

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER en Recherche Opérationnelle

Option : Mathématiques Financières

THEME

**Méthode directe de support pour l'optimisation
multi-objectifs d'un portefeuille financier**

Présenté par :

M^r AGOUNE Lounis

M^r BOUDJELDA Souhaib

Devant le jury composé de :

Président :	M ^r BIBI Mohand Ouamer	Professeur	Université de Béjaïa
Encadreur :	M ^r BRAHMI Belkacem	MCA	Université de Béjaïa
Examineur :	M ^r ASLI Larbi	MAA	Université de Béjaïa
Examineur :	M ^r TOUATI Sofiane	MAA	Université de Béjaïa

Promotion 2017 — 2018



Remerciements

Louange A Dieu, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela n'aurait pu être.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements à **M^r B.BRAHMI** pour l'honneur qui nous a fait en assurant le suivi du présent mémoire avec lequel on a eu le plaisir de travailler. On le remercie pour ses critiques, ses conseils et sa rigueur scientifique qui nous ont permis de mener ce travail.

Notre gratitude va également à **M^r M.O.BIBI** pour avoir accepté de présider le jury de la soutenance.

Nos remerciements s'adressent également à **M^r L.ASLI** et **M^r S.TOUATI** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'examiner ce mémoire.

Enfin nous tenons à rendre hommage à toutes nos familles et nos amis pour le soutien qu'ils nous ont apporté durant toutes ces années d'études.

LOUNIS , SOUHAIB



Je dédie ce modeste travail

À MES PARENTS et plus profondément à ma mère

Auxquels Je Dois Ce Que Je Suis

Que Dieu Vous Protège

et Vous Prête Une Bonne Santé

et Une Longue Vie

À TOUTE MA FAMILLE

Pour Leur Soutien et Leur Encouragement

À MA PETITE ANGE MERBOUHA

À TOUS MES AMIS(ES)

À TOUS CEUX QUI M'ONT AIMÉ

Et Qui Ne Méritent Pas D'être Oubliés

À TOUTE LA PROMOTION Rφ 2017-2018

Souhaib.

Dedicaces

Que ce travail témoigne de mes respects :

A mes parents :

Grâce à leurs encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études.

A mes soeurs et à mes frères :

Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me porter.

A tous mes professeurs :

Leur générosité et leur soutien m'oblige de leur témoigner mon profond respect et ma loyale considération.

A tous mes amis et mes collègues :

Ils vont trouver ici le témoignage d'une fidélité et d'une amitié infinie.

Lounis.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciement	1
Introduction générale	9
1 Gestion de portefeuille : Éléments théoriques	11
Introduction	11
1.1 Définitions	12
1.1.1 Marché financier	12
1.1.2 Actif financier	12
1.1.3 Action	12
1.1.4 Portefeuille financier	12
1.2 Mesure de rentabilité	13
1.2.1 Rendement d'un actif financier	13
1.2.2 Rendement espéré d'un titre	13
1.3 Le risque financier	14
1.3.1 Mesures de risque	14
1.3.2 Approche Espérance-Variance d'un portefeuille	17
1.4 La théorie moderne du portefeuille : Modèle de Markowitz	18
1.4.1 Hypothèses du modèle de Markowitz	19
1.4.2 Portefeuille optimal et frontière efficiente	20
1.5 Formulation multi-objectif du problème	21
2 Optimisation multi-objectifs	23

Introduction	23
2.1 Problème d'optimisation multi-objectifs	24
2.2 Notions de dominance et d'optimalité	25
2.2.1 Dominance faible :	25
2.2.2 Dominance forte :	25
2.2.3 Optimalité de Slater	26
2.2.4 Optimalité de Pareto	27
2.2.5 Points particuliers	28
2.3 Approches de résolution d'un problème multi-objectifs	29
2.3.1 Un point de vue décideur	29
2.3.2 Point de vue concepteur	30
3 Méthode directe de support pour un problème de programmation quadra-	
tique convexe	34
Introduction	34
3.1 Notions sur la convexité	35
3.1.1 Ensemble convexe	35
3.1.2 Fonctions convexes	36
3.1.3 propriétés de fonctions convexes	37
3.2 Formes quadratiques et leurs propriétés	37
3.2.1 Forme quadratique	37
3.2.2 Gradient d'une forme quadratique	38
3.2.3 Formes quadratiques définies et non définies	39
3.3 Méthode directe de support	40
3.3.1 Position du problème	40
3.3.2 Définitions	40
3.3.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif	41
3.3.4 Critère d'optimalité	42
3.3.5 Critère de suboptimalité	43
3.3.6 Construction de l'algorithme de résolution	44
3.3.7 Algorithme de la méthode directe de support quadratique	47

4	Résolution par la MDS du problème multi-objectifs de portefeuille	50
	Introduction	50
4.1	Présentation du problème	51
4.1.1	Résolution du problème	51
4.1.2	Algorithme adapté	55
4.2	Application	57
4.2.1	Application de la méthode MDS	58
4.2.2	Discussion des résultats	60
	Conclusion	61
	Conclusion générale	62
	Bibliographie	63

TABLE DES FIGURES

1.1	Interprétation de la volatilité	15
1.2	La frontière efficiente de Markowitz	21
2.1	Espace décisionnel et espace objectif d'un problème d'optimisation multi-objectifs	24
2.2	Exemple de la relation de dominance	26
2.3	L'ensemble des points non fortement dominés et dominés.	27
2.4	Illustration des différents points particuliers	29
3.1	Ensemble convexe et non convexe	35
3.2	Fonction convexe et non convexe	36
4.1	Le rendement espéré et la variance de chaque titre	57
4.2	La matrice de variance-covariance	57
4.3	La frontière de Pareto	60
4.4	représentation d'un échantillon des prix des titres	67
4.5	Échantillon des rendements de chaque titre	67

LISTE DES TABLEAUX

4.1 Les résultats obtenus après l'exécution de la MDS 59

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un marché financier est un marché dans lequel des personnes, des sociétés privées et des institutions publiques peuvent négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande. Le secteur financier engendre une forte perturbation exprimée par le phénomène du risque qui nécessite de le réduire ou carrément de l'éliminer. Cet environnement ne donne pas beaucoup de choix à l'investisseur, car soit il se contente d'une rentabilité certaine mais faible, ou prendre un risque et avoir une rentabilité espérée plus élevée.

En 1952, le mathématicien Harry Markowitz [23] a introduit la théorie moderne du portefeuille qui définit le processus de sélection de titres pour créer un portefeuille le plus efficient possible, c'est à dire celui qui minimise le risque pour une certaine rentabilité espérée. Cette théorie a révolutionné le domaine de la finance, donne un aperçu sur la façon avec laquelle un investisseur rationnel diversifie son investissement, afin d'optimiser son portefeuille.

Dans ce travail, on s'intéresse au problème bi-critères de gestion de portefeuille, qui consiste à minimiser le risque et de maximiser le rendement sous des contraintes d'investissement et d'absence de vente à découvert. On a fait appelle à la méthode d'agrégation des critères afin de le transformer en un problème mono-critère pour faciliter sa résolution. Le problème résultant est un programme quadratique paramétré (PQP), où ce paramètre représente la préférence du décideur.

En s'inspirant du travail de M. J. Best [5], on a adapté la méthode directe de support [10][11], qu'on nomme MDS, pour résoudre ce PQ paramétré. Notre approche est itérative et permet de déterminer la frontière de Pareto en un nombre fini d'itérations. Les étapes de la MSD consistent tout d'abord de calculer le portefeuille de variance minimale, puis déterminer les points de ruptures pour lesquelles la frontière efficiente change d'allure. Afin de valider notre

étude, nous avons pris un portefeuille constitué de 10 titres. Les données sont extraites sur le site de la bourse parisienne de l'indice CAC40.

Notre travail est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre sera consacré pour définir certains éléments théoriques de la gestion du portefeuille, ainsi que le modèle de base de la théorie moderne du portefeuille, puis on modélise de notre problème.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons le problème d'optimisation multi-critères, ainsi que les différents concepts d'optimalité (Pareto, Slater) et les approches de résolution. Le troisième chapitre sera consacré pour la présentation de la méthode directe de support (MDS) pour la résolution d'un problème d'optimisation quadratique convexe.

Dans le quatrième chapitre on adaptera la méthode directe de support (MDS) pour la résolution d'un problème bi-critères de gestion du portefeuille, ainsi son implémentation sous MATLAB. A la fin, on déroulera un exemple réel d'un portefeuille financier composé de 10 titres de la bourse de Paris.

CHAPITRE 1

GESTION DE PORTEFEUILLE : ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Introduction

L'évolution et le développement des marchés financiers, ainsi que la multitude des produits financiers ont poussé les chercheurs et les financiers à développer des modèles permettant d'aider au mieux un investisseur à prendre des décisions adéquates et des stratégies efficaces, pour une meilleure allocation de sa richesse, et comment répartir son capital sur les différents titres, d'une façon à maximiser son profit (gain), tout en minimisant le risque encouru.

La théorie moderne de portefeuille a été introduite et développée au début des années cinquante par *Harry Markowitz*[23][24]. Elle constitue jusqu'à maintenant le noyau de la théorie moderne du portefeuille [15], un modèle de référence et un outil d'aide à la décision pour les gestionnaires d'une entreprise industrielle ou d'une institution financière.

Le principe du modèle classique de Markowitz est de modéliser le risque par la variance ou l'écart-type des taux de rendement des titres, et de l'intégrer dans le choix des titres d'un portefeuille. Ce modèle se base sur certaines hypothèses, à savoir la normalité des distributions des rendements des actifs financiers et sur la rationalité des investisseurs.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments théoriques et concepts de base de la gestions de portefeuille. Ensuite, nous présentons la théorie moderne du portefeuille, à savoir le modèle de Markowitz et ses variantes.

1.1 Définitions

1.1.1 Marché financier

Les marchés financiers sont des lieux fictifs, où se rencontrent les agents économiques (personnes , sociétés privées et institutions publiques) ayant un excédent de capitaux (investisseurs) et ceux ayant besoin de financement, pour négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande .

1.1.2 Actif financier

Un actif est un contrat généralement négociable sur un marché financier, produisant à son propriétaire des revenus ou un gain en capital. Il y en a de très nombreuses sortes d'actifs, des plus simples : actions, obligations, aux plus complexes : options.

1.1.3 Action

Une action est un titre de propriété sur une fraction du capital qu'une entreprise décide de vendre aux investisseurs. Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. L'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers.

1.1.4 Portefeuille financier

Un portefeuille est une combinaison d'un ensemble de titres (actifs) financiers, détenus par un investisseur (actions, obligations, produits dérivés, matières premières...).

Cette combinaison se fait en des proportions différentes afin d'avoir un portefeuille bien diversifié, permettant ainsi de réaliser un rendement espéré bien déterminé tout en minimisant le risque que peut courir l'investisseur.

Mathématiquement, un portefeuille P est un vecteur de proportions x_i , qui représente la proportion du capital investi dans chaque titre, avec :

$$x_i = \frac{\text{La part du capital investi en } i}{\text{capital total}}.$$

1.2 Mesure de rentabilité

Le taux de rentabilité ou le rendement est une notion fondamentale en finance et apparaît dans l'expression de la plupart des modèles de gestion de portefeuille ; elle mesure l'appréciation (ou dépréciation) relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs financiers entre deux instants successifs .

1.2.1 Rendement d'un actif financier

Rendement arithmétique

Le rendement arithmétique périodique d'un actif $R_{i,t}^a \in [-1, 1]$ est donné par l'équation suivante :

$$R_{i,t}^a = \frac{(P_{i,t} - P_{i,t-1}) + D_{i,t}}{P_{i,t-1}},$$

avec :

$P_{i,t}$: Prix du titre i à la fin de la période t ;

$P_{i,t-1}$: Prix du titre i au début de la période $t - 1$;

$D_{i,t}$: Dividende(action) ou intérêt(obligation) reçu pendant la période t .

Rendement géométrique :

Le rendement géométrique(logarithmique) périodique d'un actif, noté $R_{g,t} \in [-1, 1]$, est donné par la relation suivante :

$$R_{i,t}^g = Ln\left(\frac{P_{i,t} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right).$$

1.2.2 Rendement espéré d'un titre

Le rendement espéré d'un actif financier peut être calculé à partir :

- Des probabilités subjectives par rapport au rendements possibles .
- Des rendements historiques.

Calcul du Rendement espéré à partir des probabilités subjectives

Le rendement espéré d'un actif i , noté μ_i est la moyenne pondérée des différents rendements possibles :

$$\mathbb{E}(R) = p_1R_1 + p_2R_2 + \dots + p_kR_k = \sum_{i=1}^k p_iR_i,$$

où :

R_i : Rendement possible de l'issu i .

p_i : Probabilité de réalisation de l'issu(événement) i , telle que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Calcul du rendement espéré à partir des rendements historiques

Le rendement espéré d'un actif i est la moyenne arithmétique des rendements réalisés au cours des T - périodes précédentes :

$$\mu_i = \mathbb{E}(R_i) = \frac{R_{i,1} + R_{i,2} + \dots + R_{i,T}}{T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t},$$

où $R_{i,t}$ est le rendement du titre à la fin de la période t .

1.3 Le risque financier

Le risque financier est défini comme étant lié à l'incertitude et d'autre part, causé par les écarts non attendus des résultats par rapport à l'objectif attendu [21][1][19]. Autrement dit, la notion de risque en finance est reliée à la notion d'incertitude. En effet, le risque d'un actif financier pour un investisseur, peut être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future.

1.3.1 Mesures de risque

La volatilité

La volatilité est considérée comme la base de la mesure du risque des actifs financiers dans la gestion de portefeuille, et par définition elle mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier, durant tous les horizons (court, moyen et long terme)[8]. Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée plus l'investissement dans ce portefeuille sera considéré comme risqué et par conséquent plus l'espérance de gain (ou risque de perte) sera important. Par contre, un portefeuille sans risque ou très peu risqué aura une volatilité très faible[12].

