

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons considéré l'analyse de sensibilité, basée sur le concept de Sobol, dans le modèle de risque classique. En particulier, nous avons pu estimer les indices de Sobol relatifs aux paramètres évoqués dans la définition de la probabilité de ruine pour plusieurs distributions de la quantité de réclamations des sinistres. Dans ce contexte, nous avons caractérisé la probabilité de ruine par estimation de sa moyenne, sa variance, sa densité de probabilité. Notre approche a été illustrée par plusieurs exemples numériques.

Mots-clés : Théorie de la ruine, Analyse de sensibilité, Indices de Sobol, Simulation Monte Carlo, incertitude paramétrique.

Abstract

In this Master thesis, we have considered the sensitivity analysis, based on the Sobol concept, in the classical risk model. Particularly, we have estimated the Sobol indices of some ruin probability parameters for many kind of this context, we have characterised the ruin probability by estimating its average, variance and its probability density function. several numerical exemples were presented to explain our approach.

Keywords : Ruin theory, Sensitivity analysis, Sobol indices, Monte Carlo simulation, Parametric uncertainty.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



MÉMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Option : Mathématiques Financières

Thème

Analyse de sensibilité dans le modèle de risque classique

Présenté par :

✓ *M^r*. KHALI Amar.

Devant le jury composé de :

Président	<i>M^r</i> . ASLI Larbi	MAA	U. A. Mira Béjaïa.
Encadreur	<i>M^r</i> . ABBAS Karim	Professeur	U. A. Mira Béjaïa.
Examineur	<i>M^r</i> . OUAZINE Sofiane	MCB	U. A. Mira Béjaïa.
Examineur	<i>M^r</i> . CHEURFA Fatah	MAA	U. M. Bougara Boumerdès.
Examineur	<i>M^r</i> . SOUFIT Massinissa	Doctorant	U. A. Mira Béjaïa.

Remerciements

Je tiens à remercier mon encadreur *P^r* **K. Abbas** pour l'aide et l'assistance qu'il m'a fournit afin de me permettre de mener à bien et à terme ce mémoire de fin d'études, et qu'il me permis de lui exprimer ma profonde gratitude.

J'exprime mon grand respect aux honorables membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Je tiens tout simplement à exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin durant tout mon cursus.

KHALI Amar

Dédicaces

Je rends ce qui est à César à César

Amar

TABLE DES MATIÈRES

Table des Matières	i
Table des Figures	ii
Introduction Générale	1
1 LA THEORIE DE LA RUINE ET MODELES DE RISQUES CLAS-	
SIQUES	4
1.1 Théorie de la ruine	5
1.1.1 Modèle individuel et modèle collectif	5
1.1.1.1 Modèle individuel	5
1.1.1.2 Modèle collectif	5
1.1.2 Processus de réserve et de surplus	6
1.1.3 Probabilité de ruine	9
1.1.3.1 Probabilité de ruine à horizon fini et infini	9
1.1.4 Processus de renouvellement	10
1.1.4.1 Processus de Poisson	10
1.1.4.2 Processus de Poisson composé	10
1.1.5 Modèle de Cramèr-Lundberg	10
1.1.5.1 Condition de non ruine	11
1.1.5.2 Probabilité de ruine en temps infini	12

1.1.5.2.1	Approximations Cramèr-Lundberg	13
1.1.5.2.2	Borne de Lundberg	14
1.1.5.2.3	Formule de Pollaczaek-Khinchine	15
1.1.5.2.4	Autres approches	17
Conclusion		17
2	ANALYSE DE SENSIBILITE ET INCERTITUDE	18
Introduction		18
2.1	Analyse de sensibilité	18
2.1.1	Les déterminations de l'analyse de sensibilité	19
2.2	Méthodes basées sur la variance : globale	20
2.2.1	Indice de sensibilité sans hypothèse sur le modèle : Méthode de Sobol	21
2.2.2	Estimation des indices de sensibilité	24
2.3	Incertaince de modèle	27
2.3.1	Incertaince liée à la construction d'un modèle	27
2.3.1.1	Incertaince aléatoire	27
2.3.1.2	Incertaince épistémique	27
Conclusion		29
3	ANALYSE DE SENSIBILITE dans le modèle de risque classique	30
Introduction		30
3.1	Modèle de risque classique	30
3.1.1	Remboursements de loi exponentielle	32
3.1.1.1	Estimation des indices de Sobol pour la probabilité de ruine	33
3.1.1.2	Erreur d'estimation par Monte-Carlo	37
3.1.2	Approximation à queue lourde	42
Conclusion Générale		56
Bibliographie		58

TABLE DES FIGURES

1.1	Evolution du processus de réserve au cours du temps	7
2.1	Différentes sources d'incertitude épistémique présentes lors de construction d'un modèle.	28
3.1	Graphique en "boite à moustaches" de 10 évaluations indépendantes des Indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle Lundberg.	38
3.2	Histogramme des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle Lundberg.	38
3.3	Intervalles de confiance avec un seuil $\alpha = 0.05$	40
3.4	Graphe de la probabilité de ruine	41
3.5	Graphique en "boite à moustaches" de 10 évaluations indépendantes des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamation de type Weibull. . . .	44
3.6	Histogramme des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamation de type Weibull.	44
3.7	Graphe de la probabilité de ruine (3.5)	46

3.8	Graphique en "boite à moustaches" de 10 évaluations indépendantes des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamations de type Pareto. . . .	47
3.9	Histogramme des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamations de type Pareto.	48
3.10	Graphe de la probabilité de ruine (3.6)	49
3.11	Densité de probabilité pour la probabilité de ruine $\Psi(u)$	50
3.12	Densité de probabilité de $\Psi(u)$ avec $\bar{\mu} \in [0.01, 1]$, et $\sigma_\mu = \frac{\bar{\mu}}{10}$	52
3.13	Fonction de répartition de $\Psi(u)$ avec $\bar{\mu} \in [0.01, 1]$, et $\sigma_\mu = \frac{\bar{\mu}}{10}$	53
3.14	Moyenne $E(\Psi(U))$ pour $\lambda \in \{I_L, I_W, I_P\}$	55

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Quelle drôle d'idée a l'academie de recevoir de temps en temps des hommes d'esprit ; cela les dépayse et ils ne font rien qui vaille.

- Henry MARET -

Au cours de l'élaboration, de la construction ou de l'utilisation d'un modèle mathématique, un certain nombre de questions touchant le fond de la modélisation se posent.

- Le modèle est-il bien fidèle au phénomène/processus modélisé ?
- Quelles sont les variables qui contribuent le plus à la variabilité de la réponse du modèle ?
- Quelles sont au contraire les variables les moins influentes ?
- Quelles variables, ou quels groupes de variables, interagissent avec quelles (quels) autres ?

Cette identification, qui peut se faire à l'aide de plusieurs méthodes, est l'objet de l'analyse de sensibilité. Les méthodes de l'analyse de sensibilité peuvent être regroupées en trois grandes classes :

- Les méthodes dites de *Screening* (criblage) qui classent les variables d'entrées par groupes suivant le degré d'influence sur la sortie du modèle. Elles sont de nature qualitatives : elles ne permettent pas de comparer numériquement l'influence d'une variable d'entrée par rapport à une autre. Ces méthodes sont adaptées pour des modèles mettant en jeu un très grand nombre de variables d'entrées.
- Les méthodes dites *locales*, l'influence d'un paramètre est mesurée par l'importance

de la variation de la solution autour d'une valeur nominale de ce paramètre, c'est-à-dire par une dérivée partielle évaluée en cette valeur nominale.

- Les méthodes dites *globales* (aussi appelées méthodes stochastiques), s'intéressent à l'ensemble du domaine de variation de l'entrée, qui à l'opposé des méthodes locales, l'influence d'une variable entrée est étudiée en même temps que les autres variables d'entrées varient.

Nous privilégierons la méthode, globale, parmi les différentes méthodes d'analyse de sensibilité, reposant sur le calcul des indices de sensibilité de Sobol qui sont des indicateurs statistique, d'un paramètre (ou d'un groupe de paramètres) d'une grande interprétation, de l'importance de ce paramètre (ou de ce groupe de paramètres) sur la variabilité d'une quantité scalaire d'intérêt qui est la solution d'un modèle.

Le calcul des indices de sensibilité, précisément les indices de Sobol, nous permet de hiérarchiser les paramètres d'entrée en fonction de leurs influence sur la sortie. Dans ce mémoire, nous introduisons la notion d'incertitude paramétrique (aléatoire et épistémique) dans l'étude d'un modèle de risque classique. Plus précisément, nous considérons l'estimation de la probabilité de ruine $\Psi(\lambda, \mu)$, tout en incorporant l'incertitude infligée dans les deux paramètres λ (taux des arrivées des réclamations) et μ (moyenne de la quantité de réclamations). Sans cette hypothèse, nous essayons de hiérarchiser l'importance de ces deux paramètres sur l'évaluations de la probabilité de ruine incertaine. Cela nous permettra d'identifier le paramètre le moins influent qui peut être fini à sa valeur nominale, ce qui permet de simplifier les hypothèses statistiques du modèle. Pour ce faire, nous utiliserons le concept de Sobol [15] pour ses indices par la technique de simulation Monte Carlo.

Dans les mathématiques d'assurance, le problème de sensibilité est rarement étudié. L'aspect général de la notion de sensibilité dans les modèles de risque est le suivant : Supposons que les paramètres λ et μ d'un modèle de risque prennent leurs valeurs dans un espace plus au moins aléatoire. Pour ces deux paramètres, nous considérons la probabilité de ruine $\Psi(\lambda, \mu)$ comme une fonction. L'étude de l'analyse de sensibilité sur la probabilité de ruine nous renseigne sur l'influence des paramètres d'entrés sur la sortie de la probabilité de ruine.

L'objectif assigné à ce mémoire se résume principalement dans :

- l'étude par simulation, de l'influence des variables d'entrées sur la sortie qui est la probabilité de ruine.

Pour répondre à cet objectif, nous avons organisé notre travail comme suit : Le premier chapitre est consacré à la théorie de la ruine, en particulier, nous nous intéresserons plus particulièrement au modèle de Poisson composé [1] connu aussi sous le nom modèle de Cramèr-Lundberg [22] qui décrit le comportement aléatoire de la réserve d'une compagnie d'assurance et quelques résultats issus de la théorie sur l'évaluation des probabilités de ruine en temps infini seront présentés.

Le deuxième chapitre présente l'analyse de sensibilité globale en se centrant sur les indices de Sobol et sur leur estimation [15], et nous donnons des méthodes d'estimation de l'erreur d'approximation dans l'évaluation des indices de Sobol par Monte-Carlo [8]. Ensuite, nous discutons la notion d'incertitude du modèle, en présentant la bibliographie correspondante.

Le troisième chapitre est consacré à une présentation de l'estimation des indices de Sobol pour la probabilité de ruine, où on considère trois lois de probabilité pour la quantité de réclamations. Ainsi, en caractérisant statistiquement la probabilité de ruine induite, et ce en estimant sa moyenne, sa variance et sa densité de probabilité.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives sur l'application de l'analyse de sensibilité sur les modèles de risque.

CHAPITRE 1

LA THEORIE DE LA RUINE ET MODELES DE RISQUES CLASSIQUES

Ce n'est pas ce que vous ne savez pas qui vous cause des problèmes, mais c'est ce que vous savez avec certitude et qui n'est pas vrai. - Mark Twain -

Introduction

La théorie de la ruine est un domaine des sciences actuarielles dont le but est de modéliser le surplus d'un portefeuille d'assurance par un processus stochastique.

En assurance, pour quantifier le risque associé à un surplus financier il est nécessaire de modéliser son comportement. Plus précisément, on tente d'étudier la probabilité que ce surplus financier soit négatif, événement qu'on appellera "ruine".

Dans ce chapitre, on présente la théorie de la ruine d'une manière générale, (le modèle individuel et collectif, processus de réserve et surplus, probabilité de ruine et le chargement de sécurité). Par la suite, on introduit les modèles de risques classiques ainsi que la probabilité de ruine ultime, la probabilité de ruine à horizon fini et infini. Enfin, on présente les principales approches utilisés pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique.

1.1 Théorie de la ruine

La théorie de la ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance. Il s'agit de l'étude mathématique de modèles stochastiques et dynamiques adaptés aux réserves financières d'une compagnie d'assurances.

Elle a pour objectif de définir un cadre permettant la bonne gestion :

- La compagnie doit être solvable à tout instant (la réserve ne doit tomber en dessous de 0).
- La tarification doit permettre à l'assureur d'engager des bénéficiaires.

La gestion comptable est rendue difficile, la compagnie reçoit les primes avant de verser les prestations (le provisionnement). Cela nécessite une évaluation des risques dans un univers aléatoire. L'analyse statistique permet de calibrer :

- Une loi pour les montants des sinistres ;
- Une loi pour le nombre de sinistres.

1.1.1 Modèle individuel et modèle collectif

1.1.1.1 Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge globale générée par les sinistres individuels par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant n contrats est définie par :

$$S^{ind} = \sum_{i=1}^N X_i,$$

où

- X_i est une variable aléatoire positive qui indique le montant total des sinistres subit par l'assuré i sur la période d'observation.

Dans ce type de modèle les variables X_i sont supposées indépendantes mais pas forcément d'une même loi de probabilité.

1.1.1.2 Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subie par un portefeuille vu, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistres tout assuré, le montant

global des pertes est :

$$S^{Col} = \sum_{i=1}^N X_i,$$

où

- X_i le montant de la i^{eme} perte ;
- N Variable aléatoire pour le nombre de pertes.

Les variables aléatoires X_i supposées de même loi indépendantes, de plus la variable N indépendante des X_i .

Remarque 1.1. *On parle de modèle collectif car on associe la même loi de probabilité pour les pertes. Par conséquent, le modèle individuel avec les pertes de même loi de probabilité est un cas particulier du modèle collectif quand N est une constante :*

$$P(N = n) = 1.$$

1.1.2 Processus de réserve et de surplus

On peut considérer la réserve d'une compagnie d'assurance comme le montant d'argent qu'elle possède pour payer les réclamations de ses clients. Ces derniers paient des primes d'assurance qui sont ajoutées à la réserve de la compagnie, et qui sont sa seule source de revenus.

Le processus de réserve $\{R_{(t)}; t \geq 0\}$ d'une compagnie d'assurance prend la forme suivante :

$$R_{(t)} = u + c t - Z_{(t)}, \quad (1.1)$$

où :

- u est la réserve initiale de la compagnie ;
- c est le taux de cotisation par unité de temps ;
- $Z_{(t)}$ est le processus de pertes agrégés.

Le choix de $Z_{(t)}$ détermine le processus $R_{(t)}$. Lorsque $Z_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ , et les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $i = 1, 2, \dots, N(t)$, on est en présence du modèle classique, exhaustivement étudié dans la littérature. Le lecteur intéressé à approfondir peut se référer à [4, 20, 24, 43].

