

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA DE BEJAIA



Faculté de technologie

Département de Génie Civil

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER EN GENIE CIVIL

Option : Structure

L'INTITULE DU MEMOIRE

**UTILISATION DES ELEMENTS ABSORBANTS EN ELASTODYNAMIQUE DES DOMAINES
SEMI-INFINIS**

Préparé par :

- M^{elle} BENSID Tinhinane
- M^{elle} HALFAOUI Dyhia

Encadré par :

Mr. BOUROUBA Abdelhalim

Members de jury:

-Mr ATTAL

-Mr KHEFFACHE

Année universitembraire : 2019/2020

Dédicaces

Je dédie ce mémoire:

A ma mère et mon père, ainsi mes frères et sœur, « Sissou, Djigou et Adem » pour leur amour, leurs conseils, leurs présence ainsi que leurs soutiens inconditionnel, à la fois moral et économique, qui m'a permis de réaliser mon projet d'étude et par conséquent ce mémoire. Sans oublier mes grands-parents « DJEDI, yemma Khlidja, yemma Djidji, yemma Adouda, djedi Baali ». Ainsi mes très chers tantes « Karima, Baya, Nadia et Bahia », et enfin mes chers cousins (es) « Tinhinane, Sonia, Tyla, Hettou, Taous, Boho, Tihouche, siham, Bago et Albi ».

Et a toute ma grande famille.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes amis (es) « Assirem, Soussou, Massissou et Anis » qui m'ont apportés leur soutien moral et intellectuel tout au long de mon parcours et qui sont toujours présent à tout moment.

Et enfin, à ma binôme et amie Tinhinane, que malgré les circonstances de cette année on a pu réaliser ce travail.

Dyhia

Je dédie ce modeste travail :

Aux deux êtres humains qui sont les plus chères dans ma vie

*A Ma lumière, celle qui m'a donnée la vie, l'amour, la tendresse et le courage, toi
chère Maman **NADIA**.*

*Celui qui m'a soutenu et guidé afin que je puisse arriver à cette étape de ma vie,
toi cher père **HOCINE**.*

*A Mes chers frères: **LYAMINE, KAMEL, ABDENOUR**,*

*Ma chère sœur: **SABRINA**.*

*A ma chère grande mère : **NOUARA***

A Toute ma famille.

*A Ma chère binôme **DYHIA**.*

*A mes chères amies : **HAFIDA, BASMA, KAMIR, AMEL, MELISSA,**
KAMILIA, LINDA.*

A Tous ceux que j'aime.

A Tous ceux qui m'aiment.

A Tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Tinhinane

Remerciements

Nous remercions le bon Dieu le tout puissant de nous avoir donné la force nécessaire et la patience qui nous a permis de mener à bien ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et nos remerciements les plus sincères à notre enseignant et promoteur M^rBOUROUBA Abdelhalim, pour sa sympathie, sa disponibilité, ses conseils et son aide durent tout au long de ce travail.

Nous remercions également les membres de jury d'avoir consacré de leur temps pour l'évaluation de notre modeste travail.

Toutes nos reconnaissances sont destinées à tous nos enseignants, tout au long de notre carrière.

Enfin, nos chaleureux remerciements s'adressent à nos familles et amis (es) pour leurs soutiens et patience.

Table des matières

Table des matières	i
Liste des tableaux	iii
Liste des figures.....	iv
Introduction générale.....	1
Chapitre 1	
Recherche Bibliographique sur les techniques de modélisations des domaines non bornés	3
1.1 Introduction	3
1.2 Eléments infinis	3
1.2.1 Eléments infinis classiques.....	4
1.2.2 Eléments infinis périodiques	7
1.3 Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML).....	8
1.3.1 PML unidimensionnel en élastodynamique	8
1.3.2 PML bi et tridimensionnels en élastodynamique	10
1.4 Méthode des éléments de frontières (BEM)	12
1.4.1 Principe de BEM en élastodynamique	13
1.5 Conclusion	15
Chapitre 2	
Eléments absorbants en élastodynamique	16
2.1 Introduction	16
2.2 Eléments absorbants par des forces d'amortissements.....	16
2.3 Eléments absorbants par des forces raideur [13].....	19
2.3.1 Domaine hémisphérique.....	20
2.3.2 Domaine cylindrique	23
2.3.3 Domaine parallélépipédique rectangulaire.....	27
2.3.4 Cas d'un plan semi-infini.....	31

2.4	Conclusion	32
Chapitre 3		
	Modélisation et discrétisation par éléments finis	33
3.1	Introduction	33
3.2	Formulation mathématique du problème.....	33
3.3	Discrétisation du domaine par éléments finis.....	38
3.4	Conclusion	40
Chapitre 4		
	Applications	41
4.1	Introduction	41
4.2	Présentation du modèle.....	41
4.3	Sous un chargement statique	42
4.4	Sous chargement dynamique	43
4.5	Conclusion	52
	Conclusion générale	53
	Bibliographie	54

Liste des tableaux

Tableau 1-1:Fonction fi à décroissance exponentielle et puissance.....	5
Tableau 1-2: Fonction de transformation géométrique d'un élément infini Q4.....	6

Liste des figures

Figure 1- 1-1 : Elément infini classique Q4 dans la direction x selon l’approche directe – (a) élément réel ; (b) élément de référence.	5
Figure 1-2:Transformation géométrique de Zienkiewicz d’un élément infini unidimensionnel.	6
Figure 1-3:transformation de géométrique- élément infini Q4 dans la direction horizontale : (a) élément réel ; (b) élément de référence.....	7
Figure 1-4Problème unidimensionnel– (a) Barre semi-infinie ; (b) barre finie avec couche absorbante parfaitement adaptée (PML).	9
Figure 2-1:Equilibre d'un domaine élémentaire sous l'effet de contrainte axiale.	16
Figure 2-2:Problème d’un plan semi infini (a) Plan semi infini ; (b) : Plan fini avec des éléments absorbants.....	19
Figure 3-1:Plan semi infini.....	33
Figure 4-1: Maillage utilisé.....	42
Figure 4-2: Problème de Flamant.....	42
Figure 4-3:Géométrie et chargement.....	43
Figure 4-4:Déplacements verticaux sous charge triangulaire	44
Figure 4-5:Déplacements verticaux sous charge constante.....	45
Figure 4-6:Déplacements verticaux sous charge sinusoïdale $\omega=5\text{rad/s}$	46

Figure 4-7: Géométrie et chargement concentré	47
Figure 4-8:Déplacements verticaux sous charge triangulaire	48
Figure 4-9 :Déplacements verticaux sous charge constante.....	50
Figure 4-10:Déplacements verticaux sous charge sinusoïdale $\omega=5\text{rad/s}$	51

Introduction générale

Dans de nombreux problèmes d'ingénierie, particulièrement en Génie civil, les ingénieurs sont confrontés à des problèmes faisant intervenir des domaines non bornés, notamment lorsqu'il s'agit de l'investigation des effets d'interaction sols-structures ou d'interaction fluides-structures. De plus, dans certaines situations, le domaine d'étude présente des irrégularités géométriques ou des matériaux à comportement complexes, alors, le recours à la méthode des éléments finis est indispensable.

Par ailleurs, la méthode des éléments finis est mal adaptée à la discrétisation des domaines non bornés et induit de grandes difficultés sur le positionnement de la limite de troncature ainsi que la condition à imposer sur cette dernière pour prendre en compte le caractère ouvert du domaine d'étude [17,12,13,29,30,39,43]. Pour traiter ce genre de situations, la technique classique consiste en la discrétisation d'une grande partie du domaine, mais en conséquence, cela conduit à des tailles de maillages très grandes et à des calculs très coûteux termes de temps de calcul et de mémoire de stockage [17,12,13,43].

De plus, lorsqu'il s'agit du phénomène de propagation d'ondes, et quand une onde heurtant une limite de troncature, cette dernière sera réfléchi, ce qui induit des erreurs dans les calculs et de fausser complètement la solution recherchée [24,29]. Donc, il est nécessaire d'introduire d'une manière artificielle des conditions convenables sur la limite de troncature, de façon à tenir compte de la condition de radiation à l'infini. Ces conditions permettent ainsi d'absorber l'énergie des ondes sortant du domaine d'étude et d'annuler toutes réflexions parasites provoquées par la troncature du domaine [29,30].

D'autres parts, on trouve dans la littérature plusieurs travaux de recherche, qui ont été effectués, en proposant de divers techniques et approches développées dans le but d'améliorer les modèles d'éléments finis traitant, ce genre de situations. Parmi ces approches, on distingue :

- Les éléments infini [1,8,18,34,36,38,44].
- Technique de couplage éléments finis–éléments de frontières [12,20,30,39].
- Éléments absorbants [13,22,24,29,31,35,39,41].
- Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) [4,6,21,25].
- Utiliser des procédures purement numériques telles que celles proposées par Wolf et Song [20,42,43].

Dans ce travail, on s'intéresse à l'utilisation des éléments absorbants ou frontières absorbantes en élastodynamique des domaines semi-infinis. Ces éléments consistent à imposer sur la limite de troncature du domaine, des forces de raideurs et des forces d'amortissement comme condition de radiation. Le logiciel de calcul en éléments finis utilisé dans ce travail est le SAP 2000 version 19. Afin de tester la performance de ces éléments, des applications en déformations planes ont été effectuées sous différents chargements à savoir sinusoïdale, triangulaire et constant. Ainsi, l'influence de la taille du domaine sur la convergence de la solution a été examinée.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres distincts. Dans le premier, on a donné un aperçu sur les différentes techniques de modélisation des domaines non bornés à savoir les éléments infinis, les couches absorbantes parfaitement adaptées PML et les éléments de frontières. Dans le deuxième chapitre, on a exposé le concept d'application des éléments absorbants par des forces de raideurs et des forces d'amortissement. Le troisième chapitre est consacré à la formulation en éléments finis et à l'insertion des éléments absorbants dans la discrétisation spatiale des domaines semi-infinis en élastodynamique. Le quatrième chapitre est consacré aux applications, réalisées en déformations planes, et à l'étude de la performance des éléments absorbants, sur la solution, sous l'effet des différents chargements à savoir sinusoïdale, triangulaire et constant.

Chapitre 1

Recherche Bibliographique sur les techniques de modélisations des domaines non bornés

1.1 Introduction

Dans le but d'améliorer les modèles d'éléments finis traitant des domaines infinis ou semi-infinis, plusieurs techniques et approches ont été développées et proposées comme conditions de radiations à l'infini. Dans ce chapitre, nous allons donner un aperçu sur trois méthodes de prise en compte du caractère ouvert du domaine d'étude. La première technique est celle de l'utilisation des éléments infinis pour représenter le champ lointain en favorisant une décroissance artificielle du champ de variables par des fonctions d'interpolations décroissantes ou par des transformations géométriques ascendantes. La deuxième technique consiste en l'insertion d'une couche absorbante parfaitement adaptée (PML) de sorte que les ondes puissent entrer dans cette couche sans être réfléchies. La troisième méthode est l'utilisation de la technique de couplage entre les éléments finis et les éléments de frontières où la de radiation est prise en compte automatiquement par la solution fondamentale des équations intégrales de frontières.

1.2 Eléments infinis

La nécessité de traiter des domaines non bornés et le succès de la méthode des éléments finis ont conduit au développement des éléments infinis. Les premiers éléments infinis ont fait l'objet d'une thèse doctorat d'Ungless et Anderson en 1973 où leur travail n'a été publiée qu'en 1977 cité par [8, 27]. Ainsi, le premier travail publié sur les éléments infinis est l'article de Zienkiewicz et Bettess, paru en 1975 cité par [8, 27]. L'idée introduite dans l'élément d'Ungless et Anderson était l'utilisation d'une fonction de forme, qui varie comme $1/(1+r)$ dans la direction radiale r . Ceci est suffisamment simple pour manier la plus part des opérations analytiquement. L'élément était tridimensionnel à base triangulaire, définie dans le plan local xy et s'étend à partir de cette base à l'infini dans la direction z .

Les matrices élémentaires étaient calculées en utilisant l'intégration analytique dans le plan xy et l'intégration numérique par la règle des trapèzes dans la direction z après une transformation géométrique [8,2,34,11].

Une autre origine de la formulation des éléments infinis, totalement différente est décrite par Bettess. Le domaine de l'élément est étendu à l'infini en utilisant n'importe quel élément fini comme base. Les fonctions de forme sont ensuite multipliées par des fonctions de décroissance appropriées au problème traité. Une décroissance de type exponentielle a été d'abord utilisée et les matrices élémentaires obtenues comprenaient des termes d'intégrales de polynômes multipliés par e^{-r} qui sont simplement évaluées analytiquement [8].

Ces deux origines de formulation des éléments infinis ont constitué les deux lignes principales du développement de nouveaux types d'éléments. Ce qui a conduit à la classification des éléments infinis en deux approches [8,27]: l'approche directe par des fonctions de forme décroissantes et l'approche inverse (indirecte) par des fonctions de transformations géométriques.

Par ailleurs, les éléments infinis classiques ont été développés initialement pour traiter des problèmes de potentiel en domaines ouverts, gouvernés par l'équation de Laplace, et les problèmes d'élastostatique en milieux infinis et semi-infinis. Comme ces éléments sont mal adaptés aux problèmes faisant intervenir la propagation d'ondes, Bettess et Zienkiewicz ont développé de nouveaux éléments, appelés "éléments infinis périodiques" traitant l'équation d'Helmholtz et l'équation d'onde [8, 27,46]. Ainsi, une autre classification peut être utilisée à savoir les éléments infinis classiques et les éléments infinis périodiques.

1.2.1 Eléments infinis classiques

L'idée dans cette approche consiste en l'extension du domaine de définition de l'élément fini naturel et l'élément de référence jusqu'à l'infini dans la direction considérée. Ainsi, la fonction de forme complète V_i d'un élément infini, associée au nœud i , est la multiplication de la fonction de forme N_i d'un élément fini ordinaire par une fonction f_i qui décroît asymptotiquement vers zéro à l'infini. De plus, la fonction f_i doit être égale à l'unité au nœud considéré i :

$$V_i(x, y) = N_i(x, y) f_i(x, y) \quad (1.1)$$

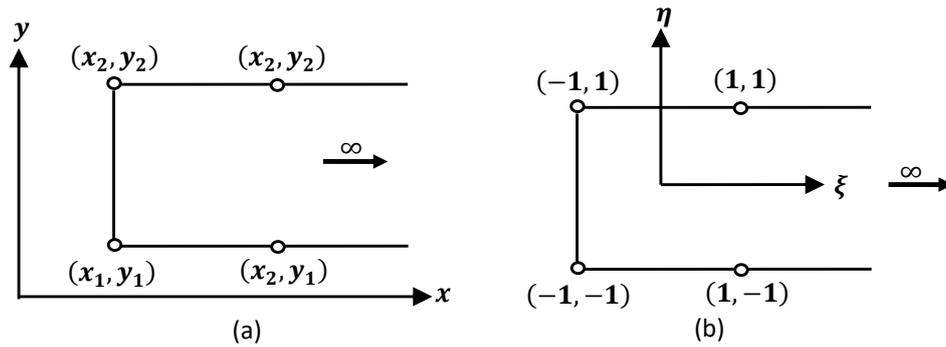


Figure 1-1-1 : Elément infini classique Q4 dans la direction x selon l'approche directe – (a) élément réel ; (b) élément de référence.

Dans le tableau suivant, on présente les fonctions à décroissance exponentielle et en puissance.

Tableau 1-1: Fonction f_i à décroissance exponentielle et puissance

Type de décroissance	Décroissance dans le sens x	Décroissance dans les deux sens x et y
Exponentielle	$f_i(x) = e^{\frac{(x_i-x)}{L}}$	$f_i(x, y) = e^{\frac{(x_i-x+y_i-y)}{L}}$
Puissance	$f_i(x) = \left[\frac{x_i - x_0}{x - x_0} \right]^n$	$f_i(x, y) = \left[\frac{x_i - x_0}{x - x_0} \right]^n \left[\frac{y_i - y_0}{y - y_0} \right]^m$

Dans le tableau 1.1, l'introduction de x_i et/ou y_i , permet d'assurer la valeur unité de f_i au niveau du nœud i auquel est associée. Pour les paramètres L et n et m permettant de contrôler la décroissance de f_i . Pour x_0 et/ou y_0 , est un point quelconque appelé pôle. Pour éviter la singularité, ce point doit être en dehors de l'élément dans le sens opposé à celle s'étendant à l'infini.

Pour insérer les éléments infinis classiques, avec des fonctions de forme décroissantes (approche directe), dans un programme de calcul en éléments finis, les modifications nécessaires consistent essentiellement à l'intégration numérique et à l'évaluation de nouvelles fonctions de forme et de leurs dérivées. Les points et les poids d'intégration numérique sont calculés selon la méthode de Gauss-Laguerre, puis modifiés pour l'intervalle $[-1, +\infty[$. La matrice Jacobienne ainsi que le maillage d'éléments finis initial du domaine restent inchangés.