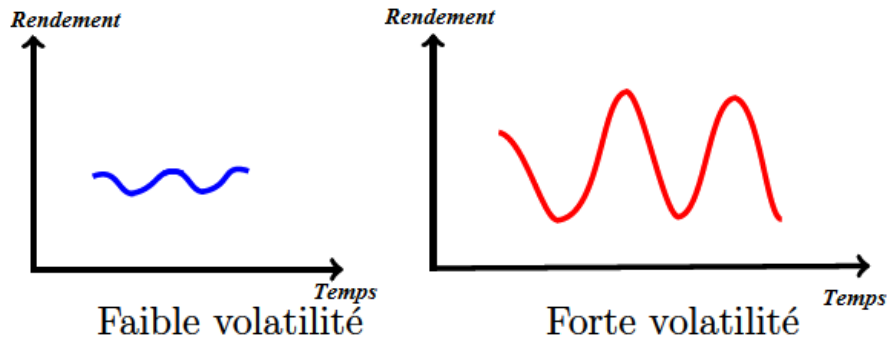


FIGURE 1.1 – Interprétation de la volatilité

La variance

La variance est l'un des instruments les plus importants dans l'étude de risque financier. Selon la définition classique, elle est la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne. Mathématiquement, elle peut être considérée comme une mesure servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon autour de sa moyenne.

La variance d'un actif i est donnée par :

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(R_i) = \mathbb{E}[(R_i - \mathbb{E}(R_i))^2] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}^2 - \bar{R}_i^2,$$

avec :

$R_{i,t}$: le rendement de l'actif i à l'instant t .

T : le nombre de périodes.

$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$: Le rendement moyen de l'actif i .

Remarque

Si la variance est nulle, cela signifie que la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne est nulle et donc que la variable aléatoire est une constante.

L'écart-type

L'écart-type est une mesure de risque utilisé pour calculer la volatilité d'un actif. Il s'obtient en calculant la racine carrée de la variance. Mathématiquement, l'écart type se traduit par la formule suivante :

$$\sigma_i = \sqrt{\text{Var}(R_i)} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}^2 - \bar{R}_i^2}$$

La covariance

Selon la définition classique la covariance permet d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives.

En finance, cette notion permet de mesurer le degré de liaison des fluctuations de deux titres entres eux, ou encore d'un titre avec un indice.

Mathématiquement, la formule de la covariance est la suivante :

$$Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j),$$

avec :

$R_{i,t}$: le rendement de l'actif R_i à l'instant t .

$R_{j,t}$: le rendement de l'actif R_j à l'instant t .

T : le nombre de périodes.

$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$: La rendement moyen de l'actif R_i .

$\bar{R}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{j,t}$: La rendement moyen de l'actif R_j .

Remarque

Si les deux variables R_i et R_j sont indépendantes, alors $Cov(R_i, R_j) = 0$.

Coefficient de corrélation

La corrélation entre deux actifs financiers, ou plus généralement entre deux variables aléatoires, est l'intensité de la liaison qui existe entre ces deux variables.

Afin de déterminer cette liaison, il suffit de calculer le coefficient de corrélation par la formule suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j},$$

où σ_i et σ_j représentent respectivement les volatilités des titres i et j

Propriétés du coefficient de corrélation

1. $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$.
2. Si $\rho_{ij} = 1$ (respectivement -1), alors il existe une relation linéaire positive (respectivement négative) entre les titres i et j .

3. Si $\rho_{ij} = 0$, alors les deux titres i et j sont dé-corrélées.
4. Le coefficient de corrélation est symétrique : $\rho_{ij} = \rho_{ji}$.

1.3.2 Approche Espérance-Variance d'un portefeuille

Rendement espéré d'un portefeuille

Considérons un portefeuille P composé de n titres, ayant des rendements R_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Le rendement du portefeuille P , noté R_P , durant une période donnée est une combinaison linéaire pondérée des rendements qui le composent :

$$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n = \sum_{i=1}^n x_i R_i,$$

où x_i est la proportion du portefeuille (ou richesse) investi dans le titre i .

Le rendement espéré du portefeuille, noté μ_p , est égal à la moyenne pondérée des rendements enregistrés pendant cette période des différents titres qui composent ce portefeuille. Il est donné par l'expression suivante :

$$\mu_p = \mathbb{E}(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}(R_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i.$$

En notant : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$, alors le rendement espéré d'un portefeuille P s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$R_p = \mu' x.$$

La variance d'un portefeuille

Le risque d'un portefeuille est calculé en fonction de sa volatilité, cette volatilité étant définie comme la variance ou l'écart-type des rentabilités des actifs financiers. Alors pour calculer le risque d'un portefeuille, on doit tenir compte de :

- La variabilité du rendement de chaque titre : la variance $Var(R_i)$.
- Le degré de dépendance existant entre les rendements des différents titres : la matrice de variance-covariance notée Σ .

Risque d'un portefeuille composé de deux titres :

La variance (risque) du taux de rendement d'un portefeuille composé de deux titres i et j est donnée par :

$$Var(R_p) = x_i^2 Var(R_i) + x_j^2 Var(R_j) + 2x_i x_j Cov(R_i, R_j)$$

Risque d'un portefeuille composé de n titres :

La variance du taux de rendement d'un portefeuille composé de n titres est la somme des produits des poids de chaque couple d'actifs par leur covariance :

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j Cov(R_i, R_j).$$

La forme matricielle du risque s'écrit sous la forme :

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = x' \Sigma x,$$

où Σ est la matrice variance-covariance des rendements des différents titres,

avec :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

1.4 La théorie moderne du portefeuille : Modèle de Markowitz

Le concept de la gestion du portefeuille était utilisé bien au milieu du siècle dernier. Néanmoins, la théorie moderne du portefeuille est née en 1952 avec la publication de l'article fondateur de Harry Markowitz [23]. En partant du postulat que le risque d'un portefeuille peut être mesuré par la variance de sa rentabilité, Markowitz explicite et formalise le dilemme fondamental de la finance moderne : obtenir une rentabilité faible mais certaine, ou accepter de prendre un risque dans l'espoir d'accroître cette rentabilité.

Markowitz formalise et quantifie également l'effet de diversification selon lequel une combinaison judicieuse de nombreux actifs dans un portefeuille, qui permet de réduire le risque total subi pour un taux de rentabilité espérée donné. Les travaux de Markowitz devaient s'avérer extrêmement importants et modifier profondément la façon de concevoir les problèmes financiers.

Ils montrent, en particulier, que l'intérêt d'investir dans un titre financier ne doit pas être évalué séparément, mais dans le cadre de l'ensemble du portefeuille constitué par l'investisseur (diversification).

1.4.1 Hypothèses du modèle de Markowitz

Les Hypothèses Relatives aux actifs financiers

- Hypothèse 1 :

Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque : le rendement R_i d'un actif financier i pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, dont on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale, c'est à dire une distribution symétrique stable entièrement définie par deux paramètres : l'espérance mathématique $\mu = \mathbb{E}(R_i)$ du rendement et son écart-type $\sigma_i = \sigma(R_i)$ de la distribution de probabilité du rendement.

- Hypothèse 2 :

Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles ($\sigma_{ij} \neq 0$).

- Hypothèse 3 :

Les marchés sont parfaits : toutes les conditions pour que les prix correspondent à la réalité du moment sont réunies. L'entrée et la sortie sont libres et sans coût. L'information circule de manière totalement transparente. La concurrence est parfaite entre les acteurs composant le marché ...

Les hypothèses relatives aux comportements des investisseurs

- Hypothèse 1 :

Le comportement des investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de la probabilité du rendement.

- Hypothèse 2 :

Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence à celle-ci, des choix strictement transitifs.

- Hypothèse 3 :

Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période. Cette simplification, qui peut paraître exagérée, permet de mettre en ?uvre un modèle de décision qui tient compte du caractère hautement combinatoire du portefeuille.

1.4.2 Portefeuille optimal et frontière efficiente

Détermination du Portefeuille Optimal

Le problème posé par Markowitz est la recherche d'un portefeuille P composé de n actifs risqués, ayant respectivement des rendements R_i , $i = 1, 2, \dots, n$, suivant tous la loi normale. Chaque titre i est caractérisé par une espérance de rentabilité $\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$ et un écart-type σ_i . ou par une variance minimale à espérance de rentabilité donnée, ce portefeuille est dit efficace (efficient)[8].

Le choix d'un portefeuille efficace revient à résoudre le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{s.c} \quad \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \mu_p \\ \quad \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Dans la pratique, nous cherchons non pas un, mais tous les portefeuilles qui pour une espérance donnée minimise la variance.

La méthode classique de résolution consiste à minimiser une fonction économique Z définie par :

$$Z = \text{Var}(R_p) - \gamma \mathbb{E}R_p = x' \Sigma x - \gamma \mu' x, \quad (1.2)$$

où γ est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs. Par conséquent, le problème à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x \quad Z = x' \Sigma x - \gamma \mu' x \\ \text{s.c} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Où :

σ_p^2 est la variance (risque) du portefeuille.

μ_p est le rendement du portefeuille.

x_i est la proportion investie dans le titres i .

Le problème (1.1) est un problème de programmation quadratique avec deux contraintes d'égalité. Ce problème se résout par la méthode de Lagrange et tenant compte du fait que la

matrice de variance-covariance Σ est définie positive, alors les conditions d'optimalité de premier ordre de KKT sont à la fois nécessaires et suffisantes.

Frontière efficiente

La frontière efficiente est définie comme l'ensemble de tous les portefeuilles efficients. Pour la trouver, on résout un programme d'optimisation quadratique, dans lequel les portefeuilles P combinent un nombre n quelconque de titres risqués.

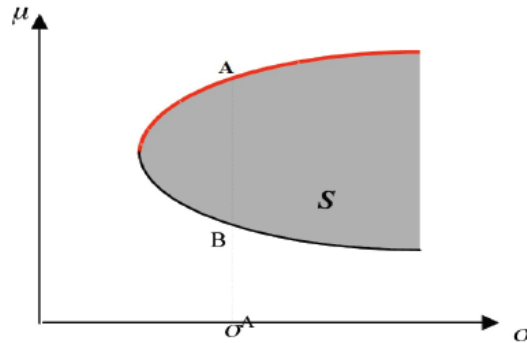


FIGURE 1.2 – La frontière efficiente de Markowitz

Chaque point sur la courbe rouge "Portefeuille à variance minimale" correspond à un portefeuille efficient ; c'est ce que l'on appelle la frontière d'efficiente ou frontière de Markowitz. Si un portefeuille se trouve dans la zone grise, il n'est pas un portefeuille efficient car il existe :

- Un autre portefeuille apportant ce même niveau de rendement, mais avec un risque plus faible.
- Un autre portefeuille apportant un rendement supérieur pour le niveau de risque considéré.

Chaque investisseur peut ensuite choisir n'importe quel portefeuille sur la courbe rouge, en fonction du niveau de risque qu'il est prêt à supporter ou bien du rendement qu'il espère (maximisation de l'utilité de l'investisseur).

1.5 Formulation multi-objectif du problème

La gestion du portefeuille est définie comme étant une gestion des fonds afin que l'investisseur optimise son évaluation, disposant d'un capital initial qu'elle peut répartir en plusieurs actifs financiers, dont il cherche la manière qu'il lui convient pour aboutir aux gains souhaités(visés)[4] ; notons que la répartition de son capital initial dépend aussi de la santé des secteurs où il veut

mettre ses fonds pour les investir où l'investissement de ce capital se fait dans un cadre régulier tout en suivant une feuille de route tracée dès le début[28].

Le problème d'optimisation d'un portefeuille financier consiste à chercher un ensemble de portefeuilles efficients, ce problème peut être modélisé sous forme d'un programme mathématique sous contraintes. L'approche utilisée est le modèle Moyenne-Variance de Markowitz 1952, où l'investisseur cherche à trouver un compromis entre le risque et le rendement.

Cette approche mène à un problème mathématique multi-objectif sous contraintes qui peut être modélisé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min x \quad z_1 = x' \Sigma x \\ \max \quad z_2 = \mu' x \\ \text{s.c} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \quad \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

tel que :

- Σ : est la matrice de variance-covariance.
- μ : est le n -vecteur composant les rendements estimés des n titres.
- x_i : est la proportion investie dans le titre i .

La première contrainte du problème (1.4) est appelée contrainte d'investissement qui impose à tout investisseur à allouer toute sa richesse. La seconde contrainte est l'absence de vente à découvert, c'est à dire que l'investisseur ne peut pas prêter des titres sur un marché financier à un taux fixe, puis les vendre sur le même marché.

Introduction

L'optimisation est un outil mathématique qui nécessite d'utiliser des méthodes ou approches qui permettent d'opérer plusieurs choix, afin de trouver le meilleur résultat souhaité. Le problème mono-objectif consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une seule fonction objectif.

Dans certains problèmes réels, généralement il se présente des situations qui nécessitent d'optimiser plusieurs objectifs à la fois. La résolution d'un problème multi-objectifs consiste à trouver une solution Pareto optimale. L'idée est de réduire des problèmes à plusieurs objectifs de grande taille à un problème mono-objectifs qui est facile à résoudre. La présence de l'optimisation multi-objectifs ne cesse d'augmenter dans le monde réel activée par l'évolution des techniques informatiques. L'importance de l'optimisation multi-critères a mené les chercheurs à proposer plusieurs méthodes efficaces.

Dans ce chapitre, nous allons présenter certaines méthodes d'optimisation multi-objectifs et en particulier on s'intéressera aux méthodes scalaires, plus précisément, la méthode de pondération des fonctions objectifs.

2.1 Problème d'optimisation multi-objectifs

Un problème d'optimisation multi-objectifs (PMO) (multi-objective optimization problem) peut être défini par :

$$\min_{x \in S} F(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) \right), \quad (2.1)$$

où :

- k : Le nombre de fonctions objectifs, tel que $k \geq 2$.
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$: Le vecteur représentant les variables de décision .
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \text{ et } x \geq 0\}$ est l'ensemble des solutions admissibles (ou réalisables) du problème.

- $f_i(x)$: fonction objectif à minimiser, tels que :

$$f_i(x) : S \longrightarrow \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, k},$$

- $g_i(x)$: fonction représentant la contraintes du problème, où :

$$g_i(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad i = \overline{1, m},$$

L'image de l'ensemble des solutions admissibles S , appelée ensemble des critères, est donnée par :

$$Z = f(S) = \{ z \in \mathbb{R}^k : z = f(x) , \forall x \in S \},$$

où $z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ est le vecteur des critères, tel que $z_i = f_i(x)$.