Le modèle de surplus prend alors la forme suivante :

$$S_{(t)} = u - R_{(t)}.$$

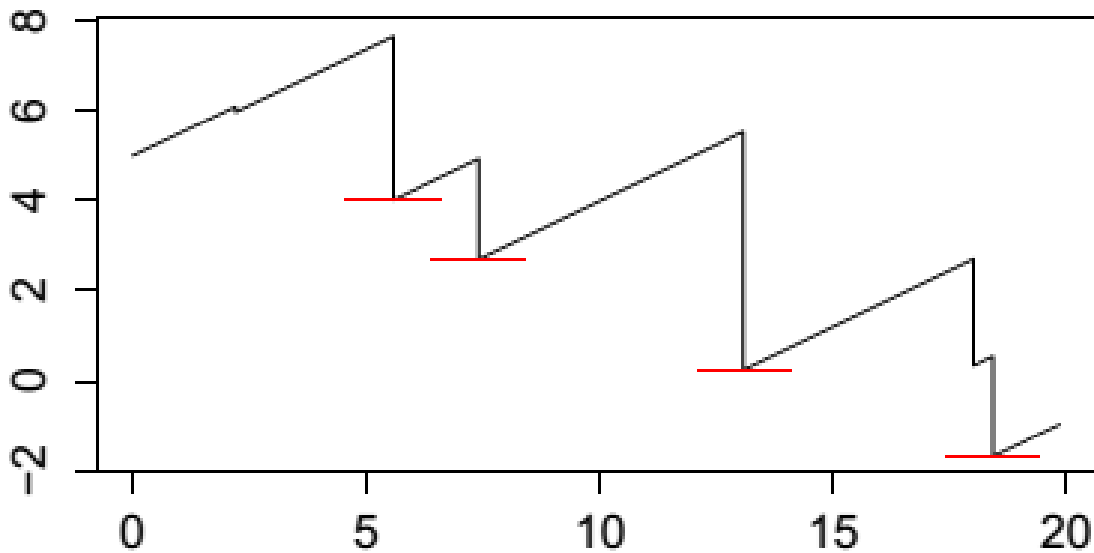


FIGURE 1.1 – Evolution du processus de réserve au cours du temps

Ce modèle à été étudié en détail dans plusieurs ouvrages de références [1, 11], et dans [6]. Un des premiers résultats historiques sur la probabilité de ruine concerne la cas où les pertes ou le montant de remboursements X_i suivent une loi exponentielle [9].

Un peu plus tard, Dufresne et al. [13], introduisent le processus Gamma, où ils ont montré que le processus de Poisson composé peut être remplacé par un processus Gamma. Ils construisent le processus Gamma comme étant une limite du processus de Poisson composé, qui prend la forme suivante :

$$R_{(t)} = u + c t - Z_G(t),$$

où $Z_G(t)$ est le processus Gamma, c'est-à-dire un processus dont les accroissements suivent une loi Gamma. Par la suite, Dickson et Waters [14] étendent ces résultats et obtiennent des formules pour la probabilité de ruine à temps fini pour le modèle basé sur la construction de Dufresne et Gerber [9]. Morales et al. [5] ont proposé un modèle de risque plus englobant le cas où le processus de pertes agrégées est un processus de Lévy, ou plus précisément, une particularité du processus de Lévy (un subordonateur).

$$R_{(t)} = u + c t - Z_{Levy}(t) - \eta S_{(t)},$$

où $Z(t)$ est un subordonateur, et S est un processus de Lévy. Le cas où $\eta = 0$, i.e. $R_{(t)} = u + c t - Z_{Levy}(t)$.

Remarque 1.2. Le processus $R_{(t)}$ obtenu avec un subordonateur¹ s'écrit :

$$R_{(t)} = u + c t - Z_{sub}(t). \quad (1.2)$$

Le processus de Lévy

Les processus de Lévy sont des processus stochastiques dont les propriétés sont très intéressantes pour la construction des modèles de risque. Pour une étude détaillée sur les processus de Lévy, on pourra consulter les travaux de [19, 25, 33].

Définition 1.1. Un processus stochastique $\{X_t; t \geq 0\}$ défini sur \mathbb{R} est un processus de Lévy s'il satisfait les conditions suivantes :

1. Pour tout choix de $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les variables aléatoires $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
2. $X_0 = 0$
3. La loi de $X_{s+t} - X_s$ ne dépend pas de s .
4. (X_t) est continu en probabilité, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \rightarrow t} P[|X_s - X_t| > \varepsilon] = 0$$

5. Il existe un ensemble $\Omega_0 \in F$ tel que $P\{\Omega_0\} = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ est continu à droite en tout $t \geq 0$ et a une limite à gauche en tout $t > 0$. Un processus aléatoire vérifiant les conditions (1) à (4) est dit processus de Lévy en loi.

1. X est un subordonateur si et seulement si X est un processus croissant, un subordonateur peut faire un changement de temps (une subordination).

1.1.3 Probabilité de ruine

Pour tout modèle de risque d'une réserve financière, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine.

Définition 1.2. "*Probabilité de ruine*"

La probabilité de ruine noté $\Psi(u)$ pour le modèle de risque de la forme (1), avec $R_0 = u$ est,

$$\Psi(u) = P\left(\inf_t R_t < 0 : R_0 = u\right).$$

Définition 1.3. "*Instant de ruine*"

Soit τ la variable aléatoire du moment de la ruine :

$$\tau = \inf\{t : R_{(t)} < 0\}.$$

La probabilité de ruine peut ainsi être définie à travers l'instant de la ruine. En effet, si τ existe et fini, i.e. $\tau < \infty$, la ruine est certaine. Par contre si τ n'existe pas, la ruine n'est pas certaine. Ainsi la probabilité de ruine peut se définir de la manière suivante :

$$\Psi(u) = P(\tau < \infty : R_0 = u).$$

Si $\tau = \infty$, on parlera de survie pour le processus R_t .

Définition 1.4. "*Probabilité de survie*"

La probabilité de survie ou de non ruine, notée ϕ , est définie par :

$$\phi(u) = 1 - \Psi(u).$$

1.1.3.1 Probabilité de ruine à horizon fini et infini

Soit $\{R_{(t)} : t \geq 0\}$ un processus tel que défini en (1.1), dénotant par $\Psi_T(u)$ la probabilité de ruine à horizon fini,

$$\forall u \geq 0, \quad \Psi(u, T) = P\{\exists t \in [0, T] / R_t < 0\}.$$

De plus en temps infini, elle est définie :

$$\forall u \geq 0, \quad \Psi(u, \infty) = P\{\exists t \leq \infty / R_t < 0\}.$$

1.1.4 Processus de renouvellement

L'exemple le plus important d'un processus de renouvellement est le processus de Poisson [28].

1.1.4.1 Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus de comptage d'événements entre lesquels s'écoulent des durées indépendantes de distribution exponentielle.

Définition 1.5. Soit $\{T_i; i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Notons $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$. Le processus de comptage $\{N_t; t \geq 0\}$ défini par :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\sigma_n \leq t\}},$$

est un processus de Poisson homogène d'intensité μ .

1.1.4.2 Processus de Poisson composé

Définition 1.6. Soit N un processus de Poisson d'intensité λ , et $\{X_i; i \geq 1\}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes de N . Le processus Z défini par $Z_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ est dit un processus de Poisson composé.

1.1.5 Modèle de Cramèr-Lundberg

Le modèle de risque de Cramèr-Lundberg à été introduit en 1903 par l'actuaire Filip Lundberg, il est la base du fondement de la théorie de la ruine. Il est connue aussi sous le nom du modèle de risque Poisson composé ou encore modèle de risque classique. Le processus stochastique régissant l'évolution des réserves financières noté $\{R_{(t)}, t \geq 0\}$ avec ;

$$R_{(t)} = u + c t - Z_{(t)} \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

où $Z_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ est le montant cumulé des réclamations à l'instant t . Le processus de risque associé est de la forme

$$S_{(t)} = c t - Z_{(t)}.$$

Les hypothèses selon le modèle est construit sont :

- $u > 0$ est la réserve initiale de la compagnie d'assurance ;
- $c > 0$ est le taux de prime ou (cotisation) reçues continuellement dans le temps ;
- N_t est un processus de comptage (Poisson) d'intensité λ du nombre de réclamations ;
- $X_i; i \geq 1$, sont les montants des réclamations, est représentant une suite suite de variables aléatoire, strictement positives, i.i.d. de fonction de répartition F_X , de moyenne finie² μ , et indépendantes de N_t .

Cas particulier : Modèle de Lundberg P/P

Le modèle de Lundberg est un cas particulier du modèle de risque classique appelé aussi P/P. Il se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations :

$$F_Z(y) = 1 - \exp\left\{\frac{-y}{\mu}\right\}.$$

où F_Z est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z qui génère les montants des réclamations.

1.1.5.1 Condition de non ruine

Considérons la réserve R_t d'une certaine compagnie d'assurance à l'instant t , avec le capital initial est u et les cotisations sont versées par les clients à un taux instantané c .

$$R_{(t)} = u + c t - Z_{(t)} = u + c t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Ainsi, avec le théorème de Wald [42], nous permet d'obtenir :

$$E(R_{(t)}) = u + c t - \lambda \mu t.$$

2. Dans le modèle P/P (μ) est la moyenne des montants de réclamations, c-à-d que ($\frac{1}{\mu}$) il est le paramètre de la loi exponentielle

avec μ étant le taux de remboursement.

Une condition qu'il est naturel d'imposer que l'espérance de la fortune d'une compagnie d'assurance soit toujours positive, soit $c \geq \lambda\mu$.

Remarquons que la ruine peut se produire nécessairement à l'occasion d'un sinistre, c'est-à-dire à l'une des dates T_n . On a donc :

$$\Psi(u) = P\{\exists t \geq 0 / R_{(t)} < 0\} = P\{\exists n \geq 0 / R_{(T_n)} < 0\}.$$

Or, on a :

$$R_{(T_n)} = u + cT_n - Z_{(T_n)} = u - \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i).$$

D'où :

$$\Psi(u) = P\left\{\exists n \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) > \mu\right\} = 1 - P\left\{\max_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) \leq \mu\right\}.$$

Par la loi des grands nombres, on sait que $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i)}{n}$ converge presque sûrement vers

$$E(X_1 - c\tau_1) = \mu - (c/\lambda)$$

- La ruine est presque sûre, si $\lambda\mu > c$, qui converge presque sûrement vers $+\infty$.
- La ruine n'est pas presque sûre, si $\lambda\mu < c$, qui converge presque sûrement vers $-\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une probabilité positive de non ruine à horizon infini.
- Si $\lambda\mu = c$, la théorie des marches aléatoires montre que $\limsup \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i) = +\infty$ presque sûrement et donc la ruine est presque sûre.

La condition de non-ruine est donc :

$$\lambda\mu < c.$$

On peut alors définir la charge de sécurité ϱ par :

$$\varrho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

1.1.5.2 Probabilité de ruine en temps infini

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats fondamentaux pour l'évaluation de la probabilité de ruine en temps infini.

1.1.5.2.1 Approximations Cramèr-Lundberg Soit $\Psi(u)$, avec $u \geq 0$ la probabilité de ruine du modèle (1.3). On suppose que le chargement de sécurité relatif $\rho = \frac{(c-\lambda\mu)}{\lambda\mu}$ est strictement positif. On note $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, où F est la fonction de distribution des moments des réclamations.

En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine qui vérifie l'équation intégrale suivante [8].

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \Psi(u-y) \bar{F}(y) dy.$$

En général, il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur ces approximations ont été réalisés par Cramèr-Lundberg dès 1930. La condition Cramèr-Lundberg stimule l'existence d'une constante $k > 0$ satisfaisant l'équation de Lundberg :

$$\int_0^\infty e^{kx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda},$$

qui est équivalente à :

$$\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = 1 + \rho. \quad (1.4)$$

Où $G(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x s^{kx} \bar{F}(y) dy$ est la distribution équilibrée de F .

Supposons que l'équation (1.4) est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est donnée comme suit :

Si $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) < \infty$, alors,

$$\Psi(u) \sim \frac{\rho u}{k \int_0^\infty y e^{ky} \bar{F}(y) dy} e^{-ku} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty,$$

$$\text{avec } a(x) \sim b(x) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$

Si $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = \infty$, alors,

$$\Psi(u) = O(e^{-kx}) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

Ainsi, on a l'inégalité de Lundberg :

$$\Psi(u) \leq e^{-ku}, \quad u \geq 0.$$

Approximations de Cramèr-Lundberg dans le modèle P/P

La distribution des montants de réclamations dans le modèle de Lundberg est exponentielle, d'où : $\bar{F}(x) = \exp\left\{\frac{-x}{\mu}\right\}$ $x \geq 0$, on aura la formule de la probabilité de ruine :

$$\Psi(u) = \frac{1}{1 + \varrho} \exp\left\{-\frac{\varrho u}{\mu(1 + \varrho)}\right\} \quad u \geq 0.$$

1.1.5.2.2 Borne de Lundberg Lorsque le coefficient d'ajustement ϱ existe, l'inégalité de Lundberg garantit que la probabilité de ruine à horizon infini $\Psi(u)$ est bornée par une fonction qui décroît de façon exponentielle en fonction du capital initial u .

Théorème 1.1. [8] *Supposons que le coefficient d'ajustement (la charge de sécurité) $\varrho > 0$ existe. $\forall u \geq 0$:*

$$a_- \exp\{-\varrho u\} \leq \Psi(u) \leq a_+ \exp\{-\varrho u\},$$

où

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\varrho x} \int_x^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\varrho y} (1 - F_Z(y)) dy} \quad \text{et} \quad a_+ = \sup_{x \in [0, x_0)} \frac{e^{\varrho x} \int_x^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\varrho y} (1 - F_Z(y)) dy}.$$

1.1.5.2.3 Formule de Pollaczaek-Khinchine

Théorème 1.2. [39] Pour tout $u \geq 0$:

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_X^s)^{*n}}(u), \quad (1.5)$$

où $\overline{(F_X^s)^{*n}}(u) = 1 - (F_X^s)^{*n}(u)$ et $(F_X^s)^{*n}$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de la fonction de distribution complémentaire F_X^s telle que F_X^s est la fonction de répartition de X définie par :

$$F_X^s(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy, \quad x \geq 0.$$

La formule (1.5) est appelée formule de Pollaczaek-Khinchine ou encore formule de Beehan.

La représentation en série infinie donnée dans (1.5) est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des approximations numériques de la probabilité de ruine $\Psi(u)$, telle que l'algorithme de Panjer [35].

Formule de Pollaczek-Khinchine dans le modèle P/P

En utilisant la formule de P-K pour des montants de réclamations de distribution exponentielle et de moyenne μ , nous allons déduire l'expression exacte de la probabilité de ruine :

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_Z^s)^{*n}}(u).$$

Pour des montants de réclamations exponentiels de paramètre $\frac{1}{\mu}$, nous avons

$$F_X(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{u}{\mu}} & u \geq 0 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Calculons $F_X^s(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_X(y)) dy, \quad u \geq 0$

$$F_X^s(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u e^{-\frac{y}{\mu}} dy = \frac{1}{\mu} \left(\frac{-1}{\frac{1}{\mu}}\right) \left[e^{-\frac{y}{\mu}}\right] = 1 - e^{-\frac{y}{\mu}}.$$

Ainsi, $F_X^s(u) = F_X(u), \quad u \in \mathbb{R}, (F_Z^s)^{*n}$ représente la $n^{\text{ème}}$ convolution de (F_Z^s) .

Puisque nous avons l'indépendance des n variables aléatoires $X_i, i = \overline{1, n}$, de distribution

commune $Exp(\frac{1}{\mu})$ et que $F_X^s = F_X^s$, alors $(F_X^s)^{*n}$ est la fonction de répartition de la somme des n variables aléatoires X_i , $i = \overline{1, n}$. Nous utiliserons les transformées de Laplace afin de déterminer $(F_X^s)^{*n}$.

