

$$N'(z) = \pi_0 V'(z)(1 - z) - \pi_0 V(z),$$

$$D'(z) = V'(z) - 1,$$

$$V'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k z^{k-1}.$$

Donc:

$$\begin{aligned}
V'(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} \lambda x \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{-\lambda x} f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} \lambda x e^{\lambda x} e^{-\lambda x} f_X(x) dx \\
&= \lambda \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= \lambda m \\
&= \rho,
\end{aligned}$$

où:  $m = 1/\mu$  est la moyenne de la loi G.

D'où:  $\pi_0 = 1 - \rho$ .

La transformée  $P(z)$  en  $z$  des probabilités stationnaires  $\pi_n$  est connue sous le nom de la première formule de **Pollaczek - Khinchin**, s'exprime en fonction de  $V(z)$ , la transformée en  $z$  des probabilités  $a_k$  est donnée de la façon suivante:

$$P(z) = \frac{(1 - \rho)V(z)(1 - z)}{V(z) - z}. \quad (1.9)$$

La difficulté subsiste dans le passage par le calcul des probabilité  $a_k$ . Donc on souhaite relier  $P(z)$  à des quantités caractérisant la loi  $G$  car  $a_k$  font intervenir à la fois la distribution de la loi  $G$  et le taux d'arrivé  $\lambda$ . Ce là nous permet de relier directement  $P(z)$  à  $B(s)$  la transformée de Laplace de la fonction densité de probabilité  $f_X(t)$  de la loi de  $G$ :

$$B(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_X(t) dt.$$

$$\begin{aligned}
V(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_X(x) dx \right) z^k \\
&= \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} z^k \right) e^{-\lambda x} f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} \right) e^{-\lambda x} f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{\lambda x z} e^{-\lambda x} f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{\lambda x z - \lambda x} f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{(\lambda z - \lambda)x} f_X(x) dx \\
&= B(\lambda - \lambda z).
\end{aligned}$$

Donc  $P(z)$ , la transformée en  $z$  des probabilités stationnaires  $\pi_n$ , s'exprime en fonction de  $B(s)$ , la transformée de Laplace de la fonction densité de probabilité  $f_X(t)$  de la loi  $G$ , est donnée de la façon suivante:

$$P(z) = \frac{(1 - \rho)B(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{B(\lambda - \lambda z) - z}. \quad (1.10)$$

### Ergodicité:

La condition d'ergodicité provient directement de l'existence de la fonction génératrice  $P(z)$  sur  $|z| \leq 1$ , on a :

$$P(z) = \frac{\pi_0(1 - z)V(z)}{V(z) - z}.$$

Nous savons que:

$$1 = P(1) = \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \frac{-\pi_0 V'(1)}{V'(1) - 1} = \frac{-\pi_0}{\rho - 1}.$$

Mais quand la chaîne est ergodique  $\pi_0 > 0$  et donc:

$$\rho - 1 < 0 \Rightarrow \rho < 1. \quad (1.11)$$

D'où la condition (1.11) est nécessaire et suffisante pour l'ergodicité.

## Mesures de performance du système d'attente M/G/1

À l'aide des fonctions génératrices obtenues, nous pouvons calculer plusieurs mesures de performance.

### 1. Le nombre moyen de clients dans le système:

Le nombre moyen de clients est obtenu à partir de la dérivée de la transformée en  $z$  des probabilités  $\pi_n$ :

$$Q = P'(1).$$

Pour calculer  $Q$  on commence d'abord par le calcul de la dérivée de la transformée de Laplace:

On pose:  $s = \lambda - \lambda z$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dz}(\lambda - \lambda z) &= \frac{dB(\lambda - \lambda z)}{ds} \frac{ds}{dz} \\ &= \frac{dB(\lambda - \lambda z)}{d(\lambda - \lambda z)} \frac{d(\lambda - \lambda z)}{dz} \\ &= -\lambda B'(\lambda - \lambda z). \end{aligned}$$

On passe alors au calcul de la dérivée de la fonction génératrice:

$$\begin{aligned} P'(z) &= \frac{[-(1-\rho)\lambda B'(\lambda-\lambda z)(1-z) - (1-\rho)B(\lambda-\lambda z)](B(\lambda-\lambda z)-z)}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2} - \frac{(-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1)((1-\rho)B(\lambda-\lambda z)(1-z))}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2} \\ &= \frac{-(1-\rho)\lambda B'(\lambda-\lambda z)(1-z)}{B(\lambda-\lambda z)-z} + \frac{-(1-\rho)B(\lambda-\lambda z)^2 + (1-\rho)B(\lambda-\lambda z)z}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2} - \frac{[-\lambda B'(\lambda-\lambda z)(1-\rho)B(\lambda-\lambda z)(1-z)] + (1-\rho)B(\lambda-\lambda z)(1-z)}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2} \\ &= \frac{-(1-\rho)B(\lambda-\lambda z)^2[B(\lambda-\lambda z)-z]}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2} - \frac{(1-\rho)\lambda B'(\lambda-\lambda z)(1-z)}{B(\lambda-\lambda z)-z} - \frac{((1-\rho)B(\lambda-\lambda z)(1-z))(-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1)}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2} \\ &= -(1-\rho)\lambda B'(\lambda-\lambda z) \frac{(1-z)}{B(\lambda-\lambda z)-z} + (1-\rho)B(\lambda-\lambda z) \frac{-(B(\lambda-\lambda z)-z) - (1-z)(-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1)}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2}. \end{aligned}$$

On constate que pour calculer  $P'(1)$ , on tombe sur une indétermination pour les deux termes de la somme. On utilise alors « Règle de l'Hôpital » pour évaluer chacune des deux fractions.

Pour la première fraction:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{B(\lambda-\lambda z)-z} = \frac{-1}{-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1} \Big|_{z=1} = \frac{1}{\lambda B(0)+1}.$$

Pour la seconde fraction:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(B(\lambda - \lambda z) - z) - (1 - z)(-\lambda B'(\lambda - \lambda z) - 1)}{(B(\lambda - \lambda z) - z)^2} = \frac{-\lambda^2 B^{(2)}(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{2(-\lambda B'(\lambda - \lambda z) - 1)(B(\lambda - \lambda z) - z)} \Big|_{z=1}.$$

Il reste toujours une indétermination. Il faut appliquer la règle de l'Hôpital une seconde fois:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\lambda^2 B^{(2)}(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{2(-\lambda B'(\lambda - \lambda z) - 1)(B(\lambda - \lambda z) - z)} &= \frac{\lambda^2 B^{(2)}(\lambda - \lambda z) + \lambda^3 B^{(3)}(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{2(-\lambda B'(\lambda - \lambda z) - 1)^2 + 2\lambda^2 B^{(2)}(\lambda - \lambda z)(B(\lambda - \lambda z) - z)} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(-\lambda B'(0) - 1)^2 + 2\lambda^2 B^{(2)}(0)(B(0) - 1)}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de se rappeler que  $B$  est la transformée de Laplace de la variable aléatoire  $X$  décrivant la loi  $G$ . On a alors  $B(0) = 1$  et  $E[X^n] = (-1)^n B^{(n)}(0)$ .

On a également montré que:  $B(\lambda - \lambda z) = V(z)$ . En dérivant cette expression on aura:  $-\lambda B'(\lambda - \lambda z) = V'(z)$ .

On a vu que  $V'(1) = \rho$  qui implique:  $-\lambda B'(0) = \rho$ .

D'où:

$$\begin{aligned} Q &= P'(1) \\ &= -(1 - \rho)\lambda B'(0) \frac{1}{\lambda B(0) + 1} + \frac{(1 - \rho)B(0)\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(-\lambda B'(0) - 1)^2} \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{1}{1 - \rho} + \frac{(1 - \rho)\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(1 - \rho)^2} \\ &= \rho + \frac{\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(1 - \rho)} \\ &= \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1 - \rho)} \end{aligned}$$

Il suffit de trouver l'expression de  $E(X^2)$ :

Tant que:

$$m = E(X) = \frac{1}{\mu}, \quad m_2 = E(X^2), \quad CV^2 = \frac{m_2 - m^2}{m^2}$$

où:  $CV$  est le coefficient de variation.

Donc:

$$\begin{aligned}
 CV^2 &= \frac{E(X^2) - m^2}{m^2} \\
 CV^2 m^2 &= E(X^2) - m^2 \\
 E(X^2) &= CV^2 m^2 + m^2 \\
 E(X^2) &= m^2(CV^2 + 1) \\
 E(X^2) &= \frac{1}{\mu^2}(CV^2 + 1).
 \end{aligned}$$

Le nombre moyen de clients  $Q$  connue sous le nom de **la deuxième formule de Pollaczek-khinchin** est la suivante:

$$Q = \rho + \frac{\frac{\lambda^2}{\mu^2}(CV^2 + 1)}{2(1 - \rho)} = \rho + \frac{\rho^2(CV^2 + 1)}{2(1 - \rho)}. \quad (1.12)$$

**2. Le nombre moyen de clients dans la file:**

$$L_q = Q - \rho = \frac{\rho^2(CV^2 + 1)}{2(1 - \rho)}. \quad (1.13)$$

**3. Le temps moyen de séjour dans le système:**

$$W = \frac{Q}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left( \rho + \frac{\rho^2(CV^2 + 1)}{2(1 - \rho)} \right) = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda(CV^2 + 1)}{2\mu^2(1 - \rho)}. \quad (1.14)$$

**4. Le temps moyen de séjour dans la file:**

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\rho^2(CV^2 + 1)}{2(1 - \rho)} \right) = \frac{\lambda(CV^2 + 1)}{2\mu^2(1 - \rho)}. \quad (1.15)$$

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques résultats classiques concernant les systèmes de files d'attente. Particulièrement, nous avons présenté l'étude analytique des modèles d'attente à capacité infinie  $M/M/1$  et  $M/G/1$  classique, et leurs mesures de performance principales.

# 2

## Systeme M/G/1 avec pannes

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie de files d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant, dans plusieurs situations réelles, on rencontre souvent des cas où les serveurs sont sujets à des pannes aléatoires et, par conséquent, durant les périodes de réparation, le service des clients est interrompu. L'analyse de fonctionnement de ces systèmes est différente de celle des systèmes absolument fiables, où les serveurs ne tombent pas en panne durant les périodes de service. L'étude de tels système est certainement très importante pour les applications pratiques, car la fiabilité des serveurs a une influence abondante sur les caractéristiques du système étudié. Il existe plusieurs types de pannes de serveur dans un système de files d'attente et les plus rencontrés en littérature sont:

1. **Pannes de nature conservatrices [7]:**

Dès que la panne se produit, le service est interrompu, mais le client reste auprès du serveur et attend que ce dernier soit réparé. Après la réparation, le service reprend là où il a été interrompu.

2. **Pannes de nature non conservatrices [1]:**

Dans ce cas, la partie de service déjà acquise est détruite. Après la réparation de la panne, le service reprend à zéro.

3. **Pannes avec perte définitive de clients [14]:**

Dès que la panne se produit, le client quitte le système pour de bon.

#### 4. Pannes avec perte momentanée de clients [16]:

Dès que la panne se produit, le client quitte le serveur et entre en orbite. Par la suite, son comportement ne diffère en rien de celui des clients qui se trouvent déjà en orbite.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le système d'attente  $M/G/1$  non fiable, décrit par une chaîne de Markov induite représentant le nombre de clients dans le système juste après la fin de  $n$ -ième service ou la fin de la  $n$ -ième réparation. En utilisant la méthode de la fonction génératrice, nous obtenons plusieurs mesures de performance. De même, nous établissons la condition d'ergodicité de la chaîne de Markov décrivant l'état du système en question.

## 2.1 Système de files d'attente M/G/1 avec pannes

### 2.1.1 Description du modèle et position du problème

Considérons un système de files d'attente  $M/G/1$ , où le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Le flux des arrivées est poissonien de paramètre  $\lambda$ . La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition  $F_1(x)$  et de moyenne  $1/\mu_1$ . Supposons que la période de réparation est générale de taux  $1/\mu_0$  et de fonction de répartition  $F_0(x)$ . La capacité de la file d'attente est infinie et la discipline du service est *FIFO*.

Dans ce système, nous considérons les pannes avec perte définitive de client (c'est la nature de panne de serveur). Supposons que le client quitte le système définitivement avec une probabilité  $(1 - \theta)$  lorsque le serveur est tombé en panne. Sinon, il est pris en charge par le serveur avec une probabilité  $\theta > 0$  [12].

