République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

En Vue de l'Obtention du Diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Option : Mathématiques Financières

Thème

Allocation de coûts dans les réseaux bancaires : Réseaux ATM : Approche par les jeux coopératifs

Présenté par : Mr HEFAIA Mohammed et Mr SBAI Abdelkader

Devant le jury composé de :

Président	**Mme**	**Touche Aicha**	**MCB**	**U. A/Mira Béjaia**
Promotrice	**Mme**	**Bouibed Karima**	**MCB**	**U. A/Mira Béjaia**
Examinateur	**Mr**	**Touati Sofiane**	**MAA**	**U. A/Mira Béjaia**
Examinatrice	**Mme**	**Bouchama Kahina**	**MAA**	**U. A/Mira Béjaia**

Juin 2018

Remerciements

Nous remercions Dieu (sans Lui rien n'aurait pu être possible) tout puissant de nous avoir accordé santé, courage et la volonté pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons également à remercier notre Promotrice M^{elle} ***Karima BOUIBED*** pour ses précieux conseils, sa disponibilité et ses encouragements qui nous ont poussés à donner le meilleur de nous-même tout au long de la préparation de ce mémoire.

Nous exprimons notre grand respect aux honorables membres de jury qui ont accepté d'évaluer notre travail et qu'ils trouvent ici le témoignage de notre reconnaissance.

A ceux qui nous ont soutenu de prés ou de loin pour la réalisation de ce travail, un grand MERCI.

H.Mohammed et S.Abdelkader

Dédicace

***N**ous dédions ce modeste travail :*

***A** notre source de courage, nos très chers parents,*

***A** toutes nos familles,*

***A** tous nos professeurs*

***A** tous nos amis.*

***H**.Mohammed et **S**.Abdelkader*

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Liste des notations

$\mathcal{N}$: ensemble des joueurs.

n : nombre de joueurs.

S_i : l'ensemble des stratégies pures du joueur i.

s_i : une stratégie pure du joueur i.

α_i : la probabilité de choisir une stratégie pure du joueur i.

n_i : nombre de stratégies pures du joueur i.

Δ_{n_i} : l'ensemble de distribution de probabilité des stratégies pures du joueur i.

f_i : la fonction d'utilité du joueur i.

MR_i : la fonction de la meilleure réponse du joueur i.

v : fonction caractéristique.

$\mathcal{G}^{\mathcal{N}}$: classe des jeux à utilités transférables UT avec l'ensemble des joueurs $\mathcal{N}$.

$(\mathcal{N}, v)$: couple de jeu coalitionnel.

S, T : des coalitions.

P : la structure de coalitions.

T_i^{σ} : coalition du joueur i selon jeu Gamma (Γ).

P^{σ} : formation de coalition selon le jeu Delta (Δ).

u_i : gain du joueur i.

$\mathcal{S}$: ensemble des stratégies de la coalition S.

$noyau(v)$: noyau ou cœur du jeu coalitionnel $(\mathcal{N}, v)$.

$I(v)$: représentation graphique du $noyau(v)$.

λ_S : poids de la coalition S.

I_S : vecteur caractéristique de la coalition S.

K : espace Euclidien.

ϕ_i : valeur de Shapley du joueur i.

$M(\mathcal{N}, v)$: vecteur supérieur du jeu coalitionnel $(\mathcal{N}, v)$.

$m(v)$: vecteur inférieur de jeu coalitionnel à fonction caractéristique v.

$\mathcal{R}(S,i)$: le reste des joueurs i dans la coalition S.

$\mathcal{Q}^{\mathcal{N}}$: ensemble des jeux quasi-équilibrés.

$\succ, \succcurlyeq$: relation binaire lexicographique.

$\tau(v)$: valeur de τ pour un jeu coalitionnel.

$Nu(v)$: le nucléole du jeu coalitionnel v.

A^l : l'ensemble des banques qui possèdent des ATMs à l'emplacement l.

i^l : la banque i qui possède des ATMs dans l'emplacement l.

n_i^l : nombre de transaction pour la banque i dans l'emplacement l.

$c^l(S)$: coût de la coalition S dans l'emplacement l.

$v^l(S)$: réduction de coûts de la coalition S dans l'emplacement l.

w^l : allocation de coûts dans un emplacement l où une seule banque possède des ATMs.

x^l : allocation de coûts dans un emplacement l où plusieurs banques ont des ATMs.

y : allocation de coûts selon la règle du partage égale.

z : allocation de coûts selon la règle de transaction.

ATM : Automated teller machine.

Introduction Générale

La théorie des jeux étudie des situations où des agents ont à choisir des stratégies et obtiendront chacun un résultat (paiement, gain) qui dépendra des stratégies jouées par l'ensemble des joueurs. Une stratégie peut se réduire à une décision élémentaire, mais peut aussi consister en un plan d'action complexe, comme nous le verrons plus loin. Un jeu est non-coopératif lorsque les joueurs choisissent leurs stratégies à l'insu les uns des autres. La théorie des jeux coopératifs étudie au contraire les avantages que peuvent tirer les joueurs de la possibilité de former entre eux des coalitions.

La théorie des jeux a été fondée par les mathématiciens (notamment John Von Neumann, Emile Borel et Ernst Zermelo) en 1940. Elle doit son nom au fait qu'à l'origine, elle était orientée vers l'étude des jeux de société tels que les échecs ou le poker. Mais elle a pris véritablement son essor avec la publication, en 1944 de l'ouverage de John Von Neumann et de l'économiste Oskar Morgenstern intitulé "Game Theory and Economic Behavior" [40]. Leur idée de départ est simple : tous les problèmes économiques peuvent se ramener à un jeu de stratégies entre acteurs rationnels et la théorie des jeux est le moyen pour analyser ces interactions stratégiques. Cette théorie se développera ensuite dans les années 50 avec les travaux de John Nash. En répondant aux insuffisances de quelques concepts d'équilibres, utilisées dans la microéconomie traditionnelle, John Nash [41] et [42] a mis en évidence la notion d'équilibre de Nash qui prend comme référence le principe de la rationalité individuelle. Les travaux de Nash ont ensuite été prolongés notamment par Reinhard Selton [44] et John Harsanyi [6]. Ces derniers ont contribué à faire avancer les sciences économiques. Assez rapidement, cette théorie a été considérée comme une solution éventuelle aux problèmes de formalisation que connaissent les sciences économiques. Pour les situations impliquant plus d'un décideur, la théorie de l'économie ne suffit pas et c'est là que la théorie des jeux peut apporter une contribution importante. Si un groupe de décideurs décide d'entreprendre un projet ensemble pour augmenter le revenu total ou diminuer les coûts totaux. Les concepts de solution de la théorie du jeu coopératif peuvent être appliqués pour arriver à des schémas d'allocation de revenus. L'apparition des jeux coopératifs et les jeux de formation de coalitions, qui sont inspirés de la réalité, a conduit a un certain renouvellement de la modélisation d'un réseaux bancaire : Réseaux ATMs sous forme d'un jeu coopératif.

Le réseau ATM (en anglais ATM : Automated teller machine, en français GAB : guichet automatique bancaire) a contribué de manière significative à l'exécution fiable de la plupart des services financiers des clients (Giannakoudi [24]). Selon Mcandrews [39], les guichets automatiques peuvent offrir des avantages significatifs aux banques et aux clients. Les machines peuvent permettre aux déposants de retirer et de déposer de l'argent à des heures et à des endroits plus convenables que pendant les heures d'ouverture dans les succursales. En même temps, en automatisant les services qui étaient auparavant terminés manuellement, les distributeurs automatiques de billets peuvent réduire les coûts liés au service de certaines demandes des clients. Ces avantages potentiels sont multipliés lorsque les banques partagent leurs guichets automatiques avec d'autres, ce qui permet aux déposants d'autres banques d'accéder à leurs comptes par le biais d'un guichet automatique bancaire.

L'objectif de ce mémoire est de trouver des solutions interactives pour différentes banques qui ont des guichets automatiques et d'autres, en se basant sur la théorie des jeux coopératifs.
Notre travail est organisé comme suit :

Dans le première chapitre, nous donnerons un aperçu général sur les notions de base de la théorie des jeux à savoir les éléments essentiels d'un jeu, les différentes classifications des jeux ainsi que quelques concepts de solutions des jeux non coopératifs. Nous terminerons par un bref résumé des applications de la théorie des jeux dans plusieurs domaines.

Le second chapitre, sera consacré à l'étude des jeux coopératifs, notamment les définitions élémentaires d'un jeu coopératif et le problème de formation de coalitions ainsi que les concepts de solutions les plus étudies pour ce type de jeux.

Dans le troisième chapitre, nous étudierons un problème de répartition des coûts lié à un réseau ATMs bancaire, dans lequel les banques membres cherchent à répartir les coûts des transactions.
Le problème d'allocation des coûts est équivalent à un problème d'allocation des économies de coûts, où les banques possédant des guichets automatiques offrent des économies de coûts aux clients des autres banques. Le problème est donc de savoir comment répartir ces économies entre la (les) banque (s) détenant les ATMs et les propriétaires des transactions traitées par les ATMs.

Le jeu est défini en agrégeant les banques sur les emplacements (des guichets automatiques). Dans un premier temps, nous nous somme intéressés à l'étude des propriétés des jeux à emplacement unique, qui sont présentés comme un cas particulier des jeux du marché de l'information. Muto et al.[43] et Potters et Tijs [19]. Si une seule banque possède des distributeurs automatiques de billets dans un emplacement, le concept de cœur est relativement important et plusieurs d'autres concepts de solution bien connus coïncident avec un point central du cœur. Selon cette répartition, les économies de coûts sont réparties également entre la banque propriétaire des ATMs et les banques dont les transactions doivent être traitées par les ATMs. Si plusieurs banques ont des guichets automatiques dans un emplacement, le cœur est constitué d'un seul point. Par la suite, nous combinons les allocations pour les jeux à emplacement unique, et deux règles d'allocation sont étudiées pour plusieurs emplacements. La règle du partage égale, partage les économies de coûts autant que possible, et correspond à la valeur de τ du jeu d'économies de coûts. Il donne des points de base, tout comme la règle basée sur les transactions, où aucune répartition des économies de coûts n'est réalisée, mais cette dernière règle présente l'avantage supplémentaire d'être monotone, c'est-à-dire, aucun membre dans le réseau ne perd à la suite de l'inclusion de nouvelles banques membres dans le réseau. Nous terminerons par une conclusion générale en résumant les résultats obtenus et quelques idées des travaux de recherche futurs.

Chapitre 1

Notions de base sur la théorie des jeux

1.1 Introduction

La théorie des jeux consiste à étudier les situations de conflits qui peuvent exister entre des agents en interaction. Elle est devenue un outil central dans plusieurs disciplines comme la biologie, le transport routier, les sciences économiques et les réseaux informatiques...etc.

On assiste au premier jeu dès le 18 éme siècle avec les travaux de Borel [1], mais le principal développement de la théorie des jeux étaient vers 1940 avec les travaux de Von-Neuman et Morgenstern avec le célèbre livre (game theory and economic behavior) [40].

D'après Milvin dresher [2], la théorie des jeux est une théorie mathématique de prise de décision par des agents en environnement compétitif.

La théorie des jeux est la théorie qui explique le comportement des individus lorsqu'ils sont en interactions, et leurs actions sont interdépendantes. Elle recourt à des outils mathématiques pour modéliser ces comportements, c'est pour cela qu'elle suppose que les individus sont rationnels.

1.2 Définition d'un jeu

Un jeu est un ensemble de relations entre des décideurs (les joueurs). Lorsqu'il existe une interaction décisionnelle entre plusieurs agents, on peut dire qu'ils sont en train de jouer un jeu entre eux.

Joueur : Un joueur est un acteur du jeu ou n'importe quelle unité poursuivant des buts de façon autonome. Les modèles étudiés supposent que les joueurs sont rationnels dans la mesure où ils sont conscients de leurs alternatives, ont des préférences claires et choisissent délibérément leurs actions après un processus d'optimisation.

Stratégie : La stratégie d'un joueur est une règle qui lui indique, étant donné son ensemble d'information, quelle action choisir à chaque instant du jeu où il a la possibilité de jouer [8] et [9]. Il existe trois types de stratégies [7].

- **Pure** : Une **stratégie pure** est un plan d'actions qui est choisi par chaque joueur avec certitude. On note par S_i l'ensemble des stratégies pures du i^{eme} joueur et par s_i l'une de ces stratégies pure.
- **Mixte** : Une **stratégie mixte** α est une distribution de probabilité des stratégies pures. Si un joueur $i \in \mathcal{N}$ admet n_i stratégies pures, alors :

$$\triangle_{n_i}= \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = \overline{1...n_i}\}. \tag{1.1}$$

- **Comportement** : Une **stratégie de comportement** est une application qui définit l'action à prendre pour chaque ensemble d'information.

Le résultat qu'obtient chaque joueur à la fin du jeu est dit paiement ou bien utilité).

1.3 Classification des jeux

Il existe trois catégories de jeu selon Kelly [21] :

— les jeux d'habileté.

— les jeux de chances.

— les jeux de stratégies.

Le chemin suivent explique les catégories de jeu :

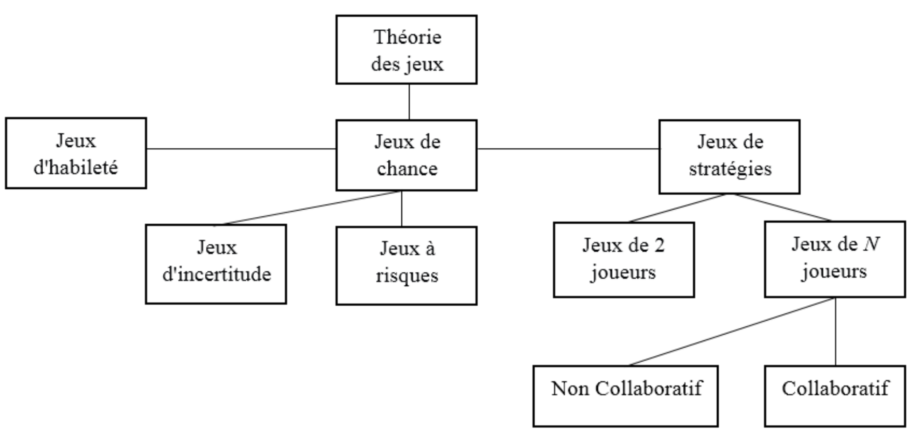

FIGURE 1.1 – Taxonomie des jeux selon Kelly.

Dans notre étude, on s'intéressera uniquement aux jeux stratégiques.
La diversité des situations conflictuelles qu'on peut rencontrer en pratique engendre différents types de jeu et des méthodes spécifiques de résolution.
Il existe plusieurs classifications des jeux selon les critères suivants :

1.3.1 Selon le nombre de coups

Selon l'ordre dans lequel les joueurs annoncent leurs stratégies, il existe deux principales formes de représentation de jeu.
a. Jeu sous forme normale : est un jeu qui se déroule en un seul coup. La forme normale d'un jeu peut être utilisée dans le cas où les joueurs interviennent simultanément. Dans le cas des jeux finis (les ensembles des joueurs sont finis) à deux joueurs, la représentation se fait par un tableau donnant les gains des joueurs pour chacune des issues possibles, les lignes et les colonnes correspondent aux diverses stratégiques.

$$\langle \mathcal{N}, \{S_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{f_i\}_{i\in\mathcal{N}}\rangle. \tag{1.2}$$

Où

— $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble des joueurs.
— S_i est l'ensemble des stratégies du joueur $i \in \mathcal{N}$.
— S est l'ensemble des issues du jeu (1.2).
— $f_i : S = S_1 \times \ldots.. \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité du joueur i.

Exemple 1.1. (Dilemme des prisonniers)
Deux suspects son arrêtés par la police, mais la police manque de preuve pour les emprisonner. Les policiers proposent les situations suivantes. Si les deux avouent, ils auront chacun 5 ans, si l'un avoue et l'autre nie, ils encourent 1 ou 10 ans, si les deux nient, chacun aura 2 ans de prison.

— l'ensemble des joueurs $\mathcal{N}$={ criminel 1, criminel 2 },
— l'ensemble des stratégies du criminel 1 (respectivement du criminel 2) est S_1 (respectivement S_2) tel que $S_1 = S_2 = \{$avoue, nie$\}$,
— les gains des deux criminels sont donnés dans la matrice suivante :

2^{eme} criminel / 1^{er} criminel	avoue	nie
avoue	(5,5)	(1,10)
nie	(10,1)	(2,2)

Table 1.1 – Dilemme des prisonniers.

b. Jeu sous forme extensive : Un jeu sous forme extensive est un jeu qui se déroule en plusieurs coups et qui disposent d'une liste de règles qui déterminent l'agissement de chaque joueur et les gains associés à chaque conclusion possible du jeu.
Lorsque les règles du jeu stipulent que les joueurs interviennent les uns après les autres, dans un ordre précis et que le nombre d'actions parmi lesquelles leur choix s'exerce est fini, la représentation qui semble la plus appropriée consiste à tracer un arbre (appelé arbre de Kuhn [3]).
La forme extensive d'un jeu spécifie les données suivantes :

— Les joueurs concernés par le jeu.
— Les moments où chaque joueur aura à jouer.
— Les actions possibles de chaque joueur au moment de jouer.
— L'information dont dispose chaque joueur au moment où il joue.
— Les gains des joueurs pour chacune des combinaisons possibles des actions des joueurs.

Exemple 1.2. Une firme notée I est en situation de monopole sur un marché. Une autre firme notée E peut décider d'entrer sur le marché (stratégie : Entrer) ou non (stratégie : Ne pas entrer). Si la firme E décide d'entrer, la firme I peut alors soit casser les prix (stratégie : Casser les prix), soit partager (stratégie : Partager). Les paiements pour E et pour I sont :

— $(0, 5)$ si E n'entre pas,
— $(-1, 1)$ si E entre et I casser les prix,
— $(2, 3)$ si E entre et I partage.

Un paiement (x, y) signifie que I reçoit x et E reçoit y. Ce jeu se présente de manière pratique comme suit :

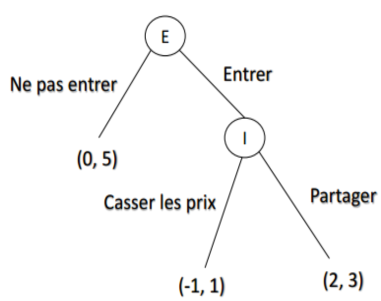

FIGURE 1.2 – Représentation d'un jeu sous forme extensive (Le jeu d'entrée sur le marché).

1.3.2 Selon le comportement des joueurs

a. Jeux non coopératif

On appelle jeu non coopératif, tout jeu où les joueurs ne peuvent pas se regrouper en coalitions, mais ils peuvent se communiquer entre eux et d'échanger des informations, à condition qu'ils ne contractent pas d'accord contraignant, par exemple le jeu de dilemme des prisonniers est un jeu non coopératif.

b. Jeux coopératif

Un jeu est coopératif lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante ou bien un jeu est dit coopératif si les joueurs peuvent effectuer des accords forcés avant le déroulement de jeu. Ce type de jeu fera l'objet de notre étude dans le deuxième chapitre.

1.3.3 Selon l'information

L'information dans le jeu dépend de la connaissance réciproque ou non entre les joueurs et les actions qu'ils peuvent prendre, ainsi que de leurs différentes fonctions d'utilité.

Jeux à information parfaite/imparfaite

On dit qu'un jeu est ***à information parfaite***, si chacun des joueurs, au moment de choisir sa stratégie, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs.
Un jeu est ***à information imparfaite***, si au moins un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ce qu'a joué un des autres joueurs.

