



Université Abderrahmane Mira de Bejaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Physique

Mémoire de Master

Rédigé par

**DJAHNINE DEHIA**

En vue d'obtention du diplôme de master en Physique

Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

---

**Introduction à l'optique quantique**

---

Soutenu le 31/10/2020 devant le Jury:

Mr GHARBI A.	Professeur	Président	Université de Béjaïa
Mr BELABBAS A.	MCA	Examineur	Université de Béjaïa
Mr BELHADI Z.	MCA	Encadrant	Université de Béjaïa

**Année universitaire 2019/2020**

# DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail

A mon père,

A ma mère,

A mes sœurs « Ouassila et Hassiba », ainsi qu'à leurs familles,

A mes frères « Nabil, Tarak et Massi », ainsi qu'à leurs familles,

Aux petits jumeaux « Ghaiith et Manassa ».

# REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie Dieu de m'avoir donné la force et la patience pour terminer et d'achever ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur Monsieur **BELHADI Zahir**, Maître de conférences à l'université de Bejaia, pour la confiance qu'il m'a accordé, pour son aide, ses encouragements, sa patience et son soutien pour mener à bien ce travail.

Je remercie également les membres du jury Monsieur **GHARBI Abdelhakim**, Professeur à l'université de Bejaia et Monsieur **BELABBAS Abdelmoumene**, Maître de conférences à l'université de Bejaia, qui m'ont honoré de présider et d'examiner ce travail.

Je remercie aussi mes enseignants du Master de physique théorique de l'université de Bejaia, et sans oublier toute ma famille.

Et je remercie spécialement Coronavirus

---

# Table des matières

Introduction .....	1
1 L'Oscillateur Harmonique Quantique .....	3
1-1 L'oscillateur harmonique classique .....	3
1-2 L'oscillateur harmonique quantique .....	5
1-3 Principe d'incertitude avec l'oscillateur harmonique .....	8
1-4 Les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique.....	9
1.5 La fonction de Wigner .....	12
2 Quantification du Champ Electromagnétique .....	18
2-1 Champ électromagnétique monomodale .....	18
2.1.1 Equations de Maxwell pour le champ électromagnétique.....	16
2.1.2 L'énergie du champ électromagnétique.....	19
2.1.3 Quantification du champ électromagnétique à un mode.....	21
2.1.4 Opérateurs de quadrature pour un champ monomodal .....	23
2.2 Champ électromagnétique multimodal .....	24
2.2.1 Les champs décomposés en série de Fourier .....	23
2.2.2 Variables normales.....	25
2.2.3 Hamiltonien du champ électromagnétique libre .....	27
2.2.4 Quantification du rayonnement.....	29
2.2.5 Les états du champ quantifié et les photons.....	31
3 Etats de Fock et Etats Cohérents de la Lumière .....	35
3.1 L'état de vide.....	35
3.2 Les états de Fock.....	37
3.3 Les états cohérents .....	43
3.4 État « chat de Schrödinger » .....	48
3.5 Les états thermiques.....	50
4 Etats comprimés de la lumière .....	59
4.1 L'état comprimé .....	59
4.1.1 L'état cohérent comprimé .....	60
4.1.2 L'état de vide comprimé.....	62
4.1.3 Les vecteurs propres et les valeurs propres de l'état cohérent comprimé.....	63
4.1.4 La représentation de nombre du photon .....	63
4.1.5 La fonction de Wigner pour l'état de Fock comprimé.....	65
4.2 L'état comprimé à deux modes .....	69

Conclusion.....	70
Bibliographie.....	70

---

# Introduction Générale

L'optique est la branche de la physique qui traite de la lumière, de son comportement et de ses propriétés. Mais, comment la matière et la lumière interagissent-elles ? C'est une question que les physiciens se sont posés depuis l'antiquité, en constatant que de nombreux phénomènes physiques sont des phénomènes en relation d'une façon ou d'une autre aux différents aspects de la lumière.

La recherche sur la nature de la lumière a commencé depuis l'antiquité en passant par Ibn Al-Haythame, Snell (1621) et Descartes (1637). Ils ont défini et modélisé la lumière par les rayons lumineux qui constitue l'optique géométrique, fondée sur la description mathématique de la réflexion et de la réfraction. En XVIIème siècle, Newton a considéré que la lumière est constituée de corpuscules, ce qui est le début de la théorie corpusculaire, mais cette théorie ne pouvait expliquer les phénomènes de diffraction et d'interférence.

Donc, une nouvelle théorie a été introduite, à savoir, la théorie ondulatoire, énoncée par Huygens, considère que la lumière est une onde, théorie développée et démontrée par Young et Fresnel au début de XIXème siècle, ensuite Formalisée à la fin de XIXème siècle par Maxwell dans la théorie de l'électromagnétisme, qui a montré que la lumière est un faisceau d'ondes électromagnétiques.

Mais s'il reste quelque chose d'inexpliqué, c'est l'émission et l'absorption de la lumière par la matière. En effet, en 1900, Max Planck introduisit l'idée de quantification de l'énergie, qui supposant que la matière ne peut émettre et absorber une lumière de fréquence  $\nu$  par quantité d'énergie finies et égale à  $h\nu$  ou par « quanta » d'énergie  $h\nu$  ; et  $h$  aujourd'hui nommée « la constant de Planck ». Cette théorie a été précisée et réinterprétée par Albert Einstein, en 1905, qui a supposé que toute lumière de fréquence  $\nu$  est constituée de corpuscules d'énergie  $h\nu$ , appelées « quanta de la lumière », aujourd'hui connus sous le nom de photons.

En 1924, De Broglie énonce la dualité onde-corpuscule, stipulant que, si les ondes lumineuses ont un caractère corpusculaire, les particules qui forment la matière peuvent à leur tour avoir un comportement ondulatoire. C'est la première étape qui marque le début d'une série de succès des physiciens. Cette dualité marque le début de la physique quantique moderne.

L'optique quantique est un domaine vaste de la physique moderne, qui est consacré à l'étude de l'interaction entre la lumière et la matière. Il a été mis au point pour réconcilier l'aspect ondulatoire et l'aspect corpusculaire de la lumière. En d'autres termes, l'optique quantique est une reformulation de l'optique ondulatoire dans laquelle le champ

---

électromagnétique est quantifié. L'intérêt de ce domaine réside dans l'utilisation des photons dans les protocoles de communication et la cryptographie quantique ainsi que l'information quantique, ce qui fait de lui un domaine de recherche très actif.

Le but de ce mémoire de fin d'étude est de présenter les outils théoriques nécessaires à la description des aspects de la lumière, et d'énoncer les concepts de base de l'optique quantique avec des variables discrètes et continues.

Nous allons scinder ce mémoire en quatre chapitres. Le premier chapitre sera consacré à l'oscillateur harmonique quantique en rappelant le passage de la version classique à la version quantique et comment s'obtiennent les valeurs propres et les fonctions d'onde. Nous présenterons aussi la fonction de Wigner avec ses propriétés.

Dans le second chapitre, nous ferons un rappel de la solution monomodale des équations de Maxwell dans le vide, et nous exploiterons l'analogie entre un mode du champ classique et un oscillateur harmonique pour quantifier ce champ électromagnétique à un mode. Par la suite, nous généraliserons ces résultats au champ multimodal du rayonnement. À la fin de ce chapitre nous expliquerons la notion de photon en introduisant l'espace de Fock.

Dans le troisième chapitre nous discuterons quelques états quantiques de la lumière, notamment, les états de Fock, les états cohérents, les états chat de Schrödinger et les états thermiques. Nous calculerons et représenterons les fonctions de Wigner de chacun de ces états.

Le quatrième chapitre sera dédié aux états comprimés de la lumière à un mode, à savoir, l'état de vide comprimé et l'état cohérent comprimé. Pour terminer, nous allons introduire les états comprimés à deux modes ou l'état EPR. Nous calculerons dans ce chapitre, la fonction de Wigner des états de Fock comprimés.

# 1 L'Oscillateur Harmonique Quantique

L'étude du champ électromagnétique quantifié se ramène à un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantiques. Pour cette raison nous allons d'abord commencer par l'oscillateur harmonique en rappelant comment faire le passage de l'état classique à l'état quantique à travers les opérateurs de création. Les états propres et leurs valeurs propres associées ainsi que les valeurs moyennes et les variances des différents opérateurs seront calculés avec tous les détails nécessaires. Nous allons terminer le chapitre par présenter la fonction de Wigner et ses propriétés qui vont nous être très utiles dans l'étude des différents états de la lumière.

## 1-1 L'oscillateur harmonique classique

En mécanique classique le problème d'un oscillateur harmonique correspond à un point matériel de masse  $m$ , soumis à une force de rappel  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  où  $k$  est une constante positive comme dans le cas d'un ressort.

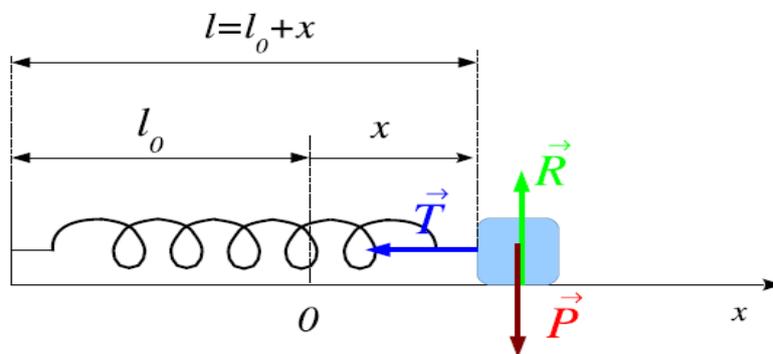


Figure 1 : Système oscillatoire masse-ressort.

L'équation du mouvement se déduit du principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masse  $m$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\vec{R} + \vec{P}}_0 + \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -k \underbrace{(l - l_0)}_x \vec{i} = m\vec{a} \quad (1.1.1)$$

Le mouvement de la masse étant horizontal, après projection de l'équation sur  $\vec{i}$  on obtient l'équation de mouvement

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.1.2)$$

Où  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ . La solution de cette équation différentielle de 2<sup>ème</sup> degré est de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (1.1.3)$$

avec  $A$  et  $B$  étant des constantes d'intégration.

L'oscillateur harmonique est un système dont les équations dérivent du lagrangien

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2. \quad (1.1.4)$$

Le moment conjugué de  $x$  sera alors

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m} \quad (1.1.5)$$

d'où le hamiltonien

$$H = \dot{x}p - L \quad \Rightarrow \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.1.6)$$

Les équations de Hamilton seront alors

$$\dot{x}(t) = \partial_p H = \frac{1}{m} p(t) \quad ; \quad \dot{p}(t) = -\partial_x H = -m \omega^2 x(t) \quad (1.1.7)$$

Afin de déterminer de crochets de Poisson, nous allons utiliser les relations  $\dot{x} = \{x, H\}$  et  $\dot{p} = \{p, H\}$ , ce qui implique que

$$\{x, x\} = \{p, p\} = 0. \quad ; \quad \{x, p\} = 1 \quad (1.1.8)$$

Avant de passer à la version quantique de l'oscillateur harmonique, nous allons introduire les variables

$$P(t) = \frac{p(t)}{\sqrt{m\omega}} \quad ; \quad X(t) = \sqrt{m\omega} x(t) \quad (1.1.9)$$

qu'on va réunir dans une nouvelle quantité complexe  $\alpha(t)$  définie par

$$\alpha(t) = \frac{X(t) + iP(t)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{m\omega}x(t) + i \frac{p(t)}{\sqrt{m\omega}} \right) \quad (1.1.10)$$

dont la variable conjugué est

$$\alpha^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{m\omega}x(t) - i \frac{p(t)}{\sqrt{m\omega}} \right) \quad (1.1.11)$$

A présent, le hamiltonien va prendre la forme

$$H = \omega \alpha^* \alpha \quad (1.1.12)$$

L'équation de mouvement de  $\alpha(t)$  s'obtient comme suit

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{m\omega} \dot{x}(t) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \dot{p}(t) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\omega}{m}} p(t) - i\omega \sqrt{m\omega} x(t) \right) \quad (1.1.13)$$

d'où l'équation

$$\dot{\alpha}(t) = -i\omega \alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha} = -i \frac{\partial H}{\partial \alpha^*} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}^* = i \frac{\partial H}{\partial \alpha} \quad (1.1.14)$$

La solution de l'équation précédente est de la forme

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \quad (1.1.15)$$

Avec cette variable complexe, nous avons montré qu'il est possible d'écrire les équations de Hamilton sous forme de deux équations linéaires séparées, ce qui a rendu leur résolution immédiate.

## 1-2 L'oscillateur harmonique quantique

En mécanique quantique, l'oscillateur harmonique est aussi un système simple exactement soluble dans toutes les images de Schrödinger et Heisenberg. Son étude est d'une grande importance en théorie quantique car son hamiltonien intervient dans tous les problèmes qui dépendent des oscillations quantifiées.

A partir de l'équation (1.1.6), on obtient l'opérateur hamiltonien du système en remplaçant les grandeurs  $x$  et  $p$  par les observables (opérateurs hermitiens)  $X$  et  $P_x$

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \quad (1.2.1)$$

Comme  $H$  ne dépend pas explicitement du temps ( $\partial_t H = 0$ ), ce système est stationnaire et son étude se ramène à la résolution de l'équation aux valeurs propres

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (1.2.2)$$

où les kets  $|n\rangle$  sont les vecteurs propres de l'opérateur  $H$ .

A ce stade, introduisons les opérateurs d'échelle définis par les expressions

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \quad ; \quad \hat{P}_X = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P_x \quad ; \quad \hat{H} = \frac{H}{\hbar\omega} \quad (1.2.3)$$

Il est facile de voir qu'avec ces opérateurs, nous avons la relation réduite

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}_X^2 + \hat{X}^2) \quad (1.2.4)$$

Pour continuer, définissons les deux opérateurs  $\hat{a}$  et son adjoint  $\hat{a}^+$  comme suit

$$\hat{a} = \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \hat{a}^+ = \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad (1.2.5)$$

Ces deux formules s'inversent facilement pour donner

$$\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \hat{P} = \frac{i(\hat{a} - \hat{a}^+)}{\sqrt{2}} \quad (1.2.6)$$

A présent calculons  $\hat{a}^+\hat{a}$ .

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2 + i[\hat{X}, \hat{P}]) \quad (1.2.7)$$

En utilisant le fait que le commutateur  $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ , on obtient la relation

$$\frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2) = \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \quad (1.2.8)$$

d'où l'expression de  $\hat{H}$  en fonction de  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^+$

$$\hat{H} = \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} = \hat{N} + \frac{1}{2} \quad (1.2.9)$$

avec l'opérateur  $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$  ayant les mêmes vecteurs propres que  $\hat{H}$ .

Nous allons maintenant résoudre le problème aux valeurs propres

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (1.2.10)$$

Où  $|n\rangle$  est un vecteur propre de  $\hat{N}$  avec la valeur propre  $n$ . Il faut remarquer que

$$\hat{H}|n\rangle = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \quad (1.2.11)$$

Donc  $|n\rangle$  est vecteur propre de  $\hat{H}$  avec la valeur propre  $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)$ . Il s'en suit que  $|n\rangle$  est aussi vecteur propre de  $H$  avec la valeur propre  $E_n = \hbar\omega\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ .

Afin de déterminer le spectre de  $\hat{N}$ , nous aurons besoin des relations de commutation

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad ; \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad ; \quad [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \quad (1.2.12)$$

A partir de ces dernières, on déduit que

$$\begin{cases} \widehat{N}|n\rangle = n|n\rangle \\ \widehat{N}\widehat{a}|n\rangle = (\widehat{a}\widehat{N} - \widehat{a})|n\rangle = (n-1)\widehat{a}|n\rangle \\ \widehat{N}\widehat{a}^+|n\rangle = (\widehat{a}^+\widehat{N} + \widehat{a}^+)|n\rangle = (n+1)\widehat{a}^+|n\rangle \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Alors  $|n\rangle$ ,  $\widehat{a}|n\rangle$  et  $\widehat{a}^+|n\rangle$  sont des vecteurs propres de  $\widehat{N}$  avec les valeurs propres respectives  $(n)$ ,  $(n-1)$  et  $(n+1)$ . Cela nous permet d'avoir les relations suivantes

$$\begin{cases} \widehat{N}\widehat{a}|n\rangle = (n-1)\widehat{a}|n\rangle \\ \widehat{N}|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle \end{cases} \Rightarrow \widehat{a}|n\rangle = C_1|n-1\rangle \quad (1.2.14)$$

et

$$\begin{cases} \widehat{N}\widehat{a}^+|n\rangle = (n+1)\widehat{a}^+|n\rangle \\ \widehat{N}|n+1\rangle = (n+1)|n+1\rangle \end{cases} \Rightarrow \widehat{a}^+|n\rangle = C_2|n+1\rangle \quad (1.2.15)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des coefficients de proportionnalité qu'on va déterminer en calculant les normes de  $\widehat{a}|n\rangle$  et  $\widehat{a}^+|n\rangle$ . En effet

$$\begin{cases} \|\widehat{a}|n\rangle\|^2 = \langle n|\widehat{a}^+\widehat{a}|n\rangle = \langle n|\widehat{N}|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n \\ \|\widehat{a}^+|n\rangle\|^2 = \langle n|\widehat{a}\widehat{a}^+|n\rangle = \langle n|(\widehat{N}+1)|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle = (n+1) \end{cases} \quad (1.2.16)$$

Déjà, on constate que  $n$  est positif ou nul car  $\|\widehat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0$ . D'un autre côté, comme  $\|\widehat{a}|n\rangle\|^2 = |C_1|^2$  et  $\|\widehat{a}^+|n\rangle\|^2 = |C_2|^2$ , il y a une possibilité de choisir  $C_1 = \sqrt{n}$  et  $C_2 = \sqrt{n+1}$ , et ainsi arriver au résultat

$$\widehat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad ; \quad \widehat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (1.2.17)$$

Ces relations justifient les appellations opérateur d'annihilation de  $\widehat{a}$  et opérateur de création de  $\widehat{a}^+$ . Maintenant examinons le résultat d'application successive de  $\widehat{a}$  sur le ket  $|n\rangle$

$$\widehat{a}^k|n\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\dots\sqrt{n-k+1}|n-k\rangle \sim |n-k\rangle \quad k : \text{entier} \quad (1.2.18)$$

Il est clair que  $\widehat{a}^k|n\rangle$  est proportionnel à  $|n-k\rangle$  qui est un vecteur propre de  $\widehat{N}$  avec la valeur propre  $(n-k)$ . Autrement dit

$$\widehat{N}\widehat{a}^k|n\rangle = (n-k)\widehat{a}^k|n\rangle \quad (1.2.19)$$

Mais nous avons vu que les valeurs propres de  $\widehat{N}$  ne peuvent pas être négatives, ce qui veut dire que  $n-k$  n'est pas vraiment une valeur propre sauf dans le cas où  $n-k \geq 0$ . Donc, il doit y exister un état fondamental  $|0\rangle$  tel que

$$\widehat{a}|0\rangle = 0 \quad (1.2.20)$$

Afin d'être sûr que l'application successive de  $\widehat{a}$  sur tout ket  $|n\rangle$  va finir par donner l'état  $|0\rangle$  pour s'annuler par les applications qui vont suivre en évitant ainsi les valeurs propres négatives. A présent, utilisant la relation  $\widehat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$  pour calculer  $(\widehat{a}^+)^n|0\rangle$ .

En effet

$$\hat{a}^+|0\rangle = |1\rangle(\hat{a}^+)^2|0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \dots (\hat{a}^+)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle \quad (1.2.21)$$

Pour résumer, les vecteurs propres d'un oscillateur harmonique quantique sont les kets  $\{|n\rangle\}$  où  $n$  est entier naturel tel que

$$\begin{aligned} \hat{N}|n\rangle &= n|n\rangle ; \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle ; \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ |n\rangle &= \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle ; \hat{a}|0\rangle = 0 \quad n = 0,1,2,3 \dots \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

### 1-3 Principe d'incertitude avec l'oscillateur harmonique

Dans cette section, nous calculerons les valeurs moyennes et les variances des opérateurs  $X$  et  $P$  afin de faire le lien avec le principe d'incertitude. Commençons par la valeur moyenne de l'opérateur  $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^+)$ .