Par ailleurs, il existe une autre formulation des éléments infinis classiques dite approche inverse. Dans cette approche, le concept est de considérer un élément fini de référence avec un choix des fonctions de transformations géométriques ascendantes de telle sorte à avoir une

singularité aux nœuds limites. Cette singularité permet ainsi de projeter les nœuds physiques de l'élément réel correspondants à l'infini.

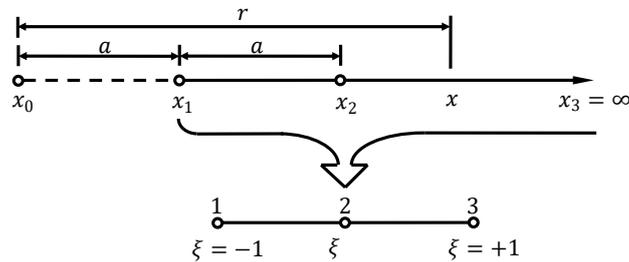


Figure 1-2: Transformation géométrique de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel.

Une telle transformation pour un élément linéique peut s'exprimer par :

$$x = R_1(\xi) x_1 + R_2(\xi) x_2 = \left[\frac{-2\xi}{1-\xi} \right] x_1 + \left[\frac{1+\xi}{1-\xi} \right] x_2 \quad (1.2)$$

La transformation géométrique (1.2) permet d'avoir $x = x_1$ quand $\xi = -1$, $x = x_2$ quand $\xi = 0$ et $x = +\infty$ quand $\xi = +1$.

Pour un élément infini Q4 dans la direction horizontale (fig.1.3), les fonctions de transformations géométriques sont données dans le tableau 1.2 suivant :

Tableau 1-2: Fonction de transformation géométrique d'un élément infini Q4.

nœud	1	2	3	4
ξ	-1	+1	+1	-1
η	-1	-1	+1	+1
R	$(1-\eta)/(1-\xi)$	-	-	$(1+\eta)/(1-\xi)$

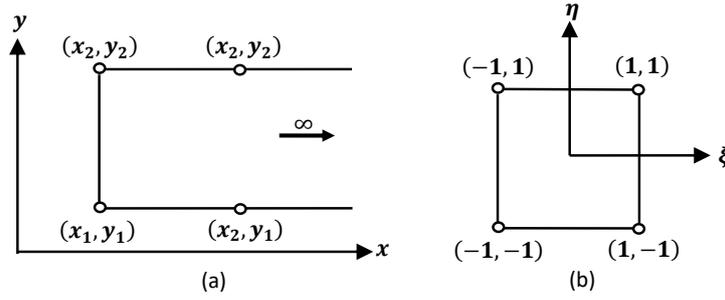


Figure 1-3: transformation de géométrie- élément infini Q4 dans la direction horizontale : (a) élément réel ; (b) élément de référence

L'avantage de cette approche est dans l'utilisation directe des polynômes ordinaires d'élément finis avec l'intégration numérique standard de Gauss-Legendre. Le seul changement requis pour modifier un programme de calcul en éléments finis, dans le but d'intégrer des éléments infinis, consiste en un nouveau calcul de la matrice Jacobienne avec les dérivées des fonctions de transformation géométrique R_i au lieu de celles des fonctions de forme N_i .

1.2.2 Éléments infinis périodiques

Comme on l'a signalé précédemment, les éléments infinis classiques sont mal adaptés aux problèmes faisant intervenir la propagation des ondes. Ceci a conduit Bettess et Zienkiewicz a développé les éléments infinis périodiques traitant les équations d'Helmholtz et d'onde [8, 27,46]. L'idée est de multiplier les fonctions de forme V_j des éléments infinis de l'approche directe par e^{ikr} :

$$M_j(x, y) = V_j(x, y) e^{ikr} \quad (1.3)$$

Avec $i = \sqrt{-1}$, V_j la fonction de forme de élément infini de l'approche directe de l'expression (1.1). Il vient ainsi :

$$M_j(x, y) = N_j(x, y) f_j(x, y) e^{ikr} \quad (1.3)$$

Avec k le nombre d'ondes fonction de la longueur d'onde λ et qui s'exprime par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.4)$$

r est la distance radiale entre le nœud (x_1, y_1) et le nœud considéré j :

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2} \quad (1.5)$$

Les fonctions de formes des éléments infinis périodiques contiennent des termes faisant intervenir la propagation d'ondes. Et pour le calcul des matrices élémentaires de ces éléments, on doit faire appel à l'intégration numérique de Newton-Cotes au lieu de celle de Gauss-Laguerre [8].

1.3 Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)

La méthode des couches absorbantes parfaitement adaptées, dont leur nom en anglais *Perfectly Matched Layers (PML)*, est une alternative à d'autres techniques de prise en compte des conditions de radiations des domaines non bornés. Ce sont des couches, à épaisseur finie, qui entourent la frontière du domaine d'étude afin de forcer les ondes à s'amortir en parcourant une distance donnée dans le domaine absorbant [45]. Les PML jouent ainsi le rôle d'une condition aux limites absorbantes. L'idée est de remplacer la frontière absorbante par une couche absorbante, de largeur finie, imposée sur la frontière de troncature artificielle du domaine d'étude, et qui possède la propriété d'absorber presque parfaitement toutes les ondes sortant du domaine d'étude sans générer aucune réflexion parasite [4, 6, 14, 16, 21, 32,45]. Le concept de PML a été introduit pour la première fois par Bérenger en 1994 pour résoudre les équations de Maxwell en électromagnétique cité par [4, 6, 16]. Leurs premières utilisations en élastodynamique ont été dans les travaux Hatings et ses collaborateurs en 1996 cité par [3,14]. Depuis, elles ont été reformulées plusieurs fois pour résoudre d'autres équations d'ondes. Les PML deviennent maintenant une technique abondamment utilisée pour simuler la condition aux limites de radiation des ondes, que ce soit en électromagnétique, en acoustique ou encore en élastodynamique [3]

1.3.1 PML unidimensionnel en élastodynamique

On considère une barre semi-infinie, de forces de volume négligeables, de module d'Young E , de section A et de masse volumique ρ (Fig. 1.4a). Pour résoudre ce problème avec la PML, on tronque la barre à une distance finie L ($\Omega = x \in [0, L]$), ensuite, on introduit à la limite de troncature une couche fictive de longueur finie L_p ($\Omega_{PML} = \tilde{x} \in [L, L + L_p[$). La partie fictive de la barre est la couche absorbante parfaitement adaptée (PML) sur laquelle la variable spatiale \tilde{x} est complexe (Figure 1.4b).

L'équation de mouvement qui régit la partie Ω réelle de la barre est donnée dans le domaine fréquentiel par :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.6)$$

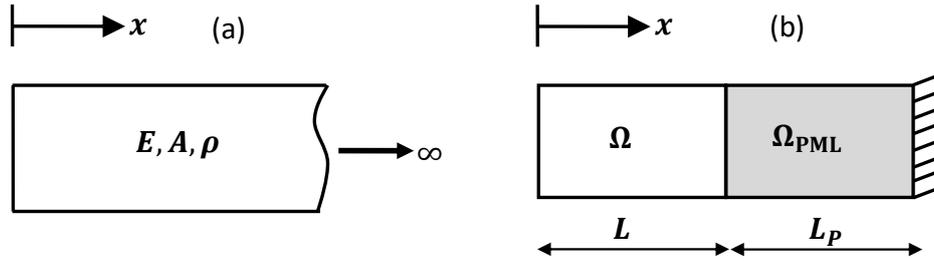


Figure 1-4 Problème unidimensionnel– (a) Barre semi-infinie ; (b) barre finie avec couche absorbante parfaitement adaptée (PML).

Avec \tilde{u} le champ de déplacements dans le domaine des fréquences, $k = \omega\sqrt{\rho/E}$ le nombre et ω la pulsation d'excitation.

Dans la partie fictive Ω_{PML} , le passage de la variable réelle x à la variable complexe \tilde{x} est assuré par le changement de variable suivant [4,6,14,16] :

$$\tilde{x} = \int_0^x \lambda(s) ds \quad (1.7)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\tilde{x}}{dx} = \lambda(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tilde{x}} = \frac{1}{\lambda(x)} \frac{d}{dx} \quad (1.8)$$

Avec λ une fonction continue non nulle permettant l'extension de x en coordonnées complexes \tilde{x} . La fonction λ doit être choisie de tel sort à assurer la compatibilité des déplacements à l'interface entre le domaine réel et le domaine imaginaire de la PML. De plus, un choix judicieux de λ , permet une atténuation spatiale des ondes entrantes dans la PML. Cette seconde caractéristique donne aux PML l'aspect d'un amortisseur géométrique ou un absorbant. Soit :

$$\lambda(x) = 1 - i \frac{1}{k} f(x) \quad (1.9)$$

avec

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds \quad (1.10)$$

Où k le nombre d'onde, f un polynôme de degré m qui doit être choisi judicieusement pour assurer le rôle d'une fonction d'atténuation et qui dépend de la taille du domaine de la PML. Qui est donnée ici par :

$$f(x) = f_0 \left(\frac{x}{L_P} \right)^m \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{f_0 L_P}{(m+1)} \left(\frac{x}{L_P} \right)^{m+1} \quad (1.11)$$

Et $f_0 = f(0)$ un paramètre positif permettant de contrôler l'atténuation des ondes. D'après les expressions (1.7) à (1.10), on obtient la variable complexe \tilde{x} :

$$\tilde{x} = x - i \frac{1}{k} F(x) \quad (1.12)$$

Et l'équation (1.6) qui régit la partie fictive de la barre devient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.13)$$

D'après (1.8), on peut écrire (1.13) sous :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{(\lambda(x))^2 \partial x^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.14)$$

Comme on a déterminé tous les paramètres définissant la PML, on effectue la jonction entre le domaine Ω réel de la barre et le domaine imaginaire PML Ω_{PML} avec :

$$\lambda(x) = 1 - i \frac{1}{k} f(x-L) \quad (1.15)$$

Et la variable spatiale \tilde{x} par :

$$\tilde{x} = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, L] \\ x - i \frac{1}{k} F(x-L) & \text{si } x \in [L, L + L_P] \end{cases} \quad (1.16)$$

Et l'équation qui régit les deux domaines Ω et Ω_{PML} :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.17)$$

1.3.2 PML bi et tridimensionnels en élastodynamique

Dans cette section, nous allons généraliser le concept pour les problèmes bi et tridimensionnel. Pour cela, on considère un milieu infini supposé élastique, homogène et isotrope de module d'Yong E , du coefficient de Poison ν et de masse volumique ρ , et dans

lequel les forces de volume sont négligées. L'équilibre des forces dans le domaine des fréquences s'exprime par :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho \tilde{u}_i \quad (1.18)$$

Avec \tilde{u}_i et $\tilde{\sigma}_{ij}$ sont respectivement vecteur des déplacements et le tenseur de contraintes exprimés dans le domaine des fréquences. De plus, on a :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} \\ \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (1.19)$$

Avec C_{ijkl} la matrice d'élasticité et $\tilde{\epsilon}_{kl}$ le tenseur de déformations infinitésimales dans le domaine des fréquences. Pour définir une couche parfaitement adaptée dans le cas bi et tridimensionnel, on procède de la même manière comme dans le cas unidimensionnel. L'extension des coordonnées x_i en coordonnées complexes \tilde{x}_i est donnée par le changement de variable suivant [4, 6, 14,16]:

$$\tilde{x}_j = \int_0^{x_j} \lambda_j(s) ds \quad (1.20)$$

Ce qui donne :

$$\frac{d}{d\tilde{x}_j} = \frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{d}{dx_j} \quad (1.21)$$

Avec la fonction de changement de variables $\lambda_i(x_i)$:

$$\lambda_j(x_j) = 1 - i \frac{f_j(x_j)}{k_s} \quad (1.22)$$

$k_s = \omega \sqrt{\rho 2(1 + \nu)/E}$ est le nombre d'onde de cisaillement S. Les variables complexes \tilde{x}_i sont alors :

$$\tilde{x}_j = x_j - i \frac{F_j(x_j)}{k_s} \quad (1.23)$$

Et

$$F_j(x_j) = \int_0^{x_j} f_j(s) ds \quad (1.24)$$

On tient compte de (1.20) et (1.21), on obtient l'équation d'équilibre des forces pour un milieu absorbant parfaitement adapté PML :

$$\frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\omega^2 \rho \tilde{u}_i \quad (1.25)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} \\ \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda_i(x_i)} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Il est à noter que l'efficacité des couches absorbantes parfaitement adaptées PML dépend de la taille de la couche absorbante L_p et le degré m du polynôme de la fonction d'atténuation f . Plus L_p et m augmentent plus l'amplitude des ondes réfléchies diminue. Ces deux paramètres permettent donc de contrôler la décroissance de l'amplitude des ondes réfléchies en augmentant soit m soit L_p ou bien les deux en même temps.

1.4 Méthode des éléments de frontières (BEM)

La Méthode des éléments de frontières BEM repose sur la discrétisation des équations intégrales de frontières. L'étude de ces dernières a commencé il y a plus d'un siècle, mais le développement de la méthode des éléments de frontières en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des éléments finis. Les premiers travaux ont été proposés durant les années 60 par Rizzo en 1967 qui a exploité la forte analogie entre la théorie du potentiel et celles de l'élasticité, et par Cruse en 1969 qui a fait l'extension de cette méthode aux problèmes tridimensionnels cité par [7,30]. Par la suite, un très grand nombre de recherches ont été suivies sur cette méthode. A l'heure actuelle, la BEM est appliquée dans beaucoup de domaines de la physique et de la mécanique. L'un des points forts de la méthode des éléments de frontières est la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude et cela par un choix judicieux des fonctions élémentaires qui possèdent automatiquement le caractère de la condition de radiation à l'infini. Cité par [7, 30, 28, 10,9].

1.4.1 Principe de BEM en élastodynamique

Nous considérons un domaine matériel Ω , de frontière Γ avec une normale unitaire extérieure n . Le domaine est supposé élastique linéaire, de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ . L'équilibre dynamique problème en domaine fréquentiel est posé mathématiquement sous :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = -\omega^2 \rho u_i & |\Omega & a \\ u_i = u_i^D & |\Gamma_D & b \\ T_i = \sigma_{ij} n_j = T_i^N & |\Gamma_N & c \end{cases} \quad (1.27)$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases} \quad (1.28)$$

Où σ_{ij} le tenseur de contraintes, ε_{kl} le tenseur de déformations et C_{ijkl} le tenseur d'élasticité. u_i^D et T_i^N sont respectivement les conditions aux limites de Dirichlet (déplacement u_i^D) et de Newman (vecteur de contraintes T_i^N) sur les frontières Γ_D et Γ_N .

D'après les références [10,19], la formulation de (1.27a) en équations intégrales de frontières est sous la forme :

$$\alpha(x) u_i(x) + \int_{\Gamma} [h_{ij}(x, \xi, \omega) u_j(\xi) - g_{ij}(x, \xi, \omega) T_j(\xi)] d\Gamma = 0 \quad (1.29)$$

avec $u_i(x)$ la solution (déplacement) au point x sous l'effet d'une source appliquée au point ξ . α un paramètre qui dépend de la position du point x sur lequel on cherche la solution. Pour un problème 2D :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Omega \\ 1 & \text{si } x \in \Omega \\ \frac{\theta}{2\pi} & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.30)$$

avec θ l'angle intérieur, à la position x , de la frontière Γ . L'expression (1.29) peut être écrite sous la forme du système suivant :

$$H_{ij}u_j = G_{ij}T_j \quad (1.31)$$

Avec :

$$H_{ij} = \int_{\Gamma} h_{ij}(x, \xi, \omega) d\Gamma + \frac{\theta}{2\pi} \delta_{ij} \quad ; \quad G_{ij} = \int_{\Gamma} g_{ij}(x, \xi, \omega) d\Gamma \quad (1.32)$$

Avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. L'un des point essentiels de la BEM est de trouver la solution fondamentale de l'expression (1.27a) qui correspond aux déplacement $g_{ij}(x, \xi, \omega)$ et vecteurs de contraintes $h_{ij}(x, \xi, \omega)$, au niveau du point x , sous l'effet de impulsion de Dirac appliquée au point ξ d'un domaine infini. Pour un problème élastodynamique bidimensionnel, cette solution, en domaine fréquentiels, est donnée par [10, 19,50] :

$$\begin{cases} g_{ij}(x, \xi, \omega) = \frac{1}{2\pi\mu} [A\delta_{ij} + Br_{,i}r_{,j}] \\ h_{ij}(x, \xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \left[C \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j}n_i \right) + D \left(r_{,i}n_j - 2r_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + Fr_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + Kr_{,i}n_j \right] \end{cases} \quad (1.33)$$

avec r la distance radiale entre le point source ξ et le point considéré x :

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \quad ; \quad r_{,i} = \frac{x_i - \xi_i}{r} \quad (1.34)$$

et :

$$\begin{aligned} A &= K_0(z_2) + \frac{1}{z_2} \left[K_1(z_2) - \frac{c_s}{c_p} K_1(z_1) \right] \quad ; \quad D = -2 \frac{B}{r} \\ B &= K_2(z_2) - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 K_2(z_1) \quad ; \quad F = -2 \frac{\partial B}{\partial r} \\ C &= \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{B}{r} \quad ; \quad K = \left[\left(\frac{c_p}{c_s} \right)^2 - 2 \right] \left(\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{B}{r} - \frac{\partial B}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

avec $z_1 = i\omega r/c_p$, $z_2 = i\omega r/c_s$ et c_p et c_s sont respectivement la célérité des ondes P et S . K_0 , K_1 et K_2 sont des fonctions modifiées de Bessel du seconde espèce qui sont respectivement d'ordres 0, 1 et 2.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les grandes lignes de trois méthodes de modélisation des domaines non bornés. Concernant les éléments infinis périodiques, le calcul des matrices élémentaires s'effectue soit par l'intégration analytique soit par l'intégration numérique qui exige des techniques très élaborées comme celle de Newton-Cotes. Et la vitesse de décroissance de l'amplitude des ondes peut être contrôlée par le paramètre de décroissance L . Concernant les PML, leur efficacité dépend essentiellement de la taille de la couche absorbante L_p et du degré m du polynôme de la fonction d'atténuation f . Plus L_p et m augmentent plus l'amplitude des ondes réfléchies diminue. Ces deux paramètres permettent donc de contrôler la décroissance de l'amplitude des ondes réfléchies en augmentant soit m soit L_p ou bien les deux en même temps. Concernant l'utilisation des éléments de frontières (BEM), la difficulté réside dans le calcul des solutions fondamentales qui dépendent de plusieurs paramètres à savoir la dimension du problème traité (1D, 2D ou 3D), du type de sollicitations (dynamique ou statique) et la nature des sollicitation (temporel ou fréquentiel).