$\widehat{L}_{(F_X^s)^{*n}}(x) = [\widehat{L}_{F_X^s}(x)]^n$, ou encore $\widehat{L}_{(f_X)^{*n}}(x) = [\widehat{L}_{f_X}(x)]^n$, Où f_X est la densité de probabilité des montants de réclamations X_i , $i = 1, \dots, n$. Ainsi,

$$\widehat{L}_{f_X}(x) = \int_0^{\infty} f_X(t)e^{-xt} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-(\frac{1}{\mu})t} dt = \frac{1}{1 + \mu x}$$

D'où

$$\widehat{L}_{(f_X)^{*n}}(x) = \left[\frac{1}{1 + \mu x} \right].$$

En utilisant la table des transformées de Laplace [34], nous trouvons que

$$(f_X)^{*n}(x) = \frac{\frac{1}{\mu} (\frac{1}{\mu} x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{1}{\mu} x}, \quad x \geq 0$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'*Erlang* $(\frac{1}{\mu}, n)$ dont la fonction de répartition est donnée par

$$(F_X)^{*n}(x) = (F_X^s)^{*n}(x) = \frac{\Gamma(n, \frac{1}{\mu} x)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu} x} \frac{(\frac{1}{\mu} x)^k}{k!}.$$

Ce résultat signifie que la somme de n variables aléatoires indépendantes de distributions exponentielle de même paramètre $\frac{1}{\mu}$ est une loi d'*Erlang* $(\frac{1}{\mu}, n)$. Alors

$$\overline{(F_X^s)^{*n}}(x) = 1 - (F_X^s)^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu} x} \frac{(\frac{1}{\mu} x)^k}{k!}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{\mu} u} \frac{(\frac{1}{\mu} u)^k}{k!} \\ &= (1 - \rho) e^{-\frac{1}{\mu} u} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{\mu} u)^k}{k!} \\ &= (1 - \rho) e^{-\frac{1}{\mu} u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{\mu} u)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \rho^n \\ &= (1 - \rho) e^{-\frac{1}{\mu} u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{\mu} u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1 - \rho} \end{aligned}$$

$$= \rho e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho \frac{u}{\mu})^k}{k!} = \rho e^{-\frac{u}{\mu}} e^{\rho \frac{u}{\mu}} = \rho e^{-(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c})u}$$

Finalement,

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp \left\{ -u \left(\frac{c - \lambda\mu}{c\mu} \right) \right\}.$$

1.1.5.2.4 Autres approches En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de large champs d'application dans les modèles de risques, il existe plusieurs autres approches. Ces approches Permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation stochastique se retrouvent dans d'autres domaines. C'est le cas des réactions des assureurs et des assurés dans la théorie des jeux. En général, les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur : les théorèmes limites des marches aléatoires [3, 44], les représentations matricielles avec modèles markoviens (Asmussen et al [37]), la théorie des martingales et intégralités de probabilités (Kalashnikov [33]), les méthodes d'optimisation (De Vylder et al [29]), les transformations analytiques (De Vylder et al [21]), et la théorie de distributions [18, 30].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux résultats de la théorie de ruine, des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique.

Une attention particulière est portée sur le modèle de Cramér-Lundberg (modèle classique), connu comme le fondement théorique de la théorie du risque dû à plusieurs études, et de nombreux résultats pour la probabilité de ruine existent pour ce modèle.

CHAPITRE 2

ANALYSE DE SENSIBILITE ET INCERTITUDE

Introduction

Ce chapitre fait l'objet d'une discussion sur des mesures de sensibilité, ainsi qu'une discussion sur la notion d'incertitude paramétrique dans certains modèles. Dans la première section, nous présentons brièvement les mesures basées sur la décomposition de la variance, et plus particulièrement l'indice de Sobol, ainsi qu'une méthode d'estimation de cet indice, Nous aborderons ensuite la notion d'incertitude de modèle dans la seconde section en nous appuyant sur une recherche bibliographique.

2.1 Analyse de sensibilité

Considérons un modèle mathématique, formé d'un ensemble de variables d'entrée aléatoires, d'une fonction déterministe, et d'un ensemble de variables de sortie aléatoires.

Le modèle est sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto Y = f(X) \end{aligned}$$

L'analyse de sensibilité étudie comment des perturbations sur les entrées du modèle

engendrent des perturbations sur la sortie. Il est possible de regrouper les méthodes d'analyse de sensibilité en trois classes ; les méthodes de *screening*, l'analyse de sensibilité locale et globale. Les méthodes de *screening*, présentées par Saltelli et al. dans [36], analysent qualitativement l'importance des variables d'entrée sur la variabilité de la sortie du modèle. Elles permettent d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée en fonction de leur influence sur la variabilité de la sortie.

L'analyse de sensibilité locale, tout comme l'analyse globale, sont des méthodes d'analyse quantitative, qui permettent en plus d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée, de donner un ordre de grandeur des écarts au sein de cette hiérarchie.

L'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations autour d'une valeur $x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0)$ des entrées se répercutent sur la valeur de la sortie. La méthode d'analyse locale la plus classique est l'approche OAT (*One factor At Time*), qui consiste à calculer ou estimer les indices de sensibilité définis par

$$S_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_p^0).$$

Pour une revue de ces méthodes, le lecteur pourra se référer à Turanyi [10].

2.1.1 Les déterminations de l'analyse de sensibilité

Au cours de la construction ou de l'utilisation d'un modèle mathématique, l'analyse de sensibilité peut s'avérer être un outil précieux. En effet, en étudiant comment la réponse du modèle réagit aux variations de ses variables d'entrée, l'analyse de sensibilité permet de déterminer :

- Modification du modèle si l'analyse nous indique qu'une importance forte d'une variable d'entrée qui en réalité est connue comme non influante ce qui veut dire que le modèle ne reflète pas correctement le processus qu'il modélise.
- Quelles sont les variables qui contribuent le plus à la variabilité de la sortie du modèle ? Il sera alors possible, si besoin est, d'améliorer la qualité de la sortie. Connaissant les variables d'entrée les plus influentes, les erreurs sur la sortie du modèle pourront être diminuées, soit lorsque cela est possible, en diminuant les

erreurs sur les entrées les plus influentes, soit en adaptant la structure du modèle pour réduire l'effet des erreurs sur ces entrées.

- Quelles sont au contraire les variables les moins influentes. Il sera possible de les considérer comme des paramètres déterministes, en les fixant par exemple à leur espérance, et ainsi d'obtenir un modèle plus *léger* avec moins de variables d'entrée. Dans le cas d'un code informatique, il sera possible de supprimer des parties de codes qui n'ont aucune influence sur la valeur de la sortie.
- Quelles variables, ou quels groupes de variables, interagissent avec quelles autres : l'analyse de sensibilité peut permettre de mieux appréhender et comprendre le phénomène modélisé, en éclairant les relations entre les variables d'entrée et la variable de sortie.

De nombreux domaines d'applications sont alors intéressés. Saltelli [36] en regroupant un certain nombre : l'ingénierie nucléaire, la chimie, l'écologie, on rencontre aussi d'autres applications en médecine [38] ou en économie.

2.2 Méthodes basées sur la variance : globale

Saltelli [36] a présenté les différentes méthodes existantes pour l'analyse de sensibilité en les regroupant de la sorte : les méthodes graphiques, les méthodes bayésiennes, les méthodes fiabilistes de type FORM et SORM et enfin les méthodes basées sur l'étude de la variance. Nous nous intéressons dans ce mémoire exclusivement à cette dernière classe de méthode.

Nous présentons une méthode plus générale de l'analyse de sensibilité globale basée sur la décomposition de la variance du modèle.

2.2.1 Indice de sensibilité sans hypothèse sur le modèle : Méthode de Sobol

Cette approche qui ne fait aucune hypothèse sur le modèle contrairement à celles des indices de sensibilité pour les modèles linéaires, ou monotones¹, est plus générale.

Considérons le modèle

$$Y = f(X_1, \dots, X_p), \quad (2.1)$$

où les variables d'entrée sont indépendantes.

Théorème 2.1. [36] "Variance totale"

Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires, où $Y \in \mathbb{R}$ et X_i dans un ensemble fini ou dénombrable, dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^p . Si la variance de Y est finie, alors

$$V(Y) = V(E[Y | X_i]) + E[V(Y | X_i)].$$

En vertu du théorème (2.1), un indicateur de la sensibilité de Y à X_i sera la variance de l'espérance de Y conditionnellement à X_i

$$V(E[Y | X_i])$$

Plus la variable X_i sera importante, plus cette quantité sera grande. Afin d'utiliser un indicateur normalisé, nous définissons finalement l'indice de sensibilité.

Définition 2.1. L'indice exprimant la sensibilité de Y à X_i est défini par :

$$S_i = \frac{V(E[Y | X_i])}{V(Y)}. \quad (2.2)$$

Cet indice est appelé indice de sensibilité de premier ordre de Sobol [15]. La variance de Y , V , peut se décomposer selon le théorème suivant.

1. monotone par rapport à chacune de ses variables lorsque les autres sont fixées.

Théorème 2.2. [36] "Décomposition de Sobol de la variance"

La variance du modèle à entrées indépendantes (2.1) se décompose en :

$$V = \sum_{i=1}^p V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} + \dots + V_{1\dots p}, \quad (2.3)$$

où :

$$\begin{aligned} V_i &= V(E[Y | X_i]), \\ V_{ij} &= V(E[Y | X_i, X_j]) - V_i - V_j, \\ V_{ijk} &= V(E[Y | X_i, X_j, X_k]) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k, \\ V_{1\dots p} &= V - \sum_{1 \leq i < j \leq p} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq p} V_{i_1 \dots i_{p-1}}. \end{aligned}$$

La construction des indices de Sobol repose sur une décomposition, appelée décomposition ANOVA, du modèle f étudié.

Dans le cadre général d'un modèle non linéaire et non monotone, on peut estimer l'importance des entrées sur la sortie en utilisant la décomposition de $f(\cdot)$ en somme des fonctions élémentaires (Hoeffding) [2] :

$$f(X_1, \dots, X_p) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{i\dots p}(X_i, \dots, X_p)$$

où $f(\cdot)$ est intégrable sur $[0, 1]^p$, f_0 une constante, et les autres fonctions vérifient les conditions suivantes :

$$\int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, s, \quad \forall \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, d\}.$$

Cette décomposition a été introduite par Sobol [15] pour l'analyse de sensibilité (d'où son appellation "décomposition de Sobol" dans ce domaine).

Définition 2.2. Ainsi on peut définir les indices de sensibilité de premier ordre :

$$S_i = \frac{V_i}{V},$$

les indices de sensibilité d'ordre deux :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V},$$

qui expriment la sensibilité de la variance de Y à l'interaction des variables X_i et X_j . On définit aussi les indices de sensibilité d'ordre trois :

$$S_{ijk} = \frac{V_{ijk}}{V},$$

qui expriment la sensibilité de la variance de Y aux variables X_i , X_j et X_k . Et ainsi de suite jusqu'à l'ordre p .

L'interprétation de ces indices est facile, puisque grâce à (2.4), leur somme est égale à 1, et étant tous positifs, plus l'indice sera grand (proche de 1), plus la variable aura d'importance. En effet, l'indice de Sobol est un indicateur statistique quantifiant l'impact de l'incertitude de la variable X_i sur la sortie Y . Il représente la part de la variabilité de la sortie Y due à la variabilité du paramètre X_i .

Remarque 2.1. *Le nombre d'indices de sensibilité ainsi construit, de l'ordre 1 à l'ordre p , est égale à $2^p - 1$. Lorsque le nombre de variables d'entrée p est trop important, le nombre d'indices de sensibilité explose. L'estimation et l'interprétation de tous ces indices deviennent vite impossibles.*

Saltelli et Homma [26] ont introduit des indices de sensibilité totaux, qui expriment la sensibilité totale de la variance Y à une variable, c'est-à-dire la sensibilité à cette variable sous toute ses formes (sensibilité à la variable seule et aux interactions de cette variable avec d'autres variables).

Définition 2.3. L'indice de sensibilité total ST_i pour la variable X_i est défini comme la somme de tous les indices de sensibilité à la variable X_i :

$$ST_i = \sum_{k \# i} S_k, \quad (2.4)$$

ou $\#i$ représente tous les ensembles d'indices contenant l'indice i .

Par exemple, pour un modèle à quatre variables d'entrée :

$$ST_1 = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{123} + S_{124} + S_{134} + S_{1234}.$$

Ces indices de sensibilité ont l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur la forme du modèle, mise à part celle d'indépendance des variables d'entrée. Ces indices seront ceux qu'on utilisera dans la suite de ce mémoire.

2.2.2 Estimation des indices de sensibilité

En pratique, il est rare de pouvoir calculer analytiquement les indices de sensibilité qui viennent d'être présentés, lorsque la forme analytique de la fonction f du modèle est connue et simple, les indices de sensibilité peuvent être calculer facilement. Or généralement, cette fonction qui peut être très complexe et non connue analytiquement, il est nécessaire de construire un code informatique pour leur estimation. Nous présentons dans un premier paragraphe un rappel sur les méthodes d'estimation de Monte Carlo, puis dans un second paragraphe, l'estimation des indices de sensibilité basée sur la décomposition de la variance.

Rappel sur les méthodes de Monte Carlo [46]

Dans beaucoup de problèmes scientifiques, on est amené à calculer une intégrale du type :

$$I = \int_D f(x)dx,$$

où f est une fonction intégrable, et D est un espace de plus ou moins de grand dimension, Soit x_1, \dots, x_N un N-échantillon d'une variable aléatoire uniforme sur D . Nous supposons que cet échantillon est aléatoire. Une approximation de I par la méthode de Monte Carlo :

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

Avec la loi forte des grands nombres, la moyenne d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance et de variances finies converge presque sûrement vers

l'espérance :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{I}_N = I, \quad \text{avec la probabilité 1.}$$

Toute espérance mathématique d'une variable aléatoire $f(X)$ de densité de probabilité h :

$$E[f(X)] = \int f(x)h(x)dx.$$

Avec les hypothèses de la loi forte des grands nombres, $E[f(X)]$ peut être estimée par :

$$\hat{E}[f(X)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

où $(x_i)_{i=1, \dots, N}$ est un N-échantillon de réalisation de la variable aléatoire X . Le taux de convergence d'une méthode de Monte Carlo est estimé à l'aide du théorème centrale-limite, qui assure que :

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma}(\hat{I}_N - I) \rightarrow N(0, 1),$$

Estimation des indices par Monte Carlo [15]

Soit N-échantillon de réalisations des variables d'entrée (X_1, X_2, \dots, X_p) :

$$\hat{X}_N = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp})_{k=1, \dots, N}.$$

L'espérance de Y , $E[Y] = f_0$, et sa variance, $V(Y) = V$, sont estimées par :

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp}). \quad (2.5)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp}) - \hat{f}_0^2. \quad (2.6)$$

L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation de variance de l'espérance conditionnelle. Nous présentons une technique due à Sobol [15]. L'estimation des indices de sensibilité de premier ordre (2.3) consiste à estimer la quantité :

$$V(E[Y | X_i]) = \underbrace{E[E[Y | X_i]^2]}_{U_i} - E[E[Y | X_i]]^2 = U_i - E[Y]^2.$$

Sobol propose d'estimer la quantité U_i , c'est-à-dire l'espérance du carré de l'espérance de Y conditionnellement à X_i , comme une espérance classique, mais en tenant compte du conditionnement à X_i en faisant varier toutes les variables sauf la variable X_i , Ceci nécessite deux échantillons de réalisation des variables d'entrée, que nous notons \tilde{X}_N^1 et \tilde{X}_N^2 :

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^1, \dots, x_{k(i-1)}^1, x_{ki}^1, x_{k(i+1)}^1, \dots, x_{kp}^1) \times f(x_{k1}^2, \dots, x_{k(i-1)}^2, x_{ki}^1, x_{k(i+1)}^2, \dots, x_{kp}^2). \quad (2.7)$$

D'où,

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}} \quad (2.8)$$

De même pour l'indice de second ordre $S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V}$, où :

$$V_{ij} = V(E[Y | X_i, X_j]) - V_i - V_j = \underbrace{E[E[Y | X_i, X_j]^2]}_{U_{ij}} - E[Y]^2 - V_i - V_j,$$

$U_{ij} = E[E[Y | X_i, X_j]^2]$ est estimé de même procédé, en faisant varier toutes les autres variables sauf X_i et X_j :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^1, \dots, x_{k(i-1)}^1, x_{ki}^1, \dots, x_{k(j-1)}^1, x_{kj}^1, x_{k(j+1)}^1, \dots, x_{kp}^1) \\ &\quad \times f(x_{k1}^2, \dots, x_{k(i-1)}^2, x_{ki}^1, \dots, x_{k(j-1)}^2, x_{kj}^1, x_{k(j+1)}^2, \dots, x_{kp}^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'où \hat{S}_{ij} est estimé par :

$$\hat{S}_{ij} = \frac{\hat{U}_{ij} - \hat{f}_0^2 - \hat{V}_i - \hat{V}_j}{\hat{V}}. \quad (2.10)$$

Et ainsi de suite pour les indices d'ordre supérieur.