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \langle n|X|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+|n\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Donc la valeur moyenne de l'opérateur  $X$  est nulle

$$\langle X \rangle = 0 \quad (1.3.2)$$

A présent calculons la variance qui est égale à  $\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  sachant que  $\langle X \rangle = 0$ . En effet,

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n|(\hat{a} + \hat{a}^+)^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n|\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle \quad (1.3.3)$$

En utilisant le fait que  $\langle n|\hat{a}^2|n\rangle = \langle n|\hat{a}^{+2}|n\rangle = 0$ ,  $\langle n|\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle = n+1$  et  $\langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n$ , la variance s'obtient facilement

$$\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) \quad (1.3.4)$$

Passons maintenant à l'opérateur  $P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a})$ . La valeur moyenne dans ce cas est

$$\langle P \rangle = \langle n|P|n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle n|\hat{a}^+ - \hat{a}|n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle - \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle) \quad (1.3.5)$$

ce qui montre également que la valeur moyenne de l'opérateur  $P$  est nulle

$$\langle P \rangle = 0 \quad (1.3.6)$$

Pour la variance nous avons aussi

$$\langle P^2 \rangle = -\frac{\hbar m \omega}{2} \langle n | (\hat{a}^+ - \hat{a})^2 | n \rangle = -\frac{\hbar m \omega}{2} \langle n | \hat{a}^{+2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^+ \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle \quad (1.3.7)$$

d'où

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2} (2n + 1) \quad (1.3.8)$$

Donc, la variance associée à l'opérateur  $P$  est

$$\Delta P^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = \frac{\hbar m \omega}{2} (2n + 1) \quad (1.3.9)$$

A partir des équations précédentes on déduit que

$$(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 = \frac{\hbar^2}{4} (2n + 1)^2 \quad (1.3.10)$$

d'où la relation d'incertitude

$$\Delta X \Delta P = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.3.11)$$

Nous avons ainsi retrouvé le principe d'incertitude de Heisenberg stipulant que la précision de la mesure de la position  $X$  s'accompagne d'une imprécision sur la mesure de l'impulsion. Pour l'état fondamental ( $n=0$ ), la relation d'incertitude est saturée, ce qui veut dire que la précision est maximale.

$$\Delta X \Delta P = \frac{\hbar}{2} \quad (1.3.12)$$

## 1.4 Les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique

L'objectif de cette section est de déterminer les fonctions d'onde associées aux différents états propres de l'oscillateur harmonique en travaillant dans la représentation  $\{|x\rangle\}$  dans laquelle

$$X = x \quad ; \quad P = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (1.4.1)$$

Pour l'état fondamental, nous avons

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x | \hat{a}|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle x \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} P \right) \right| 0 \right\rangle = 0 \quad (1.4.2)$$

d'où l'équation différentielle de la fonction d'onde  $\varphi_0(x) = \langle x|0\rangle$  caractéristique de l'état fondamental

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx} \right) \varphi_0(x) = 0 \quad (1.4.3)$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme

$$\varphi_0(x) = C e^{-\frac{1m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (1.4.4)$$

où  $C$  est une constante d'intégration déterminée par la condition de normalisation qui s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0(x)|^2 dx = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = 1 \quad (1.4.5)$$

En utilisant l'intégrale gaussienne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - \beta x} dx = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \quad (1.4.6)$$

on obtient  $C = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$  et par conséquent,

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (1.4.7)$$

Cette expression témoigne du fait que l'état fondamental d'un oscillateur harmonique est gaussienne (en forme de cloche).

Pour les autres états, nous allons utiliser la formule  $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$  comme suit

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \Rightarrow \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x|(\hat{a}^+)^n|0\rangle \\ &\Rightarrow \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x| \frac{1}{\sqrt{2}^n} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} P \right)^n |0\rangle \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

où  $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$ . Dans la base  $\{|x\rangle\}$ , on a  $X = x$  et  $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$ , donc

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{n/2} \left(x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx}\right)^n \varphi_0(x) \quad (1.4.9)$$

Mais comme  $\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1m\omega}{2\hbar}x^2}$ , les fonctions d'onde des niveaux excités vont être de la forme

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (1.4.10)$$

où les  $H_n$  sont les polynômes d'Hermite d'ordre  $n$  dont les expressions sont

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 0 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12 \\ H_5(y) &= 32y^5 - 160y^3 + 120y \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Les figures ci-dessous sont des représentations des quatre premières fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique quantique.

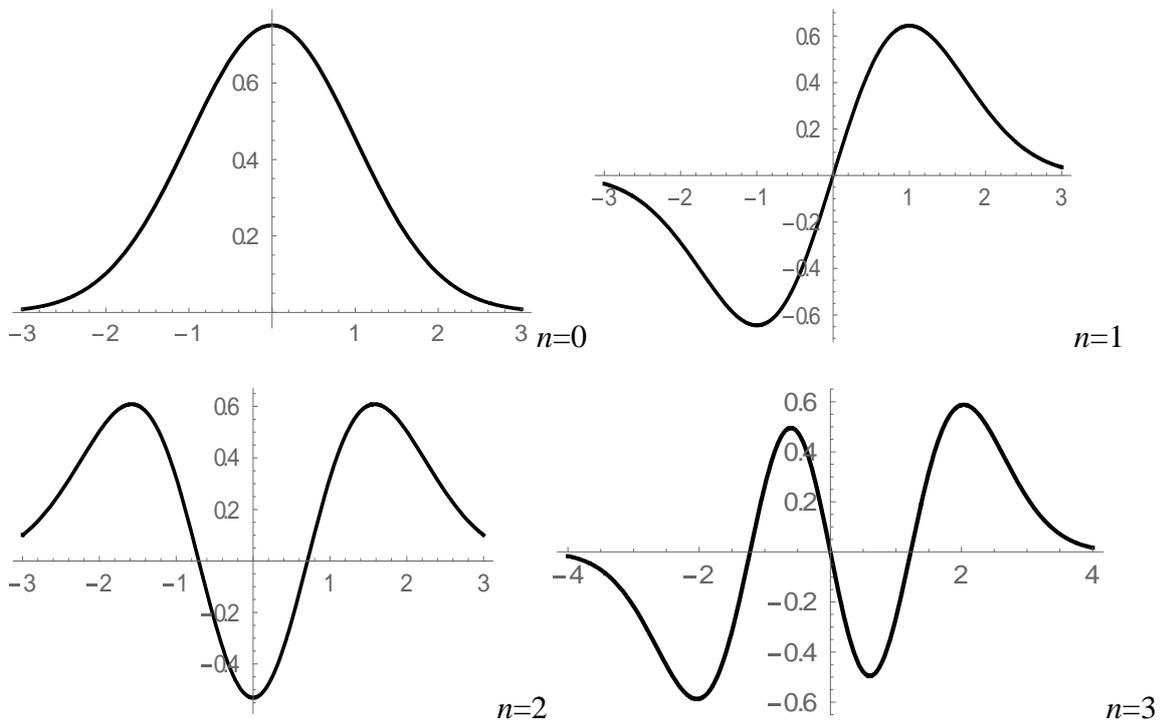


Figure 2 : les quatre premières fonctions d'onde.

## 1.5. La fonction de Wigner

La fonction de Wigner a été introduite pour la première fois par Wigner en 1932 pour calculer des corrections quantiques aux distributions classiques dans le cadre de la thermodynamique et la physique statistique. Elle est dite quasi-distribution de probabilité car elle peut comporter des régions négatives contrairement aux densités de probabilités ordinaires. Aujourd'hui, elle est un outil très puissant pour étudier les propriétés des différents états de la lumière en optique quantique, que ce soit la gaussianité ou la classicalité [24].

La fonction de Wigner  $W(x, p)$  s'obtient comme cas particulier de la transformation de Weyl  $\tilde{A}$  associée à un opérateur  $\hat{A}$  est définie dans la représentation  $x$  par [24,25]

$$\tilde{A}(x, p) = \int e^{-i\frac{py}{\hbar}} \left\langle x + \frac{y}{2} \left| \hat{A} \right| x - \frac{y}{2} \right\rangle dy \quad (1.5.1)$$

En effet, si  $\hat{\rho}$  est l'opérateur densité de notre système, la fonction de Wigner à deux dimensions sera

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-i\frac{py}{\hbar}} \left\langle x + \frac{y}{2} \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{y}{2} \right\rangle dy \quad (1.5.2)$$

Rappelons que dans le cas pur, l'état du système est décrit bel et bien par un ket de l'espace de Hilbert  $|\Psi\rangle$  et l'opérateur densité est de la forme

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (1.5.3)$$

Dans la base  $\{|x\rangle\}$ , nous avons

$$\langle x | \hat{\rho} | x \rangle = \Psi(x)\Psi^*(x) \quad \Rightarrow \quad \int \langle x | \hat{\rho} | x \rangle dx = \int \Psi^*(x)\Psi(x) dx = 1 \quad (1.5.4)$$

ce qui revient à dire que la trace de l'opérateur de densité est égale à un

$$Tr[\hat{\rho}] = 1 \quad (1.5.5)$$

La valeur moyenne de l'opérateur  $\hat{A}$  s'obtient grâce à la relation de fermeture associée à  $|x\rangle$

$$\langle A \rangle = Tr[\hat{\rho}\hat{A}] = \int \langle x | \Psi \rangle \langle \Psi | \hat{A} | x \rangle dx = \int \langle \Psi | \hat{A} | x \rangle \langle x | \Psi \rangle dx = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \quad (1.5.6)$$

Il est clair que dans le cas pur, la fonction de Wigner prend la forme

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-i\frac{py}{\hbar}} \Psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi^*\left(x - \frac{y}{2}\right) \quad (1.5.7)$$

Les choses sont un petit peu différentes avec les mélanges statistiques. Dans certaines situations, un système peut-être préparé comme étant un mélange (classique) de plusieurs états quantiques  $|\Psi_i\rangle$  avec des probabilités  $P_i$ . C'est le cas, si le système est composé de deux parties intriquées où il est impossible de définir un vecteur d'état associé à chacune des parties. Cette approche permet en particulier d'étudier un système couplé avec son environnement.

En tous cas, pour un mélange, la définition de l'opérateur densité devient

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \quad \text{avec} \quad \sum_i P_i = 1 \quad (1.5.8)$$

La fonction de Wigner sera alors calculée en utilisant la définition précédente

$$W(x, p) = \sum_i P_i \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi_i\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi_i^*\left(x - \frac{y}{2}\right) = \sum_i P_i W_i(x, p) \quad (1.5.9)$$

où  $W_i(x, p)$  est la fonction de Wigner obtenue à partir de  $|\Psi_i\rangle$ .

A présent, calculons les intégrales  $\int W(x, p) dp$ ,  $\iint W(x, p) dp dx$  et  $\int W(x, p) dx$ . En effet, en utilisant la relation  $\int dp e^{-\frac{ipy}{\hbar}} = 2\pi\hbar\delta(y)$ , nous aurons

$$\int W(x, p) dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dp e^{-\frac{ipy}{\hbar}} dy \Psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi^*\left(x - \frac{y}{2}\right) = \int \delta(y) \Psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi^*\left(x - \frac{y}{2}\right) dy \quad (1.5.10)$$

$$\int W(x, p) dp = \Psi^*(x) \Psi(x) = |\Psi(x)|^2 \quad (1.5.11)$$

Nous avons ainsi obtenu la densité de probabilité de présence dans l'espace de la coordonnée  $x$ , ce qui nous permet d'en déduire que

$$\iint W(x, p) dp dx = \int |\Psi(x)|^2 dx = 1 \quad (1.5.12)$$

La troisième intégrale quant à elle est

$$\begin{aligned} \int W(x, p) dx &= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dx dy e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi^*\left(x - \frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2} \iint dx dy e^{-\frac{ip}{\hbar}\left(\left(x + \frac{y}{2}\right) - \left(x - \frac{y}{2}\right)\right)} \Psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi^*\left(x - \frac{y}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

ce qui nous suggère de faire le changement de variables  $u = x + y/2$  et  $v = x - y/2$ . Sachant que la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne est égale à un, l'intégrale précédente va prendre la forme réduite

$$\begin{aligned} \int W(x, p) dx &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2} \iint dudv e^{-\frac{ip}{\hbar}(u-v)} \Psi(u) \Psi^*(v) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^2} \int du e^{-\frac{ip}{\hbar}u} \Psi(u) \int dv e^{\frac{ip}{\hbar}v} \Psi^*(v) = \tilde{\Psi}(p) \tilde{\Psi}^*(p) \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Autrement dit,

$$\int W(x, p) dx = |\tilde{\Psi}(p)|^2 \quad (1.5.15)$$

On reconnaît facilement la densité de probabilité liée au moment conjugué, sachant  $\tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int du e^{-\frac{ip}{\hbar}u} \Psi(u)$  n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la fonction d'onde  $\Psi(x)$ .

La fonction de Wigner est toujours réelle, ce qui peut être vu en prenant le conjugué complexe et en changeant les variables d'intégration de  $y$  par  $-y$  dans l'expression obtenue

$$W(x, p)^* = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{\frac{ipy}{\hbar}} \Psi^*\left(x + \frac{y}{2}\right) \Psi\left(x - \frac{y}{2}\right) \quad (1.5.16)$$

D'après la définition de la fonction de Wigner, elle peut être exprimée comme le produit interne de deux fonctions d'onde comme suit

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \Psi_1(y) \Psi_2^*(y) dy \quad (1.5.17)$$

où

$$\Psi_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \Psi\left(x + \frac{y}{2}\right) \quad ; \quad \Psi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi\left(x - \frac{y}{2}\right) \quad (1.5.18)$$

Comme ces deux fonctions sont normalisées (la norme se calcule avec le changement de variable  $z = x \pm y/2$ ), l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de conclure que la fonction de Wigner est bien bornée. En effet,

$$|W(x, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar} \|\Psi_1\| \|\Psi_2^*\| \leq \frac{1}{\pi\hbar} \quad (1.5.19)$$

La caractéristique qui distingue la distribution de probabilité de Wigner de la distribution de probabilité classique est que la fonction de Wigner peut prendre des valeurs négatives. Par exemple, d'après la définition de la fonction de Wigner, toutes les fonctions d'onde paires auront la valeur  $\frac{1}{\pi\hbar}$  en  $(x, p) = (0, 0)$ , tandis que les fonctions d'onde impaires auront une fonction de Wigner qui prend la valeur  $-\frac{1}{\pi\hbar}$  en  $(x, p) = (0, 0)$ .

La fonction de Wigner se généralise intuitivement à  $2n$  dimensions grâce à l'expression

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n)} \left\langle x_1 + \frac{y_1}{2}; x_2 + \frac{y_2}{2}; \dots; x_n + \frac{y_n}{2} \left| \hat{\rho} \right| x_1 - \frac{y_1}{2}; x_2 - \frac{y_2}{2}; \dots; x_n - \frac{y_n}{2} \right\rangle dy_1 dy_2 \dots dy_n \quad (1.5.20)$$

En particulier, dans un cas pur décrit par le ket  $|\Psi\rangle$ , la fonction de Wigner se réduit à la forme

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n)} \Psi^* \left( x_1 - \frac{y_1}{2}; x_2 - \frac{y_2}{2}; \dots; x_n - \frac{y_n}{2} \right) \Psi \left( x_1 + \frac{y_1}{2}; x_2 + \frac{y_2}{2}; \dots; x_n + \frac{y_n}{2} \right) dy_1 dy_2 \dots dy_n \quad (1.5.22)$$

Nous allons à présent calculer la fonction de Wigner de l'état fondamental  $\Psi_0$  de l'oscillateur harmonique quantique. En effet,

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad \text{où} \quad a^2 = \frac{\hbar}{m\omega}. \quad (1.5.23)$$

Il faut d'abord savoir que l'intégrale gaussienne est donnée par

$$\int e^{iky} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} dy = \sqrt{2\pi} a e^{-\frac{k^2 a^2}{2}} \quad (1.5.24)$$

On en déduit la fonction de Wigner qui correspond au la fonction d'onde  $\Psi_0$

$$W_0(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dy e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{(x+y/2)^2}{2a^2}} e^{-\frac{(x-y/2)^2}{2a^2}} = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{1}{a^2}x^2 - \frac{a^2}{\hbar^2}p^2} \quad (1.5.25)$$

La fonction de Wigner permet donc de faire une représentation graphique dans l'espace des phases de l'état étudié. Par exemple,  $W_0(x, p)$  aura la forme suivante (avec  $\hbar = 1$  et  $a = 1$ ) :

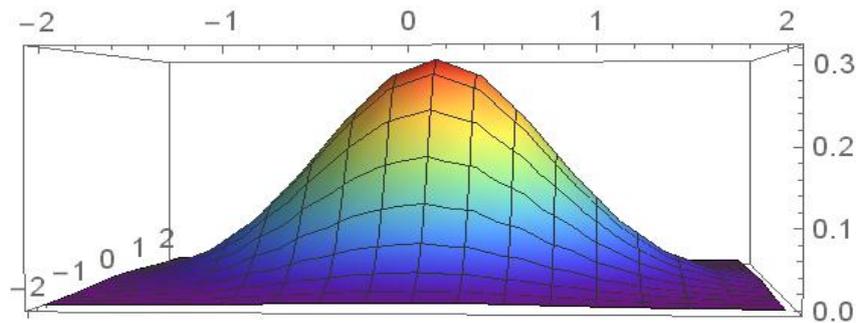


Figure 3 : Représentation de la fonction de Wigner  $W_0(x, p)$ .

Nous avons donc commencé par une fonction d'onde gaussienne en  $x$  et le résultat fut une fonction de Wigner gaussienne en  $x$  et  $p$ . Ce cas nous permet de faire la généralisation à tous les états en disant qu'un **état est gaussien si sa fonction de Wigner est une gaussienne**, ce qui s'applique facilement aux mélanges statistiques.

L'une des propriétés les plus remarquables de la fonction de Wigner est le théorème de Hudson-Piquet qui stipule que dans le cas d'un système se trouvant dans un état pur, **la fonction de Wigner ne contient pas de régions négatives si et seulement si le vecteur d'état est gaussien**. Autrement dit, tout état quantique pur ayant une fonction de Wigner positive par tout, est nécessairement gaussien et si la fonction de Wigner contient des parties négatives, elle correspond à un état non gaussien.