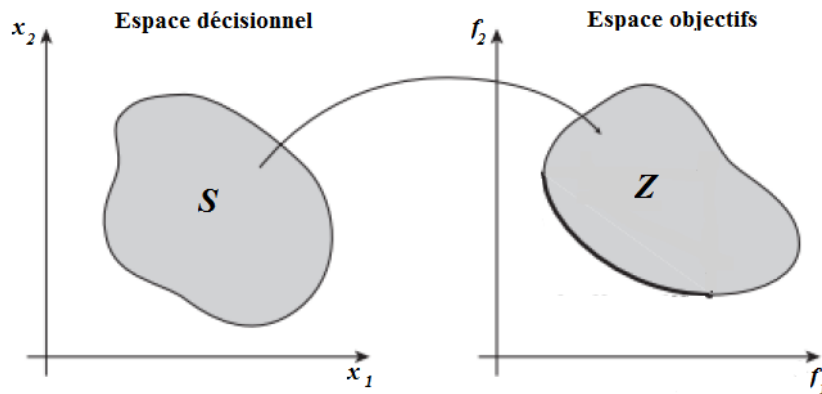


FIGURE 2.1 – Espace décisionnel et espace objectif d'un problème d'optimisation multi-objectifs

Contrairement à l'optimisation mono-objectif, la solution d'un problème multi-objectifs n'est pas une seule valeur, mais est un ensemble de points non dominés, appelé l'ensemble des meilleurs

compromis ou l'ensemble des solutions Pareto Optimales. En effet, dans les problèmes l'optimisation, il est simple de transformer un problème de maximisation en un problème de minimisation en considérant l'équivalence suivante :

$$MaxF(x) \Leftrightarrow Min(-F(x))$$

2.2 Notions de dominance et d'optimalité

La résolution d'un problème d'optimisation multi-objectifs donne une multitude de solutions. Seul un nombre restreint de ces solutions va nous intéresser. Pour qu'une solution soit intéressante[14], il faut qu'il existe des relations d'ordre entre la solution considérée et les autres solutions, dans ce cas, ces relations d'ordre appelées relations de dominance, correspondent à différents concepts d'optimalité existant dans la littérature : optimalité de Pareto et optimalité de Slater [26].

2.2.1 Dominance faible :

On dit que la solution $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ domine faiblement la solution $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ si :

- x est au moins aussi bon que y dans tous les objectifs, et,
- x est strictement meilleur que y dans au moins un objectif.

Mathématiquement , on dit qu'une solution x domine faiblement une solution y (dans le cas de minimisation) ssi :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, f_i(x) \leq f_i(y) \text{ et } \exists i \in \{1, \dots, k\} \text{ tel que } f_i(x) < f_i(y)$$

et note $x \preceq y$.

2.2.2 Dominance forte :

On dit que la solution $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ domine fortement la solution $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, si et seulement si x est meilleure que y sur tous les critères.

Mathématiquement, on dit qu'une solution x domine fortement une solution y (dans le cas de minimisation) ssi :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, f_i(x) < f_i(y)$$

et on note $x \prec y$.

Propriétés de la relation de dominance

Une relation de dominance a les propriétés suivantes[3] :

- Elle n'est pas réflexive car une solution ne se domine pas elle même.
- Elle n'est pas symétrique, car on n'a jamais $x \prec y$ et $y \prec x$.
- Elle est transitive, car si $x \prec y$ et $y \prec z$ alors $x \prec z$.

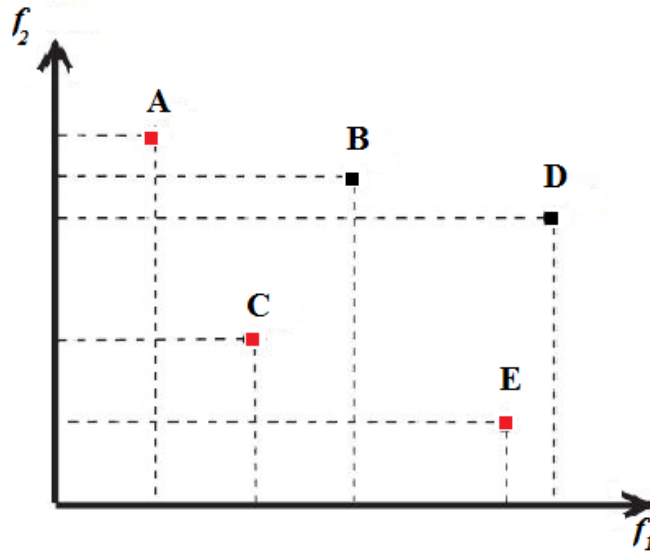


FIGURE 2.2 – Exemple de la relation de dominance

Dans cet exemple, les points A, C, E ne sont pas dominés par d'autres points. Tandis que le point C domine les points B et D, le point E domine le point D.

Les points A, C, E sont au même niveau, c'est-à-dire, ils sont incomparables.

2.2.3 Optimalité de Slater

Une solution réalisable $x^* \in S$ est dite *faiblement efficace* (ou optimale au sens de Slater), si et seulement si il n'existe pas une autre solution $x \in S$ telle que $f(x) < f(x^*)$, c'est-à-dire :

$$\nexists x \in S, x \neq x^* \text{ telle que } f_i(x) < f_i(x^*).$$

À partir d'une solution faiblement efficace, il est impossible d'améliorer tous les critères à la fois[14].

L'ensemble de toutes les solutions faiblement efficaces, noté S^{EF} , l'ensemble des points correspondant dans l'espace des critères est l'ensemble des points non fortement dominés.

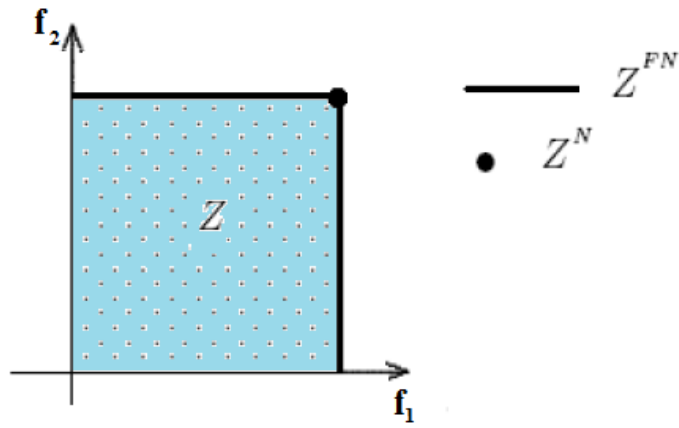


FIGURE 2.3 – L'ensemble des points non fortement dominés et dominés.

2.2.4 Optimalité de Pareto

Une solution réalisable $x^* \in S$ est *efficace* (ou optimale au sens de Pareto) si et seulement si il n'existe pas une autre solution $x \in S$, x domine x^* et on la note $x < x^*$:

$$\nexists x \in S \setminus x \neq x^* : \begin{cases} f_i(x) \leq f_i(x^*) ; \forall i = \overline{1, k} \\ \text{et} \\ \exists j \in \{1, \dots, k\} : f_j(x) < f_j(x^*) \end{cases}$$

La solution d'un problème multi-objectifs est donc un ensemble formé de toutes les solutions efficaces, appelé l'ensemble efficace ou Pareto optimal et noté S^E . L'ensemble de points correspondant dans l'espace des critères est l'ensemble des points non-dominés noté par :

$$Z^N = \{z \in Z, \text{ tel que } \nexists z' \in Z : z' \leq z\} .$$

Ainsi, toute solution de l'ensemble Pareto peut être considérée comme optimale puisque il est impossible d'augmenter (améliorer) la valeur d'un des critères sans diminuer la valeur d'au moins un autre critère. Ces solutions forment la frontière de Pareto.

Remarque :

La relation entre les deux concepts d'optimalité est que l'ensemble des solutions efficaces (points de Pareto) est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions faiblement efficaces (points de Slater), c'est-à-dire :

$$S^E \subseteq S^{EF}$$

2.2.5 Points particuliers

Pour certains points de références permettant de discuter de l'intérêt des solutions trouvées, des points particuliers ont été définis dans l'espace objectif. Ces points peuvent représenter des solutions réalisables ou non[16].

Le point idéal

Le point idéal z^I est le point ou le vecteur qui a comme valeur pour chaque fonction objectif la valeur optimale.

$$z^I \text{ tel que : } \forall i = \{1, \dots, n\} ; f_i(z^I) = \text{opt}_{x \in S} f_i(x) .$$

Dans le plupart des problèmes multi-objectifs, le point idéal z^I n'est pas une solution réalisable, car si c'était le cas, alors les objectifs ne sont pas contradictoires et une solution qui optimise un objectif, optimise tous les autres objectifs, ce qui ramènerait le problème à un problème ayant une seule solution Pareto optimale.

Le point utopique

Le point utopique z^U est un point idéal particulier peut être défini de la façon suivante :

$$z^U = z^I - \varepsilon U .$$

où : $\varepsilon > 0$ et $U = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_n$ est le vecteur unitaire, à partir de sa définition, il est clair, que ce point n'est pas réalisable.

Le point nadir

Le point nadir z^N est le point ou le vecteur correspond à les bornes supérieures sur la surface de Pareto et non pas dans tout l'espace des solutions réalisable.

$$z^N \text{ tel que : } \forall i = \{1, \dots, n\} ; f_i(z^N) = \text{opt}_{x \in \mathcal{D} \setminus f_j(z^I)} f_i(x) \text{ avec } j \neq i .$$

Cela revient donc à affecter pour chaque fonction objectif du point Nadir la meilleure valeur possible parmi les solutions optimisant les autres fonctions.

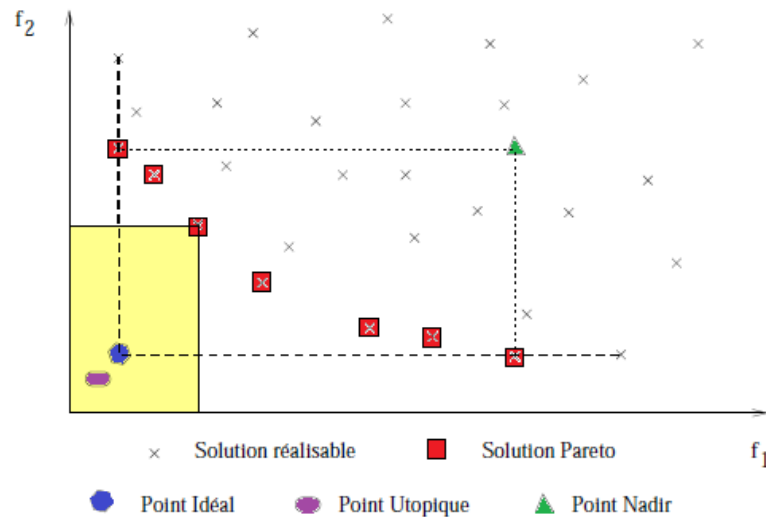


FIGURE 2.4 – Illustration des différents points particuliers

2.3 Approches de résolution d'un problème multi-objectifs

La résolution d'un problème d'optimisation multi-objectifs est un ensemble de solutions Pareto. Néanmoins, juste une seule solution pourra être prise dans un problème réel[18], le choix final de cette solution à garder nécessite l'intervention humaine. Dans plusieurs publications, les approches de résolution d'un problème multi-objectifs sont classées en deux classes, une qui adopte un point de vue décideur, et l'autre adopte le point de vue concepteur.

2.3.1 Un point de vue décideur

Le choix d'une solution optimale par un décideur doit être effectué; le décideur peut intervenir en amont de la résolution, après celle-ci, ou de manière interactive, afin de transformer le problème multi-objectifs en un problème mono-objectif. En effet, on peut répartir les méthodes de résolution de problèmes multi-objectifs en trois grandes familles :

Les approches a priori

Le décideur intervient avant de lancer la méthode d'optimisation, pour définir ses préférences entre les différents objectifs. Dans ce cas, on suppose que le décideur connaît a priori le poids de chaque objectif afin de les mélanger dans un problème mono-objectif. Cependant, dans la

plupart des cas, le décideur ne peut pas exprimer clairement ses préférences, car les objectifs sont exprimés dans des unités différentes[22].

Les approches progressives

Le décideur intervient au fur et à mesure du déroulement de l'optimisation pour modifier ainsi interactivement le compromis entre ses préférences et les résultats obtenues, afin de diriger le processus d'optimisation. Cette approche permet donc de bien prendre en compte les préférences du décideur, mais nécessite sa présence tout au long du processus de recherche.

Les approches a posteriori

le décideur intervient à la fin de l'optimisation, pour choisir une solution parmi l'ensemble des solutions fournies par le processus de recherche. Les approches a posteriori fournissent, à la fin de l'optimisation, une surface de compromis.

2.3.2 Point de vue concepteur

Une autre classification utilisée dans la littérature, adopte un point de vue plus théorique articulé autour des notions d'agrégation et de Pareto optimale[25]. Les méthodes de la résolution de problèmes multi-objectifs sont classées dans trois catégories en fonction de la manière dont elles traitent la présence de plusieurs objectifs. Les trois catégories sont : approches scalaires, approches Pareto et approches non scalaires et non Pareto.[20]

Approche scalaire

Cette approche de la résolution consiste à transformer le problème d'optimisation multi-objectifs en un problème mono-objectif par un ensemble de paramètres (contraintes, poids,.....), dont il existe de nombreuses méthodes de résolution. Plusieurs méthodes différentes ont été mises au point pour faire cette transformation : la méthode des pondérations, la méthode ε -contraintes, programmation par but, ..., etc.

1 - Méthode de pondération des fonctions objectifs :

Cette approche de la résolution d'un problème d'optimisation multi-objectifs est l'une des premières approches utilisées. Elle consiste à transformer un problème multi-objectifs en un problème mono-objectif, en définissant une fonction objectif unique F comme étant la somme pondérée des différentes fonctions objectifs du problème initial. En affectant à chaque fonction

objectif un coefficient de pondération positif λ_i qui représente l'importance relative attribuée par le décideur pour chaque objectif.