L'état de ce système en un instant  $t$ , peut-être décrit par le processus stochastique suivant :

$$E_t = \{N_t, X_t, Y_t; t \geq 0\}$$

où

$N_t$ : " est le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  " ,

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est en bon état;} \\ 1 & \text{si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

$Y_t$ : " est une variable aléatoire ", définie comme suit:

- Si  $X_t = 0$  et  $N_t = 0$ , alors  $Y_t$  est la durée du temps qui s'écoule entre l'instant  $t$  et l'instant d'occurrence d'une panne tout en ayant le système vide;

- Si  $N_t \neq 0$ 
  - Si  $X_t = 0$ ,  $Y_t$  est la durée du temps restante de service (la durée résiduelle de service);
  - Si  $X_t = 1$ ,  $Y_t$  est la durée du temps restante de réparation (la durée du résiduelle de réparation).

En raison de notre hypothèse que les pannes se produisent indépendamment de tout le reste, donc la matrice de transition s'écrit sous la forme suivante:

$$P = \theta P_1 + (1 - \theta)P_0,$$

avec:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \beta_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Où:

$$\alpha_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_1(x) dx; \quad \beta_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_0(x) dx.$$

Cette chaîne de Markov est clairement irréductible et apériodique. Tous ses états sont récurrents non nuls, donc le vecteur  $\pi$  des probabilités stationnaires existe et est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \pi = \pi P, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Afin de résoudre ce système, nous allons passer par la transformée en  $z$  avec  $z \in \mathbb{C}$ . On pose alors  $P(z)$ ,  $V_1(z)$  et  $V_0(z)$  les transformées respectivement des probabilités  $\pi_n$ ,  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k, \quad V_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad V_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k.$$

### 2.1.2 Calcul sous forme développée

On obtient le système suivant en multipliant chacune des équations du système (2.1) par le terme  $z^k$  correspondant,

$$\begin{cases} \pi_0 z^0 = \theta(\pi_0 \alpha_0 + \pi_1 \alpha_0) z^0 + (1 - \theta)(\pi_0 \beta_0 + \pi_1 \beta_0) z^0 \\ \pi_1 z^1 = \theta(\pi_0 \alpha_1 + \pi_1 \alpha_1 + \pi_2 \alpha_0) z^1 + (1 - \theta)(\pi_0 \beta_1 + \pi_1 \beta_1 + \pi_2 \beta_0) z^1 \\ \vdots \\ \pi_k z^k = \theta(\pi_0 \alpha_k + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j \alpha_{k-j+1}) z^k + (1 - \theta)(\pi_0 \beta_k + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j \beta_{k-j+1}) z^k \\ \vdots \end{cases}$$

En sommant les équations de système précédant, on obtient:

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k \\ &= z^0 \pi_0 + z^1 \pi_1 + \dots + z^k \pi_k + \dots \\ &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (\theta \alpha_k + (1 - \theta) \beta_k) z^k + \pi_1 \sum_{k=0}^{\infty} (\theta \alpha_k + (1 - \theta) \beta_k) z^k + \pi_2 z \sum_{k=0}^{\infty} (\theta \alpha_k + (1 - \theta) \beta_k) z^k + \dots \end{aligned}$$

On pose:

$$\begin{aligned} V(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\theta \alpha_k + (1 - \theta) \beta_k) z^k \\ &= \theta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k + (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \\ &= \theta V_1(z) + (1 - \theta) V_0(z). \end{aligned}$$

On aura:

$$\begin{aligned} P(z) &= \pi_0 V(z) + \pi_1 V(z) + \pi_2 z V(z) + \pi_3 z^2 V(z) + \dots \\ &= \pi_0 V(z) + V(z) (\pi_1 + \pi_2 z + \pi_3 z^2 + \dots) \\ &= \pi_0 V(z) + V(z) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^{k-1} - \frac{1}{z} \pi_0 \right) \\ &= \pi_0 V(z) + \frac{V(z)}{z} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k - \pi_0 \right) \\ &= \pi_0 V(z) + \frac{V(z)}{z} (P(z) - \pi_0) \\ &= \pi_0 V(z) + \frac{V(z)}{z} P(z) - \frac{V(z)}{z} \pi_0, \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
P(z) - \frac{V(z)}{z}P(z) &= \pi_0 V(z) - \frac{1}{z}V(z)\pi_0 \\
\frac{z - V(z)}{z}P(z) &= \frac{z - 1}{z}\pi_0 V(z) \\
P(z) &= \frac{(1 - z)\pi_0 V(z)}{V(z) - z} \\
P(z) &= \frac{\theta(1 - z)\pi_0 V_1(z)}{V(z) - z} + \frac{(1 - \theta)(1 - z)\pi_0 V_0(z)}{V(z) - z}
\end{aligned}$$

Finalement, on aura:

$$P(z) = \theta P_1(z) + (1 - \theta)P_0(z).$$

Où:

$$P_1(z) = \frac{(1 - z)\pi_0 V_1(z)}{V(z) - z}, \quad P_0(z) = \frac{(1 - z)\pi_0 V_0(z)}{V(z) - z}.$$

Pour exprimer la distribution initiale  $\pi_0$ , on applique “la règle de l’hôpital” à  $P(z) = N(z)/D(z)$ , où:

$$N(z) = \pi_0 V(z)(1 - z); \quad D(z) = V(z) - z.$$

Leurs dérivés données comme suit:

$$N'(z) = \pi_0 V'(z)(1 - z) - \pi_0 V(z); \quad D'(z) = V'(z) - 1.$$

Alors:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{N(z) - N(1)}{D(z) - D(1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{N'(z)}{D'(z)}.$$

Comme on a  $N(1) = D(1) = 0$ , donc :

$$1 = P(1) = \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \frac{N'(1)}{D'(1)} = -\frac{\pi_0 V(1)}{V'(1) - 1}.$$

Or:

$$\begin{aligned}
V'(1) &= \theta V_1'(1) + (1 - \theta) V_0'(1) \\
&= \theta \sum_{k=0}^{\infty} k \alpha_k + (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} k \beta_k \\
&= \theta \sum_{k=0}^{\infty} k \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} f_1(x) dx \right) + (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} k \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} f_0(x) dx \right) \\
&= \theta \int_0^{\infty} \lambda x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{-\lambda x} f_1(x) dx + (1 - \theta) \int_0^{\infty} \lambda x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{-\lambda x} f_0(x) dx \\
&= \theta \int_0^{\infty} \lambda x e^{\lambda x} e^{-\lambda x} f_1(x) dx + (1 - \theta) \int_0^{\infty} \lambda x e^{\lambda x} e^{-\lambda x} f_0(x) dx \\
&= \theta \lambda \int_0^{\infty} x f_1(x) dx + (1 - \theta) \lambda \int_0^{\infty} x f_0(x) dx \\
&= \theta \lambda E_1(X) + (1 - \theta) \lambda E_0(X) \\
&= \theta \lambda m_1 + (1 - \theta) \lambda m_0 \\
&= \theta \rho_1 + (1 - \theta) \rho_0
\end{aligned}$$

Avec:

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \quad \text{et} \quad \rho_0 = \frac{\lambda}{\mu_0}.$$

On en déduit  $\pi_0 = 1 - \theta \rho_1 - (1 - \theta) \rho_0$ .

D'où la transformé en  $z$  des probabilités stationnaires  $\pi_n$  aura la forme suivante:

$$P(z) = \frac{(1 - z)(1 - \theta \rho_1 - (1 - \theta) \rho_0) V(z)}{V(z) - z}. \quad (2.2)$$

$P(z)$  est la transformé en  $z$  des probabilités stationnaires  $\pi_n$ , elle s'exprime en fonction de  $B_1(s)$  et  $B_0(s)$  les transformées de Laplace des fonctions de densité de probabilité  $f_1(x)$  et  $f_0(x)$  respectivement.

$$\begin{aligned}
V(z) &= \theta V_1(z) + (1 - \theta)V_0(z) \\
&= \theta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k + (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \\
&= \theta \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} f_1(x) dx \right) + (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left( \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} f_0(x) dx \right) \\
&= \theta \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} \right) e^{-\lambda x} f_1(x) dx + (1 - \theta) \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} \right) e^{-\lambda x} f_0(x) dx \\
&= \theta \int_0^{\infty} e^{\lambda x z} e^{-\lambda x} f_1(x) dx + (1 - \theta) \int_0^{\infty} e^{\lambda x z} e^{-\lambda x} f_0(x) dx \\
&= \theta \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)x} f_1(x) dx + (1 - \theta) \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)x} f_0(x) dx \\
&= \theta B_1(\lambda - \lambda z) + (1 - \theta) B_0(\lambda - \lambda z).
\end{aligned}$$

Ainsi, on remplace  $V(z)$  dans l'expression (2.2), et on aura :

$$P(z) = \frac{(1 - z)(1 - \theta\rho_1 - (1 - \theta)\rho_0)(\theta B_1(\lambda - \lambda z) + (1 - \theta)B_0(\lambda - \lambda z))}{(\theta B_1(\lambda - \lambda z) + (1 - \theta)B_0(\lambda - \lambda z)) - z}. \quad (2.3)$$

### 2.1.3 Ergodicité

Puisque la fonction génératrice  $P(z)$  sur  $|z| \leq 1$  existe, on peut directement extraire la condition d'ergodicité.

On a :

$$P(z) = \frac{\theta(1 - z)\pi_0 V_1(z) + (1 - \theta)(1 - z)\pi_0 V_0(z)}{\theta V_1(z) + (1 - \theta)V_0(z) - z}.$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned}
1 = P(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \frac{-\pi_0(\theta V_1(1) + (1 - \theta)V_0(1))}{\theta V_1'(1) + (1 - \theta)V_0'(1) - 1} \\
&= \frac{-\pi_0}{\theta\rho_1 + (1 - \theta)\rho_0 - 1}.
\end{aligned}$$

Quand la chaîne est ergodique  $\pi_0 > 0$  et donc :

$$\theta\rho_1 + (1 - \theta)\rho_0 - 1 < 0 \Rightarrow \theta\rho_1 + (1 - \theta)\rho_0 < 1. \quad (2.4)$$

D'où la condition (2.4) est nécessaire et suffisante pour l'ergodicité.

## 2.1.4 Mesures de performance

À l'aide des fonctions génératrices obtenues, nous pouvons calculer plusieurs mesures de performance.

### 1. Le nombre moyen de clients dans le système:

On obtient le nombre moyen de clients à partir de la dérivée de la transformée en  $z$  des probabilités  $\pi_n$ ,

$$Q = P'(1).$$

On note:

$$\rho = \theta\rho_1 + (1 - \theta)\rho_0 \quad \text{et} \quad B(\lambda - \lambda z) = \theta B_1(\lambda - \lambda z) + (1 - \theta)B_0(\lambda - \lambda z).$$

Pour calculer  $Q$ , on commence d'abord par le calcul de la dérivée de la transformée de Laplace,

$$\frac{dB}{dz}(\lambda - \lambda z) = \theta \frac{dB_1}{dz}(\lambda - \lambda z) + (1 - \theta) \frac{dB_0}{dz}(\lambda - \lambda z).$$

On pose:  $s = \lambda - \lambda z$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dz}(\lambda - \lambda z) &= \theta \frac{dB_1(\lambda - \lambda z)}{ds} \frac{ds}{dz} + (1 - \theta) \frac{dB_0(\lambda - \lambda z)}{ds} \frac{ds}{dz} \\ &= -\lambda \theta B_1'(\lambda - \lambda z) - \lambda(1 - \theta) B_0'(\lambda - \lambda z) \\ &= -\lambda [\theta B_1'(\lambda - \lambda z) + (1 - \theta) B_0'(\lambda - \lambda z)] \\ &= -\lambda B'(\lambda - \lambda z). \end{aligned}$$

On passe alors au calcul de la dérivée de la fonction génératrice:

$$P'(z) = -(1-\rho)\lambda B'(\lambda-\lambda z) \frac{(1-z)}{B(\lambda-\lambda z)-z} + (1-\rho)B(\lambda-\lambda z) \frac{-(B(\lambda-\lambda z)-z) - (1-z)(-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1)}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2}.$$

On constate que pour calculer  $P'(1)$ , on aura une indétermination pour les deux termes de la somme. On utilise alors « la règle de l'hôpital » pour évaluer chacune des deux fractions.

Pour la première fraction:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{B(\lambda-\lambda z)-z} = \frac{-1}{-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1} \Big|_{z=1} = \frac{1}{\lambda B'(0)+1}.$$

Pour la seconde fraction:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(B(\lambda-\lambda z)-z) - (1-z)(-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1)}{(B(\lambda-\lambda z)-z)^2} = \frac{-\lambda^2 B^{(2)}(\lambda-\lambda z)(1-z)}{2(-\lambda B'(\lambda-\lambda z)-1)(B(\lambda-\lambda z)-z)} \Big|_{z=1}.$$

Il reste toujours une indétermination. Il faut appliquer la règle de l'hôpital une seconde fois:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\lambda^2 B^{(2)}(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{2(-\lambda B'(\lambda - \lambda z) - 1)(B(\lambda - \lambda z) - z)} &= \frac{\lambda^2 B^{(2)}(\lambda - \lambda z) + \lambda^3 B^{(3)}(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{2(-\lambda B'(\lambda - \lambda z) - 1)^2 + 2\lambda^2 B^{(2)}(\lambda - \lambda z)(B(\lambda - \lambda z) - z)} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(-\lambda B'(0) - 1)^2 + 2\lambda^2 B^{(2)}(0)(B(0) - 1)} \\ &= \frac{\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(-\lambda B'(0) - 1)^2}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de se rappeler que  $B(\lambda - \lambda z)$  est la transformée de Laplace de la variable aléatoire  $X$  décrivant la loi  $G$ . On a alors  $B(0) = 1$  et  $E[X^n] = (-1)^n B^{(n)}(0)$ .