Jeux à information complet/incomplet

Un jeu est dit ***à information complète***, si chacun des joueurs connaît la structure du jeu, c'est-à-dire : l'ensemble des joueurs, les ensembles des stratégies de tous les joueurs, ainsi que leurs fonctions de gain. Chaque joueur sait également que tous les autres joueurs disposent de ces informations.

Un jeu est dit ***à information incomplète***, si au moins, un des joueurs ne connaît pas entièrement la structure du jeu.

1.3.4 Selon le nombre de stratégies

On peut distinguer deux types de jeu selon le nombre de stratégies à savoir les jeux fini et les jeux infinis.
- **Jeux finis** : sont des jeux où chaque joueur dispose d'un nombre fini de stratégies. Par exemple, le jeu de dilemme des prisonniers.
- **Jeux infinis** : sont des jeux où chaque joueur dispose d'un nombre infini de stratégies.

Exemple 1.3. (Duopole de Cournot)
Deux entreprises, E_1 et E_2 (les joueurs) produisent une marchandise similaire. Le coût de production de la marchandise est donné par une fonction croissante $C_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, pour chaque entreprise, où $C_i(q_i)$ désignera le coût pour E_i de produire une quantité q_i de marchandise (la quantité q_i produite par l'entreprise E_i est sa stratégie). Cette marchandise se vend à un prix qui dépendra de la demande par rapport à l'offre, et qui sera donné par une fonction décroissante $P : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et qui dépend de la quantité totale $Q = q_1 + q_2$ de marchandise produite par les deux entreprises.

— Joueurs : deux entreprises E_1 et E_2.
— Fonction de gains de l'entreprise E_i est donnée par :

$$u_i(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2)q_i - C_i(q_i).$$

— La stratégie de l'entreprise E_i représente la quantité produite q_i qu'est un réel positif, donc dans $\mathbb{R}^+$.

1.3.5 Selon la forme des fonctions des gains

a - Jeux à somme nulle

On dit qu'un jeu ***à somme nulle*** si la somme des gains de tous les joueurs est toujours nulle pour toute issue du jeu.

Exemple 1.4. (Pierre/Feuille/Ciseau)
Le jeu de (Pierre-feuille-ciseaux) est un jeu stratégique définit comme suit :
pierre gagne contre ciseau, ciseau contre feuille, feuille contre pierre.
$\mathcal{N} = \{1, 2\}, \quad S_1 = S_2 = \{P, F, C\}$, $u_1(P, P) = u_1(F, F) = u_1(C, C) = 0$.
$u_1(P, C) = u_1(F, P) = u_1(C, F) = 1$.
$u_1(C, P) = u_1(P, F) = u_1(F, C) = -1$.
$u_2(x, y) = -u_1(x, y)$.
On peut présenter ce jeu sous forme matricielle comme suit :

2 / 1	P	F	C
P	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
F	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
C	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Table 1.2 – Pierre/Feuille/Ciseau.

b - Jeux à somme non nulle

On dit qu'un jeu ***à somme non nulle*** si la somme des gains n'est pas forcement nulle.

1.4 Concepts de solutions des jeux non coopératifs

La théorie des jeux propose un certain nombre de solutions à ces conflits. Ces solutions définissent les choix que font les agents dans telle ou telle situation. Dans cette section, nous exposerons quelques concepts de solutions pour un jeu non coopératif sous forme normale (stratégique).

1.4.1 Résolution par des relations de dominance

L'équilibre en stratégies strictement dominantes

Une stratégie dominante pour un joueur est une stratégie qui lui donne toujours un gain supérieur ou égal au gain qu'il peut attendre de toutes ses autres stratégies (quelles que soient les stratégies des autres joueurs).
Une stratégie $s_i \in S_i$ est **dominante** si pour tout $t_i \neq s_i$, s_i domine t_i :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(t_i, s_{-i}). \tag{1.3}$$

Une stratégie $s_i \in S_i$ est **dominée** si pour tout $t_i \neq s_i$, s_i dominé par t_i :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad f_i(s_i, s_{-i}) \leq f_i(t_i, s_{-i}). \tag{1.4}$$

Exemple 1.5. Considérons le jeu suivant dans lequel le joueur 1 joue en ligne et le joueur 2 en colonne (par convention). La situation décrite est celle de deux firmes qui se font concurrence par les prix. La première colonne liste les stratégies possibles du joueur 1, dans le cas présent vendre à prix bas ou à prix élevé, tandis que la première ligne décrit celles du joueur 2. Chaque cellule du tableau, en se situant à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, représente un résultat possible du jeu que l'on renseigne en faisant figurer les règlements obtenus pour la combinaison de stratégies considérée (le premier chiffre indique le profit du joueur 1, le second celui du joueur

2). Concrètement, la lecture du tableau indique que chaque firme obtiendra un profit de 40 si elles fixent toutes les deux un prix bas, que la joueur 1 obtiendra un profit de 100 et le joueur 2 un profit de 10 si 1 fixe un prix bas et 2 un prix élevé, etc.

2^{eme} joueur / 1^{er} joueur	prix bas	prix élevé
prix bas	**(40,40)**	(100,10)
prix élevé	(10,100)	(90,90)

TABLE 1.3 – L'équilibre en stratégies strictement dominantes.

Par la suite, le problème consiste à savoir ce que les joueurs vont jouer, ici les niveaux de prix qu'ils vont sélectionner, dans un contexte où, si chacun connaît toutes les données du jeu (hypothèse d'information complète), on n'observe pas ce que l'autre est en train de faire (l'information est donc imparfaite). Qui plus est, s'il est possible de discuter avant le déroulement du jeu, chacun reste entièrement libre de sa décision au moment où il fait son choix (approche non coopérative).

La résolution de ce jeu est particulièrement simple car chaque joueur a une stratégie qui est objectivement la meilleure.

En effet, quoi que fasse le joueur 2, le joueur 1 a toujours intérêt à jouer prix bas car cette stratégie permet de meilleurs règlements (soit 40 avec $40 > 10$ dans l'éventualité où le joueur 2 jouerait prix bas ou 100 avec $100 > 90$ dans l'éventualité où le joueur 2 jouerait prix élevé). Similairement, quoi que fasse le joueur 1, le joueur 2 a toujours intérêt à jouer prix bas car, dans tous les cas de figure, son règlement est meilleur comparé à celui que permet son autre stratégie (soit 40 ou 100 contre 10 ou 90, selon que le joueur 1 joue prix bas ou prix élevé). Dans ces conditions, les stratégies optimales sont bien définies et le résultat du jeu (ou équilibre) est directement constitué du couple de stratégies (s_1^*, s_2^*) =(prix bas,prix bas) avec des règlements d'équilibre qui sont alors donnés par $(u_1^*, u_2^*) = (40, 40)$.

L'équilibre par élimination des stratégies strictement dominées

Une des limites de l'équilibre en stratégies strictement dominantes est qu'il n'existe pas pour une large classe de jeux. Un second concept de solution, moins restrictif, est celui de l'équilibre par élimination itérée de stratégies strictement dominées. Pour illustrer, considérons l'exemple ci-dessous dans lequel aucun joueur ne dispose de stratégie qui lui permettre de faire mieux à tous les coups.

Exemple 1.6. Soit le jeu suivant :

2^{eme} joueur / 1^{er} joueur	x	y	z
a	(1,0)	(1,2)	(0,1)
b	(0,3)	(0,1)	(2,0)

TABLE 1.4 – L'équilibre par élimination des stratégies strictement dominées.

L'examen des fonctions de règlement montre alors que le joueur 2 ne jouera jamais z car cette stratégie est strictement dominée par y (quoi que fasse le joueur 1, jouer y permet au joueur 2 d'obtenir de meilleurs règlements). Par la suite et dans la mesure où il est inconcevable qu'un joueur rationnel, entendant maximiser son règlement, joue une stratégie strictement dominée, la stratégie z apparaît comme une option non pertinente pour le problème de décision du joueur 2 auquel cas il est possible de l'éliminer. On aboutit ainsi à un jeu simplifié (voir la Figure 1.3) dont on peut considérer qu'il est logiquement équivalent au premier et dans lequel la stratégie b du joueur 1 est devenue strictement dominée (conditionnellement donc à l'élimination de la stratégie z du joueur 2). Il y a donc là aussi possibilité d'éliminer cette stratégie (i.e. on répète le processus) pour aboutir à un nouveau jeu réduit, logiquement équivalent au précédent et dans lequel il apparaît que le joueur 2 ne jouera jamais la stratégie x (car x est devenue dominée par y). On converge ainsi vers un unique résultat qu'est le profil (a, y).

$1^{er}j \setminus 2^{eme}j$	x	y	z
a	(1,0)	(1,2)	(0,1)
b	(0,3)	(0,1)	(2,0)

$\Rightarrow$

$1^{er}j \setminus 2^{eme}j$	x	y
a	(1,0)	(1,2)
b	(0,3)	(0,1)

$\Rightarrow$

$1^{er}j \setminus 2^{eme}j$	x	y
a	(1,0)	(1,2)

$\Rightarrow$

$1^{er}j \setminus 2^{eme}j$	y
a	(1,2)

FIGURE 1.3 – L'équilibre par élimination de stratégies strictement dominées.

1.4.2 Équilibre de Nash

Un équilibre de Nash [10] est défini comme un résultat du jeu en lequel la stratégie de chacun, compte tenu de ce que fait l'autre, est optimale. En d'autres termes, en un tel profil, personne n'est incité à s'écarter de sa stratégie si l'autre en fait autant, ou bien encore et de façon équivalente, personne ne regrette ce qu'il a joué compte tenu de ce qu'a joué l'autre.

Équilibre de Nash en stratégies pures

Définition : Une issue $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_N^*) \in S$ est dite équilibre de Nash du jeu sous forme normale (1.2) si aucun joueur $i \in \mathcal{N}$ n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie s_i^* quand les autres joueurs continuent à jouer s_{-i}^*. Par conséquent, pour tout joueur $i \in \mathcal{N}$, nous devons avoir :

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i. \tag{1.5}$$

Une issue $s^* \in S$ est un équilibre de Nash strict si :

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) > f_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \tag{1.6}$$

Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes pour un jeu sous forme stratégique est un profil de stratégies mixtes α^* tel que :

$$E(f_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*)) \geq E(f_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*)), \quad \forall \alpha_i \in \Delta_{n_i}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \tag{1.7}$$

Où $\Delta_{n_i} = \{\alpha^* = (\alpha_1^*, ..., \alpha_{n_i}^*) \in \mathbb{R}^{n_i},\ \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n_i}, \quad \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j = 1\}$ et E est l'espérance mathématique des gains.
Remarque : Tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Exemple 1.7. (Guerre des prix)
$\mathcal{N} = \{1, 2\}, S_1 = \{p, P\}, S_2 = \{p, P\}$
1^{er} colonne représente les stratégies de 1^{er} joueur et 1^{er} ligne représente les stratégies de 2^{eme} joueur

$1^{er}j \setminus 2^{eme}j$	p	P
p	(1,1)	(3,0)
P	(0,3)	(2,2)

Principe :
— On choisit la meilleur réponse pour le 1^{er} joueur.
— Puis on choisit pour le 2^{eme} joueur.

$1^{er}j \setminus 2^{eme}j$	p	P
p	(**1**,1)	(**3**,0)
P	(0,3)	(2,2)

$\Rightarrow$

$1^{er}j \setminus 2^{eme}j$	p	P
p	(**1**,**1**)	(**3**,0)
P	(0,**3**)	(2,2)

TABLE 1.5 – Équilibre de Nash en stratégies pures.

L'équilibre de Nash est : (s_1^*, s_2^*) =(p,p) avec l'utilité $(u_1^*, u_2^*) = (1, 1)$.

Fonctions de meilleures réponses

Étant donnée la structure du jeu stratégique, nous pouvons déterminer les stratégies du joueur i qui correspondent à la plus grande satisfaction pour lui face à tous les autres profils. Alors ces stratégies correspondent à la meilleure situation que le joueur i peut obtenir face à la stratégie s_{-i}. Le concept de meilleure réponse généralise cette idée, voir [5].

On définit la fonction de la meilleure réponse du joueur i par la correspondance $MR_i : S_{-i} :\longrightarrow S_i$ comme suit :

$$MR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}). \tag{1.8}$$

Exemple 1.8. Considérons le jeu ci-dessous :

Soient T et B deux joueurs et MR_t(resp :MR_b) la fonction de meilleure réponse de T (resp. B).

T \ B	X	Y	Z
X	0,3	3,0	4,2
Y	3,0	0,3	4,2
Z	2,4	2,4	5,5

TABLE 1.6 – Matrice des gains.

Nous trouvons les meilleures réponses du joueur T :
Si le joueur B joue X, la meilleure réponse du joueur T est Y.
Si le joueur B joue Y, la meilleure réponse du joueur T est X.
Si le joueur B joue Z, la meilleure réponse du joueur T est Z.

Nous écrivons les fonctions de meilleure réponse du joueur T comme suit :
$MR_t(X) = Y, \quad MR_t(Y) = X, \quad MR_t(Z) = Z$

Maintenant, nous trouvons les meilleures réponses du joueur B :
Si le joueur T joue X, la meilleure réponse du joueur B est X.
Si le joueur T joue Y, la meilleure réponse du joueur B est Y.
Si le joueur T joue Z, la meilleure réponse du joueur B est Z.

Les fonctions de meilleure réponse du joueur B comme suit :
$MR_b(X) = X, \quad MR_b(Y) = Y, \quad MR_b(Z) = Z$

Dans le tableau, on marque un signe (+) sous de meilleures réponses de T selon les choix de B et un signe ($*$) à celles de B. Donc, on note que les meilleurs choix s'intersectent en (Z, Z) qui est l'équilibre de Nash de ce jeu avec la récompense $(5, 5)$. On le note $NE = (Z; Z)$.
1^{er} colonne représenter les stratégies de T et 1^{er} ligne représenter les stratégies de B :

T \ B	X	Y	Z
X	$0,3_*$	$3_+,0$	4,2
Y	$3_+,0$	$0,3_*$	4,2
Z	2,4	2,4	$5_+,5_*$

Table 1.7 – La résolution par fonctions de meilleures réponses.

1.5 Applications de la théorie des jeux

Aujourd'hui, la théorie des jeux est l'une des sciences les plus appliquées dans plusieurs domaines :

- **Science politique**
  L'application de la théorie des jeux à la science politique est axée sur le chevauchement des domaines de la division équitable, de l'économie politique et des choix publics. Dans chacun de ces domaines, les chercheurs ont développé des modèles théoriques de jeu dans lesquels les joueurs sont souvent des électeurs, des États, des groupes d'intérêts spéciaux et des politiciens.
- **Biologie**
  En biologie, la théorie des jeux a été utilisée comme modèle pour comprendre différents phénomènes. Il a d'abord été utilisé pour expliquer l'évolution (et la stabilité) de rapports de sexe approximatifs. Fisher (1930) a suggéré que les sex-ratios résultats des forces de l'évolution agissant sur des individus qui pourraient être vus comme essayant pour maximiser leur nombre de petits-enfants.
- **Économie et affaires**
  La théorie des jeux est une méthode majeure utilisée en économie mathématique et entreprise pour la modélisation des comportements concurrents des agents en interaction. Elle inclue un large éventail de phénomènes et d'approches économiques, tels que les ventes aux enchères, les fusions et les acquisitions division, duopoles, oligopoles, formation de

réseaux sociaux, à base d'agents économie computationnelle, équilibre général, conception de mécanisme et vote systèmes, et dans des domaines aussi vastes que l'économie expérimentale, économie, économie de l'information, organisation industrielle et politique économie.

– **Philosophie**

  La théorie des jeux a été utilisée en philosophie. Répondant à deux articles de Quine (1960, 1967), Lewis (1969) ont utilisé la théorie des jeux pour développer un compte rendu philosophique de la convention. Ce faisant, il a fourni la première analyse des connaissances communes et l'a utilisé pour analyser le jeu dans les jeux de coordination. En plus, il a d'abord suggéré que l'on peut comprendre le sens en termes de jeux de signalisation.

– **Informatique et logique**

  La théorie des jeux joue un rôle de plus en plus important en logique et en informatique. Plusieurs théories logiques ont une base dans le jeu sémantique. En outre, des informaticiens ont utilisé des jeux pour modéliser des calculs interactifs. En outre, la théorie des jeux fournit une base théorique au domaine des systèmes multi-agents.

  Séparément, la théorie des jeux a joué un rôle dans les algorithmes en ligne ; en particulier, le problème de k-serveur, qui a été appelé dans le passé des jeux avec les frais de déménagement et les jeux de demande-réponse. Le principe de Yao est une théorie du jeu technique pour prouver les limites inférieures sur le calcul de la complexité des algorithmes randomisés, en particulier algorithme en ligne.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résumé les notions de base de la théorie des jeux, ainsi que un bréf apèrçu sur les concepts d'équilibres introduits pour les jeux sous forme normale entre autre l'équilibre de Nash et l'équilibre en stratégies dominantes. Nous avons aussi présenté quelques domaines d'application de cette théorie.

Chapitre 2

Les jeux coopératifs

2.1 Introduction

Le concept de coopération est très important en théorie des jeux mais reste difficile à cerner. Coopérer veut dire agir ensemble dans un intérêt commun. Cependant, pour que deux joueurs ou plus agissent ensemble pour un intérêt commun, il est nécessaire de se séparer des utilités individuelles pour définir une sorte d'utilité commune qui va déterminer leur comportement commun. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse essentielle suivant laquelle le but d'un agent est de maximiser son utilité espéré étant donné sa croyance. On a donc besoin de modéliser les comportements de coopération sans violer les fondements de la théorie des jeux.

2.2 Définitions et propriétés

Soit $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$ un ensemble de n joueurs. Une coalition est un sous-ensemble non vide S de joueurs, c'est à dire $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$.

On appelle structure de coalition tout sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{N}$ des joueurs, ou bien une structure de coalitions est une partition notée $T = \{S_1, S_2, \ldots, S_L\}$ de l'ensemble $\mathcal{N}$ telle que :

— $S_l \subseteq \mathcal{N}, \quad \forall l = 1, .., L$.

— $\cup_{l=1}^{L} S_l = \mathcal{N}$.

— $S_l \cap S_j = \emptyset, \forall, j \in \{1, .., L\}, l \neq j$.

- On dit que S est une coalition **singleton** si elle contient un seul joueur, c-a-d $(S = \{i\}), i \in \mathcal{N}$.
- On dit que S est la **grande coalition** si celle-à inclut tous les joueurs, c-a-d $(S = \mathcal{N})$ et $|S| = n$.

- On dit que ensemble est une **frange** si tout les joueurs de cet ensemble appartenant à l'ensemble $\mathcal{N} \setminus S$, (n'appartiens à aucune coalition $S \subseteq \mathcal{N}$).

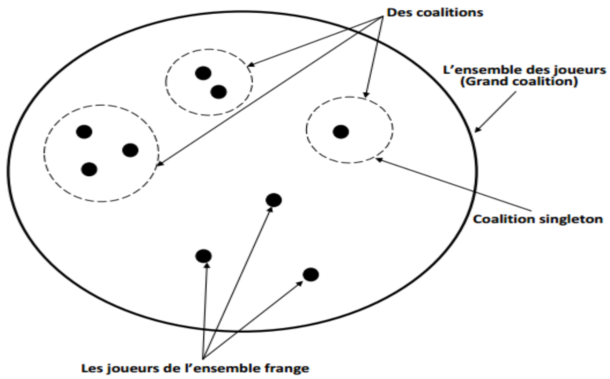

FIGURE 2.1 – Les type des coalitions

2.2.1 Formation de coalitions

D'Aspermont [12], Hart et Kurz [13][21], Bloch [17], Yi et Shin [35], Ray et Vohra [37], Thoron [36] expliquent la formation de coalitions par des données endogènes du modèle et définissent une classe particulière de jeux appelée jeu de formation de coalitions.