Avant de terminer ce chapitre, nous allons introduire la notion de fonction caractéristique symétrique  $C_s(\vartheta, \mu)$  qui va nous servir de moyen de calculer la fonction de Wigner. En effet,

$$C_s(\vartheta, \mu) = \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{-i\mu\hat{X} + i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}} \right) = \langle e^{-i\mu\hat{X} + i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}} \rangle \quad (1.5.26)$$

Il s'agit donc de la valeur moyenne de l'opérateur  $e^{-i\mu\hat{X} + i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}}$ . A l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff pour des opérateurs

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \quad \text{où} \quad [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (1.5.27)$$

nous aurons

$$C_s = e^{-\frac{i}{2}\mu\vartheta} \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{-i\mu\hat{X}} e^{+i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}} \right) = e^{-\frac{i}{2}\mu\vartheta} \text{Tr} \left( e^{i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}} \hat{\rho} e^{-i\mu\hat{X}} \right) = e^{-\frac{i}{2}\mu\vartheta} \int dx \langle x | e^{i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}} \hat{\rho} e^{-i\mu\hat{X}} | x \rangle \quad (1.5.28)$$

Le ket  $|x\rangle$  est vecteur propre de  $\hat{X}$ , d'où  $e^{-i\mu\hat{X}} |x\rangle = e^{-i\mu x} |x\rangle$ . L'opérateur  $e^{i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}}$  est l'opérateur de translation spatiale bien connu pour son action  $\langle x | e^{i\frac{\vartheta}{\hbar}\hat{P}} = \langle x + \vartheta |$ . Alors

$$C_s(\vartheta, \mu) = e^{-\frac{i}{2}\mu\vartheta} \int dx e^{-i\mu x} \langle x + \vartheta | \hat{\rho} | x \rangle \quad (1.5.29)$$

Après le changement de variable  $x = q - \frac{\vartheta}{2}$ , on aboutit à la relation

$$C_s(\vartheta, \mu) = \int dq e^{-i\mu q} \left\langle q + \frac{\vartheta}{2} \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{\vartheta}{2} \right\rangle \quad (1.5.30)$$

A ce stade, nous allons démontrer que la fonction de Wigner est la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique. En effet,

$$W(x, p) = \int d\mu d\vartheta C_s(\vartheta, \mu) \frac{e^{i\mu x}}{2\pi} \frac{e^{-i\frac{\vartheta}{\hbar}p}}{2\pi\hbar} = \frac{1}{4\pi^2\hbar} \int d\mu d\vartheta C_s(\vartheta, \mu) e^{i\mu x - i\frac{\vartheta}{\hbar}p} \quad (1.5.31)$$

En remplaçant  $C_s(\vartheta, \mu)$  par sa formule, il résulte que

$$W(x, p) = \frac{1}{4\pi^2\hbar} \int d\mu d\vartheta \left( \int dq e^{i\mu(x-q)} \right) \left\langle q + \frac{\vartheta}{2} \left| \hat{\rho} \left| q - \frac{\vartheta}{2} \right. \right. \right\rangle e^{-i\frac{\vartheta}{\hbar}p} \quad (1.5.32)$$

Grâce à l'identité  $\int dq e^{i\mu(x-q)} = 2\pi\delta(x-q)$ , nous obtenons la première expression de la fonction de Wigner définie plus haut

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\vartheta \left\langle x + \frac{\vartheta}{2} \left| \hat{\rho} \left| x - \frac{\vartheta}{2} \right. \right. \right\rangle e^{-i\frac{\vartheta}{\hbar}p} \quad (1.5.33)$$

Revenons aux formules  $W = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\mu d\vartheta C_s(\vartheta, \mu) e^{i\mu x - i\frac{\vartheta}{\hbar}p}$  et  $C_s = \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{-i\mu \hat{X} + i\frac{\vartheta}{\hbar} \hat{P}} \right)$  et opérons le changement  $\lambda = \frac{\vartheta}{\hbar} + i\mu$ . Il en découle immédiatement, les deux formules très utiles

$$C_s(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr} \left( \hat{\rho} e^{\lambda \left( \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{2} \right) - \lambda^* \left( \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{2} \right)} \right) \quad (1.5.34)$$

$$W = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda^2 C_s(\lambda, \lambda^*) e^{-\lambda \left( \frac{x - ip}{2} \right) + \lambda^* \left( \frac{x + ip}{2} \right)} \quad (1.5.35)$$

Ces formules seront de grande utilité dans le troisième chapitre ainsi que dans et le quatrième chapitre dans le calcul de la fonction de Wigner.

# 2 Quantification du Champ Electromagnétique

L'électromagnétisme est l'étude des champs électriques et magnétiques couplés en présence de distributions de charges et de courants électriques, datant des travaux de Maxwell dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle (à partir de 1864).

En 1900, l'aspect quantique de la physique a été découvert pour la première fois par Planck lors de l'étude du rayonnement électromagnétique du corps noir, dont le comportement défiait les lois de la physique classique, en particulier les équations de Maxwell. Cinq ans après, Einstein a postulé l'existence du photon comme particule de la lumière pour expliquer l'effet photoélectrique.

Cependant, il a fallu attendre la fin des années 1920 pour avoir une description quantique complète et déduite des principes de base de la mécanique quantique afin d'entreprendre la quantification au sens moderne du champ électromagnétique.

Dans ce chapitre nous discuterons la quantification du champ électromagnétique dans les cas monomodal et multimodal du rayonnement.

## 2.1 Champ électromagnétique monomodal

Le but de cette section est la quantification du champ électromagnétique monomodal, en passant de l'approche classique à l'approche quantique.

### 2.1.1 Equations de Maxwell pour le champ électromagnétique

Dans cette section, nous rappellerons les équations de Maxwell du champ électromagnétique dans le vide, ensuite nous allons chercher une solution monomodale respectant ces équations.

On considère la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide (où la distribution de charge  $\rho = 0$ , et la densité de courant  $\vec{j} = \vec{0}$ ) suivant l'axe Z entre les points  $(0,0,0)$  et  $(0,0,L)$  où le champ électrique est de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_x = E_x \vec{i}$  tandis que le champ magnétique est  $\vec{B} = \vec{B}_y = B_y \vec{j}$  (autrement dit,  $\vec{B}_x = \vec{B}_z = \vec{0}$ ;  $\vec{E}_y = \vec{E}_z = \vec{0}$ ) [4].

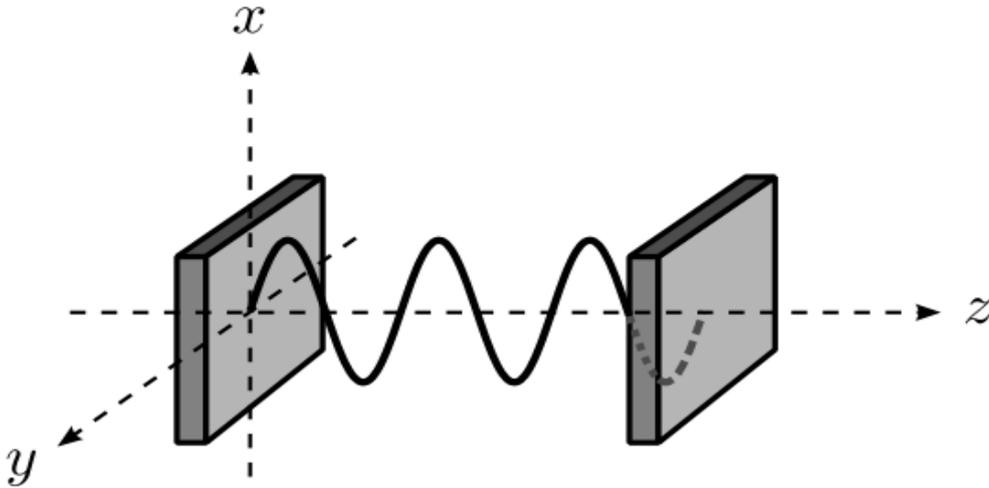


Figure 4 : Cavité avec des parois parfaitement non-conductrices. Le champ électrique est polarisé suivant la direction  $x$ .

En général, si le champ électrique est  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et le champ magnétique est  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , les équations de Maxwell dans le vide sont de la forme

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (2.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1.4)$$

où  $\vec{r} = (x, y, z)$  et  $t$  représentent respectivement le vecteur position et le temps,  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\mu_0$  est la perméabilité du vide tandis que  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur nabla ( $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ ).

En prenant le rotationnel de l'équation (2.1.1) et en utilisant les équations (2.1.2) et (2.1.3), on trouve l'équation de D'Alembert pour le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  [5]

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (2.1.5)$$

Si on utilise l'identité vectorielle :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \Delta \vec{E} \quad (2.1.6)$$

on trouve

$$-\Delta \vec{E} = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\partial_t (\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}) \quad (2.1.7)$$

d'où l'équation

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (2.1.8)$$

Sachant que

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (2.1.9)$$

l'équation (2.1.8) va s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (2.1.10)$$

Nous avons ainsi obtenu l'équation de D'Alembert relative aux composante du champ électromagnétique dans le vide.

Dans ce qui suit, nous traiterons uniquement des champs monomodaux dans le vide, en absence de charges pour montrer qu'il est possible de quantifier les champs directement, sans passer par le potentiel vecteur et se préoccuper d'un choix de jauge. Avec les conditions aux limites  $\vec{E}_x(0, t) = \vec{E}_x(L, t) = \vec{0}$ , la solution monomodale des équations (2.1.10) est [6] :

$$\vec{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{2w^2}{L\varepsilon_0}} q(t) \sin(kz) \vec{i} \quad (2.1.11)$$

où  $k = \frac{\pi n}{L}$  et  $w = kc$  avec  $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Pour parler d'un seul mode, on va travailler avec une seule valeur de  $n$ . Maintenant, il faut chercher le champ magnétique  $\vec{B}_y(z, t)$  en utilisant l'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.1.12)$$

Avec,

$$\vec{B}_x = \vec{B}_z = 0 \quad (2.1.13)$$

En effet,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\partial_z B_y \vec{i}$  et  $\partial_t \vec{E}_x = \sqrt{\frac{2w^2}{L\varepsilon_0}} \dot{q}(t) \sin(kz) \vec{i}$ , d'où la relation

$$B_y = - \int \mu_0 \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2w^2}{L\varepsilon_0}} \dot{q}(t) \sin(kz) dz \quad (2.1.14)$$

Finalement, on obtient l'expression du champ magnétique [6], [7]:

$$\vec{B}_y(z, t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{k} \sqrt{\frac{2w^2}{L\varepsilon_0}} \dot{q}(t) \cos(kz) \vec{j} \quad (2.1.15)$$

### 2.1.2 L'énergie du champ électromagnétique

Dans cette section, nous calculerons le hamiltonien qui correspond à l'énergie du champ électromagnétique, afin de procéder à une quantification canonique des champs électrique et magnétique. L'énergie du champ électromagnétique ou le hamiltonien  $H$  s'obtient en intégrant la densité d'énergie sur tout le volume occupé par le champ [6], [7]:

$$H = \int_v dv \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \quad (2.1.16)$$

Dans notre cas

$$H = \int_0^L dz \frac{1}{2} \left[ \epsilon_0 \frac{2w^2}{L\epsilon_0} q^2(t) \sin^2(kz) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right)^2 \left( \frac{2w^2}{L\epsilon_0} \right) \dot{q}^2(t) \cos^2(kz) \right] \quad (2.1.17)$$

Si on pose

$$p(t) = \dot{q}(t) \quad (2.1.18)$$

le hamiltonien devient

$$H = \int_0^L dz \frac{1}{L} [w^2 q^2(t) \sin^2(kz) + p^2(t) \cos^2(kz)] \quad (2.1.19)$$

En remplaçant les relations  $\cos^2(kz) = \frac{1+\cos(2kz)}{2}$  et  $\sin^2(kz) = \frac{1-\cos(2kz)}{2}$  dans l'équation (2.1.19), on aboutit à

$$H = \frac{1}{2L} \int_0^L dz (w^2 q^2(t) + p^2(t)) + \underbrace{\frac{1}{2L} \int_0^L dz (p^2(t) - w^2 q^2(t)) \cos^2(kz)}_0 \quad (2.1.20)$$

En raison des conditions aux limites qui annulent les deux termes de cosinus. Finalement, le hamiltonien du champ électromagnétique précédent va sous mettre la forme réduite

$$H = \frac{1}{2} (p^2(t) + w^2 q^2(t)) \quad (2.1.21)$$

Cette formule est équivalente à celle de l'oscillateur harmonique classique à une dimension de masse unité  $m=1$  où les variables  $q(t)$  et  $p(t)$  sont respectivement analogues à la position et à l'impulsions.

### 2.1.3 Quantification du champ électromagnétique à un mode

Dans cette partie, nous allons faire la quantification du champ électromagnétique d'un seul mode. La forme du hamiltonien obtenu ci-dessus nous suggère de faire la quantification directement en introduisant les opérateurs suivants :

$$q \rightarrow \hat{q} ; p \rightarrow \hat{p} \quad \text{avec} \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.1.22)$$

A présent le champ électrique  $\vec{E}$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  et le hamiltonien vont devenir respectivement les opérateurs ci-dessous

$$\vec{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{2w^2}{L\epsilon_0}} \hat{q}(t) \sin(kz) \vec{1} \quad (2.1.23)$$

et

$$\vec{B}_y(z, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \sqrt{\frac{2w^2}{L\epsilon_0}} \hat{p}(t) \cos(kz) \vec{j} \quad (2.1.24)$$

et

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (w^2 \hat{q}^2(t) + \hat{p}^2(t)) \quad (2.1.25)$$

où les opérateurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  sont hermitiens et correspondent à des observables. Toujours par analogie à l'oscillateur harmonique cette fois-ci quantique, il est très pratique d'introduire les opérateurs d'annihilation  $\hat{a}$  et de création  $\hat{a}^+$  non-hermitiens à travers les relations [6]

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar w}} (w\hat{q} + i\hat{p}) \quad (2.1.26)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar w}} (w\hat{q} - i\hat{p}) \quad (2.1.27)$$

Ce qui donne la relation de commutation habituelle

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (2.1.28)$$

Les relations précédentes s'inversent facilement pour retrouver les expressions de  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$

$$\hat{q} = \frac{\sqrt{2\hbar w}}{2w} (\hat{a} + \hat{a}^+) \quad (2.1.29)$$

$$\hat{p} = -i \frac{\sqrt{2\hbar w}}{2} (\hat{a} - \hat{a}^+) \quad (2.1.30)$$

Si on remplace (2.1.29) et (2.1.30) dans (2.1.23) et (2.1.24) on aura les opérateurs des champs électrique et magnétique

$$\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{L\varepsilon_0}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \sin(kz) = E_0 (\hat{a} + \hat{a}^+) \sin(kz) \quad (2.1.31)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = -i \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{L}} (\hat{a} - \hat{a}^+) \cos(kz) = -i B_0 (\hat{a} - \hat{a}^+) \cos(kz) \quad (2.1.32)$$

où  $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{L\varepsilon_0}}$  et  $B_0 = \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \hbar \omega^3}{L}}$ . L'opérateur hamiltonien  $\hat{H} = \frac{1}{2} (\omega^2 \hat{q}^2(t) + \hat{p}^2(t))$  à son tour va s'écrire

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[ \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.1.33)$$

Nous remarquons que ce hamiltonien est exactement le hamiltonien que nous avons trouvé pour l'oscillateur harmonique quantique. Donc les vecteurs propres de  $\hat{H}$  sont des kets de la forme  $|n\rangle$  et ses valeurs propres sont  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  où  $n$  est un entier naturel.

## 2.1.4 Opérateurs de quadrature pour un champ monomodal

Dans l'image de Heisenberg, les opérateurs d'annihilation  $\hat{a}$  et de création  $\hat{a}^+$  vont évoluer dans le temps en respectant les équations de Heisenberg

$$\hat{a} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}, H] = -i\omega\hat{a} \quad ; \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}^+, H] = i\omega\hat{a}^+ \quad (2.1.34)$$

Lorsque nous incluons explicitement cette dépendance temporelle, l'opérateur du champ électrique aura la forme

$$\hat{E}_x(z, t) = E_0 (\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^+ e^{i\omega t}) \sin(kz) \quad (2.1.35)$$

où  $\hat{a}(0) \equiv \hat{a}$ ,  $\hat{a}^+(0) \equiv \hat{a}^+$  vont servir de conditions initiales.

A ce stade, nous introduisons les opérateurs de quadrature définis par les relations

$$\hat{X} = \hat{X}_1 = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^+) \quad (2.1.36)$$

$$\hat{P} = \hat{X}_2 = \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^+) \quad (2.1.37)$$

L'opérateur  $\hat{X} = \hat{X}_1$  est analogue à l'opérateur position tandis que  $\hat{P} = \hat{X}_2$  est analogue à l'opérateur moment conjugué. Ces opérateurs vont avoir des spectres continus, ce qui est bien connu en mécanique quantique. Autrement dit,

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle \quad \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle \quad x, p \in \mathbb{R} \quad (2.1.38)$$

Les opérateurs de quadrature satisfont la relation de commutation

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2} \quad (2.1.39)$$

A l'aide de la formule bien connue

$$[A, B] = C \quad \Rightarrow \quad \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle| \quad (2.1.40)$$

on conclue que

$$\Delta \hat{X}_1 \cdot \Delta \hat{X}_2 \geq \frac{1}{4} \quad (2.1.41)$$

ce qui est le principe d'incertitude de Heisenberg relatif aux opérateurs de quadrature.

Le champ électrique de l'équation (2.1.35) s'écrit en fonction des quadratures comme suit

$$\hat{E}_x(z, t) = 2E_0 \sin(kz) [\hat{X}_1 \cos(\omega t) + \hat{X}_2 \sin(\omega t)] \quad (2.1.42)$$

d'où le nom de quadrature car le sinus et le cosinus évoluent en quadrature.

## 2.2 Champ électromagnétique multimodal

Dans cette section nous allons généraliser les résultats précédents du champ monomodal confiné dans une cavité aux champs de rayonnement multimodal. Nous considérerons ces champs comme étant dans un espace vide sans sources représenté par un cube de côté  $L$ , de sorte que les équations de Maxwell (2.1.1-2.1.4) restent toujours valables [6,20].

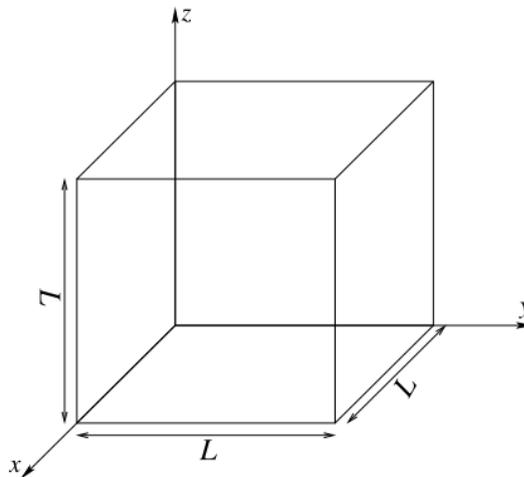


Figure 5 : le cube de côté  $L$ .

Les champs électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  peuvent alors être dérivés à partir de potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  [6,19]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.2.2)$$

qui satisfait l'équation d'onde suivante

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.3)$$

avec la condition de Jauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.2.4)$$

tout en sachant que le potentiel scalaire peut être choisi nul ( $U(\vec{r}, t) = 0$ ).

### 2.2.1 Les champs décomposés en série de Fourier

Le système qui nous intéresse est supposé fini évoluant dans volume cubique de côté  $L$ , ce qui nous suggère d'écrire le potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  sous forme d'une série de Fourier spatiale [19,20]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{\varepsilon}_n \mathcal{A}(\vec{k}_n, t) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (2.2.5)$$

où  $\vec{\varepsilon}_n$  sont des vecteurs indépendant de  $\vec{r}$  et de  $t$  tandis que

$$k_{n_x} = \frac{2\pi}{L_x} n_x ; \quad k_{n_y} = \frac{2\pi}{L_y} n_y ; \quad k_{n_z} = \frac{2\pi}{L_z} n_z. \quad n_i \in \mathbb{N} \quad (2.2.6)$$

Ce qui assure les conditions aux limites périodiques  $\vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}(x + L, y + L, z + L, t)$ .

De la condition de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$  va découler la relation d'orthogonalité

$$\vec{k}_n \cdot \vec{\varepsilon}_n = 0 \quad (2.2.7)$$

Cette équation montre que  $\vec{\varepsilon}_n$  doit appartenir à un plan dont le vecteur  $\vec{k}_n$  est le vecteur normal. Donc, il suffit de choisir deux vecteurs unitaires  $\vec{\varepsilon}_{\vec{n},1}$  et  $\vec{\varepsilon}_{\vec{n},2}$  de ce plan pour repérer tous les vecteurs de ce dernier

$$\vec{\varepsilon}_n = a\vec{\varepsilon}_{\vec{n},1} + b\vec{\varepsilon}_{\vec{n},2} \quad \text{avec} \quad \vec{\varepsilon}_{\vec{n},1} \perp \vec{k}_{\vec{n}} \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_{\vec{n},2} \perp \vec{k}_{\vec{n}} \quad (2.2.8)$$

Le champ  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  peut être écrit en terme d'une série de Fourier avec les vecteurs d'onde  $\vec{k}_{\vec{n}}$  et les deux polarisation  $\vec{\varepsilon}_{\vec{n},s}$ ,  $s \in \{1,2\}$  orthogonales à  $\vec{k}_{\vec{n}}$ . Donc chaque terme de la

série de Fourier est bien déterminé par quatre indices  $\{n_x, n_y, n_z; s\}$ , où les trois premiers sont des entiers définissant  $\vec{k}_{\vec{n}}$ , tandis que le quatrième pouvant prendre deux valeurs  $s = 1$  ou  $2$  qui caractérise la polarisation. Nous utiliserons l'indice  $\ell$  pour désigner cet ensemble de ces quatre nombres définissant le mode  $\ell$ .