Chapitre 2

Eléments absorbants en élastodynamique

2.1 Introduction

En élastodynamique des milieux non bornés, la discrétisation spatiale par éléments finis exige la troncature du domaine à une distance finie. Se pose alors le problème de l'introduction d'une frontière artificielle afin de simuler le fait que le domaine de propagation des ondes réel est infini. L'une des méthodes possibles consiste à imposer des forces d'amortissement et des forces de raideur sur la limite artificielle, de sorte à absorber l'énergie des ondes sortantes du domaine d'étude et d'éviter toutes réflexions parasites pouvant compromettre les résultats recherchés. Dans ce chapitre, on exposera d'abord le concept des éléments absorbants issus des forces d'amortissements, ensuite, ceux issus des forces de raideurs.

2.2 Eléments absorbants par des forces d'amortissements

Pour déterminer les conditions de radiation à imposer sur la limite de troncature, on considère une onde plane se propageant dans la direction x . L'équilibre dynamique d'un domaine élémentaire (figure 2.1) sous l'effet d'une force axiale (figure 2.1) est :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

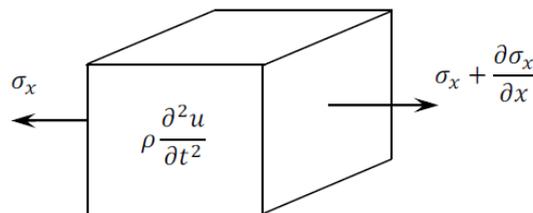


Figure 2-1: Equilibre d'un domaine élémentaire sous l'effet de contrainte axiale.

Où ρ est la masse volumique, u et σ_x sont respectivement le déplacement et la contrainte axiale dans le sens x . D'après la loi de Hooke, on a :

$$\sigma_x = k\varepsilon_x = k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

avec ε_x la déformation axiale dans le sens x , et k le module de compressibilité du matériau fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$k = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.3)$$

En substituant l'expression (2.2) dans (2.1) on obtient l'équation de mouvement en terme de déplacements :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_P^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.4)$$

Où V_P désigne la célérité des ondes de compression P dans le matériau, qui est donné par :

$$V_P = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (2.5)$$

Pour un domaine de dimension fini, l'équation (2.4) admet comme solution :

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (2.6)$$

avec :

$$\begin{cases} u_1(x, t) = U_1 \left[\sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_P} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_P} \right) \right] \\ u_2(x, t) = U_2 \left[\sin \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_P} \right) + \cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_P} \right) \right] \end{cases} \quad (2.7)$$

où $u_1(x, t)$ l'onde propageant dans le sens positif de x et $u_2(x, t)$ l'onde réfléchie. Par contre si le domaine est infini, le système ne permet que les ondes propageant dans le sens positif (vers l'infini) et la contribution des ondes réfléchies est nulle. Dans ce cas, l'équation (2.4) admet comme solution :

$$u(x, t) = u_1(x, t) = U_1 \left[\sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_P} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_P} \right) \right] \quad (2.8)$$

Afin de garantir ce mode de propagation, une contrainte axiale doit être imposée sur la limite de troncature du domaine de tel sorte à annuler les onde réfléchies. D'après l'expression (2.2), la contrainte relatif au déplacement $u_2(x, t)$ de l'onde réfléchie est donnée par :

$$\sigma_x(x, t) = k \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \quad (2.9)$$

avec :

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = \frac{U_2 \omega}{V_P} \left[\cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_P} \right) - \sin \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_P} \right) \right] \quad (2.10)$$

D'autres part, la dérivée de $u_2(x, t)$ par rapport au temps t nous permet d'avoir l'expression de la vitesse relative aux ondes réfléchies :

$$\dot{u}_2(x, t) = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = U_2 \omega \left[\cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_P} \right) - \sin \left(\omega t + \frac{\omega x}{V_P} \right) \right] \quad (2.11)$$

La comparaison entre les expressions (2.10) et (2.11) nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = \frac{\dot{u}_2(x, t)}{V_P} \quad (2.12)$$

On remplace l'expression (2.12) dans (2.9), on obtient l'expression de la contrainte relative à $u_2(x, t)$ en fonction de la vitesse :

$$\sigma(x, t) = \rho V_P \dot{u}_2(x, t) \quad (2.13)$$

Pour annuler la contribution de l'onde réfléchie $u_2(x, t)$, on doit annuler la contrainte relative à cette onde. Pour cela, on impose sure la limite de troncature une contrainte :

$$\sigma(x, t) = -\rho V_P \dot{u}_2(x, t) = -c_P \dot{u}_2(x, t) \quad (2.14)$$

La relation (2.14) est similaire à une force de dissipation (amortissement) $F = C \dot{u}(x, t)$ avec une constante de dissipation $c_P = \rho V_P$ par unité de surface [22,41]. La relation (2.14) satisfait la condition de radiation des ondes de compression P à la limite de troncature du domaine.

On suit le même raisonnement, on obtient de la même manière une expression équivalente pour les ondes de cisaillement S se propageant parallèlement à la limite de troncature du domaine. La constante d'amortissement dans ce cas est donnée par [22,41] :

$$c_S = \rho V_S \quad (2.15)$$

Avec V_S la célérité des ondes de cisaillement S :

$$V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.16)$$

Et G le module de cisaillement du matériau :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.17)$$

et qui satisfait la condition de radiation des ondes de cisaillement S .

La figure suivante montre un plan semi-infini traité par des éléments absorbants issus des forces d'amortissement.

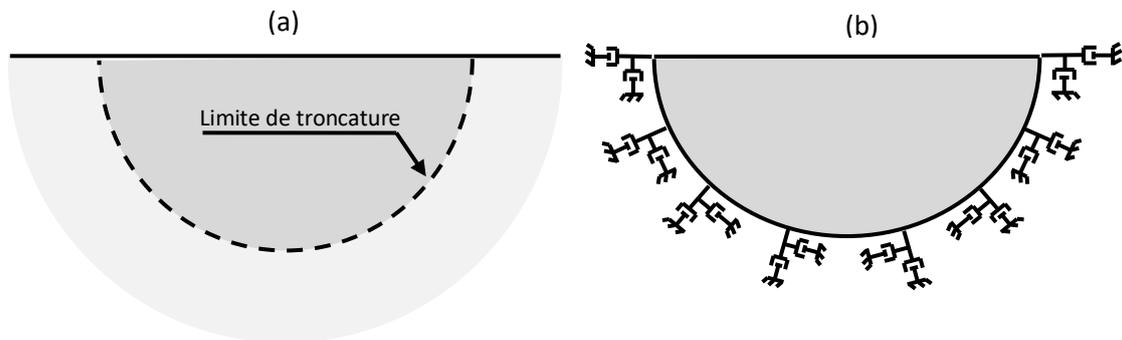


Figure 2-2: Problème d'un plan semi infini (a) Plan semi infini ; (b) : Plan fini avec des éléments absorbants

2.3 Eléments absorbants par des forces raideur [13]

Jusqu'à présent, nous avons vu que la condition de radiation est prise en compte par des forces d'amortissement. Par ailleurs, il est possible d'améliorer ces conditions en introduisant des ressorts en conjonction avec ces amortisseurs à la limite de troncature. Les caractéristiques de ces ressorts dépendent essentiellement des propriétés mécaniques du matériau et de la géométrie du domaine. Afin de déterminer ces caractéristiques pour un

espace semi-infini, il est nécessaire de considérer un domaine fini, de géométrie bien définie. Dans cette section, nous allons considérer trois espaces de géométries différentes, à savoir l'espace hémisphérique, cylindrique et parallélépipédique rectangulaire.

2.3.1 Domaine hémisphérique

Considérons un espace hémisphérique rapporté à un système de coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ z = r \sin(\varphi) \end{cases} ; r \in [0, R] ; \theta \in [0, 2\pi] ; \varphi \in [0, \pi] \quad (2.18)$$

Les contraintes analytiques dans un milieu semi-infini en coordonnées sphériques sont données en fonction des déplacements par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta, \varphi) = -k_{rr} u_r(r, \theta, \varphi) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, \varphi) = -k_{r\theta} u_\theta(r, \theta, \varphi) \\ \sigma_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) = -k_{r\varphi} u_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{cases} \quad (2.19)$$

Où k_{rr} , $k_{r\theta}$ et $k_{r\varphi}$ représentent les constantes de raideur par unité de surface. D'après le système (2.19)

$$\begin{cases} k_{rr} = -\frac{\sigma_{rr}}{u_r} \\ k_{r\theta} = -\frac{\sigma_{r\theta}}{u_\theta} \\ k_{r\varphi} = -\frac{\sigma_{r\varphi}}{u_\varphi} \end{cases} \quad (2.20)$$

Pour déterminer la constante k_{rr} , on considère la solution analytique de Cerruti (1882) d'une force concentrée P_x appliquée à l'origine dans le sens x . La contrainte σ_{rr} et le déplacement u_r provoqués par cette force sont donnés par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{P_x}{\pi r^2} \left[(2 - \nu) - \frac{(1 - 2\nu)}{1 + \sin(\varphi)} \right] \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ u_r = \frac{P_x}{2\pi G r} \left[2(1 - \nu) - \frac{(1 - 2\nu)}{1 + \sin(\varphi)} \right] \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.21)$$

avec G et ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau. En tenant compte de (2.20), le système (2.21) nous permet d'avoir :

$$k_{rr} = \frac{2G(1+\nu)}{r} \left[\frac{1 + \frac{2-\nu}{1+\nu} \sin(\varphi)}{1 + 2(1-\nu)\sin(\varphi)} \right] \quad (2.22)$$

Dans l'expression de k_{rr} , on remarque que l'angle φ intervient, mais dans la pratique, il est préférable de trouver une constante qui ne dépend que des propriétés mécaniques du milieu et du rayon r . Pour cela, on cherche les contraintes et les déplacements équivalents pour un rayon r et de l'angle φ qui varie de 0 à π . On tient compte de l'axe de symétrie du domaine, les contraintes et les déplacements équivalents sont donnés par [13] :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{rr} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{rr} d\varphi = -\frac{2P_x}{(\pi r)^2} [(2-\nu) - (1-2\nu)\ln 2] \cos(\theta) \\ \bar{u}_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_r d\varphi = \frac{P_x}{\pi^2 Gr} [2(1-\nu) - (1-2\nu)\ln 2] \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.23)$$

Ce qui donne la constante équivalente \bar{k}_{rr} sous :

$$\bar{k}_{rr} = \frac{2G}{r} \left[\frac{(2-\nu) - (1-2\nu)\ln 2}{2(1-\nu) - (1-2\nu)\ln 2} \right] \quad (2.24)$$

Qui peut être approximé par :

$$\bar{k}_{rr} = \frac{2G}{r} \left(\frac{13+4\nu}{13-6\nu} \right) \quad (2.25)$$

Dans la relation (2.22), l'expression de \bar{k}_{rr} est en fonction des propriétés mécanique du matériau et du rayon r . Pour définir la valeur de \bar{k}_{rr} a la limite de troncature il suffit juste de poser $r = R$.

Dans le cas où la constante \bar{k}_{rr} est déduite de la solution analytique de Boussinesq, pour une charge concentrée, appliquée à l'origine, perpendiculairement à la surface libre, son expression est de la forme :

$$\bar{k}_{rr} = \frac{2G}{r} \left[\frac{(2-\nu) - \frac{\pi}{4}(1-2\nu)}{2(1-\nu) - \frac{\pi}{4}(1-2\nu)} \right] \quad (2.26)$$

De la même manière, on cherche à déterminer la constante $k_{r\theta}$. La contrainte $\sigma_{r\theta}$ et le déplacement u_θ . Donnés par la solution de Cerruti (1882) :

$$\begin{cases} \sigma_{r\theta} = \frac{P_x}{2\pi r^2} \left[\frac{(1-2\nu)\cos^2(\varphi)}{(1+\sin(\varphi))^2} \right] \sin(\theta) \\ u_\theta = -\frac{P_x}{4\pi Gr} \left[1 + \frac{(1-2\nu)}{1+\sin(\varphi)} \right] \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.27)$$

Ce qui donne :

$$k_{r\theta} = \frac{G}{r} \left[\frac{2(1-2\nu)(1-\sin(\varphi))}{2(1-\nu) + \sin(\varphi)} \right] \quad (2.28)$$

qui est en fonction d'angle φ . Pour éliminer cette dépendance, la contrainte et le déplacement équivalents sont donnés par :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{r\theta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{r\theta} d\varphi = \frac{P_x}{4\pi r^2} [0.546(1-2\nu)] \\ \bar{u}_\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_\theta d\varphi = -\frac{P_x}{4\pi Gr} [1 + 0.637(1-2\nu)] \end{cases} \quad (2.29)$$

Et la constante de raideur peut être approximée par :

$$\bar{k}_{r\theta} = \frac{3G}{r} \left(\frac{1-2\nu}{9-7\nu} \right) \quad (2.30)$$

Afin de déterminer la constante $k_{r\varphi}$, nous allons considérer la solution analytique de Boussinesq (1885) sous une charge concentrée P_z appliquée à l'origine dans le sens z . La contrainte $\sigma_{r\varphi}$ et le déplacement u_φ dans ce cas sont donnés par :

$$\begin{cases} \sigma_{r\varphi} = -\frac{P_z}{2\pi r^2} \left[\frac{(1-2\nu)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{1+\sin(\varphi)} \right] \\ u_\varphi = \frac{P_z}{4\pi Gr} \left[\frac{(3-4\nu)\sin(\varphi) + 2(1-\nu)}{1+\sin(\varphi)} \right] \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.31)$$

Et la constante $k_{r\varphi}$ est donnée par :

$$k_{r\varphi} = \frac{2G}{r} \left(\frac{1-2\nu}{5-6\nu} \right) \left[\frac{\sin(\varphi)}{1 - \left(\frac{3-4\nu}{5-6\nu} \right) (1-\sin(\varphi))} \right] \quad (2.32)$$

De la même manière, on obtient la contrainte et le déplacement équivalents : :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{r\varphi} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{r\varphi} d\varphi = -\frac{P_z}{(\pi r)^2} (1 - 2\nu)(1 - \ln 2) \\ \bar{u}_\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_\varphi d\varphi = \frac{P_z}{2\pi^2 G r} [(3 - 4\nu) - (1 - 2\nu)\ln 2] \end{cases} \quad (2.33)$$

ce qui donne la constante de raideur équivalente par :

$$\bar{k}_{r\varphi} = \frac{2G}{r} \left[\frac{(1 - 2\nu)(1 - \ln 2)}{(3 - 4\nu) - (1 - 2\nu)\ln 2} \right] \quad (2.34)$$

Qui peut être approximée par :

$$\bar{k}_{r\varphi} = \frac{4G}{r} \left(\frac{1 - 2\nu}{15 - 17\nu} \right) \quad (2.35)$$

Pour trouver les expressions des constantes de raideur k_{rr} , $k_{r\theta}$ et $k_{r\varphi}$ à introduire sur la frontière de troncature d'un espace hémisphérique, de rayon R , il suffit juste de poser $r = R$.