Le problème initial peut être reformulé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \\ \text{s.c} \quad g(x) \geq 0, \\ \quad \quad x \geq 0, \end{array} \right.$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)'$ est appelé vecteur des poids, tel que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

En terme d'avantage, cette méthode permet d'utiliser toutes les méthodes de la résolution des problèmes mono-critères. Cependant, l'obstacle majeur est de ne pas connaître bel et bien le problème, sinon le décideur changera de poids tant que le résultat trouvé ne le satisfait pas ; le poids fixe ne permet pas de trouver un grand nombres de solutions Pareto optimale et pour avoir un grand ensemble de solution Pareto optimale il faut changer de poids ; cela perdra le temps gagné pendant l'exécution. En outre, si la fonction objectif n'est pas convexe alors la méthode n'est pas applicable.

2 - Méthode de compromis :

On appelle aussi cette méthode la méthode ε -contrainte[27]. Fondièrement, cette méthode qui fait partie des méthodes scalaires, elle permet d'optimiser une seule fonction objectif qu'on choisi prioritairement, tout en ajoutant les autres objectifs comme contraintes d'inégalité. Cependant, cette méthode qui permet juste d'optimiser un seul objectif, elle doit être l'utiliser plusieurs fois si on souhaite optimiser toutes les fonctions objectifs, afin de trouver plusieurs solutions compromis pour résoudre les problèmes convexes et non convexes, à savoir qu'il faut connaître à priori les intervalles de ε_i pour toutes les fonctions objectifs si on veut générer les différentes solution de Pareto optimale.

Le problème obtenu peut être formulé de la manière suivante [2] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Minimiser} & f_i(x) \\ \textit{s.c} & f_1(x) \leq \varepsilon_1 \\ & \vdots \\ & f_{i-1}(x) \leq \varepsilon_{i-1} \\ & f_{i+1}(x) \leq \varepsilon_{i+1} \\ & \vdots \\ & f_n(x) \leq \varepsilon_n \\ & g(x) \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

Et les paramètres $\varepsilon_i > 0$ sont à définir par le décideur. En d'autres termes, une des fonctions objectif est retenue comme une fonction unique, tandis que les autres fonctions restantes sont transformées en contraintes.

Approches Pareto

Les approches Pareto utilisent directement la notion de dominance au sens de Pareto pour résoudre les différents problèmes d'optimisation multi-objectifs et comparer les solutions entre elles. Ce concept permet de ne pas favoriser un compromis plutôt qu'un autre, mais il permet de fournir une aide précieuse au décideur. L'idée d'utiliser cette notion pour la recherche des solutions a été introduite initialement par *Goldberg*[17], à la base du développement des algorithmes génétiques multi-objectifs[27]. Les méthodes évolutionnaires utilisant cette notion sont :

1 - La méthode MOGA :

La méthode MOGA (Multiple Objective Genetic Algorithm), proposée par *Fonseca* et *Fleming*(1993)[27], est le premier algorithme qui utilise la notion de dominance au sens de Pareto pour ranger et évaluer les individus de la population. Néanmoins, cet algorithme présente quelques insuffisances, il permet pas, dans certains cas, d'obtenir une bonne représentation du front de Pareto.

2 - La méthode SPEA :

La méthode SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm), proposée par *Zitzler* et *Thiel* (1999)[27], a été conçue comme un moyen d'incorporer des différents algorithmes évolutionnaires d'optimisation multi-objectifs, elle utilise une archive externe pour ranger les solutions non dominées calculées précédemment ; à chaque génération, les individus non dominés sont copiés dans cette archive. Face à des problèmes liés essentiellement à la taille de la population et de

temps d'exécution, une nouvelle version révisée appelée **SPEA-II** a été introduite avec quelques différences principale par rapport à son prédécesseur.

3 - La méthode NSGA :

La méthode NSGA (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm) a été introduite par *Sirinas* et *Dep* (1994)[27], elle utilise le concept de la dominance pour classer les individus, tous les individus non-dominés possèdent un rang 1, l'ensemble suivant des individus non-dominés possède le rang 2 et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les individus aient un rang. Une nouvelle version améliorée a été proposée par *Dep* (2002) appelée **NSGA-II**, cette dernière est l'une des méthodes les plus utiliser dans l'optimisation multi-objectifs.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DIRECTE DE SUPPORT POUR UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE CONVEXE

Introduction

La méthode directe du support (MDS) permet de résoudre des problèmes de programmation linéaire et quadratique convexes. Elle est une généralisation de celle du simplexe et utilise la métrique du simplexe, permettant ainsi de changer un seul indice non basique à chaque itération. Une itération de la MDS consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas optimal tout au long de cette direction afin d'optimiser l'objectif [13]. Elle permet ainsi de générer une suite finie de points réalisables convergeant vers la solution optimale du problème.

Dans ce chapitre, on expose l'algorithme de la MDS pour la résolution d'un PQ sous forme standard, puis nous l'adaptions afin de résoudre le problème d'optimisation d'un portefeuille financier.

3.1 Notions sur la convexité

La convexité joue un rôle central dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité [22].

3.1.1 Ensemble convexe

Définition 3.1.1. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si :

$$\forall x, y \in S, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

Autrement dit, un ensemble S de \mathbb{R}^n est convexe, si $\forall x, y \in S$, le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans S :

$$\forall x, y \in S \Rightarrow [x, y] \subset S$$

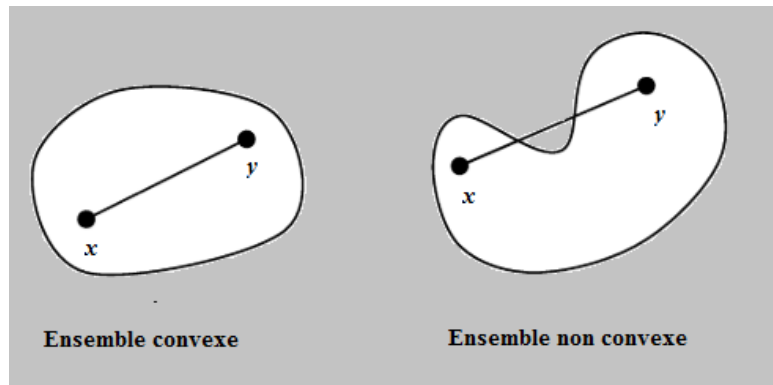


FIGURE 3.1 – Ensemble convexe et non convexe

Proposition

Soient S_1 et S_2 deux ensembles convexes de \mathbb{R}^n , alors :

- L'ensemble $\alpha S_1 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha x, x \in S_1\}$ est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble $S = \alpha S_1 + \beta S_2$ est un ensemble convexe pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Toute intersection d'ensembles convexes est convexe.
- L'image d'un sous-ensemble convexe par une application linéaire sont convexes.
- Tout produit cartésien d'ensembles convexes est convexe.

3.1.2 Fonctions convexes

Définition 3.1.2. Une fonction réelle F définie sur un ensemble convexe S de \mathbb{R}^n est dite convexe, si $\forall x, y \in S$, et $\forall \lambda \in [0,1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \quad (3.1)$$

Autrement dit, une fonction F est convexe si et seulement si, le segment reliant tout couple de points situés sur la courbe définie par la fonction F est situé au-dessus de cette courbe[13].

La fonction F est dite strictement convexe si l'inégalité (3.1) est stricte, c'est à dire :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \quad (3.2)$$

avec : $x \neq y, \lambda \in]0, 1[$

Une fonction F est dite concave si $(-F)$ est convexe, autrement dit :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \quad (3.3)$$

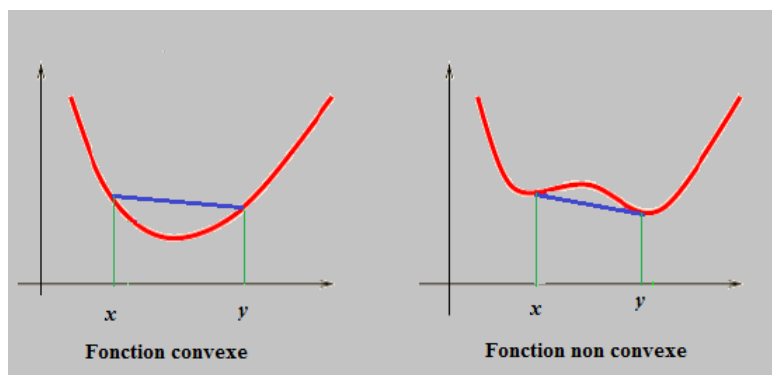


FIGURE 3.2 – Fonction convexe et non convexe

Conséquence

Définition 3.1.3. Une fonction vectorielle $F : S \rightarrow \mathbb{R}^k$, telle que : $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ est convexe si chacune de ses composantes f_i est convexe[11].

- Toute fonction linéaire est à la fois convexe et concave.
- La somme de fonctions convexes est une fonction convexe.

3.1.3 propriétés de fonctions convexes

- Soit une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \in \mathbb{R}^n$, alors f est convexe ssi :
 $\text{epi}(f) = (x, r) : x \in C, r \geq f(x) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

- Soit une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \in \mathbb{R}^n$, alors f est convexe ssi :
 $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k S_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(S_k)$
 où $S_i \in C, i = 1, 2, \dots, p, \lambda_i \geq 0$

- Soit une fonction réelle de classe de C^1 définie sur un ensemble convexe $C \in \mathbb{R}^n$, alors f est convexe ssi :

$$f(y) - f(x) \geq (y - x)' \nabla f(x), \forall x, y \in C$$

- Soit une fonction réelle de classe de C^2 définie sur un ensemble convexe $C \in \mathbb{R}^n$, alors f est convexe ssi :

$$(y - x)' H(x) (y - x) \geq 0, \forall x, y \in C$$

- Si $C \in \mathbb{R}^n$ est un ouvert convexe, alors f est convexe ssi :

$$H(x) \geq 0, \forall x \in C$$

On remarque qu'une fonction quadratique semi-définie positive est une fonction convexe.

- Le vecteur $\ell \in \mathbb{R}^n, \ell \neq 0$ est appelé direction admissible en point $x \in S$, S'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $x + \theta \ell \in S, \forall \theta \in [0, \alpha]$, si x est un point intérieure alors, toutes les directions sont admissibles.

3.2 Formes quadratiques et leurs propriétés

3.2.1 Forme quadratique

Définition 3.2.1. Une forme quadratique de n variables x_1, x_2, \dots, x_n est une fonction réelle qui s'écrit de la façon suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (3.4)$$

En posant le vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, et la matrice $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$, l'expression (3.4) s'écrit sous la forme d'un produit matriciel :

$$F(x) = x' A x \quad (3.5)$$

Remarque 3.2.1. La matrice A peut toujours être supposée carrée symétrique ; en effet, si A n'est pas symétrique, on définit une nouvelle matrice D symétrique telle que :

$$D = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow D' = \frac{A' + A}{2} = D$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} 2x'Dx &= x'(A + A')x = x'Ax + x'A'x \\ &= x'Ax + (x'Ax) \\ &= 2x'Ax \\ \Rightarrow F(x) &= x'Ax = x'Dx, \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2.2 Gradient d'une forme quadratique

Définition 3.2.2. (Gradient d'une forme quadratique)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1 continûment différentiable, son gradient est défini par :

$$g(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Soit F une forme quadratique, et D sa matrice symétrique associée :

$$F(x) = x'Dx$$

où x est un vecteur colonne. Considérons les n -vecteurs d_i , $i = 1, 2, \dots, n$ suivants :

$$d_i = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ \vdots \\ d_{in} \end{pmatrix}$$

on a alors :

Définition 3.2.5. (Forme quadratique définie négative)

Soit la forme quadratique $F(x) = x'Dx$. F est dite définie négative si :

$$x'Dx < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0.$$

On dit aussi qu'elle est définie non positive si :

$$x'Dx \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Définition 3.2.6. (Forme quadratique non définie)

Soit la forme quadratique $F(x) = x'Dx$. F est dite non définie si F est positive pour certaines valeurs de x et négative pour d'autres valeurs.

3.3 Méthode directe de support

3.3.1 Position du problème

Considérons le problème de programmation quadratique convexe suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x \rightarrow \min \\ \text{s.c} \quad Ax = b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

où :

- $D' = D \geq 0$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$,
- A est une matrice de dimension $(m \times n)$, avec $\text{rang}(A) = m < n$.
- $I = \{1, 2, \dots, m\}$ est l'ensemble d'indices des lignes de A .
- $J = \{1, 2, \dots, n\}$ est l'ensemble d'indices des colonnes de A , tel que $J = J_B \cup J_N$
- J_B est l'ensemble d'indices des variables basiques, tel que $|J_B| = |I| = m$.
- J_N est l'ensemble d'indices des variables hors-base.

3.3.2 Définitions

- Un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ vérifiant les contraintes du problème (3.10) est appelé solution réalisable (SR).
- Une solution réalisable x^* est dite optimale si :

$$F(x^*) = \frac{1}{2}(x^*)'D(x^*) + c'(x^*) = \min_x \left(\frac{1}{2}x'Dx + c'x \right)$$

- Une solution réalisable x^ε est dite suboptimale ou ε -optimale si :

$$F(x^\varepsilon) - F(x^*) \leq \varepsilon,$$

où : x^* est une solution optimale du problème (3.10) et ε est un nombre arbitraire positif ou nul, choisi comme précision.