Remarque 2.2. *En utilisant une taille d'échantillon de Monte Carlo de N , le nombre réel de simulation des variables d'entrée nécessaires à l'estimation des indices de sensibilité est $2N$, puisque cette estimation nécessite deux jeux de simulations. Le nombre d'appels à la fonction du modèle est alors $N \times (k+1)$, où k est le nombre d'indice estimés. Pour un modèle de p variables d'entrée, l'estimation de tous les indices nécessite $N \times (2^p)$ appels à*

la fonction. En revanche, n'estimer que les indices de premier ordre et les indices totaux ne demande que $N \times (2p + 1)$ appels à la fonction du modèle.

2.3 Incertitude de modèle

Cette section a pour objectif d'introduire la notion d'incertitude de modèle en se basant sur la bibliographie correspondante. L'attention a été portée sur le problème de la relation entre les hypothèses de modélisation et les résultats obtenus. Les différents travaux sur l'incertitude de modèle peuvent être classés selon trois axes de recherches. Le premier concerne la détermination et la définition des différentes sources d'incertitude qui interviennent dans la construction d'un modèle, qui est la problématique ou se situe toute une partie de ce mémoire. Le deuxième traite la sélection de modèle lorsque l'on a plusieurs modèles qui modélisent le même phénomène. Enfin, le troisième traite de l'incertitude de modèle issue de l'utilisation d'un modèle simplifié.

2.3.1 Incertitude liée à la construction d'un modèle

L'élaboration ou la construction de tout modèle mathématique est soumise à deux sources d'incertitudes [16, 27, 40, 41] : incertitude aléatoire, due à certaines paramètres du modèle qui sont des estimations de moments de variables aléatoires, et l'incertitude épistémique due à l'impossibilité de connaître parfaitement le problème étudié.

2.3.1.1 Incertitude aléatoire

Elle apparaît lors de l'estimation des paramètres du modèle, cette incertitude est due à la variabilité naturelle de toute quantité physique mesurée. Elle s'explique parfois comme l'incertitude responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète dans les mêmes conditions une expérience.

2.3.1.2 Incertitude épistémique

L'incertitude épistémique se révèle du passage du phénomène réel au modèle mathématique. Dans chaque étape de cette construction, nous analysons les différentes sources

d'incertitude qui existent.

- Du phénomène réel au modèle théorique, un modèle théorique qui définit un phénomène génère une incertitude due à la nature de ce phénomène, qui peut ne jamais être comprise exactement par l'homme.
- Du modèle théorique au modèle mathématique, ce passage entraîne des approximations, il n'est pas toujours possible de prendre en compte la globalité du phénomène physique.
- Du modèle mathématique au modèle numérique informatisé, la discrétisation du modèle mathématique afin de pouvoir en tirer une solution numérique, engendre des approximations qui sont source d'incertitude supplémentaire.
- Du modèle numérique informatisé à la valeur numérique, comme elle est calculée de façon informatique la précision limitée de l'ordinateur utilisé engendre une incertitude sur cette valeur.

Toutes ces incertitudes issues de l'élaboration du modèle sont définies comme des incertitudes épistémiques.

La figure ci-dessous illustre ces différentes sources d'incertitude.

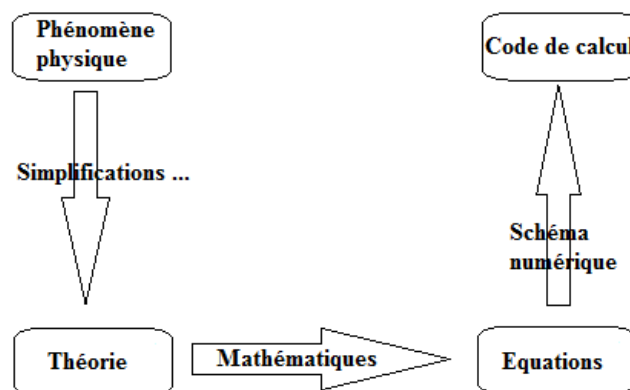


FIGURE 2.1 – Différentes sources d'incertitude épistémique présentes lors de construction d'un modèle.

Conclusion

L'analyse de sensibilité (globale) consiste à évaluer des indices de sensibilité qui quantifient combien une variable ou un groupe de variables contribue à la variance de la sortie. Dans ce chapitre, nous avons présenté l'une des méthodes d'analyse de sensibilité qui est celle de Sobol, ainsi leur estimations basées sur la méthode de Monte Carlo. De plus, nous avons présenté brièvement les types d'incertitude paramétrique et leurs sources.

CHAPITRE 3

ANALYSE DE SENSIBILITE DANS LE MODÈLE DE RISQUE CLASSIQUE

Plus adstraite est la vérité que tu veux enseigner, plus tu dois en sa faveur séduire les sens.

- Friedrich NIEITZSCHE -

Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons l'analyse de sensibilité de la probabilité de ruine du modèle de risque classique, où nous étudierons le fait qu'on suppose que les paramètres intervenant dans la définition λ et μ de la probabilité de ruine sont des variables aléatoires, et ce afin de modéliser l'incertitude infligée sur ces paramètres. Dans ce sens, nous nous intéresserons à l'estimation de la sensibilité de la probabilité de ruine par rapport à ses paramètres incertains, tout en utilisant le concept de Sobol. Plus précisément, nous estimerons les indices de Sobol par la simulation de Monte Carlo.

3.1 Modèle de risque classique

Au cours du temps, une compagnie d'assurance qui dispose d'un capital initial $u > 0$, en quelque unité, évolue en fonction des cotisations des assurés, les montants

de remboursement et la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés.

On suppose que :

- les occurrences des sinistres suivent un processus de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$ de paramètre $\lambda > 0$.
- le k^{eme} sinistre occasionne pour la compagnie une perte aléatoire $Z_k > 0$.
- les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps.

Dans la pratique, les cotisations sont capitalisées à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et on suppose donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'événement $N_t = 0$, le capital de la compagnie égal à $u + ct$ au temps t .

On suppose de plus, que $(Z_k)_{k \geq 1}$ correspondant au montants des remboursement forment un processus de renouvellement de loi F , et telle que

$$E[Z_k] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(Z_k) = \sigma^2$$

Définition 3.1. On appelle le processus de risque, le processus défini par

$$\forall t \geq 0 \quad X_t = ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k.$$

Il vient immédiatement de cette définition que le capital de la compagnie d'assurance au temps t est égal à $u + X_t$. De plus le risque moyen sur $[0, t]$ est égal à

$$E[X_t] = ct - E[N_t]\mu = (c - \lambda\mu)t.$$

La garantie que le processus de risque dévie presque-sûrement vers $+\infty$ est $\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0$ (la ruine n'est pas certaine). D'après la loi forte des grands nombres on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = c - \lambda\mu \quad p - s.$$

Nous avons :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t}.$$

D'après la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \rightarrow \frac{1}{\lambda} p - s.$$

Et

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda p - s.$$

Ceci entraîne :

$$\frac{X_t}{t} = c - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i}{N_t} \frac{N_t}{t} \rightarrow c - \lambda \mu p - s$$

Puisque $\rho > 0$, (X_t) devient négatif un nombre fini de fois.

3.1.1 Remboursements de loi exponentielle

Prenant le cas particulier du modèle de rique classique (modèle de lundberg P/P), ou les réclamations suivent une loi exponentielle de fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\mu}\right), \quad x > 0. \quad (3.1)$$

Lorsque F est de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$, on a :

$$\forall u \geq 0, \quad \Psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp\left(\frac{-\rho u}{\mu(1 + \rho)}\right). \quad (3.2)$$

On remplace ρ dans la formule (3.2), on aura :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda \mu}{c} \exp\left(-u \left(\frac{c - \lambda \mu}{c \mu}\right)\right). \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les deux paramètres λ et μ évoqués dans la définition de la probabilité de ruine (3.3) sont incertains. Plus précisément, nous associons les deux modèles suivants pour leurs présentation :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \xi; \quad \xi \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_\mu \xi; \quad \xi \rightsquigarrow N(0, 1)$$

3.1.1.1 Estimation des indices de Sobol pour la probabilité de ruine

Pour estimer les indices de Sobol relatifs à la probabilité de ruine introduite précédemment, nous construisons un algorithme basé sur la méthode dite de Sobol présentée dans la section (2.2.2). Dans ce qui suit, nous décrivons les principales étapes de notre algorithme nommé *Sobol_Ruine*.

Prise en compte de l'incertitude

Afin de modéliser l'incertitude; voir la section (2.3), nous associons une perturbation pour chaque paramètre des lois qui expriment le comportement des arrivées des sinistres et les montants des sinistres. Cette procédure est donnée par les deux pseudo-code suivant :

1. Perturbation du taux d'arrivées des sinistres λ

Nous perturbons le taux d'arrivées des sinistres λ avec $\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \xi_\lambda$ et $\xi \rightsquigarrow N(0, 1)$.

Algorithm 3.1 Perturbation de taux (λ)

Entrées : $\bar{\lambda}$: La moyenne des arrivées des sinistres - σ_λ : L'ecart-type de la moyenne des arrivées - N : Nombre de générations.

Sorties : λ

Pour $i = 1$ à N **faire**

Générer aléatoirement une réalisation de $N(0, 1)$, puis la sauvegarder dans $[\xi]$.

Affecter un produit élémentaire entre l'ecart-type de la moyenne σ_λ et le vecteur $[\xi]$.

Additionner la moyenne des arrivées $\bar{\lambda}$.

Fin Pour

Retourner λ

2. Perturbation du taux de remboursement μ

Nous perturbons la moyenne des remboursements μ avec $\mu = \bar{\mu} + \sigma_\mu \xi_\mu$ et $\xi \rightsquigarrow N(0, 1)$.

Indices de Sobol de premier ordre

Algorithm 3.2 Perturbation de la moyenne (μ)

Entrées : $\bar{\mu}$: La moyenne de remboursement - σ_μ : L'écart-type de la moyenne de remboursement - N : Nombre de générations.

Sorties : μ

Pour $i = 1$ à N **faire**

Générer aléatoirement une réalisation de $N(0, 1)$, puis la sauvegarder dans $[\xi]$.

Affecter un produit élémentaire entre l'écart-type de la moyenne σ_μ et le vecteur $[\xi]$.

Additionner la moyenne de remboursement $\bar{\mu}$.

Fin Pour

Retourner μ

Cette étape de l'algorithme *Sobol_Ruine* permet d'estimer les indices de premier ordre. Pour estimer un indice, on génère les deux échantillons de réalisations des variables d'entrée (μ et λ) par les procédures décrites ci-dessus, puis en tenant compte des variables d'entrée de cette procédure, les indices sont estimés par la formule (2.8). La répétition de cette instruction k fois permet d'obtenir les k indices de Sobol de premier ordre. Le pseudo-code de cette procédure est le suivant :

Algorithm 3.3 Indices de 1^{er} ordre

Entrées : k : Nombre de variable - \tilde{X}_N^1 - \tilde{X}_N^2 - \hat{f}_0 - \hat{V} - \hat{U}_i

Sorties : 1^{er}_Sobol

Pour $i = 1$ à k **faire**

$$\hat{S}_i \leftarrow \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$$

Fin Pour

Retourner 1^{er}_Sobol

Indices de Sobol de second ordre

Elle est la deuxième étape de l'algorithme *Sobol_Ruine*, qui nous permet d'estimer les indices de second ordre. Le contenu de cette procédure est similaire à celle des indices de premier ordre, mais la quantité U_{ij} est estimée par la formule (2.9). Les indices sont estimés par la formule (2.10). Le pseudo-code de cette procédure est le suivant :

Algorithm 3.4 Indices de 2^{eme} ordre

Entrées : k : Nombre de variable - \tilde{X}_N^1 - \tilde{X}_N^2 - \hat{f}_0 - \hat{V} - \hat{S}_i - \hat{S}_j **Sorties :** 2^{eme}_Sobol**Pour** $i = 1$ à k **faire****Pour** $j = i + 1$ à k **faire**Estimer \hat{U}_{ij} par la relation (2.10)**Fin Pour**

$$\hat{S}_{ij} \leftarrow \frac{\hat{U}_{ij} - \hat{f}_0^2}{\hat{V}} - \hat{S}_i - \hat{S}_j$$

Fin Pour**Retourner** 2^{eme}_Sobol

Indices Totaux

L'objectif de la procédure est de calculer les indices totaux par la formule (2.4), Le pseudo-code est :

Algorithm 3.5 Indice total ST_i

Entrées : k : Nombre de variable - \hat{S}_i - \hat{S}_{ij} **Sorties :** Sobol_Tot**Pour** $i = 1$ à k **faire**

$$\hat{ST}_i \leftarrow \hat{S}_i$$

Pour $j = 1$ à k **faire****Si** $j \neq i$ **alors**

$$\hat{ST}_i \leftarrow \hat{ST}_i + \hat{S}_{ij}$$

Fin Si**Fin Pour****Fin Pour****Retourner** Sobol_Tot

Maintenant que chaque étape de l'algorithme a été bien détaillée, nous donnons le pseudo-code de l'algorithme *Sobol_Ruine*.