Ces expressions sont données par :

$$k_{rr} = \frac{2G}{R} \left(\frac{13 + 4\nu}{13 - 6\nu} \right) ; k_{r\theta} = \frac{3G}{R} \left(\frac{1 - 2\nu}{9 - 7\nu} \right) ; k_{r\varphi} = \frac{4G}{R} \left(\frac{1 - 2\nu}{15 - 17\nu} \right) \quad (2.36)$$

2.3.2 Domaine cylindrique

Dans cette section, nous allons déterminer les forces de raideur à introduire sur la limite de troncature d'un espace semi-infini, qui est considéré comme étant un espace fini à géométrie cylindrique, de profondeur $z = h$ et du rayon $r = a$. Les coordonnées cylindriques sont définies par :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} ; r \in [0, R] ; z \in [0, h] ; \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.37)$$

Les solutions analytiques de Cerruti, en coordonnées cylindriques, pour une charge ponctuelle P_x appliquée à l'origine dans le sens x , d'un espace semi-infini, sont données pour les déplacements par [13]:

$$\begin{cases} u_r = \frac{P_x}{4\pi GR} \left[1 + \frac{r^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{r^2}{(R+z)^2} \right) \right] \cos(\theta) \\ u_\theta = -\frac{P_x}{4\pi GR} \left[1 + \frac{(1 - 2\nu)R}{R+z} \right] \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.38)$$

et pour les contraintes par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{P_x}{2\pi R^2} \left[\frac{3r^2}{R^2} - \frac{(1 - 2\nu)R^2}{(R+z)^2} \right] \frac{r}{R} \cos(\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{P_x}{2\pi R^2} \left[\frac{(1 - 2\nu)}{(R+z)^2} \right] r R^2 \sin(\theta) \\ \sigma_{zr} = -\frac{P_x}{2\pi R^2} \left(\frac{3r^2 z}{R^3} \right) \cos(\theta) \\ \sigma_{z\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Les solutions analytiques de Boussinesq pour une charge concentrée P_z , appliquée à l'origine dans le sens z , sont données par :

$$\begin{cases} u_z = \frac{P_z}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1 - \nu)}{R} \right] \\ \sigma_{rz} = -\frac{3P_z}{2\pi} \frac{r z^2}{R^5} \\ \sigma_{zz} = -\frac{3P_z}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} \end{cases} \quad (2.40)$$

Avec G le module du cisaillement, ν coefficient de Poisson et $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Dans notre cas, les frontières en question sont la surface transversale sur laquelle $z = h$ et la surface latérale où $r = a$. Par commodité, nous allons traiter ces frontières séparément.

2.3.2.1 Frontière transversale

Les contraintes agissant sur la base du cylindre ($z = h$) sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{zr}(r, \theta, h) = -k_{zr} u_r(r, \theta, h) \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta, h) = -k_{z\theta} u_\theta(r, \theta, h) \\ \sigma_{zz}(r, \theta, h) = -k_{zz} u_z(r, \theta, h) \end{cases} \quad (2.41)$$

Les constantes de raideur par unité de surface résultantes dans ce cas sont :

$$\begin{cases} k_{zr} = -\frac{\sigma_{zr}}{u_r} \\ k_{z\theta} = -\frac{\sigma_{z\theta}}{u_\theta} \\ k_{zz} = -\frac{\sigma_{zz}}{u_z} \end{cases} \quad (2.42)$$

A l'aide des solutions de Cerruti (2.38), (2.39) et de Boussinesq (2.40), on obtient :

$$\begin{cases} k_{zr} = \frac{G}{R} \frac{6 \frac{r^2 h}{R^3}}{1 + \frac{r^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+h} - \frac{r^2}{(R+h)^2} \right)} \\ k_{z\theta} = 0 \\ k_{zz} = \frac{G}{h} \frac{6 \left(\frac{h}{R} \right)^4}{\left(\frac{h}{R} \right)^2 + 2(1 - \nu)} \end{cases} \quad (2.43)$$

Avec $z = h$ et $R = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Afin d'obtenir des constantes de raideur indépendamment de la variable r sur la base du cylindre, il est préférable d'écrire k_{zr} , $k_{z\theta}$ et k_{zz} sous les formes équivalentes :

$$\begin{cases} \bar{k}_{zr} = -\frac{G}{h} \frac{\int_0^a \sigma_{zr} \frac{r}{G} dr}{\int_0^a u_r \frac{r}{h} dr} = \frac{G}{h} \beta_{zr} \\ \bar{k}_{z\theta} = -\frac{G}{h} \frac{\int_0^a \sigma_{z\theta} \frac{r}{G} dr}{\int_0^a u_\theta \frac{r}{h} dr} = \frac{G}{h} \beta_{z\theta} \\ \bar{k}_{zz} = -\frac{G}{h} \frac{\int_0^a \sigma_{zz} \frac{r}{G} dr}{\int_0^a u_z \frac{r}{h} dr} = \frac{G}{h} \beta_{zz} \end{cases} \quad (2.44)$$

Le problème maintenant revient à chercher les expressions des paramètres β_{zr} , $\beta_{z\theta}$ et β_{zz} , qui sont données à l'aide des solutions analytiques (2.38), (2.39) et (2.40) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{zr} = \frac{6 \int_0^a r^3 h R^{-5} dr}{\int_0^a \left[1 + \frac{r^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+h} - \frac{r^2}{(R+h)^2} \right) \right] \frac{r}{hR} dr} \\ \beta_{z\theta} = 0 \\ \beta_{zz} = \frac{6h^4 \int_0^a r R^{-5} dr}{\int_0^a \left[\left(\frac{h}{R} \right)^2 + 2(1 - \nu) \right] \frac{r}{R} dr} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

2.3.2.2 Frontière latérale

Sur la frontière latérale ($r = a$, $0 < z < h$, $0 < \theta < 2\pi$), les conditions aux limites sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(a, \theta, z) = -k_{rr} u_r(a, \theta, z) \\ \sigma_{r\theta}(a, \theta, z) = -k_{r\theta} u_\theta(a, \theta, z) \\ \sigma_{rz}(a, \theta, z) = -k_{rz} u_z(a, \theta, z) \end{array} \right. \quad (2.46)$$

D'où, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{rr} = -\frac{\sigma_{rr}}{u_r} \\ k_{r\theta} = -\frac{\sigma_{r\theta}}{u_\theta} \\ k_{rz} = -\frac{\sigma_{rz}}{u_z} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

En remplaçant les contraintes et les déplacements par leurs expressions, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{rr} = \frac{2G}{R} \frac{\left[\frac{3a^2}{R^2} - (1 - 2\nu) \frac{R^2}{(R+z)^2} \right] \frac{a}{R}}{1 + \frac{a^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{a^2}{(R+z)^2} \right)} \\ k_{r\theta} = \frac{2(1 - 2\nu)Ga}{(R+z)^2 \left[1 + \frac{(1-2\nu)R}{R+z} \right]} \\ k_{rz} = \frac{6G}{a} \frac{\left(\frac{z}{R} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2}{\left[\left(\frac{z}{R} \right)^2 + 2(1 - \nu) \right]} \end{array} \right. \quad (2.48)$$

avec $r = a$ et $R = \sqrt{z^2 + a^2}$. Sur cette frontière, il est préférable d'obtenir des constantes de raideur indépendamment de la variable z . Pour cela, on écrit :

$$\begin{cases} \bar{k}_{rr} = -\frac{G \int_0^h \sigma_{rr} \frac{a}{G} dz}{a \int_0^h u_r dz} = \frac{G}{a} \beta_{rr} \\ \bar{k}_{r\theta} = -\frac{G \int_0^h \sigma_{r\theta} \frac{a}{G} dz}{a \int_0^h u_\theta dz} = \frac{G}{a} \beta_{r\theta} \\ \bar{k}_{rz} = -\frac{G \int_0^h \sigma_{rz} \frac{a}{G} dz}{a \int_0^h u_z dz} = \frac{G}{a} \beta_{rz} \end{cases} \quad (2.49)$$

D'où, il vient :

$$\begin{cases} \beta_{rr} = \frac{2 \int_0^h \left[\frac{3a^2}{R^2} - (1-2\nu) \frac{R^2}{(R+z)^2} \right] \frac{a^2}{R^3} dz}{\int_0^h \left[1 + \frac{a^2}{R^2} + (1-2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{a^2}{(R+z)^2} \right) \right] \frac{dz}{R}} \\ \beta_{r\theta} = \frac{2(1-2\nu) \int_0^h \frac{a^2}{R(R+z)^2} dz}{\int_0^h \left[1 + \frac{R(1-2\nu)}{R+z} \right] \frac{dz}{R}} \\ \beta_{rz} = \frac{6a^2 \int_0^h \frac{z^2}{R^5} dz}{\int_0^h \left[\left(\frac{z}{R} \right)^2 + 2(1-\nu) \right] \frac{dz}{R}} \end{cases} \quad (2.50)$$

2.3.3 Domaine parallélépipédique rectangulaire

Considérons un domaine à géométrie parallélépipédique rectangulaire, sur lequel les dimensions sont $2a_x \times 2a_y \times a_z$, avec $x \in [-a_x, a_x]$, $y \in [-a_y, a_y]$ et $z \in [0, a_z]$. Les contraintes agissant sur les plans $x = a_x$, $y = a_y$ et $z = a_z$ sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -k_{xx} u_x \\ \sigma_{xy} = -k_{xy} u_y \\ \sigma_{xz} = -k_{xz} u_z \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_{yx} = -k_{yx} u_x \\ \sigma_{yy} = -k_{yy} u_y \\ \sigma_{yz} = -k_{yz} u_z \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_{zx} = -k_{zx} u_x \\ \sigma_{zy} = -k_{zy} u_y \\ \sigma_{zz} = -k_{zz} u_z \end{cases} \quad (2.51)$$

D'où, il vient :

$$\begin{cases} k_{xx} = -\frac{\sigma_{xx}}{u_x} \\ k_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{u_y} \\ k_{xz} = -\frac{\sigma_{xz}}{u_z} \end{cases} ; \quad \begin{cases} k_{yx} = -\frac{\sigma_{yx}}{u_x} \\ k_{yy} = -\frac{\sigma_{yy}}{u_y} \\ k_{yz} = -\frac{\sigma_{yz}}{u_z} \end{cases} ; \quad \begin{cases} k_{zx} = -\frac{\sigma_{zx}}{u_x} \\ k_{zy} = -\frac{\sigma_{zy}}{u_y} \\ k_{zz} = -\frac{\sigma_{zz}}{u_z} \end{cases} \quad (2.52)$$

ou sous forme indicielle suivante :

$$k_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}}{u_j} \quad (2.53)$$

i désigne ici l'indice du plan et j la direction considérée. Les constantes équivalentes à définir sur chaque plan s'obtiennent par :

$$\bar{k}_{ij} = -\frac{\int_{\Gamma_i} \sigma_{ij} d\Gamma}{\int_{\Gamma_i} u_j d\Gamma} \quad (2.54)$$

Avec Γ_i le plan considéré, tel que :

$$\Gamma_x = \begin{cases} x = a_x \\ y \in [-a_y, a_y] \\ z \in [0, a_z] \end{cases} ; \quad \Gamma_y = \begin{cases} x \in [-a_x, a_x] \\ y = a_y \\ z \in [0, a_z] \end{cases} ; \quad \Gamma_z = \begin{cases} x \in [-a_x, a_x] \\ y \in [-a_y, a_y] \\ z = a_z \end{cases} \quad (2.55)$$

Avant de calculer les constantes de raideur à introduire sur chaque plan, on doit d'abord déterminer les contraintes agissant dans chaque sens. Au premier lieu, nous allons chercher les contraintes qui contribuent dans les sens x et y . Pour cela, on considère les solutions analytiques de Cerruti pour une charge concentrée P_x , appliquée à l'origine dans le sens x d'un espace semi-infini. Ces solutions sont données en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{P_x x}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(x^2 + z^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_{yx} = -\frac{P_x y}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(y^2 + z^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_{zx} = -\frac{P_x z}{2\pi R^3} \frac{3x^2}{R^2} \end{cases} \quad (2.56)$$

pour les contraintes, et pour les déplacements par :

$$u_x = \frac{P_x}{4\pi R G} \left[1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{x^2}{R+z} \right) \right] \quad (2.57)$$

Avec G et ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau, et $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ désigne la distance entre l'origine et le point considéré.

D'après la relation (2.54) et en tenant toujours compte de (2.56) et (2.57), les constantes de raideur équivalentes dans le sens x qui correspondent aux plans $x = a_x$, $y = a_y$ et $z = a_z$ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_{xx} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \sigma_{xx} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} u_x dz dy} = \frac{G}{a_x} \beta_{xx} \\ \bar{k}_{yx} = -\frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \sigma_{yx} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} u_x dz dx} = \frac{G}{a_y} \beta_{yx} \\ \bar{k}_{zx} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \sigma_{zx} dx dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} u_x dx dy} = \frac{G}{a_z} \beta_{zx} \end{array} \right. \quad (2.58)$$

avec maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{xx} = 2a_x^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{a_x}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_x^2 + z^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{a_x}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{a_x^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dy} \\ \beta_{yx} = 2a_y^2 \frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_y^2 + z^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{x^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dx} \\ \beta_{zx} = 2a_z^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \left[3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right] R^{-3} dx dy}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+a_z)} \left(R - \frac{x^2}{R+a_z} \right) \right] R^{-1} dx dy} \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Pour obtenir les constantes de raideur dans le sens y , on suit les mêmes étapes, mais pour une charge concentrée P_y appliquée dans la direction y , d'où on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{xy} = 2a_x^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{y}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_x^2 + z^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{y^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dy} \\ \beta_{yy} = 2a_y^2 \frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{a_y}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_y^2 + z^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{a_y}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{a_y^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dx} \\ \beta_{zy} = 2a_z^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \left[3 \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] R^{-3} dx dy}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+a_z)} \left(R - \frac{y^2}{R+a_z} \right) \right] R^{-1} dx dy} \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Maintenant, nous allons chercher les constantes de raideur correspondant à la direction z . Dans ce cas, on considère les solutions analytiques de Boussinesq obtenues pour un espace semi-infini, soumis à une charge concentrée P_z , appliquée à l'origine dans le sens z . Les contraintes en coordonnées cartésiennes sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = -\frac{3P_z xz^2}{2\pi R^5} \\ \sigma_{yz} = -\frac{3P_z yz^2}{2\pi R^5} \\ \sigma_{zz} = -\frac{3P_z z^3}{2\pi R^5} \end{cases} \quad (2.61)$$

et les déplacements par :

$$u_z = \frac{P_z}{4\pi RG} \left[\frac{z^2}{R^2} + 2(1-\nu) \right] \quad (2.62)$$

La substitution de (2.61) et (2.62) dans (2.54), nous permet d'avoir les constantes équivalentes dans le sens z , qui correspondent aux plans $x = a_x$, $y = a_y$ et $z = a_z$:

$$\begin{cases} \bar{k}_{xz} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \sigma_{xz} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} u_z dz dy} = \frac{G}{a_x} \beta_{xz} \\ \bar{k}_{yz} = -\frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \sigma_{yz} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} u_z dz dx} = \frac{G}{a_y} \beta_{yz} \\ \bar{k}_{zz} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \sigma_{zz} dx dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} u_z dx dy} = \frac{G}{a_z} \beta_{zz} \end{cases} \quad (2.63)$$

avec :

$$\begin{cases} \beta_{xz} = 6a_x^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left(\frac{z}{R}\right)^2 R^{-3} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 2(1-\nu)\right] R^{-1} dz dy} \\ \beta_{yz} = 6a_y^2 \frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left(\frac{z}{R}\right)^2 R^{-3} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 2(1-\nu)\right] R^{-1} dz dx} \\ \beta_{zz} = 6a_z^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \left(\frac{a_z}{R}\right)^2 R^{-3} dx dy}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[\left(\frac{a_z}{R}\right)^2 + 2(1-\nu)\right] R^{-1} dx dy} \end{cases} \quad (2.64)$$

Comme toutes les constantes de raideur sont définies, il nous reste qu'à rassembler les expressions correspondant à chaque plan, donc :

$$\begin{cases} \bar{k}_{xx} = \frac{G}{a_x} \beta_{xx} \\ \bar{k}_{xy} = \frac{G}{a_x} \beta_{xy} \\ \bar{k}_{xz} = \frac{G}{a_x} \beta_{xz} \end{cases} \quad (2.65)$$

pour le plan $x = a_x$, et :

$$\begin{cases} \bar{k}_{yx} = \frac{G}{a_y} \beta_{yx} \\ \bar{k}_{yy} = \frac{G}{a_y} \beta_{yy} \\ \bar{k}_{yz} = \frac{G}{a_y} \beta_{yz} \end{cases} \quad (2.66)$$

pour le plan $y = a_y$. Et finalement pour le plan $z = a_z$:

$$\begin{cases} \bar{k}_{zx} = \frac{G}{a_z} \beta_{zx} \\ \bar{k}_{zy} = \frac{G}{a_z} \beta_{zy} \\ \bar{k}_{zz} = \frac{G}{a_z} \beta_{zz} \end{cases} \quad (2.67)$$

Les expressions de β_{ij} sont obtenus par les expressions (6.59), (2.60) et (2.64). Les constantes de raideur concernant les plans $x = -a_x$ et $y = -a_y$ sont respectivement les mêmes que celles des plans $x = a_x$ et $y = a_y$, mais avec un signe opposé.