On a également montré que:

$$B(\lambda - \lambda z) = V(z).$$

En dérivant cette expression, on aura:

$$-\lambda B'(\lambda - \lambda z) = V'(z).$$

On a vu que  $V'(1) = \rho$ , ce qui implique :

$$-\lambda B'(0) = \rho.$$

D'où:

$$\begin{aligned} Q &= P'(1) \\ &= -(1 - \rho)\lambda B'(0) \frac{1}{\lambda B'(0) + 1} + \frac{(1 - \rho)B(0)\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(-\lambda B'(0) - 1)^2} \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{1}{1 - \rho} + \frac{(1 - \rho)\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(1 - \rho)^2} \\ &= \rho + \frac{\lambda^2 B^{(2)}(0)}{2(1 - \rho)} \\ &= \rho + \frac{\theta \lambda^2 B_1^{(2)}(0) + (1 - \theta)\lambda^2 B_0^{(2)}(0)}{2(1 - \rho)} \\ &= \rho + \theta \frac{\lambda^2 E_1[X^2]}{2(1 - \rho)} + (1 - \theta) \frac{\lambda^2 E_0[X^2]}{2(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

Sachant que:

$$E_1[X^2] = \frac{1}{\mu_1^2}(CV_1^2 + 1) \quad \text{et} \quad E_0[X^2] = \frac{1}{\mu_0^2}(CV_0^2 + 1).$$

Ainsi, l'expression finale de nombre moyen de clients est la suivante:

$$Q = \rho + \frac{\theta\rho_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\rho_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}. \quad (2.5)$$

**2. Le nombre moyen de clients dans la file:**

$$L_q = Q - \rho = Q - \theta\rho_1 - (1 - \theta)\rho_2 = \frac{\theta\rho_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\rho_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}. \quad (2.6)$$

**3. Le temps moyen de séjour dans le système:**

$$W = \frac{Q}{\lambda} = \theta m_1 + (1 - \theta)m_0 + \frac{\theta\lambda m_1(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\lambda m_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}. \quad (2.7)$$

**4. Le temps moyen de séjour dans la file:**

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\theta\lambda m_1(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)\lambda m_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}. \quad (2.8)$$

**Remarque 2.1.**

Pour  $\theta = 1$ , on obtient les mêmes résultats analytiques (voir (1.9), (1.10), (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15)) associés au modèle d'attente classique  $M/G/1$ .

## 2.2 Système de files d'attente $M/G/1$ avec pannes répétitives

### 2.2.1 Description du modèle et position du problème

Dans cette section, nous considérons une variante du modèle précédent, où nous supposons que le serveur après sa réparation peut tomber en pannes juste après sa mise en marche. Considérons un système de files d'attente  $M/G/1$ , où le serveur est sujet à  $k$ -pannes aléatoires répétitives. Le flux des arrivées est poissonien de paramètre  $\lambda$ . La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition  $F_1(x)$  et de moyenne  $1/\mu_1$ . Supposons que la période de réparation est générale de taux  $1/\mu_0$  et de fonction de répartition  $F_0(x)$ . La capacité de la file d'attente est infinie et la discipline du service est *FIFO*.

Dans ce système, nous considérons les pannes avec perte définitive de client. Supposons que le client quitte le système définitivement avec une probabilité  $(1 - \theta)^k$  lorsque le serveur est tombé en panne. Sinon, il est pris en charge par le serveur avec une probabilité  $(1 - (1 - \theta)^k) > 0$ . Le paramètre  $k$  étant le nombre maximal de réparations du serveur. Dans ce sens, après  $k$  réparations consécutives, le serveur est considéré totalement défectueux, et il nécessite son remplacement avec un nouveau serveur. Ce type de situation peut être rencontrer dans la modélisation des systèmes de production.

La matrice de transition s'écrit sous la forme suivante:

$$P = \theta \sum_{i=0}^{k-1} (1-\theta)^i P_1 + (1-\theta)^k P_0$$

On remarque que  $\sum_{i=1}^{k-1} (1-\theta)^i$  est une somme géométrique de raison  $(1-\theta)$  donc la matrice  $P$  peut s'écrire à nouveau comme suit:

$$P = (1 - (1-\theta)^k) P_1 + (1-\theta)^k P_0.$$

Avec:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \beta_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Où:

$$\alpha_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_1(x) dx; \quad \beta_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_0(x) dx.$$

Cette chaîne de Markov est clairement irréductible et apériodique. Tous ses états sont récurrents non nuls donc le vecteur  $\pi$  des probabilités stationnaires existe et est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \pi = \pi P, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Afin de résoudre ce système, nous allons passer par la transformée en  $z$  avec  $z \in \mathbb{C}$ . On pose alors  $P(z)$ ,  $V_1(z)$  et  $V_0(z)$  les transformées respectivement des probabilités  $\pi_n$ ,  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k, \quad V_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad V_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k.$$

## 2.2.2 Calcul sous forme développée

En multipliant chacune des équations du système (2.9), par le terme  $z^k$  correspondant, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_0 z^0 = (1 - (1 - \theta)^k)(\pi_0 \alpha_0 + \pi_1 \alpha_0)z^0 + (1 - \theta)^k(\pi_0 \beta_0 + \pi_1 \beta_0)z^0 \\ \pi_1 z^1 = (1 - (1 - \theta)^k)(\pi_0 \alpha_1 + \pi_1 \alpha_1 + \pi_2 \alpha_0)z^1 + (1 - \theta)^k(\pi_0 \beta_1 + \pi_1 \beta_1 + \pi_2 \beta_0)z^1 \\ \vdots \\ \pi_k z^k = (1 - (1 - \theta)^k)(\pi_0 \alpha_k + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j \alpha_{k-j+1})z^k + (1 - \theta)^k(\pi_0 \beta_k + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j \beta_{k-j+1})z^k \\ \vdots \end{array} \right.$$

En sommant les équations de système précédant, on obtient:

$$P(z) = \frac{(1 - z)\pi_0 V(z)}{V(z) - z}. \quad (2.10)$$

Avec:

$$\begin{aligned} V(z) &= (1 - (1 - \theta)^k)V_1(z) + (1 - \theta)^k V_0(z), \\ \pi_0 &= 1 - \rho = 1 - [(1 - (1 - \theta)^k)\rho_1 + (1 - \theta)^k \rho_0]. \end{aligned}$$

D'où la transformé en  $z$  des probabilités stationnaires  $\pi_n$  (2.10) aura la forme suivante:

$$\begin{aligned} P(z) &= (1 - (1 - \theta)^k) \frac{(1 - z)\pi_0 V_1(z)}{V(z) - z} + (1 - \theta)^k \frac{(1 - z)\pi_0 V_0(z)}{V(z) - z} \\ &= (1 - (1 - \theta)^k)P_1(z) + (1 - \theta)^k P_0(z). \end{aligned}$$

La quantité  $P(z)$  peut s'exprimer en fonction de  $B_1(s)$  et  $B_0(s)$ , qui sont les transformées de Laplace des fonctions de densité de probabilité  $f_1(x)$  et  $f_0(x)$ , respectivement.

$$P(z) = \frac{\pi_0 B(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{B(\lambda - \lambda z) - z}.$$

Avec:  $B(\lambda - \lambda z) = (1 - (1 - \theta)^k)B_1(\lambda - \lambda z) + (1 - \theta)^k B_0(\lambda - \lambda z)$ .

### 2.2.3 Ergodicité

La condition d'ergodicité provient directement de l'existence de la fonction génératrice  $P(z)$  sur  $|z| \leq 1$ , on a:

$$P(z) = \frac{(1 - z)\pi_0 [(1 - (1 - \theta)^k)V_1(z) + (1 - \theta)^k V_0(z)]}{(1 - (1 - \theta)^k)V_1(z) + (1 - \theta)^k V_0(z) - z}.$$

Nous savons que:

$$1 = \lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \frac{-\pi_0[(1 - (1 - \theta)^k)V_1(1) + (1 - \theta)^k V_0(1)]}{(1 - (1 - \theta)^k)V_1'(1) + (1 - \theta)^k V_0'(1) - 1}$$

$$= \frac{-\pi_0}{(1 - (1 - \theta)^k)\rho_1 + (1 - \theta)^k \rho_0 - 1}.$$

Mais quand la chaîne est ergodique  $\pi_0 > 0$  et donc:

$$(1 - (1 - \theta)^k)\rho_1 + (1 - \theta)^k \rho_0 - 1 < 0 \Rightarrow (1 - (1 - \theta)^k)\rho_1 + (1 - \theta)^k \rho_0 < 1. \quad (2.11)$$

D'où la condition (2.11) est nécessaire et suffisante pour l'ergodicité.

## 2.2.4 Mesures de performance

À l'aide des fonctions génératrices obtenues, nous pouvons calculer plusieurs mesures de performance.

### 1. Le nombre moyen de client dans le système:

$$Q = \rho + \frac{(1 - (1 - \theta)^k)\rho_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)^k \rho_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}.$$

### 2. Le nombre moyen de client dans la file:

$$L_q = \frac{(1 - (1 - \theta)^k)\rho_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)^k \rho_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}.$$

### 3. Le temps moyen de séjour dans le système:

$$W = (1 - (1 - \theta)^k)m_1 + (1 - \theta)^k m_0 + \frac{(1 - (1 - \theta)^k)\lambda m_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)^k \lambda m_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}.$$

### 4. Le temps moyen de séjour dans la file:

$$W_q = \frac{(1 - (1 - \theta)^k)\lambda m_1^2(CV_1^2 + 1) + (1 - \theta)^k \lambda m_0^2(CV_0^2 + 1)}{2(1 - \rho)}.$$

## Remarque 2.2.

- ✓ Pour  $\theta = 1$  et  $\forall k > 0$ , on obtient les mêmes résultats analytiques (voir (1.9), (1.10), (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15)) associés au modèle d'attente classique  $M/G/1$ .
- ✓ Pour  $k = 1$  et  $\forall \theta \in [0, 1]$ , on obtient les mêmes résultats analytiques (voir (2.2), (2.3), (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8)) associés au modèle d'attente  $M/G/1$  avec panne .

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode de la fonction génératrice pour étudier le système de files d'attente  $M/G/1$  non fiable. Nous avons considéré deux variantes de ce modèle d'attente, et nous avons obtenus plusieurs mesures de performance, ainsi que la condition d'ergodicité relative pour chaque modèle.

# 3

## Analyse de sensibilité des mesures de performance du système d'attente M/G/1 non fiable

Dans un système de file d'attente quand le serveur tombe en panne le client a le choix entre attendre la fin de réparation du serveur afin d'être servi, ou bien de quitter le système. Dans le chapitre précédent, nous avons considéré le système de file d'attente M/G/1 non fiable avec perte définitive de client, c-à-d dès que le serveur tombe en panne le client en cours de service quitte le système définitivement. Notre objectif est d'étudier le comportement de mesures de performance de ce système par rapport à quelque paramètre de perturbation par exemple le taux de panne.

### 3.1 Calcul numérique

Le calcul numérique de certaines performances du modèle d'attente M/G/1 non fiable est réalisé à l'aide de logiciel Matlab. Les différents résultats obtenus sont présentés dans des figures. Ainsi, nous avons considéré quatre types de distributions du processus de service à savoir :

1. Déterministe ( $D$ );
2. Exponentiel ( $M$ );
3. Hyper-exponentiel ( $H_2$ );
4. Erlang ( $E_2$ ).

En effet, pour ces distributions spécifiques du processus de service, nous obtenons différents coefficients de variation (CV) [15].

1. Déterministe : Le processus de service déterministe a le coefficient de variation  $CV = 0$ ;
2. Exponentiel : Le processus de service exponentiel a le coefficient de variation  $CV = 1$ . La fonction de densité de distribution M est définie comme suit :

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

3. Hyper-exponentiel : Le processus hyper-exponentiel a le coefficient de variation  $CV \geq 1$ . Dans notre cas, nous supposons que la fonction de densité de la distribution  $H_2$  est définie comme suit:

$$f(x) = q\mu_1 e^{-\mu_1 x} + (1 - q)\mu_2 e^{-\mu_2 x}, \quad x \geq 0,$$

Où  $0 \leq q \leq 1$  et  $\mu^{-1} = q\mu_1^{-1} + (1 - q)\mu_2^{-1}$ .