Algorithm 3.6 *Sobol_Ruine*

Entrées : k : Nombre de variables - C : Cotisations des assurés - N : Nombre de générations - U : Capital initial - $\bar{\mu}$: Moyenne des remboursements - σ_μ : L'écart-type des remboursement - $\bar{\lambda}$: Moyenne des réclamations. - σ_λ : L'écart-type des arrivées des réclamations

Sorties : 1^{er_Sobol} , 2^{eme_Sobol} , $Sobol_Tot$.

$$\rho \leftarrow \frac{C - (\bar{\mu} * \bar{\lambda})}{\bar{\mu} * \bar{\lambda}}$$

Si ($\rho \leq 0$) **alors**

La condition de non ruine n'est pas vérifiée.

Sinon

GENERATION

Pour $i = 1$ à 2 **faire**

$\tilde{X}_N^i \leftarrow$ **Algorithme 3.1** (Pérturbation de λ)

$\tilde{X}_N^i \leftarrow$ **Algorithme 3.2** (Pérturbation de μ)

Fin Pour

LES PERFORMENCES

$f(\underline{x}, \underline{y}) \leftarrow \Psi(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ formule (3.3).

Estimer \hat{f}_0 en utilisant la relation (2.5).

Estimer \hat{V} en utilisant la relation (2.6).

Estimer \hat{U}_i par la relation (2.7).

INDICES DE PREMIER ORDRE

$1^{er_Sobol} \leftarrow$ **Algorithme 3.3** (Indices de 1^{er} ordre).

INDICES DE SECOND ORDRE

$2^{eme_Sobol} \leftarrow$ **Algorithme 3.4** (Indices de 2^{eme} ordre).

INDICES TOTAUX

$Sobol_Tot \leftarrow$ **Algorithme 3.5** (Indices total ST_i).

Fin Si

Retourner 1^{er_Sobol} , 2^{eme_Sobol} , $Sobol_Tot$

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme *Sobol_Ruine*, ce dernier a été implémenté sous l'environnement MATLAB. L'expériences ont été menées sur la formule de la probabilité de ruine dans le cas où le modèle est P/P. Nous avons choisi d'exécuter notre algorithme avec les valeurs suivantes :

- Le nombre de variable $k = 2$;
- La taille des échantillons $N = 10000$;
- Cotisation $C = 1.5$;
- Le capital initial $U = 1$;
- Le nombre moyen de réclamations $\bar{\lambda} = 1$;
- L'écart-type des nombres de réclamations $\sigma_{\lambda} = 0.1$;
- Le montant moyen des réclamations $\bar{\mu} = 1$;
- L'écart-type des montants de réclamations $\sigma_{\mu} = 0.1$;
- Nombre de répliques Bootstrap $B = 150$.

Les résultats sont donnés dans la figure : (3.1), (3.2).

3.1.1.2 Erreur d'estimation par Monte-Carlo

Naturellement, la question de la précision d'une approximation lorsqu'on utilise une estimation numérique est toujours posée. Il est traditionnel en statistique de chercher un intervalle de confiance pour la quantité à estimer. Nous construisons des intervalles de confiance pour chaque indices de Sobol estimé par la méthode dite "bootstrap".

Intervalle de confiance par bootstrap [17]

Principe

Le principe de bootstrap est de créer des échantillons "artificiels" à partir de l'échantillon réel. Cette création est dite réplique c-à-d, fixer un nombre R de répliques et de tirer pour $r = 1, \dots, R$ de manière équiprobable et *avec remise* un N-échantillon. Puis on calcule la statistique sur chacun des échantillons artificiels. Ensuite, on construit la loi

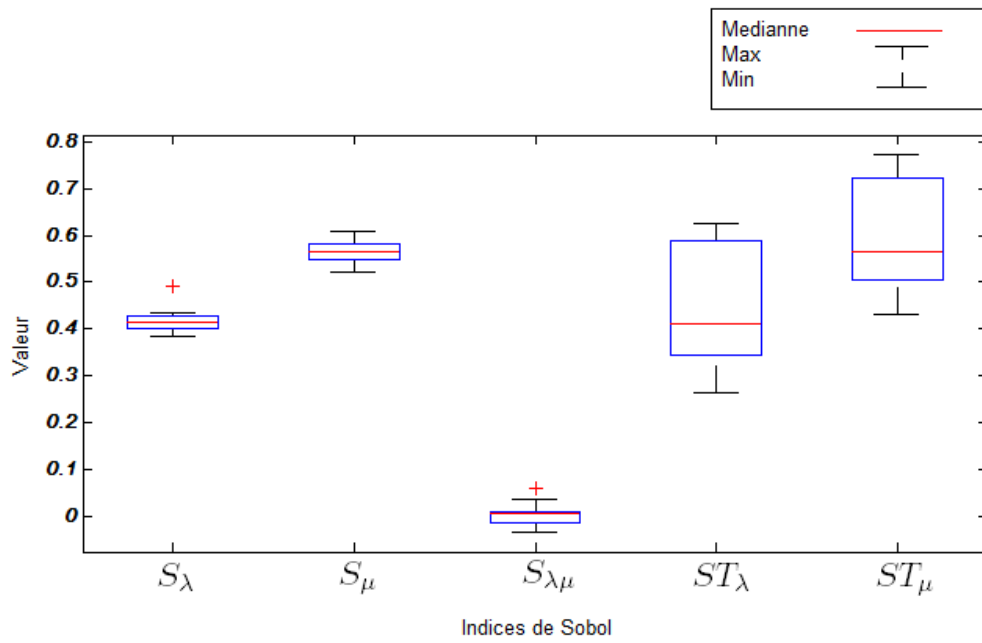


FIGURE 3.1 – Graphique en "boite à moustaches" de 10 évaluations indépendantes des Indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle Lundberg.

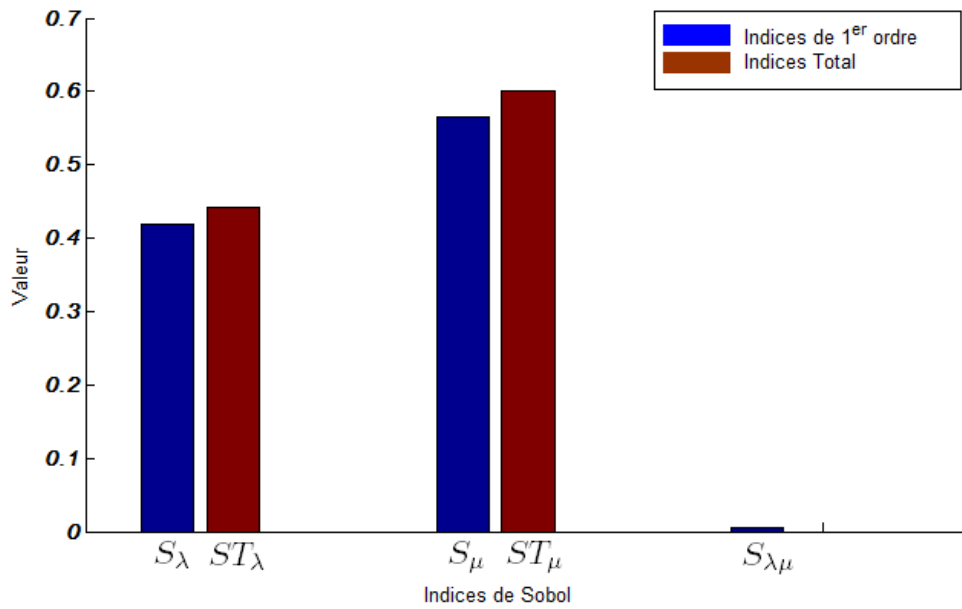


FIGURE 3.2 – Histogramme des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle Lundberg.

de distribution empirique de la statistique appelée "distribution bootstrap", et on réalise l'objectif statistique à partir de cette loi : Biais, écart-type, intervalle de confiance, ...

Soit l'estimateur :

$$\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Pour les R répliques, la r^{eme} réplique bootstrap :

$$\hat{\theta} = f(x_{1^*}, x_{2^*}, \dots, x_{n^*}).$$

L'estimation bootstrap du paramètre et la variance bootstrap de la distribution du paramètre seront calculées sur la distribution des répliques (distribution bootstrap) :

$$\hat{\theta}_{Boot} = \frac{\sum_{r=1}^R \hat{\theta}_r}{R};$$

$$Var_{Boot}(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{r=1}^R (\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{Boot})^2}{R - 1}.$$

Intervalle de confiance "Bootstrap t" ou "Standard"

Après le calcul de la moyenne des distributions et l'écart-type des distributions, l'intervalle de confiance standard est de la forme :

$$\left[\hat{\theta}_{Boot} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{Boot}(\hat{\theta}) ; \hat{\theta}_{Boot} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_{Boot}(\hat{\theta}) \right]$$

avec $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $(1 - \frac{\alpha}{2})$ de la loi Normale (0,1), et

$$S_{Boot}(\hat{\theta}) = \sqrt{Var_{Boot}(\hat{\theta})}.$$

Nous rajoutons une procédure pour le calcul des intervalles de confiance avec un seuil $\alpha = 5\%$ dans l'algorithme *SobolRuine* et l'exécuter avec les données citées ci-dessus, nous aurons :

```
L"Intervalle de confiance pour l-indice S1 = [0.41292,0.42394]
L"Intervalle de confiance pour l-indice S2 = [0.56082,0.56976]
L"Intervalle de confiance pour l-indice S12 = [0.00023219,0.011181]
L"Intervalle de confiance pour l-indice total ST1 = [0.41786,0.46523]
L"Intervalle de confiance pour l-indice total ST2 = [0.57673,0.62242]
```

FIGURE 3.3 – Intervalles de confiance avec un seuil $\alpha = 0.05$.

La table (3.1) (3.2) résume les indices de sensibilité de premier ordre et totaux, estimés par le pseudo-code de l'algorithme *SobolRuine*. La taille d'échantillon utilisée est 10000, et les intervalles de confiance sont obtenus par 150 répliquions bootstrap.

Variable	Indice Ordre 1	Inter. Conf	Indice Total	Inter. Conf
μ	0.563	[0.561, 0.570]	0.601	[0.576, 0.622]
λ	0.415	[0.413, 0.424]	0.451	[0.418, 0.465]

TABLE 3.1 – Indices de sensibilité de premier ordre et totaux pour le modèle de la probabilité de ruine

Lecture des résultats

- La variable qui a une grande d'influence sur la variance de la sortie (au sens de l'indice total, $c-a-d$ en prenant en compte les interactions avec les autres variables), est la variable μ avec un indice total de 0.60 ;

On en déduit que la variance de la probabilité de ruine est due fortement à μ .

Après avoir mesurer la sensibilité de la probabilité de ruine $\Psi(u)$ sur ses paramètres μ et λ , nous pouvons considerer le paramètre μ comme une variable aléatoire et λ sera fixé à sa valeur nominale (constante).

Le tableau (3,2)ci-dessous, résume une évaluation de la probabilité de ruine (3.3) pour différentes capitalisation initiale U , et $c = 1.5$, $\lambda = 1$ et

$$\mu = 1 + 0.1 \varepsilon_\mu \text{ et } \varepsilon \rightsquigarrow N(0,1).$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi(U)$	0.801	0.61	0.58	0.48	0.25	0.30	0.21	0.22	0.11	0.09	0.11

TABLE 3.2 – Probabilité de ruine en temps infini pour différentes valeurs de U

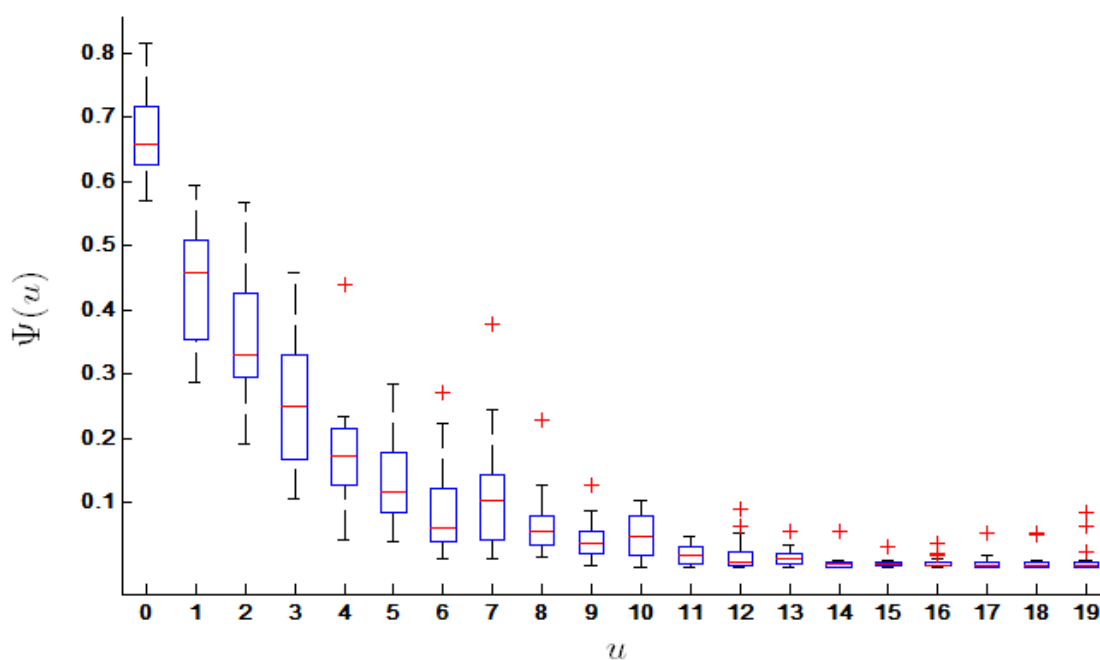


FIGURE 3.4 – Graphe de la probabilité de ruine

Différentes lois de probabilité peuvent servir à modéliser le montant d'une réclamation. Les modèles stochastiques comportent plusieurs avantages, la forme de la queue de distribution d'un montant est d'un intérêt tout particulier en actuariat. En effet, plusieurs fonctions associées à la densité f_{X_i} des montants des réclamations peuvent être utilisées pour caractériser le comportement de la queue de distribution.

En général, nous classifions les distributions des montants de réclamations en deux groupes : les distributions à queue légère et les distributions à queue lourde. Parmi les distributions à queue légère, les plus utilisées sont [37] : la distribution exponentielle, Gamma, hyperexponentielle, la distribution Phase-type, ...ets. Dans le groupe des distributions à queue lourde, nous avons : la distribution Weibull, Lognormal, Pareto, Loggamma, la classe des distributions subexponentielles, ...ets. Chacune de ces distributions possède des caractéristiques qui peuvent la rendre plus au moins appropriée selon la situation, voir [32].

3.1.2 Approximation à queue lourde

La difficulté majeure lors de l'analyse des modèles avec des distributions à queue lourde est que les transformées de Laplace n'ont souvent pas de forme analytique exacte, c'est notamment le cas pour la distribution de Pareto et Weibull.

1 - Réclamation de type Weibull

Dans le cas où le chargement de sécurité $\rho \simeq 1$, et $M = \sup_{0 \leq t < \infty} S_t$ avec S_t est le surplus ($S_t = u - R_t$), converge vers une variable aléatoire exponentielle avec la moyenne ($E(M)$). Soit : $\exp(-\frac{1}{E(M)})$, où $E(M) = \frac{\rho E(X)^2}{2(1-\rho)E(X)}$ pour plus de détails voir [31, 45].