2.2.2 Jeux de formation de coalitions

Nous pouvons classer les jeux de formation de coalitions en deux catégories d'après Song-Seung [16].

***(i)* Jeux simultanés**

a - Jeu simple de formation de coalitions

D'aspermont et al.[12] proposent un jeu de formation de coalitions, ou l'ensemble des stratégies de chaque joueur est d'annoncer soit ≪ accepter ≫ou bien ≪ ne pas accepter ≫. Les joueurs qui annoncent ≪ accepter ≫forment une coalition et ceux qui annoncent ≪ ne pas accepter ≫restent en tant que joueurs indépendants.

Exemple 2.1. Soit $\mathcal{N} = \{a, b, c, d, e\}$ l'ensemble des joueurs.
Le résultat d'annonce comme suit :
- a, b, c annoncent ≪ accepter ≫.
- d, e annoncent ≪ ne pas accepter ≫.
La structure de coalitions résultante est $P = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$.

b - Jeu ouvert d'adhésion

Dans ce jeu, nous disposons d'un ensemble des locaux noté $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$, on suppose que le nombre des locaux distinctes doit être supérieur ou égal au nombre de joueurs. Chaque joueur annonce simultanément un local. Les joueurs qui annoncent le même local appartiendront à une même coalition.

Exemple 2.2. Considérons un jeu à cinq joueurs $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et soit $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$, un ensemble de locaux.

La stratégie s_i du joueur i, $i \in \mathcal{N}$ est de choisir un local $l_j \in L, \quad \forall j = \{1, ..., 6\}$.

— $s_1 \longrightarrow l_1$

— $s_2 \longrightarrow l_1$

— $s_3 \longrightarrow l_4$

— $s_4 \longrightarrow l_5$

— $s_5 \longrightarrow l_5$

La structure de coalitions résultante est $P = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3\}\}$.

c - Jeu Gamma (Γ)

Chaque joueur annonce simultanément une liste de joueurs (lui-même y compris) notée S avec qui il veut former une coalition, autrement dit une stratégie de chaque joueur i,$i \in \mathcal{N}$ se ramène à un choix d'un sous ensemble S de $\mathcal{N}$.

L'ensemble X_i des stratégies d'un joueur i s'écrit : $X_i = \{S \subseteq \mathcal{N} : i \in S\}$.

Les coalitions qui ont été choisies par chacun de leurs membres seront formées, et les joueurs qui ont fait de mauvais choix se retrouveront seuls.

Considérons une issue $\sigma = (s_1, ..., s_N) \in \prod_{i \in \mathcal{N}} X_i$ du jeu Gamma (Γ) et associons à chaque joueur $i \in \mathcal{N}$, l'ensemble T_i^σ défini par :

$$T_i^\sigma = \begin{cases} s_i \quad si \quad s_l = s_i, \quad \forall l \in s_i, \\ \{i\} \quad sinon. \end{cases} \tag{2.1}$$

Exemple 2.3. Soit $\mathcal{N} = \{A, B, C, D, E\}$ l'ensemble des joueurs.

La stratégie $X_i = s_i$ de chaque joueur i , $i \in \mathcal{N}$ est comme suit :

— $A \longrightarrow s_1 = \{A, C, E\}$

— $B \longrightarrow s_2 = \{B, D, A\}$

— $C \longrightarrow s_3 = \{A, C, E\}$

— $D \longrightarrow s_4 = \{B, D, A\}$

— $E \longrightarrow s_5 = \{A, C, E\}$

$\sigma = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$

$T_1^\sigma = T_3^\sigma = T_5^\sigma = \{A, C, E\}$

$T_2^\sigma = \{B\}$

$T_4^\sigma = \{D\}$

La structure de coalitions résultante est $P = \{\{A, C, E\}, \{B\}, \{D\}\}$.

d - Jeu Delta (Δ)

La différence avec le jeu Γ réside dans le fait que si un joueur fait un mauvais choix des membres de sa coalition, en incluant dans sa liste des joueurs qui ne l'ont pas choisi, il ne se retrouvera pas seul, mais va plutôt former une coalition avec les membres de sa liste qui ont fait le même choix que lui. La structure coalitionnelle qui va résulter d'un profit de stratégies $\sigma = (S_1, ..., S_N)$ sera alors :

$$P^\sigma = \{T \subseteq \mathcal{N}; i, j \in T \Leftrightarrow s_i = s_j\}.$$

Exemple 2.4. Reconsidérons les mêmes énoncés de l'Exemple 2.3.

$T_1^\sigma = T_3^\sigma = T_5^\sigma = \{A, C, E\}$

$T_2^\sigma = T_4^\sigma = \{B, D\}$

La structure de coalitions résultante est $P = \{\{A, C, E\}, \{B, D\}\}$.

***(ii)* Jeux séquentiels**

$*$ **Jeu à horizon infini**

Bloch [17] propose un jeu séquentiel de formation de coalitions, où il définit d'abord une règle d'ordre notée par ρ, qui est employée pour déterminer l'ordre des joueurs dans le jeu. Le premier joueur, selon la règle ρ, commence le jeu en proposant la formation d'une coalition S_0 à laquelle il veut appartenir. Chaque membre éventuel répond à la proposition dans l'ordre déterminé par ρ. Si un des joueurs rejette la proposition, il doit faire une contre-offre et proposer une coalition S_1 à laquelle il veut appartenir, si tous les membres acceptent, la coalition est formée. Tous les membres de S_0 se retirent alors du jeu, et le premier joueur dans $\mathcal{N} \backslash S_0$ recommence le jeu.

La figure suivante décrit le jeu avec deux joueurs

Remarque. Ce type de formation de coalitions est très difficile à réaliser surtout avec l'existence de plusieurs joueurs et leur non-acceptation de la formation coalitionnel précédente.

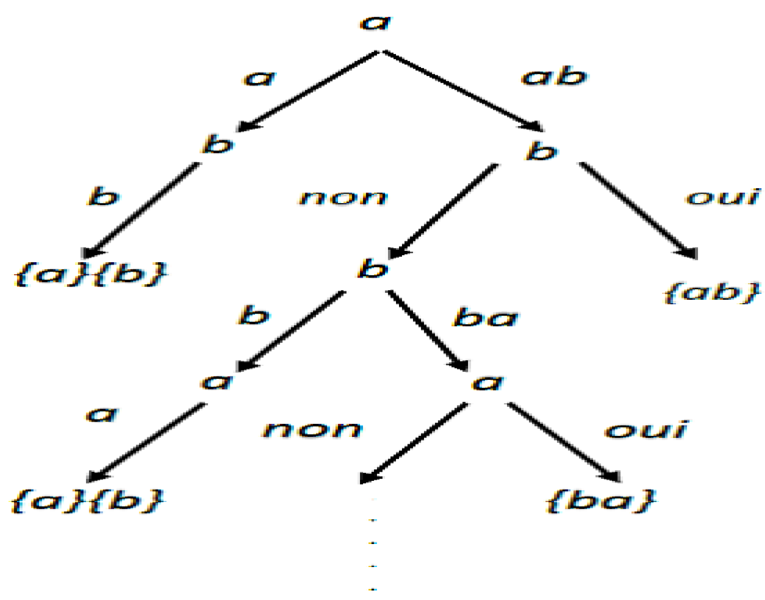

FIGURE 2.2 – Jeu à horizon infini.

2.2.3 Conditions de stabilité des coalitions

Il y a deux propriétés fondamentales que doit vérifier une structure de coalitions pour jouir de la stabilité [14] et [3].

1. **Stabilité interne :** une coalition est intérieurement stable, si aucun membre de la coalition n'a intérêt à la quitter. Formellement, une coalition S est intérieurement stable, si aucun joueur $i \in S$ n'a intérêt à quitter individuellement S pour rejoindre la frange $\mathcal{N} \setminus S$ des joueurs restants.
$$\forall i \in S; \quad u_i(S) \geq u_i(S \setminus \{i\}).$$
Où :
$u_i(S)$ est le gain du joueur i en étant dans S.
$u_i(S \setminus \{i\})$ est le gain du joueur i en quittant la coalition S.
2. **Stabilité externe :** une coalition S est extérieurement stable, si aucun joueur $i \in \mathcal{N} \setminus S$ n'a intérêt à rejoindre la coalition S.
Une coalition est extérieurement stable, si aucun joueur en dehors de la coalition n'a intérêt à la rejoindre. Formellement, une coalition S est extérieurement stable, si aucun joueur $i \notin S$ n'a intérêt à rejoindre S. Autrement dit, une coalition S est extérieurement stable, si :
$$\forall i \notin S; \quad u_i(S \cup \{i\}) < u_i(S).$$
$u_i(S)$ est le gain du joueur i en étant à l'extérieur de S.
$u_i(S \cup \{i\})$ est le gain du joueur i en rejoignant la coalition S.

2.2.4 Fonction caractéristique

Définition 2.1. La fonction caractéristique est une fonction qui associé à chaque coalition S de $\mathcal{N}$ une valeur $v(S)$ [26]. Cette fonction nous informe sur les résultats que peuvent obtenir les différentes coalitions en précisant le montant que les membres d'une coalition S peuvent s'assurer s'ils coopérent ensemble sans l'aide des joueurs extérieurs à leur groupe. Elle est définie sur l'ensemble $2^{\mathcal{N}}$ de toutes les coalitions :

$$v : 2^{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

$$S \subseteq \mathcal{N} \longmapsto v(S).$$

Propriétés :

— $v(\emptyset) = 0$.

— Super-additivité : si S et T sont des coalitions disjointes ($S \cap T = \emptyset$), on a :

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T). \tag{2.3}$$

La super-additivité stipule qu'une coalition de joueurs est au moins aussi efficace que l'ensemble de ces sous-coalitions disjointes.

— Additivité : si S et T sont des coalitions disjointes ($S \cap T = \emptyset$), on a :

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T). \tag{2.4}$$

Définition 2.2. (**Imputations**)

Une imputation est un ensemble de n valeurs numériques $(x_1, ..., x_n)$ représentant les gains des joueurs à l'issue du jeu et satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$x_i \geq v(\{i\}), \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = v(\mathcal{N}).$$

La première condition signifie qu'aucun joueur n'acceptera un partage lui attribuant moins de ce qu'il pourrait gagner en agissant seul (rationalité individuelle).

Par ailleurs, un partage satisfaisant, $\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i < v(\mathcal{N})$ ne sera pas accepté par les joueurs parce qu'il revient à gaspiller la quantité $v(\mathcal{N}) - \sum_{i \in \mathcal{N}} x_i$. D'autre part, si on suppose que $\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i > v(\mathcal{N})$ ceci reviendra, selon l'Ekeland [25], à dire que la solution n'est pas réalisable. Donc :

$$\textstyle\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = v(\mathcal{N}).$$

Cette condition est appelée la rationalité collective.

La rationalité individuelle étant un ingrédient de base de la théorie des jeux, et d'ailleurs de l'approche décisionnelle en sciences sociales en général, a permis à la première condition d'échapper à la critique qui s'est concentrée sur la deuxième. Luce et Raiffa [28] ont émis des réserves quant à la validité du passage de la rationnalité individuelle à la rationalité de groupe. Leur argument est que cette dernière n'est ni un postulat ni un résultat de la théorie des jeux coopératifs. D'autre part, si on admet cette hypothèse, pourquoi ne pas l'étendre à toutes les coalitions ($\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$) plutôt que de la réserver uniquement à la grande condition $\mathcal{N}$? La raison est, comme nous le verrons plus loin, avant tout technique.

Pour récapituler, un jeu coopératif à n joueurs avec paiements latéraux est un triplet $\langle \mathcal{N}, v, X \rangle$ où $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble des joueurs, v une fonction super-additive de $P(\mathcal{N})$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $v(\emptyset) = 0$ et X est l'ensemble des imputations tels que $x_i \geq v(\{i\}), i \in \mathcal{N}$ et $\sum_{i\in\mathcal{N}} x_i = v(\mathcal{N})$.

2.3 Jeux coopératifs sous forme stratégique

Dans un jeu coopératif, les joueurs peuvent former des coalitions visant à améliorer les gains de leurs membres. Une coalition est une partie non vide de $\mathcal{N}$. Donc pour définir un jeu coopératif, on doit préciser, non seulement les stratégies de chaque joueur, mais également les stratégies dont disposerait chaque coalition possible. Dans le cas général, l'ensemble des stratégies d'une coalition n'est pas la simple combinaison des stratégies individuelles de ses membres. Une coalition peut avoir des perspectives d'actions plus riches. On aura alors la définition suivante :

Définition 2.3. [27] Un jeu coopératif sous forme stratégique est un triplet :

$$\langle \mathcal{N}, \{\mathcal{S}_S\}_{\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}}, \{u_i\}_{i\in\mathcal{N}} \rangle. \tag{2.5}$$

Avec les propriétés suivantes :

- $\mathcal{N}$ est un ensemble fini non vide de joueurs.
- À toute coalition non vide $S \subseteq \mathcal{N}$, on associe un ensemble non vide $\mathcal{S}_S$ contenant les stratégies de la coalition S.
- Si $S \neq \emptyset, T \subseteq \mathcal{N}$ avec $S \cap T = \emptyset$, alors $\mathcal{S}_S \times \mathcal{S}_T \subseteq \mathcal{S}_{S\cup T}$.
- On associe à tout joueur $i \in \mathcal{N}$, une fonction de gain $u_i : \mathcal{S}_{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.4 Jeu coalitionnel $(\mathcal{N}, v)$

On peut attribuer à chaque coalition une valeur $v(S)$ représentant la valeur maximale atteignable par la coalition S après qu'elle ait résolu son problème d'optimisation si elle est rationnelle.

- Un ensemble de joueurs $\mathcal{N}$.
- Une coalition S est un groupe de joueurs, sous-ensemble de $\mathcal{N}$ qui coopèrent.
- $v : 2^{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique, $v(S)$ représente le gain de la coalition S dans le jeu $(\mathcal{N}, v)$.
- $v(\mathcal{N})$ est la valeur de la grande coalition, coalition qui regroupe tous les joueurs.
- x_i est le paiement du joueur i.

On dit que le jeu $(\mathcal{N}, v)$ est :

– **Monotone** : si

$$\forall S, T \in 2^{\mathcal{N}} : S \subseteq T, \quad v(S) \leq v(T). \tag{2.6}$$

Par exemple, la fonction caractéristique du jeu majoritaire est monotone : lorsque plus d'agents rejoignent une coalition, ils ne peuvent pas faire passer la coalition d'un gagnant à un perdant. Beaucoup de jeux sont monotones, cependant, nous pouvons imaginer des jeux non-monotones. Citons par exemple, les frais généraux engendrés par les coûts de communication ou l'effort de coopération peuvent être tels que l'ajout d'un autre agent peut diminuer la valeur d'une coalition. Un autre exemple concerne deux agents qui ne s'aiment pas : la productivité d'une coalition peut diminuer lorsque les deux sont membres de la coalition.

– **Symétrique** : si

$$\forall S, T \in 2^{\mathcal{N}} : S = T, \quad v(S) = v(T). \tag{2.7}$$

Cette propriété stipule que la capacité d'une coalition dépend uniquement de sa taille et non de sa composition.

– **Additif (ou in-essentiel)** : si la fonction caractéristique est additivité selon la formule (2.4).

Quand un jeu est additif, $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, c'est-à-dire que la valeur de chaque coalition est la même que ses membres coopèrent ou pas : il n'y a pas de coopération ou de synergie entre coalitions, ce qui explique le nom alternatif (in-essentiel) utilisé pour de tels jeux.

– **Sur-additif** si : la fonction caractéristique est super-additive selon la formule (2.3).

En d'autres termes, il est préférable de fusionner en une seule paire de coalitions. De nombreux jeux sont super-additif. Comme nous avons supposé que la valeur d'une coalition est positive, la sur-additivité implique la monotonie (mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai). Dans de tels jeux, le bien-être social est maximisé en formant la grande coalition. Par conséquent, les agents ont des incitations à former la grande coalition.

– **Sous-additif** : si

$$\forall S, T \in 2^{\mathcal{N}}, S \cap T = \emptyset, \quad v(S \cup T) \leq v(S) + v(T). \tag{2.8}$$

Les agents sont mieux quand ils sont seuls, c'est-à-dire, la coopération n'est pas favorable.

– **Convexe** : si

$$\forall S, T \in 2^{\mathcal{N}}, \quad v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T). \tag{2.9}$$

– **Non-contraint** si : La fonction caractéristique peut être sur-additive pour certaines coalitions et sous-additive pour d'autres : certaines coalitions devraient fusionner alors que d'autres devraient rester séparées. C'est l'environnement le plus difficile et le plus intéressant.

Dans les jeux coopératifs il existe deux catégories selon le partage des gains (utilités) :

2.4.1 Jeux à utilités transférables (UT)

Définition 2.4. Un jeu coopératif est à utilité transférable (UT) lorsque la négociation porte sur le partage d'un bien divisible (transférable) que les joueurs évaluent en utilisant la même échelle utilitaire. Cela suppose notamment qu'une "monnaie" commune existe et que les joueurs peuvent effectuer des transferts "monétaires" entre eux. Autrement dit, dans les jeux (UT), on peut ajouter à chaque joueur la possibilité (dans ses stratégies) de transférer de l'utilité vers un autre joueur. Supposons qu'il existe une stratégie mauvaise pour le joueur 1 mais qui permet au joueur 2 de gagner beaucoup. Le joueur 2 peut alors inciter le joueur 1 à choisir cette stratégie quitte à lui transférer une partie de ces gains (de son utilité) pour le dédommager. Les joueurs ont donc intérêt à choisir les stratégies coopératives qui maximisent leurs gains additionnés puis de partager entre eux ce gain total, quitte à faire des transferts utilitaire.

Dans un jeu coopératif à utilité transférable on s'intéresse à la répartition entre les joueurs du résultat de la coopération, en tenant compte du potentiel de chacune des coalitions.

Cette problématique générale couvre de nombreuses situations réelles, notamment dans les domaines de l'économie et de la politique : partage de coûts, distribution de gains, exploitation de ressources communes, mesure du pouvoir de décision, etc. Les deux exemples suivants sont représentatifs de deux applications traditionnelles des jeux coalitionnels.

Exemple 2.5. (L'allocation de coûts).

Trois villes voisines A, B et C sont en contrat avec une société pour réaliser des adductions d'eau.

Le projet revient à 10 (millions d'euros) pour chaque municipalité prise séparément. Pour des raisons géographique, le constructeur propose des coûts (réduit) de respectivement $16, 17$ et 18 pour des contrats communs entre A et B, A et C, et B et C. Le contrat impliquant les trois villes a un coût de 24. Comment les coûts devraient-ils être répartis entre les trois villes ?

Ce problème peut être décrit par un jeu à trois joueurs, $\mathcal{N} = \{A, B, C\}$ où la valeur d'une coalition S est définie par l'économie de coût qu'un contrat commun entre ses membres permet de réaliser (comparé à la situation où chaque ville signerait un contrat individuel). On obtient ainsi

$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$
$v(\{A,B\}) = 4, v(\{A,C\}) = 3, v(\{B,C\}) = 2$ et $v(\mathcal{N}) = 6$

On notera que, dans ce jeu la coopération n'est jamais génératrice de perte, cette propriété appelée super-additivité est souvent retenue comme une condition naturelle qui doit être satisfaite par la fonction caractéristique d'un jeu coopératif.

Exemple 2.6. (Le pouvoir de décision).

Une société a quatre actionnaires, détenant respectivement $40, 30, 20$ et 10 des actions. Les décisions sont prises à la majorité des voix (une proposition doit, pour l'emporter, réunir plus de 50 des parts), chaque actionnaire ayant un poids proportionnel à sa part. Quel est le pouvoir de décision de chacun des actionnaires ?
L'Exemple 2.6 décrit une situation relevant de la classe des jeux simples avec $\mathcal{N} = \{1,2,3,4\}$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & si \quad |s| \geq 2, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Rappelons que un jeu simple est un jeu dont la fonction caractéristique ne prend que deux valeurs : 1 si la coalition vérifie une propriété donnée sinon 0.