Maintenant, nous pouvons écrire le potentiel vecteur sous la forme

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} \mathcal{A}_{\ell}(t) \vec{\varepsilon}_{\ell} e^{i\vec{k}_{\ell} \vec{r}}. \quad \text{où } \vec{k}_{\ell} = \vec{k}_{\vec{n}}; \quad \vec{\varepsilon}_{\ell} = \vec{\varepsilon}_{\vec{n},s}; \quad \vec{\varepsilon}_{\vec{n},s} \perp \vec{k}_{\vec{n}} \quad (2.2.9)$$

En remplaçant (2.2.9) dans l'équation (2.2.1) et (2.2.2), nous obtenons les champs électrique et magnétique

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sum_{\ell} E_{\ell}(t) \vec{\varepsilon}_{\ell} e^{i\vec{k}_{\ell} \vec{r}} \quad (2.2.10)$$

où

$$E_{\ell}(t) = -\frac{d\mathcal{A}_{\ell}(t)}{dt} \quad (2.2.11)$$

D'autre part,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} B_{\ell}(t) \vec{\varepsilon}'_{\ell} e^{i\vec{k}_{\ell} \vec{r}} \quad (2.2.12)$$

où

$$B_{\ell}(t) = ik_{\ell} \mathcal{A}_{\ell}(t). \quad \text{et } \vec{\varepsilon}'_{\ell} = \frac{\vec{k}_{\ell}}{k_{\ell}} \times \vec{\varepsilon}_{\ell}; \quad k_{\ell} = |\vec{k}_{\ell}| \quad (2.2.13)$$

Si on remplace les équations (2.2.10) et (2.2.12) dans les équations de Maxwell (2.1.1-2.1.4), nous trouvons les équations des termes de la série de Fourier [19]

$$i\vec{k}_{\ell} \times \vec{\varepsilon}_{\ell} E_{\ell}(t) = -\vec{\varepsilon}'_{\ell} \frac{dB_{\ell}(t)}{dt} \quad (2.2.14. a)$$

$$i\vec{k}_{\ell} \times \vec{\varepsilon}'_{\ell} B_{\ell}(t) = \frac{\vec{\varepsilon}_{\ell}}{c^2} \frac{dE_{\ell}(t)}{dt} \quad (2.2.14. b)$$

$$i\vec{k}_{\ell} \cdot \vec{\varepsilon}_{\ell} E_{\ell}(t) = 0 \quad (2.2.14. c)$$

$$i\vec{k}_{\ell} \cdot \vec{\varepsilon}'_{\ell} B_{\ell}(t) = 0 \quad (2.2.14. d)$$

À partir des équations (2.2.14), on déduit les équations dynamiques de  $E_\ell$  et  $B_\ell$  [19,20]

$$\frac{dE_\ell(t)}{dt} = -ic^2 k_\ell B_\ell \quad (2.2.15)$$

$$\frac{dB_\ell(t)}{dt} = -ik_\ell E_\ell \quad (2.2.16)$$

L'ensemble des paires de variables  $(E_\ell, B_\ell)$  ou  $(E_\ell, \mathcal{A}_\ell)$  sont des paires de variables dynamiques complexes [19].

### 2.2.2. Variables normales

Nous allons maintenant voir comment obtenir un découplage complet en utilisant des variables normales qui sont des combinaisons linéaires de  $E_\ell$  et  $\mathcal{A}_\ell$ .

De l'équation (2.2.11), nous avons

$$\frac{d\mathcal{A}_\ell(t)}{dt} = -E_\ell(t) \quad (2.2.17)$$

En remplaçant l'équation (2.2.13) dans l'équation (2.2.15), nous trouvons

$$\frac{dE_\ell(t)}{dt} = w_\ell^2 \mathcal{A}_\ell(t) \quad (2.2.18)$$

où  $w_\ell = ck_\ell$ . A présent, multiplions par  $(w_\ell)$  l'équation (2.2.17) et par  $(-i)$  l'équation (2.2.18)

$$w_\ell \frac{d\mathcal{A}_\ell(t)}{dt} = -w_\ell E_\ell(t) \quad (2.2.19)$$

$$-i \frac{dE_\ell(t)}{dt} = -iw_\ell^2 \mathcal{A}_\ell(t) \quad (2.2.20)$$

En additionnant l'équation (2.2.19) avec l'équation (2.2.20), on obtient

$$\frac{d}{dt} (w_\ell \mathcal{A}_\ell(t) - iE_\ell(t)) = -iw_\ell (w_\ell \mathcal{A}_\ell(t) - iE_\ell(t)) \quad (2.2.21)$$

Alors, nous pouvons définir les variables du champ [19,20]

$$\alpha_\ell(t) = \frac{1}{2\xi_\ell} (w_\ell \mathcal{A}_\ell(t) - iE_\ell(t)) \quad (2.2.22)$$

$$\beta_\ell(t) = \frac{1}{2\xi_\ell} (w_\ell \mathcal{A}_\ell(t) + iE_\ell(t)) \quad (2.2.23)$$

où  $\xi_\ell$  est un coefficient réel de normalisation qui sera déterminé par la suite.

En inversant les équations (2.2.22) et (2.2.23), nous obtenons les termes de la série de Fourier [19,20]

$$\mathcal{A}_\ell(t) = \frac{\xi_\ell}{w_\ell} [\alpha_\ell(t) + \beta_\ell(t)] \quad (2.2.24)$$

Pour que  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\ell \mathcal{A}_\ell(t) \vec{\epsilon}_\ell e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}}$  soit réel, il faut que  $\mathcal{A}_\ell^*(t) = \mathcal{A}_{-\ell}(t)$  d'où les conditions

$$\beta_{-\ell}(t) = \alpha_\ell^*(t) \quad (2.2.25)$$

$$\beta_\ell(t) = \alpha_{-\ell}^*(t) \quad (2.2.26)$$

Où nous avons le fait que  $w_\ell = w_{-\ell}$  et  $\xi_\ell = \xi_{-\ell}$ . Alors, l'équation (2.2.24) devient

$$\mathcal{A}_\ell(t) = \frac{\xi_\ell}{w_\ell} [\alpha_\ell(t) + \alpha_{-\ell}^*(t)] \quad (2.2.27)$$

En utilisant ce résultat, les équations (2.2.9), (2.2.10) et (2.2.12) vont nous donner les expressions des champs électrique et magnétique [20]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\ell \vec{\epsilon}_\ell \frac{\xi_\ell}{w_\ell} [\alpha_\ell(t) + \alpha_{-\ell}^*(t)] e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} \quad (2.2.28)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_\ell \vec{\epsilon}_\ell \xi_\ell [\alpha_\ell(t) - \alpha_{-\ell}^*(t)] e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} \quad (2.2.29)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sum_\ell \vec{\epsilon}'_\ell \frac{\xi_\ell}{c} [\alpha_\ell(t) - \alpha_{-\ell}^*(t)] e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} \quad (2.2.30)$$

En vertu du fait  $\vec{k}_{-\ell} = -\vec{k}_\ell$ , les équation (2.2.28-2.2.30) deviennent [19,20]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\ell \vec{\epsilon}_\ell \frac{\xi_\ell}{w_\ell} [\alpha_\ell(t) e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} + \alpha_\ell^*(t) e^{-i\vec{k}_\ell \vec{r}}] \quad (2.2.31)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_\ell \vec{\epsilon}_\ell \xi_\ell [\alpha_\ell(t) e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} - \alpha_\ell^*(t) e^{-i\vec{k}_\ell \vec{r}}] \quad (2.2.32)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sum_\ell \vec{\epsilon}'_\ell \frac{\xi_\ell}{c} [\alpha_\ell(t) e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} - \alpha_\ell^*(t) e^{-i\vec{k}_\ell \vec{r}}] \quad (2.2.33)$$

Les composantes de  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  ne sont qu'une superposition d'ondes progressives monochromatiques polarisées. En effet, d'après (2.2.21)

$$\frac{d\alpha_\ell(t)}{dt} = -i w_\ell \alpha_\ell(t) \quad \Rightarrow \quad \alpha_\ell(t) = \alpha_\ell(0) e^{-i w_\ell t} = \alpha_\ell e^{-i w_\ell t} \quad (2.2.34)$$

d'où la solution finale

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} \frac{\xi_{\ell}}{\omega_{\ell}} [\alpha_{\ell} e^{-i(\omega_{\ell} t - \vec{k}_{\ell} \vec{r})} + \alpha_{\ell}^* e^{i(\omega_{\ell} t - \vec{k}_{\ell} \vec{r})}] \quad (2.2.35)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell} \xi_{\ell} [\alpha_{\ell} e^{-i(\omega_{\ell} t - \vec{k}_{\ell} \vec{r})} - \alpha_{\ell}^* e^{i(\omega_{\ell} t - \vec{k}_{\ell} \vec{r})}] \quad (2.2.36)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sum_{\ell} \vec{\epsilon}'_{\ell} \frac{\xi_{\ell}}{c} [\alpha_{\ell} e^{-i(\omega_{\ell} t - \vec{k}_{\ell} \vec{r})} - \alpha_{\ell}^* e^{i(\omega_{\ell} t - \vec{k}_{\ell} \vec{r})}] \quad (2.2.37)$$

### 2.2.3 Hamiltonien du champ électromagnétique libre

Nous avons déjà vu que l'énergie du champ électromagnétique est définie par l'intégrale de la densité d'énergie sur le volume  $V$  [20]

$$H_R = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r [\vec{E}^2(\vec{r}, t) + c^2 \vec{B}^2(\vec{r}, t)] \quad (2.2.38)$$

Pour calculer l'intégrale précédente, nous allons calculer les deux intégrales suivantes

$$I = \int_V d^3r \vec{E}^2(\vec{r}, t) \quad (2.2.39)$$

$$J = \int_V d^3r c^2 \vec{B}^2(\vec{r}, t) \quad (2.2.40)$$

Nous commençons avec la première intégrale, où nous utiliserons l'expression (2.2.32) de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$

$$I = - \sum_{\ell} \sum_{\ell'} \xi_{\ell} \xi_{\ell'} \vec{\epsilon}_{\ell} \vec{\epsilon}_{\ell'} \int_V d^3r (\alpha_{\ell} e^{i\vec{k}_{\ell} \vec{r}} - \alpha_{\ell}^* e^{-i\vec{k}_{\ell} \vec{r}}) (\alpha_{\ell'} e^{i\vec{k}_{\ell'} \vec{r}} - \alpha_{\ell'}^* e^{-i\vec{k}_{\ell'} \vec{r}}) \quad (2.2.41)$$

Les intégrales sont calculées sur l'intervalle  $[0, L]$ , ce qui fait qu'elles vont s'annuler sauf si  $\ell' = \ell$  ou  $\ell' = -\ell$  à cause des conditions aux limites. Autrement dit, [20]

$$I = L^3 \sum_{\ell} \xi_{\ell}^2 (2|\alpha_{\ell}|^2 - \alpha_{\ell} \alpha_{-\ell} - \alpha_{\ell}^* \alpha_{-\ell}^*) \quad (2.2.42)$$

En faisant les mêmes calculs précédents pour calculer l'intégrale (2.2.40), nous trouvons [20]

$$J = L^3 \sum_{\ell} \xi_{\ell}^2 (2|\alpha_{\ell}|^2 + \alpha_{\ell} \alpha_{-\ell} + \alpha_{\ell}^* \alpha_{-\ell}^*) \quad (2.2.43)$$

Finalement, en remplaçant (2.2.42) et (2.2.43) dans l'équation (2.2.38), on aboutit à l'expression de l'énergie du rayonnement électromagnétique

$$H_R = 2\varepsilon_0 L^3 \sum_{\ell} \xi_{\ell}^2 |\alpha_{\ell}|^2 = \sum_{\ell} H_{\ell} \quad (2.2.44)$$

Il est clair que l'énergie du rayonnement est la somme des énergies  $H_{\ell}$  associées à chacun des différents modes.

Pour le rayonnement de mode  $\ell$ , selon (2.2.44), son énergie est donnée par

$$H_{\ell} = 2\varepsilon_0 L^3 \xi_{\ell}^2 |\alpha_{\ell}|^2 \quad (2.2.45)$$

comme  $\alpha_{\ell}(t) = \alpha_{\ell} e^{-i\omega_{\ell} t}$ , nous avons  $Re(\alpha_{\ell}) = \alpha_{\ell} \cos(\omega_{\ell} t)$  et  $Im(\alpha_{\ell}) = -\alpha_{\ell} \sin(\omega_{\ell} t)$  d'où

$$\frac{dRe(\alpha_{\ell})}{dt} = \omega_{\ell} Im(\alpha_{\ell}) \quad (2.2.46)$$

$$\frac{dIm(\alpha_{\ell})}{dt} = -\omega_{\ell} Re(\alpha_{\ell}) \quad (2.2.47)$$

Ces équations peuvent être identifiées avec les équations de Hamilton

$$\frac{dQ_{\ell}}{dt} = \frac{\partial H_{\ell}}{\partial P_{\ell}} \quad (2.2.48)$$

$$\frac{dP_{\ell}}{dt} = -\frac{\partial H_{\ell}}{\partial Q_{\ell}} \quad (2.2.49)$$

À condition que les variables canoniques conjuguées soient définies par [19,20]

$$Q_{\ell} = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 L^3}{\omega_{\ell}}} \xi_{\ell} Re(\alpha_{\ell}) \quad (2.2.50)$$

$$P_{\ell} = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 L^3}{\omega_{\ell}}} \xi_{\ell} Im(\alpha_{\ell}) \quad (2.2.51)$$

$$H_{\ell} = \frac{1}{2} \omega_{\ell} (Q_{\ell}^2 + P_{\ell}^2) \quad (2.2.52)$$

Nous avons ainsi trouvé des variables obéissant à des équations canoniques dont le hamiltonien est l'énergie associée à un mode, ce qui est plus que souhaitable afin de procéder à une quantification canonique.

### 2.2.4 Quantification du rayonnement

Pour donner une version quantique du champ électromagnétique multimodal, nous allons associer aux variables canoniques conjuguées  $Q_\ell$  et  $P_\ell$  des opérateurs hermitiens  $\hat{Q}_\ell$  et  $\hat{P}_\ell$  vérifiant les relations de commutation [19,20]

$$[\hat{Q}_\ell, \hat{P}_{\ell'}] = i\hbar\delta_{\ell\ell'} \quad (2.2.53)$$

$$[\hat{Q}_\ell, \hat{Q}_{\ell'}] = [\hat{P}_\ell, \hat{P}_{\ell'}] = 0 \quad (2.2.54)$$

L'amplitude complexe  $\alpha_\ell(t)$  en mode normal est donc associée à un opérateur  $\hat{a}_\ell(t)$ . A l'aide de (2.2.50) et (2.2.51), on peut écrire

$$\hat{Q}_\ell + i\hat{P}_\ell = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 L^3}{w_\ell}} \xi_\ell \hat{a}_\ell \quad (2.2.55)$$

Après inversion

$$\hat{a}_\ell = \frac{\hat{Q}_\ell + i\hat{P}_\ell}{\xi_\ell} \sqrt{\frac{w_\ell}{4\varepsilon_0 L^3}} \quad (2.2.56)$$

Les opérateurs  $\hat{a}_\ell$  ne sont pas hermitiens et ils satisfont les relations de commutation suivantes, dérivées de (2.2.53) et (2.2.54)

$$[\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^+] = \frac{\hbar w_\ell}{2\varepsilon_0 L^3} \frac{1}{\xi_\ell^2} \delta_{\ell\ell'} \quad (2.2.57)$$

$$[\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}] = [\hat{a}_\ell^+, \hat{a}_{\ell'}^+] = 0 \quad (2.2.58)$$

Nous pouvons choisir la constante  $\xi_\ell$  pour simplifier ces relations de commutation comme suit

$$\xi_\ell = \sqrt{\frac{\hbar w_\ell}{2\varepsilon_0 L^3}} \quad (2.2.59)$$

Maintenant l'équation (2.2.56) devient

$$\hat{a}_\ell = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{Q}_\ell + i\hat{P}_\ell) \quad (2.2.60)$$

$$\hat{a}_\ell^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{Q}_\ell - i\hat{P}_\ell) \quad (2.2.61)$$

d'où

$$\hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^+ + \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell = \frac{1}{\hbar} (\hat{Q}_\ell^2 + \hat{P}_\ell^2) \quad (2.2.62)$$

Comme le hamiltonien classique  $H_R$  en termes de variables conjuguées s'écrit

$$H_R = \sum_\ell H_\ell = \sum_\ell \frac{w_\ell}{2} (Q_\ell^2 + P_\ell^2) \quad (2.2.63)$$

Le hamiltonien quantique qui lui est associé sera

$$\hat{H}_R = \sum_\ell \frac{w_\ell}{2} (\hat{Q}_\ell^2 + \hat{P}_\ell^2) \quad (2.2.64)$$

En utilisant l'équation (2.2.62), il va se mettre sous la forme réduite

$$\hat{H}_R = \sum_\ell \frac{\hbar w_\ell}{2} (\hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^+ + \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell) = \sum_\ell \hbar w_\ell \left( \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell + \frac{1}{2} \right) \quad (2.2.65)$$

Ainsi, nous avons démontré que le hamiltonien quantique du rayonnement est formellement identique au hamiltonien d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantiques indépendants caractérisés par les opérateurs de création et d'annihilation  $\hat{a}_\ell^+$  et  $\hat{a}_\ell$ .

Avant d'entamer la section suivante, il est utile d'obtenir l'expression des observables quantiques associées aux champs classiques, en remplaçant les variables normales  $\alpha_\ell$  et  $\alpha_\ell^*$  dans les expressions classiques par les opérateurs quantiques correspondant  $\hat{a}_\ell$  et  $\hat{a}_\ell^+$  [19,20]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 w_\ell}} \vec{\varepsilon}_\ell [\hat{a}_\ell e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} + \hat{a}_\ell^+ e^{-i\vec{k}_\ell \vec{r}}] \quad (2.2.66)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar w_\ell}{2\varepsilon_0 L^3}} \vec{\varepsilon}_\ell [\hat{a}_\ell e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} - \hat{a}_\ell^+ e^{-i\vec{k}_\ell \vec{r}}] \quad (2.2.67)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 w_\ell}} \vec{k}_\ell \times \vec{\varepsilon}_\ell [\hat{a}_\ell e^{i\vec{k}_\ell \vec{r}} - \hat{a}_\ell^+ e^{-i\vec{k}_\ell \vec{r}}] \quad (2.2.68)$$

## 2.2.5 Les états du champ quantifié et les photons

Dans cette section nous allons voir comment la notion du photon surgit comme une conséquence de la quantification du champ électromagnétique. Le hamiltonien  $\hat{H}_R$  du rayonnement quantifié peut s'écrire sous la forme

$$\hat{H}_R = \sum_\ell \hbar w_\ell \left( \hat{N}_\ell + \frac{1}{2} \right) = \sum_\ell \hat{H}_\ell \quad (2.2.69)$$

où  $\hat{N}_\ell = \hat{a}_\ell^+ \hat{a}_\ell$ . Si on prend une seule valeur  $\ell$ , correspondant à  $\hat{H}_\ell = \hbar \omega_\ell \left( \hat{N}_\ell + \frac{1}{2} \right)$ , on va se retrouver avec un seul oscillateur harmonique quantique où

$$[\hat{a}_\ell, \hat{a}_\ell^+] = 1 \quad (2.2.70).$$

Par analogie à l'oscillateur harmonique quantique, les vecteurs propres  $|n_\ell\rangle$  de  $\hat{N}_\ell$  vont être de la forme

$$\hat{N}_\ell |n_\ell\rangle = n_\ell |n_\ell\rangle \quad n_\ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.71)$$

sachant que l'effet des opérateurs  $\hat{a}_\ell$  et  $\hat{a}_\ell^+$  est

$$\hat{a}_\ell |n_\ell\rangle = \sqrt{n_\ell} |n_\ell - 1\rangle \quad (2.2.72)$$

$$\hat{a}_\ell^+ |n_\ell\rangle = \sqrt{n_\ell + 1} |n_\ell + 1\rangle \quad (2.2.73)$$

$$\hat{a}_\ell |0\rangle = 0 \quad (2.2.74)$$

L'état multimodal n'est qu'un produit des états à un mode comme le montre l'expression suivante :

$$|n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_\ell\rangle \dots \quad (2.2.75)$$

C'est un état propre de  $\hat{H}_R$ , tel que

$$\hat{H}_R |n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle = E |n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle \quad (2.2.76)$$

avec la valeur propre  $E$

$$E = \sum_\ell \hbar \omega_\ell \left( n_\ell + \frac{1}{2} \right) \quad (2.2.77)$$

L'état fondamental du rayonnement correspond à l'état où tous les entiers  $n_\ell$  sont nuls, noté  $|0\rangle$

$$|0\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 0, \dots, n_\ell = 0, \dots\rangle \quad (2.2.78)$$

Cet état appelé le vide à une énergie  $E_V$ , qui est l'énergie minimale du champ électromagnétique quantifié

$$E_V = \frac{1}{2} \sum_\ell \hbar \omega_\ell \quad (2.2.79)$$

Soit maintenant un état où un seul  $n_i = 1$  tandis les autres sont nuls. Dans ce cas

$$\hat{H}_R |0, 0, \dots, n_i = 1, \dots 0\rangle = (\hbar \omega_i + E_V) |0, 0, \dots, n_i = 1, \dots 0\rangle \quad (2.2.80)$$

Si  $n_i = 2$ , nous aurons grâce à (2.2.77)

$$\hat{H}_R |0,0, \dots, n_i = 2, \dots 0\rangle = (2\hbar w_i + E_V) |0,0, \dots, n_i = 2, \dots 0\rangle \quad (2.2.81)$$

Il est clair que l'énergie sera toujours de la forme  $n_i \hbar w_i + E_V$ , qui est l'énergie du vide plus un multiple de la quantité d'énergie  $\hbar w_i$  (formule de Planck-Einstein). Cette énergie correspond à une particule qui est le photon de pulsation  $w_i$  de telle sorte que  $n_i \hbar w_i$  sera l'énergie de  $n_i$  photons. Comme  $k_i = \frac{w_i}{c}$ , le vecteur  $\vec{k}_i$  va être le vecteur d'onde associé à ce photon, d'où l'impulsion  $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i$  (relation de De Broglie). L'espace engendré par la base  $\{|0,0, \dots, n_\ell, \dots\rangle\} = \{|n_\ell\rangle\}$  est alors appelé l'espace de Fock associé au mode  $\ell$ .