En modifiant les valeur du paramètre  $q$ , on peut obtenir différentes valeurs de  $CV$ . Le coefficient de variation,  $CV$ , correspondant à cette distribution est donné par:

$$CV = \sqrt{\frac{1 + (2q - 1)^2}{1 - (2q - 1)^2}}.$$

4. Erlang : Les valeurs du coefficient de variation de la lois d'Erlang d'ordre deux varient entre  $1/\sqrt{2}$  et 1. Ce processus est généralisé en deux étapes:
  - Si  $\mu_1 \neq \mu_2$  alors la fonction de densité correspondante à cette distribution est donnée par:

$$f(x) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 x} - e^{-\mu_2 x})}{\mu_1 - \mu_2}, \quad x \geq 0.$$

- Si  $\mu_1 = \mu_2 = 2\mu$  alors la fonction de densité correspondante à cette distribution est donnée par:

$$f(x) = (2\mu)^2 x e^{-2\mu x}, \quad x \geq 0.$$

Le faite que  $\mu^{-1} = \mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}$ , si la valeur de  $\mu_1$  change on peut obtenir la valeur de  $\mu_2$ .

Ainsi, le coefficient de variation de cette distribution est donné par:

$$CV = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}}.$$

Dans ce qui suit, on fixe la loi de réparation à une loi exponentielle de paramètre  $\mu = 3$  et le taux des arrivées  $\lambda = 2$ . Concernant la loi de temps de service, on a choisi les quatre modèles suivants:

- Déterministe du paramètre  $d = \frac{7}{16}$ .
- Exponentielle du paramètre  $\mu = \frac{2}{5}$ .
- Hyperexponentielle-2 du paramètre  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2$  et de  $CV = 2$ .
- Erlang-2 du paramètre  $\mu = \frac{9}{8}$ , ayant un coefficient de variation  $CV = \sqrt{2}$ .

### 3.2 Analyse de sensibilité de performances du système de files d'attente M/G/1 avec pannes

#### 1. L'effet de la probabilité d'occurrence de pannes $\theta$ sur $Q$ et $W$ :

On fait varier la probabilité d'occurrence de pannes  $\theta$  afin de voir la variation de nombre moyen et le temps moyen de séjour des clients dans le système selon les quatre types de distributions du processus de service considérés précédemment.

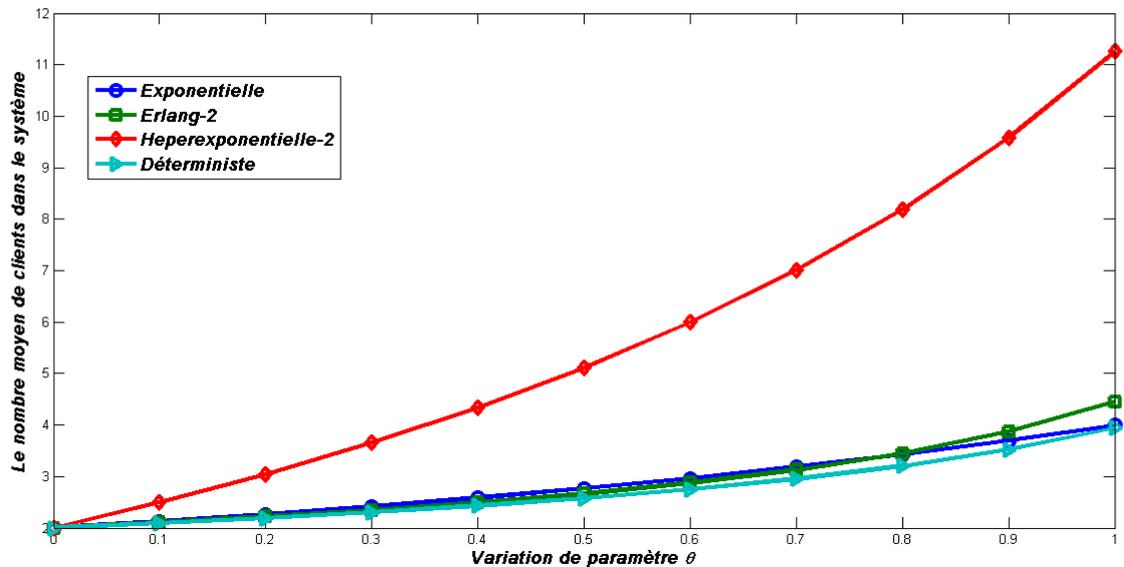


FIG. 3.1 – Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de  $\theta$ .

La figure (3.1) illustre le nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation de la probabilité  $\theta$ .

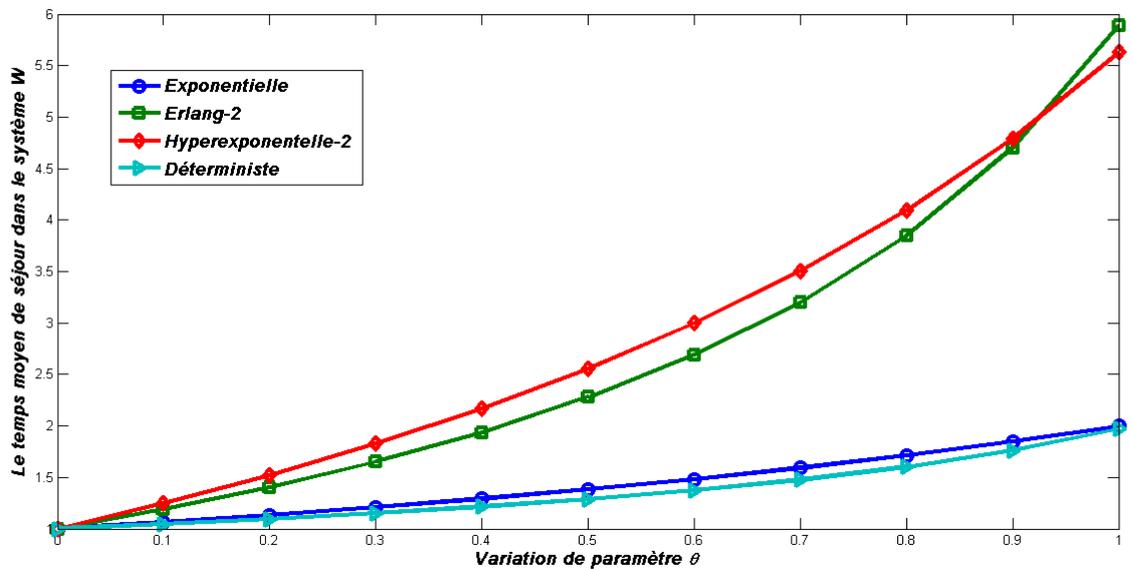


FIG. 3.2 – Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de  $\theta$ .

La figure (3.2) illustre le temps moyen de séjour des clients dans le système par rapport à la variation de la probabilité  $\theta$ .

### Commentaire:

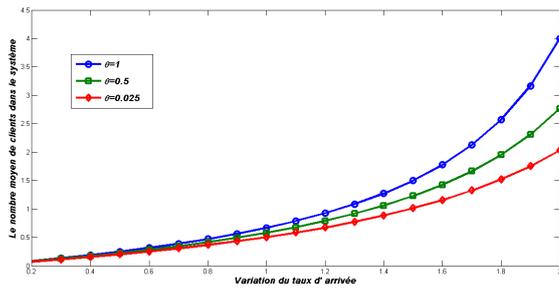
On remarque que l'augmentation de la valeur de la probabilité  $\theta$  induit une augmentation de nombre moyen et le temps moyen de séjour des clients dans le système quelque soit le type de distributions du processus de service.

## 2. L'effet du taux d'arrivée $\lambda$ sur $Q$ :

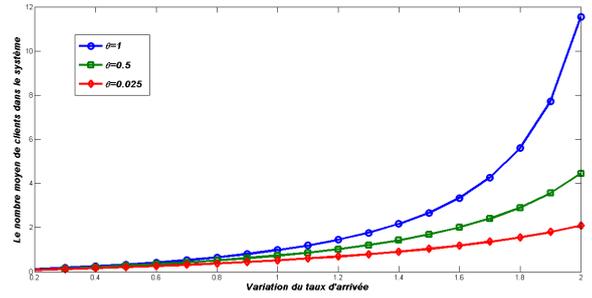
On fait varier le taux d'arrivée  $\lambda$  afin de voir la variation de nombre moyen de clients dans le système.

La figure (3.3) illustre le nombre moyen de clients dans le système par rapport à la variation du taux d'arrivée  $\lambda$  pour différentes valeurs de  $\theta$  des quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes correspondantes aux valeurs de  $\theta$  fixées à 1, 0.5 et 0.025 .

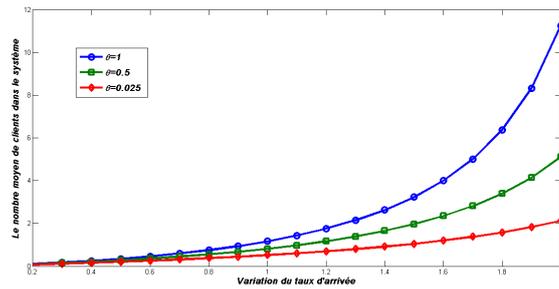
Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux d'arrivée sur le nombre moyen de clients dans le système ( $Q$ ).



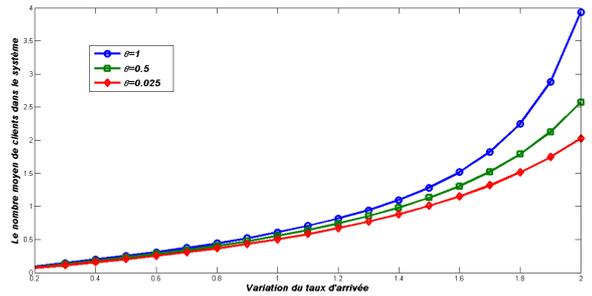
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

FIG. 3.3 – *Variation du nombre moyen de clients dans le système en fonction de  $\lambda$ .*

**Commentaire:**

On observe le même comportement pour les trois cas de valeurs de  $\theta$  et les quatre types de distributions. Plus précisément:

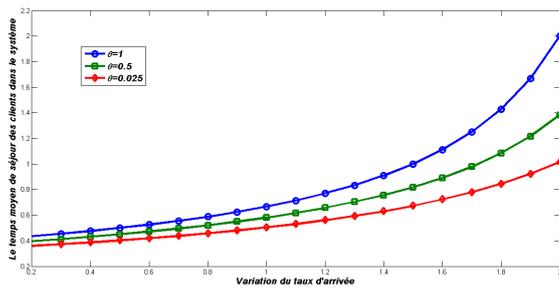
- L'augmentation de  $\lambda$  induit l'augmentation de nombre moyen de clients dans le système.
- De plus en plus le serveur est fiable, le nombre moyen de clients dans le système est plus élevé.

**3. L'effet du taux d'arrivée  $\lambda$  sur  $W$ :**

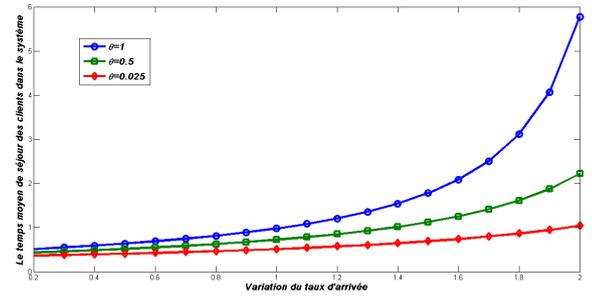
On fait varier le taux d'arrivée  $\lambda$  afin de voir la variation de temps moyen de séjour des clients dans le système.

La figure (3.4) illustre le temps moyen de séjour des clients dans le système par rapport au changement des valeurs de taux d'arrivée  $\lambda$  avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes relatives aux valeurs prises de  $\theta$ : 1, 0.5 et 0.025 .

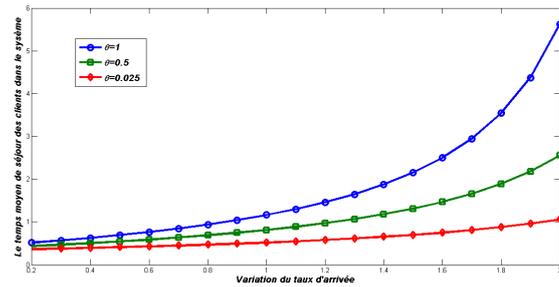
Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux d'arrivée sur le temps moyen de séjour des clients dans le système ( $W$ ).