2.4.2 Jeux à utilités non transférables (UNT)

On dit qu'un jeu coopératif est à utilité non transférable s'il n'est pas possible d'additionner les utilités des joueurs et de les redistribuer aux membres d'une coalition. Chaque membre d'une coalition essaie d'optimiser le montant obtenu par chacun individuellement. La définition formelle est la suivante :

Définition 2.5. Un jeu à utilité non-transférable (UNT) est défini par un tuple $(\mathcal{N}, X,$v$, (\succ_i)_{i\in\mathcal{N}})$ tel que

— $\mathcal{N}$ est un ensemble des joueurs,
— X est un ensemble de gains,
— $v : 2^{\mathcal{N}} \longrightarrow 2^X$ est une fonction qui décrit les gains $v(S) \subseteq X$ qui peuvent être obtenus par la coalition S,
— $\succ_i$ est la relation de préférence de l'agent i par rapport à l'ensemble des gains. La relation est supposée être transitive et complète.

Intuitivement, $v(S)$ est l'ensemble des résultats que les membres de S peuvent produire au moyen de leurs actions conjointes. Les agents ont une relation de préférence sur les résultats, ce qui a beaucoup de sens. Ce type de jeux est plus général que la classe des jeux hédoniques [11] ou même des jeux UT, car nous pouvons représenter ces jeux en utilisant un jeu UNT.

Définition 2.6. Le noyau d'un jeu UNT est :

$$noyau(v) = \{x \in v(\mathcal{N}) / \nexists S \subset \mathcal{N}, \quad \nexists y \in v(S), \quad \forall i \in S \quad y \succ_i x\} \tag{2.10}$$

Une imputation $x \in X$ est bloqué par une coalition S quand il y a une autre imputation $y \in X$ qui est préféré par tous les membres de S. Un résultat est alors dans le noyau quand il peut être réalisé par la grande coalition et il n'est pas bloqué par n'importe quelle coalition. Comme c'est le cas pour le jeu UT, il est possible que le noyau d'un jeu UNT soit vide.

Exemple 2.7. (Jeu de marché).

Chaque joueur ($i \in \mathcal{N}$) est un agent économique, doté d'un paquet $e_i \in \mathbb{R}_+^k$ de k marchandises. Les préférences de l'agent i sont décrites par une fonction d'utilité continue $u_i : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}$. Chaque coalition S peut regrouper ses ressources en un ensemble $\sum_{i \in S} e_i$ et échanger (redistribuer) ce paquet entre ses membres. Cette situation donne naissance à un jeu UNT $(\mathcal{N}, v)$ avec $v(\emptyset) = 0$ et pour toute coalition non vide S :

$$v(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y_i \in \mathbb{R}_+^k, i \in S, \text{ avec } \textstyle\sum_{i \in S} y_i \leq \sum_{i \in S} e_i \text{ et } x_i \leq y_i \quad \forall i \in S \ \}.$$

Considérons une économie d'échange avec deux biens (montants désignés par y^1 et y^2) et trois agents $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ et supposons que les fonctions d'utilité sont données par $u_i(y^1, y^2) = min\{a_i y^1, y^2\}$ pour tout $i = 1, 2, 3$, où $a_1 = a_2 = 1$ et $a_3 = \frac{1}{2}$.
Soit les dotations $e_1 = (10, 0), e_2 = (5, 5)$ et $e_3 = (0, 10)$. Le jeu UNT correspondant est décrit par :
$v(\{i\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \leq 0\}$, pour $i = 1, 3$.
$v(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 \leq 5\}$.
$v(\{1, 2\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 \leq 5, \quad x_1 \leq 5, \quad x_2 \leq 5\}$.
$v(\{1, 3\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + 2x_3 \leq 10, \quad x_1 \leq 10, \quad x_3 \leq 5\}$.
$v(\{2, 3\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 + x_3 \leq 5, \quad x_2 \leq 5, \quad x_3 \leq \frac{5}{2}\}$.
$v(\mathcal{N}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15, \quad x_1 \leq 15, \quad x_2 \leq 15, \quad x_3 \leq \frac{15}{2}\}$.
La solution (noyau) de ce jeu est l'ensemble $noyau(\mathcal{N}, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, x_2 = 5, x_1 + 2x_3 = 10\}$.

Exemple 2.8. Supposons qu'il y a une unité d'un bien parfaitement divisible à distribuer entre les agents de $\mathcal{N}$. Ces agents sont caractérisés par des fonctions d'utilité $u_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}(i \in \mathcal{N})$. Si les joueurs parviennent à un accord unanime sur une division du bien, alors le n-tuple correspondant des utilités est le résultat ; sinon, la partie se termine par un désaccord, ce qui signifie que chaque joueur ne reçoit rien, c'est-à-dire qu'il se retrouve avec l'utilitaire $u_i(0)$. Il en résulte un jeu UNT $(\mathcal{N}, v)$.

$$v(\mathcal{N}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha_i \geq 0 \quad (i \in \mathcal{N}), \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i = 1 \quad [x_i \leq u_i(\alpha_i), \quad \forall i \in \mathcal{N}]\},$$

et pour $S \neq \mathcal{N}$: $v(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in S \quad [x_i \leq u_i(0)]\}$.

Cela signifie que seule la grande coalition de tous les acteurs peut tirer profit de la coopération. Habituellement, un tel jeu est décrit par une paire (B, d) où $B = v(\mathcal{N})$ est l'ensemble réalisable et $d \in B$ est le résultat de désaccord, c'est dire, $d = (u_i(0))_{i \in \mathcal{N}}$.

Dans cet exemple, le noyau (i.e. ensemble des solutions) est constitué de tous les points limites x de $B = v(\mathcal{N})$ avec $x \geq d$. Pour de tels jeux, le noyau n'est pas un concept très restrictif.

2.5 Concepts de solutions des jeux coopératifs

Dans cette section nous étudierons les concepts de solutions des jeux coopératifs à utilité transférable $\mathcal{G}^{\mathcal{N}}$.

2.5.1 Concept du α-noyau

Le α-noyau a été introduit par Aumann [38]. C'est un ensemble des issues qui possèdent la propriété d'empêcher la formation des coalitions. Si une issue x est dans le α-noyau et si un certain nombre de joueurs envisagent de former une coalition et de dévier de x, alors le reste des joueurs possèdent au moins une stratégie qui va dissuader au moins un membre de la coalition envisagée d'y faire partie, car il ne pourra pas obtenir plus. Par conséquent, cette coalition ne se formera pas. De façon formelle, on a la définition suivante.

Définition 2.7. [14] : On appelle $\alpha - noyau$ du l'ensemble des issues $\bar{x} \in X$ vérifiant la propriété suivante :
Pour toute coalition $S \subseteq \mathcal{N}, \forall x_S \in X_S, \exists y_{-S} \in X_{-S}$ telle que le système suivant :

$$u_i(x_S, y_{-S}) > u_i(\bar{x}), \quad i \in S, \qquad \text{n'est pas vérifié.}$$

2.5.2 Concept du noyau

La notion du noyau d'un jeu coopératif a une longue histoire. L'idée de base a été formulée par Edgeworth [23].

Dans cette sous-section, nous discutons de certaines propriétés souhaitables qui relient les valeurs de la coalition aux gains individuels des agents.

Considérons le jeu coopératif à utilité transférable $\mathcal{G}^{\mathcal{N}}$. Le noyau est constitué de toutes les allocations $x = (x_1, ..., x_n)$ satisfaisant les propriétés suivantes.

Solution réalisable : On dit que x est réalisable si

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i \leq v(\mathcal{N}). \tag{2.11}$$

On note d'abord que seuls les vecteurs de gains $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (2.11) sont accessibles dans le jeu $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ ($\mathcal{G}^{\mathcal{N}}$: la classe des jeux UT avec l'ensemble des joueurs $\mathcal{N}$). La fonction de coalition est souvent appelée un jeu (avec utilité transférable) dans la forme caractéristique) et l'ensemble de tels vecteurs de gain est non vide et convexe. Plus précisément, c'est un demi-espace de $\mathbb{R}^n$. Nous désignons cet ensemble par $I^*(v)$, c'est-à-dire.

$$I^*(v) := \big\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \sum_{i \in \mathcal{N}} x_i \leq v(\mathcal{N})\big\}.$$

Anonymat : Une solution est indépendante des noms des agents. C'est une solution assez douce qui sera toujours satisfaite.

Efficacité (rationalité collective) : $x(\mathcal{N}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = v(\mathcal{N})$. La distribution des gains est une allocation de la valeur totale de la grande coalition à tous les joueurs. En d'autres termes, aucune utilité n'est perdue au niveau de la population. Ceci est particulièrement pertinent pour les jeux sur-additifs.

Rationalité individuel : Un agent ne sera membre d'une coalition que lorsque $x_i \geq v(\{i\}), \quad \forall i \in \mathcal{N}$. C'est-à-dire que pour faire partie d'une coalition, un joueur doit être mieux que lorsqu'il est seul.

Rationalité coalitionnelle : $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subseteq \mathcal{N}$. C'est-à-dire que la somme des gains d'une coalition devrait être au moins la valeur de la coalition (il ne devrait pas y avoir de perte au niveau d'une coalition).

Définition 2.8. Le *noyau*(v) d'un jeu $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ est l'ensemble.

$$noyau(v) := \big\{x \in I(v) / \sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = v(\mathcal{N}) \quad et \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad pour \quad tout \quad S \in 2^{\mathcal{N}} \setminus \emptyset\big\}. \tag{2.12}$$

Si $x \in noyau(v)$, aucune coalition S n'a d'incitation à se séparer si x est l'allocation de récompense proposée dans $\mathcal{N}$, car le montant total $\sum_{i \in S} x_i$ alloué à S n'est pas inférieur au montant $v(S)$ que les joueurs peuvent obtenir en formant la sous-couche. Si $noyau(v) \neq \emptyset$, alors les éléments de $noyau(v)$ peuvent facilement être obtenus car le noyau est défini à l'aide d'un système fini d'inégalités linéaires. Le noyau est un polytope.

La représentation graphique de noyau

Considérons le jeu $(\mathcal{N}, v)$, avec $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ et v définit par :
$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 1$, $v(\{1, 2\}) = 8$, $v(\{1, 3\}) = 5$, $v(2, 3) = 4$, $v(\mathcal{N}) = 10$.

Le simplexe dans $\mathbb{R}^3$, avec les sommets $(10, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$, $(0, 0, 10)$ représente la partie de l'ensemble de pré-imputation ($\sum_{i \in \mathcal{N}} x_1 = 10$) qui satisfait $x_i \geq 0$. La rationalité individuelle est déjà satisfaite pour les joueurs 1 et 2, mais pour obtenir l'imputation, nous devons aussi considérer la condition pour le joueur 3 ($x_3 \geq v(\{3\}) = 1$).

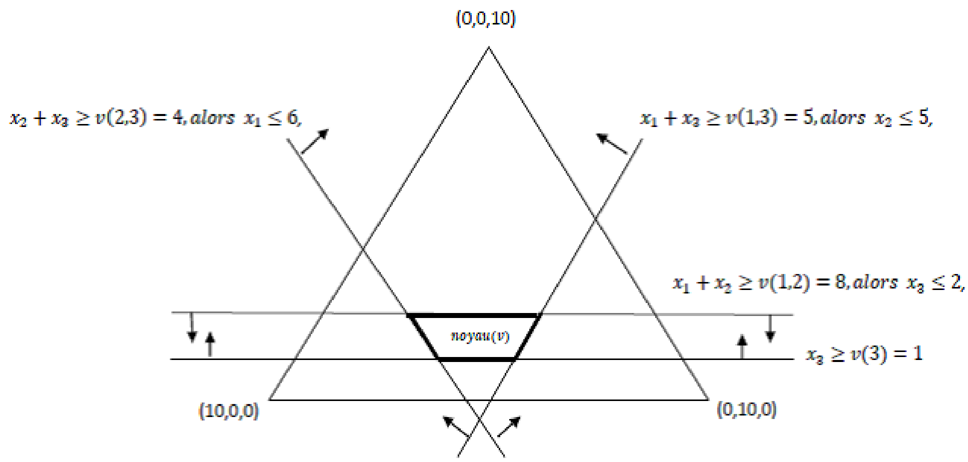

Figure 2.3 – La représentation graphique de noyau (zone délimitée par des lignes gras).

Les flèches représentent la direction des inégalités.
L'ensemble des imputations est constitué de tout $x \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Le noyau comprend toutes les imputations, qui satisfaisant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_3 \geq 4 \\ x_2 + x_3 \geq 5 \end{cases}$$

Nous savons que $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, donc nous pouvons substituer $x_1 + x_2 = 10 - x_3$ (et de même pour les deux autres inégalités). Nous obtiendrons :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 1 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 5 \\ x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

C'est exactement ce que nous pouvons voir représenté dans la figure ci-dessus.

2.5.3 Existence du noyau

Proposition 2.1.

(i) Dans un jeu simple, le noyau est vide s'il n'y a pas de joueur de veto.

(ii) S' il y a des joueurs de veto, le noyau se compose de tous les vecteurs de paiement dans lesquels les joueurs non veto obtiennent 0.

On dit que le joueur i est joueur de veto si $v(\{\mathcal{N} \setminus \{i\}) = 0$.

Preuve 2.1. (i) Aucun joueur n'a un droit de veto $\Leftrightarrow \forall i \in \mathcal{N}, \exists S$ tq $v(S) = 1$ et $i \notin S$, donc $v(\mathcal{N} \setminus \{i\}) = 1$.
$x \in noyau(v) \Rightarrow x(\mathcal{N}) = 1$ et $x(\mathcal{N} \setminus \{i\}) \geq v(\mathcal{N} \setminus \{i\})$ pour tout $i \Rightarrow$ (impossible).
(ii) Soit $\Lambda \neq \emptyset$ l'ensemble des joueurs ayant un droit de veto et x une répartition réalisable et positive qui donne un paiement nul aux joueurs qui n'ont pas de droit de veto :

$$\begin{cases} x_i > 0 \quad \forall i \in \Lambda \\ x_i = 0 \quad \forall i \notin \Lambda \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = 1. \end{cases}$$

• Si S est gagnante alors $\Lambda \subseteq S$, donc $x(S) = 1 = v(S)$.
• Si S est perdante alors $v(S) = 0$ donc $x(S) \geq v(S)$.
Donc $x \in noyau(v)$.

Théorème 2.1. [15] Chaque jeu convexe a un noyau non vide.

Définition 2.9. Du fait que le noyau soit défini par un système linéaire d'inéquations, ce genre de condition peut être déduites des conditions d'existence d'une solution au système général d'inéquations. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les coalitions ; pour n'importe quelle coalition S, soit K^S espace Euclidien de dimension Card(S), où les dimensions sont indexées par les membres de S, et on nomme $I_S \in K^{\mathcal{C}}$ le vecteur caractéristique de S donné par :

$$I_S = \begin{cases} 1 & si \quad i \in \mathrm{S}, \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{2.13}$$

Une collection de nombres entre zéro et un (poids $(\lambda_S)_{S\in 2^{\mathcal{N}}}$ est une collection équilibrée de poids si :

$$\sum_{S\in 2^{\mathcal{N}}} \lambda_S I_S = I_{\mathcal{N}}.$$

Définition 2.10. Un jeu $\mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ est équilibré si pour chaque collection équilibrée de poids, on peut avoir :

$$\sum_{S\in 2^{\mathcal{N}}} \lambda_S v(S) \leq v(\mathcal{N}). \tag{2.14}$$

Proposition 2.2. [20] : Un jeu $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ a un noyau non vide si et seulement s' il est équilibre.

Exemple 2.9. On considère un jeu majoritaire à trois joueurs, où chaque joueur consacre la moitié de son gain à chacune de ses coalitions à deux joueurs, tel que :
$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = \alpha$ et $\lambda_{\{1,2\}} = \lambda_{\{1,3\}} = \lambda_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$.

$$\textstyle\sum_{S\in 2^{\mathcal{N}}} \lambda_S v(S) = \frac{3}{2}\alpha.$$

Ainsi, si $\alpha > \frac{2}{3}$, le jeu n'est pas équilibré, et le noyau est vide.
Si $\alpha \leq \frac{2}{3}$, il est facile de voir que le jeu est équilibré, car les poids donnés ci-dessus sont les poids les plus rentables.

Stabilité du noyau

Le noyau d'un jeu $(\mathcal{N}, v)$ satisfait deux conditions d'après Kannai [20] :
La rationalité individuelle :

$$x_i \geq v_i \quad pour \quad tout \quad i \in \mathcal{N}. \tag{2.15}$$

La stabilité collective :

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} x_i = v(\mathcal{N}). \tag{2.16}$$

N'importe quelle allocation dans le noyau est une allocation efficiente, c'est-à-dire qu' elle respecte la stabilité collective.

De manière formelle, une allocation est dans le noyau si et seulement si :

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subseteq \mathcal{N}. \tag{2.17}$$

Partant de là, le noyau est un ensemble de profiles de paiements satisfaisant un système d'inéquations linéaires, et par conséquent un ensemble convexe fermé [22]. Ce sont ces paiements réalisables qui permettent de garantir qu'aucun des joueurs participants à la coalition n'est défavorisé par sa participation au jeu.

Exemple 2.10. Considérons un jeu à trois joueurs.
Si les trois joueurs forment une coalition peuvent obtenir 3 DA à partager,
Si chaque deux joueurs forment une coalition peuvent obtenir α, et un joueur seul obtient zéro.
Alors :
$v(\mathcal{N}) = 3, \quad v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = \alpha, \quad v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{\emptyset\}) = 0.$
Le noyau de ce jeu est $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 \geq \alpha, \quad x_1 + x_3 \geq \alpha, \quad x_2 + x_3 \geq \alpha\}$.
si $\alpha > 2$, le noyau est vide.
si $\alpha = 2$, le noyau est le seul point,$(1,1,1)$.
si $\alpha = 1$, le noyau contient plusieurs points.

Exemple 2.11. Soit le jeu suivant :

⋆ $1^{er} cas$

coalition S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	0	0	0	0	0	30

Table 2.1 – Noyau complet.

Dans ce cas, tous les joueurs obtiennent 30 seulement s'ils coopérent tous, alors le noyau est tous les points qui vérifient l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 30$, donc :
$\{x = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 + x_3 = 30\}$.

⋆ $2^{eme} cas$

coalition S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	30

Table 2.2 – Noyau normal.

Les joueurs 1 et 2 suffisent pour garantir 30, le noyau est :
$x_1 + x_2 + x_3 = 30, x_1 + x_2 \geq 30, x_i \geq 0,$

$\{x = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 = 30, x_3 = 0\}$
$noyau(v) = (x_1, 30 - x_1, 0)$

⋆ $3^{eme} cas$

coalition S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	0	0	30	30	30	30

Table 2.3 – Noyau vide.

Chaque deux joueurs suffisent pour garantir 30,
$x_1 + x_2 + x_3 = 30$, $x_1 + x_2 \geq 30$, $x_1 + x_2 \geq 30$, $x_2 + x_3 \geq 30$, $x_i \geq 0$,
dans ce cas, $\nexists x \in \mathbb{R}^3_+$ qui vérifié les contraintes, donc le noyau est vide.

2.5.4 Le nucléole

L'idée du nucléole, solution introduite par Schmeidler [30], ≪*est de minimiser le mécontentement maximum ou, en d'autres termes, minimiser la plainte la plus criante*≫ (Ekeland [25]). Pour le définir rigoureusement, quelques préliminaires techniques sont nécessaires.