2.3.4 Cas d'un plan semi-infini

Dans le cas d'un plan semi-infini, le problème est traité en déformations planes. Pour définir les constantes de raideur à imposer sur la limite de troncature, nous allons considérer la solution de Flamant sous une charge verticale concentrée F_z . Les contraintes en coordonnées cartésiennes sont données par [49] :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{2F_z}{\pi r} \cos\theta \sin^2\theta \\ \sigma_{zz} = -\frac{2F_z}{\pi r} \cos^3\theta \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = -\frac{2F_z}{\pi r} \sin\theta \cos^2\theta \end{cases} \quad (2.68)$$

Et les déplacements par :

$$\begin{cases} u_x = -\frac{F_z}{2E\pi} [2(1-\nu)\theta - (1+\nu)\sin 2\theta] \\ u_z = -\frac{F_z}{2E\pi} \left[4\ln\left(\frac{r}{R}\right) + (1+\nu)(1 - \cos 2\theta) \right] \end{cases} \quad (2.69)$$

Avec E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ est la distance radiale du point considéré, θ l'angle entre \vec{r} et l'axe z . concernant R , est un paramètre qui représente la distance à laquelle le déplacement vertical u_z doit avoir une valeur nulle sur l'axe z et qui doit être très grand afin d'assimiler le comportement à l'infini. Ainsi, les constantes de raideur en chaque point du domaine sont :

$$\begin{cases} k_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{u_x} = \frac{4E}{r} \left(\frac{\cos\theta \sin^2\theta}{2(1-\nu)\theta - (1+\nu)\sin 2\theta} \right) \\ k_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{u_z} = \frac{4E}{r} \left(\frac{\cos^3\theta}{4\ln\left(\frac{r}{R}\right) + (1+\nu)(1 - \cos 2\theta)} \right) \\ k_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{u_z} = \frac{4E}{r} \left(\frac{\sin\theta \cos^2\theta}{4\ln\left(\frac{r}{R}\right) + (1+\nu)(1 - \cos 2\theta)} \right) \\ k_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{u_x} = \frac{4E}{r} \left(\frac{\sin\theta \cos^2\theta}{2(1-\nu)\theta - (1+\nu)\sin 2\theta} \right) \end{cases} \quad (2.70)$$

2.4 Conclusion

L'utilisation des éléments absorbants, dans le traitement de la limite de troncature des milieux non bornés, est une alternative de prise en compte des conditions de radiation des domaines infinis. Les effets radiatifs sont pris en compte par des éléments absorbants, issus des forces d'amortissement, et il est possible d'améliorer ces conditions en leurs introduisant conjointement des éléments issus des forces de raideur.

Chapitre 3

Modélisation et discrétisation par éléments finis

3.1 Introduction

L'analyse des problèmes d'ingénierie nous amènent à développer des modèles mathématiques qui s'appuient sur des hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. La méthode numérique la plus utilisée pour résoudre ces problèmes est celle des éléments finis, car elle offre la possibilité de développer un programme de calcul qui peut résoudre avec peu de modification plusieurs types de problèmes. Dans ce chapitre, nous allons mettre en équations le problème mathématique d'un plan semi-infini, sous chargement dynamique, dont lequel le matériau est supposé élastique linéaire.

3.2 Formulation mathématique du problème

On considère un plan semi-infini, constitué d'un matériau à comportement élastique linéaire, de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ . Sur la figure suivante (Figure 3.1), on a illustré le problème en question.

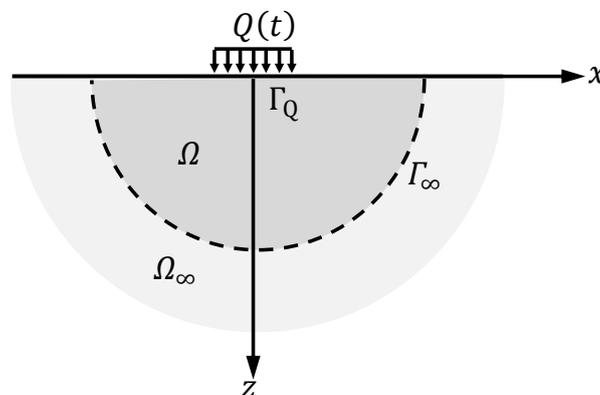


Figure 3-1: Plan semi infini

Le problème mathématique de la figure 3.1 peut être posé sous :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i & |\Omega & (3.1a) \\ T_i = \sigma_{ij} n_j = -Q(t) & |\Gamma_Q & (3.1b) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u_i = 0 & & (3.1c) \end{cases}$$

avec σ_{ij} le tenseur de contraintes, T_i le vecteur de contraintes, f_i la force de volume, u_i le champ de déplacements, $Q(t)$ le chargement dynamique, Γ_Q la frontière sur laquelle le chargement Q est appliqué, Ω le champ proche du domaine d'étude et $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ la distance radiale. Avec :

σ_{ij}	:	Le tenseur de contraintes ;
T_i	:	Le vecteur de contraintes ;
n_j	:	Le vecteur unitaire normal à une frontière donnée ;
f_i	:	Le vecteur de forces de volume ;
u_i	:	Le vecteur ou champ de déplacements ;
\ddot{u}_i	:	Le vecteur d'accélération ;
$Q(t)$:	Le chargement dynamique ;
Ω	:	Le champ proche du domaine d'étude ;
Γ_Q	:	La frontière à laquelle le chargement Q est appliqué ;
$r = \sqrt{x^2 + z^2}$:	La distance radiale ;

La loi de comportement de l'élasticité linéaire, isotrope, en petites déformations, permet d'écrire les contraintes en fonction des déformations sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

Où D_{ijkl} désigne le tenseur d'élasticité qui est d'ordre quatre. Les expressions des déformations en fonction des déplacements u sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

Vu la symétrie des tenseurs et dans le but d'alléger les écritures, la notation vectorielle est souvent adoptée en élasticité plane. Alors, le tenseur des contraintes en élasticité plane s'écrit par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

et le tenseur des déformations par :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Et le vecteur des déplacements par :

$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

La relation entre les déformations et les déplacements devient alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Qui peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\varepsilon = Su \quad (3.8)$$

En tenant compte de (3.8), l'expression (3.2) devient :

$$\sigma = D\varepsilon = DSu \quad (3.9)$$

Avec :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Les expressions des constantes d_1 et d_2 dans le cas d'un problème en contraintes planes sont données par :

$$d_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad d_2 = \nu d_1 \quad (3.11)$$

Et dans le cas d'un problème en déformations planes par :

$$d_1 = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{(1 - \nu)} \quad (3.12)$$

L'expression de la constante d_3 est donnée dans les deux cas par :

$$d_3 = \frac{1}{2}(d_1 - d_2) \quad (3.13)$$

Le problème variationnel associé à l'équation d'équilibre (3.1a) s'obtient en adoptant la formulation de type Galerkin pour une fonction poids $w = \delta u$. La forme forte s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i f_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

Le premier terme est donné par l'expression suivante à l'aide du théorème de divergence :

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \underbrace{\delta u_{i,j}}_{\delta \varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\Omega \quad (3.15)$$

On remplace (3.15) dans (3.14), on obtient la forme intégrale faible suivante :

$$- \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i f_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

ou encore sous forme vectorielle suivante :

$$- \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u f d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

Si on tient compte de (3.8) et (3.9), l'expression (3.17) devient :

$$- \int_{\Omega} \delta (Su)^T D S u d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u f d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

Le système (3.18) est l'expression des travaux virtuels des corps homogènes et isotropes, ayant un comportement bidimensionnel élastique linéaire. Si on tient compte de ces

considérations, le plan semi-infini de la figure 3.1 peut être traité en déformation plane. De plus, la forme sous intégrale faible de l'expression (3.18) nous permet d'introduire les conditions aux limites.

Sur la surface Γ_Q où s'effectue le chargement dynamique $Q(t)$ dans le sens z , la condition est donnée par :

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = Q(t) \quad (3.19)$$

Sur la limite de troncature Γ_∞ , une condition radiative doit être introduite de telle sorte à reproduire le déplacement à l'infini. Dans le chapitre 2, nous avons vu qu'on peut introduire des éléments absorbants issus des forces d'amortissement. Ainsi, pour la radiation des ondes de compression P , un forçage d'amortissement de constante c_p doit être introduit, avec

$$c_p = \rho V_p = \rho \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3.20)$$

Et pour la radiation des ondes de cisaillement S , un forçage d'amortissement de constante c_s doit être introduit, avec :

$$c_s = \rho V_s = \rho \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (3.21)$$

De ce fait, l'équilibre des contraintes sur la limite de troncature Γ_∞ s'exprime par :

$$T = \sigma n = -c_p \dot{u}_n - c_s \dot{u}_t = -c_p \dot{u}_n - c_s \dot{u}_t \quad (3.22)$$

où \dot{u}_n et \dot{u}_t désignent respectivement les projections des vitesses des particules solides sur la normale n et la tangente n_t par rapport à la limite de troncature Γ_∞ . De même, si on veut améliorer ces conditions, on introduit des forces de raideur de constantes k_{rr} et $k_{r\theta}$; issues de la solution de Flamant, et qui sont respectivement relatives aux directions normale et tangentielle par rapport à la limite de troncature avec :

$$k_{rr} = \frac{E}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{r}{R}\right)} \quad ; \quad k_{r\theta} = \frac{E\sqrt{2}}{4r} \frac{1}{\ln\left(\frac{r}{R}\right)} \quad (3.23)$$

R un paramètre qui doit être très grand pour assimiler le comportement du champ lointain. r la distance radiale à laquelle la limite de troncature Γ_∞ est effectuée.

Comme les conditions aux limites sont définies, il nous reste qu'à les introduire dans l'expression (3.18), d'où, on obtient :

$$\int_{\Omega} \delta(Su)^T DSud\Omega + \int_{\Gamma_\infty} \delta u(c_p \dot{u}_n + c_s \dot{u}_t) d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = \int_{\Gamma_Q} \delta u Q(t) d\Gamma \quad (3.24)$$

Si les conditions de radiation, issues des forces de raideur, sont considérées conjointement avec celles des forces d'amortissement, l'expression (3.24) s'écrit sous :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(Su)^T DSud\Omega + \int_{\Gamma_\infty} \delta u(c_p \dot{u}_n + c_s \dot{u}_t) d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} \delta u(k_{rr} u_n + k_{r\theta} u_t) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = \int_{\Gamma_Q} \delta u Q(t) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.3 Discrétisation du domaine par éléments finis

Afin de discrétiser le domaine sol par éléments finis, le champs des déplacements u est approximé par :

$$u = NU \quad (3.26)$$

et l'opérateur de perturbations par :

$$\delta u = \delta U^T N^T \quad (3.27)$$

La substitution de (3.26) et (3.27) dans(3.24), nous donne :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} B^T DB d\Omega \right) U + \left(c_p \int_{\Gamma_\infty} N^T n N d\Gamma + c_s \int_{\Gamma_\infty} N^T n_t N d\Gamma \right) \dot{U} \\ + \left(\rho \int_{\Omega} N^T N d\Omega \right) \ddot{U} = \int_{\Gamma_Q} N^T Q(t) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ou sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{U\} + [C_\infty]\{\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F\} \quad (3.29)$$

Dans lesquels, M , C_∞ et K représentent respectivement les matrices masse, amortissement et rigidité. Les expressions de ces matrices ainsi que le vecteur de chargement s'obtiennent par analogie entre la relation (3.28) et (3.29). Donc, l'expression de la matrice rigidité est donnée par :

$$[K] = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial z} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial z} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.30)$$

et la matrice masse est :

$$[M] = \rho \int_{\Omega} N^T N d\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.31)$$

En ce qui concerne le vecteur de chargement F , il s'obtient par :

$$\{F\} = \int_{\Gamma_Q} N^T Q_z d\Gamma = \int_{\Gamma_Q} Q \begin{bmatrix} N^T & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (3.83)$$

Pour la matrice d'amortissement, son expression est donnée par :

$$[C_\infty] = [C_P] + [C_S] \quad (3.32)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [C_P] &= \int_{\Gamma_\infty} N^T c_P n N d\Gamma = \int_{\Gamma_\infty} c_P \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} d\Gamma \\ [C_S] &= \int_{\Gamma_\infty} N^T c_S n_t N d\Gamma = \int_{\Gamma_\infty} c_S \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{t1} & 0 \\ 0 & n_{t2} \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.33)$$

L'amortissement de la relation (3.32) est le résultat de la discrétisation de la condition de radiation à la limite de troncature, qui est connu sous le nom d'amortissement géométrique ou radiatif [30,31]. Par ailleurs, on peut aussi tenir compte de l'amortissement visqueux du milieu, en appliquant le concept d'amortissement de Rayleigh qui est exprimé sous forme d'une combinaison linéaire de la matrice masse M et de la matrice de rigidité K [15] :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.34)$$

α et β sont des coefficients satisfaisant la condition d'orthogonalité de C dans la base modale. Donc, l'amortissement total du système est :

$$[C_t] = [C_\infty] + [C] \quad (3.35)$$

En ce qui concerne le vecteur de chargement F , il s'obtient par :

$$\{F\} = \int_{\Gamma_Q} N^T Q(t) d\Gamma = \int_{\Gamma_Q} Q(t) \begin{bmatrix} N^T & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (3.36)$$

Dans le cas où la condition de radiation est considérée simultanément par des forces d'amortissement et celles de raideur, l'expression (3.28) devient :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} B^T D B d\Omega \right) U + \left(k_{rr} \int_{\Gamma_\infty} N^T n N d\Gamma + k_{r\theta} \int_{\Gamma_\infty} N^T n_t N d\Gamma \right) U + \\ & \left(c_p \int_{\Gamma_\infty} N^T n N d\Gamma + c_s \int_{\Gamma_\infty} N^T n_t N d\Gamma \right) \dot{U} + \left(\rho \int_{\Omega} N^T N d\Omega \right) \ddot{U} = \int_{\Gamma_Q} N^T Q(t) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans ce cas, la matrice de rigidité totale est :

$$[K_t] = [K_\infty] + [K] \quad (3.38)$$

avec

$$[K_\infty] = [K_{rr}] + [K_{r\theta}] \quad (3.39)$$

d'où :

$$\begin{aligned} [K_{rr}] &= k_{rr} \int_{\Gamma_\infty} N^T n N d\Gamma \\ [K_{r\theta}] &= k_{r\theta} \int_{\Gamma_\infty} N^T n_t N d\Gamma \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.4 Conclusion

La discrétisation d'une frontière radiative issue des forces d'amortissement n'influe pas sur l'analyse des vibrations libres, autrement dit, n'influe pas sur les périodes propres du système, contrairement à celle issue des forces de raideur qui intervient dans l'analyse des vibrations libre du système.

Chapitre 4

Applications

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de mettre en œuvre les éléments absorbants, issus des forces d'amortissement et des forces de raideur, dans la prise en compte des conditions de radiations des domaines non bornés, en élastodynamique. Le logiciel de calcul utilisé dans ce travail est le SAP 2000 version 19 qui nous offre la possibilité d'introduire des amortisseurs et des ressorts à l'aide des éléments LINK type linéaire. La méthode de calcul de la réponse dynamique en déplacement qu'on a choisi est celle intégration directe pas à pas. Dans le cas dynamique, malheureusement, nous ne disposons pas de solutions analytiques à lesquelles nous comparons les résultats numériques. Pour cette raison, on va se limiter à l'étude de la convergence de la solution numérique en fonction de la taille du domaine, autrement dit, en fonction de la distance de la limite de troncature. Dans le cas statique en déformations planes, la performance des éléments absorbants issus des forces de raideur peuvent être comparé à la solution analytique de Flamant.