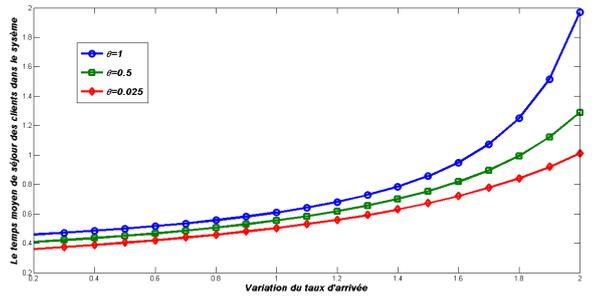
(a) Loi exponentielle.



(b) Loi d'Erlang-2.



(c) Loi hyperexponentielle-2.



(d) Loi déterministe.

FIG. 3.4 – Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de  $\lambda$ .

**Commentaire:**

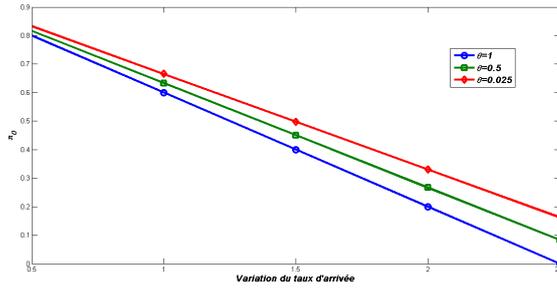
- L'augmentation de  $\lambda$  induit l'augmentation de temps moyen de séjour des clients dans le système.
- De plus en plus le serveur est fiable, le temps moyen de séjour des clients dans le système est plus élevé.

**4. L'effet du taux d'arrivée  $\lambda$  sur la probabilité  $\pi_0$ :**

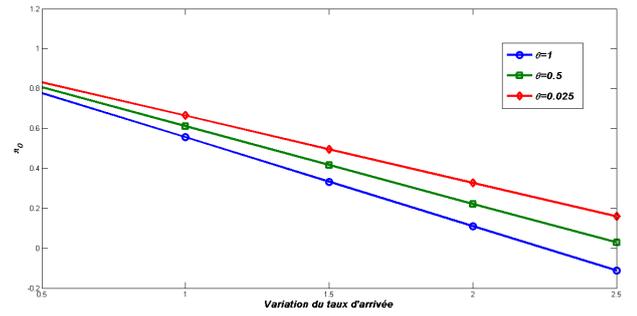
On fait varier le taux d'arrivée  $\lambda$  afin de voir la variation de la probabilité  $\pi_0$ .

La figure (3.5) illustre la probabilité  $\pi_0$  par rapport au taux d'arrivée  $\lambda$  avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est fixé à 1, 0.5 et 0.025 .

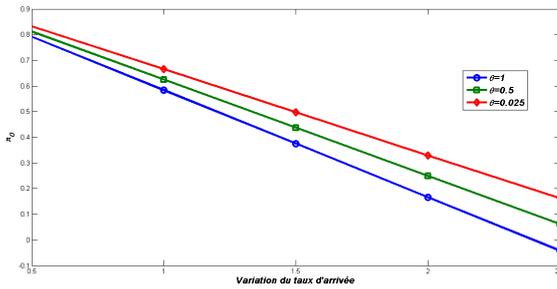
Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux d'arrivée  $\lambda$  sur la probabilité  $\pi_0$  .



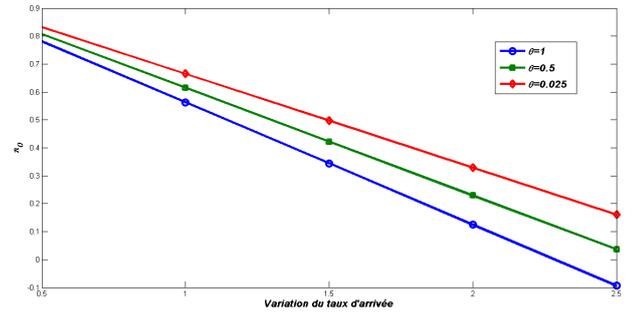
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

FIG. 3.5 – *Variation de probabilité  $\pi_0$  en fonction du taux d'arrivée  $\lambda$ .*

### Commentaire:

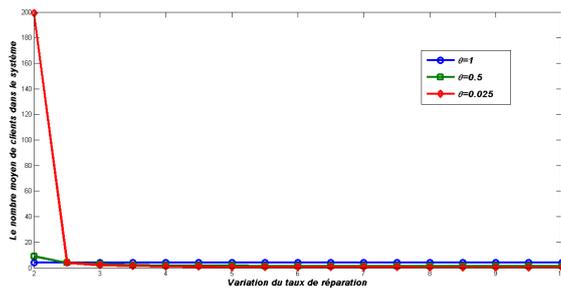
On observe le même comportement dans les trois courbes pour les quatre distributions, où la probabilité  $\pi_0$  décroît avec l'augmentation de  $\lambda$ .

## 5. L'effet du taux de réparation $\mu_0$ sur $Q$ :

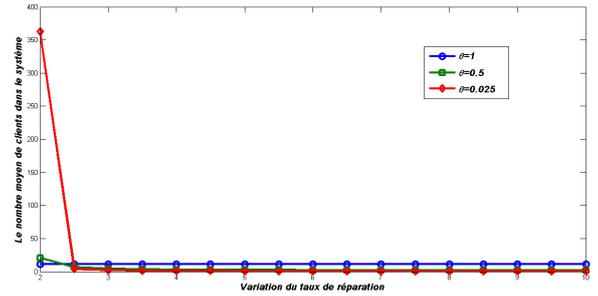
On fait varier le taux de réparation  $\mu_0$  afin de voir la variation de nombre moyen de clients dans le système.

La figure (3.6) illustre le nombre moyen de clients dans le système par rapport au taux de réparation  $\mu_0$ , avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025 .

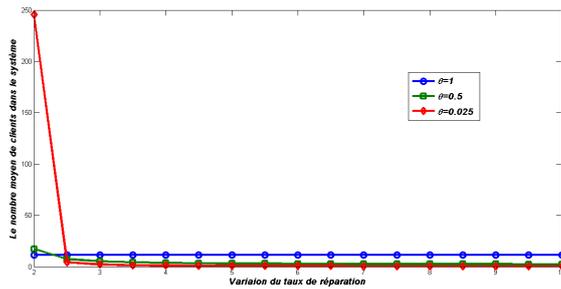
Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux de réparation  $\mu_0$  sur le nombre moyen de clients dans le système ( $Q$ ).



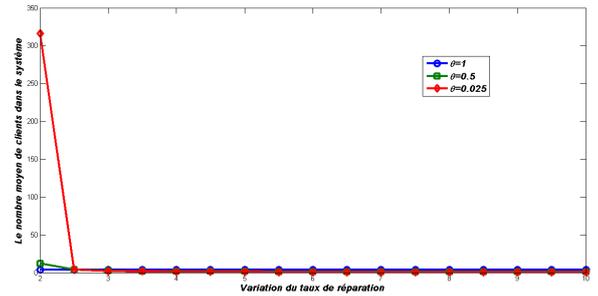
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

FIG. 3.6 – Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de taux de réparation  $\mu_0$ .

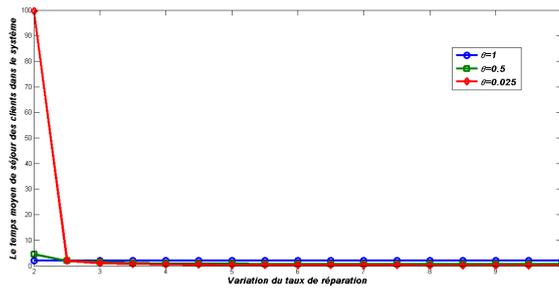
### Commentaire:

On observe le même comportement pour les quatre types de distributions, où:

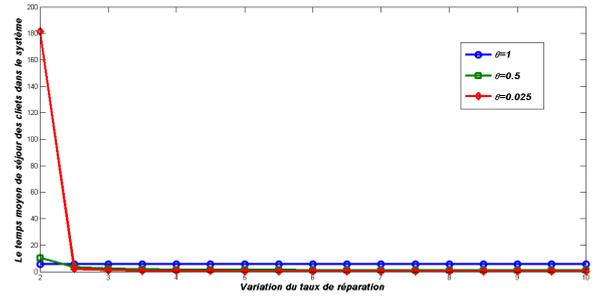
- Pour  $\theta = 1$ , le nombre moyen de clients dans le système est stable pour toute valeur de  $\mu_0$ .
- Pour  $\theta = 0.5$ , on remarque que lorsque  $\mu_0 < 3$ , le nombre moyen de clients dans le système diminue légèrement avec l'augmentation du taux de réparation, mais ce nombre se stabilise et s'approche de 0 à partir de  $\mu_0 = 3$ .
- Pour  $\theta = 0.025$ , on remarque que le nombre moyen de clients dans le système décroît avec l'augmentation du taux de réparation, mais ce nombre se stabilise et s'approche de 0 à partir de  $\mu_0 = 3$ .

## 6. L'effet du taux de réparation $\mu_0$ sur $W$ :

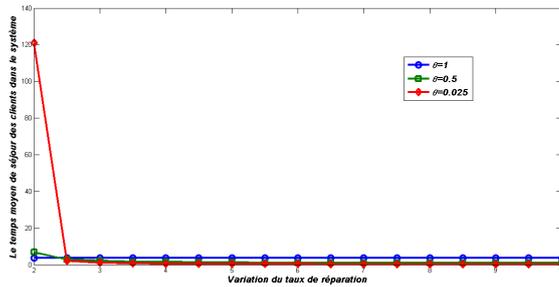
On fait varier le taux de réparation  $\mu_0$  afin de voir la variation de temps moyen de séjour des clients dans le système.



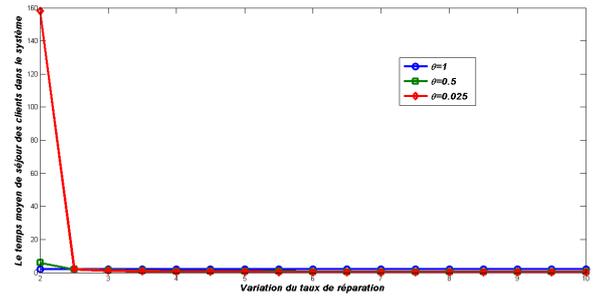
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

FIG. 3.7 – Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction du taux de réparation de  $\mu_0$ .

La figure (3.7) illustre le temps moyen de séjour des clients dans le système par rapport au taux de réparation  $\mu_0$ , avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025 .

Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux de réparation  $\mu_0$  sur le temps moyen de séjour des clients dans le système ( $W$ ).

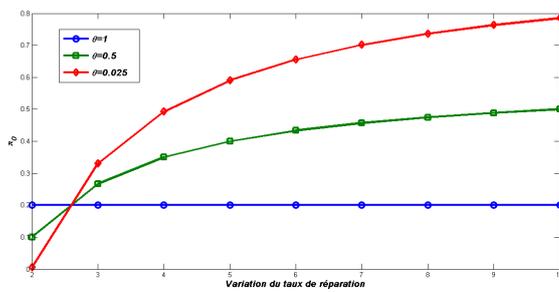
**Commentaire:**

On observe le même comportement pour les quatre types de distributions, où:

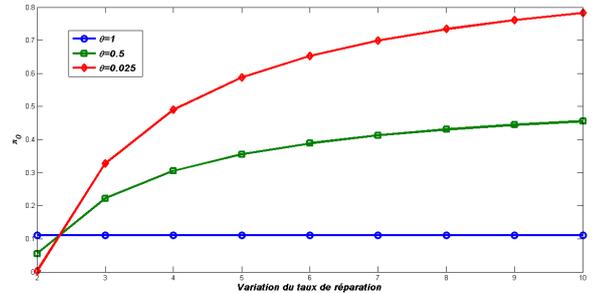
- Pour  $\theta = 1$ , le temps moyen de séjour des clients dans le système est stable indépendamment de  $\mu_0$ .
- Pour  $\theta = 0.5$ , on remarque que lorsque  $\mu_0 < 3$  le temps moyen de séjour des clients dans le système diminue légèrement avec l'augmentation du taux de réparation, mais ce temps se stabilise et s'approche de 0 à partir de  $\mu_0 = 3$  .
- Pour  $\theta = 0.025$ , on remarque que le temps moyen de séjour des clients dans le système décroît avec l'augmentation du taux de réparation, mais ce temps se stabilise et s'approche de 0 à partir de  $\mu_0 = 3$  .