A présent, le ket  $|n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_\ell\rangle \dots$  va être un état où dans le mode 1 existe  $n_1$  photons d'énergie  $\hbar w_1$  et d'impulsion  $\hbar \vec{k}_1$ , dans le mode 2 existe  $n_2$  photons d'énergie  $\hbar w_2$  et d'impulsion  $\hbar \vec{k}_2$ , et dans le mode  $\ell$  existe  $n_\ell$  photons d'énergie  $\hbar w_\ell$  et d'impulsion  $\hbar \vec{k}_\ell$ . L'action répétée des opérateurs de création  $\hat{a}_\ell^+$  sur l'état du vide permet de construire n'importe lequel des vecteurs de l'espace de Fock multimodal

$$|n_1, n_2, \dots, n_\ell, \dots\rangle = \frac{(\hat{a}_1^+)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(\hat{a}_2^+)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots \frac{(\hat{a}_\ell^+)^{n_\ell}}{\sqrt{n_\ell!}} \dots |0\rangle \quad (2.2.82)$$

Ici se termine le deuxième chapitre où nous avons pu dégager la notion du photon grâce à la quantification canonique du champ électromagnétique.

# Etats de Fock et Etats Cohérents de la Lumière

A partir de maintenant, nous allons nous concentrer sur l'étude des états du champ électromagnétique, et ce chapitre sera consacré à la discussion de quatre type d'états, à savoir, les états de Fock, les états cohérents, l'état thermique et l'état chat de Schrödinger dans le cas d'une lumière monomodale. Nous allons mettre en valeur la notion de la gaussianité pour caractériser ses différents états.

## 3.1 L'état de vide

C'est l'état fondamental  $|0\rangle$  du champ électromagnétique correspond à l'absence de photons, qui a la plus basse énergie. Pour les opérateurs de quadrature définis par les équations (2.1.36) et (2.1.37), nous avons les valeurs moyennes (voir chapitre 1)

$$\langle 0|\hat{X}_1|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle 0|\hat{X}_1|0\rangle^2 = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\langle 0|\hat{X}_1^2|0\rangle = \frac{1}{4} \quad (3.1.2)$$

Donc, la variance de l'opérateur  $\hat{X}_1$  est

$$\langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (3.1.3)$$

De même, pour l'opérateur  $\hat{X}_2$ , nous avons

$$\langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (3.1.4)$$

Alors, le produit des racines des deux variances est

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 = \frac{1}{4} \quad (3.1.5)$$

Cela montre que l'état du vide minimise (sature) la relation d'incertitude. On parle ici du bruit quantique, appelé « shot noise limite » ou SNL, qui est une propriété du vide en l'absence complète de photons [4].

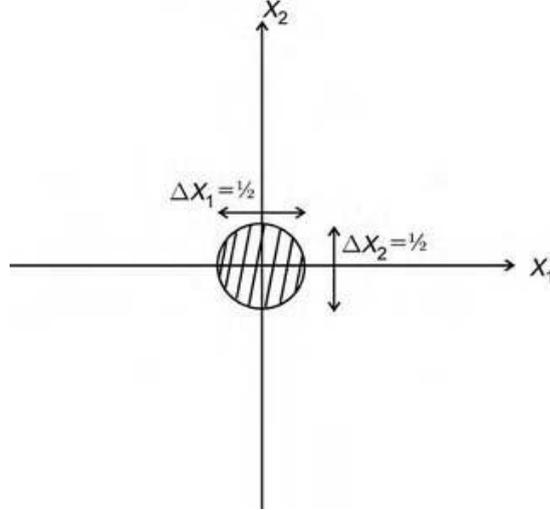


Figure 6 : Portrait de l'espace des phases de l'état du vide quantique [5]

Nous utiliserons à présent la fonction d'onde donnée par l'équation (1.4.7) pour calculer la fonction de Wigner de l'état du vide. En effet, la fonction de Wigner en question est de la forme

$$W_0(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \left\langle x - \frac{\varepsilon}{2} \middle| \Psi_0 \right\rangle \left\langle \Psi_0 \middle| x + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle e^{ip\varepsilon} \quad (3.1.6)$$

où

$$\left\langle x - \frac{\varepsilon}{2} \middle| \Psi_0 \right\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}(x - \frac{\varepsilon}{2})^2} \quad (3.1.7)$$

$$\left\langle \Psi_0 \middle| x + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}(x + \frac{\varepsilon}{2})^2} \quad (3.1.8)$$

Alors, l'équation (3.1.6) devient

$$W_0(x, p) = \int d\varepsilon e^{ip\varepsilon} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-(x^2 + \frac{\varepsilon^2}{4})} = \frac{e^{-x^2}}{\pi} \int d\varepsilon \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} e^{ip\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4}} \quad (3.1.9)$$

A l'aide de l'intégrale gaussienne suivante

$$\int e^{ikx} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \sqrt{2\pi} a e^{-\frac{k^2 a^2}{2}} \quad (3.1.10)$$

la fonction de Wigner de l'état du vide sera

$$W_0(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2} \quad (3.1.11)$$

La représentation graphique de cette fonction de Wigner montre bel et bien que l'état du vide est un état gaussien centré à l'origine symétrique par rapport à l'axe vertical. Dans ce cas, la fonction de Wigner est une densité de probabilité à deux variables  $x$  et  $p$ .

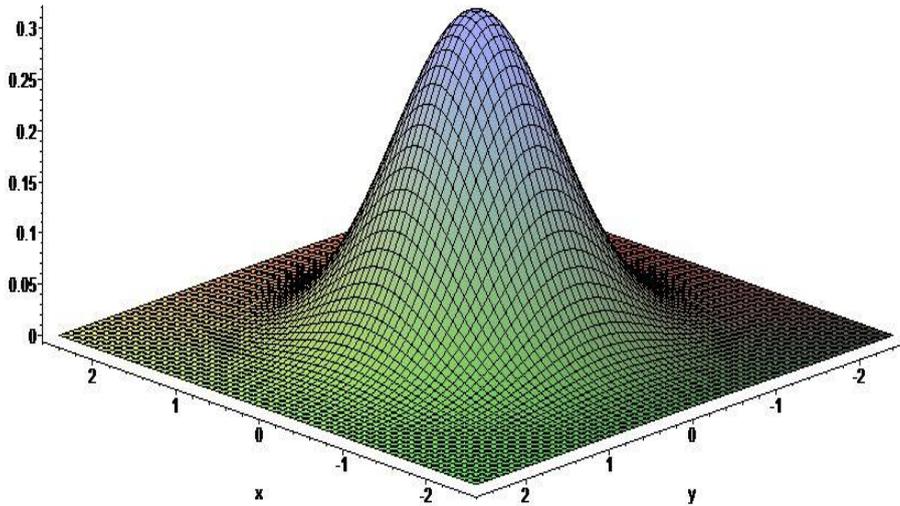


Figure 7 : Représentation de la fonction de Wigner (3.1.11) de l'état du vide.

## 3.2 Les états de Fock

Dans cette partie, nous discuterons les états du champ électromagnétique caractérisés par un nombre de photon  $n$  bien défini pour un mode donné. Ces états de nombre de photons ou états de Fock  $|n\rangle$ , sont les états propres de l'opérateur  $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$  et correspondant à la valeur propre  $n$  [11,16]

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.2.1)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le hamiltonien d'un champ à un seul mode est

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.2.2)$$

donc les états de Fock sont aussi des vecteurs propres de ce hamiltonien et avec les valeurs propres  $\hbar\omega (n+\frac{1}{2})$ . Nous avons aussi les relations bien connues

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{et} \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (3.2.3)$$

ce qui fait que l'action répétée de l'opérateur de création  $\hat{a}^+$  sur l'état de vide  $|0\rangle$  permet d'obtenir l'expression d'un état de Fock

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle \quad (3.2.4)$$

Un état de Fock  $|n\rangle$  est un état d'énergie bien définie, mais ce n'est pas un état de champ électrique bien défini [5]. En effet

$$\langle n|\hat{a}|n\rangle = 0 \quad (3.2.5)$$

$$\langle n|\hat{a}^+|n\rangle = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n \quad (3.2.7)$$

Donc le champ moyen obtenu à partir de l'équation (2.1.31) est nul comme le montre le calcul ci-dessous.

$$\langle \hat{E}_x(z, t) \rangle = \langle n|\hat{E}_x(z, t)|n\rangle = E_0 \sin(kz) [\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+|n\rangle] = 0 \quad (3.2.8)$$

Mais la moyenne du carré de champ n'est pas nulle car

$$\langle n|\hat{E}_x^2(z, t)|n\rangle = E_0^2 \sin^2(kz) \langle n|\hat{a}^{+2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+|n\rangle \quad (3.2.9)$$

d'où

$$\langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle = 2E_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.2.10)$$

La variance du champ électrique sera alors

$$\langle (\Delta \hat{E}_x)^2 \rangle = \langle \hat{E}_x^2 \rangle - \langle \hat{E}_x \rangle^2 = 2E_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.2.11)$$

Nous remarquons que lorsque  $n = 0$ , le champ a des fluctuations, qui sont les soi-disant fluctuations du vide.

Nous allons maintenant calculer la fonction de Wigner d'un état de Fock. La fonction d'onde de l'état de Fock sur la base  $\{|x\rangle\}$  est donnée par l'équation (1.4.10) [17]

$$\langle x|n\rangle = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!} \pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.2.12)$$

La fonction de Wigner correspondante sera de la forme

$$W_n(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon e^{ip\varepsilon} \left\langle x - \frac{\varepsilon}{2} \middle| n \right\rangle \left\langle n \middle| x + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle \quad (3.2.13)$$

où

$$\left\langle x - \frac{\varepsilon}{2} \middle| n \right\rangle = \frac{H_n(x - \frac{\varepsilon}{2})}{\sqrt{2^n n!} \pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x - \frac{\varepsilon}{2})^2}{2}} \quad (3.2.14)$$

et

$$\left\langle n \middle| x + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle = \frac{H_n(x + \frac{\varepsilon}{2})}{\sqrt{2^n n!} \pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x + \frac{\varepsilon}{2})^2}{2}} \quad (3.2.15)$$

Alors, l'équation (3.2.13) devient

$$W_n(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon e^{ip\varepsilon} \frac{H_n(x - \frac{\varepsilon}{2}) H_n(x + \frac{\varepsilon}{2})}{2^n n! \pi^{\frac{1}{2}}} e^{-(x^2 + \frac{\varepsilon^2}{4})} \quad (3.2.16)$$

Sous forme réduite

$$W_n(x, p) = \frac{e^{-(x^2 + p^2)}}{2\pi 2^n n! \pi^{\frac{1}{2}}} \int d\varepsilon H_n(x - \frac{\varepsilon}{2}) H_n(x + \frac{\varepsilon}{2}) e^{-\frac{(\frac{\varepsilon}{2} - ip)^2}{2}} \quad (3.2.17)$$

Pour calculer l'intégrale précédente, nous posons

$$J = \int d\varepsilon H_n(x - \frac{\varepsilon}{2}) H_n(x + \frac{\varepsilon}{2}) e^{-\frac{(\frac{\varepsilon}{2} - ip)^2}{2}} \quad (3.2.18)$$

En faisant le changement de variable  $t = \frac{\varepsilon}{2} - ip$ , nous aurons

$$J = 2 \int dt H_n(-(t + ip - x)) H_n((t + ip + x)) e^{-t^2} \quad (3.2.19)$$

Sachant que,

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (3.2.20)$$

Il s'en suit

$$J = 2(-1)^n \int dt H_n(t + (ip - x)) H_n(t + (ip + x)) e^{-t^2} \quad (3.2.21)$$

Pour aller de l'avant, on va faire appel à la propriété suivante des polynômes d'Hermite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx H_n(x+y) H_n(x+z) e^{-x^2} = 2^n n! L_n(-2yz) \quad (3.2.22)$$

où  $L_n$  est un polynôme de Laguerre qui s'obtiennent grâce à la relation qui

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)! k!} \frac{(-x)^k}{k!} \quad (3.2.23)$$

L'équation (3.2.21) devient alors

$$J = 2(-1)^n 2^n n! \pi^{\frac{1}{2}} L_n(-2(ip-x)(ip+x)) \quad (3.2.24)$$

Après simplification

$$J = 2(-1)^n 2^n n! \pi^{\frac{1}{2}} L_n(2(p^2 + x^2)) \quad (3.2.25)$$

En remplaçant l'équation (3.2.25) dans l'équation (3.2.17), la fonction de Wigner de l'état de Fock à  $n$  photons va avoir l'expression [17]

$$W_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-(x^2+p^2)} L_n(2(x^2 + p^2)) \quad (3.2.26)$$

Avec les états de Fock, la fonction de Wigner associée à un mode bien défini n'est pas de forme gaussienne quel que soit le nombre de photons. En effet, elle oscille en passant de régions positives vers des régions où elle devient négative. Cette oscillation s'accroît avec l'augmentation de nombre de photon, ce qui nous empêche de l'interpréter en tant que densité de probabilité. Autrement dit, les états de Fock sont des états non-gaussiens.

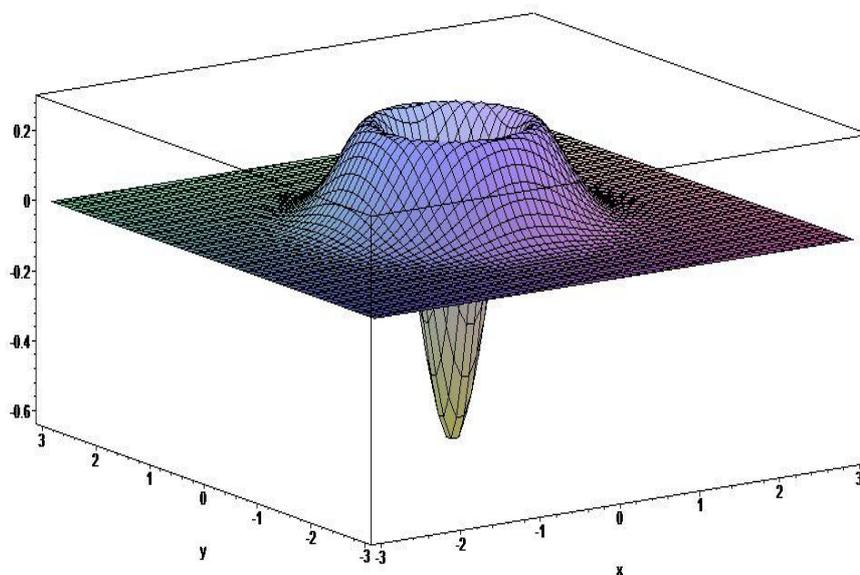


Figure 8 : Fonction de Wigner de l'état de Fock  $|1\rangle$

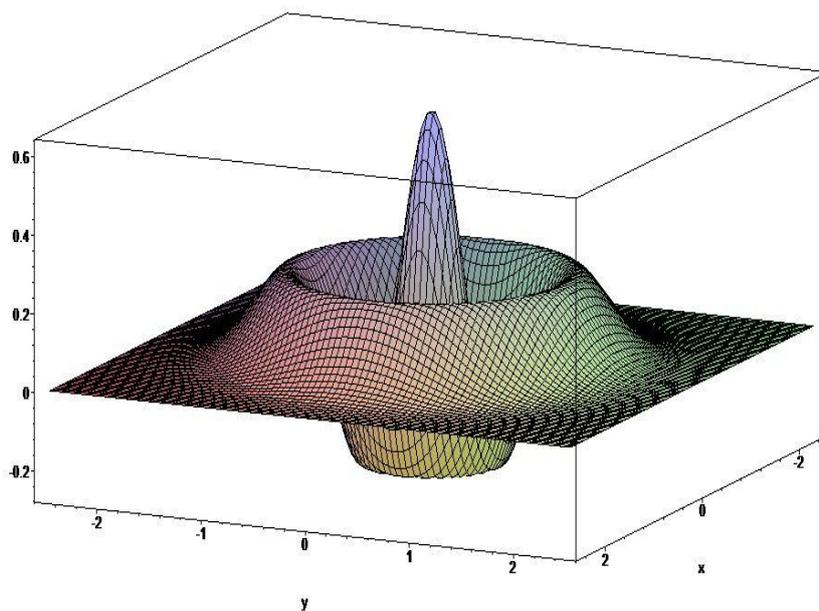


Figure 9 : Fonction de Wigner de l'état de Fock  $|2\rangle$

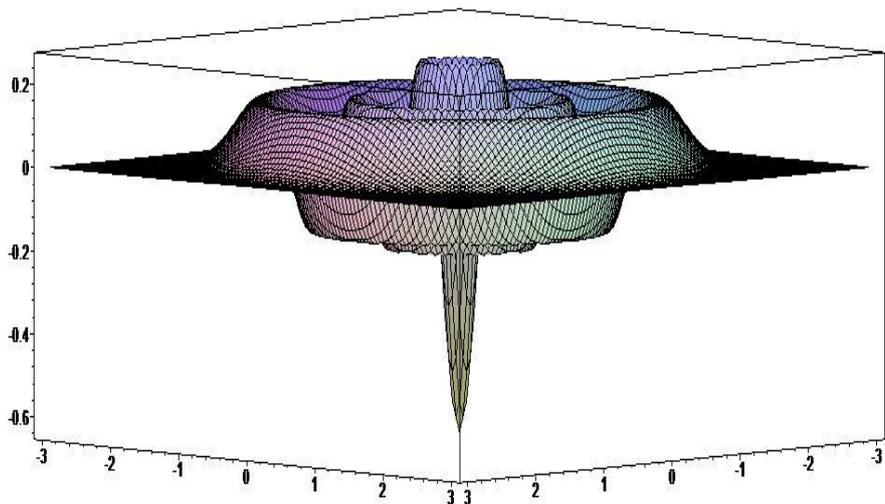


Figure 10 : Fonction de Wigner de l'état de Fock  $|5\rangle$

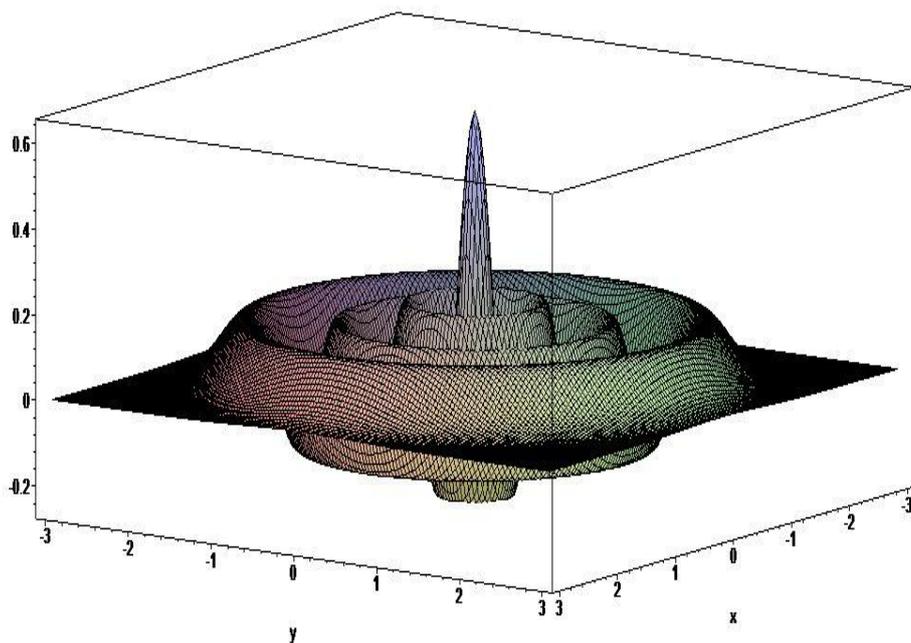


Figure 11 : Fonction de Wigner de l'état de Fock  $|6\rangle$

### 3.3. Les états cohérents

Les états cohérents ou les états quasi-classiques sont les états les plus proches de la représentation classique. Ils ont été introduits en optique quantique pour donner une description continue du champ électromagnétique (nombre de photon très grand) par Glauber [23]. Ils sont ceux générés par un laser [11].