Le principe d'équité du nucléole est de proposer une imputation notée x qui minimise l'insatisfaction de chacune des coalitions possibles $e(x, S)$, c'est-à-dire la différence entre le gain que les membres de la coalition peuvent obtenir en étant dans la coalition sans l'aide des autres $v(S)$ et ce qu'ils auraient avec l'imputation $x(S)$, soit :

$$e(x, S) = v(S) - x(S).$$

Ou bien

$$e(x, S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i. \tag{2.18}$$

Soit $\prec$ et $\preccurlyeq$ deux relations binaires sur $\mathbb{R}^P \quad (p \in \mathbb{N})$ définies par :

$$x \prec y \leftrightarrow [\exists j \in \{1, ..., p\} : (x_i = y_i \quad pour \quad i < j) \quad et \quad x_j < y_j].$$

$$x \preccurlyeq y \leftrightarrow [x < y \quad ou \quad x = y].$$

La relation $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total appelée ordre lexicographique.

D'autre part, on définit composante par composante une application $\theta : \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}^P$ dite de classement :

$$\theta_i = \max\{x_j / 1 \leq i \leq p\} = x_i.$$

$$\theta_j = \max\{x_j / 1 \leq i \leq p, i \neq i_1, i \neq i_2, ...i \neq i_{j-1}\} = x_{i_j}.$$

Définition 2.11. On appelle nucléole d'un jeu coopératif à utilité transférable $\mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ une imputation $(\bar{X}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ telle que, pour toute imputation $(x_i)_{i\in\mathcal{N}}$ on ait :
$\theta(v-\bar{x}) \preccurlyeq \theta(v-x)$.

Si $v(S)-x(S)>0$, la coalition S s'estimera lésée par l'imputation x, et bénéficiaire si $v(S)-x(S)<0$.

$v(S)-x(S)$ mesure le mécontentement de la coalition S face à l'imputation x et $\bar{x}$ minimise le mécontentement maximum.

Remarque. Deux éléments rendent le nucléole particulièrement intéressant. D'une part, il est unique et d'autre part, si le noyau n'est pas vide, alors le nucléole appartient à ce dernier. Ceci permet de sélectionner en quelque sorte une imputation du noyau, s'il en contenait plusieurs. Dans la littérature économique portant sur le bien-être social, il existe une analogie au nucléole offert par Rawls [32] qui propose, faute d'atteindre dans certains cas l'optimum de Pareto, de maximiser la fonction d'utilité de l'individu le plus démuni.

Théorème 2.2. [34] Si le noyau n'est pas vide, le nucléole est dans le noyau .

Exemple 2.12. Soit le jeu coalitionnelle $(\mathcal{N},v)$ défini par la fonction caractéristique suivante :
$\mathcal{N}=\{1,2,3\}, \quad v:2^{\mathcal{N}}\longrightarrow\mathbb{R}$.

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	0	0	5	6	6	8

Considérons deux vecteurs de gains $x=(x_1,x_2,x_3)=(3,3,2)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)=(2,3,3)$. Soit

S	$e(S,x)$
$\{1\}$	$v(\{1\})-x_1=-3$
$\{2\}$	$v(\{2\})-x_2=-3$
$\{3\}$	$v(\{3\})-x_3=-2$
$\{1,2\}$	$v(\{1,2\})-(x_1+x_2)=-1$
$\{1,3\}$	$v(\{1,3\})-(x_1+x_3)=1$
$\{2,3\}$	$v(\{2,3\})-(x_2+x_3)=1$
$\{1,2,3\}$	$v(\{1,2,3\})-(x_1+x_2+x_3)=0$

S	$e(S,y)$
$\{1\}$	$v(\{1\})-y_1=-2$
$\{2\}$	$v(\{2\})-y_2=-3$
$\{3\}$	$v(\{3\})-y_3=-3$
$\{1,2\}$	$v(\{1,2\})-(y_1+y_2)=0$
$\{1,3\}$	$v(\{1,3\})-(y_1+y_3)=1$
$\{2,3\}$	$v(\{2,3\})-(y_2+y_3)=0$
$\{1,2,3\}$	$v(\{1,2,3\})-(y_1+y_2+y_3)=0$

TABLE 2.4 – Le nucléole pour x et y

$e(x)$ la suite des excès de toutes les coalitions en x.
$e(x)=(-3,-3,-2,-1,1,1,0), \quad e(x)^{\triangleright}=(1,1,0,-1,-2,-3,-3)$.
$e(y)=(-2,-3,-3,0,1,0,0), \quad e(y)^{\triangleright}=(1,0,0,0,-2,-3,-3)$.
$e(x)^{\triangleright}$: représente l'ordre décroissant du vecteur $e(x)$.
$e(x)^{\triangleright} \succcurlyeq e(y)^{\triangleright}$ ou $e(x)^{\triangleright} \geqslant_{lex} e(y)^{\triangleright}$.

2.5.5 Valeur de Shapley

La valeur de Shapley diffère des autres solutions, exposées précédemment, dans la mesure où elle consiste en une évaluation a priori du jeu plutôt que d'être le résultat du jeu. Cette caractéristique en fait une solution qui, en quelque sorte, dispense de jouer. Pour mieux saisir sa motivation, d'après Shapley. Pour déterminer cette valeur, Shapley a adopté l'approche axiomatique qui revient à sélectionner, sur une base conceptuelle ou intuitive, l'ensemble de propriétés souhaitables qu'elle devrait avoir. Ce faisant, Shapley a énoncé des axiomes et a démontré l'existence d'un vecteur unique $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ qui les satisfait, où ϕ_i est la valeur du jeu pour le joueur i. Les axiomes sont les suivants :

Axiomes

$\phi_i(v)$ est un indice de pouvoir du joueur i/ une valeur du jeu pour le joueur i.

1. *Pareto optimalité* (efficacité) :
$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(N).$$
2. *Symétrie* : si i et j sont symétriques (substituts), i.e.,
$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \ \ \forall\, i, j \notin S \quad alors \quad \phi_i(v) = \phi_j(v).$$
L'axiome de symétrie requiert que les joueurs symétrique soient payés de la même portions du profit.
3. *Axiome de neutralité* : le troisième axiome requiert que des gains nuls (aucun gain), soient alloués à des joueurs dont les contributions marginales sont nulles pour n'importe quelle coalition. Si i est un joueur neutre, c'est-à-dire que :
$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \ \ \forall\, i \notin S \quad alors \quad \phi_i(v) = 0.$$
4. *Linéarité* (Additivité) : si v et w sont deux fonctions caractéristiques en rapport avec le même ensemble $\mathcal{N}$ de joueurs, alors :
$$\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w), \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$
5. *Le joueur Fictif* : pour chaque $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ et chaque joueur fictif $i \in \mathcal{N}, \phi_i(v) = v(\{i\})$.
Un joueur est dit fictif si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ pour toute coalition S telle que $i \in S$, c'est-à-dire sa contribution à S est seulement $v(\{i\})$. (Un cas particulier de joueur fictif est un joueur nul : un joueur nul ne génère aucun avantage et ne devrait rien recevoir).
6. *Anonymat* : pour tout $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ et tout, $i, j \in \mathcal{N}$ qui sont interchangeables dans v, il est vrai que $\phi_i(v) = \phi_j(v)$. Cet axiome signifie que la valeur doit traiter les joueurs également forts d'une manière égale.

La valeur de Shapley est sans doute le moyen le plus connu permettant de partager d'une manière rationnelle la valeur de la grande coalition entre tous les joueurs. On admet alors dans ce contexte que c'est cette coalition qui est formée. La valeur de Shapley [15], pour le jeu coalitionnelle est la règle qui assigne à chaque joueur $i \in \mathcal{N}$ un profit donné par la formule suivante :

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq \mathcal{N}, i \in S} \frac{(|S|-1)! \times (|\mathcal{N}|-|S|)!}{|\mathcal{N}|!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]. \tag{2.19}$$

Où
$|\mathcal{N}|$: nombre des joueurs.
$|S|$: nombre des joueurs dans S.
Ou bien

Soit Π l'ensemble de tous les ordres du jeu de joueurs. Prenons un joueur $i \in \mathcal{N}$ et un ordre $\pi \in \Pi$. La i^{eme} coordonnée du vecteur marginal $m_i^\pi(v)$ est donnée par :

$$m_i^\pi(v) := v(\{\pi(1), ..., \pi(k-1), \pi(k)\}) - v(\{\pi(1), ..., \pi(k-1)\}).$$

Où $i = \pi(k)$. La valeur de Shapley est définie comme la moyenne, sur l'ensemble Π, des vecteurs marginaux, c'est-à-dire :

$$\phi(v) = \frac{1}{|\Pi|} \sum_{\pi \in \Pi} m^\pi(v). \tag{2.20}$$

Supposons que la grande coalition se forme de manière séquentielle selon un ordre d'entrée. Il existe $(|S|-1)! \times (|\mathcal{N}|-|S|)!$ façons de faire entrer les joueurs de $S \setminus \{i\}$, puis i, et enfin les joueurs de $\mathcal{N} \setminus S$. Le joueur i a donc $(|S|-1)! \times (|\mathcal{N}|-|S|)!$ possibilités de recevoir la rémunération $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. En réitérant l'opération sur toutes les coalitions de $\mathcal{N}$ contenant i puis en divisant par le nombre total d'ordres d'entrée possibles des joueurs, c'est-à-dire $\mathcal{N}!$, nous obtenons la moyenne des contributions marginales du joueur i aux coalitions de $\mathcal{N}$.

Théorème 2.3. [15] Une solution $x \in \mathcal{N}$ satisfait l'additivité, l'anonymat, la propriété du joueur fictif, et l'efficacité (Pareto optimalité) si et seulement si c'est la valeur de Shapley.

Théorème 2.4. [15] Pour chaque jeu convexe, la valeur de Shapley est dans l'intérieur de noyau.

Exemple 2.13. Soit le jeu : $\mathcal{N} = \{a, b, c\}$

les coalitions (S_i)	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$v(S_i)$	6	4	8	23	23	22	41

Valeur de Shapley par l'équation (2.19) :
Pour $i = a$ et $a \in S$ tq $S \in \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.

$$\phi_a = \sum_{S \subseteq \mathcal{N}, a \in S} \frac{(|S|-1)! \times (|\mathcal{N}|-|S|)!}{|\mathcal{N}|!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

$$\phi_a = 2 + \frac{17}{6} + \frac{17}{6} + \frac{19}{3} = 14.$$

Pour $i = b$ et $b \in S$ tq $S \in \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

$$\phi_b = \frac{4}{3} + \frac{17}{6} + \frac{7}{3} + \frac{18}{3} = 12.5.$$

Pour $i = c$ et $c \in S$ tq $S \in \{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

$$\phi_c = \frac{8}{3} + \frac{17}{6} + \frac{18}{6} + \frac{18}{3} = 14.5.$$

Valeur de Shapley pour l'équation (2.20) : soit $\pi \in \Pi$ on pose $\pi = (a - b - c)$.
$m_a^\pi = v(\{a\}) - v(\emptyset) = 6.$
$m_b^\pi = v(\{a,b\}) - v(\{a\}) = 17.$
$m_c^\pi = v(\{a,b,c\}) - v(\{a,b\}) = 18.$
Puis on remplions le tableau suivant comme ça :

Ordres possibles ($n! = 6$)	a	b	c
$a-b-c$	$v(a) = 6$	$v(a,b) - v(a) = 17$	$v(a,b,c) - v(a,b) = 18$
$a-c-b$	$v(a) = 6$	$v(a,c,b) - v(a,c) = 18$	$v(a,c) - v(a) = 17$
$b-a-c$	$v(b,a) - v(b) = 19$	$v(b) = 4$	$v(b,a,c) - v(b,a) = 18$
$b-c-a$	$v(b,c,a) - v(b,c) = 19$	$v(b) = 4$	$v(b,c) - v(b) = 18$
$c-a-b$	$v(c,a) - v(c) = 15$	$v(c,a,b) - v(c,a) = 18$	$v(c) = 8$
$c-b-a$	$v(c,b,a) - v(c,b) = 19$	$v(c,b) - v(c) = 14$	$v(c) = 8$
total	84	75	87
ϕ_i	14	12.5	14.5

Table 2.5 – Valeur de Shapley

2.5.6 La valeur de τ

La valeur de τ a été introduite par Tiji [33] et elle est définie pour chaque jeu quasi-équilibré. Cette valeur est basée sur le vecteur supérieur $M(\mathcal{N}, v)$ et le vecteur inférieur $m(v)$ d'un jeu $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$.

Définition 2.12. Un jeu $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}}$ est appelé quasi-équilibré si les conditions suivants sont vérifient.
(i) $m(v) \leq M(\mathcal{N}, v)$,
(ii) $\sum_{i=1}^n m_i(v) \leq v(\mathcal{N}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(\mathcal{N}, v)$.

L'ensemble des jeux quasi-équilibrés n-personne sera noté $\mathcal{Q}^{\mathcal{N}}$. On peut prouver que chaque jeu équilibré est quasi équilibré.

$$M(\mathcal{N}, v) = (M_1(\mathcal{N}, v), M_2(\mathcal{N}, v), M_3(\mathcal{N}, v), ...).$$

$$M_i(\mathcal{N}, v) = v(\mathcal{N}) - v(\mathcal{N} \setminus \{i\}).$$

Pour chaque $i \in \mathcal{N}$, la i^{eme} coordonnée $M_i(\mathcal{N}, v)$ du vecteur supérieur $M(\mathcal{N}, v)$ est la contribution marginale du joueur i à la grande coalition, on l'appelle aussi le gain de l'utopie pour le joueur i dans la grande coalition dans le sens où si le joueur en veut plus, alors il est avantageux pour les autres joueurs de $\mathcal{N}$ de lancer le joueur i.

Définition 2.13. Soit $S \in 2^{\mathcal{N}} \setminus \{\emptyset\}$ et $i \in S$. Le reste $\mathcal{R}(S, i)$ du joueur i dans la coalition S est la somme qui reste pour le joueur i et la coalition S et tous les autres joueurs dans S obtiennent leurs gains utopiques, c-à-d :

$$\mathcal{R}(S, i) := v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(\mathcal{N}, v). \tag{2.21}$$

Pour chaque $i \in \mathcal{N}$, la i^{eme} coordonnée $m_i(v)$ du vecteur inférieur $m(v)$ est alors définie par :

$$m_i(v) := \max_{S: i \in S} \mathcal{R}(S, i). \tag{2.22}$$

On considère également $m_i(v)$ comme le paiement minimum à droite pour le joueur i, puisque ce joueur a une raison de demander au moins $m_i(v)$ dans la grande coalition $\mathcal{N}$, en soutenant qu'il peut obtenir ce montant également en cas de perte. Coalition S avec $m_i(v) = \mathcal{R}(S, i)$ et rendant tous les autres joueurs de S avec leurs gains utopiques.

Remarque.

Pour un jeu $\mathcal{Q}^{\mathcal{N}}$, $\tau(v)$ est le vecteur de gains efficace unique sur le segment de ligne $[m(v), M(v)]$, situé dans l'hyperplan E de vecteurs de rentabilité efficace.

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = v(\mathcal{N})\}. \tag{2.23}$$

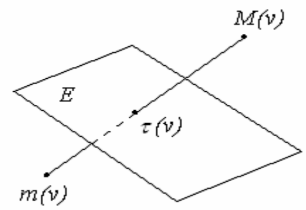

FIGURE 2.4 – La représentation graphique de la valeur τ.

Définition 2.14. Pour un jeu $v \in \mathcal{Q}^{\mathcal{N}}$, la valeur de τ, $\tau(v)$ est définie par :

$$\tau(v) = \alpha m(v) + (1-\alpha) M(\mathcal{N}, v). \tag{2.24}$$

Où $\alpha \in [0,1]$ est uniquement déterminé par $\sum_{i\in\mathcal{N}} \tau_i(v) = v(\mathcal{N})$.

Proposition 2.3. Soit $v \in \mathcal{Q}^{\{1,2\}}$, alors

(i) $\tau(v) = \phi(v)$.

(ii) $\tau(v)$ est au milieu du *noyau*(v).

Preuve 2.2.

(i) Pour la valeur de Shapley et pour la valeur de τ, nous avons $\phi(v) = (\phi_i(v))_{i\in\{1,2\}}$ avec $\phi_i(v) = \frac{1}{2}v(\{i\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{3-i\}))$, et

$$\begin{aligned}
\tau(v) &= \frac{1}{2}(M(\mathcal{N}, v) + m(v)) \\
&= \frac{1}{2}((v(\{1,2\}) - v(\{2\}), v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + v(\{1\}), v(\{2\})) \\
&= \phi(v).
\end{aligned}$$

(ii) A partir de (i) il s'enduit que $\tau(v) = \phi(v) = \frac{1}{2}(f^1 + f^2)$, est au milieu du *noyau*(v).

Exemple 2.14. Soit $v \in \mathcal{G}^{\mathcal{N}=\{1,2,3\}}$ avec $v(\mathcal{N}) = 5, v(\{i\}) = 0$ pour chaque $i \in \mathcal{N}$.
$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 2, v(\{2,3\}) = 3$.

Puis $M(\mathcal{N}, v) = (2,3,3)$, $m_1(v) = \max\{0-0, 2-3, 2-3, 5-6\} = \max\{0,-1,-1,-1\} = 0, m_2(v) = m_3(v) = \max\{0,0,0,0\} = 0$. Alors $m(v) = (0,0,0)$.

Par conséquent, $\tau(v) = \alpha m(v) + (1-\alpha) M(\mathcal{N}, v) = \frac{5}{8}(2,3,3) = \frac{5}{8} M(\mathcal{N}, v)$.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les jeux coopératifs en deux formes à savoir la forme stratégique et la forme coalitionnel, ainsi les jeux coopératifs à utilité transférable et non transférable, enfin quelques concepts de solutions pour les jeux coopératifs à utilité transférable.

Chapitre 3

Allocation de coûts dans les réseaux bancaires : Cas des réseaux ATM

3.1 Introduction

Par les guichets automatiques (ATM), les organisations financières (ci-après dénommées banques) fournissent un service, par exemple, retraits d'espèces, à leurs clients.

Les coûts de transaction découlant d'un tel réseau dépendent de la façon dont les transactions sont traitées. Si les ATMs du réseau ne sont pas facilement accessibles pour les clients des banques membres, les clients auront tendance à utiliser d'autres moyens de traitement de leurs transactions, par exemple, retirer de l'argent sur le comptoir. De plus, le coût du traitement d'une transaction sera plus élevé si le traitement implique la liaison de systèmes informatiques d'institutions différentes, que si ces liens ne sont pas nécessaires. La disponibilité, pour un client particulier, des ATMs appartenant au réseau auquel sa banque est affiliée, et notamment des ATMs appartenant à sa propre banque, dépend de la localisation personnel du client ainsi que des différents ATMs du réseau, puisque le client doit être personnellement présent sur le site d'un distributeur afin de pouvoir l'utiliser.

3.2 Présentation du problème

Pour diverses raisons, des réseaux de guichets automatiques se sont formés, composés de plusieurs banques, où les clients d'une banque peuvent utiliser les guichets automatiques de n'importe quelle banque du réseau. Dans un tel système, il y a une différence entre les coûts encourus par une banque et les coûts réellement causés par les clients de cette banque. De tels déséquilibres dans l'utilisation du réseau peuvent être compensés en fixant des frais d'interchange. A chaque fois qu'un client de la banque i utilise un guichet automatique de la banque j, la banque i doit payer une taxe f_{ij} à la banque j. La fixation de frais d'interchange équivaut à l'attribution du coût total résultant d'un tel réseau, et la structure des frais sera le résultat d'un processus de négociation impliquant les banques participantes.