## 7. L'effet du taux de réparation $\mu_0$ sur la probabilité $\pi_0$ :

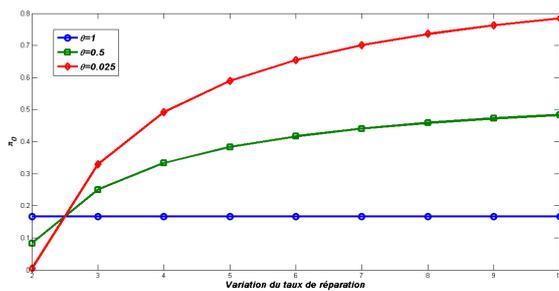
On fait varier le taux de réparation  $\mu_0$  afin de voir la variation de la probabilité  $\pi_0$ .



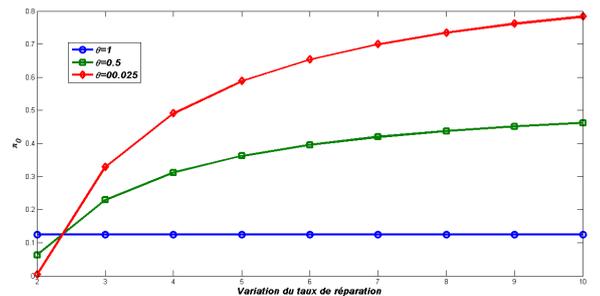
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

FIG. 3.8 – *Variation de probabilité  $\pi_0$  en fonction de  $\mu_0$  de réparation.*

La figure (3.8) illustre la probabilité  $\pi_0$  par rapport au taux de réparation  $\mu_0$  avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025 .

Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux de réparation  $\mu_0$  sur la probabilité  $\pi_0$ .

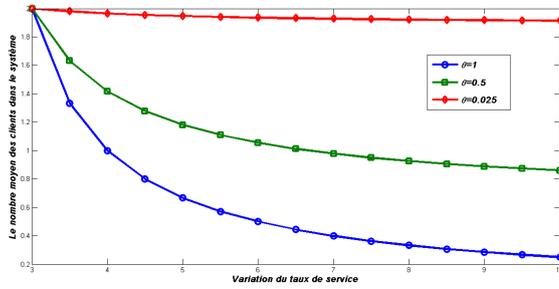
### Commentaire:

On observe le même comportement pour les quatre types de distributions, où:

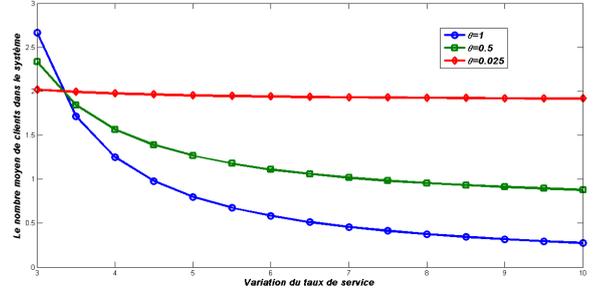
- Pour  $\theta = 1$ , la probabilité  $\pi_0$  est stable  $\forall \mu_0$ .
- Pour  $\theta = 0.5$  et  $\theta = 0.025$ , la probabilité  $\pi_0$  augmente avec l'augmentation du taux de réparation.

## 8. L'effet du taux de service $\mu_1$ sur $Q$ :

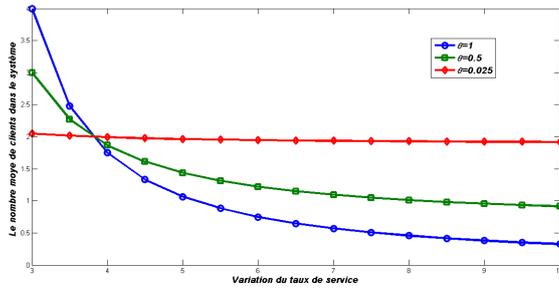
On fait varier le taux de service  $\mu_1$  afin de voir la variation de nombre moyen de clients dans le système.



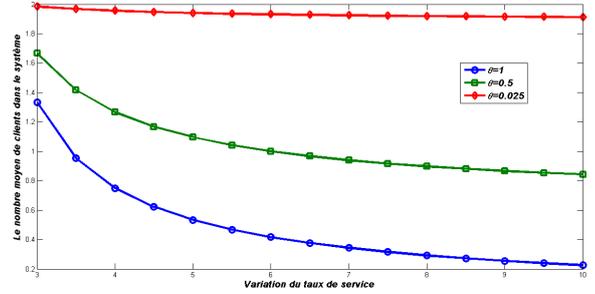
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

FIG. 3.9 – Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction du taux de service  $\mu_1$ .

La figure (3.9) illustre le nombre moyen de clients dans le système par rapport au taux de service  $\mu_1$  avec différentes valeurs de  $\theta$ , et ce pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025 .

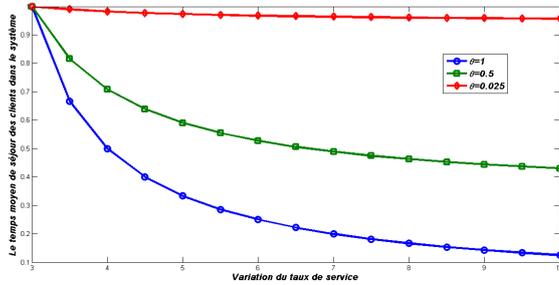
Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux de service  $\mu_1$  sur le nombre moyen de clients dans le système ( $Q$ ).

### Commentaire:

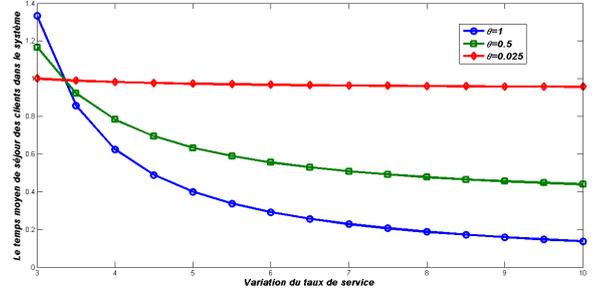
- Pour  $\theta = 0.025$ , le nombre moyen de clients dans le système est presque stable à  $2 \forall \mu_1$ .
- Pour  $\theta = 1$  et  $\theta = 0.5$ , le nombre moyen de clients dans le système décroît avec l'augmentation de taux de service.

## 9. L'effet du taux de service $\mu_1$ sur $W$ :

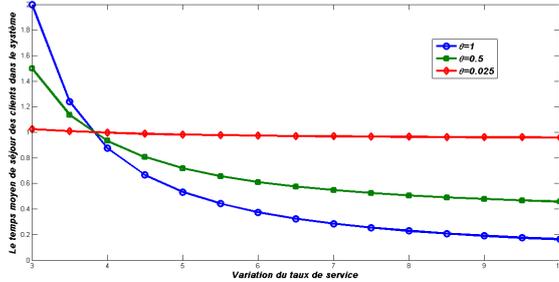
On fait varier le taux de service  $\mu_1$  afin de voir la variation de temps moyen de séjour des clients dans le système.



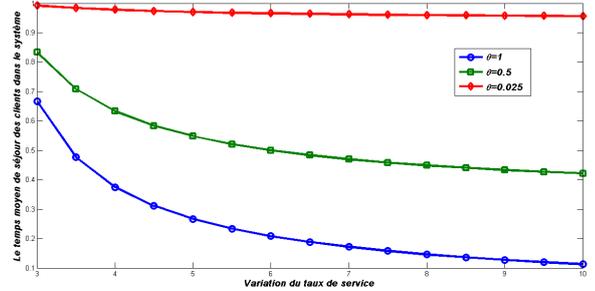
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

FIG. 3.10 – Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction du taux de service  $\mu_1$ .

La figure (3.10) illustre le temps moyen de séjour des clients dans le système par rapport au taux de service  $\mu_1$ , avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025.

Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux de service  $\mu_1$  sur le temps moyen de séjour des clients dans le système ( $W$ ).

### Commentaire:

- Pour  $\theta = 0.025$ , le temps moyen de séjour des clients dans le système est presque stable à  $1 \forall \mu_1$ .
- Pour  $\theta = 1$  et  $\theta = 0.5$ , le temps moyen de séjour des clients dans le système décroît avec l'augmentation de taux de service.

## 10. L'effet du taux de service $\mu_1$ sur la probabilité $\pi_0$ :

On fait varier le taux de service  $\mu_1$  afin de voir la variation de la probabilité  $\pi_0$ .

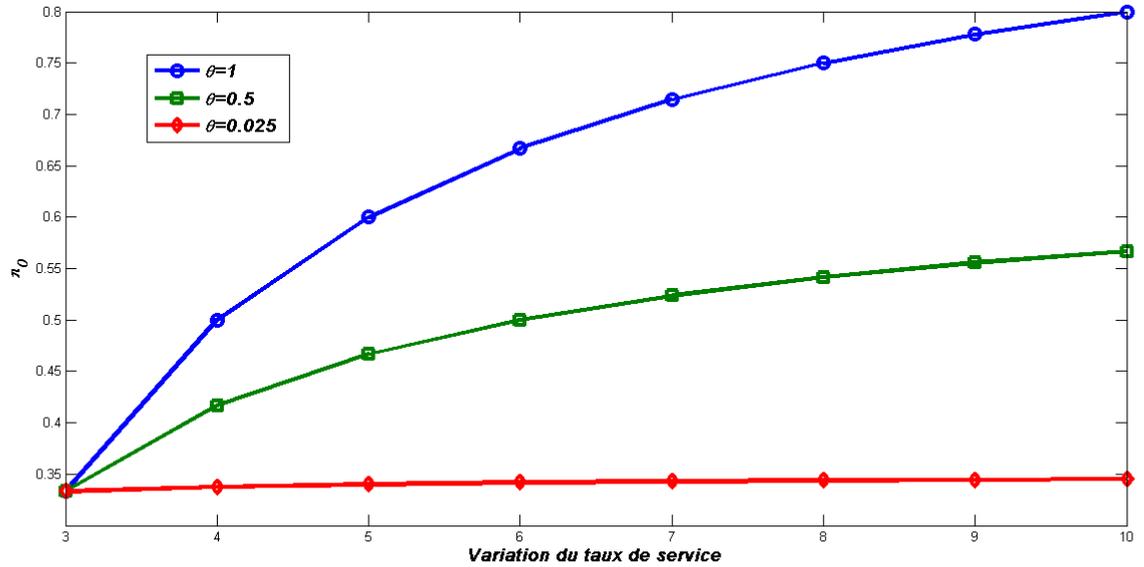


FIG. 3.11 – Variation de probabilité  $\pi_0$  en fonction du taux de service  $\mu_1$ .

La figure (3.11) illustre la probabilité  $\pi_0$  par rapport au taux de service  $\mu_1$  avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025.

Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du taux de service  $\mu_1$  sur la probabilité  $\pi_0$ .

### Commentaire:

- Pour  $\theta = 0.025$ , la probabilité  $\pi_0$  est stable  $\forall \mu_1$ .
- Pour  $\theta = 1$  et  $\theta = 0.5$ , la probabilité  $\pi_0$  augmente avec l'augmentation du taux de service.

## 11. L'effet de la probabilité $\theta$ et $\rho$ sur $Q$ :

### Remarque 3.1.

Dans toutes les figures de surface, la loi de service et de réparation sont fixées à une loi exponentielle.

Dans cette partie, on fait varier les deux paramètres  $\theta$  et  $\rho$  au même temps, afin de voir la variation de nombre moyen de clients dans le système .

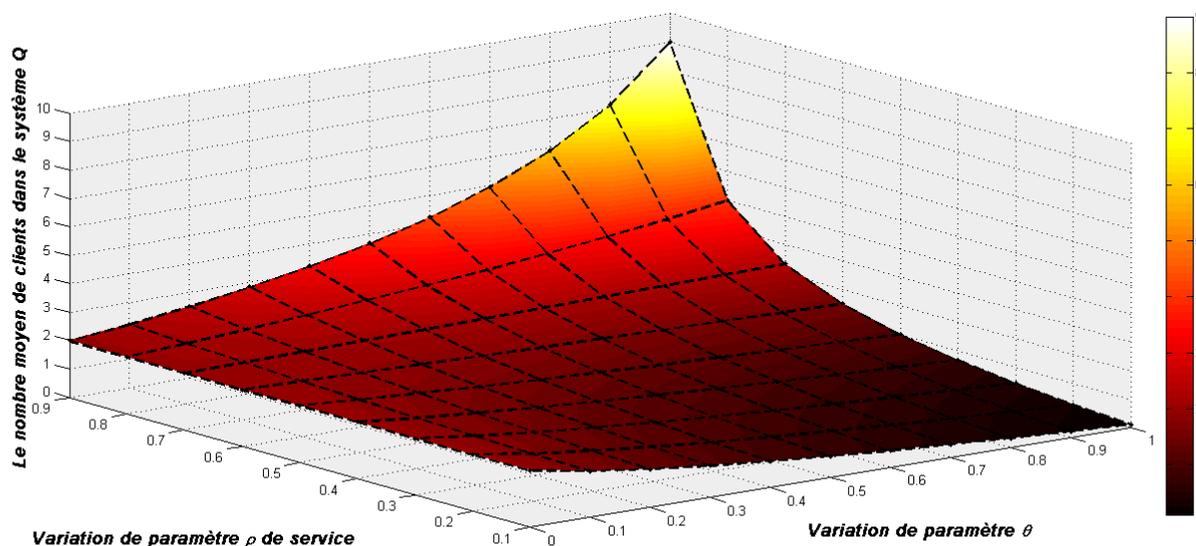


FIG. 3.12 – Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de  $\theta$  et  $\rho$ .