- L'ensemble d'indices des variables basiques J_B est appelé support de base du problème (3.10) si :

$$\det(A_B) = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

- Le couple $\{x, J_B\}$ formé de la solution réalisable x et du support des contraintes J_B est appelé solution réalisable de support (SRS).
- Une solution réalisable de support SRS $\{x, J_B\}$ est dite non dégénérée si les composantes basiques sont strictement positives, c'est-à-dire :

$$x_j > 0, \forall j \in J_B.$$

3.3.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (3.10), considérons une autre SR quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$. L'accroissement de la fonction objectif peut s'écrire comme suit :

$$F(x) = c'x + \frac{1}{2}x'Dx. \quad (3.11)$$

$$F(\bar{x}) = F(\bar{x} + \Delta x) = c'(x + \Delta x) + \frac{1}{2}(x + \Delta x)'D(x + \Delta x). \quad (3.12)$$

$$= C' + \frac{1}{2}x'Dx + C'\Delta x + x'D\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x). \quad (3.13)$$

$$= F(x) + (C + \Delta x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x). \quad (3.14)$$

$$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = g'(x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)'D(\Delta x) \quad (3.15)$$

où : $g(x) = Dx + c$ est le gradient de F au point x , avec $g(x) = g(J) = \begin{pmatrix} g_B \\ g_N \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, on a :

$$A\bar{x} = Ax = b \Rightarrow A(\bar{x} - x) = A\Delta x = 0$$

On pose : $\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_N \end{pmatrix}$, $\Delta x_B = \Delta x(J_B)$, $\Delta x_N = \Delta x(J_N)$

Alors, on peut écrire : $A\Delta x = A_B\Delta x_B + A_N\Delta x_N = 0$

$$\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1}A_N\Delta x_N \quad (3.16)$$

En utilisant l'expression (3.16), l'accroissement (3.15) devient :

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) - F(x) &= g'_B\Delta x_B + g'_N\Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_B, \Delta x_N)' D \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_N \end{pmatrix} \\ &= -g'_B A_B^{-1} A_N \Delta x_N + g'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \Delta x_N \\ \Delta x_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \Delta x_N \\ \Delta x_N \end{pmatrix} \\ &= \left(-g'_B A_B^{-1} A_N + g'_N \right) \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x_N' \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \Delta x_N \end{aligned}$$

Ici : $I_N = I(J_N, J_N)$ est une matrice d'identité d'ordre $(n - m)$.

Posons :

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \text{ et } M = M(J_N, J_N) = Z' D Z \quad (3.17)$$

On définit le vecteur des potentiels par :

$$u' = g'_B A_B^{-1}$$

Et le vecteur des estimations E comme suit :

$$E' = E'(J) = g' - u' A = (E'_B, E'_N),$$

avec : $E'_B = g'_B - u' A_B = 0$, $E'_N = g'_N - u' A_N \Rightarrow E'_j = g'_j - u' A_j$, $j \in J_N$.

Finalement, la formule d'accroissement (3.15) prend la forme finale suivante :

$$\Delta F(x) = F(\bar{x}) - F(x) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x_N' M \Delta x_N. \quad (3.18)$$

3.3.4 Critère d'optimalité

En utilisant la formule de l'accroissement (3.18), et remarquons que $M \geq 0$, on obtient le théorème suivant :

Remarque 3.3.1. Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (3.10). Les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si } x_j = 0 \\ E_j = 0, & \text{si } x_j > 0 \\ j \in J_N \end{cases} \quad (3.19)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du point x . Ces relations sont aussi nécessaires, dans le cas où la SRS est non-dégénéré.

Démonstration. voir [6].

3.3.5 Critère de suboptimalité

Pour une SRS $\{x, J_B\}$, remplaçant dans la formule de l'accroissement (3.18) \bar{x} par une solution optimale x^* , et en minorant l'expression, on aura :

$$\begin{aligned} F(x^*) - F(x) &= E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x'_N M \Delta x_N \\ &= \sum_{j \in J_N} E_j (x_j^* - x_j) + \frac{1}{2} \Delta x'_N M \Delta x_N \\ &\geq \sum_{j \in J_N} E_j (x_j^* - x_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) - F(x^*) \leq \sum_{j \in J_N} E_j (x_j - x_j^*)$$

Puisque x^* est réalisable et optimale, alors on aura $E_N \geq 0$, et par conséquent on aura :

$$-x_j^* \leq 0 \Rightarrow x_j - x_j^* \leq x_j \Rightarrow E_j (x_j - x_j^*) \leq E_j x_j$$

d'où :

$$F(x) - F(x^*) \leq \sum_{j \in J_N} E_j x_j = \beta(x, J_B)$$

$\beta(x, J_B)$ appelé l'estimation de suboptimalité de la SRS (x, J_B)

Remarque 3.3.2. (Condition suffisante de suboptimalité)

Soit une SRS $\{x, J_B\}$ des contraintes du problème (3.10) et $\varepsilon \geq 0$ une précision. Si $E_N \geq 0$ et $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\{x, J_B\}$ est ε -optimal.

3.3.6 Construction de l'algorithme de résolution

Avant de présenter l'algorithme de résolution, donnons quelques définitions essentielles :

- L'ensemble des indices $J_S \subset J_N$ est appelé support de la fonction objectif F si :

$$\det (M_S) = \det M(J_S, J_S) \neq 0, \quad M = Z' D Z$$

- L'ensemble des indices $J_P = \{J_B, J_S\}$; formé du support des contraintes J_B et de celui de la fonction objectif J_S ; est appelé support du problème (3.10).

- Une SRS $\{x, J_P\}$ est dite accordée si :

$$E_s = E(J_s) = 0.$$

Soit $\{x, J_P\}$ un plan de support initial accordé du problème (3.10), et $\varepsilon \geq 0$ une précision. On pose $J_{NN} = J_N/J_s$. Le but est alors de construire un plan ε -optimal x^ε ou carrément un plan optimal x^* . Une itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{x, J_P\}$ vers $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$ de telle sorte que $F(\bar{x}) \leq F(x)$.

La nouvelle solution \bar{x} est construite de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta \ell$$

où : le n-vecteur ℓ est la direction d'amélioration et θ est le pas le long de cette direction.

Cet algorithme utilise la métrique du simplexe, c'est à dire, on fait varier une seule composante parmi celles qui ne vérifient pas le critère d'optimalité (3.19). Pour que l'accroissement de la fonction objectif F soit maximal, il faut choisir l'indice j_0 comme suit :

$$|E_{j_0}| = \max (|E_{j_0}|, \quad j \in J_{NNO})$$

où $J_{NNO} \subset J_{NN}$ est l'ensemble des indices non-optimaux défini par :

$$J_{NND} = \{(j \in J_{NN} \setminus (E_j < 0 \text{ et } x_j = 0) \text{ où } (E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0))\}$$

Calcul de la direction d'amélioration

On construit une direction admissible $\ell = \ell(J) = (\ell_B, \ell_S, \ell_{NN})$ comme suit :

- La composante $\ell_{NN} = \ell(J_{NN})$ est calculé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = -\text{signe } E_{j_0} \\ \ell_{j_0} = 0, \quad j \neq j_0, \quad j \in J_{NN} \end{cases}$$

- La composante $\ell_S = \ell(J_S)$ est calculé de manière à assurer que :

$$\bar{E}_j = E_j(x + \theta\ell) = 0, \quad j \in J_S.$$

En effet, d'après l'expression (3.17), on a :

$$E'_N = g'_N - g'_B A_B^{-1} A_N = -g'_B A_B^{-1} A_N + g'_N I_N = (g'_B, g'_N) \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} = g'(x)Z.$$

$$\ell = \begin{pmatrix} \ell_B \\ \ell_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \ell_N = \ell_N Z.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{E}'_N &= g'(x + \theta\ell)Z = [D(x + \theta\ell) + c]'Z \\ &= g'(x)Z + \theta\ell'Z = E'_N + \theta\ell'Z'DZ \\ \Rightarrow \bar{E}'_N &= E'_N + \theta M\ell_N = E'_N + \theta S_N, \quad S_N = M\ell_N \end{aligned}$$

Comme $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\bar{E}'(J_S) = 0$ est équivalente à :

$$M(J_S, J_S)\ell(J_S) + M(J_S, J_{NN})\ell(J_{NN}) = 0.$$

d'où :

$$\ell_S = \ell(J_S) = -M_S M(J_S, J_{NN})\ell(J_{NN}).$$

- La composante $\ell_B = \ell(J_B)$ sera calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \ell_B = -A_B^{-1} A_N \ell_N &= -A_B^{-1} (A_S \ell_S + A_{NN} \ell_{NN}) \\ &= -A_B^{-1} [A(I, J_S)\ell_S - A(I, j_0)\ell_{j_0}] \end{aligned}$$

Calcul du pas θ_0

Le pas optimal de la direction ℓ est calculé comme suit :

$$\theta^0 = \min \{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}.$$

En d'autre part, le pas θ doit vérifier la relation $\bar{x} = x + \theta\ell \geq 0$, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\theta\ell_j \leq x_j, & j \in J_B \\ -\theta\ell_j \leq x_j, & j \in J_S \\ -\theta\ell_{j_0} \leq x_{j_0} \end{cases}$$

Les différentes valeurs maximales que peut prendre le pas θ seront calculées comme suit :

- La valeur de θ_{j_0} :

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} x_{j_0}, & \text{si } E_{j_0} > 0 \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

- La valeur de θ_{j_S} :

$$\theta_{j_S} = \min_{j \in J_S} \theta_j, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} \frac{-x_j}{\ell_j}, & \text{si } \ell_j < 0 \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

- La valeur de θ_{j_1} :

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} \frac{-x_j}{\ell_j}, & \text{si } \ell_j < 0 \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

- La valeur de θ_F :

Le pas θ_F se calcul de sorte que le passage de x à \bar{x} puisse assurer une diminution maximale de la fonction objectif F . En utilisant la relation d'accroissement (3.18) :

$$\Delta F(x) = \varphi(\theta) = -\theta|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta^2 \ell'_N M \ell_N$$

Nous devons alors vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\theta} &= -|E_{j_0}| + \theta\alpha = 0, \text{ avec } \alpha = \ell'_N M \ell_N > 0 \\ \Rightarrow \theta &= \frac{|E_{j_0}|}{\alpha}. \end{aligned}$$

Alors, on aura :

$$\theta_F = \begin{cases} \frac{|E_{j_0}|}{\alpha}, & \text{si } \alpha > 0 \\ \infty, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Changement du support

Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors la solution \bar{x} est ε -optimal du problème (3.10), et on arrête l'algorithme.

Sinon ($\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$), on procède au changement du support J_P par un nouveau support \bar{J}_P de la manière suivante :

- **Si** $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors il est inutile de changer le support, et on pose :

$$\bar{J}_B = J_B, \quad \bar{J}_S = J_S, \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

- **Si** $\theta^0 = \theta_{j_s}$, alors on pose :

$$\bar{J}_B = J_B, \quad \bar{J}_S = (J_S/j_s), \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

- **Si** $\theta^0 = \theta_F$, alors on pose :

$$\bar{J}_B = J_B, \quad \bar{J}_S = (J_S \cup j_s), \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

- **Si** $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors on pose :

- **Si** $\exists j_* \in \bar{J}_S$ tel que : $x_{j_1 j_*} \neq 0$, alors :

$$\bar{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_*, \quad \bar{J}_S = (J_S/j_*), \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

- **Sinon** on pose :

$$\bar{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0, \quad \bar{J}_S = J_S, \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

Une fois les étapes précédentes sont exécutées, on recommence une autre itération avec la nouvelle SR \bar{x} et le nouveau plan de support \bar{J}_P qui satisfait les conditions algébriques :

$$\det A(I, \bar{J}_B), \quad \det M(\bar{J}_S, \bar{J}_S), \quad \bar{E}[\bar{J}_s] = 0.$$

3.3.7 Algorithme de la méthode directe de support quadratique

Algorithme 1 : Algorithme de support quadratique

- Données :

- Soit $\{x, J_P\}$, une SRS telle que $J_P = \{J_B, J_P\}$, $\varepsilon \geq 0$ est un nombre quelconque.

- (01). Initialisation :

- Pour plus de facilité, on pose $J_S = \emptyset$

- Calculer le vecteur des estimations : $E'_N = g' - u'A$, avec : $u = g'_B A_B^{-1}$.

- (02). Test d'optimalité de la SRS $\{x, J_P\}$:

si ($E_N \geq 0$) alors

| • Calculer $\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_{NNO}} E_j x_j$.

| si ($\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$) alors

| | x est ε -optimale, et on arrête.

| sinon

| | Aller à (03).

| fin

sinon

| Aller à (03).

fin

- (03). Amélioration de la SR x :

- Déterminer l'ensemble des indices non optimaux J_{NNO} .

- Choisir l'indice j_0 , tel que: $|E_{j_0}| = \max_{j \in J_{NNO}} |E_j|$.

- Calculer la direction d'amélioration $\ell(J) = (\ell_B, \ell_S, \ell_{NN})$.

- Calculer le pas $\theta^0 = \min \{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$.

si ($\theta^0 = \infty$) alors

| Le problème n'est pas borné, et on arrête le processus.

sinon

| Calculer $\bar{x} = x + \theta \ell$ et $F(\bar{x})$

fin

• (04). Test d'optimalité de la nouvelle solution x

. Calculer $\bar{E}_N = E_N + \theta^0 M \ell_N$.

si ($\bar{E}_N \geq 0$) alors

. Calculer $\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_{NNO}} \bar{E}_j(\bar{x}_j)$.

si ($\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$) alors

| x est ε -optimale, et on arrête.

sinon

| Aller à (03).

fin

sinon

| Aller à (03).

fin

• (05). Changement du support :

si ($\theta^0 = \theta_{j_0}$) alors

| $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{J}_S = J_S$, $\bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

fin

si ($\theta^0 = \theta_{j_s}$) alors

| $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{J}_S = (J_S/j_s)$, $\bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

fin

si ($\theta^0 = \theta_F$) alors

| $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{J}_S = (J_S \cup j_s)$, $\bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

fin

si ($\theta^0 = \theta_{j_1}$) alors

| $\bar{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0$, $\bar{J}_S = J_S$, $\bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

fin

. Poser $x \leftarrow \bar{x}$, $J_P \leftarrow \bar{J}_P$ et aller à (02).

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION PAR LA MDS DU PROBLÈME MULTI-OBJECTIFS DE PORTEFEUILLE

Introduction

Dans ce chapitre, on adapte la méthode directe de support (MDS) pour la résolution d'un problème bi-critères de gestion du portefeuille. Pour sa résolution, nous l'avons transformé en un problème quadratique paramétrique, et nous avons adapté la méthode directe de support. L'algorithme MDS nous permet de déterminer la frontière de Pareto. A la fin, on déroule un exemple d'un portefeuille financier composé de 10 titres du CAC40.