La forme approchée de la probabilité de ruine est :

$$\Psi(U) = \exp\left(\frac{-U}{E(M)}\right), \quad (3.4)$$

avec :

$$E(M) = \frac{6\rho\mu^2}{2(1-\rho)\mu} = \frac{3\lambda\mu^2}{C-\lambda\mu}.$$

On remplace $E(M)$ dans (3.4), on obtient :

$$\Psi(U) = \exp\left(\frac{-U}{3} \left(\frac{C-\lambda\mu}{\lambda\mu}\right)\right). \quad (3.5)$$

Comme précédemment, nous analysons la sensibilité de la probabilité de ruine (3.5) par rapport aux variables d'entrées, en exécutant l'algorithme *Sobol_Ruine* sous les valeurs ci dessous tout en prenant en considération l'incertitude sur les paramètres d'entrées λ et μ :

- Le nombre de variable $k = 2$;
- La taille des échantillons $N = 10000$;
- Cotisation $C = 1.5$;
- Le capital initial $U = 1$;
- Le nombre moyen de réclamations $\bar{\lambda} = 1$;
- L'écart-type des nombres de réclamations $\sigma_{\lambda} = 0.1$;
- Le montant moyen des réclamations $\bar{\mu} = 1$;
- L'écart-type des montants de réclamations $\sigma_{\mu} = 0.1$;
- Nombre de réplication Bootstrap $B = 150$.

Dans ce qui suit, nous fixons les valeurs des paramètres de telle sorte à avoir les valeurs relatives au chargement de sécurité ρ proche de 1. pour ce, nous exécutons l'algorithme *Sobol_Ruine* pour

$$\rho \in [0.68, 0.95].$$

Les résultats obtenus sont illustrés en figure (3.5) :

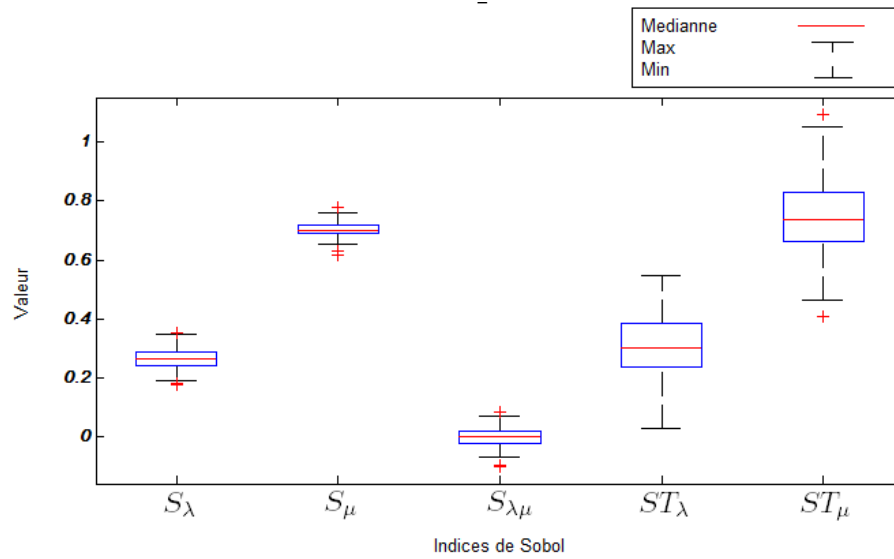


FIGURE 3.5 – Graphique en "boite à moustaches" de 10 évaluations indépendantes des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamation de type Weibull.

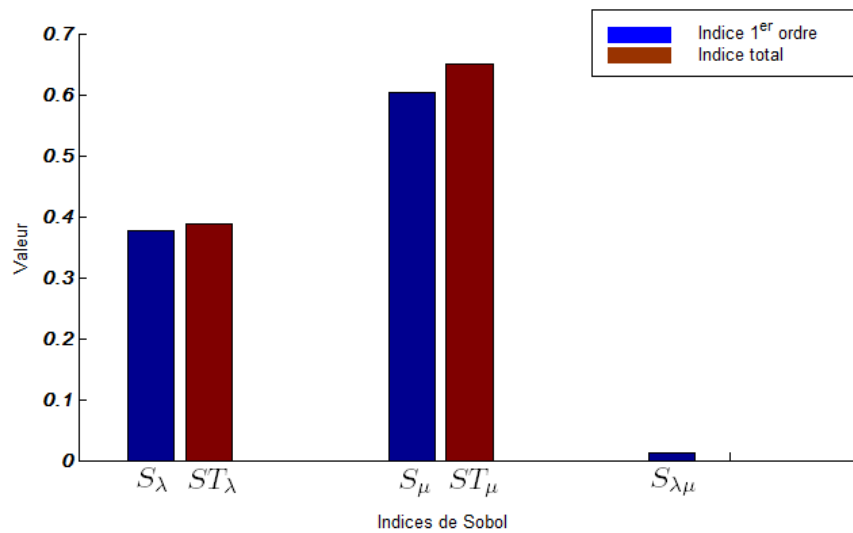


FIGURE 3.6 – Histogramme des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamation de type Weibull.

Le tableau (3.3) résume les indices de sensibilité de premier ordre et totaux, estimés par le pseudo-code de l'algorithme *Sobol_Ruine*. La taille d'échantillon utilisée est 10000, et les intervalles de confiance sont obtenus par 150 répliquions bootstrap.

Variable	Indice Ordre 1	Inter. Conf	Indice Total	Inter. Conf
μ	0.611	[0.591, 0.631]	0.655	[0.626, 0.684]
λ	0.377	[0.366, 0.396]	0.3895	[0.369, 0.409]

TABLE 3.3 – Indices de sensibilité de premier ordre et totaux pour le modèle de la probabilité de ruine avec des réclamation de type Weibull.

Lecture des résultats

- La variable qui a le plus d'influence sur la variance de la sortie (au sens de l'indice total, c-à-d en prenant en compte les interactions avec les autres variables), est la variable μ avec un indice total de 0.65.

On en déduit que la variance de la probabilité de ruine est dûe fortement à μ .

Après avoir mesuré la sensibilité de $\Psi(U)$ sur ses paramètres μ et λ , nous pouvons considerer le parametre μ comme une variable aléatoire et λ une constante.

Le tableau (3,4) ci-dessous, résume une évaluation de la probabilité de ruine (3.5) pour différentes capitalisation initiale U , et $c = 1.5$, $\lambda = 0.8$ et

$$\mu = 1 + 0.1\varepsilon_\mu \text{ avec } \varepsilon_\mu \rightsquigarrow N(0, 1).$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi(U)$	1	0.85	0.69	0.61	0.54	0.49	0.42	0.39	0.31	0.22	0.20

TABLE 3.4 – Probabilité de ruine en temps infini pour différentes valeurs de U

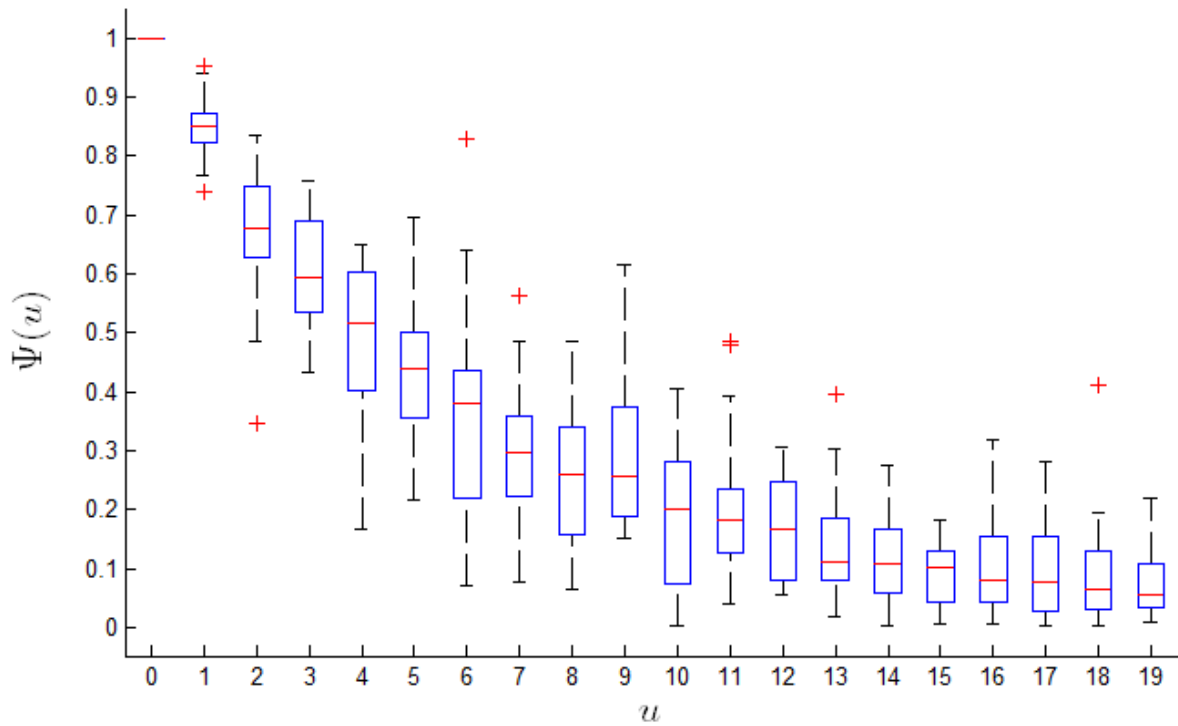


FIGURE 3.7 – Graphe de la probabilité de ruine (3.5)

2 - Réclamations de type Pareto

Un autre cas d'approximation à queue lourde, est le cas de Pareto l'orsque le capital initial est considérablement grand $U \rightarrow \infty$. L'approximation est définie par :

$$\Psi(\lambda, \mu) = \frac{\rho}{1 - \rho} \left(\frac{3\mu}{3\mu + U} \right)^{a-1} \quad (3.6)$$

Cette approximation est également donnée par une simple équation qui nécessite les moment de la distribution, voir [47].

La figure suivante illustre l'analyse de sensibilité avec les indices de Sobol pour la formule (3.6) sous les valeurs des paramètres suivantes :

- Le nombre de variable $k = 2$;
- La taille des échantillons $N = 10000$;
- Cotisation $C = 1.5$;

- Le capital initial $U = 100$;
- Le nombre moyen de réclamations $\bar{\lambda} = 1$;
- L'écart-type des nombres de réclamations $\sigma_{\lambda} = 0.1$;
- Le montant moyen des réclamations $\bar{\mu} = 1$;
- L'écart-type des montants de réclamations $\sigma_{\mu} = 0.1$;
- $a = 2$ le paramètre de lissage de la loi de Pareto ;
- Nombre de réplication Bootstrap $B = 150$.

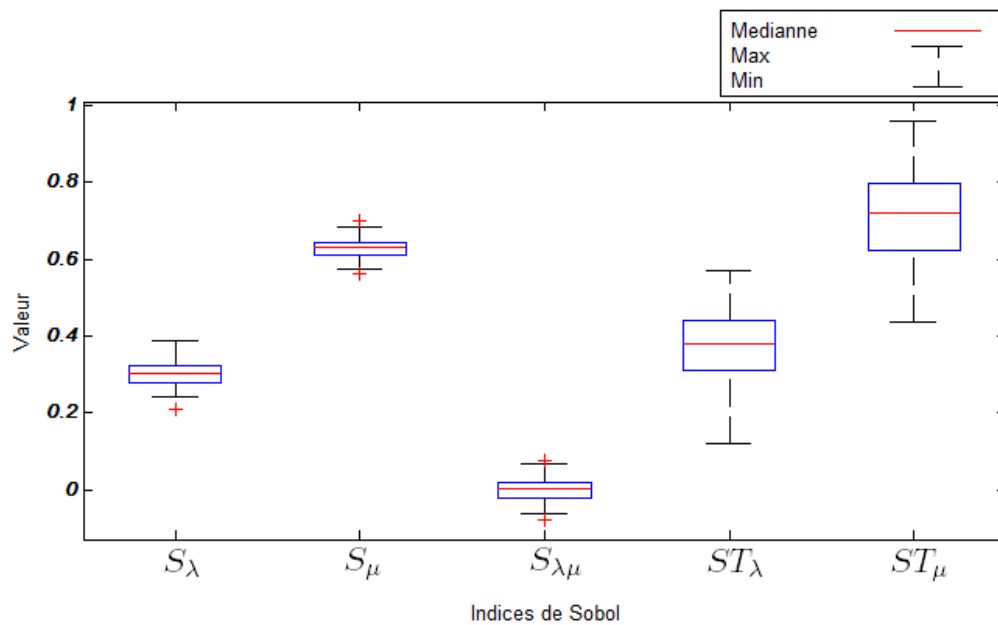


FIGURE 3.8 – Graphique en "boîte à moustaches" de 10 évaluations indépendantes des indices de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamations de type Pareto.

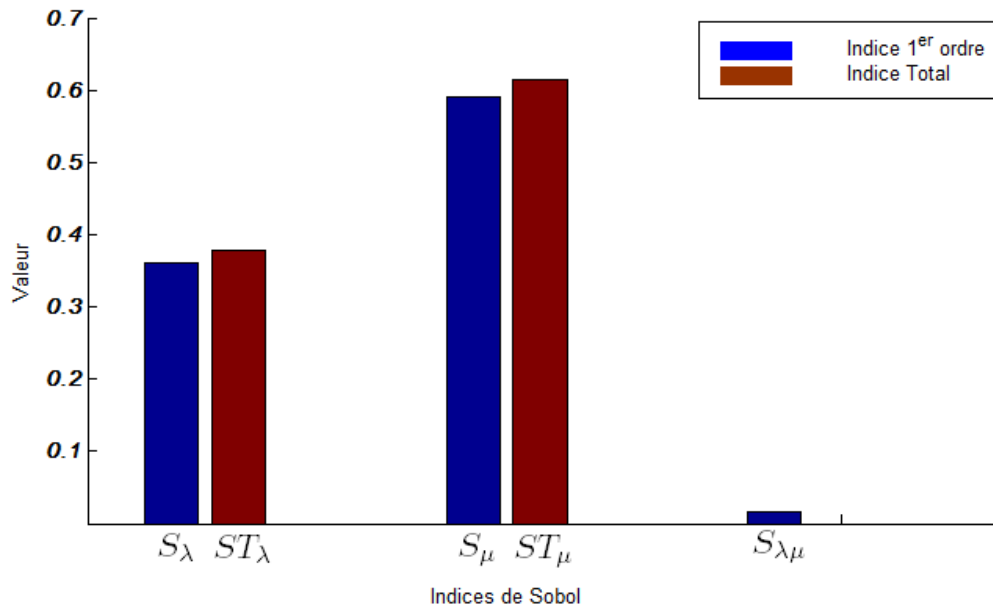


FIGURE 3.9 – Histogramme des indice de Sobol S_i , S_{ij} et ST_i pour la probabilité de ruine dans le modèle d'approximation à queue lourde avec des réclamations de type Pareto.

Variable	Indice Ordre 1	Inter. Conf	Indice Total	Inter. Conf
μ	0.588	[0.581, 0.601]	0.638	[0.616, 0.665]
λ	0.349	[0.336, 0.368]	0.385	[0.376, 0.390]

TABLE 3.5 – Indices de sensibilité de premier ordre et totaux pour le modèle de la probabilité de ruine avec des réclamations de type Pareto

Le tableau (3.5) résume les indices de sensibilité de premier ordre et totaux, estimés par l'algorithme *SobolRuine*. La taille d'échantillon utilisée est 10000, et 150 répliques bootstrap pour les intervalles de confiance.