4.2 Présentation du modèle

On considère un plan semi-infini, constitué d'un matériau à comportement élastique linéaire, de module d'Young $E = 10 \text{ MPa}$, de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et de masse volumique $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$. Le domaine est tronqué à une distance $L = L_x = L_z$ de l'origine sur lequel on a imposé les différentes conditions. Sur le premier modèle (MEF_Enc), on a imposé des déplacements nuls à limite de troncature, donc, aucune condition de radiation n'est prise en compte. Le second modèle (MEF_C), est celui sur lequel des éléments absorbants, issus des forces d'amortissement seules, sont imposés. Dans le troisième modèle (MEF_KC), les effets radiatifs sont pris en compte conjointement entre les forces d'amortissement et les forces de raideur. Comme le modèle présente une symétrie, que se soit dans le domaine ou dans le chargement, on a pris que la moitié du domaine avec le blocage des déplacements

horizontaux, au niveau de l'axe de symétrie. Ainsi, le maillage utilisé est illustré sur la figure 4.1 suivante :

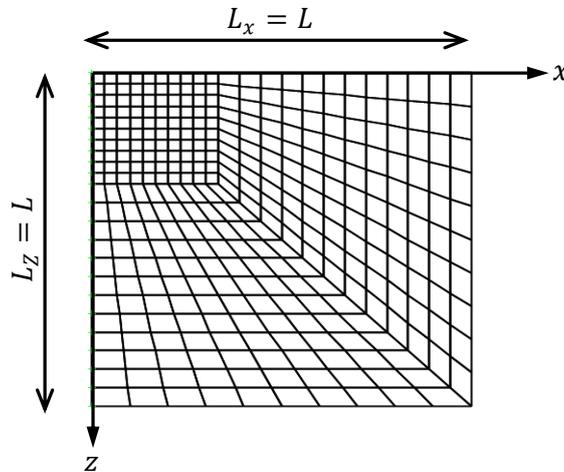


Figure 4-1: Maillage utilisé

4.3 Sous un chargement statique

Comme nous l'avons déjà mentionner précédemment, pour tester la performance des éléments absorbants issus des forces de raideur, nous allons traiter le problème classique de Flamant, sous charge verticale $F_z = 100 \text{ KN}$, concentrée à l'origine. Dans ce cas, le domaine est tronqué à une distance $L = 10 \text{ m}$. Sur le premier modèle MEF_Enc, on a bloqué les déplacements à la limite de troncature. Sur le deuxième modèle MEF_K, on a imposé des forces de raideur. Ainsi, les déplacements obtenus sont comparés à la solution analytique de Flamant. Sur la figure 4.2a, on a montré la distribution des déplacements verticaux sur l'axe de symétrie z et sur la figure 4.2b ceux de la surface libre du domaine.

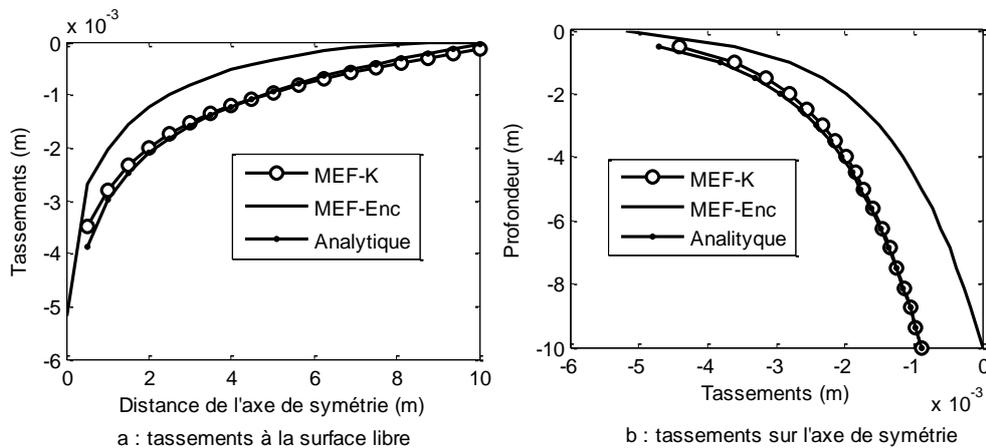


Figure 4-2: Problème de Flamant

Les résultats montrent bien que les déplacements obtenus par le modèle MEF_K concordent presque parfaitement avec ceux de la solution analytique, contrairement à ceux du modèle MEF_Enc, qui s'écartent de la solution analytique. Cela signifie que le modèle MEF_K prend en compte la géométrie non bornée du domaine par des forces de raideur imposées. Et comme les résultats obtenus par ce modèle sont si-proche de la solution analytique, ce qui montre leur efficacité et leur apport à la solution recherchée.

4.4 Sous chargement dynamique

Dans cette partie, nous allons d'abord considérer une charge dynamique verticale $P(t)$, concentrée à l'origine (figure 4.3a). Pour les différentes variations de $P(t)$, en fonction du temps, nous avons considéré une fonction triangulaire (figure 4.3b), une fonction constante (figure 4.3c) et une fonction sinusoïdale (figure 4.3d). Comme point d'observation de l'histoire de la réponse en déplacements, on a choisi un point $M(x = 50, z = 0)$ cm qui se situe sur la surface libre du domaine (figure 4.3a). Pour les différents modèles utilisés (MEF_Enc, MEF_C et MEF_KC), et pour chaque fonction de chargement $P(t)$, on a tracé l'histoire de la réponse du point M pour les positions de la limite de troncature $L = 15 m$, $L = 60 m$ et $L = 100 m$. De plus, pour l'étude de la convergence de la solution, on a tracé la variation des déplacements maximaux en fonction de la position de la limite de troncature.

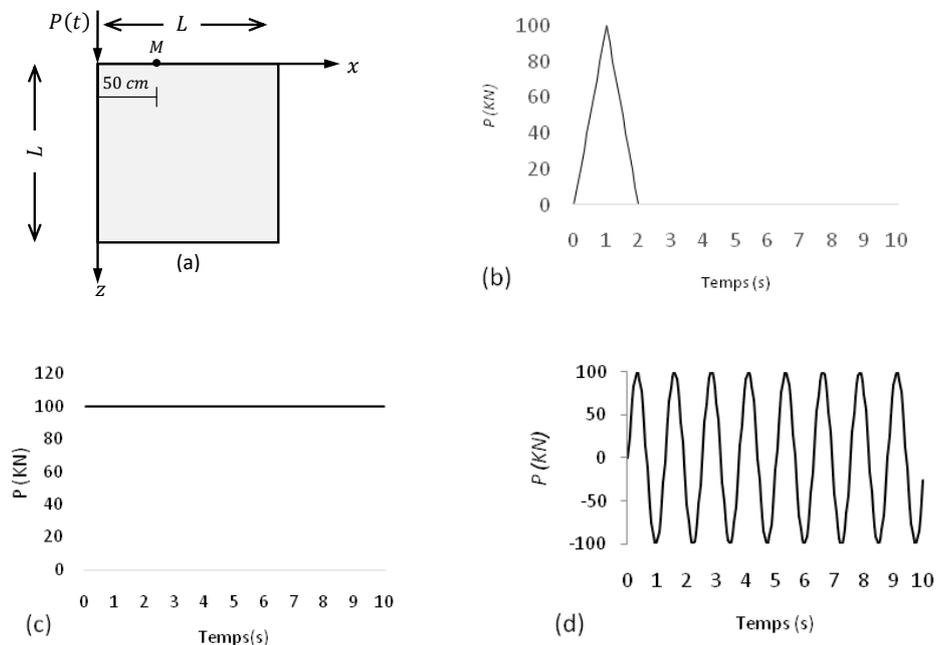


Figure 4-3: Géométrie et chargement

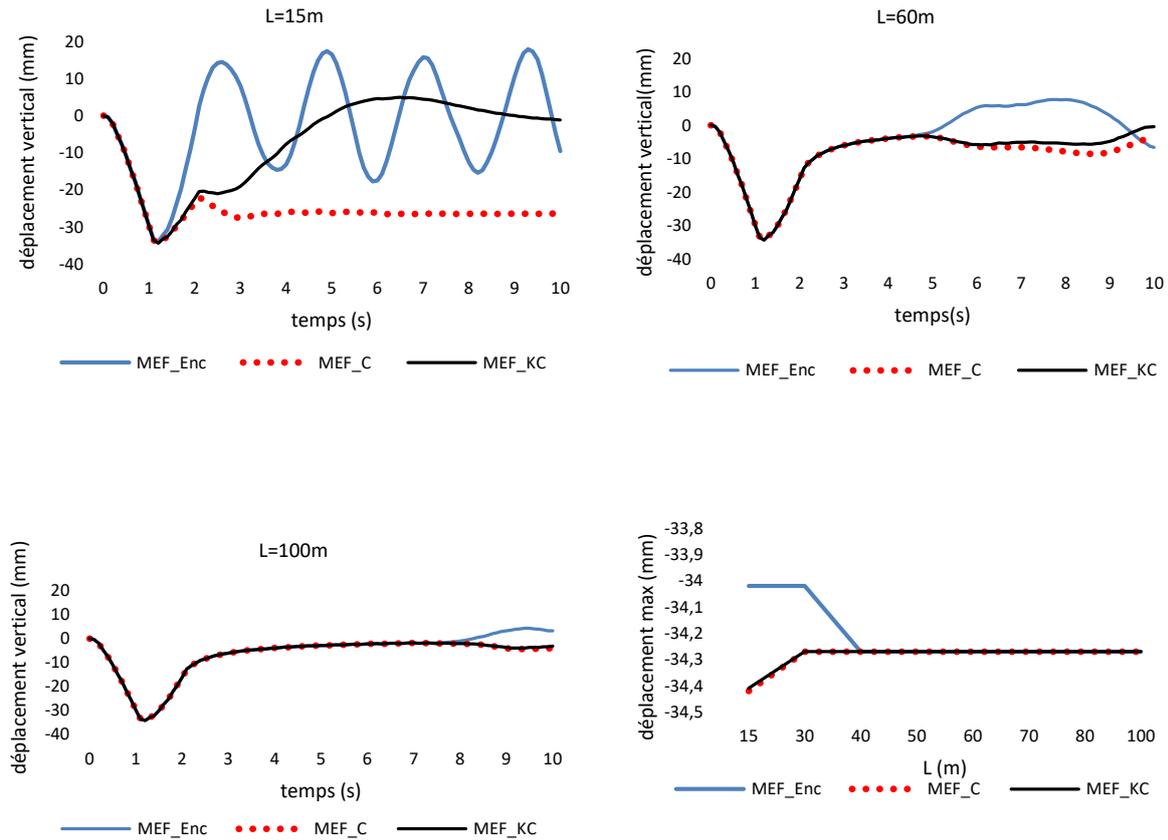


Figure 4-4: Déplacements verticaux sous charge triangulaire

Sous chargement triangulaire, on constate que pour $L = 15 m$, sur les deux première seconde qui correspondent au temps d'application de la charge, la solution obtenue avec MEF_C et MEF_KC se concorde parfaitement. Au-delà de cet instant, les deux solutions s'écartent entre elles, où l'allure de la solution MEF_KC se converge vers zéros et cela semble logique car au-delà de la deuxième seconde, le chargement est nul. Par contre celle de MEF_C se converge vers un déplacement aux alentours de 30 mm même après la cessation de la sollicitation. Concernant le modèle MEF_Enc, on constate une nette séparation avec les deux autres modèles et il présente des mouvements oscillatoires et cela est dû à l'encastrement de la limite de troncature qui produit des réflexions. Pour $L = 60 m$, sur les cinq première seconde on constate que les trois modèles coïncident parfaitement et au-delà de cet instant on remarque une légère séparation entre les solutions. Pour $L = 100 m$, les trois modèles fournissent des résultats qui se concordent parfaitement sauf un léger écart du modèle MEF_Enc qui se produit à partir de la huitième seconde. De plus, l'étude de la convergence de la solution, en fonction de positionnement de la limite de troncature L , montre que les déplacements maximaux, obtenus par les modèles MEF_C et MEF_KC, se stabilisent à partir d'une position de $L = 30 m$, et ceux du modèle MEF_Enc se stabilisent au-delà de 40 m. Il est à noter que

ces constats qu'on vienne de faire sont relatifs au chargement triangulaire utilisé dans cette étude.

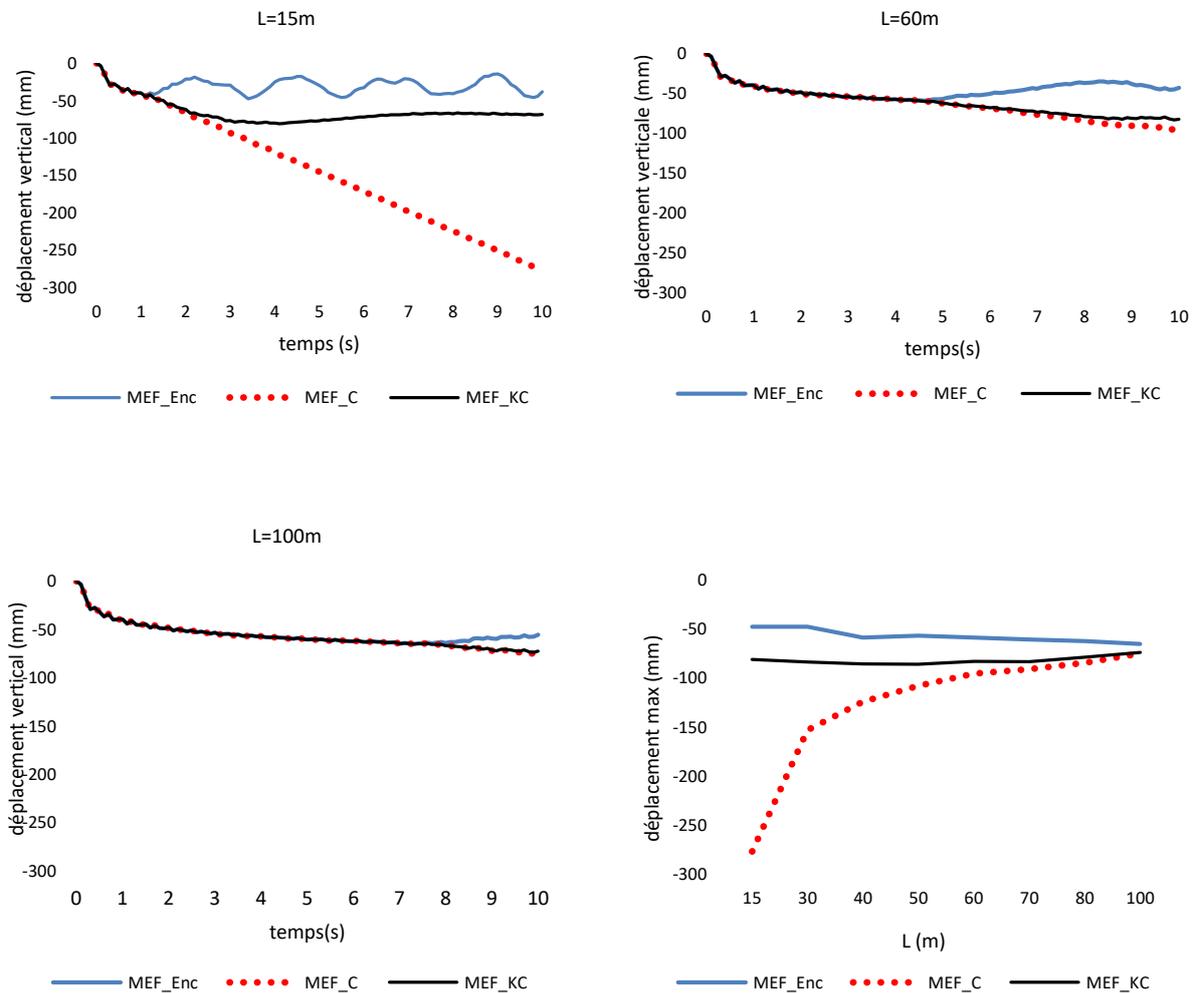


Figure 4-5: Déplacements verticaux sous charge constante

Sous chargement constant, on constate que pour $L = 15 \text{ m}$, le modèle MEF_Enc présente un mouvement oscillatoire, autour de l'axe des temps, et cela le long de la durée de la charge. Concernant le modèle MEF_KC, la solution présente une allure décroissante durant les cinq premières seconde, et se stabilise ensuite aux alentours de 75 mm. Par contre, le modèle MEF_C présente une allure qui décroît linéairement le long de la durée du chargement, et cela peut être expliqué du fait que la seule condition imposée à la limite de troncature est uniquement des amortisseurs. Pour $L = 60 \text{ m}$, sur les cinq première seconde on constate que les trois modèles coïncident parfaitement et au-delà de cet instant on remarque une nette séparation de la solution du modèle MEF_Enc avec les deux autres. Légère séparation entre les solutions. Pour $L = 100 \text{ m}$, les mêmes remarques sont observées avec celles qui correspondent à $L = 60 \text{ m}$ sauf qu'ici, la séparation du modèle MEF_Enc avec les deux

autres se produit à partir de la huitième seconde. Dans ce cas de chargement, l'étude de convergence de la solution, en fonction de positionnement de la limite de troncature L , à montre que les déplacements maximaux, obtenus par les modèles MEF_KC, se stabilisent aux alentours de -80 mm et cela pour toutes les positions de la limite de troncature. Même constat peut être effectué pour le modèle MEF_Enc mais la solution se stabilise aux alentours de -50 mm. Par contre, le modèle MEF_C, est très influencé par ce type de chargement et la taille du domaine, et sur lequel la convergence à d'autres modèles ne peut être observée que pour des positions de L très éloignées.