La figure (3.12) illustre le nombre moyen de clients dans le système par rapport aux paramètres  $\theta$  et  $\rho$ .

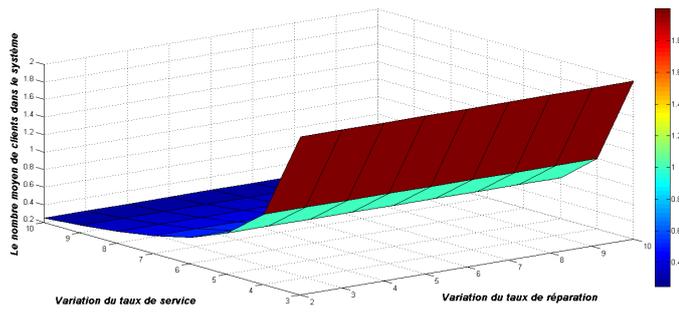
### Commentaire:

On remarque que à chaque fois qu'on augmente la probabilité d'occurrence de pannes  $\theta$  le nombre moyen de clients dans le système diminue, mais il est stable par rapport à l'augmentation de paramètre  $\rho$ .

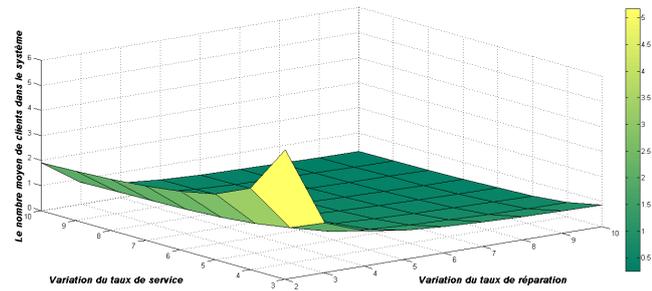
## 12. L'effet de $\mu_1$ et $\mu_0$ sur $Q$ :

On fait varier les deux paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_0$  au même temps, afin de voir la variation de nombre moyen de clients dans le système .

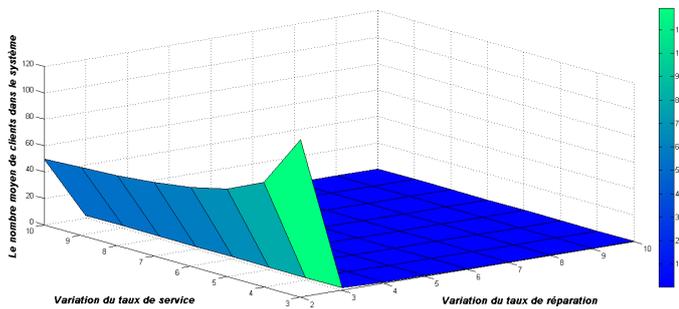
La figure (3.13) illustre le nombre moyen de clients dans le système par rapport aux taux de service  $\mu_1$  et taux de réparation  $\mu_0$  avec différentes valeurs de la probabilité  $\theta$ .



(a)  $\theta=1$



(b)  $\theta=0.5$



(c)  $\theta=0.025$

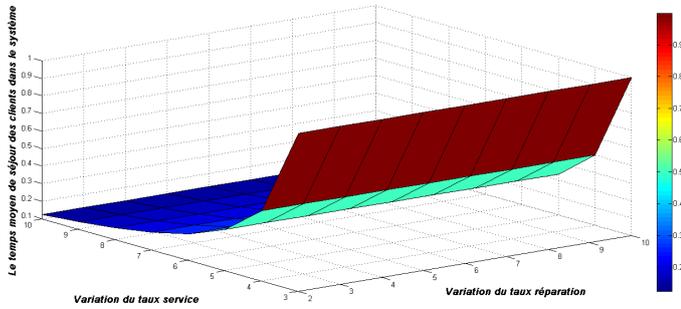
FIG. 3.13 – Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de  $\mu_1$  et  $\mu_0$ .

**Commentaire:**

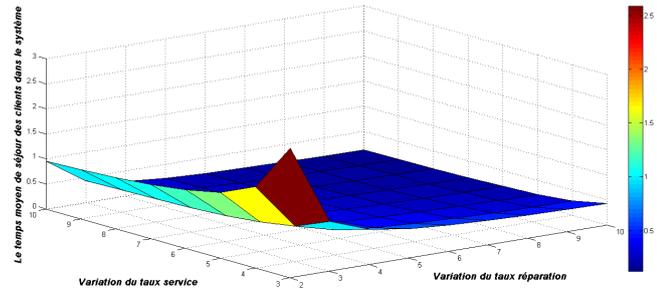
- Pour  $\theta = 1$ , le nombre moyen de clients dans système diminue avec l'augmentation du taux de service, et il est stable avec la variation du taux de réparation.
- Pour  $\theta = 0.5$  et  $\theta = 0.025$ , le nombre moyen de clients dans système diminue avec l'augmentation du taux de service. La même constat est observé par rapport à la variation du taux de réparation.

### 13. L'effet de $\mu_1$ et $\mu_0$ sur $W$ :

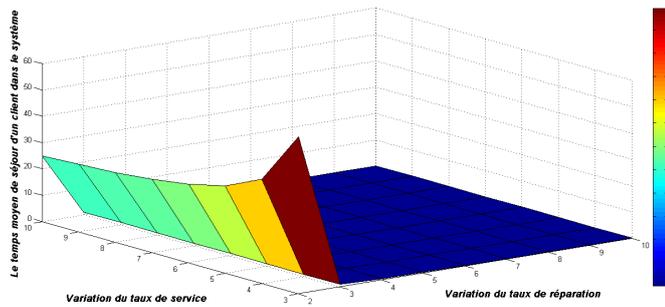
On fait varier les deux paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_0$  au même temps, afin de voir la variation de temps moyen de séjour des clients dans le système.



(a)  $\theta=1$



(b)  $\theta=0.5$



(c)  $\theta=0.025$

FIG. 3.14 – Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de  $\mu_1$  et  $\mu_0$ .

La figure (3.14) illustre le temps moyen de séjour des clients dans le système par rapport aux taux de service  $\mu_1$  et taux de réparation  $\mu_0$  avec différentes valeurs de la probabilité  $\theta$ .

**Commentaire:**

- Pour  $\theta = 1$ , le temps moyen de séjour des clients dans système diminue avec l'augmentation du taux de service, mais il augmente avec l'augmentation du taux de réparation.
- Pour  $\theta = 0.5$  et  $\theta = 0.025$ , le temps moyen de séjour des clients dans système diminue avec l'augmentation du taux de service. De même pour ses valeurs par rapport à la variation du taux de réparation.

### 3.3 Analyse de sensibilité de performances du système de files d'attente M/G/1 avec pannes répétitives

#### 1. L'effet de nombre de pannes répétitives $k$ sur $Q$ :

On fait varier le nombre de pannes répétitives  $k$  afin de voir la variation de nombre moyen de clients dans le système selon les quatre types de distributions du processus de service considérées précédemment.

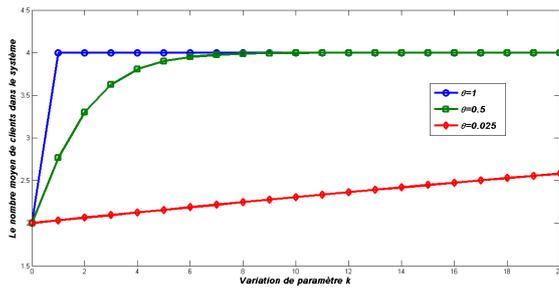
La figure (3.15) illustre le nombre moyen clients dans le système par rapport au valeurs du paramètre  $k$ , et ce pour différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025 .

Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du paramètre  $k$  sur le nombre moyen de clients dans le système ( $Q$ ).

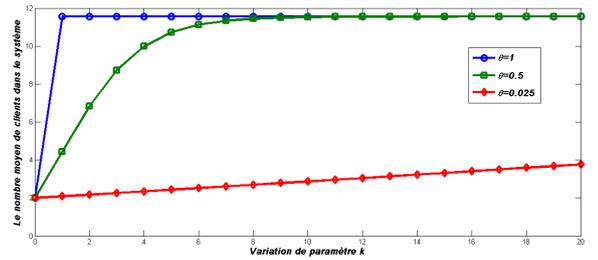
**Commentaire:**

On observe que chaque courbe a le même comportement dans les quatre types de distributions, où:

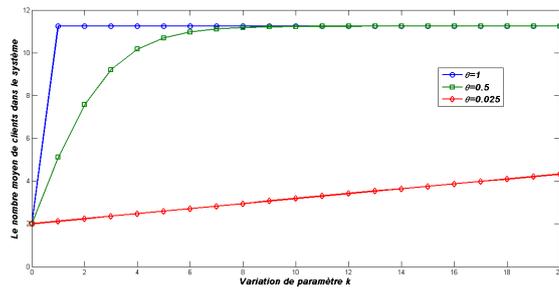
- Pour  $\theta = 1$  et  $\theta = 0.5$ , le nombre moyen de clients dans le système augmente avec l'augmentation de paramètre  $k$  puis se stabilise à partir de  $k = 1$  et  $k = 12$  respectivement.
- Pour  $\theta = 0.025$ , le nombre moyen de clients dans le système augmente légèrement avec l'augmentation de paramètre  $k$ .



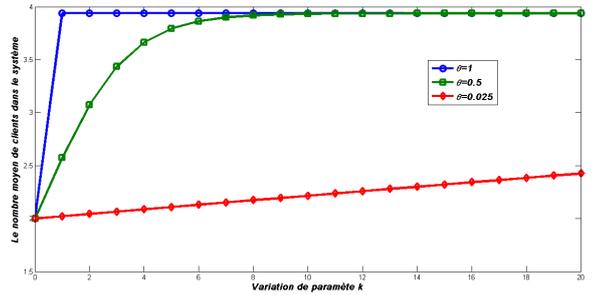
(a) *Loi exponentielle.*



(b) *Loi d'Erlang-2.*



(c) *Loi hyperexponentielle-2.*



(d) *Loi déterministe.*

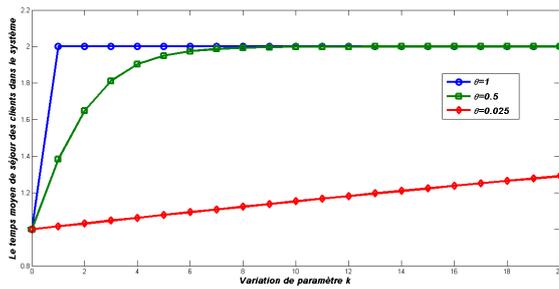
FIG. 3.15 – Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de nombre de pannes répétitives  $k$ .

## 2. L'effet de nombre de pannes répétitives $k$ sur $W$ :

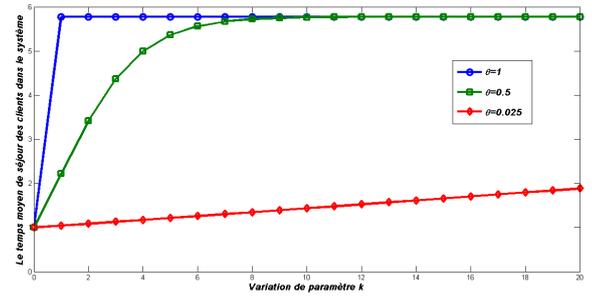
On fait varier le nombre de pannes répétitives  $k$  afin de voir la variation de temps moyen de séjour des clients dans le système selon les quatre types de distributions du processus de service considérées précédemment.

La figure (3.16) illustre le temps moyen de séjour des clients dans le système par rapport au paramètre  $k$  avec différentes valeurs de  $\theta$  pour les quatre types de distributions du processus de service. Pour chacune de ces distributions, nous présentons trois courbes où  $\theta$  est prise 1, 0.5 et 0.025 .

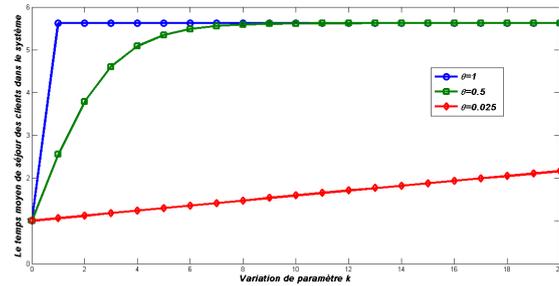
Pour chaque valeur de  $\theta$ , nous étudions l'influence du paramètre  $k$  sur le temps moyen de séjour des clients dans le système ( $W$ ).