Les états cohérents sont définis comme étant les vecteurs propres de l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$  [12,13,14]

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.3.1)$$

L'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$  n'est pas hermitien, de ce fait, ses valeurs propres  $\alpha$  sont complexes. Nous pouvons exprimer l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  dans la base de Fock grâce à la relation de fermeture

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \quad (3.3.2)$$

En remplaçant dans l'état cohérent, on obtient

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (3.3.3)$$

avec

$$C_n = \langle n|\alpha\rangle ; \quad C_n \in \mathbb{C} \quad (3.3.4)$$

Pour déterminer les  $C_n$ , nous allons utiliser les relations

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (3.3.5)$$

$$\langle n| = \langle 0| \frac{(\hat{a})^n}{\sqrt{n!}} \quad (3.3.6)$$

L'équation (3.3.4) devient

$$C_n = \langle 0| \frac{(\hat{a})^n}{\sqrt{n!}} |\alpha\rangle \quad (3.3.7)$$

Après l'utilisation de l'équation (3.3.1), nous obtenons

$$C_n = \langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (3.3.8)$$

Donc  $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ . En imposant la condition de normalisation  $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$ , on aura

$$|\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad |\langle 0|\alpha\rangle| = e^{-|\alpha|^2/2} \quad (3.3.9)$$

Alors

$$C_n = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (3.3.10)$$

Finalement, l'état cohérent peut se mettre sous forme

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.3.11)$$

Dans un état cohérent, le nombre de photons n'est pas bien déterminé, et la probabilité de détecter  $n$  photons est une distribution de Poisson

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (3.3.12)$$

Nous pouvons calculer le nombre moyen de photons et sa variance [5,14]

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (3.3.13)$$

$$\langle \hat{N}^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \quad (3.3.14)$$

D'où la variance

$$(\Delta \hat{N})^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2 \quad (3.3.15)$$

Finalement

$$\Delta \hat{N} = |\alpha| \quad \Rightarrow \quad \Delta \hat{N} = \langle \hat{N} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.16)$$

Cela est une propriété standard de la distribution de Poisson. Autrement dit, dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , le nombre moyen de photons est  $|\alpha|^2$  avec une incertitude (écart-type)  $|\alpha|$ .

De la même manière, pour les opérateurs de quadrature des équations (2.1.36) et (2.1.37), on vérifie facilement que

$$\langle \alpha | \hat{X}_1 | \alpha \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) = \text{Re}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad (\langle \alpha | \hat{X}_1 | \alpha \rangle)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2) \quad (3.3.17)$$

$$\langle \alpha | \hat{X}_1^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1) \quad (3.3.18)$$

d'où la variance

$$(\Delta \hat{X}_1)^2 = \langle \hat{X}_1^2 \rangle - \langle \hat{X}_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} \quad (3.3.19)$$

Le même calcul pour l'opérateur  $\hat{X}_2$  donne

$$\langle \alpha | \hat{X}_2 | \alpha \rangle = \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^*) = \text{Im}(\alpha) \quad (3.3.20)$$

et la variance

$$(\Delta \hat{X}_2)^2 = \frac{1}{4} \quad (3.3.21)$$

Nous ainsi avons le produit d'incertitudes

$$\Delta \hat{X}_1 \Delta \hat{X}_2 = \frac{1}{4} \quad (3.3.22)$$

Cela montre que les états cohérents minimisent la relation d'incertitude comme c'est le cas avec le vide quantique. Rien d'étonnant car ce dernier est un état cohérent avec  $\alpha = 0$ .

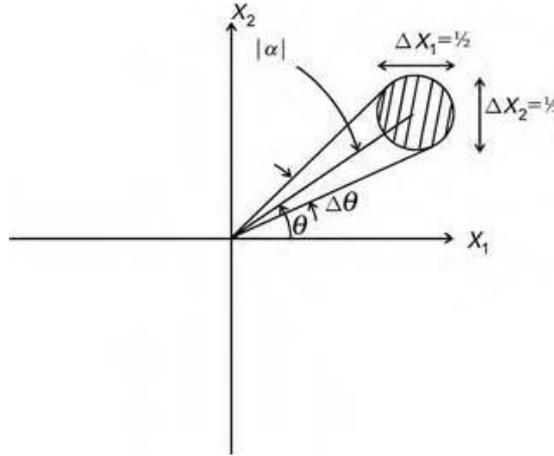


Figure 12 : Portrait en espace de phase d'un état cohérent d'amplitude  $|\alpha|$  [5].

Considérons à présent l'opérateur du champ électrique monomodal [5]

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3}} \left[ \hat{a} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} - \hat{a}^+ e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right] \quad (3.3.23)$$

À l'aide de l'équation (3.3.1), la valeur moyenne de cet opérateur sera

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | \alpha \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3}} \left[ \alpha e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} - \alpha^* e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right] \quad (3.3.24)$$

Nous avons obtenu une expression qu'on peut identifier facilement au champ classique. C'est la raison principale de qualifier les états cohérents d'états quasi-classiques, en plus du fait qu'ils satisfont la relation d'incertitude et qu'ils ont une fonction de Wigner positive partout (une gaussienne dans l'espace des phases).

Comme dans le cas des états de Fock, il est possible de construire un état cohérent à partir du vide grâce à l'opérateur de déplacement défini comme suit [5,12,13]

$$\widehat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}} \quad (3.3.25)$$

où  $\alpha$  est une amplitude complexe. Pour le vérifier, nous allons utiliser la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \quad (3.3.26)$$

valable pour deux opérateurs vérifiant les relations de commutation

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (3.3.27)$$

Dans notre cas, nous obtenons

$$\widehat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (3.3.28)$$

Appliquons l'opérateur de déplacement sur l'état du vide

$$\widehat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (3.3.29)$$

L'opérateur  $e^{-\alpha^* \hat{a}}$  ne modifie pas le vide car  $\hat{a}|0\rangle = 0$ . En effet

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* \hat{a})^n}{n!} |0\rangle = |0\rangle \quad (3.3.30)$$

Donc

$$\widehat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^+)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{n!} |n\rangle \quad (3.3.31)$$

Finalement, compte tenu de (3.3.11), nous aurons

$$|\alpha\rangle = \widehat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (3.3.32)$$

Effectivement, nous pouvons définir l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  comme étant le résultat de l'application de l'opérateur de déplacement sur le vide.

L'opérateur de déplacement est un opérateur unitaire ayant les propriétés ci-dessous qu'on démontre à l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff [12,15]

$$\widehat{D}^{-1}(\alpha) = \widehat{D}^+(\alpha) = \widehat{D}(-\alpha) \quad (3.3.33)$$

$$\widehat{D}^+(\alpha)\widehat{D}(\alpha) = \widehat{D}(\alpha)\widehat{D}^+(\alpha) = 1 \quad (3.3.34)$$

$$\widehat{D}^+(\alpha)\widehat{a}\widehat{D}(\alpha) = \widehat{a} + \alpha \quad (3.3.35)$$

$$\widehat{D}^+(\alpha)\widehat{a}^+\widehat{D}(\alpha) = \widehat{a}^+ + \alpha^* \quad (3.3.36)$$

Maintenant, soient  $|\alpha\rangle$  et  $|\beta\rangle$  deux états cohérents, donc leur produit scalaire est [5,12]

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\alpha|^2)} \sum_{n'n} \left\langle n' \left| \frac{\beta^{*n'} \alpha^n}{\sqrt{n'!} \sqrt{n!}} \right| n \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\alpha|^2)} \sum_{n'n} \frac{\beta^{*n'} \alpha^n}{\sqrt{n'!} \sqrt{n!}} \delta_{nn'} \quad (3.3.37)$$

d'où

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\alpha|^2)} e^{\beta^* \alpha} \quad (3.3.38)$$

On en déduit que

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-|\beta-\alpha|^2} \quad (3.3.39)$$

Donc, les états cohérents ne sont pas orthogonaux, mais si  $|\beta - \alpha|^2$  est très grand, on peut faire une approximation et dire que les deux états sont orthogonaux.

Afin de calculer la fonction de Wigner du champ dans un état cohérent  $|\beta\rangle$ , nous commençons d'abord, par la fonction caractéristique symétrique définie dans la dernière section du premier chapitre ( $\hbar = 1$ ) [5,6]

$$C_s(\lambda) = Tr(\widehat{\rho} e^{(\lambda\widehat{a}^+ - \lambda^*\widehat{a})}) = \langle e^{(\lambda\widehat{a}^+ - \lambda^*\widehat{a})} \rangle \quad (3.3.40)$$

A l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on obtient

$$C_s(\lambda) = \langle\beta|e^{(\lambda\widehat{a}^+ - \lambda^*\widehat{a})}|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \langle\beta|e^{(\lambda\widehat{a}^+)}e^{(-\lambda^*\widehat{a})}|\beta\rangle \quad (3.3.41)$$

Nous allons maintenant utiliser le fait que  $e^{(-\lambda^*\widehat{a})}|\beta\rangle = e^{(-\lambda^*\beta)}|\beta\rangle$  car  $\widehat{a}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$  à fin avoir

$$C_s(\lambda) = e^{\lambda\beta^*} e^{-\lambda^*\beta} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \quad (3.3.42)$$

Nous allons à ce stade inverser pour avoir la fonction de Wigner

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda C_s(\lambda) e^{\lambda^*\alpha - \lambda\alpha^*} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda e^{\lambda\beta^*} e^{-\lambda^*\beta} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} e^{\lambda^*\alpha - \lambda\alpha^*} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda e^{\lambda(\beta^* - \alpha^*) - \lambda^*(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}|\lambda|^2} \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Avec l'intégrale gaussienne

$$\int e^{\lambda x + \lambda^* y - z|\lambda|^2} d^2\lambda = \frac{\pi}{z} e^{\frac{xy}{z}} \quad (3.3.44)$$

nous trouvons

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2(\beta^* - \alpha^*)(\beta - \alpha)} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \beta|^2} \quad (3.3.45)$$

où les nombres  $\alpha$  et  $\beta$  Sont des nombres complexes

$$\alpha = x + iy \quad ; \quad \beta = x_0 + iy_0 \quad (3.3.46)$$

Donc

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad (3.3.47)$$

Nous remarquons que la fonction de Wigner d'un état cohérent  $|x_0 + iy_0\rangle$ , est une gaussienne centrée en  $(x_0, y_0)$ . Elle est positive partout, ce qui fait d'elle une densité de probabilité.

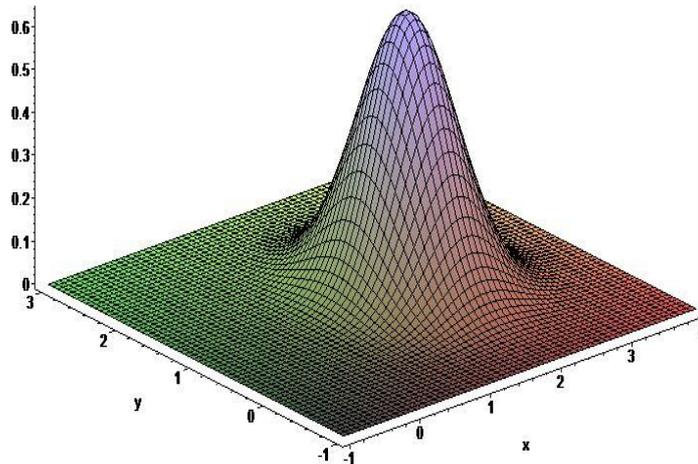


Figure 13 : Représentation de la fonction de Wigner (3.3.47) de l'état cohérent.

### 3.4 État « chat de Schrödinger »

En 1935, Schrödinger a imaginé une expérience de pensée pour illustrer l'étrangeté du monde quantique et les manifestations que pourrait avoir une superposition d'états macroscopiques [9]. La vie d'un chat dépend de la désintégration d'un atome radioactif et puisque cet atome peut être dans une superposition quantique d'un état non désintégré et désintégré, le chat doit être à la fois mort et vivant avant de l'observer [15].

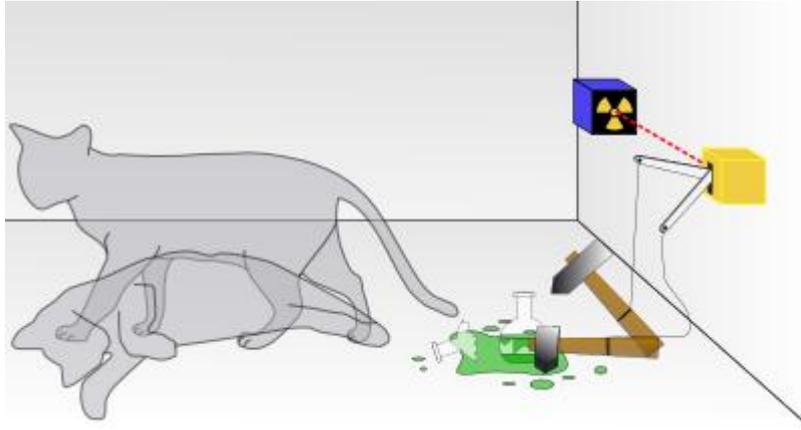


Figure 14 : L'expérience de pensée de Schrödinger

Nous définissons l'état chat de Schrödinger en optique comme une superposition quantique de deux états cohérents de même amplitude  $\alpha$  et de phase opposée, c'est-à-dire suffisamment incompatibles [5]

$$|\Psi_{chat}\rangle = N(|\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (3.4.1)$$

où  $N$  est une constante de normalisation donnée par

$$N = [2 + 2e^{-2|\alpha|^2} \cos \varphi]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4.2)$$

Quand ces deux états cohérents  $|\alpha\rangle$  et  $|-\alpha\rangle$  sont suffisamment incompatibles ( $|\alpha|^2 \gg 1$ )

$$|\langle\alpha|-\alpha\rangle| = e^{-2|\alpha|^2} \cong 0 \quad (3.4.3)$$

et  $N$  approche  $1/\sqrt{2}$ , d'où l'état chat de Schrödinger qui s'exprime comme suit

$$|\Psi_{chat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle) \quad (3.4.4)$$

Il y a trois états cat importants, selon le choix de la phase  $\varphi$ . Les états dits pair et impair correspondant au cas où les deux champs sont en opposition de phase [5,19]

Pour  $\varphi = 0$ , les états cohérent pairs

$$|\Psi_{pair}\rangle = N_+(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (3.4.5)$$

Pour  $\varphi = \pi$ , les états cohérents impaires

$$|\Psi_{\text{impair}}\rangle = N_-(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (3.4.6)$$

avec

$$N_+ = [2 + 2e^{-2|\alpha|^2}]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4.7)$$

$$N_- = [2 - 2e^{-2|\alpha|^2}]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4.8)$$

Pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons les états Yurke-Stoler

$$|\Psi_{YS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle) \quad (3.4.9)$$

Maintenant, nous calculerons les variances des quadratures  $\hat{X}_1$  et  $\hat{X}_2$ , que nous avons définies dans les équations (2.1.36) et (2.1.37). Nous allons commencer avec l'état pair. D'abord, il faut déterminer quelque termes [5]

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle &= (\langle \alpha| + \langle -\alpha|) \hat{a} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) = 0 \\ \langle \hat{a}^+ \rangle &= 0 \\ \langle \hat{a}^2 \rangle &= 2\alpha^2 + 2\alpha^2 e^{-2|\alpha|^2} \\ \langle \hat{a}^{+2} \rangle &= 2\alpha^{*2} + 2\alpha^{*2} e^{-2|\alpha|^2} \\ \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle &= 2|\alpha|^2 - 2|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2} \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Pour première quadrature  $\hat{X}_1$  nous avons la moyenne

$$\langle \hat{X}_1 \rangle = \frac{1}{2} (\langle \hat{a} \rangle + \langle \hat{a}^+ \rangle) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{X}_1 \rangle^2 = 0 \quad (3.4.11)$$

et la moyenne du carré

$$\langle \hat{X}_1^2 \rangle = \frac{1}{4} (\langle \hat{a}^2 \rangle + \langle \hat{a}^{+2} \rangle + 2\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle + 1) = \frac{1}{4} + \frac{|\alpha|^2}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \quad (3.4.12)$$

d'où la variance de cette quadrature

$$\langle \Delta \hat{X}_1 \rangle^2 = \langle \hat{X}_1^2 \rangle - \langle \hat{X}_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} + \frac{|\alpha|^2}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \quad (3.4.13)$$

La variance de la deuxième quadrature  $\hat{X}_2$  quant à elle est

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} - \frac{|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \quad (3.4.14)$$

Passons à présent aux calculs relatifs à l'état du chat impair. En effet, dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle &= (\langle \alpha | + \langle -\alpha |) \hat{a} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) = 0 \\ \langle \hat{a}^+ \rangle &= 0 \\ \langle \hat{a}^2 \rangle &= 2\alpha^2 - 2\alpha^2 e^{-2|\alpha|^2} \\ \langle \hat{a}^{+2} \rangle &= 2\alpha^{*2} - 2\alpha^{*2} e^{-2|\alpha|^2} \\ \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle &= 2|\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

On en déduit les variances de deux quadratures

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{|\alpha|^2}{(1 - e^{-2|\alpha|^2})} \quad (3.4.16)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{|\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{(1 - e^{-2|\alpha|^2})} \quad (3.4.17)$$

Finalement, pour l'état Yurke-Stoler, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle &= (\langle \alpha | + \langle -\alpha |) \hat{a} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) = -i\alpha e^{-2|\alpha|^2} \\ \langle \hat{a}^+ \rangle &= i\alpha^* e^{-2|\alpha|^2} \\ \langle \hat{a}^2 \rangle &= \alpha^2 \\ \langle \hat{a}^{+2} \rangle &= \alpha^{*2} \\ \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle &= |\alpha|^2 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Alors, les variances de deux quadratures sont

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} + |\alpha|^2 \quad (3.4.19)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} - |\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2} \quad (3.4.20)$$