Lecture des résultats

- La variable qui à une grande influence sur la variance de la sortie (au sens de l'indice total, $c - \hat{a} - d$ en prenant en compte les interactions avec les autres variables), est la variable μ avec un indice total de 0.64.

On en déduit que la variance de la probabilité de ruine est dûe fortement à μ .

Après avoir mesuré la sensibilité de la variation de $\Psi(U)$ sur ses paramètres μ et λ , nous pouvons considérer le paramètre μ comme une variable aléatoire et λ une constante.

Le tableau (3,6) ci-dessous, résume une évaluation de la probabilité de ruine (3.6) pour différentes capitalisation initiale U , et $c = 1.5$, $\lambda = 1$ et

$$\mu = 1 + 0.1 \varepsilon_\mu \text{ avec } \varepsilon_\mu \rightsquigarrow N(0, 1).$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Psi(U)$	0.39	0.25	0.19	0.11	0.09	0.05	0.06	0.03	0.02	0.01

TABLE 3.6 – Probabilité de ruine en temps infini pour différentes valeurs de U .

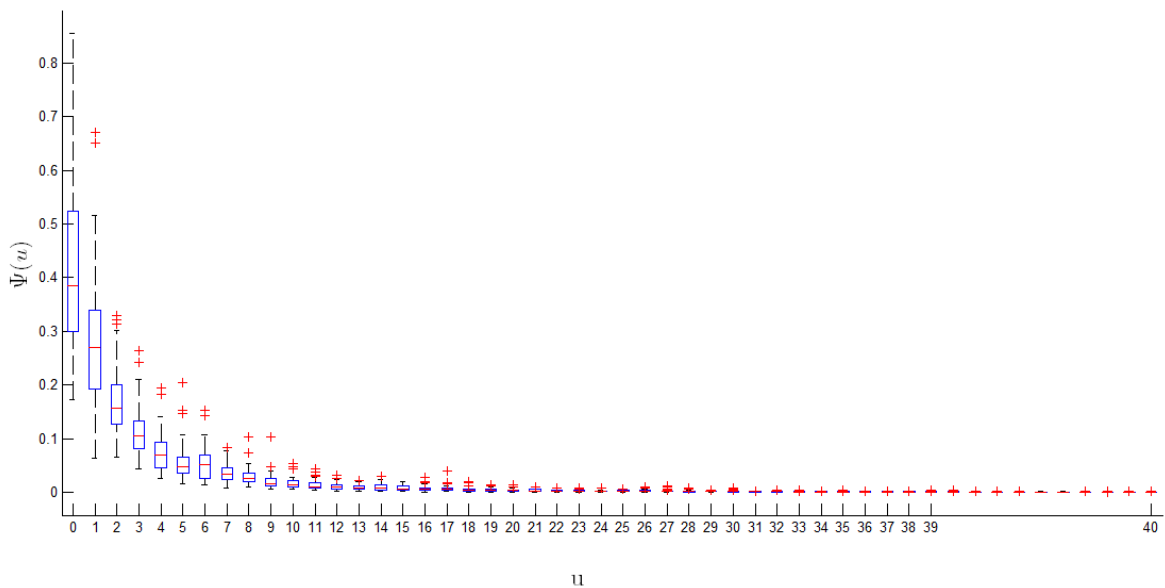
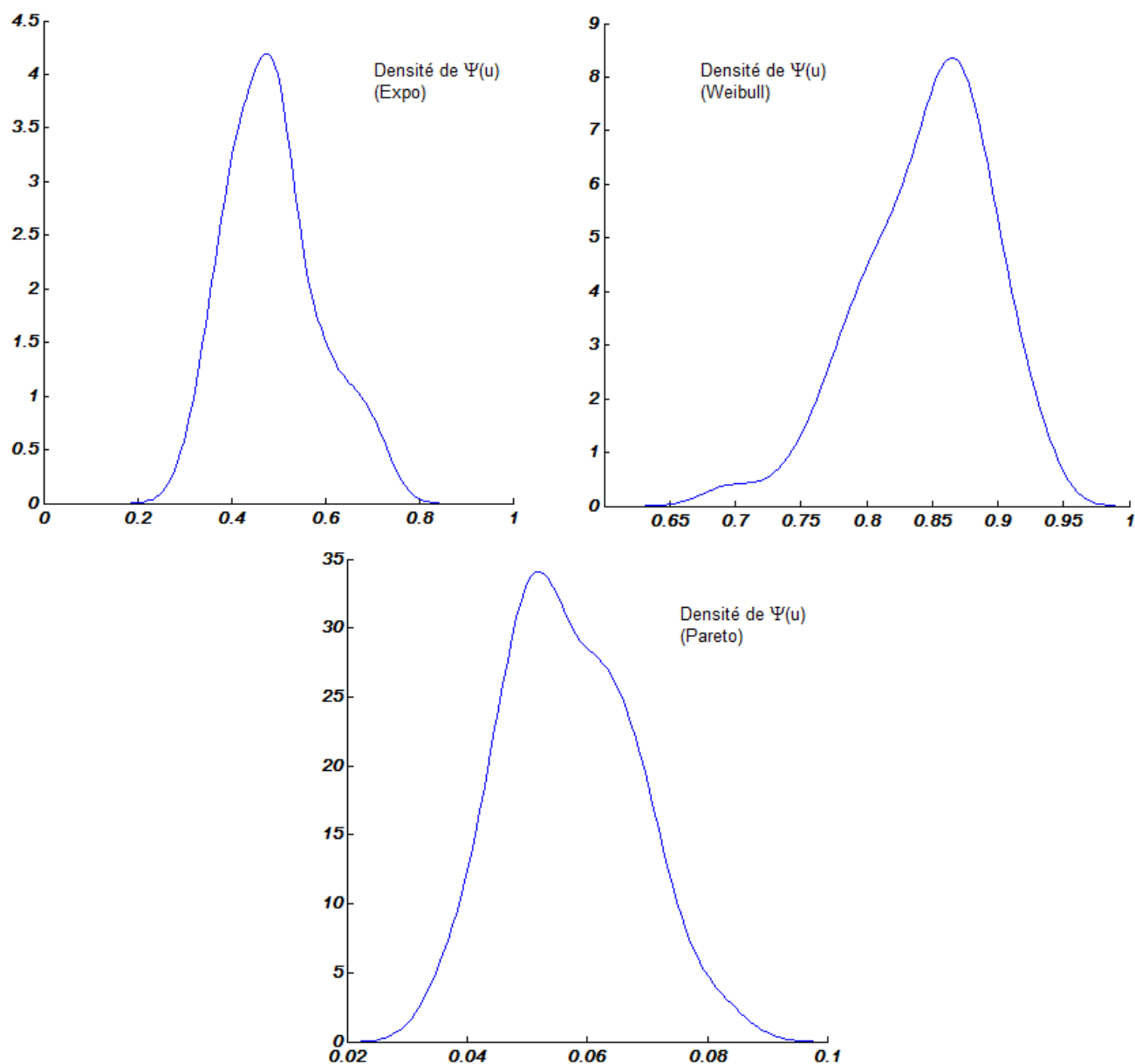


FIGURE 3.10 – Graphe de la probabilité de ruine (3.6)

Les résultats numériques pour les moments de la densité de la probabilité de ruine, de plus, les deux paramètres de forme, le coefficient d'asymétrie (skewness) et le coefficient d'aplatissement (Kurtosis) sont donnée dans le tableau (3.7).

FIGURE 3.11 – Densité de probabilité pour la probabilité de ruine $\Psi(u)$

Les figures (3.12) et (3.13) reproduisent respectivement avec simulation les fonctions de densités de la probabilité de ruine et les fonctions de cumul dans chaque approche du modèle de risque classique. Dans cette dernière partie, nous tenons compte des types d'incertitude, aléatoire et épistémique, infligée dans la valeur du paramètre μ . Cela nous permettra de mieux cadrer les valeurs évoquées dans le modèle associé au paramètre μ .

Modèle	Moments et forme	$MC_{(N_{MC}=10000)}$
Lundberg	$E(\Psi(U))$	0.466
	$V(\Psi(U))$	0.085
	$Skew(\Psi(U))$	0.669
	$Kurt(\Psi(U))$	1.821
Weibull	$E(\Psi(U))$	0.378
	$V(\Psi(U))$	0.066
	$Skew(\Psi(U))$	-0.302
	$Kurt(\Psi(U))$	2.015
Pareto	$E(\Psi(U))$	0.18
	$V(\Psi(U))$	0.068
	$Skew(\Psi(U))$	1.318
	$Kurt(\Psi(U))$	3.42

TABLE 3.7 – Moments et paramètres de forme de la distribution pour chaque modèle

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_{\mu}\xi \quad \text{avec} \quad \xi \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{N-1} \\ \mu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_{N-1} \\ \bar{\mu}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{\mu_1}\xi_1 \\ \sigma_{\mu_2}\xi_2 \\ \vdots \\ \sigma_{\mu_{N-1}}\xi_{N-1} \\ \sigma_{\mu_N}\xi_N \end{pmatrix}$$

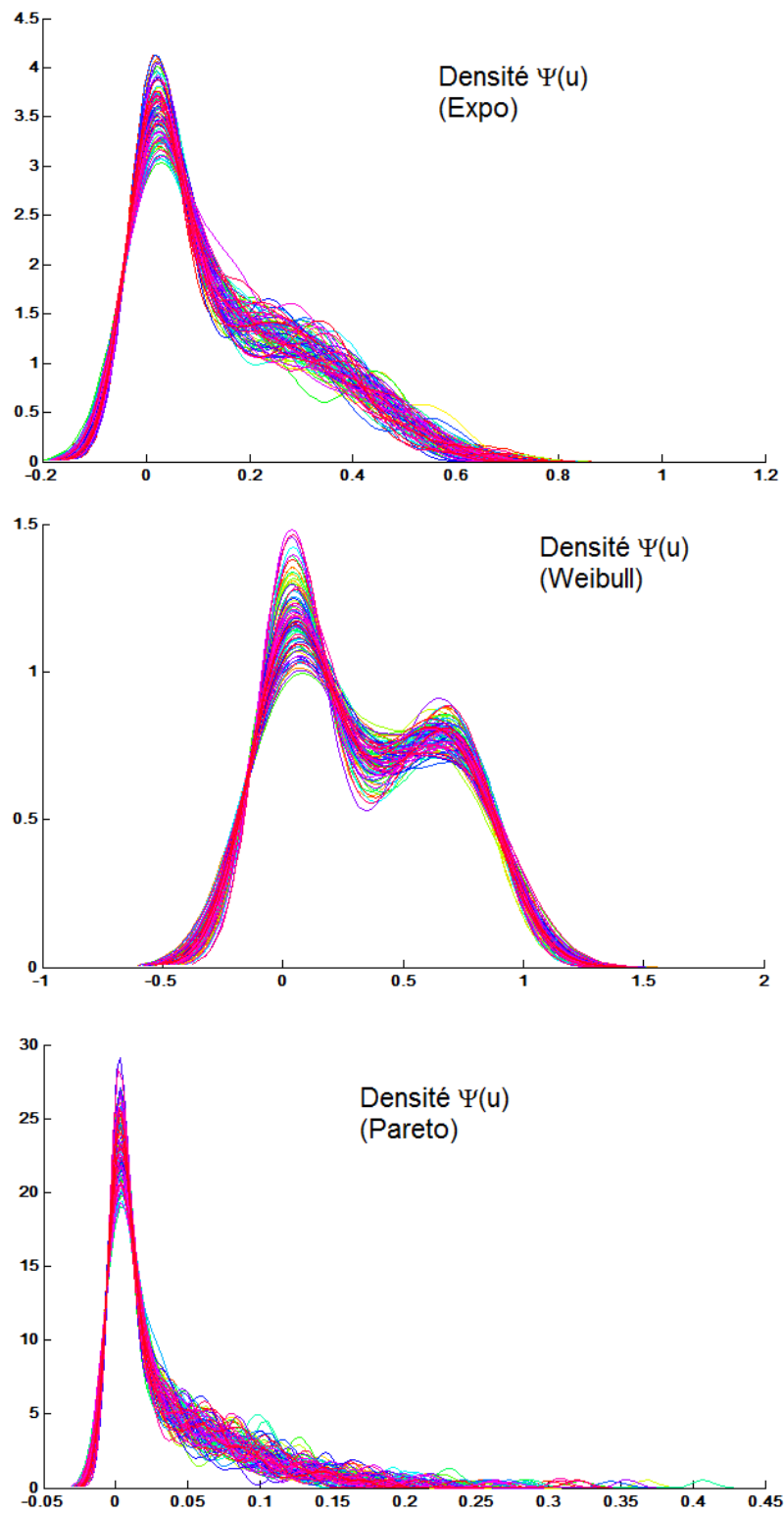


FIGURE 3.12 – Densité de probabilité de $\Psi(u)$ avec $\bar{\mu} \in [0.01, 1]$, et $\sigma_{\mu} = \frac{\bar{\mu}}{10}$.

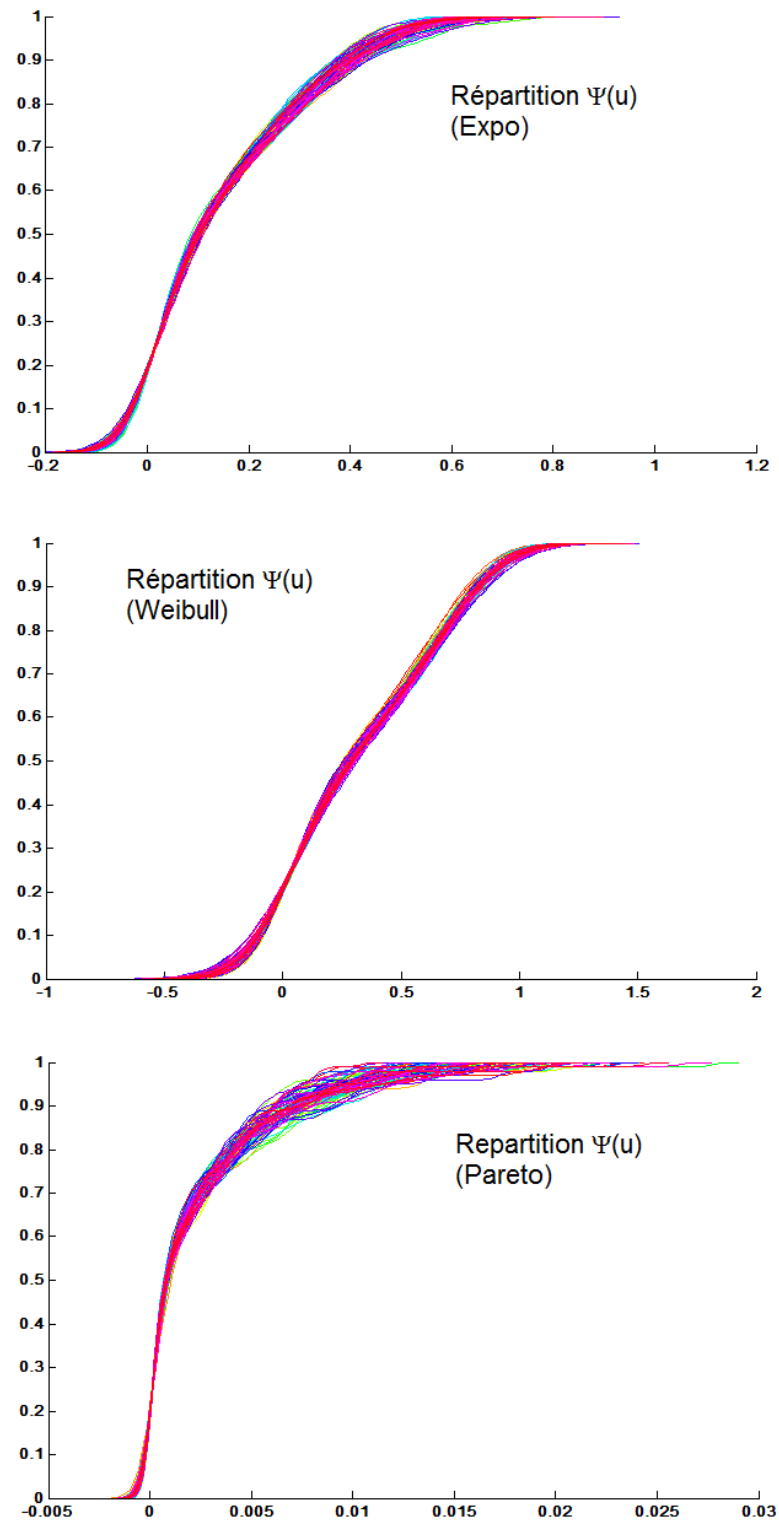


FIGURE 3.13 – Fonction de répartition de $\Psi(u)$ avec $\bar{\mu} \in [0.01, 1]$, et $\sigma_{\mu} = \frac{\bar{\mu}}{10}$.