3.3 Jeu ATM

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des banques (joueurs). Nous définissons un lieu comme une ville ou une partie de celle-ci, et notons L l'ensemble des emplacements (ville, partie d'une ville,...etc).
Considérons les éléments suivants :
- n_i^l : le nombre de transactions de la banque $i \in \mathcal{N}$ dans l'emplacement $l \in L$.
- $n^l(S) = \sum_{i \in S} n_i^l$: désigne le nombre de transactions appartenant à S dans l'emplacement l, $\forall S \subseteq \mathcal{N}$.
- A^l : l'ensemble des banques qui ont des ATMs dans l'emplacement l, $A^l \subseteq \mathcal{N}$.

De plus, soit $L_1 := \{l \in L, |A^l| = 1\}$ l'ensemble des emplacements où une seule banque est représentée, et soit $L_M := \{l \in L; |A^l| > 1\}$ l'ensemble des endroits où plusieurs banques sont représentées. Nous supposerons que $L = L_1 \cup L_M$, c'est-à-dire qu'il y a des ATMs dans tous les endroits.

En ce qui concerne le comportement des clients, nous supposons que, si une coalition S a formé un réseau on aura :

> **A1** : Les transactions à un endroit particulier seront traitées par un guichet automatique si un ou plusieurs membres de S y ont un guichet automatique.
>
> **A2** : Lorsqu'un client de la banque ($i \in S$) effectue une transaction dans un lieu l, et si la banque possède des guichets automatiques dans l'emplacement l, le client utilisera l'un des ATMs de la banque i.

Les coûts de transaction sont supposés être les mêmes pour toutes les banques.

Le coût de la transaction sera α si le client utilise un guichet automatique de sa propre banque.

S'il utilise un guichet automatique d'une autre banque, le coût de la transaction sera β où $\beta > \alpha$.

Le coût des transactions non-ATM est complexe, car il existe plusieurs alternatives à l'utilisation des guichets automatiques, comme le retrait d'argent au comptoir, l'écriture d'un chèque à un tiers en échange d'argent ou l'utilisation d'une facilité de remboursement. Dans l'exemple de quatre banques de Gow et Thomas [29], le coût du retrait en espèces au comptoir est utilisé comme approximation de ce coût. Nous supposerons que le coût d'une transaction non-ATM est γ où $\gamma > \beta$.

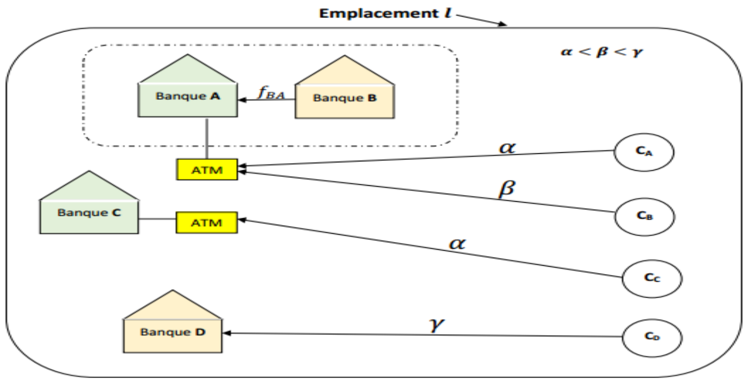

FIGURE 3.1 – Principe d'un jeu ATM

.

Supposons que S forme un réseau. Les hypothèses **A1** et **A2** impliquent, pour tout emplacement $l \in L$ et $S \subseteq \mathcal{N}$, que le montant total des coûts de transaction à l'emplacement l est donné par :

$$c^l(S) := \begin{cases} \sum_{i \in S \cap A^l} \alpha n_i^l + \sum_{i \in S \setminus A^l} \beta n_i^l & si \quad S \cap A^l \neq \emptyset, \\ \sum_{i \in S} \gamma n_i^l & sinon. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ou bien :

$$c^l(S) := \begin{cases} \alpha n^l(S \cap A^l) + \beta n^l(S \setminus A^l) & si \quad S \cap A^l \neq \emptyset, \\ \gamma n^l(S) & sinon. \end{cases} \tag{3.2}$$

Exemple 3.1. Considérons un emplacement l où les trois banques B_1, B_2 et B_3 ont des clients. Le nombre de clients de ces banques à l est donné comme suit :
$n_{B_1}^l = 150$, $n_{B_2}^l = 200$, $n_{B_3}^l = 250$.

Les coûts des transactions ATM ou non-ATM sont les suivants :

* $\alpha = 2$ pour les clients utilisant des ATMs de leur propre banque,
* $\beta = 4$ si les clients utilisant des ATMs de l'autre banque,
* $\gamma = 10$ pour les transaction non-ATM (comptoir).

Les banques B_1 et B_3 ont des ATMs à l'emplacement l. Dans la terminologie précédente, nous avons $A^l = \{B_1, B_3\}$. Ensuite, ces paramètres fixent le jeu de coût de la coalition c^l.

Le coût auquel la coalition $\{B_1\}$ est capable de servir tous ses clients est $c^l(\{B_1\}) = \alpha n_{B_1}^l = 300$, puisque $B_1 \in A^l$. De même, nous calculons $c^l(\{B_3\}) = \alpha n_{B_3}^l = 500$. Puisque $B_2 \notin A^l$, nous avons $c^l(\{B_2\}) = \gamma n_{B_2}^l = 2000$.

Le coût de servir les clients de B_1 et B_2 ensemble sont $c^l(\{B_1, B_2\}) = \alpha n_{B_1}^l + \beta n_{B_2}^l = 300 + 800 = 1100$. Les clients de B_1 et B_3 sont tous desservis par l'ATM de leur propre banque, d'où $c^l(\{B_1, B_3\}) = \alpha(n_{B_1}^l + n_{B_3}^l) = 800$ et $c^l(\{B_2, B_3\}) = \alpha n_{B_3}^l + \beta n_{B_2}^l = 1300$. De cette façon, nous calculons le coût associé à chaque coalition, comme illustré à la Table 3.1 suivante :

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1, B_2\}$	$\{B_1, B_3\}$	$\{B_2, B_3\}$	$\mathcal{N}$
$c^l(S)$	300	2000	500	1100	800	1300	1600

TABLE 3.1 – Les valeurs pour c^l.

Pour lier ce jeu en réalité, il serait approprié d'étudier le jeu de réduction des coûts correspondant v^l.
Soit $s_i^l := (\gamma - \beta)n_i^l$ les économies de coûts qui se produisent si les transactions de la banque $i \in \mathcal{N} \backslash A^l$ peuvent être traitées via un ATM d'une autre banque.

Le jeu ATM à emplacement unique v^l est donné par, pour tout $S \subseteq \mathcal{N}$.

$$v^l(S) := \sum_{i \in S} c^l(\{i\}) - c^l(S) = \begin{cases} \sum_{i \in S \backslash A^l} s_i^l & si \quad S \cap A^l \neq \emptyset, \\ 0 \quad sinon. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ou bien :

$$v^l(S) := \sum_{i \in S} c^l(\{i\}) - c^l(S) = \begin{cases} (\gamma - \beta)n_i^l(S \setminus A^l) & si \quad S \cap A^l \neq \emptyset, \\ 0 \quad sinon. \end{cases} \tag{3.4}$$

Tous les résultats pour un jeu d'économies de coûts peuvent facilement être traduits dans le cadre d'un jeu à coût réduit.

Exemple 3.2. Maintenant, nous revenons à l'Exemple 3.1. Les économies de coûts de la coalition pour cet exemple sont indiquées dans le tableau ci-dessous. Notons que les économies de coûts, c'est-à-dire les valeurs de v^l, proviennent des transactions des banques qui n'ont pas d'ATM dans le lieu l, c'est-à-dire la banque B_2 dans ce cas. Notons également que les coalitions individuelles ont des valeurs nulles. Les joueurs individuels n'épargnent aucun frais, qu'ils aient ou non des ATMs de billets.

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1, B_2\}$	$\{B_1, B_3\}$	$\{B_2, B_3\}$	$\mathcal{N}$
$S \setminus A^l$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_2	$\emptyset$	B_2	B_2
$v^l(S)$	0	0	0	1200	0	1200	1200

TABLE 3.2 – Les valeurs pour v^l.

Le jeu ATM v est obtenu en agrégeant sur l'ensemble des emplacements, c'est-à-dire, pour chaque $S \subseteq \mathcal{N}$,

$$v(S) := \sum_{l \in L} v^l(S) = (\gamma - \beta) \sum_{l \in L : S \cap A^l \neq \emptyset} n^l(S \backslash A^l). \tag{3.5}$$

Ou bien :

$$v(S) := \sum_{l \in L} v^l(S) = \sum_{l \in L : S \cap A^l \neq \emptyset} s^l(S \backslash A^l). \tag{3.6}$$

Soit le jeu d'économies $\mathcal{GN}$, le noyau est défini comme :

$$noyau(v) := \{x \in \mathbb{R}^n : x(\mathcal{N}) = v(\mathcal{N}), x(S) \geq v(S), \quad \forall S \subset \mathcal{N}\}. \tag{3.7}$$

Soit Π l'ensemble de toute les permutations du jeu des joueurs. Prenons un joueur $i \in \mathcal{N}$ et une permutation $\pi \in \Pi$. La i^{eme} coordonnée du vecteur marginal $m_i^\pi(v)$ est donnée par :

$$m_i^\pi(v) := v(\{\pi(1), ..., \pi(k-1), \pi(k)\}) - v(\{\pi(1), ..., \pi(k-1)\}).$$

Où $i = \pi(k)$. La valeur de Shapley est définie comme la moyenne, sur l'ensemble Π, des vecteurs marginaux, c'est-à-dire :

$$\phi(v) = \frac{1}{|\Pi|} \sum_{\pi \in \Pi} m^\pi(v). \tag{3.8}$$

Ou bien on utilise directement la définition de la valeur de Shapley :

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq \mathcal{N}, i \in S} \frac{(|S|-1)! \times (|\mathcal{N}| - |S|)!}{|\mathcal{N}|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]. \tag{3.9}$$

Si v est un jeu convexe, c'est-à-dire si $v(S) + v(T) < v(S \cup T) + v(S \cap T), \quad \forall S, T \subseteq \mathcal{N}$.

Alors nous savons par Shapley [15] que $noyau(v) = conv\{m^\pi(v) : \pi \in \Pi\}$, et donc que $\phi(v) \in noyau(v)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x(\mathcal{N}) = v(\mathcal{N})$, et pour $S \subseteq \mathcal{N}$, $e(S, x) := v(S) - x(S)$ est appelé la valeur excessive de S par rapport à x. Soit $\theta(x)$ le (2^n-tuple) dont les composantes sont les excès $e(S, x), S \subseteq \mathcal{N}$, disposés dans un ordre décroissant.

D'après Schmeidler [30], le nucléole est le vecteur de gain x tel que $x(\mathcal{N}) = v(\mathcal{N})$, et tel que $\theta(x)$ est lexicographiquement minimal.

Pour chaque $i \in \mathcal{N}$, soit $M_i(v) := v(\mathcal{N}) - v(\mathcal{N} \setminus \{i\})$ désigne la i^{eme} coordonnée du vecteur utopique $M(v)$. Aussi, soit $m_i(v) := \max_{i \in S}\{v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(v)\}$ désigne la i^{eme} coordonnée du vecteur de droits minimum $m(v)$. Si v a un noyau non vide, alors la valeur de τ, est donnée par la combinaison convexe de $M(v)$ et $m(v)$ qui satisfait la condition suivante :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \tau_i(v) = v(\mathcal{N}).$$

3.4 Propriétés et solutions des jeux à emplacement unique

Dans cette section, nous considérons les jeux à emplacement unique. Premièrement, nous montrons que ces jeux sont des jeux du marché de l'information. Deuxièmement, nous considérons certaines allocations pour ces jeux. Ici, nous faisons la distinction entre les cas où il y a une seule banque dans l'emplacement et qu'il y a plus d'une banque dans l'emplacement.

Un jeu à emplacement unique peut être lié à la classe des jeux du marché de l'information, voir Muto et al. [18] ainsi que Potters et al. [19]. Un jeu du marché de l'information consiste en un ensemble de joueurs $\mathcal{N}$, où un sous-ensemble $I \subset \mathcal{N}$ possède des informations sur une nouvelle technologie (brevetée), nécessaire pour produire un nouveau produit. Le marché total de ce nouveau produit peut être divisé en sous-marchés, et les bénéfices réalisés par une coalition dépendent des sous-marchés auxquels la coalition a accès.

Soit M_T l'ensemble des sous-marchés auxquels la coalition T a accès, et notons r_T le profit qui peut être réalisé à partir de ces sous-marchés.

Une coalition S peut réaliser le profit r_T si elle a au moins un membre ayant accès aux sous-marchés M_T, soit $(S \cap T = \emptyset)$, ainsi qu'au moins un membre ayant une connaissance de la technologie brevetée c'est-à-dire $S \cap I = \emptyset$. Par conséquent, le bénéfice total qui peut être réalisé par les membres de S est donné par :

$$v_{I,r}(S) = \begin{cases} \sum_{T:T\cap S\neq\emptyset} r_T & si \quad S \cap I \neq \emptyset, \\ 0 \quad sinon. \end{cases} \tag{3.10}$$

Soit alors le jeu du marché de l'information $(\mathcal{N}, v_{I,r})$. Muto et al. [43] montrent que :
Si $|I| = 1$, alors le nucléole, la valeur τ et (dans le cas convexe) la valeur de Shapley, coïncide.

Potters et Tijs [19] montrent que :
Si $|I| \geq 2$, et si $r_T = 0$ pour tout $T \subseteq \mathcal{N}$ tel que $|T| > 1$, alors le noyau consiste en un seul point.

Théorème 3.1. Un jeu d'ATM à emplacement unique est un jeu du marché de l'information.

Preuve 3.1. On obtient $v^l = v_{I,r}$ en mettant $I := A^l$ et

$$r_T := \begin{cases} (\gamma - \beta)n_i^l \quad si \quad T = \{i\} \subset \mathcal{N} \setminus A^l, \\ 0 \quad sinon. \end{cases} \tag{3.11}$$

3.4.1 Emplacement où une seule banque possède des ATMs

Dans cette sous-section, nous discutons un jeu à emplacement unique qui n'a qu'une seule banque dans l'emplacement.

D'après le Théorème 3.1, et puisque $|A^l| = 1$, ce cas est couvert par Muto et al. [43]. De plus, puisque $r_T = 0$ pour tout $(T \subseteq \mathcal{N})$ tel que $|T| \geq 2$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.1. [15], [43] Si $l \in L_1$, alors le jeu v est convexe.

Nous désignons la banque ayant des ATMs dans la localisation l par i^l.

Proposition 3.2. [43] Si $l \in L_1$ alors on a :
(a) $noyau(v^l) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(\mathcal{N}) = v^l(\mathcal{N}), 0 \leq x \leq (\gamma - \beta)n_i^l, \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus \{i\}\}$.
(b) $noyau(v^l) = conv\{m^\pi(v^l), \pi \in \Pi\}$.

La Proposition 3.2.(b) est très utile ici, car les vecteurs de contributions marginales ont une structure simple dans ce cas. Pour tout $\pi \in \Pi$, soit $S_\pi^l := \{i \in \mathcal{N} : \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(i^l)\}$, c'est-à-dire S_π^l est l'ensemble des joueurs qui précèdent i^l dans l'ordre π.

Proposition 3.3. Si $l \in L_1$, alors on a :

$$m_i^\pi(v^l) = \begin{cases} 0 \quad si \quad i \in S_\pi^l, \\ (\gamma - \beta)n^l(S_\pi^l) \quad si \quad i = i^l, \\ (\gamma - \beta)n_i^l \quad si \quad i \in \mathcal{N} \setminus S_\pi^l. \end{cases} \tag{3.12}$$

Preuve 3.2. Considérons un joueur arbitraire $i \in \mathcal{N}$. Si $i \neq i^l$, et i rejoint une coalition S, alors une économie de coût supplémentaire de $(\gamma - \beta)n_i^l$ sera réalisée, mais seulement si i est déjà un membre de S. Si $i = i^l$, alors i permettra à tous les joueurs qui sont déjà en S de faire des économies.

Exemple 3.3. Considérons une situation où les banques B_1, B_2 et B_3 ont des clients dans l'emplacement l, tels que :
$n_{B_1}^l = 100$,
$n_{B_2}^l = 150$,
$n_{B_3}^l = 125$.

Les coûts de transactions sont donnés dans l'Exemple 3.1 comme suit :
$\alpha = 2$, $\beta = 4$, et $\gamma = 10$.

La seule banque qui a des ATMs dans l'emplacement l est B_1 ($A^l = \{B_1\}$). Les valeurs du jeu v^l sont illustrées à la Table 3.3, et les vecteurs marginaux sont présentés à la Table 3.4. A partir de l'image du noyau montrée à la Figure 3.2, la coïncidence des points extrêmes du noyau avec les vecteurs marginaux peut en effet être vérifiée. Observons que, bien qu'il y ait six ordres différents du jeu des joueurs, il n'y a que quatre vecteurs marginaux distincts. Les deux vecteurs marginaux pour lesquels la banque B_1 vient en premier (le dernier) coïncide, comme on peut facilement le voir sur la Table 3.4 :

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1, B_2\}$	$\{B_1, B_3\}$	$\{B_2, B_3\}$	$\mathcal{N}$
$S \setminus A^l$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_2	B_3	$\emptyset$	$\{B_2, B_3\}$
$v^l(S)$	0	0	0	900	750	0	1650

Table 3.3 – Le jeu v^l en Exemple 3.3.

π	$m^{\pi}_{B_1}(v^l)$	$m^{\pi}_{B_2}(v^l)$	$m^{\pi}_{B_3}(v^l)$
B_1, B_2, B_3	0	900	750
B_1, B_3, B_2	0	900	750
B_2, B_1, B_3	900	0	750
B_2, B_3, B_1	1650	0	0
B_3, B_1, B_2	750	900	0
B_3, B_2, B_1	1650	0	0
$\phi(v^l)$	825	450	375

TABLE 3.4 – Les vecteurs marginaux de l'Exemple 3.3.

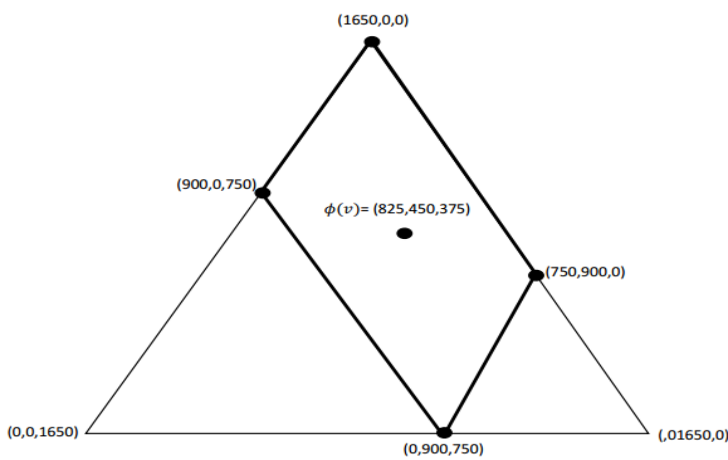

FIGURE 3.2 – Le noyau de l'Exemple 3.3 (zone délimitée par des lignes gras).