Maintenant, nous allons procéder au calcul de la fonction de Wigner de l'état chat de Schrödinger pair [22]. La fonction caractéristique est

$$C_s(\lambda) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \langle e^{(\lambda\hat{a}^+)} e^{(-\lambda^*\hat{a})} \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \langle \Psi_{pair} | e^{(\lambda\hat{a}^+)} e^{(-\lambda^*\hat{a})} | \Psi_{pair} \rangle \quad (3.4.21)$$

Si on pose  $\hat{G}(\lambda) = e^{(\lambda\hat{a}^+)} e^{(-\lambda^*\hat{a})}$ , l'expression va être

$$C_s(\lambda) = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}}{N^2} (\langle \beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle + \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle + \langle \beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle + \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle) \quad (3.4.22)$$

Donc la fonction caractéristique sera la somme de quatre termes qui se calculent de la même façon employée avec les états cohérents

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}}{N^2} \langle \beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle = \frac{1}{N^2} e^{\lambda\beta^*} e^{-\lambda^*\beta} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \quad (3.4.23. a)$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}}{N^2} \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle = \frac{1}{N^2} e^{-\lambda\beta^*} e^{\lambda^*\beta} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \quad (3.4.23. b)$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}}{N^2} \langle \beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle = \frac{1}{N^2} e^{\lambda\beta^*} e^{\lambda^*\beta} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \quad (3.4.23. c)$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}}{N^2} \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle = \frac{1}{N^2} e^{-\lambda\beta^*} e^{-\lambda^*\beta} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \quad (3.4.23. d)$$

Pour trouver la fonction de Wigner, nous allons faire appel à la transformation de Fourier inverse

$$W_{chat} = \frac{1}{\pi^2 N^2} \int d^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda - \frac{1}{2}|\lambda|^2)} [\langle \beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle + \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle + \langle \beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle + \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle] \quad (3.4.24)$$

Toujours, en procédant de la même manière que dans le cas de la fonction de Wigner de l'état cohérent, nous pouvons démontrer que

$$\frac{1}{\pi^2 N^2} \int d^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda - \frac{1}{2}|\lambda|^2)} \langle \beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle = \frac{2}{\pi\pi^2 N^2} e^{-2|\alpha-\beta|^2} \quad (3.4.25. a)$$

$$\frac{1}{\pi^2 N^2} \int d^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda - \frac{1}{2}|\lambda|^2)} \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle = \frac{2}{\pi\pi^2 N^2} e^{-2|\alpha+\beta|^2} \quad (3.4.25. b)$$

$$\frac{1}{\pi^2 N^2} \int d^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda - \frac{1}{2}|\lambda|^2)} \langle \beta | \hat{G}(\lambda) | -\beta \rangle = \frac{2}{\pi\pi^2 N^2} e^{-2|\alpha+\beta|^2 - 2|\beta|^2} \quad (3.4.25. c)$$

$$\frac{1}{\pi^2 N^2} \int d^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda - \frac{1}{2}|\lambda|^2)} \langle -\beta | \hat{G}(\lambda) | \beta \rangle = \frac{2}{\pi\pi^2 N^2} e^{-2|\alpha-\beta|^2 - 2|\beta|^2} \quad (3.4.25. d)$$

Après simplification, la fonction de Wigner de l'état chat de Schrödinger va avoir la forme [22]

$$W_{chat}(\alpha) = \frac{1}{\pi(1 + e^{-2|\beta|^2})} [e^{-2|\alpha-\beta|^2} + e^{-2|\alpha+\beta|^2} + 2e^{-2|\alpha|^2} \cos(4\alpha\beta)] \quad (3.4.26)$$

Les deux premiers membres de la somme sont associés aux deux parties cohérentes de l'état chat, et le dernier est le terme décrivant l'interférence quantique.

La représentation graphique de la fonction de Wigner de l'état chat de Schrödinger montre bien que ce dernier est fortement non gaussien malgré le fait qu'il est une superposition de deux états gaussiens (états cohérents). En effet, la fonction de Wigner oscille entre des régions négatives et des régions positives d'une façon non symétrique par rapport aux axes du plan horizontal. Cette propriété fait de l'état chat un état non classique car la fonction de Wigner n'a pas les propriétés (la positivité) d'une densité de probabilité classique.

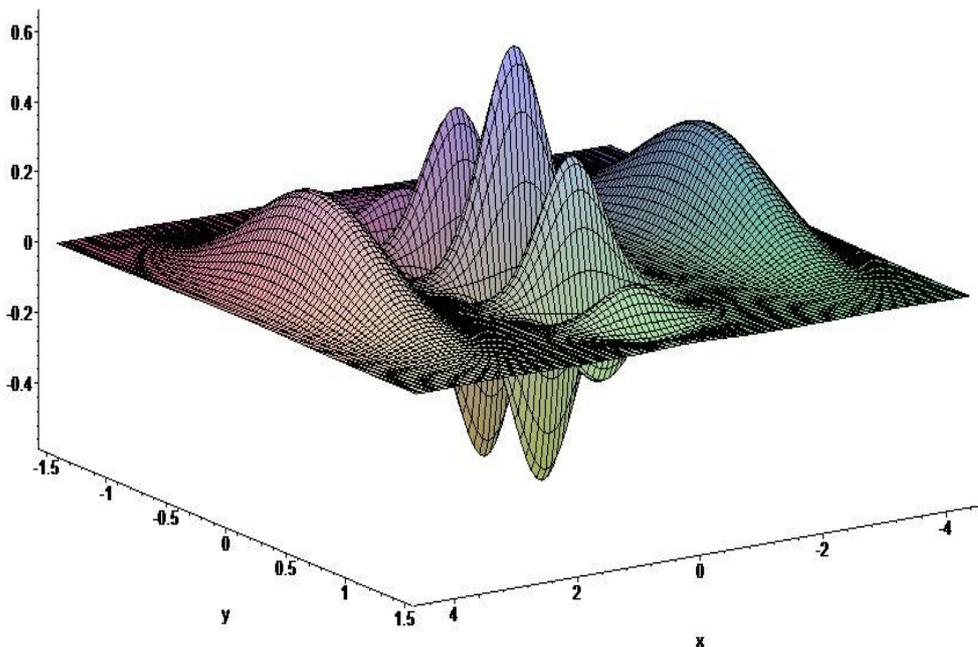


Figure 15 : La représentation de Wiener de l'état chat de Schrödinger.

### 3.5 Les états thermiques

Ces états sont des mélanges d'états de Fock, et comme son nom l'indique, un état thermique correspond à l'état du rayonnement en équilibre thermique avec un réservoir de température  $T$ . La probabilité  $P_n$  qu'un mode du champ est excité avec  $n$  photons est donnée par le facteur de Boltzmann [5,15,18]

$$P_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{K_B T}}}{\sum_n e^{-\frac{E_n}{K_B T}}} \quad (3.5.1)$$

où  $k_B$  est la constant de Boltzmann ( $K_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ).

L'opérateur densité de l'état thermique est

$$\hat{\rho}_{th} = Z^{-1} e^{-\frac{\hat{H}}{K_B T}} \quad (3.5.2)$$

où le hamiltonien  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2})$  et  $Z$  la fonction de partition qui s'écrit

$$Z = \text{Tr} \left( e^{-\frac{\hat{H}}{K_B T}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\frac{\hat{H}}{K_B T}} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{K_B T}} \quad (3.5.3)$$

avec  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ . Nous pouvons alors écrire l'équation précédente sous forme

$$Z = e^{-\frac{\hbar\omega}{2K_B T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega n}{K_B T}} \quad (3.5.4)$$

Sachant que  $e^{-\frac{\hbar\omega}{K_B T}} < 1$ , la somme de séries géométrique ci-dessous est

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega n}{K_B T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{K_B T}}} \quad (3.5.5)$$

Donc l'équation (3.5.4) devient

$$Z = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2K_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{K_B T}}} \quad (3.5.6)$$

ce qui va nous permettre d'écrire l'opérateur densité dans la base  $\{|n\rangle\}$

$$\hat{\rho}_{th} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} |n'\rangle \langle n' | \hat{\rho} | n \rangle \langle n | = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n' | Z^{-1} e^{-\frac{\hat{H}}{K_B T}} | n \rangle | n' \rangle \langle n | \quad (3.5.7)$$

Après simplification

$$\hat{\rho}_{th} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n| \quad (3.5.8)$$

où

$$P_n = \langle n|\hat{\rho}_{th}|n\rangle = Z^{-1} e^{-\frac{E_n}{K_B T}} \quad (3.5.9)$$

La valeur moyenne de nombre de photon dans un état thermique s'obtient en prenant la trace de l'opérateur  $\hat{n}\hat{\rho}_{th}$  où  $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$ . Autrement dit, [5,18]

$$\begin{aligned} \bar{n} = \langle \hat{n} \rangle &= Tr(\hat{n}\hat{\rho}_{th}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\hat{n}\hat{\rho}_{th}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle n|\hat{n} P_{n'}|n'\rangle \langle n'|n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\hbar\omega}{2K_B T}} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{\hbar\omega n}{K_B T}} \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Si on pose  $x = \frac{\hbar\omega}{K_B T}$ , nous pourrions utiliser ce résultat

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad (3.5.11)$$

Alors, l'équation (3.5.10) devient

$$\bar{n} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{K_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{K_B T}}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{K_B T}} - 1} \quad (3.5.12)$$

Après inversion, on obtient la relation

$$e^{-\frac{\hbar\omega}{K_B T}} = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \quad (3.5.13)$$

et la probabilité  $P_n$  va s'écrire en termes de  $\bar{n}$  comme suit

$$P_n = \frac{1}{1 + \bar{n}} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n \quad (3.5.14)$$

L'opérateur densité  $\hat{\rho}_{th}$  devient alors

$$\hat{\rho}_{th} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n| \quad (3.5.15)$$

A présent calculons la variance de nombre de photons qui est égale à  $(\Delta n)^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$ , sachant que  $\langle \hat{n} \rangle = \bar{n}$ . En effet,

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = Tr(\hat{n}^2 \hat{\rho}_{th}) = \bar{n} + 2\bar{n}^2 \quad (3.5.16)$$

d'où la variance associée à  $n$ ,

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad (3.5.17)$$

Pour récapituler, un état thermique est un mélange statistique dépendant de la température d'équilibre où le nombre moyen de photons est  $\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$  avec un écart de  $\Delta n = \sqrt{\bar{n} + \bar{n}^2}$ .

Afin de caractériser un état thermique, nous allons déterminer sa fonction de Wigner en utilisant la fonction caractéristique symétrique. En effet,

$$C_s(\lambda) = Tr(\hat{\rho} e^{(\lambda \hat{a}^+ - \lambda^* \hat{a})}) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \langle e^{(\lambda \hat{a}^+)} e^{(-\lambda^* \hat{a})} \rangle \quad (3.5.18)$$

Avec l'opérateur densité

$$\hat{\rho}_{th} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle \langle n| \quad (3.5.19)$$

Après avoir substitué l'expression (3.5.19) dans l'expression (3.5.18), la fonction caractéristique symétrique de l'état thermique devient

$$C_s(\lambda) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \langle n | e^{(\lambda \hat{a}^+)} e^{(-\lambda^* \hat{a})} | n \rangle \quad (3.5.20)$$

Mais  $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$  et  $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$  ainsi que  $P_n = \frac{1}{1+\bar{n}} \left( \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n$ , d'où

$$\begin{aligned} C_s(\lambda) &= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n \left\langle n \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda \hat{a}^+)^m}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\lambda^* \hat{a})^l}{l!} \right| n \right\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n \left\langle n - m \left| \sum_{m=0}^n \frac{(\lambda)^m}{m!} \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}} \sum_{l=0}^n \frac{(-\lambda^*)^l}{l!} \sqrt{\frac{n!}{(n-l)!}} \right| n - l \right\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n \frac{(-|\lambda|^2)^m}{(m!)^2} \frac{n!}{(n-m)!} \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Après calcul nécessitant l'usage de certaines formules des polynômes de Laguerre [22], la fonction caractéristique va se réduire à l'expression

$$C_s(\lambda) = e^{-(\bar{n} + \frac{1}{2})|\lambda|^2} \quad (3.5.22)$$

Pour calculer la fonction de Wigner de l'état thermique, nous utiliserons la relation entre la fonction de Wigner et la fonction caractéristique symétrique suivante [22] :

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda C_s(\lambda) e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda e^{-(\bar{n} + \frac{1}{2})|\lambda|^2} e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} \quad (3.5.23)$$

Toujours à l'aide de l'intégrale gaussienne

$$\int e^{\lambda x + \lambda^* y - z |\lambda|^2} d^2\lambda = \frac{\pi}{z} e^{\frac{xy}{z}} \quad (3.5.24)$$

La fonction de Wigner de l'état thermique devient

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi(\bar{n} + \frac{1}{2})} e^{\frac{-|\alpha|^2}{\bar{n} + \frac{1}{2}}} \quad (3.5.25)$$

Sachant que  $\alpha = x + ip$ , la fonction de Wigner pour l'état thermique va se mettre sous forme

$$w(\alpha) = \frac{1}{\pi(\bar{n} + \frac{1}{2})} e^{-\frac{x^2}{\bar{n} + \frac{1}{2}} - \frac{p^2}{\bar{n} + \frac{1}{2}}} \quad (3.5.26)$$

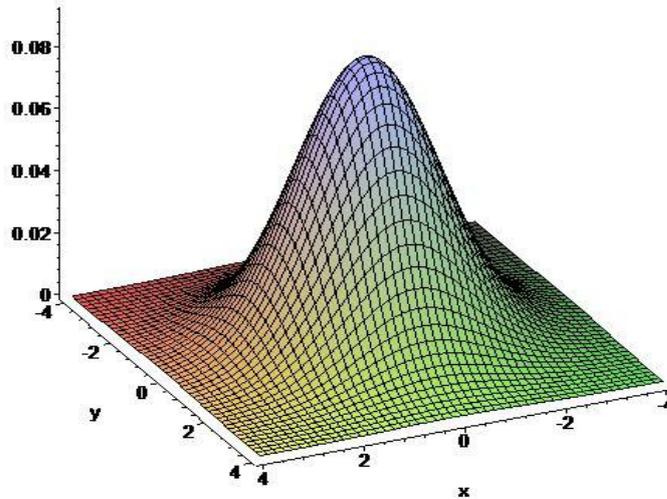


Figure 16 : Représentation de la fonction de Wigner pour l'état thermique avec  $\bar{n} = 1$ .

Nous avons ainsi montré que l'état thermique est état gaussien centré à l'origine symétrique par rapport à l'axe vertical. La fonction de Wigner qui lui est associée est une densité de probabilité positive partout. C'est notre exemple de mélange statistique (non pur) ayant un caractère gaussien.

# 4 Etats comprimés de la lumière

Les états comprimés sont des états non-classiques avec une compression des fluctuations. Autrement dit, les fluctuations de l'une des quadratures sont comprimées tandis que les fluctuations de l'autre quadrature sont amplifiées (automatiquement), en respectant la relation d'incertitude de Heisenberg.

Dans ce chapitre nous présenterons d'abord les états comprimés à un mode, ensuite nous allons aborder le problème des états cohérents comprimés et des états de Fock comprimés. Nous terminerons le chapitre par l'étude de l'état EPR (Einstein, Podolski, Rosen) qui est un état comprimé à deux modes.

## 4.1 L'état comprimé

Quand  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont deux opérateurs vérifiant la relation de commutation [5,13,16]

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (4.1.1)$$

la relation d'incertitude qui en découle est

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle\hat{C}\rangle|^2 \quad (4.1.2)$$

Dans le cas comprimé, nous avons  $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle = \frac{1}{4}|\langle\hat{C}\rangle|^2$ , mais il faut que

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle < \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle| \quad (4.1.3)$$

ou bien

$$\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle < \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|. \quad (4.1.4)$$

Un état comprimé à un mode peut être obtenu à partir d'un état de vide par l'action de l'opérateur de compression [5,13,16] :

$$\hat{S}(\varepsilon) = e^{\frac{1}{2}(\varepsilon^*\hat{a}^2 - \varepsilon\hat{a}^{+2})} \quad (4.1.5)$$

où  $\varepsilon = re^{i\theta}$ , et  $r$  le paramètre de compression et  $\theta$  est un nombre réel. L'opérateur  $\hat{S}(\varepsilon)$  est un opérateur unitaire qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\hat{S}^+(\varepsilon) = \hat{S}^{-1}(\varepsilon) = \hat{S}(-\varepsilon) \quad (4.1.6)$$

$$\hat{S}^+(\varepsilon)\hat{S}(\varepsilon) = \hat{S}(\varepsilon)\hat{S}^+(\varepsilon) \quad (4.1.7)$$

car  $\hat{S}(\varepsilon)$  est de la forme  $e^{i\hat{G}}$  où  $\hat{G} = \frac{i}{2}(\varepsilon^*\hat{a}^2 - \varepsilon\hat{a}^{+2})$  avec  $\hat{G} = \hat{G}^+$ . En général, nous écrivons les états comprimés obtenus à partir de l'état  $|\varphi\rangle$  comme étant

$$|\varphi_s\rangle = \hat{S}(\varepsilon)|\varphi\rangle \quad (4.1.8)$$

L'opérateur de compression transforme les opérateurs d'annihilations et de créations comme suit [5,12] :

$$\hat{S}^+(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}(\varepsilon) = \hat{a} \cosh(r) - \hat{a}^+ e^{i\theta} \sinh(r) \quad (4.1.9)$$

$$\hat{S}^+(\varepsilon)\hat{a}^+\hat{S}(\varepsilon) = \hat{a}^+ \cosh(r) - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh(r) \quad (4.1.10)$$

relations obtenues à partir de l'application de la relation de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (4.1.11)$$

En effet, si on pose  $\hat{A} = \frac{\varepsilon^*\hat{a}^2 - \varepsilon\hat{a}^{+2}}{2}$  et  $\hat{B} = \hat{a}$ , nous pourrions

$$\hat{S}^+(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}(\varepsilon) = e^{-\hat{A}}\hat{a}e^{\hat{A}} = \hat{a} + [-\hat{A}, \hat{a}] + \frac{1}{2!}[-\hat{A}, [-\hat{A}, \hat{a}]] + \dots \quad (4.1.12)$$

Utilisons maintenant

$$[-\hat{A}, \hat{a}] = \left[ \frac{1}{2}(\varepsilon\hat{a}^{+2} - \varepsilon^*\hat{a}^2), \hat{a} \right] = -\varepsilon\hat{a}^+ \quad (4.1.13)$$

$$[-\hat{A}, \hat{a}^+] = \left[ \frac{1}{2}(\varepsilon\hat{a}^{+2} - \varepsilon^*\hat{a}^2), \hat{a}^+ \right] = -\varepsilon^*\hat{a} \quad (4.1.14)$$

pour s'assurer que

$$\hat{S}^+\hat{a}\hat{S} = \hat{a} \underbrace{\left(1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots\right)}_{\cosh(r)} - e^{i\theta}\hat{a}^+ \underbrace{\left(r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots\right)}_{\sinh(r)} = \hat{a} \cosh(r) - e^{i\theta}\hat{a}^+ \sinh(r) \quad (4.1.15)$$

### 4.1.1 L'état cohérent comprimé

L'application successive de l'opérateur de compression  $\hat{S}(\varepsilon)$  et de l'opérateur de déplacement  $\hat{D}(\alpha)$  sur l'état de vide  $|0\rangle$  génère des états avec une incertitude minimale appelée les états cohérents comprimés [5,13].

$$|\alpha, \varepsilon\rangle = \widehat{D}(\alpha)\widehat{S}(\varepsilon)|0\rangle \quad (4.1.16)$$

Nous remarquons que lorsque  $\varepsilon = 0$  nous obtenons l'état cohérent, et quand  $\alpha = 0$  nous aurons l'état de vide comprimé.