4.1 Présentation du problème

Notre problème posé dans le premier chapitre est un programme mathématiques sous contraintes. Il s'agit d'un problème bi-critères, où le premier critère consiste à minimiser la variance du portefeuille et le second permet de maximiser le rendement du portefeuille.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z_1 = x' \Sigma x \\ \max \quad z_2 = \mu' x \\ \text{s.c} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \quad \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

L'approche classique de la résolution des problèmes multi-objectifs est la méthode de pondération des fonctions objectifs, qui consiste à le transformer à un problème mono-objectif. Donc pour notre cas, on résout le problème quadratique paramétrique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x \quad Z = (1 - \lambda) \frac{1}{2} x' \Sigma x - \lambda \mu x \\ \text{s.c} \quad e' x = 1 \\ \quad \quad x \geq 0, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où :

Σ est une matrice de variance-covariance symétrique et semi-définie positive.

μ est le vecteur des rendements espérés et λ est la préférence du décideur, avec $0 \leq \lambda \leq 1$.

x est le n -vecteur des proportions investies.

e est un n -vecteur formé de 1.

4.1.1 Résolution du problème

Pour résoudre le problème précédent, la démarche à suivre est la suivante :

1. On pose $\lambda = 0$ et on résout le problème(4.2) en utilisant la méthode directe du support MDS. La solution optimale obtenue nous permet de déterminer le portefeuille de variance minimale.
2. Pour $0 < \lambda < 1$, soit la fonction de Lagrange associée à ce problème (4.2) :

$$L(x, \lambda, y, \nu) = \frac{1}{2}(1 - \lambda)x' \Sigma x - \lambda \mu x + y(e' x - 1) - \nu' x, \quad (4.3)$$

où y, ν sont les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement à la contrainte d'égalité et aux contraintes d'inégalité du problème (4.2). Comme Σ est semi-définie positive, alors le problème (4.2) est convexe et par conséquent, les conditions de KKT de premier ordre sont à la fois nécessaires et suffisantes pour l'optimalité du point (x, λ, y, ν) :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (1 - \lambda)\Sigma x - \lambda \mu + y e - \nu = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = e' x - 1 = 0 \quad (4.5)$$

$$\nu' x = 0 \quad (4.6)$$

$$x \geq 0 \quad \nu \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Comme le problème (4.2) est un programme quadratique avec une seule contrainte, et afin d'appliquer la méthode de support MDS pour sa résolution, alors nous suggérons la définition suivante du support :

Définition 4.1.1. *Un sous ensemble d'indices $J_B \subset J$ est appelé support du problème (4.2) si la sous matrice $\sigma_B = \Sigma(J_B, J_B)$ est non singulière.*

On note par $J_N = \{J/J_B\}$ l'ensemble des indices des variables hors base.

- Pour une SRS $\{x, J_B\}$ du problème (4.2), on décompose l'ensemble des éléments basiques et non-basiques de notre système comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_B \\ e_N \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_B \\ \mu_N \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_B & \sigma_{BN} \\ \sigma_{NB} & \sigma_N \end{pmatrix},$$

Le vecteur des estimations $E = (E_B, E_N)'$ est défini par :

$$E = (1 - \lambda)\Sigma x - \lambda \mu + y e, \quad (4.8)$$

avec :

$$E_B = (1 - \lambda) [\sigma_B x_B + \sigma_{BN} x_N] - \lambda \mu_B + y e_B = 0, \quad \text{et} \\ E_N = (1 - \lambda) [\sigma_{BN} x_B + \sigma_N x_N] - \lambda \mu_N + y e_N$$

Par construction, on a $E_B = 0$, ce qui donne :

$$x_B = \frac{1}{1 - \lambda} \sigma_B^{-1} [\lambda \mu_B' - (1 - \lambda) \sigma_{BN} x_N - y e_B].$$

- D'après la formule (1.5), on a :

$$e'x = 1 \Rightarrow e'_B x_B + e'_N x_N = 1 \quad (4.9)$$

En remplaçant x_B par son expression dans la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} e'_B \left[\frac{1}{1-\lambda} \sigma_B^{-1} (\lambda \mu_B - (1-\lambda) \sigma_{BN} x_N - y e_B) \right] + e'_N x_N &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} (e'_B \sigma_B^{-1} \mu_B) - e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N - \frac{1}{1-\lambda} (e'_B \sigma_B^{-1} y e_B) + e'_N x_N - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{1-\lambda} (e'_B \sigma_B^{-1} y e_B) &= \frac{\lambda}{1-\lambda} (e'_B \sigma_B^{-1} \mu_B) - e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N + e'_N x_N - 1 \\ \Rightarrow y &= \frac{e'_B \sigma_B^{-1} \mu_B}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} - \frac{(1-\lambda) (e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N)}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} + \frac{(1-\lambda) (e'_N x_N - 1)}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} \\ &= \frac{\lambda (e'_B \sigma_B^{-1} \mu_B)}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} - \frac{e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} + \frac{\lambda (e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N)}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} + \frac{e'_N x_N - 1}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} - \frac{\lambda (e'_N x_N - 1)}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} \\ &= \frac{e'_N x_N - e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N - 1}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} + \lambda \frac{(e'_B \sigma_B^{-1} \mu_B + e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N - e'_N x_N - 1)}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B}, \end{aligned}$$

Alors on écrit :

$$y = \alpha_1 + \lambda \alpha_2, \quad (4.10)$$

avec :

$$\alpha_1 = \frac{e'_N x_N - e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N - 1}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{e'_B \sigma_B^{-1} \mu_B + e'_B \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N - e'_N x_N - 1}{e'_B \sigma_B^{-1} e_B}$$

- On remplace cette dernière formule dans l'expression de x_B et on aura :

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{1-\lambda} \sigma_B^{-1} [\lambda \mu_B - (1-\lambda) \sigma_{BN} x_N - y e_B] \\ &= \frac{1}{1-\lambda} \sigma_B^{-1} [\lambda \mu_B - (1-\lambda) \sigma_{BN} x_N - (\alpha_1 + \lambda \alpha_2) e_B] \\ &= \frac{1}{1-\lambda} \sigma_B^{-1} [\lambda \mu_B - (1-\lambda) \sigma_{BN} x_N - \alpha_1 e_B + \lambda \alpha_2 e_B] \\ &= \frac{1}{1-\lambda} [\lambda \sigma_B^{-1} \mu_B - (1-\lambda) \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N - \alpha_1 \sigma_B^{-1} e_B + \lambda \sigma_B^{-1} \alpha_2 e_B] \\ &= \frac{\lambda}{1-\lambda} \sigma_B^{-1} \mu_B - \sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N - \frac{1}{1-\lambda} \alpha_1 \sigma_B^{-1} e_B + \frac{\lambda}{1-\lambda} \sigma_B^{-1} \alpha_2 e_B \\ &= -\sigma_B^{-1} \sigma_{BN} x_N + \frac{\lambda}{1-\lambda} (\sigma_B^{-1} \mu_B - \sigma_B^{-1} \alpha_2 e_B) - \frac{1}{1-\lambda} (\alpha_1 \sigma_B^{-1} e_B). \end{aligned}$$

Alors on écrit :

$$x_B = \gamma_1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \gamma_2 - \frac{1}{1-\lambda} \gamma_3, \quad (4.11)$$

avec :

$$\gamma_1 = -\sigma_B^{-1}\sigma_{BN}x_N, \gamma_2 = \sigma_B^{-1}\mu_B - \sigma_B^{-1}\alpha_2e_B \text{ et } \gamma_3 = \alpha_1\sigma_B^{-1}e_B$$

Maintenant, on remplace x_B et y dans l'expression de E_N on obtient :

$$\begin{aligned} E_N &= (1 - \lambda)[\sigma'_{BN}x_B + \sigma_Nx_N] - \lambda\mu_N + ye_N = 0 \\ &= (1 - \lambda)\left[\sigma'_{BN}\left(\gamma_1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda}\gamma_2 + \frac{1}{1 - \lambda}\gamma_3\right) + \sigma_Nx_N\right] - \lambda\mu_N + (\alpha_1 + \alpha_2)e_N \\ &= (1 - \lambda)\sigma'_{BN}\gamma_1 + \lambda\sigma'_{BN}\gamma_2 + \sigma'_{BN}\gamma_3 + (1 - \lambda)\sigma_Nx_N - \lambda\mu_N + \alpha_1e_N + \alpha_2\lambda e_N. \\ &= \lambda(\sigma'_{BN}\gamma_2 + \alpha_2e_N - \sigma_Nx_N - \sigma'_{BN}\gamma_1 - \mu_N) + \sigma'_{BN}\gamma_1 + \sigma_Nx_N + \alpha_1e_N - \sigma'_{BN}\gamma_3. \end{aligned}$$

Alors on écrit :

$$= \beta_1 + \lambda\beta_2, \quad (4.12)$$

$$\text{avec : } \beta_1 = \sigma'_{BN}\gamma_1 + \sigma_Nx_N + \alpha_1e_N - \sigma'_{BN}\gamma_3 \text{ et } \beta_2 = \lambda(\sigma'_{BN}\gamma_2 + \alpha_2e_N - \sigma_Nx_N - \sigma'_{BN}\gamma_1 - \mu_N).$$

- On détermine les valeurs de λ qui appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$, pour lesquels les deux vecteurs x_B et E_N vérifient des conditions de KKT, avec :

$$\lambda_{j_0} = \min_{j \in J_B} \{\lambda_j\} : \lambda_{j_0} \text{ permet de rendre } x_{j_0} \text{ nul.}$$

$$\lambda_{j_1} = \min_{j \in J_N} \{\lambda_j\} : \lambda_{j_1} \text{ permet de rendre } E_{j_1} \text{ nul.}$$

Maintenant, on cherche les valeurs de λ_{j_0} pour lesquelles $x_B = 0$:

$$\begin{aligned} \text{on a } x_B &= \gamma_{1j} + \frac{\lambda}{1 - \lambda}\gamma_{2j} - \frac{1}{1 - \lambda}\gamma_{3j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_{1j} + \frac{\lambda}{1 - \lambda}\gamma_{2j} - \frac{1}{1 - \lambda}\gamma_{3j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_{1j}(1 - \lambda) + \gamma_{2j}\lambda - \gamma_{3j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(\gamma_{2j} - \gamma_{1j}) = \gamma_{3j} - \gamma_{1j} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\gamma_{3j} - \gamma_{1j}}{\gamma_{2j} - \gamma_{1j}} ; \quad j \in J_B. \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in]0, 1[$, alors :

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{\gamma_{3j} - \gamma_{1j}}{\gamma_{2j} - \gamma_{1j}} & \text{si } [\gamma_{2j}, \gamma_{3j} > 0 \text{ et } \gamma_{2j} < \gamma_{3j}] \text{ ou } [\gamma_{2j}, \gamma_{3j} < 0 \text{ et } \gamma_{2j} > \gamma_{3j}] \\ & \text{avec } \gamma_{2j}, \gamma_{3j} > \gamma_{1j} \text{ ou } \gamma_{2j}, \gamma_{3j} < \gamma_{1j} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.13)$$

et on cherche aussi les valeurs de λ_{j_1} pour lesquelles $E_N = 0$:

$$\lambda_j^k = \begin{cases} \frac{-\beta_{1j}}{\beta_{2j}} & \text{si } (\beta_{2j} < 0) \text{ et } (\beta_{2j} > \beta_{1j}) \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.14)$$

- On détermine le point de rupture $\lambda^{k+1} = \min\{\lambda_{j_0}^k, \lambda_{j_1}^k\}$. Si $\lambda^{k+1} = \infty$, alors on arrête l'algorithme, sinon on procède au changement de support en fonction des λ_j de la manière suivante :

- Si $\lambda^{k+1} = \lambda_{j_0}^k$, alors, on aura le changement de support comme suit :

$$J_B^{k+1} = J_B^k / j_0, \quad J_N^{k+1} = J_N^k \cup j_0.$$

- Si $\lambda^{k+1} = \lambda_{j_1}^k$, alors on fait le changement de support comme suit :

$$J_B^{k+1} = J_B^k \cup j_0, \quad J_N^{k+1} = J_N^k / j_0.$$

- Après avoir déterminé la valeur de λ^{k+1} , on calcule le rendement du portefeuille μ_p et son risque associé σ_p , puis on fait varier la valeurs de λ dans l'intervalle $[\lambda^k, \lambda^{k+1}]$ et on trace la courbe de la frontière efficiente avec les proportions x obtenues.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \begin{pmatrix} x_B^k(\lambda) \\ x_N^k(\lambda) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_B^k(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + (\frac{\lambda}{1-\lambda})\gamma_2 - (\frac{1}{1-\lambda})\gamma_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} \gamma_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors le rendement espéré et le risque du portefeuille se calculent avec les formule suivantes :

$$\mu_p^k = \mu' x^k(\lambda) = \mu' \left(\gamma_1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \gamma_2 - \frac{1}{1-\lambda} \gamma_3 \right) = T_1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} T_2 - \frac{1}{1-\lambda} T_3,$$

$$\text{avec : } T_1 = \mu' \gamma_1, \quad T_2 = \mu' \gamma_2 \quad \text{et} \quad T_3 = \mu' \gamma_3$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^k &= x'^k(\lambda) \Sigma x^k(\lambda) = \left(\gamma_1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \gamma_2 - \frac{1}{1-\lambda} \gamma_3 \right)' \Sigma \left(\gamma_1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \gamma_2 - \frac{1}{1-\lambda} \gamma_3 \right) \\ &= L_1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} L_2 + \frac{1}{1-\lambda} L_3 + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} L_4 + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 L_5 + \left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^2 L_6 \end{aligned}$$

$$\text{avec : } L_1 = \gamma_1' \Sigma \gamma_1, \quad L_2 = \gamma_1' \Sigma \gamma_2 - \gamma_2' \Sigma \gamma_1, \quad L_3 = \gamma_1' \Sigma \gamma_3 - \gamma_3' \Sigma \gamma_1,$$

$$L_4 = \gamma_2' \Sigma \gamma_3 - \gamma_3' \Sigma \gamma_2, \quad L_5 = \gamma_2' \Sigma \gamma_2 \quad \text{et} \quad L_6 = \gamma_3' \Sigma \gamma_3.$$

4.1.2 Algorithme adapté

Algorithme 2 : Algorithme de la MDS

- Étape 01

- . Initialisation:

- $k = 0$, $\lambda^k = 0$. .

- . Soient:

- Σ la matrice de variance-covariance.

- μ le vecteur des rendements espérés.