L'analyse de sensibilité des paramètres d'entrée sur les différentes formules de la probabilité de ruine nous a permis de différencier les paramètres d'entrée à l'aide de leur influence sur la sortie de la probabilité. La figure (3.14), illustre la moyenne de la probabilité de ruine $E(\Psi(U))$ sur la variation du paramètre λ et

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_{\mu}\xi_{\mu} \quad \text{avec} \quad \xi_{\mu} \rightarrow N(0, 1)$$

On note :

- $I_L = [0, 5]$ intervalle de variation de λ dans le modèle de Lundberg P/P.
- $I_W = [0, 5]$ intervalle de variation de λ dans le modèle d'approximation à queue lourde (Weibull).
- $I_P = [0, 5]$ intervalle de variation de λ dans le modèle d'approximation à queue lourde (Pareto).

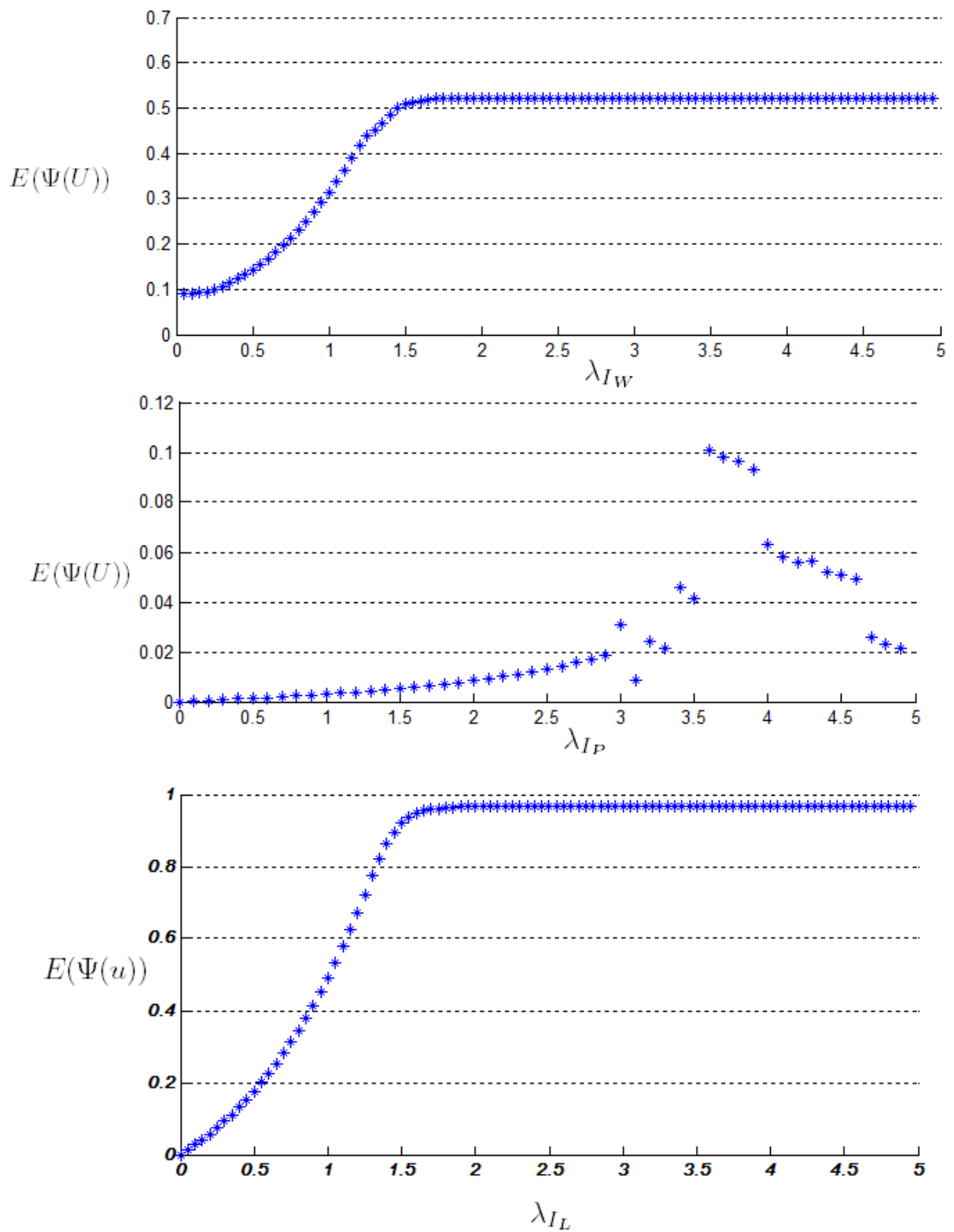


FIGURE 3.14 – Moyenne $E(\Psi(U))$ pour $\lambda \in \{I_L, I_W, I_P\}$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les méthodes d'analyse de sensibilité sont de plus en plus utilisées de nos jours dans tout processus de modélisation, que ce soit pour améliorer la prédiction du modèle, pour alléger le modèle ou encore pour mieux comprendre le phénomène étudié en analysant les différentes interactions entre variables. Dans ce contexte, la probabilité de ruine qui est la mesure de risque la plus importante pour la prise de décisions au sein d'une compagnie d'assurance, qui rarement possède des formules explicites pratiquement exploitables, nous mesurons la sensibilité de la sortie de cette probabilité sur la variation de ses paramètres d'entrée.

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode de l'analyse de sensibilité globale dans quelques modèles de risque. En premier lieu, nous avons effectué une petite synthèse sur quelques approches utilisées dans l'évaluation de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique (Cramer-Lundberg). En second lieu, nous avons détaillé l'une des classes des méthodes de l'analyse de sensibilité qui nécessite aucune hypothèse sur le modèle (indices définis par décomposition de la variance, introduits par Sobol et Saltelli) [15]. Et l'une des méthodes d'estimation des indices que nous avons choisie est celle de Sobol, basée sur l'estimation d'intégrales par simulations de Monte-Carlo, suivit par une courte étude bibliographique sur l'incertitude de modèle.

Enfin, nous avons élaboré un algorithme en se basant sur la méthode de Sobol afin de quantifier cette sensibilité.

Une fois l'algorithme construit, nous sommes passés à son implémentation sous l'environ-

nement de calcul MATLAB. Les résultats obtenus lors de la simulation nous permettent de bien caractériser la probabilité de ruine.

Ce mémoire de recherche reste une opportunité pour aspirer à d'autres problématiques.

En effet, ce dernier représente une base intéressante pour d'éventuelles perspectives prometteuses telles que :

- Elargir l'analyse de sensibilité pour d'autres modèles de risque qui cernent mieux la réalité, en tenant compte des différents comportements des paramètres qui gouvernent le modèle, comme la variation de la prime et la dépendance entre les risques.
- Elargissement de la prise en considération de l'incertitude cité en (2.3), sur le modèle de risque classique.
- Dans une compagnie d'assurance, les gestionnaires font des bilans à des dates périodiques fixées d'avance, plus au moins rapprochées et seules les évaluations réalisées à l'occasion de l'un de ces bilans seront retournées. Pour cette raison, l'étude des modèles de risque à temps discret est plus susceptible de mieux cerner la réalité du risque des compagnies d'assurances.

Dieu a créé le monde mathématiquement.

- **Albert Einstein** -

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Cramér. *"On the mathematical theory of risk"*. Skandia jubilee volume, Stockholm, 1930.
- [2] W. Hoeffding. *"A class of statistics with asymptotically normal distributions"*. Annals of Mathematical Statistics, 19, (1948) 293-325.
- [3] U. Gerber. *"An introduction to mathematical risk theory"*. Monograph, University of Philadelphia, 1979.
- [4] Panjer. H. H, *"Recursive evaluation of a family of compound distribution"*. Astin Bulletin 22 (1981) 22-26.
- [5] L. Newton, J. Bowers, C. Hickman, C. J. Cecil, and A. Donald. *"Actuarial Mathematics"*. Society of Actuaries, Schaumburg, (1981) 22-26.
- [6] J. L. Teugels. *"Estimation of the ruin probability, insurance"*. Mathematics and Economics 14 (1982) 169-175.
- [7] J. L. Teugels. *"Estimation of the ruin probability, insurance"*. Mathematics and Economics 14 (1982) 169-175.
- [8] B. Silvermann. *"Density estimation for statistic and data analysis"*. Chapman and Hall, london 1986.
- [9] F. Dufresne, and U. Gerber. *"The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. Insurance"*. Mathematics and Economics 101 (1988) 193-199.

-
- [10] T. Turanyi. *"Sensitivity analysis of complex kinetic system, tools and applications"*. Journal of Mathematical Chemistry, 5. (1990) 203-248.
- [11] J. Grandell. *"Aspect of risk theory"*. Springer series in statistics, Springer-Verlag, 1991.
- [12] S. Asmussen, and T. Rolski. *"Computational methods in risk theory, A matrix algorithmic approach, Insurance"*. Mathematics and Economics 10 (1991) 259-274.
- [13] F. Dufresne, U. Gerber, and W. Shiu. *"Risk theory with the Gamma process"*. Astin Bulletin 31 (1991) 177-192.
- [14] C. M. D. Dickson, and Howard Waters. R. *"Gamma processes and finite time survival probabilities"*. Astin Bulletin 61 (1993) 259-272.
- [15] I. M. Sobol. *"Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models"*. Mathematical Modelling and Computational Experiments, 1, 407-414, 1993.
- [16] L. R. Abramson. *"Model uncertainty form a regulatory point of view"*. In Workshop, Model Uncertainty : its Characterization and Qualification, Anapolis (Maryland, USA), 1993.
- [17] B. Efron, and R. J. Tibshirani. *An introduction to the bootstrap*. Chapman & Hall/CRC, 1993.
- [18] F. Lundberg. *"Approximerad framställning"*. Almqvist Wiksell, 1993.
- [19] J. Bertoin, R. Doney. *"Cramér's estimate for Lévy processes"*. Stat. Probab. Lett 21 (1994) 363-365.
- [20] O. Hössjer, et Ruppert. *"Taylor series approximations of transformation kernel density estimators, nonparametric statistics, Taylor et Francis group 10 (1994) 165-177"*.
- [21] F. Devylder, and E. Marceau, *"Explicite analytic ruin probabilities for bounded claims, Insurance"*. Mathematics and Economics 18 (1995) 79-105.
- [22] F. Devylder, *"Advanced risk theory. A Self-Contained Introduction"*. Editions de l'Université de Bruxelles, 1996.
- [23] Dorigo et al. *"The ant system : Optimization by a colony of cooperating agents"*. IEEE, 29-41, 1996.

-
- [24] F. Devylder. *Advanced risk theory. A self-constrained introduction*. Editions de l'Université de Bruxelles, 1996.
- [25] X. S. lin. *Tail of compound distribution and excess time*. Journal of applied probability 4 (1996) 184-195.
- [26] T. Homma, and A. Saltelli. *Importance measures in global sensitivity analysis of non linear models*. Reliability Engineering and System Safety, 52, (1996) 1-17.
- [27] U. Pulkkinen, and T. Huovinen. Model uncertainty in Safety assessment. Technical Report STUKYTO-TR 95, Finnish Center for Radiation and Nuclear Safety, 1996.
- [28] C. Coccozza. *Processus stochastique et fiabilité des systemes*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1997.
- [29] F. Devylder, M. Goovaerts, and E. Marceau. *The bi-atomic minimal solution of schmitter's problem Insurance*. Mathematics and Economics 70 (1997) 59-78.
- [30] G. E. Willmot, and X. S. LIN. *Simplified bounds on the tails compound distribution*. Journal of Applied Probability, 15 (1997) 127-133.
- [31] V. Kalashnikov. *Geometric sums : bounds for rare events with applications*. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group. 1997.
- [32] S. A. Klugman, H. H. Panjer, and G. E. Willmot. *Loss models : from data to decisions*. Wiley, New York, 1998.
- [33] V. Schmidt, V. Rolski, T. J. Teugels, and H. Schmidli. *Stochastic processes for Insurance and finance*. Wiley, 1999.
- [34] J. I. Schiff. *The Laplace transform : Theory and applications*. Springer-Verlag, New York, Inc, 1999.
- [35] K. I. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [36] A. Saltelli, K. Chan, and E. M. Scott. *Sensitivity analysis*. Wiley, 2000.
- [37] S. Asmussen. *Ruin probabilities*. World Scientific, Singapore, 2000.
- [38] C. Bielza, S. Rios-insua, M. Gomez, and J. A. Fernandez del Pozo. Sensitivity analysis in ictheo. *In international symposium on sensitivity analysis of model output*. Madrid (Espagne), 2001.

- [39] J. Cai. "Ruin probabilities under dependent rates of interest". Journal of Applied Probability 39 (2002) 312-323.
- [40] W. L. Oberkampf. S. M. Deland. B. M. Rutherford. K. V. Diegert, and K. F. Alvin. "Error uncertainty in modeling and simulation". Reliability Engineering and System Safety, 2002.
- [41] R. W. Walters, and L. Huyse. *Uncertainty analysis for fluid mechanics with applications*. Technical Report NASA/CR-2002-211449 ICASE Report No. 2002-1, NASA, 2002.
- [42] A. Stuart. H. H. Panjer. and E. Gordon. "Loss models, Wiley series in probability and statistics". Wiley-Interscience, 2004.
- [43] A. E. Kyprianou. "Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications.". Springer, 2008.
- [44] A. Tsybakov. "Introduction to nonparametric estimation". Springer Science and Business Media, New York 2009.
- [45] E. Vatamidou. M. Vlasiou. *On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models*. Scandinavian Actuarial Journal. 2012.
- [46] R. Scheldon. "Simulation, Monte Carlo".
- [47] Olvera-Cravioto, M. J. Blanchet. and P. Glynn. *On the transition from heavy traffic to heavy tail for the M/G/1 queue : the regularly varying case*. Annals of applied Probability 21 (2), 645-668.