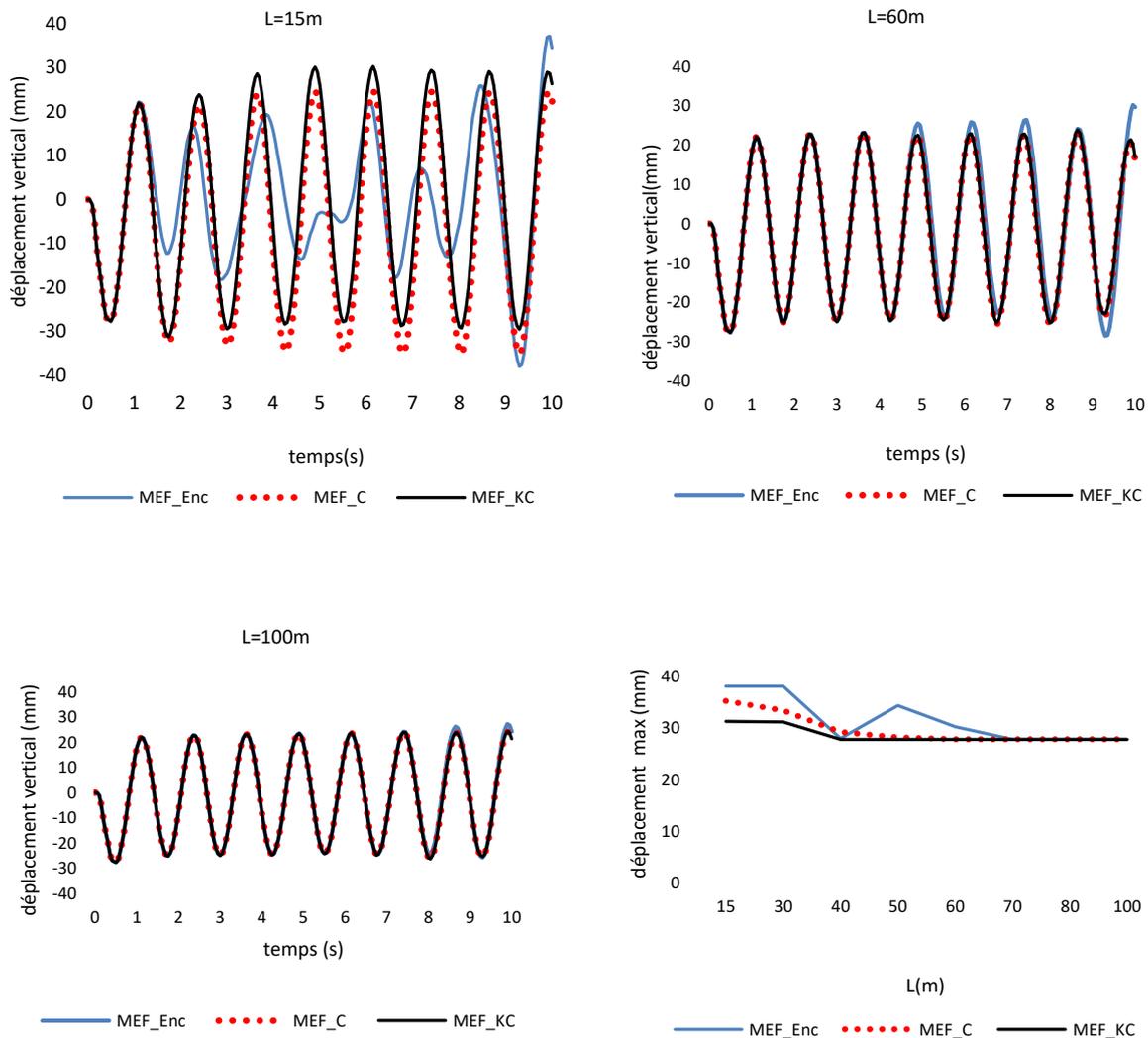


Figure 4-6: Déplacements verticaux sous charge sinusoïdale $\omega=5rad/s$

Sous chargement sinusoïdal ($\omega = 5 rad/s$), on constate que pour $L = 15 m$, les modèles MEF_KC et MEF_C fournissent presque les mêmes résultats avec un léger écart. Par contre, le modèle MEF_Enc présente des petits amplitudes au début du chargement et qui s'amplifient au fur et à mesure, avec le temps, le long de la durée du chargement. Pour $L = 60 m$ et $L =$

100 m, les modèles MEF_C et MEF_KC sont nettement confondus. De même pour le modèle MEF_Enc, sauf un petit écart est observé aux dernières secondes correspondant à $L = 60$ m. Quant à l'étude de la convergence de la solution, dans ce cas de chargement est délicate, car la réponse dynamique dépend essentiellement de la fréquence d'excitation. Plus la taille du domaine augmente, plus la fréquence propre du modèle change et plus le risque de résonance est grand. D'ailleurs, comme on le constate sur la figure, pour le modèle MEF_Enc converge à d'autres modèles pour $L = 40$ m et qui s'écarte pour $L = 50$ m. Néanmoins, dans ce cas, les modèles MEF_KC et MEF_C se stabilise à partir de $L = 40$ m, et le modèle MEF_Enc à partir de $L = 70$ m.

Afin de confirmer les constats qu'on vient d'effectuer pour les différents chargements, nous allons refaire les mêmes applications mais avec un chargement reparté $Q(t)$ au lieu de ce lui concentré. Les chargements ainsi que les points d'observation sont illustrés sur la figure 4.7 suivante.

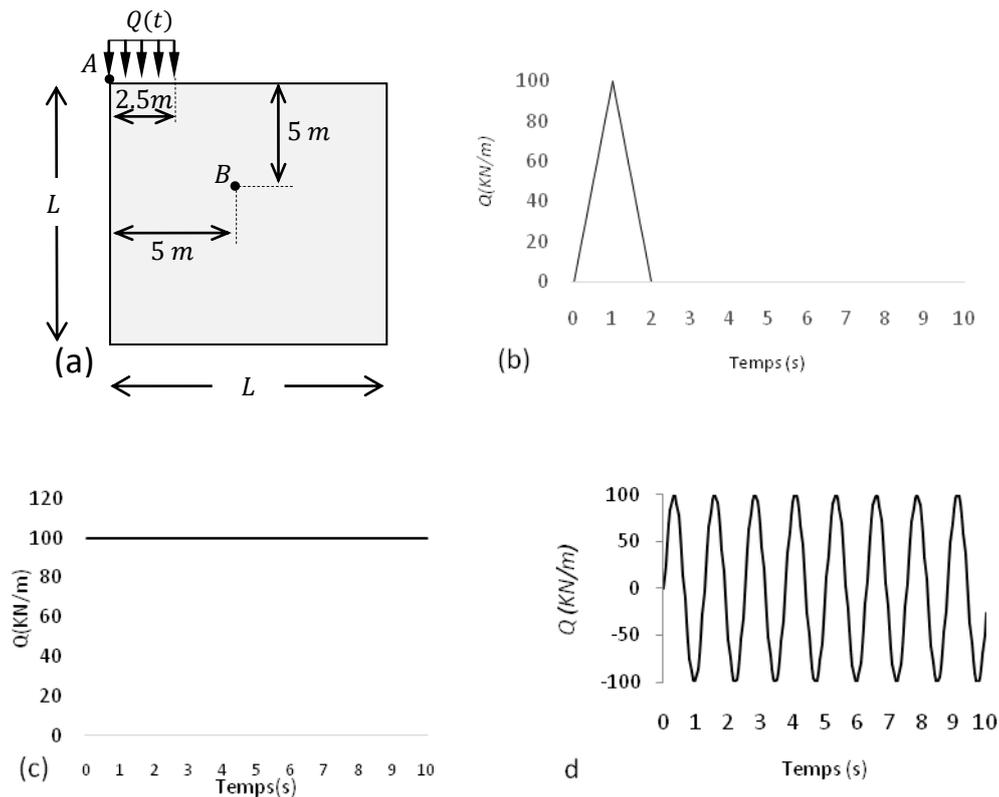


Figure 4-7: Géométrie et chargement concentré

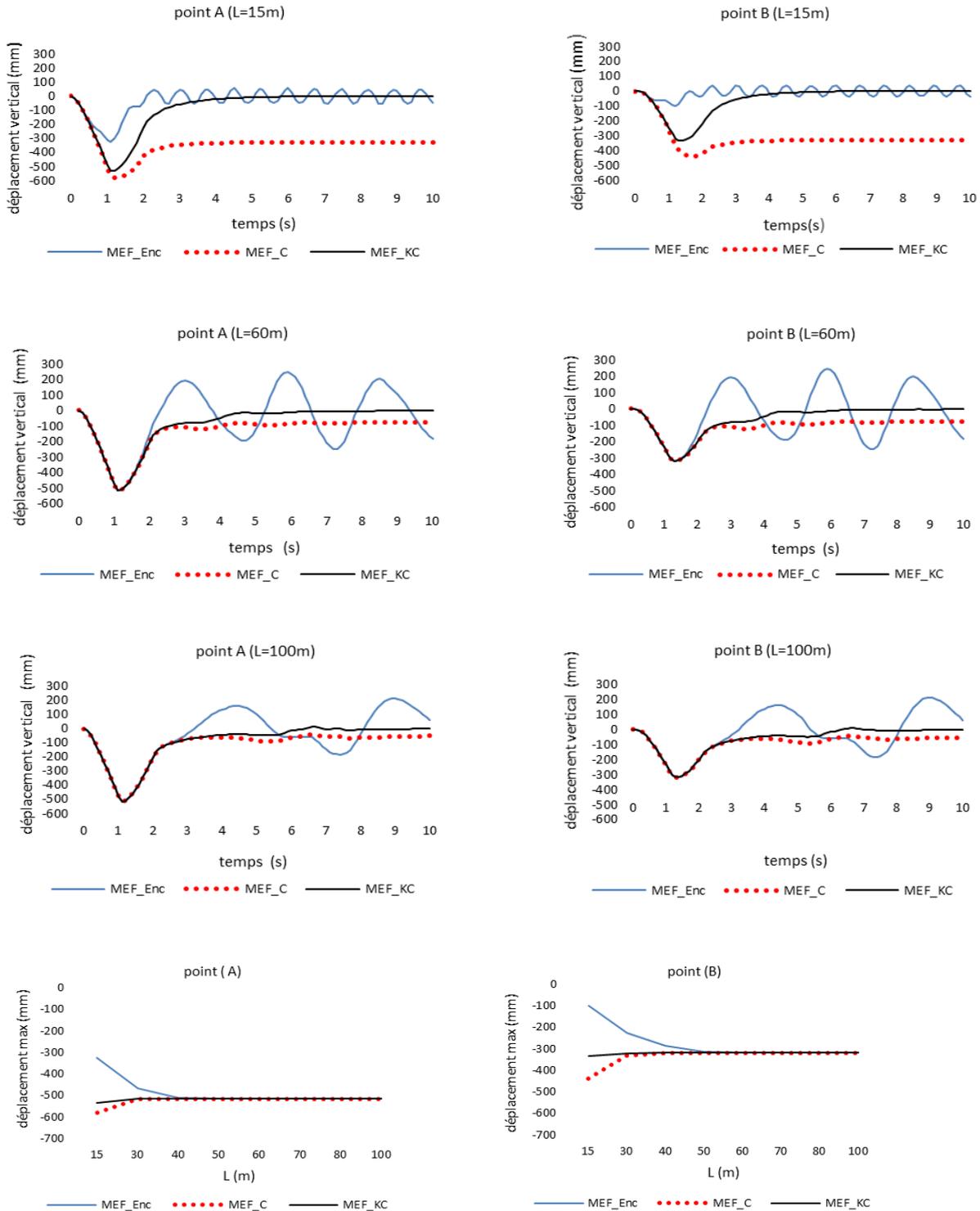
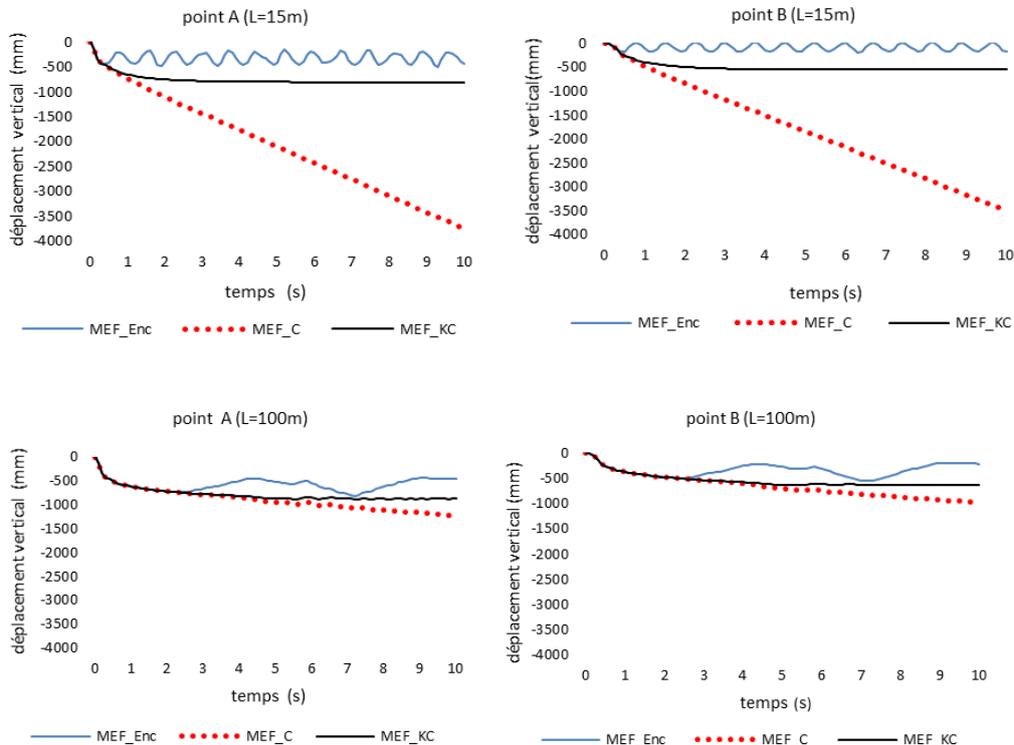


Figure 4-8: Déplacements verticaux sous charge triangulaire

Sous chargement triangulaire, on constate que pour $L = 15\text{ m}$, sur la première seconde qui correspondent au temps d'application de la charge, la solution obtenue avec MEF_C et MEF_KC se concorde parfaitement. Au-delà de cet instant, les deux solutions s'écartent entre elles, où l'allure de la solution MEF_KC se converge vers zéros et cela semble logique car au-

delà de la première seconde, le chargement est nul. Par contre celle de MEF_C se converge vers un déplacement aux alentours de 300 mm même après la cessation de la sollicitation. Concernant le modèle MEF_Enc, on constate une nette séparation avec les deux autres modèles et il présente des mouvements oscillatoires et cela est dû à l'encastrement de la limite de troncature qui produit des réflexions. Pour $L = 60 m$, sur les deux première seconde on constate que les trois modèles coïncident parfaitement et au-delà de cet instant on remarque une légère séparation entre les modèles MEF_C et MEF_KC. Pour le modèle MEF_Enc, on constate une nette séparation avec les deux autres modèles et il présente des mouvements oscillatoires. Pour $L = 100 m$, les deux modèles MEF_C et MEF_KC fournissent des résultats qui se concordent parfaitement sauf un écart du modèle MEF_Enc qui se produit à partir de la troisième seconde, les constats effectués sont les pour les deux points d'observation que ce soit A ou B. De plus, l'étude de la convergence de la solution, en fonction de positionnement de la limite de troncature L , montre que les déplacements maximaux, obtenus par les modèles MEF_C et MEF_KC, se stabilisent à partir d'une position de $L = 30 m$ pour le point A et B, et ceux du modèle MEF_Enc se stabilisent à $L=40 m$ pour le point A et à $L=50 m$ pour le point B. Il est à noter que ces constats qu'on vienne de faire sont relatifs au chargement triangulaire utilisé dans cette étude.