- $\{x^k, J_B^k\}$ une SRS optimale obtenue à l'aide de la MDS, avec $J_B^k = J \setminus J_N^k$

- Étape 02

- . Calculer $y^k = \alpha_1^k + \lambda \alpha_2^k$. En utilisant la formule (4.10).

- . Calculer $x_B^k = \gamma_1^k + \frac{\lambda}{1-\lambda} \gamma_2^k - \frac{1}{1-\lambda} \gamma_3^k$. En utilisant la formule (4.11).

- . Calculer $E_N^k = \beta_1^k + \lambda \beta_2^k$. En utilisant la formule (4.12).

- Étape 03

- . Calculer le point de rupture $\lambda^{k+1} = \min \{\lambda_{j_0}, \lambda_{j_1}\}$, où λ_{j_0} et λ_{j_1} sont calculées par les formules (4.13) et (4.14)

- . Calculer le rendement espéré $\mu_p^k = \mu' * x^k(\lambda)$.

- . Calculer le risque $\sigma_p^k = x'^k(\lambda) \sigma * x^k(\lambda)$.

- Étape 04

si ($\lambda^{k+1} = \infty$) alors

| On arrête l'algorithme .

sinon

| si ($\lambda^{k+1} = \lambda_{j_0}^k$) alors

| | $J_B^{k+1} \leftarrow J_B^k \setminus \{j_0\}$

| | $J_N^{k+1} \leftarrow J_B^k \cup \{j_0\}$

| sinon

| | $J_B^{k+1} \leftarrow J_B^k \cup \{j_0\}$

| | $J_N^{k+1} \leftarrow J_B^k \setminus \{j_0\}$

| fin

fin

4.2 Application

On considère un portefeuille financier composé de 10 titres de la bourse française de l'indice CAC 40 (voir Annexe1). Les données sont extraites du site Yahoo finance qui représentent les prix journaliers des ces titres. Notre étude s'étale sur une période de 5 ans (17/06/2013 - 17/06/2018).

Pour ce faire, on a fait appel au logiciel EXCEL pour traiter ces données et la démarche à suivre est la suivante :

- Calculer les rendements de chaque titre. (voir Annexe2)
- Calculer pour chaque titre sa moyenne (rendement espéré) et sa variance (risque) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mu_i = \frac{1}{1278} \sum_{j=1}^{1278} R_{ij} \\ \sigma_i^2 = \frac{1}{1277} \sum_{j=1}^{1278} (R_{ij} - \mu_i)^2 \end{cases} \quad (4.15)$$

et on a obtenu les résultats suivants :

	ACA.PA	AI.PA	AIR.PA	CA.PA	DG.PA	EI.PA	EN.PA	ML.PA	OR.PA	ORA.PA
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Moyenne	0,0006218	0,00027699	0,00055461	-0,00014033	0,00069097	0,00039065	0,00066329	0,00046798	0,0004698	0,00063689
Variance	0,00035998	0,00015895	0,00029274	0,00024756	0,00017071	0,00019479	0,000275	0,00018658	0,00014851	0,00024661

FIGURE 4.1 – Le rendement espéré et la variance de chaque titre

- Calculer la matrice de variance-covariance entre les différents titres.

	ACA.PA	AI.PA	AIR.PA	CA.PA	DG.PA	EI.PA	EN.PA	ML.PA	OR.PA	ORA.PA
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
A1	0,00035998	0,00011612	0,00015121	0,00014141	0,00012096	0,00010134	0,00014011	0,0001203	8,37E-05	0,00014153
A2	0,00011612	0,00015895	0,00011577	0,00010913	9,38E-05	9,60E-05	9,59E-05	9,30E-05	9,57E-05	0,000105
A3	0,00015121	0,00011577	0,00029274	0,00012095	0,00011799	0,00011157	0,0001189	0,00011803	9,89E-05	0,00011305
A4	0,00014141	0,00010913	0,00012095	0,00024756	0,00010724	9,92E-05	9,57E-05	0,00010388	9,88E-05	0,00012424
A5	0,00012096	9,38E-05	0,00011799	0,00010724	0,00017071	9,65E-05	0,00011479	9,16E-05	8,81E-05	0,00011434
A6	0,00010134	9,60E-05	0,00011157	9,92E-05	9,65E-05	0,00019479	8,15E-05	7,96E-05	0,00010435	0,00010846
A7	0,00014011	9,59E-05	0,0001189	9,57E-05	0,00011479	8,15E-05	0,000275	8,78E-05	7,88E-05	0,00015554
A8	0,0001203	9,30E-05	0,00011803	0,00010388	9,16E-05	7,96E-05	8,78E-05	0,00018659	8,02E-05	9,19E-05
A9	8,37E-05	9,57E-05	9,89E-05	9,88E-05	8,81E-05	0,00010435	7,88E-05	8,02E-05	0,00014845	0,00010024
A10	0,00014153	0,000105	0,00011305	0,00012424	0,00011434	0,00010846	0,00015554	9,19E-05	0,00010024	0,00024661

FIGURE 4.2 – La matrice de variance-covariance

4.2.1 Application de la méthode MDS

Après avoir déterminé tous les éléments nécessaires pour la construction du problème (4.2), on passe à l'application de la MDS. Pour une bonne implémentation de cette méthode, nous avons utilisé le langage MATLAB.

Description du langage

MATLAB (MATrix LABoratory) est un logiciel du calcul numérique, développé à la fin des années 70, conçu pour permettre de travailler à partir d'un outil de programmation de haut niveau. Le MATLAB est créé pour l'analyse des données, le calcul scientifique, le traitement de signal et l'analyse des données, permet de manipuler directement les données matricielles, doté d'un ensemble considérable de fonctions prédéfinies.

La programmation sous MATLAB est très particulière : soit on écrit directement sur l'espace d'exécution (espaces de commande) ou bien on programme sur l'éditeur de développement de MATLAB, à savoir que la sauvegarde se fait avec l'extension ".m". Cette façon de sauvegarder permet d'utiliser ces fonctions comme des fonctions MATLAB dans l'espace d'exécution.

Présentation des résultats

Après avoir introduit les données du cas d'étude construit auparavant, on fixe $\lambda = 0$. La résolution du problème associé par la méthode directe du support, nous a permis de déterminer le portefeuille de variance minimale. Ainsi, cette solution sera le point initial de la MDS. Notre approche permet de déterminer l'ensemble des points de rupture et tracer la courbe de la frontière de Pareto.

Les différentes étapes de la MDS sont illustrées dans le tableau suivant :

k -itération	λ	x_B	J_B	μ_p	σ_p^2
1	0	$\begin{pmatrix} 0.1641 \\ 0.0210 \\ 0.1491 \\ 0.1174 \\ 0.0828 \\ 0.1933 \\ 0.2724 \end{pmatrix}$	{2 4 5 6 7 8 9}	$4.6449 * 10^{-4}$	$1.0560 * 10^{-4}$
2	0.05	$\begin{pmatrix} 0.1542 \\ 0.1672 \\ 0.1148 \\ 0.0871 \\ 0.1970 \\ 0.2797 \end{pmatrix}$	{2 5 6 7 8 9}	$4.8445 * 10^{-4}$	$1.0573 * 10^{-4}$
3	0.0521	$\begin{pmatrix} 0.2991 \\ 0.0728 \\ 0.1243 \\ 0.1942 \\ 0.3096 \end{pmatrix}$	{5 6 7 8 9}	$5.5389 * 10^{-4}$	$1.0989 * 10^{-4}$
4	0.0991	$\begin{pmatrix} 0.4165 \\ 0.1465 \\ 0.1437 \\ 0.2834 \end{pmatrix}$	{5 7 8 9}	$5.8997 * 10^{-4}$	$1.1584 * 10^{-4}$
5	0.2207	$\begin{pmatrix} 0.7209 \\ 0.2069 \\ 0.0722 \end{pmatrix}$	{5 7 9}	$6.6927 * 10^{-4}$	$1.4703 * 10^{-4}$
6	0.2469	$\begin{pmatrix} 0.7833 \\ 0.2167 \end{pmatrix}$	{5 7}	$6.8497 * 10^{-4}$	$1.5662 * 10^{-4}$
7	0.6689	1	{5}	$6.9096 * 10^{-4}$	$1.7071 * 10^{-4}$

TABLE 4.1 – Les résultats obtenus après l'exécution de la MDS

La frontière de Pareto obtenue est schématisée dans la figure ci-après :

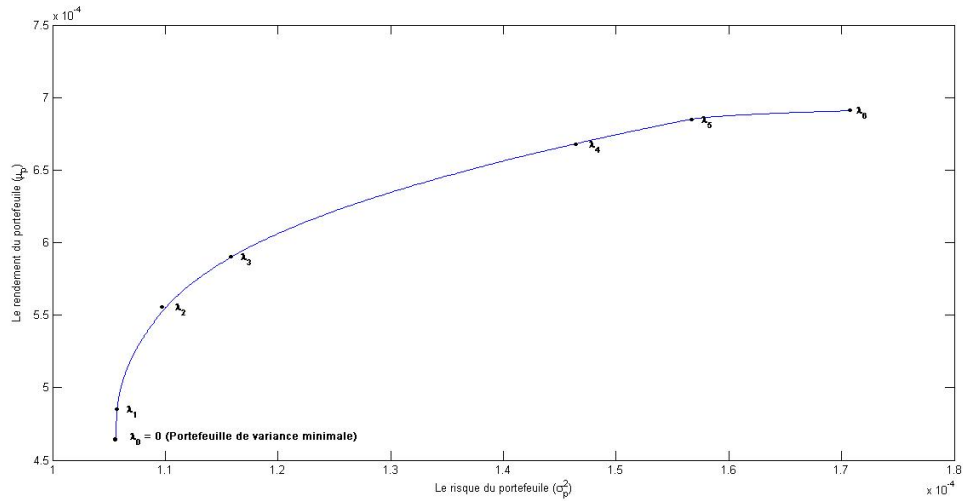


FIGURE 4.3 – La frontière de Pareto

4.2.2 Discussion des résultats

Le tableau représente les différentes situations proposées au décideur pour qu’il prenne son choix d’investissement qui dépend d’une manière directe du paramètre de pondération λ . Alors, cela permet de déterminer l’ensemble des titres J_B qui constitue son portefeuille et les proportions x_i , $i \in J_B$ à investir dans chaque titre, ainsi que le rendement espéré μ_p et le risque σ_p à courir dans chaque choix d’investissement.

Considérons un investisseur disposant d’un capital de 100000 €, souhaitant investir dans les titres risqués, cités précédemment. Alors, il doit choisir son plan d’investissement à partir du tableau ci-dessus. On cite comme exemple les situations suivantes :

- Si l’investisseur est prudent, alors dans ce cas on aura $\lambda = 0$, ce qui lui permet de prendre un risque minimal. Donc, il doit investir 14600 € dans le titre AI, 2100 € dans le titre CA, 14910 € dans le titre DG, 11740 € dans le titre EI, 8280 € dans le titre EN, 19330 € dans le titre ML et 27240 € dans le titre OR. Le rendement espéré du portefeuille constitué est alors 48.449 € et le risque encouru est 10.56 €.

- Si l’investisseur décide de maximiser son rendement et de s’exposer plus au risque, alors il choisit par exemple la situation 5, où $\lambda = 0.2207$. Par conséquent, il doit investir 72090 € dans le titre DG, 20690 € dans le titre EN et 7220 € dans le titre OR. Le rendement espéré du portefeuille constitué est alors 66.927 € et le risque encouru est 14.703 €.

- Si l’investisseur souhaite avoir un rendement maximal, il doit investir tout son capital dans le titre OG.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a résolu le modèle de Markowitz bi-objectifs quadratique convexe paramétrique, la résolution est faite par la méthode MDS programmée sur MATLAB. L'objectif est de déterminer la frontière de Pareto, afin de fournir au décideur un ensemble de solutions selon le degré de pondération choisi.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans notre travail, on a fait une étude sur un problème de la gestion du portefeuille. Cette discipline qui traite les problèmes de gestion des fonds. Elle est aussi un support qui permet aux concepteurs et\ou décideurs de l'utiliser pour analyser et justifier le plan d'investissement tracé et les résultats aboutis.

Le modèle classique de Markowitz, appelé aussi modèle de moyenne-variance, a permis de moderniser la finance. Ce modèle est de nature bi-critères, où le premier critère consiste à minimiser la variance du portefeuille et le second permet de maximiser le rendement de l'investisseur. Pour le résoudre, nous avons utilisé l'approche d'agrégation des critères, qui consiste à transformer le problème posé en un problème quadratique paramétrique(PQP).

En s'inspirant de la méthode de l'activation des contraintes, proposé par M.J. Best [5], nous avons étendu la méthode directe de support pour la résolution du PQP. L'algorithme de la MDS permet de déterminer la frontière de Pareto, appelée aussi frontière efficiente. Notons que cette dernière donne le choix au décideur de composer son portefeuille en fonction de son aversion au risque et de son rendement exigé.

Le cas pratique concerne l'investissement dans la bourse de Paris (indice CAC40). Nous avons choisi 10 titres risqués. En utilisant le tableur EXCEL, nous avons estimé les rendements et les volatilités de ces titres, ainsi que les covariances entre ces titres. L'implémentation de la MDS sous MATLAB nous a permis de déterminer la frontière de Pareto.

Comme perspectives de ce travail, nous suggérons les points suivants :

- Appliquer la méthode adaptée de programmation quadratique pour la résolution de PQP.
- Utiliser d'autres critères de risque (value at risk, les moments d'ordre supérieur,...).