Selon la Proposition 3.2 (a), une banque i qui n'a pas elle-même un ATM, c'est-à-dire $i \neq i^l$, devrait être récompensée d'un montant non négatif, mais pas plus que les économies de coûts de transactions, à savoir $(\gamma - \beta)n_i^l$. Ensuite, nous considérons une allocation de cœur spéciale qui est un compromis entre les limites inférieure et supérieure présentées par la Proposition 3.2 (a). La banque i peut conserver la moitié des économies de coûts découlant de ses transactions et d'attribuer la moitié restante des économies de coûts à la banque qui possède le(s) ATM(s), c'est-à-dire i^l. Il en résulte l'allocation w^l donnée par, pour chaque $i \in \mathcal{N}$,

$$w_i^l := \begin{cases} (\dfrac{\gamma - \beta}{2})n^l(\mathcal{N} \setminus \{i\}) \quad si \quad i = i^l, \\ \\ (\dfrac{\gamma - \beta}{2})n_i^l \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Proposition 3.4. [18] Si $l \in L$, et w^l est donnée par l'équation (3.13), alors on :

$$w^l = \phi(v^l) = Nu(v^l) = \tau(v^l).$$

Exemple 3.4. Dans l'Exemple 3.3, la banque B_1 fournit des économies de coûts à B_2 et B_3 en laissant leurs clients utiliser leurs ATM. Pour la banque B_2, ces économies s'élèvent à $150 \times (10 - 4) = 900$, dont B_2 est autorisé à conserver la moitié, soit 450. Les transactions de la banque B_3 engendrent des économies de coûts de $125 \times 6 = 750$, et il est autorisé à conserver 375. La valeur de Shapley, le nucléole et la valeur τ coïncident tous avec le point $(825, 450, 375)$.

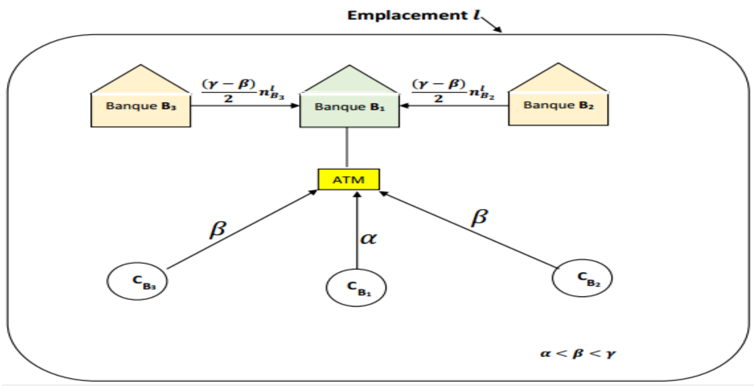

FIGURE 3.3 – Répartition des économies des coûts par la formule (3.13).

3.4.2 Emplacement où plusieurs banques ont des ATMs

Dans cette sous-section, nous discutons des jeux à emplacement unique qui ont plus d'une banque dans l'emplacement. Dans ce cas, nous donnons une allocation où, lorsque les économies de coûts sont réalisées, toutes les économies de coûts vont au propriétaire des transactions concernées. Par conséquent, les propriétaires des ATMs qui fournissent ces économies de coûts, n'obtiennent aucune partie de ces économies. Cette allocation x^l est donnée par, pour chaque $i \in \mathcal{N}$.

$$x_i^l := \begin{cases} 0 \quad si \quad i \in A^l, \\ (\gamma - \beta) n_i^l \quad sinon. \end{cases} \tag{3.14}$$

Proposition 3.5. [33] Si $l \in L_M$, alors $noyau(v^l) = \{x^l\}$, où x^l est donné par le formule (3.14). Nous avons aussi $x^l = Nu(v^l) = \tau(v^l)$.

Exemple 3.5. Rappeler la situation décrite dans l'Exemple 3.1 et l'Exemple 3.2. La banque B_2 est la seule à ne pas disposer d'ATMs. Les seules économies réalisées sont donc celles qui impliquent les transactions de la banque. Selon l'équation (3.14), B_2 sera autorisé à conserver lui-même la totalité des économies de coûts, ce qui donne l'allocation de base unique $x^l = (0, 1200, 0)$. Le jeu v^l n'est pas convexe, puisque :

$$v^l(\{B_1, B_2\}) - v^l(\{B_2\}) = 1200 > v^l(\{B_1, B_2, B_3\}) - v^l(\{B_2, B_3\}) = 0.$$

Et la valeur de Shapley, donnée par $\phi(v^l) = (200, 800, 200)$, est différente de celle du noyau.

3.5 Deux règles d'allocation pour les jeux ATM

Dans cette section, nous discutons des jeux ATM. Deux allocations seront définies et nous étudions aussi leur relation avec les solutions théoriques de jeu existant.

Considérons le jeu ATM v défini par les équations (3.6) ou (3.5). Dans les sous-sections 3.4.1 et 3.4.2, nous avons donnons des règles d'attribution pour les jeux ATM à emplacement unique. Dans la suite, nous allons discuter de deux règles d'allocation pour les situations avec plusieurs emplacements. Ces règles regroupent, sur l'ensemble des emplacements, les vecteurs d'allocation proposés pour des emplacements uniques. Nous relierons les solutions résultantes à des concepts de solution tels que le noyau et la valeur de τ. En outre, nous étudierons si ces règles d'allocation correspondent aux schémas d'allocation monotone de la population, tel que défini par Sprumont [31]. Soit $P(\mathcal{N})$ l'ensemble des sous-ensembles non vides de $\mathcal{N}$.

Définition 3.1. [31] Un vecteur $d = (d_{iS})_{i\in S, S\in P(\mathcal{N})}$ est un schéma de répartition monotone de la population du jeu v si et seulement si :

$$\sum_{i\in S} d_{iS} = v(S), \quad \forall S \in P(\mathcal{N}). \tag{3.15}$$

$$d_{iS} < y_{iT}, \quad \forall i \in S \subseteq T \subseteq P(\mathcal{N}). \tag{3.16}$$

Par conséquent, d spécifie une allocation pour chaque jeu correspondant à la population $S \subseteq \mathcal{N}$, où la fonction caractéristique est donnée par la restriction de v aux membres de S. L'équation (3.15) exprime que le coût entier $v(S)$ devrait être par la formule (3.16) qu'aucun joueur ne doit être aggravé lorsque de nouveaux joueurs entrent dans les parties. Dans la situation du réseau ATM, la monotonie de la population garantit que le membre d'un réseau existant ne s'opposera pas à ce que de nouvelles banques rejoignent le réseau.

3.5.1 La règle du partage égal

Nous allons voir d'abord une règle d'allocation qui répartit les économies de coûts de manière égale entre les propriétaires des transactions et le propriétaire des ATMs. Ainsi, pour $l \in L_1$ nous choisissons w^l comme a été défini dans l'équation (3.13), et pour $l \in L_M$, nous choisissons x^l selon l'équation (3.14). Cela donne l'allocation y donnée par, pour chaque $i \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} y_i &:= \sum_{l\in L_1} w_i^l + \sum_{l\in L_M} x_i^l \\ &= \frac{\gamma-\beta}{2} \sum_{l\in L_1: i\notin A^l} n_i^l + \frac{\gamma-\beta}{2} \sum_{l\in L_1: i\in A^l} n^l(\mathcal{N}\setminus\{i\}) \\ &+ (\gamma-\beta) \sum_{l\in L_M: i\notin A^l} n_i^l. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Puisque la règle de partage égal ajoute des éléments de base des jeux v, le résultat suivant est évident.

Exemple 3.6. Considérons une situation avec deux emplacements, c'est-à-dire $L := \{1, 2\}$ et trois banques, c'est-à-dire $\mathcal{N} = \{B_1, B_2, B_3\}$. Dans le site 1, les banques ont 150, 200 et 250 transactions, respectivement. Ici, les banques B_1 et B_3 ont des ATMs. Dans le site 2, les banques ont respectivement 100, 150 et 125 transactions, et seule la banque B_1 dispose d'ATMs. Les emplacements correspondent à ceux décrits dans les Exemple 3.1 et Exemple 3.3, respectivement. Comme précédemment, $\alpha = 2, \beta = 4$ et $\gamma = 10$. Les valeurs du jeu résultant v sont montrées à la Table 4.1, et une image du noyau dans la Figure 4.2. Dans l'emplacement 1, où les banques B_1 et B_3 ont des ATMs, la règle de partage égal prescrit l'attribution $x_i^l = (0, 1200, 0)$ et dans l'emplacement 2, où seule la banque B_1 a des ATMs, l'allocation $w_i^l = (825, 450, 375)$. En sommant les vecteurs d'allocation, nous obtenons $y = (825, 1650, 375)$. À partir de la Figure 3.4, on peut voir qu'il s'agit d'un point dans l'intérieur relatif du noyau. Il coïncide avec la valeur de τ, mais pas avec la valeur de Shapley ou le nucléole, donnée par les vecteurs d'allocation $\phi(v) = (1025, 1250, 575)$ et $Nu(v) = (875, 1600, 375)$ respectivement.

On prend autre points pour découvert si y accepte un autre meilleur point pour le nucléole ou pas, soit $y^* = (875, 1600, 375)$, tq $\sum_{i=1}^{3} y_i^* = 2850$.

S	$e(S, y)$
$\{B_1\}$	-825
$\{B_2\}$	-1150
$\{B_3\}$	-375
$\{B_1, B_2\}$	-375
$\{B_1, B_3\}$	-450
$\{B_2, B_3\}$	-825
$\{B_1, B_2, B_3\}$	0

S	$e(S, y^*)$
$\{B_1\}$	-875
$\{B_2\}$	-1600
$\{B_3\}$	-375
$\{B_1, B_2\}$	-375
$\{B_1, B_3\}$	-500
$\{B_2, B_3\}$	-775
$\{B_1, B_2, B_3\}$	0

TABLE 3.5 – Le nucléole y et y^* en Exemple 3.6.

Par la définition de relation d'ordre lexicographique inférieur on trouve :
$e(y^*) \prec e(y)$, donc $Nu(v) = (875, 1600, 375)$.

Ex :$v(\mathcal{N}) = (\gamma - \beta)n_{B_2}^1 + (\gamma - \beta)(n_{B_2}^2 + n_{B_3}^2)$.

Dans l'exemple ci-dessus, l'allocation retournée par la règle basée sur la transaction coïncidait avec la valeur de τ , et cette propriété est conservée dans le cas général.

Théorème 3.2. [33] Si y résulte de la règle de partage égal, alors $y = \tau(v)$.

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1,B_2\}$	$\{B_1,B_3\}$	$\{B_2,B_3\}$	$\mathcal{N}$
$S\setminus A^1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{B_2\}$	$\emptyset$	$\{B_2\}$	$\{B_2\}$
$S\setminus A^2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\emptyset$	$\{B_2,B_3\}$
$v(S)$	0	0	0	2100	750	1200	2850

TABLE 3.6 – Le jeu v en Exemple 3.6.

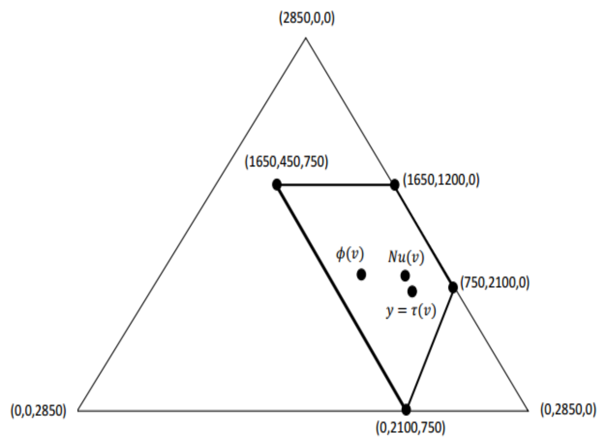

FIGURE 3.4 – Le noyau (zone délimitée par des lignes gras).

Preuve 3.3. De la formule (3.17), et notons que si $l \in L_1$, alors $w^l = \frac{1}{2}(M(v^l)+m(v^l))$ résulte de la preuve du Théorème de Muto et al [18]. Pour $l \in L_M$, nous montrerons que $x^l = M(v) = m(v)$, et le résultat souhaité découle alors de $y = \frac{1}{2}\sum_{l\in L}(M((v^l)+m(v^l) = \frac{1}{2}(M(v^l)+m(v^l))$ et $y(\mathcal{N}) = v(\mathcal{N})$.

Soit $l \in L_M$. Pour chaque $i \in \mathcal{N}$ nous avons :

$$M_i(v^l) = v^l(\mathcal{N}) - v^l(\mathcal{N}\setminus\{i\}) = \begin{cases}(\gamma-\beta)n_i^l \quad si \quad i \in \mathcal{N}\setminus A^l,\\ 0 \quad i \in A^l.\end{cases}$$

Si $i \in \mathcal{N}\setminus A^l$, alors :

$$\begin{aligned} m_i(v^l) &= \max\{\max_{S\cap A^l\neq\emptyset, i\in S}\{v^l(S) - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} M_j(v^l)\}, \max_{S\cap A^l=\emptyset, i\in S} v^l(S) - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} M_j(v^l)\} \\ &= \max\{(\gamma-\beta)\max_{S\cap A^l\neq\emptyset, i\in S}\{\sum_{j\in S\setminus A^l} n_j^l - \sum_{j\in S\setminus A^l\setminus\{i\}} n_j^l\}, \max_{S\cap A^l=\emptyset, i\in S}\{0 - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} n_j^l\}\} \\ &= \max\{(\gamma-\beta)n_j^l, 0\} = (\gamma-\beta)n_j^l. \end{aligned}$$

Et si $i \in A^l$, alors :

$$\begin{aligned} m_i(v^l) &= \max_{i\in S}\{v^l(S) - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} M_j(v^l)\} \\ &= \max_{i\in S}\{(\gamma-\beta)\sum_{j\in S\setminus A^l} n_j^l - (\gamma-\beta)\sum_{j\in S\setminus A^l\setminus\{i\}} n_j^l\} = 0. \end{aligned}$$

La division égale ne satisfait pas toujours la monotonie de la population, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.7. Considérons une situation avec deux emplacements, c'est-à-dire $L = \{1, 2\}$, et trois banques, c'est-à-dire $\mathcal{N} = \{B_1, B_2, B_3\}$. B_1 a des ATMs dans les deux emplacements, B_2 dans l'emplacement 1 et B_3 dans aucun des deux emplacements. Par conséquent, $A^1 = \{B_1, B_2\}$ et $A^2 = \{B_1\}$. Le nombre de transactions pour chaque banque $i \in \mathcal{N}$ et chaque emplacement $l \in L$ est :

$$n_i^l := \begin{cases} q & si \quad i = B_3 \quad et \quad l = 1, \\ p & sinon. \end{cases}$$

	$l=1$	$l=2$
n_{B_1}	p	p
n_{B_2}	p	p
n_{B_3}	q	p

TABLE 3.7 – Nombre de transaction en Exemple 3.7.

Où $p < q$. Soit $\gamma - \beta := 1$.

Les économies de coûts réalisées par les différentes coalitions $S \subseteq \mathcal{N}$. Supposons que B_2 et B_3 ont formé un réseau. Les économies de coûts qu'ils réalisent sont q, impliquant uniquement les transactions de B_3 dans l'emplacement 1, où B_2 est présent. Selon la règle de partage égal, ils recevront tous les deux une récompense de $\frac{q}{2}$.

Supposons que B_1 veuille rejoindre le réseau. Il permettra de réaliser des économies à la fois pour B_2 et B_3 sur le site 2, où il s'agit de la seule banque présente, et les économies de coûts totales passent maintenant à $2p + q$. La règle de partage égal donne l'allocation.

$$y = (x^l + w^l) = (0, 0, q) + (p, \frac{p}{2}, \frac{p}{2}) = (p, \frac{p}{2}, q + \frac{p}{2}).$$

Ainsi, la banque B_2, puisque $p < q$, aura son gain réduit, et il est donc probable qu'elle s'opposera à ce que B_1 soit accepté comme nouveau participant dans le réseau.

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1, B_2\}$	$\{B_1, B_3\}$	$\{B_2, B_3\}$	$\mathcal{N}$
$S \setminus A^1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_3	B_3	B_3
$S \setminus A^2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_2	B_1	$\emptyset$	B_2, B_3
$v(S)$	0	0	0	p	$q+p$	q	$q+2p$

TABLE 3.8 – Le jeu v^l en Exemple 3.3.

Cependant, il existe des situations dans lesquelles même la règle du partage égal satisfait la monotonie de la population, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.8. Reconsidérons encore l'Exemple 3.7, mais maintenant avec l'hypothèse que $p = q$, c'est-à-dire que toutes les banques ont le même nombre de transactions, dans tous les emplacements $l \in L$. Nous allons vérifier que le schéma d'allocation $(y_{iS})_{S \in P(\mathcal{N})}$ correspondant à la règle de partage égal est population monotone. Si une banque opère seule, c'est-à-dire si $|S| = 1$, aucune économie de coûts ne sera réalisée, et nous avons $y_{iS} = 0$ pour tous $i \in \mathcal{N}$. Si toutes les banques participent au réseau, les économies totales seront de $3p$, et la règle de partage égal donnera l'allocation :

$$y_{\mathcal{N}} := x^l + w^l = (0, 0, p) + (p, \frac{p}{2}, \frac{p}{2}) = (p, \frac{p}{2}, \frac{3p}{2}).$$

Puisque la règle de partage égal assigne toujours une récompense positive à toutes les banques, il suffit de vérifier, pour chaque $S \subset \mathcal{N}$ tel que $|S| = 2$, que $y_{iS} \leq y_{i\mathcal{N}}$. La règle de partage égal, lorsqu'elle est appliquée au réseau formé par S, donne à la banque $i \in S$ le gain :

$$y_{iS} = \begin{cases} \frac{p}{2} & si \quad S = \{B_1, B_2\}, \\ p & si \quad S = \{B_1, B_3\}, \\ \frac{p}{2} & si \quad S = \{B_2, B_3\}, \end{cases}$$

donc la monotonie de la population est satisfaite.

Enfin, nous considérons un cas particulier où la règle de partage égal satisfait la monotonie de la population, et plusieurs concepts de solution bien connus coïncident.

Théorème 3.3. Si $L = L_1$, alors on a :

(i) la règle du partage égal est un schéma de répartition monotone de la population,

(ii) si l'allocation y résulte de la règle du partage égal, alors $y = \phi(v) = Nu(v) = \tau(v)$.

Preuve 3.4.
(i) Soit, pour tout $S \subset \mathcal{N}, L_1^S := \{l \in L : |A^l \cap S| = 1\}$, et $L_M^S := \{l \in L : |A^l \cap S| \geq 2\}$. Le résultat de l'équation (3.17), $\gamma > \beta, n_i^l \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{N}$, et en notant que si $S \subseteq T$, alors $L_1^S \subseteq L_1^T$.
(ii) Ce résultat résulte de l'additivité de la valeur de Shapley [18].

3.5.2 La règle basée sur la transaction

Supposons que les banques avec des ATMs ne reçoivent aucune récompense pour les économies de coûts qu'ils fournissent aux banques sans guichets automatiques. Les économies de coûts sont récompensées par la banque propriétaire des transactions pour lesquelles les économies sont réalisées. Ainsi, pour tout $l \in L$, nous choisissons x^l comme définit par la formule (3.14), puis nous somme sur l'ensemble des emplacements. Ceci donne le vecteur d'allocation z donné par, pour chaque $i \in \mathcal{N}$,

$$z := \sum_{l \in L} x^l = (\gamma - \beta) \sum_{l \in L : i \notin A^l} n_i^l. \tag{3.18}$$

Puisque la formule (3.14) donne des éléments de base pour chacun des jeux v^l, $l \in L$, le résultat suivant suit facilement.

Théorème 3.4. [18] et [19] La règle basée sur les transactions donne un élément central de v.

Exemple 3.9. En utilisant la formule (1.14) aux emplacement 1 et 2, nous obtenons les vecteurs d'allocation $x_i^{(1)} = (0, 1200, 0)$ et $x_i^{(2)} = (0, 900, 750)$. En les additionnant, nous obtenons le vecteur d'allocation $z := (0, 2100, 750)$. La Table 3.8 montre que cela correspond à l'un des points extrêmes du noyau.

Théorème 3.5. La règle basée sur les transactions est un schéma d'allocation monotone de population.