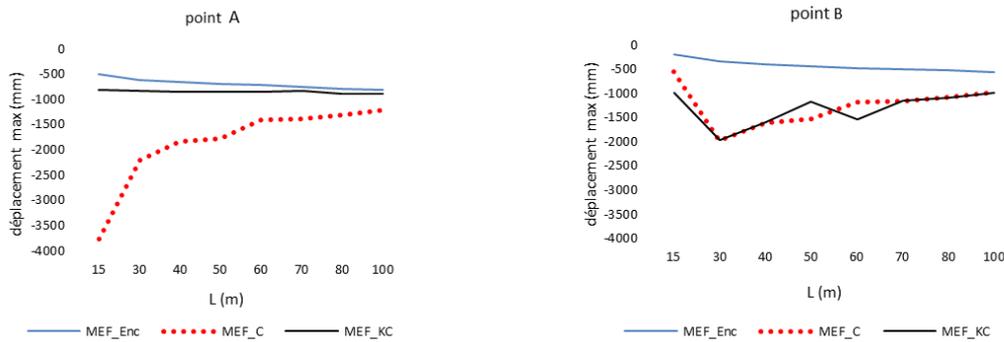


Figure 4-9 :Déplacements verticaux sous charge constante

Sous chargement constant, on constate que pour $L = 15 m$, le modèle MEF_Enc présente un mouvement oscillatoire, autour de l'axe des temps, et cela le long de la durée de la charge. Concernant le modèle MEF_KC, la solution présente une allure décroissante durant les trois premières seconde, et se stabilise ensuite aux alentours de 750 mm. Par contre, le modèle MEF_C présente une allure qui décroît linéairement le long de la durée du chargement, et cela peut être expliqué du fait que la seule condition imposée à la limite de troncature est uniquement des amortisseurs. Pour $L = 60 m$, sur les deux première seconde on constate que les trois modèles coïncident parfaitement et au-delà de cet instant on remarque une nette séparation de la solution du modèle MEF_Enc avec les deux autres. Pour $L = 100 m$, les mêmes remarques sont observées avec celles qui correspondent à $L = 60 m$ sauf qu'ici, la séparation du modèle MEF_Enc avec les deux autres se produit à partir de la troisième seconde, les constats effectués sont les mêmes pour les deux points d'observation que ce soit A ou B . Dans ce cas de chargement, l'étude de convergence de la solution, en fonction de positionnement de la limite de troncature L , à montre que les déplacements maximaux, obtenus pour le point A par les modèles MEF_KC, se stabilisent aux alentours de -800 mm et cela pour toutes les positions de la limite de troncature. Même constat peut être effectué pour le modèle MEF_Enc mais la solution se stabilise aux alentours de -500 mm. Par contre, le modèle MEF_C, est très influencé par ce type de chargement et la taille du domaine, et sur lequel la convergence à d'autres modèles ne peut être observée que pour des positions de L très éloignées. Concernant le point B, pour les modèles MEF_KC, se stabilisent aux alentours de -800 mm et cela pour toutes les positions de la limite de troncature. Les deux solutions MEF_KC et MEF_C se stabilisent aux alentours de -1000mm.

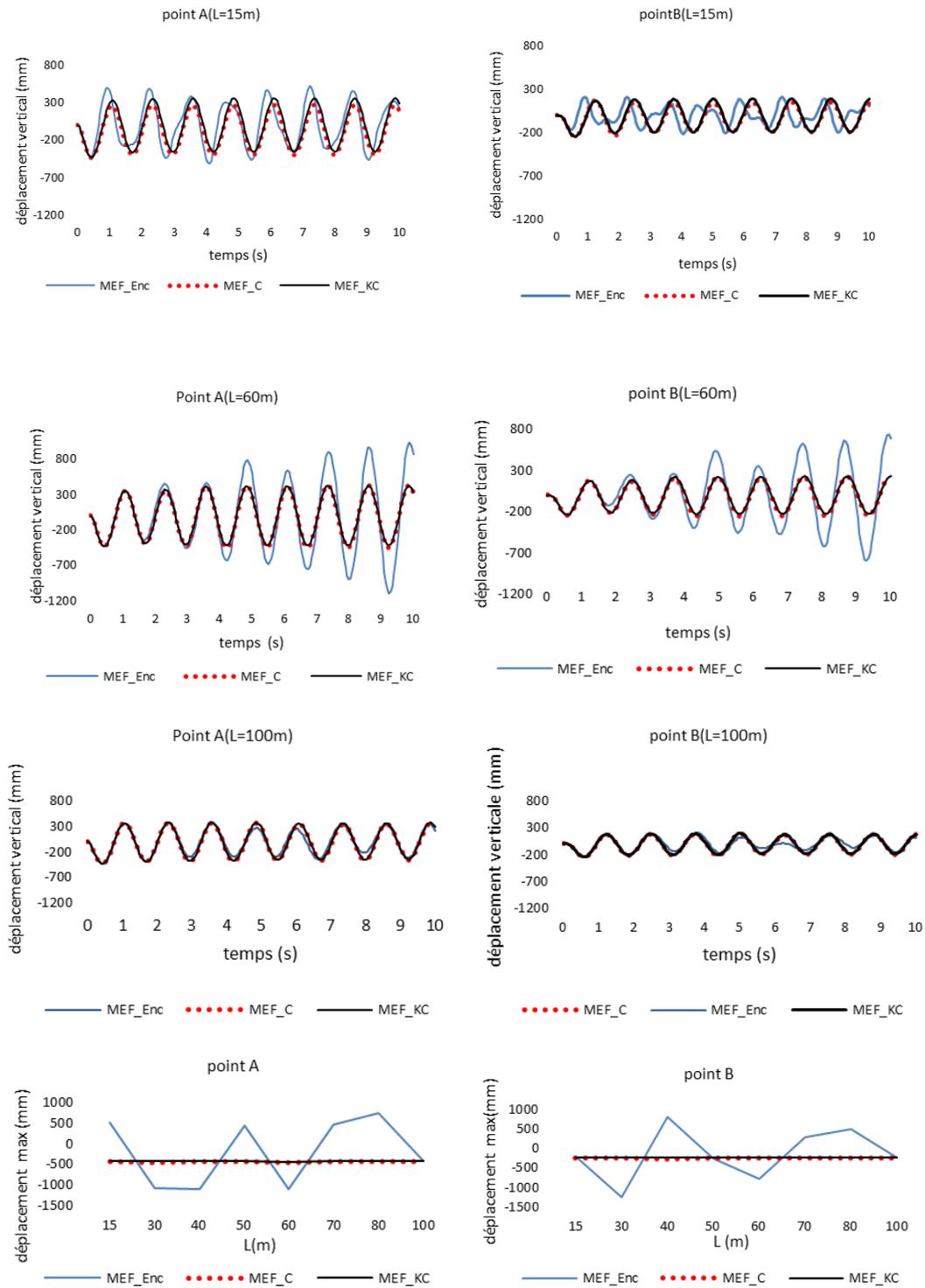


Figure 4-10: Déplacements verticaux sous charge sinusoïdale $\omega=5\text{rad/s}$

Sous chargement sinusoïdal ($\omega = 5 \text{ rad/s}$), on constate que pour $L = 15 \text{ m}$, les modèles MEF_KC et MEF_C fournissent presque les mêmes résultats avec un léger écart. Par contre,

le modèle MEF_Enc présente des petites amplitudes au début du chargement et qui s'amplifient au fur et à mesure, avec le temps, le long de la durée du chargement. Pour $L = 60 m$ et $L = 100 m$, les modèles MEF_C et MEF_KC sont nettement confondus. De même pour le modèle MEF_Enc, sauf un écart qui est observé à partir de la quatrième seconde correspondant à $L = 60 m$. Quant à l'étude de la convergence de la solution, dans ce cas de chargement est délicate, car la réponse dynamique dépend essentiellement de la fréquence d'excitation. Plus la taille du domaine augmente, plus la fréquence propre du modèle change et plus le risque de résonance est grand. D'ailleurs, comme on le constate sur la figure, pour les modèles MEF_KC et MEF_C se coïncident parfaitement et cela pour toutes les positions de la limite de troncature.

4.5 Conclusion

Le traitement de la limite de troncature par des éléments absorbants, que ce soit par des forces d'amortissement ou par des forces de raideur, améliore considérablement les modèles de calcul en éléments finis en réduisant énormément la taille du domaine d'étude tout en gardant la précision des résultats recherchés. Néanmoins, l'utilisation de forces d'amortissement seule dans certains chargements s'avère inefficace comme par exemple dans le cas de chargement constant. De plus, l'inconvénient de l'introduction de forces d'amortissement seules réside dans l'impossibilité d'analyser les vibrations libres du système. Donc, l'utilisation de forces d'amortissement conjointement avec les forces de raideur est recommandée.

Conclusion générale

Ce travail a fait l'objet de notre mémoire de fin de cycle dont le thème est l'utilisation des éléments absorbants en élastodynamique des domaines semi-infinis. Dans notre travail nous avons traité la limite de troncature du domaine par des forces d'amortissement seules, ensuite par des forces d'amortissements conjointement avec les forces de raideurs. Les conclusions les plus importantes qui peuvent être tirées de ce travail sont:

- L'utilisation des éléments absorbants issus des forces d'amortissement seules ne permet pas l'analyse des vibrations libre du système et ce type de conditions aux limites conduit à des singularités lors du calcul des vibrations et des modes propres.
- La discrétisation des éléments absorbant par éléments finis conduit à des matrices d'amortissement et de raideur non proportionnelles qui exige la résolution dans le domaine temporel par la méthode d'intégration directe pas à pas.
- L'utilisation des éléments absorbant dans le calcul des domaines non bornés permet d'une part, la réduction de la taille du domaine d'étude, et d'autres parts, l'amélioration de la précision de la solution recherchée.
- Dans certains types de chargements comme par exemple dans le cas de chargement constant, l'utilisation de forces d'amortissement seule s'avère inefficace. Afin de contourner cet inconvénient, il est préférable de les utiliser conjointement avec les forces de raideur.

Bibliographie

- [1] Abdel-Fattah, T.T., Hodhod, H.A. & Akl, A.Y. « *A novel formulation of infinite elements for static analysis* », Computers & structures 77 (2000) 371-379.
- [2] Adjissa K., Izem Y., «calcul des tassements instantanés et différés des sols sous fondations sous fondations sous fondations sous fondations par couplage éléments finis-infinis» ingénieures d'état.
- [3] Basu U., Chopra A.K., Perfectly matched layers for acoustic and elastic waves, rapport DSO-07-02, October 2008, Danver, Colorado.
- [4] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for elastic waves and applications to earthquake analysis of dams* », 16th ASCE Engineering mechanics conference, Washington, July 2003.
- [5] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains : theory and finite-element implementation* », Comput Methods ApplMechEngrg, 192 (11-12) (2003) 1337-1375.
- [6] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains* », International journal for numerical methods in engineering, 2004, 59(8) :1039-1074.
- [7] Becker A. A., The boundary elements method in Engineering-Acomplete cours, McGraw-Hill International, 1992.
- [8] Bettess, P. « *Infinite Elements* », Penshaw Press, 1992.
- [9] Bonnet G. ,Coorfdir A., Nguyen M. T., «On the solution of exterior plane problems by the boundary element method : A physical point of view», Engineering Analysis with boundary elements, N° 38, 2014, p 40-48.
- [10] Bonnet, M., Equations intégrales et éléments de frontières, Eyrolles, Paris, 1995.

- [11] Bourouba A. « traitement des conditions aux limites de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structure »,Thèse de magister 2008. Département de génie civil, université de A. Mira de bejaia.
- [12] Cetin, M & Mengi, Y. « *Transmitting boundary conditions suitable for analysis of dam-reservoir interaction and wave load problems* », *Applied Mathematical Modelling*, 27(2003) 451-470.
- [13] Enrique Luco, J. « *Approximate external boundaries for truncated models of unbounded media* », *Proceedings third UJNR workshop on soil-structure interaction*, march 2004, California, USA.
- [14] Fauqueux S., *Eléments finis spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*, Thèse de Doctorat, Université Paris IX Daphne, 2003
- [15] Filiatrault, A. « *Eléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures* », Edition de l'école polytechnique de Montréal, 1996.
- [16] Fotini E.M., Vlasis K.K., « *Absorbing boundary conditions and perfect matched layer models for plane soil-structure interaction problems* », *5th GRACM International congress on computational mechanics*, Limassol, 29 June-1 July, 2005
- [17] Imbert D., *Propagation d'ondes acoustiques dans une suspension de grains mobiles immergés : couplage de modèles discret et continu par la méthode des domaines fictifs*, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2013.
- [18] Karpurapu, G.R & Bathurst, R.J. « *Comparative analysis of some geomechanics problems using finite and infinite element methods* », *Computers and Geotechnics* 5, (1988), 269-284.
- [19] KatsiKadelis J. T., *Boundary element : Theory and Application*, Elsevier science 2002.
- [20] Khani, M.H.B.M. « *Dynamic soil-structure interaction analysis using the scaled boundary finite-element method* », Phd thesis, The University of New South Wales Sydney, Australia, 2007.
- [21] Komatitsch, D. & Tromp, J. « *A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation* », *Geophysical journal international*, (2003) 154, 146-153.
- [22] Livaoglu, R. & Dogangun, A. « *Effect of foundation embedment on seismic behavior of elevated tanks considering fluid-structure-soil interaction* », *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(2007) 855-863.
- [23] Maity, D. « *A novel far-boundary condition for the finite element analysis of infinite reservoir* », *Applied Mathematics and Computation*, 170 (2005), 1314-1328.

- [24] Mesquita, E. & Pavanello, R. « *Numerical methods for the dynamics of unbounded domains* », *Comp. Appl. Math*, Vol. 24, N. 1, 1-26, 2005.
- [25] Michou, F.E. & Koumoussis, V.K. « *Absorbing boundary conditions and perfect matched layer models for plane soil-structure interaction problems* », 5th GRAM international congress on computational mechanics, Limassol, 29 June-1 July, 2005.
- [26] Mike R. Ross, « *Coupling and Simulation of Acoustic Fluid-Structure Interaction Systems Using Localized, Lagrange Multipliers* », Phd thesis, University of Colorado, 2006.
- [27] Nanning M., *Infinite elements for elasto-poroelastodynamics*, Verlag der technischen universität Graz, 2010.
- [28] Nguyen M. T., *Contribution à la formulation symétrique du couplage equation intégrale – éléments finis. Application à la géotechnique*, Thèse de doctorat, Université Paris est, 2010.
- [29] Nguyen, V.H. « *Comportement dynamique de structures non linéaires soumises à des charges mobiles* », Thèse de doctorale, Ecole Nationale des pont et chaussées, France, 2002.
- [30] Nguyen, K.V. « *Etude des effets de site dus aux conditions topographiques et géotechniques par une méthode hybride éléments finis/éléments frontières* », Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2005.
- [31] Pecker, A. « *Dynamique des structures et des ouvrages* », Site Internet : http://www.enpc.fr/formation/ecole_virt/coursPecker.
- [32] Reheman O., Shiojiri H., « *Application of PML to analysis of nonlinear soil-structure-fluid interaction problem using mixed element* », *Int Nat Jour of Geomat*, Vol. 4, n° 2, 2013, p. 505-510.
- [33] SAP2000 10.0.1, « *Structural analysis program* », Computers and structures, INC, 2005.
- [34] Seghir, A. « *Investigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments finis-infinis* », Thèse de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1999.
- [35] Sharan, S.K. « *A non reflecting boundary in fluid-structure interaction* », *Computer & Structure*, vol 26, N° 5, pp : 841-846, 1987.
- [36] Sitharam, T.G. & Vijay Kumar, I.V. « *Non-linear analysis of geomechanical problems using coupled finite and infinite elements* », *Geotechnical and Geological engineering*, 16, 129-149, 1998.

- [37] Tiliouine, B. & Seghir, A. « *A numerical model for time domain analysis of dams including fluid-structure interaction* », CST 98 International Conference, Edinburg, Scotland, 18th – 20th August, 1998.
- [38] Viladkar, M.N., Noorzaei, J. & Godbole, P.N. « *Behaviour of infinite elements in an elasto-plastic domain* », Computers & structures, vol. 51, N. 4, pp. 337-342, 1994.
- [39] Weber, B. « *Rational transmitting boundaries for time-domain analysis of dam-reservoir interaction* », D thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 1994. Diss. 10673.
- [40] Westergaard, H.M. « *Water pressures on dams during earthquakes* », ASCE, Novembre 1931, 1303-1318.
- [41] Wilson, E. « *Three dimensional static and dynamic analysis of structures ; A physical approach with emphasis on earthquake engineering* », Computer and Structures, Inc, 2001.
- [42] Wolf, J.P. « *The scaled boundary finite element method* », John Wiley & Sons, Chichester, England, 2003.
- [43] Wolf, J.P. & Song, C. « *Finite-element modelling of unbounded media* », John Wiley & Sons, Chichester, England, 1996.
- [44] Yun, C.B., Kim, D.K. & Kim, J.M. « *Analytical frequency-dependent infinite elements for soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium* », Engineering Structures 22 (2000) 258-271.
- [45] Zafati E., Brun M., Djeran-Maigre I., « *Couche parfaitement adaptée hybride multi-pas de temps pour les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux infinis* », 22^{ème} Congrès Français de Mécanique, Lyon, 22-24 Aout 2015, France.
- [46] Zhao C. Dynamic and transient infinite elements, Theory and geophysical, geotechnical and geoenvironmental application. Springer Verlag, Berlin 2009
- [47] Zienkiewicz, O.M. & Taylor, R.L. « *The finite element method, volume 1 :The Basis* », Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.
- [48] Zienkiewicz, O.M. & Taylor, R.L. « *The finite element method, volume 3 :Fluid dynamics* », Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.
- [49] Debongnie.J.F « *Elasticité* » ©DEBONGNIE, Liège, Belgique, 2011
- [50] Banerjee .P.K. « *The Boundary Element Methods in Engineering* » Copyright © McGraw-Hill International (UK), Great Britain at the University Press, 1994.