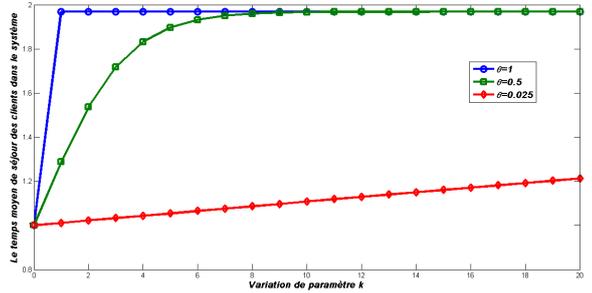
(a) Loi exponentielle.



(b) Loi d'Erlang-2.



(c) Loi hyperexponentielle-2.



(d) Loi déterministe.

FIG. 3.16 – Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de nombre de pannes répétitives  $k$ .

### Commentaire:

On observe que chaque courbe a le même comportement dans les quatre types de distributions, où:

- Pour  $\theta = 1$  et  $\theta = 0,5$ , le temps moyen de séjour des clients dans le système augmente avec l'augmentation de paramètre  $k$  puis se stabilise à partir de  $k = 1$  et  $k = 11$  respectivement .
- Pour  $\theta = 0,025$ , le temps moyen de séjour des clients dans le système augmente légèrement avec l'augmentation de paramètre  $k$ .

### 3. L'effet de $\theta$ et $k$ sur $Q$ et $W$ :

On fait varier les deux paramètres  $\theta$  et  $k$  au même temps, afin de voir la variation de nombre moyen et temps moyen de séjour des clients dans le système.

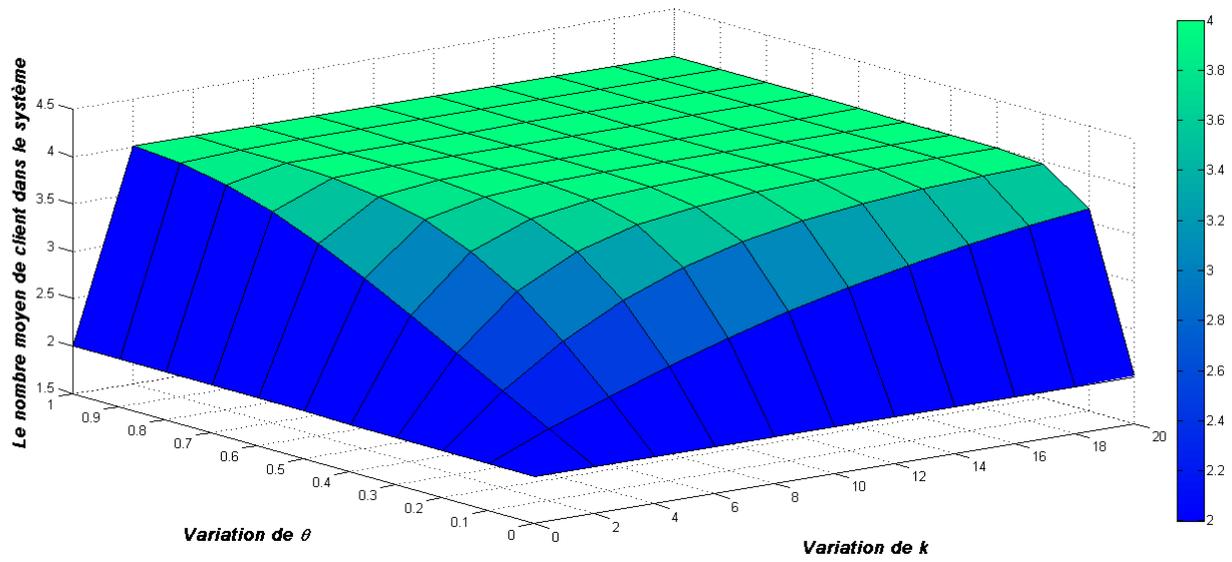


FIG. 3.17 – Variation de nombre moyen de clients dans le système en fonction de  $\theta$  et  $k$ .

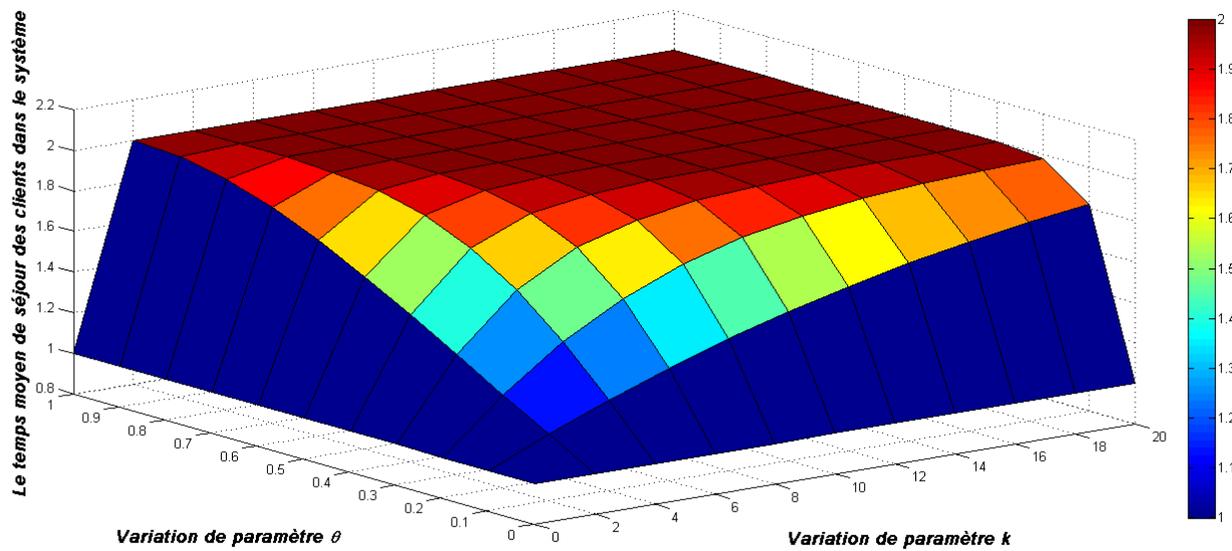


FIG. 3.18 – Variation de temps moyen de séjour des clients dans le système en fonction de  $\theta$  et  $k$ .

### **Commentaire:**

Le nombre moyen et le temps moyen de séjour des clients dans le système augmentent avec l'augmentation de la probabilité  $\theta$ . De même, par rapport à sa variation en termes du paramètre  $k$ .

## **3.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons considéré l'analyse de sensibilité des mesures de performance par rapport à leurs paramètres, et ce dans les deux systèmes de files d'attente  $M/G/1$  avec pannes et pannes répétitives. Plusieurs exemples numériques ont été illustrés.

# Conclusion générale

Les systèmes de files d'attente avec interruptions dues aux pannes aléatoires des serveurs sont rencontrés dans plusieurs situations réelles. L'étude de tels systèmes est certainement très importante pour les applications pratiques, car la fiabilité des serveurs a une influence importante sur les principaux indices de performance.

Dans ce mémoire, nous avons étudié deux modèles de files d'attente avec pannes et perte de clients. En utilisant la méthode de la fonction génératrice, nous avons pu obtenir quelques résultats analytiques et certaines mesures de performance des modèles en question, telles que le nombre moyen de clients dans le système, dans la file et le temps moyen de séjour d'un client dans le système, etc. De plus, nous avons effectué une analyse de sensibilité des modèles d'attente étudiés, tout en montrant l'effet de l'influence de changement des valeurs des paramètres du modèle sur ses caractéristiques stationnaires.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au modèle  $M/G/1$  non fiable avec perte définitive de clients. Nous avons d'abord rappelé quelques concepts et techniques de base de la théorie des files d'attente, et nous avons introduit quelques systèmes de file d'attente classiques. Ensuite, nous avons présenté le système de file d'attente  $M/G/1$  non fiable, en particulier nous sommes intéressés à cet effet aux mesures de performances de ce modèle. Enfin, nous avons effectué une analyse numérique montrant l'effet de la variation de quelques paramètres sur les mesures de performance (le nombre moyen de client dans le système, le temps moyen de séjour des clients dans le système et la probabilité  $\pi_0$ ) du système de files d'attente  $M/G/1$  avec pannes et pannes répétitives.

En termes de continuité de ce travail, plusieurs perspectives de recherche peuvent-être envisagées, on peut citer:

- Entreprendre la même démarche pour généraliser cette étude aux modèles d'attente avec pannes dépendantes;
- Analyse de sensibilité des modèles étudiés, en utilisant la méthode de Sobol;
- Étude des autres modèles d'attente à pannes plus complexes.

# Bibliographie

- [1] A.Krishnamoorthy, P.K.Pramod, and T.G.Deepak. On a queue with interruptions and repeat or resumption of service. nonlinear analysis. *Revue 71:1673-1683*, 2009.
- [2] A.Ruegg. *Processus Stochastiques - avec Applications aux Phénomènes d'Attente et de Fiabilité*. Presses polytechniques romandes, Suisse, 1989.
- [3] B.Avi-Itzhak and P.Naor. *Some Queueing Problemes with the service station subject to breakdown*. Operational Research, 11:3:303-320, 1963.
- [4] Bruno Baynat. *Théorie des Files d'Attente-des Chaînes de Markov aux Réseaux à Forme Produit*. Hermès Science Publications, Paris, 2000.
- [5] Dominique de Werra, J-F.Hêche, and T.M.Liebling. *Recherche Opérationnelle pour Ingénieurs II*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2003.
- [6] D.P.Gaver and L.S.Christie. A waiting line with interrupted service, including priorities. *J. Roy.Stat. Soc. J, B 25:73-90*, 1962.
- [7] F.Baccelli and T. Znati. *Queueing systems with breakdowns in data base modeling*. Proceedings of Performance 81 (8-th IFIP International Symposium on Comp. Perf. Model). pp. 213 – 232, North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1981.
- [8] H.Bruneel. A general model for the behaviour of infinite buffers with periodic service oportunities. *Euro.J.Oper.Res, 16:98-106*, 1984.
- [9] H.Bruneel and K.G.Byung. *Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM*, Kluwer Academic Publishers. 1993.
- [10] H.C.White and L.S.Christie. Queueing with peemptive priorities or with breakdown. *Oper. Res, 6:79-95*, 1958.
- [11] K.Abbas. *Stabilité Forte dans un système d'attente M/G/1 à Serveur Non Fiable,Thèse de Magister*. Université de béjaia, 2003.
- [12] K.Abbas. *Approximation dans les systèmes de files d'attente à serveurs non fiable,Thèse de doctorat*. Université de béjaia, 2010.
- [13] M.Boualem, M.Charfaoui, D.Aissani, and N.Djellaba. Analyse des performances du système m/g/1 avec rappels et bernoulli feedback. *Journal européen des systèmes automatisés-n° 1-2-3:181-193*, 2013.
- [14] R.Bartoszynski, W.Chan, and D.Pearl. Queues with break downs andcustomer discouragement. *Probability and Mathematical Statistics 14(1):77-87*, 1993.
- [15] S.Ouazine and K.Abbas. Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation. *Applied Mathematical Modelling, 40: 1137-1156*, 2016.

- [16] V.G.Kulkarni and B.D.Choi. Retrial queues with server subject to break-downs and repairs. *Queueing Systems*, 7:191-208, 1990.
- [17] W.L.PEARN, J.C.KE, and Y.C.CHANG. *Sensitivity analysis of the optimal management policy for a queueing system with a removable and non-reliable server*. Computers and Industrial Engineering 46: 87-99, 2004.

---

# Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode de la fonction génératrice pour l'étude de deux systèmes de files d'attente avec pannes et perte de clients. Nous avons obtenu la fonction génératrice du nombre moyen de clients dans le système et quelques mesures de performances. En outre, nous avons effectué l'analyse de sensibilité des performances des modèles étudiés par rapport à la variation des valeurs des paramètres. Plusieurs exemples numériques ont été réalisés.

**Mots-clés:** Files d'attente non-fiables; Pannes répétitives; Chaîne de Markov induite; Fonction génératrice; Analyse de sensibilité.

---

# Abstract

---

In this Master thesis, we have used the generating function method for analyzing two different queueing models with breakdowns and discarded customer. We have obtained the generating function of the length system and some performances measures. Furthermore, we have provided a sensitivity analysis of measures performances with respect to the variability values of the parameters models.

**Keywords:** Unreliable queueing models; Repetitive breakdowns; Embedded Markov chain; Generating function; Sensitivity analysis.

---