Preuve 3.5. D'après la formule (3.18), avec $\gamma > \beta, n_i^l \geq 0$, pour tout $i \in \mathcal{N}$, et en notant que si $S \subseteq T$, alors on $L_1^S \cup L_M^S \subseteq L_1^T \cup L_M^T$.

Nous avons montré, dans l'Exemple 3.8, qu'il y a des cas où même la règle du partage égal est population monotone. Ensuite, nous dans ce qui suit un exemple où la règle basée sur les transactions est le seul schéma d'allocation monotonique de population.

Exemple 3.10. Considérons une situation avec deux emplacements, c'est-à-dire $L := \{1, 2\}$, et trois banques, c'est-à-dire $\mathcal{N} := \{B_1, B_2, B_3\}$. B_1 a des ATMs dans les deux emplacements. La banque B_2 a des ATMs seulement dans l'emplacement 1, et B_3 seulement dans l'emplacement 2. Les économies de coût pour une transaction est $\gamma - \beta := 1$, et chaque banque $i \in \mathcal{N}$ a $n_i^l := p$ transactions dans l'emplacement $l = 1, 2$.

S	$\{B_1\}$	$\{B_2\}$	$\{B_3\}$	$\{B_1, B_2\}$	$\{B_1, B_3\}$	$\{B_2, B_3\}$	$\mathcal{N}$
$S \setminus A^1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_3	B_3	B_3
$S \setminus A^2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	B_2	$\emptyset$	B_2	B_2
$v(S)$	0	0	0	p	p	$2p$	$2p$

Table 3.9 – Le jeu v en Exemple 3.10.

Le noyau du jeu correspondant à la grande coalition consiste en l'allocation $(0, p, p)$, qui est renvoyée par la règle basée sur la transaction. Dans le sous-jeu correspondant à la coalition $\{B_1, B_2\}$, où la valeur p doit être allouée entre les banques B_1 et B_2, la règle basée sur la transaction et la règle de partage égal retournent les allocations $(0, p)$ et $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$, respectivement. Cependant, la première allocation est la seule qui satisfait à la monotonie de la population. Dans le sous-jeu correspondant à la coalition $\{B_1, B_3\}$, où la valeur p doit être allouée entre les banques B_1 et B_3, les deux règles renvoient respectivement les allocations $(0, p)$ et $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$, et encore une fois la seule allocation qui satisfasse la monotonie de la population est celle qui est retournée par la règle basée sur la transaction. Dans le sous-jeu correspondant à la coalition $\{B_2, B_3\}$, où la valeur $2p$ doit être répartie entre les banques B_2 et B_3, les deux règles renvoient l'allocation (p, p), qui est la seule allocation satisfaisant la monotonie de population.

Enfin, on considère le cas particulier où tous les emplacements sont desservis par au moins deux banques. Dans ce cas, le cœur consiste en un seul point, correspondant à l'allocation retournée par la règle basée sur la transaction.

Théorème 3.6. Si $L = L_M$, et y résulte de la règle basée sur la transaction, alors $noyau(v) = \{z\}$.

Preuve 3.6. En raison du Théorème 3.4, nous avons seulement besoin de montrer que $\bar{z} \in noyau(v)$ implique $\bar{z} = z$. A partir de $\bar{z} \in noyau(v)$ et $|A^l| > 1$ pour tout $l \in L$ alors :

$$\bar{z}_i \leq v(\mathcal{N}) - v(\mathcal{N} \setminus \{i\}) = (\gamma - \beta) \sum_{l \in L : i \notin A^l} n_i^l = z \qquad \forall i \in \mathcal{N},$$

$$\bar{z}(\mathcal{N}) = (\gamma - \beta) \sum_{l \in L_M} \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus A^l} n_i^l = (\gamma - \beta) \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{l \in L_M ; i \notin A^L} n_i^l = z(\mathcal{N}),$$

$$z_i \geq v(\{i\}) \geq 0 \qquad \forall i \in \mathcal{N},$$

Remarque. Si $L = L_M$, alors la règle de partage égal et la règle basée sur la transaction coïncident, donc si z est donné par une règle basée sur une transaction, nous avons $z = \tau(v)$. De même, puisque le Théorème 3.6 implique que le noyau ne comporte qu'un seul point, ce point doit être le nucléole, et nous avons donc $z = Nu(v)$.

3.6 Algorithme d'allocation de coûts dans les réseaux bancaires : Cas des réseaux ATM

Dans cette section, nous élaborons des algorithmes pour calculer les valeurs des paramètres déjà définis dans les sections précédentes comme par exemple, $c^l(S)$, $v^l(S)$, $v(S)$, w^l, x^l, y et z, en cas de plusieurs banques et de plusieurs emplacements. Pour cela, nous considérons les données suivantes :

$i \in \mathcal{N}$: une banque i dans l'ensemble des banques $\mathcal{N}$.

$l \in L$: un emplacement l dans l'ensemble des emplacements L.

A^l : l'ensemble des banques ayant des ATMs dans l'emplacement l.

n_i^l : nombre des transaction de banque i dans l'emplacement l.

$S \in \mathcal{N}$: coalition qui contient des banque.

α :coût de transaction pour les clients utilisant les ATMs de leur propre banque.

β : coût de transaction par autre banque.

γ : coût de transaction par comptoir.

```
c^l(S)
pour l = 1 à |L|
    pour i = 1 à |S|
        c(l,i) := 0
        si (S ∩ A^l ≠ ∅)
            pour j = 1 à |S(i)|
                pour k = 1 à |N|
                    si (N(k) ∈ S ∩ A^l)
                        c(l,i) := c(l,i) + α × n(l,i)
                        sinon
                        c(l,i) := c(l,i) + β × n(l,i)
                    fin si
                fin pour
            fin pour
            sinon
            pour j = 1 à |S(i)|
                c(l,i) := c(l,i) + γ × n(l,i)
            fin pour
        fin si
    fin pour
    fin pour
```

```
v^l(S)
pour l = 1 à |L|
    pour i = 1 à |S|
        v(l,i) := 0
        pour j = 1 à |N|
            si (N(j) ∈ S(i))
                v(l,i) := v(l,i) + c(l,j)
            fin si
        fin pour
        v(l,i) := v(l,i) − c(l,i)
    fin pour
fin pour
```

```
v(S)
pour i = 1 à |S|
    v(i) := 0
    pour l = 1 à |L|
        v(i) := v(i) + v(l,i)
    fin pour
fin pour
```

.

Pour un seul emplacement

début

$l = 1$
si $|A^l| = 1$ alors
  si $i \in A^l$ alors
    $w_i^l := \frac{(\gamma-\beta)}{2} \times \sum_{j\in\mathcal{N}, j\neq i} n_j^l$
  sinon
    $w_i^l := \frac{(\gamma-\beta)}{2} \times n_i^l$
  fin si
sinon
  si $i \in A^l$ alors
    $x_i^l := 0$
  sinon
    $x_i^l := (\gamma - \beta) \times n_i^l$
  fin si
fin si

fin.

Pour plusieurs emplacements

début

pour $l = 1$ à $|L|$
  si $|A^l| = 1$ alors
    si $i \in A^l$ alors
      $w_i^l := \frac{(\gamma-\beta)}{2} \times \sum_{j\in\mathcal{N}, j\neq i} n_j^l$
    sinon
      $w_i^l := \frac{(\gamma-\beta)}{2} \times n_i^l$
    fin si
  sinon
    si $i \in A^l$ alors
      $x_i^l := 0$
    sinon
      $x_i^l := (\gamma - \beta) \times n_i^l$
    fin si
  fin si
fin pour
$y := \sum_{l\in L} x_i + \sum_{l\in L} w_i$
pour $l = 1$ à $|L|$
  pour $i = 1$ à $|\mathcal{N}|$
    si $i \in A^l$
      $x_i := 0$
    sinon
      $x_i = (\gamma - \beta) n_i^l$
    fin si
  fin pour
fin pour
$z := \sum_{l\in L} x_i$

fin.

Exemple traité par le logiciel MATLAB

$L = \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{N} = \{1,2,3,4\}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 10.$
$A^1 = \{1,3\}, A^2 = \{3,4\}, A^3 = \{1,2,3\}, A^4 = \{2,3\}, A^5 = \{2\}.$

- La distribution des transaction pour chaque emplacement :

$n_{i\in\mathcal{N}}^{l\in L}$	n_1^l	n_2^l	n_3^l	n_4^l
$l=1$	100	50	100	200
$l=2$	150	100	200	250
$l=3$	225	125	150	150
$l=4$	100	50	300	300
$l=5$	125	200	125	350

- Coût de la coalition S dans l'emplacement l, $c^l(S)$:

$l \backslash S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$
$l=1$	200	500	200	2000	400	400	1000
$l=2$	1500	1000	400	500	2500	1000	1100
$l=3$	450	250	300	1500	700	750	1050
$l=4$	1000	100	600	3000	500	1000	4000
$l=5$	1250	400	1250	3500	400	2500	4750

$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{\mathcal{N}\}$
400	2500	1000	600	1200	1200	1200	1400
800	900	900	1400	1500	1500	1300	1900
550	850	900	1000	1300	1350	1150	1600
700	1300	1800	1100	1700	2200	1900	2300
900	1800	4750	1400	2300	6000	2300	2800

- Réduction de coûts de la coalition S dans l'emplacement l, $v^l(S)$.

l \ S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{\mathcal{N}\}$
$l=1$	0	0	0	0	300	0	1200	300	0	1200	300	1500	1200	1500	1500
$l=2$	0	0	0	0	0	900	900	600	600	0	1500	1500	900	600	1500
$l=3$	0	0	0	0	0	0	900	0	900	900	0	900	900	900	900
$l=4$	0	0	0	0	600	600	0	0	1800	1800	600	2400	2400	1800	2400
$l=5$	0	0	0	0	750	0	0	750	2100	0	1500	2850	0	2850	3600

- La valeur de jeu sur l'ensemble des emplacements :

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{\mathcal{N}\}$
$v(S)$	0	0	0	0	1650	1500	3000	1650	5400	3900	3900	9150	5400	7650	9900

- Allocation de coûts selon la règle du partage égal :
  $y = (1875, 2700, 375, 4950)$. y représente les répartition des économies des coûts entre les quartes banques dans les cinq emplacement :

  y représente les répartition des économies des coûts entre les quartes banques dans les cinq emplacement :
- Allocation de coûts selon la règle basée sur la transaction :

$$z = (2250, 900, 750, 6000).$$

  z représente les répartition des économies des coûts entre les quartes banques dans les cinq emplacement :

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle simple d'un réseau ATM bancaire. Les hypothèses **Al** et **A2** de la Section 3.2 impliquent que les jeux à emplacement unique étudiés dans la Section 3.3 sont des jeux du marché de l'information, qui ont une structure particulièrement simple. Dans le cas où une seule banque a des guichets automatiques dans un emplacement, le cœur est relativement important et plusieurs concepts de solutions importants coïncident avec un point central dans le cœur. Dans le cas où plus d'une banque a des guichets automatiques, le noyau consiste en un seul point. En combinant les allocations pour les jeux à emplacement unique via la règle du partage égal de la Section 3.4, nous avons pu obtenir la valeur τ, qui est un point central. La règle basée sur les transactions fournit également un point central, et, contrairement à la règle du partage égal, cette règle est monotone sur le plan de la population, c'est-à-dire qu'aucune banque n'adoptera une nouvelle banque entrant dans le réseau. Nous avons aussi établi des algorithmes pour calculer les coûts et les allocation en cas de plusieurs banques et de plusieurs emplacements.

Conclusion Générale

Les futures transactions financières demanderont une satisfaction tous les services des clients comme par exemple le versement d'argent et le retirer des salaires. De plus, les utilisateurs souhaiteront comme par le passé payer suivant la qualité de service qu'ils demandent. la coopération entre les banques au niveau des ATMs permettent justement de garantir et de satisfaire tous les services financières de client sans déplacement vers le site des ATMs de leur propre banque.

Notre objectif dans cette étude est de mettre en évidence l'utilité de la théorie des jeux coopératifs comme un cadre conceptuel pour traiter un problème du partage de coûts dans un réseau ATM.

Nous avons traité le problème de répartition de coûts dans les réseaux bancaires selon plusieurs caractéristiques à savoir le nombre des emplacements, le nombre de banques ayant des guichets automatiques ainsi que celles qui n'ont pas des guiches automatiques. Les différents concepts de solutions des jeux coopératifs tels que le noyau, nucléole, valeur de Shapley valeur de τ ont été appliqués pour résoudre le problème étudié. Nous avons aussi conclu des relations entre les différentes solutions en fonction des caractéristiques de chaque emplacement et de leur compatibilité avec les valeurs d'économies de coûts de chaque banque.

Cette étude est loin d'être complète, il est intéressant de la compléter dans plusieurs sens comme par exemple :

1. Étudier le problème d'allocation de coûts en utilisant les jeux coopératifs à utilité non transférables.
2. Étudier le comportement des coalitions formées surtout dans le cas où il y a des grandes banques.
3. Généralisation de cette étude à des réseaux bancaires internationaux.
4. Voir la possibilité de mener une étude de ce type en Algérie.

Bibliographie

[1] E. Borel. La théorie de jeu et les équations intégrales a noyau Symétriques, Faculté des sciences de Paris, décembre 1921.

[2] M. Dresher. Game théoretical, Université Yale, 1991.

[3] M. S. Radjef. La théorie des jeux différentielles. Cours de Master 2. Département de Recherche Opérationnelle, Université A.MIRA de Béjaia, 2015.

[4] A. Kelly. Decision making using game theory. Cambridge University Press, 2003.

[5] J. F. Thisse. Théorie des jeux une introduction. Université de Liège. pp : 1-61.2007.

[6] J.C. Harsanyi. Game with incomplete information played by "Bayesian" players, I. The basic model. Management science. 14 :317-334, 1967.

[7] S. Konieczny. Introduction à la théorie des jeux. Université de Lens CRIL-CNRS, 2002.

[8] D. Ray. A game-theoretic perspective on coalition formation. Oxford University Press, New York, 2007.

[9] T. Vallee. Théorie des jeux. Université de Nantes, 2011.

[10] J.F. Nash. Non-cooperative games. Annals of Mathematics, 54 :286-295, 1951.

[11] J. Drèze et J. Greenberg. Hedonic coalitions : optimality and stability. Econometrica 48, 987-1003, 1980.

[12] C. D'aspermont, A. Jacquemin, J. J. Gabszewicz et J. Weymark. On the stability of collusive price leadership. Canadian Journal of Economics, Vol. 16, pp :17-25, 1983.

[13] M. Kurz et S. Hart. Endogenous formation of coalitions. Econometrica,Vol. 53, 1983.

[14] K. Maafa. Sur les jeux stratégiques multicritères avec formation de coalitions et gain non transférables. Mémoire de Magistère, Université A.MIRA de Béjaia, 2010.

[15] L. Shapley. A value for n-person games, Annals of Mathematics Studies 28, 307-317, 1953.

[16] Y. Song-Seung. Endogenous formation of economic coalitions : A survey on the partition function approach. Sogang University, Seoul 121-742, Korea, 1999.

[17] F. Bloch. Sequential formation of coalitions with fixed payoff division and externalities. Games and Economic Behavior, Vol. 14, No. 0043, pp :90-123, 1996.

[18] S. Muto, J. Potters et S. Tijs. Information market games. International Journal of Game Theory, 18 :209-226, 1989.

[19] J. Potters et S. H.Tijs. Information market games with more than one informed player. Methods of Operations Research, 63 :313-324, 1989.

[20] Y. Kannai. Countably additive measures in cores of games. Journal of Mathematical, Analysis and Applications 27, 1969.

[21] M. Kurz et S. Hart. Stable coalition structures. Econometrica,Vol. 53, pp :1047-1064, 1984.

[22] B. Peleg. Axiomatizations of the core, in : R.J. Aumann et S. Hart, eds., Handbook of Game Theory with Economic Applications. Vol I, ch. 13. Amsterdam, The Netherlands : Elsevier Science Publishers, 1992.

[23] R. P. Gilles. The cooperative game theory of networks and hierarchies. Springer Edition, 2010.

[24] S. Giannakoudi. Internet banking : the digital voyage of banking and money in cyberspace. Information and Communications Technology Law. Vol 8 , Issue 3, pp. 205-243, 1999.

[25] Y. Ekeland. La théorie des jeux et ses applications à économie mathématique, P.U.F, 1974.

[26] J. Desjobert et J. Champavert. Influence du profil d'un agent/joueur dans un jeu coopératif, 2005.

[27] B. Peleg et P. Sudholter. Introduction to the theory of cooperative games. Springer ed, 2007.

[28] R. D. Luce et H. Raiffa. Games and Décisions, Wiley, 1957.

[29] S. Gow et L. Thomas. Interchange fees for bank ATM networks. Naval Research Logistics, 45 :407-417, 1998.

[30] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal of Applied Mathematics, 17 :1163-1179, 1969.

[31] Y. Sprumont. Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility. Games and Economic Behavior, 2 :378-394, 1990.

[32] J. A Rawls. Theory of Justice. Cambridge, Mass, 1971.

[33] S. Tijs. Bounds for the core and the τ-value, dans : O. Moeschlin et D. Pallaschke (Eds.). Game Theory and Mathematical Economics, North-Holland, Amsterdam, pp. 123-132, 1981.

[34] L. C. M. Kallenberg. Besliskunde 2 dictaat, 2008.

[35] Y. Sang-Seung. Endogenous formation of customs unions under imperfect competition : open regionalism is good. Journal of International Economics, Vol. 41, pp :153- 177, 1996.

[36] S. Thoron. N'egociations multilatérales entre entreprises hétérogénes : la loi du plus fort ou l'union fait la force. Technical Report 18-2005. GREQAM, Avril 2003.

[37] R. Vohra et D. Ray. Coalitionnal power and public goods. Journal of Political Economy. Vol. 109, pp :1355-1384, 2001.

[38] R. J. Aumann. The core of a cooperative game without side payments. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 98, No. 3, pp :539-552, Mars 1961.

[39] J. Mcandrews. To surcharge or not to surcharge : An empirical investigation of ATM pricing. Review of economics and etatistics, forthcoming, 2003.

[40] J.Von Neumann et O. Morgenstern. The theory of games and Economic Behavior, Princeton university Press, N.J, 1944.

[41] J. Nash. Nash equilibrium and the history of economic theory, Jour. of Econ. list 37 :1067-1082, 1950.

[42] J. Nash. Non cooperatives games, Annls. Maths, 54 :286-295, 1951.

[43] S. Muto, M. Nakayama, J. Potters et S. Tijs. On big boss games. The Economic Studies Quarterly, 39(4) :303-321, 1988.

[44] R. Selten. The chain store paradox, Theory and Decision, 127-159, 1978.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié le problème de répartitions des coûts dans un réseau bancaires, plus précisément les réseaux ATMs en utilisant les concepts de la théorie des jeux coopératifs. Cette étude nous a permis de voir comment les économies de coûts sont distribués entre les banques qui possèdent des distributeurs automatiques et d'autres pour satisfaire les transactions financières des différents clients des banques, selon les caractéristiques de chaque emplacement en termes de nombre de banques qui ont des distributeurs automatiques et les autres banques qui ne possèdent pas, mais qui sont en coopération avec celle-ci.

Mot clés : Jeux coopératifs, Coalition, Cœur, Valeurs de Shapley, Nucléole, Emplacement, Banque, Allocation de coûts.

Abstract

In this work, we studied the problem of cost distributions in a banking network, specifically ATM networks using the concepts of cooperative game theory. This study allowed us to see how cost savings are distributed between banks that have automatic machines and others to satisfy the financial transactions of different bank customers, depending on the characteristics of each location in terms of the number of banks that have ATMs and other banks that do not own, but are in cooperation with it.

Keywords : Cooperative games, Coalition, Core, Shapley value, Nucleolus, Location, Bank, Cost allocation.