- [1] Athearn, J. L. What is Risk ?. *The Journal of Risk and Insurance*, Vol 38(4), 639-645, 1971.
- [2] Barichard, V. *Approches hybrides pour les problèmes multi-objectifs*. Thèse de Doctorat, École Doctorale d'Angers, 2003.
- [3] Benlahrach. N. *Optimisation multi-objectifs pour l'alignement Multiple de sequence*. Mémoire de Magistère, Université Constantine, 2007.
- [4] Bensalah, H. *Gestion des actifs financiers : de l'approche Classique à la modélisation non paramétrique en estimation du DownSide Risk pour la constitution d'un portefeuille efficient*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard-Lyon I, 2015.
- [5] Best, M. J. *Portfolio optimization*. CRC Press, Taylor and Francis Group, London, 2010.
- [6] Bibi, M.O. *Technique numérique d'optimisation*. Cours de Master 2 MF, Département de Recherche opérationnelle, Université de Bejaia, 2018.
- [7] Bibi, M. O. *Optimisation multi-critères*, Cours de Mester 2 MF. Département de Recherche opérationnelle, Université A. Mira Bejaia, 2018.
- [8] Bouaziz, A et Ghemmour, K. *Optimisation de portefeuille de produits dans le marché concurrentiel : une approche par la théorie des jeux*. Mémoire de Master, Université de M. Bougerra de Boumerdes, 2015.
- [9] Bouhaouche, S et Tounsi, H. *Optimisation des portefeuilles : Résolution par l'approche multi-objectif*. Mémoire de Master. Université de M. Bougerra Boumerdes, 2017.
- [10] Brahmi, B et Bibi, M. O. Dual support method for solving convex quadratic programs. *Optimization*, 59(6), 851-872, 2010.

- [11] Brahmi, B. *Méthodes primales et duales pour la programmation quadratique : extention et applications*. Thèse de Doctorat, Université A. Mira de Bejaia, 2012.
- [12] Chebbar, S et Lallouch, S. *Optimisation de portefeuille sous des contraintes de risque*. Mémoire d'Ingénieur, Université Mohamed V Rabat. 2015.
- [13] Chelouti, S et Kaidi, K. *Résolution d'un problème d'optimisation multi-objectif fractionnaire Linéaire flou en nombres entiers*. Mémoire de Master, Université M.Bougara Boumerdes, 2016.
- [14] Collette, Y et Siarry, P. *Optimisation multi-objectif*, Eyrolles edition, Paris, 2002.
- [15] Corhay, A et Mbangala, M. *Fondements de gestion financière : manuel et applications*. Editions de l'Université de Liège, 2007.
- [16] Dhaenens-Flipo, C. *Optimisation Combinatoire Multi-Objectif : Apport des Méthodes Cooperatives et Contribution à l'Extraction de Connaissances*. Thèse d'habilitation, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2005.
- [17] Golberg D. E. *Genetic algorithms in Search, Optimization and Machine learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachussets, 1989.
- [18] Jozefowicz, N. *Optimisation combinatoire multi-objectif : des méthodes aux problèmes, de la Terre à (presque) la Lune*, Thèse d'habilitation. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2013.
- [19] Khouyaali, Y. *Mise en place d'un modèle d'aide à la decision de l'optimisation multi-critères pour un investissement en action*. Mémoire d'ingénieur. Université Mohamad V RABAT, 2015.
- [20] Knowles, J. Corne, D and Deb, K. *Multiobjective Problem Solving from Nature*. Springer, Berlin, 2008.
- [21] Love, J. A model of trade diversification based on the Markowitz model of portfolio analysis. *Jornal of Development Studies*, 52 :2, 233-241, 1979.
- [22] Mahdi, S. *Optimisation Multi-objectif Par Un Nouveau Schéma De Coopération Méta/Exacte*. Mémoire de Magistère, Université de Constantine, 2007.
- [23] Markowitz, H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, Volume 7(1), 77-91, 1952.
- [24] Markowitz, H. *Selected Works*. World Scientific - Nobel Laureate Series : Volume 1, University of California, 2008.

- [25] Merdjaoui, M. *optimisation multi-objectif par l'algorithme génétiques et approches Pareto des paramètres d'usinage sans contraintes des limitations de production*. Mémoire de Magistère, Université M'hemed Bougara de Boumerdes, 2006.
- [26] Mernache, T. *Méthode adaptée pour la résolution des problèmes de programmation linéaire multi-objectifs*. Mémoire de Magistère. Université A.Mira Bejaia, 2007.
- [27] Miettinen, K et Mäkelä, M. *Proper Pareto Optimality In Nonconvex Problems-Characterization With Tangent And Normal Cones*. Technical report, UNIVERSITY OF JYVÄSKYLÄ, 1998.
- [28] Moheini, M. *Programmation DC et DCA pour l'optimisation de portefeuille*. Thèse de Doctorat, Université Paul Verlaine-Metz, 2008.
- [29] Zidani, H. *Représentation de solution en optimisation continue multi-objectif et applications*. Thèse Doctorat, Université Mohamed V Rabat, 2013.

Annexe 1

Dans cette annexe, on représente les 10 titres de la bourse Parisienne de l'indice CAC40 qui composent le portefeuille financier étudié dans le quatrième chapitre. Ces titres sont des fractions du capital de 10 entreprises qui décident de les vendre aux investisseurs. Alors, le portefeuille est constitué par les dix titres suivants :

- **ACA** : Crédit agricole.
- **AIR** : Airbus.
- **AI** : Air Liquide SA.
- **CA** : Carrefour SA.
- **DG** : VINCI SA.
- **EI** : Essilor International Société Anonyme.
- **EN** : Bouygues SA.
- **ML** : Compagnie Générale des Établissements Michelin.
- **OR** : L'oréal S.A.
- **ORA** : Orange S.A.

Annexe 2

Les tableaux ci-dessous représentent respectivement un échantillon des prix et des rendements des titres utilisés dans une période d'un mois (17/06/2013 – 17/07/2013). Les prix des titres sont extraits du site yahoo finance qui représentent les prix journaliers et les rendements sont calculés en utilisant les prix.

Date	ACA.PA	AI.PA	AIR.PA	CA.PA	DG.PA	EI.PA	EN.PA	ML.PA	OR.PA	ORA.PA
17/06/2013	6.695480	85.943497	43.000000	21.934999	39.160000	84.019997	19.930000	70.629997	128.550003	7.591000
18/06/2013	6.72533	86,014297	43,150002	21,85	39,244999	83,360001	19,66	70	128,100006	7,593
19/06/2013	6,61652	85,7752	42,305	21,965	38,799999	83,019997	19,58	69,400002	127,599998	7,583
20/06/2013	6,39119	82,720398	41,264999	20,635	37,5	79,660004	19,184999	67,489998	123,699997	7,302
21/06/2013	6,24578	82,065102	40,75	20,405001	36,810001	79,129997	18,975	66,220001	122,5	7,281
24/06/2013	6,11096	80,843201	39,610001	19,754999	36,174999	78,660004	18,615	65,510002	121	7,116
25/06/2013	6,18222	81,949997	40,744999	20,139999	37,595001	80,610001	19,135	67,269997	122,699997	7,206
26/06/2013	6,396	83,039101	41,369999	20,700001	38,490002	81,760002	19,264999	68,029999	125,449997	7,38
27/06/2013	6,48941	83,853798	41,560001	21,27	38,810001	82,650002	19,85	70,139999	126,449997	7,395
28/06/2013	6,35844	84,004303	41,064999	21,129999	38,555	81,739998	19,610001	68,699997	126,25	7,268
01/07/2013	6,42778	84,030899	41,209999	21,26	39,049999	82,099998	19,655001	69,139999	128,199997	7,25
02/07/2013	6,35556	83,641296	40,790001	21,16	38,700001	81,209999	19,610001	70,550003	127	7,205
03/07/2013	6,24674	83,535004	40,235001	20,809999	38,150002	79,43	19,469999	70,599998	125,550003	7,115
04/07/2013	6,65022	84,783501	41,700001	21,725	39,145	83,699997	19,91	72,760002	128,899994	7,259
05/07/2013	6,51444	83,260498	41,200001	21,205	38,404999	82,419998	19,415001	70,589996	126,699997	7,098
08/07/2013	6,65022	84,509003	41,66	21,42	39,279999	83,059998	19,879999	71,480003	128,949997	7,215
09/07/2013	6,52696	85,412201	41,724998	21,344999	39,02	82,010002	19,945	72,480003	128,699997	7,343
10/07/2013	6,50096	85,261703	41,509998	21,15	39,165001	81,860001	19,9	72,800003	129,050003	7,275
11/07/2013	6,552	86,545601	41,360001	21,389999	39,849998	82,019997	20,24	72,980003	129,449997	7,374
12/07/2013	6,49519	86,218002	41,27	21,18	39,330002	82,220001	20,424999	73,080002	129,649994	7,287
15/07/2013	6,53659	86,412804	41,84	21,584999	39,580002	82,589996	20,6	72,489998	130,850006	7,4
16/07/2013	6,46148	85,961197	41,625	22,254999	39,345001	81,449997	20,360001	74,360001	128,800003	7,391
17/07/2013	6,51541	86,510201	41,66	22,325001	39,5	81,720001	20,459999	75,029999	128	7,432

FIGURE 4.4 – représentation d'un échantillon des prix des titres

Date	Rnd ACA.PA	Rnd_AI.PA	Rnd_AIR.PA	Rnd_CA.PA	Rnd_DG.PA	Rnd_EI.PA	Rnd_EN.PA	Rnd_ML.PA	Rnd_OR.PA	ORA.PA
18/06/2013	-0,0161791	-0,0027797	-0,0195829	0,00526316	-0,011339	-0,0040787	-0,0040692	-0,0085714	-0,0039033	-0,001317
19/06/2013	-0,0340557	-0,035614	-0,0245834	-0,0605509	-0,0335051	-0,0404721	-0,0201737	-0,0275217	-0,0305643	-0,0370566
20/06/2013	-0,0227516	-0,0079218	-0,0124803	-0,0111461	-0,0184	-0,0066534	-0,010946	-0,0188176	-0,0097009	-0,0028759
21/06/2013	-0,0215858	-0,0148894	-0,0279754	-0,031855	-0,0172508	-0,0059395	-0,0189723	-0,0107218	-0,0122449	-0,0226617
24/06/2013	0,01166102	0,01369065	0,02865433	0,01948874	0,03925369	0,0247902	0,02793446	0,02686605	0,01404956	0,01264756
25/06/2013	0,03457981	0,01328986	0,01533931	0,02780546	0,02380638	0,01426623	0,00679378	0,01129779	0,02241239	0,02414655
26/06/2013	0,01460444	0,00981101	0,00459275	0,02753618	0,00831382	0,01088552	0,030366	0,03101573	0,0079713	0,00203252
27/06/2013	-0,0201821	0,00179485	-0,0119105	-0,0065821	-0,0065705	-0,0110103	-0,0120906	-0,0205304	-0,0015816	-0,0171738
28/06/2013	0,01090519	0,0003166	0,00353099	0,00615244	0,01283878	0,00440421	0,00229475	0,00640469	0,01544552	-0,0024766
01/07/2013	-0,0112356	-0,0046364	-0,0101917	-0,0047037	-0,0089628	-0,0108404	-0,0022895	0,02039346	-0,0093604	-0,0062069
02/07/2013	-0,017122	-0,0012708	-0,0136063	-0,0165407	-0,0142119	-0,0219185	-0,0071393	0,00070865	-0,0114173	-0,0124913
03/07/2013	0,06459049	0,01494579	0,03641108	0,0439693	0,0260812	0,05375799	0,02259892	0,03059496	0,02668252	0,02023893
04/07/2013	-0,0204174	-0,0179634	-0,0119904	-0,0239356	-0,0189041	-0,0152927	-0,0248618	-0,0298242	-0,0170675	-0,0221794
05/07/2013	0,02084293	0,01499517	0,01116502	0,01013912	0,02278349	0,00776511	0,02395045	0,01260812	0,01775849	0,01648352
08/07/2013	-0,0185347	0,0106876	0,0015602	-0,0035014	-0,0066191	-0,0126414	0,00326967	0,01398993	-0,0019387	0,01774082
09/07/2013	-0,0039835	-0,001762	-0,0051528	-0,0091356	0,00371607	-0,0018291	-0,0022562	0,00441501	0,00271955	-0,0092605
10/07/2013	0,00785115	0,01505832	-0,0036135	0,01134747	0,01749003	0,00195451	0,01708543	0,00247253	0,00309953	0,01360825
11/07/2013	-0,0086706	-0,0037853	-0,002176	-0,0098176	-0,0130488	0,00243848	0,00914027	0,00137023	0,00154498	-0,0117982
12/07/2013	0,00637395	0,00225941	0,01381149	0,01912177	0,00635647	0,00450006	0,00856798	-0,0080734	0,00925578	0,01550707
15/07/2013	-0,0114907	-0,0052262	-0,0051386	0,03104008	-0,0059374	-0,0138031	-0,0116504	0,0257967	-0,0156668	-0,0012162
16/07/2013	0,00834639	0,00638665	0,00084084	0,00314545	0,00393948	0,00331497	0,00491149	0,00901019	-0,0062112	0,00554729
17/07/2013	0,05291148	0,00747195	0,01332213	0,0409854	0,00265823	-0,0011014	-0,0004887	0,02025862	0,0078125	0,0083423

FIGURE 4.5 – Échantillon des rendements de chaque titre

Résumé

Sur le marché financier, l'investisseur peut se contenter d'une rentabilité certaine mais faible ou prendre un risque contrebalancé avec une rentabilité espérée plus élevée. En 1952, Harry Markowitz a formalisé et évalué l'effet de diversifier plusieurs actifs dans un portefeuille financier. Le modèle de Markowitz permet de réduire le risque total pour une rentabilité espérée donnée. L'objectif de notre travail est de résoudre le problème bi-critères de gestion de portefeuille par la méthode directe de support. Nous avons choisi l'approche d'agrégation des critères afin de le résoudre et le problème résultant est un programme quadratique convexe paramétrique. L'approche proposée permet de déterminer la frontière de Pareto et nous l'avons appliqué sur un cas pratique qui est l'investissement dans la bourse de Paris de L'indice CAC 40 .

Mot-clés : Portefeuille financier, Modèle de Markowitz, Méthode directe de support, Programmation quadratique paramétrée.

Abstract

In the financial market, the investor can be content with a certain low profitability or take a risk balanced with a higher expected profitability. In 1952, Harry Markowitz formalized and evaluated the effect of diversifying several assets in a financial portfolio. The Markowitz model reduces the total risk for a given expected profitability. The aim of our work is to solve the problem of SDM. We chose the aggregation approach of the criteria in order to solve it and the problem resultant is a parameterized convex quadratic program. The proposed approach allows to determine the Pareto front and we applied it on a practical case which is the investment in the Paris stock exchange of the CAC 40 index.

Keywords : Financial Portfolio, Markowitz Model, Direct Support Method, Parametric Quadratic Programming.