Utilisons maintenant les équations (3.3.35), (3.3.36), (4.1.9) et (4.1.10), pour calculer les quantités ci-dessous.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle &= \langle \alpha, \varepsilon | \hat{a} | \alpha, \varepsilon \rangle = \langle 0 | \widehat{S}^+(\varepsilon) \widehat{D}^+(\alpha) \hat{a} \widehat{D}(\alpha) \widehat{S}(\varepsilon) | 0 \rangle = \langle 0 | \widehat{S}^+(\varepsilon) \alpha \widehat{S}(\varepsilon) | 0 \rangle = \alpha \\ \langle \hat{a}^+ \rangle &= \alpha^* \\ \langle \hat{a}^2 \rangle &= -e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) + \alpha^2 \\ \langle \hat{a}^{+2} \rangle &= -e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) + \alpha^{*2} \\ \langle \hat{a} \hat{a}^+ \rangle &= \cosh^2(r) + |\alpha|^2 \\ \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle &= \sinh^2(r) + |\alpha|^2 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Il est possible maintenant de déterminer les moyennes et les variances des quadratures  $\widehat{X}_1$  et  $\widehat{X}_2$ , que nous avons définies dans les équations (2.1.36) et (2.1.37). Nous avons les valeurs moyennes [5] :

$$\langle \widehat{X}_1 \rangle = \langle \alpha, \varepsilon | \widehat{X}_1 | \alpha, \varepsilon \rangle = \left\langle \left( \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) = \text{Re}(\alpha) \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{X}_1^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle (\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}) \rangle \\ &= \frac{1}{4} (-2 \cosh(r) \sinh(r) \cos(\theta) + \cosh^2(r) + \sinh^2(r) + (\alpha + \alpha^*)^2) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

d'où la variance

$$(\Delta \widehat{X}_1)^2 = \langle \widehat{X}_1^2 \rangle - \langle \widehat{X}_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} (-2 \cosh(r) \sinh(r) \cos(\theta) + \cosh^2(r) + \sinh^2(r)) \quad (4.1.20)$$

Sachant que  $\cosh(r) = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$  et  $\sinh(r) = \frac{e^r - e^{-r}}{2}$ , si  $\theta = 0$ , l'expression précédente se réduit à la forme

$$(\Delta \widehat{X}_1)^2 = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (4.1.21)$$

De la même façon, on arrive aux résultats

$$\langle \widehat{X}_2 \rangle = \text{Im}(\alpha) \quad \text{et} \quad (\Delta \widehat{X}_2)^2 = \frac{1}{4} e^{2r} \quad (4.1.22)$$

Finalement,

$$(\Delta\hat{X}_1)(\Delta\hat{X}_2) = \frac{1}{4} \quad \text{avec} \quad \Delta\hat{X}_1 \quad (4.1.23)$$

Effectivement, les états cohérents comprimés vérifient la relation d'incertitude de Heisenberg tout en ayant des fluctuations des quadratures différentes (si  $r > 1$ , alors  $\Delta\hat{X}_1 < \Delta\hat{X}_2$ ).

### 4.1.2. L'état du vide comprimé

C'est l'état obtenu en appliquant l'opérateur de compression sur l'état de vide

$$|\varphi_s\rangle \equiv |\varepsilon\rangle = \hat{S}(\varepsilon)|0\rangle \quad (4.1.24)$$

Partant de l'opérateur d'annihilation appliqué sur le vide  $\hat{a}|0\rangle = 0$ , ensuite en multipliant par l'opérateur  $\hat{S}(\varepsilon)$  à gauche et en ajoutant l'opérateur unitaire  $\hat{S}^+(\varepsilon)\hat{S}(\varepsilon)$  à droite de l'opérateur  $\hat{a}$ , on obtient l'équation [5,13]

$$\hat{S}(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}^+(\varepsilon)\underbrace{\hat{S}(\varepsilon)|0\rangle}_{|\varepsilon\rangle} = \hat{S}(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}^+(\varepsilon)|\varepsilon\rangle = 0 \quad (4.1.25)$$

À l'aide de l'équation (4.1.9), nous pouvons aboutir à l'équation relative à l'état du vide comprimé [5] :

$$(\hat{a}\mu + \hat{a}^+\vartheta)|\varepsilon\rangle = 0 \quad (4.1.26)$$

où  $\mu = \cosh(r)$  ;  $\vartheta = e^{i\theta} \sinh(r)$ . Donc l'état du vide comprimé  $|\varepsilon\rangle$  est un vecteur propre de l'opérateur  $(\hat{a}\mu + \hat{a}^+\vartheta)$  avec la valeur propre nulle.

En faisant les mêmes calculs que nous avons déjà faits dans la section précédente pour calculer les variances, nous avons trouvé les résultats suivants :

$$(\Delta\hat{X}_1)^2 = \frac{1}{4}e^{-2r} \quad (4.1.27)$$

$$(\Delta\hat{X}_2)^2 = \frac{1}{4}e^{2r} \quad (4.1.28)$$

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 = \frac{1}{4} \quad (4.1.29)$$

Donc, les états de vide comprimés vérifient la relation d'incertitude de Heisenberg.

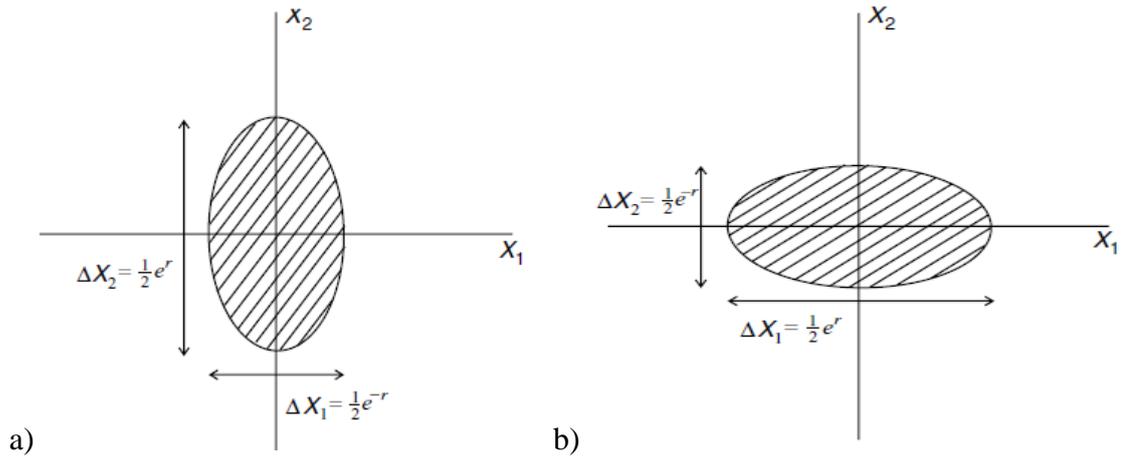


Figure 17 : Ellipse d'erreurs pour un état du vide comprimé. a) la compression est en quadrature  $\hat{X}_1$ , b) la compression est en quadrature  $\hat{X}_2$  [5].

### 4.1.3 Les vecteurs propres et les valeurs propres de l'état cohérent comprimé

En multipliant par l'opérateur de déplacement  $\hat{D}(\alpha)$  l'équation (4.1.25) à gauche, et en insérant l'opérateur unité  $\hat{D}^+(\alpha)\hat{D}(\alpha)$  à droite de cette équation, on obtient [5]

$$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}^+(\varepsilon)\hat{D}^+(\alpha)\underbrace{\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\varepsilon)|0\rangle}_{|\alpha,\varepsilon\rangle} = 0 \quad (4.1.30)$$

À l'aide de l'équation (3.3.35), nous pouvons récrire la relation précédente sous forme

$$(\hat{a}\mu + \hat{a}^+\vartheta)|\alpha,\varepsilon\rangle = \beta|\alpha,\varepsilon\rangle \quad (4.1.31)$$

où

$$\beta = \alpha \cosh(r) + \alpha^* e^{i\theta} \sinh(r) \quad (4.1.32)$$

On conclut que l'état cohérent comprimé  $|\alpha,\varepsilon\rangle$  est un vecteur propre de l'opérateur  $(\hat{a}\mu + \hat{a}^+\vartheta)$  avec la valeur propre  $\alpha \cosh(r) + \alpha^* e^{i\theta} \sinh(r) \in \mathbb{C}$ .

### 4.1.4 La représentation en nombre de photons

Maintenant, nous décomposerons les états comprimés en états de Fock. Nous considérons que l'état du vide comprimé prend la forme [5,12]

$$|\varepsilon\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (4.1.33)$$

A l'aide de l'équation (4.1.26), on aura

$$\begin{aligned}
(\hat{a}\mu + \hat{a}^+\vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = 0 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}\mu C_n |n\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}^+\vartheta C_n |n\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mu C_n \sqrt{n} |n-1\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta C_n \sqrt{n+1} |n+1\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \mu C_1 |0\rangle + \sum_{n=2}^{\infty} \mu C_n \sqrt{n} |n-1\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta C_n \sqrt{n+1} |n+1\rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\hat{a}\mu + \hat{a}^+\vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = 0 &\Rightarrow \mu C_1 |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta C_{n-1} \sqrt{n} |n\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \mu C_1 |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu C_{n+1} \sqrt{n+1} + \vartheta C_{n-1} \sqrt{n}) |n\rangle = 0 \quad (4.1.34)
\end{aligned}$$

Comme  $\{|n\rangle\}$  forme la base de Fock, on en déduit par identification

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_{n+1} = -\frac{\vartheta}{\mu} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} C_{n-1} \end{cases} \quad (4.1.35)$$

En procédant par substitution, nous obtenons l'expression des coefficients

$$C_{2k} = (-1)^k \left(\frac{\vartheta}{\mu}\right)^k \sqrt{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}} C_0 \quad \text{et} \quad C_{2k+1} = 0 \quad (4.1.36)$$

où  $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5)$  et  $(2k)!! = (2k)(2k-2)(2k-4)$ . Pour normaliser notre ket, il faut s'assurer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |C_{2k}|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{1} \left(\frac{\vartheta}{\mu}\right)^{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} |C_0|^2 = 1 \quad (4.1.37)$$

Pour cela, nous allons utiliser l'identité mathématique

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k \quad \text{où} \quad x = \left(\frac{\vartheta}{\mu}\right)^2 \quad (4.1.38)$$

L'équation (4.1.37) devient alors

$$|C_0|^2 \left(1 - \left(\frac{\vartheta}{\mu}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_0 = \left(1 - \left(\frac{\vartheta}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.1.39)$$

où

$$\frac{\vartheta}{\mu} = \frac{e^{i\theta} \sinh(r)}{\cosh(r)} = \tanh(r) e^{i\theta} \quad (4.1.40)$$

Finalement, la constante  $C_0$  sera de la forme

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \quad (4.1.41)$$

Comme  $(2k)!! = 2^k k!$  et  $(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ , l'équation (4.1.36) devient :

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\cosh(r)}} e^{ik\theta} \tanh^k(r) \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!} \quad (4.1.42)$$

et l'état du vide comprimé va prendre la forme [5,12] :

$$|\varepsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tanh^k(r) e^{ik\theta} \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!} |2k\rangle \quad (4.1.43)$$

Donc la probabilité de trouver  $n=2m$  photons dans un état du vide comprimé est

$$|\langle 2m|\varepsilon\rangle|^2 = \frac{1}{\cosh(r)} \tanh^{2m}(r) \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \quad (4.1.44)$$

Autrement dit, dans un état du vide comprimé, le nombre de photons est toujours pair.

### 4.1.5 La fonction de Wigner pour l'état de Fock comprimé

Dans cette partie, nous allons déterminer la fonction de Wigner d'un état de Fock comprimé. Mais d'abord, nous allons calculer la fonction d'onde de l'état de Fock comprimé. Nous utilisons les équations (4.1.9), (4.1.10) pour calculer le terme suivant :

$$\hat{S}^+(\varepsilon) \hat{X} \hat{S}(\varepsilon) = \hat{S}^+(\varepsilon) \left( \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{\sqrt{2}} \right) \hat{S}(\varepsilon) = e^{-r} \hat{X} \quad (4.1.45)$$

En multipliant par le terme  $(\hat{S}^+(\varepsilon)|x\rangle)$  à la droite, on aura

$$\hat{S}^+(\varepsilon) \hat{X} \hat{S}(\varepsilon) \hat{S}^+(\varepsilon) |x\rangle = e^{-r} \hat{X} \hat{S}^+(\varepsilon) |x\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{X} \hat{S}^+(\varepsilon) |x\rangle = e^r x \hat{S}^+(\varepsilon) |x\rangle \quad (4.1.46)$$

Mais,  $\forall |x'\rangle$  un élément de la base propre de  $\hat{X}$

$$\hat{X}|x'\rangle = x'|x'\rangle \quad (4.1.47)$$

Donc si on prend  $x' = e^r x$ , on aboutit à la relation

$$\hat{X}|e^r x\rangle = e^r x|e^r x\rangle \quad (4.1.48)$$

Après la comparaison des équations (4.1.46) et (4.1.47), on en déduit que

$$\hat{S}^+(\varepsilon)|x\rangle \sim |e^r x\rangle \Rightarrow \hat{S}^+(\varepsilon)|x\rangle = \lambda|e^r x\rangle \quad (4.1.49)$$

Pour calculer le coefficient de proportionnalité  $\lambda$ , procédons comme suit

$$\langle x''|x\rangle = \langle x''|\hat{S}(\varepsilon)\hat{S}^+(\varepsilon)|x\rangle = \langle e^r x''|\lambda^* \lambda|e^r x\rangle = |\lambda|^2 \delta(e^r(x'' - x)) = |\lambda|^2 e^{-r} \delta(x'' - x) \quad (4.1.50)$$

Mais  $\langle x''|x\rangle = \delta(x'' - x)$ , d'où le choix

$$\lambda = e^{\frac{r}{2}} \quad (4.1.51)$$

Donc, l'équation (4.1.49) va se mettre sous forme

$$\hat{S}^+(\varepsilon)|x\rangle = e^{\frac{r}{2}} e^r |x\rangle \quad (4.1.52)$$

Finalement, la fonction d'onde de l'état de Fock comprimé dans la base  $\{|x\rangle\}$  est donnée par

$$\langle x|n\rangle_s = \langle x|\hat{S}(\varepsilon)|n\rangle = e^{\frac{r}{2}} \Psi_n(e^r x) \quad (4.1.53)$$

A présent, nous avons la possibilité d'aborder le problème de la fonction de Wigner correspondant à un état de Fock comprimé en utilisant la définition [17]

$$W_{n,s}(x,p) = \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon e^{ip\varepsilon} \left\langle x - \frac{\varepsilon}{2} \middle| n \right\rangle_s \left\langle n \middle| x + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle_s = \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon e^{ip\varepsilon} \left\langle x - \frac{\varepsilon}{2} \middle| S \middle| n \right\rangle \left\langle n \middle| S^+ \middle| x + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle \quad (4.1.54)$$

où

$$\left\langle x - \frac{\varepsilon}{2} \middle| \hat{S}(\varepsilon) \middle| n \right\rangle = e^{\frac{r}{2}} \Psi_n \left( e^r \left( x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \quad (4.1.55)$$

$$\left\langle n \middle| \hat{S}^+(\varepsilon) \middle| x + \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle = e^{\frac{r}{2}} \Psi_n^* \left( e^r \left( x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \quad (4.1.56)$$

Alors, l'équation (4.1.54) devient :

$$W_{n,s}(x,p) = \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon e^{ip\varepsilon} e^r \Psi_n \left( e^r \left( x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \Psi_n^* \left( e^r \left( x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \quad (4.1.57)$$

Soit

$$\begin{aligned}
 W_{n,s}(x,p) &= \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon e^{r+ip\varepsilon} \frac{H_n\left(e^r\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) H_n\left(e^r\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}{2^n n! \pi^{\frac{1}{2}}} e^{-e^{2r}\left(x^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)} \\
 &= \frac{e^{r-(e^{2r}x^2 + e^{-2r}p^2)}}{2\pi 2^n n! \pi^{\frac{1}{2}}} \int d\varepsilon H_n\left(e^r\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) H_n\left(e^r\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) e^{-\left(\frac{\varepsilon}{2}e^r - ip e^{-r}\right)^2} \quad (4.1.58)
 \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale précédente, posons

$$I = \int d\varepsilon H_n\left(e^r\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) H_n\left(e^r\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) e^{-\left(\frac{\varepsilon}{2}e^r - ip e^{-r}\right)^2} \quad (4.1.59)$$

ensuite faisons le changement de variable  $t = \frac{\varepsilon}{2}e^r - ip e^{-r}$ , pour aboutir à l'expression

$$\begin{aligned}
 I &= 2e^{-r} \int dt H_n(xe^r - t - ip e^{-r}) H_n(xe^r + t + ip e^{-r}) e^{-t^2} \\
 I &= 2e^{-r} (-1)^n \int dt H_n(t + (ip e^{-r} - xe^r)) H_n(t + (ip e^{-r} + xe^r)) e^{-t^2} \\
 I &= 2e^{-r} (-1)^n \pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! L_n(-2(ip e^{-r} - xe^r)(ip e^{-r} + xe^r)) \\
 I &= 2e^{-r} (-1)^n \pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! L_n(2(p^2 e^{-2r} + x^2 e^{2r})) \quad (4.1.60)
 \end{aligned}$$

où  $L_n$  est le polynôme de Laguerre d'ordre  $n$ . Finalement, la fonction de Wigner de l'état de Fock comprimé est de la forme [17] :

$$W_{n,s}(x,p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-(e^{2r}x^2 + e^{-2r}p^2)} L_n(2(p^2 e^{-2r} + x^2 e^{2r})) \quad (4.1.61)$$

En particulier, pour l'état du vide comprimé,

$$W_{n,s}(x,p) = \frac{1}{\pi} e^{-(e^{2r}x^2 + e^{-2r}p^2)} \quad (4.1.62)$$

Cela montre que nous avons un état gaussien centré à l'origine mais non symétrique par rapport à l'axe vertical car la fonction de Wigner est comprimée dans la direction de l'une des quadratures.

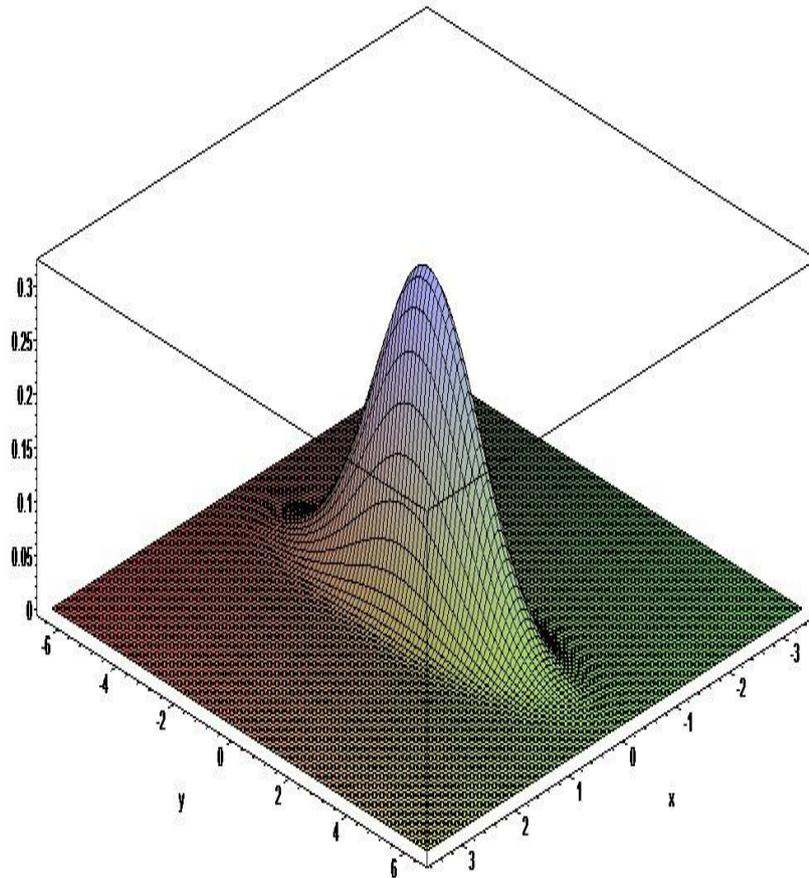


Figure 18: Représentation de fonction de Wigner du vide comprimé

Les autres états de Fock comprimés ont des fonctions de Wigner oscillant entre des régions négatives et d'autres positives toujours en étant comprimés par rapport à l'une des quadratures et amplifiés par rapport à l'autre. Il s'agit bel et bien d'états non gaussiens et non classiques.

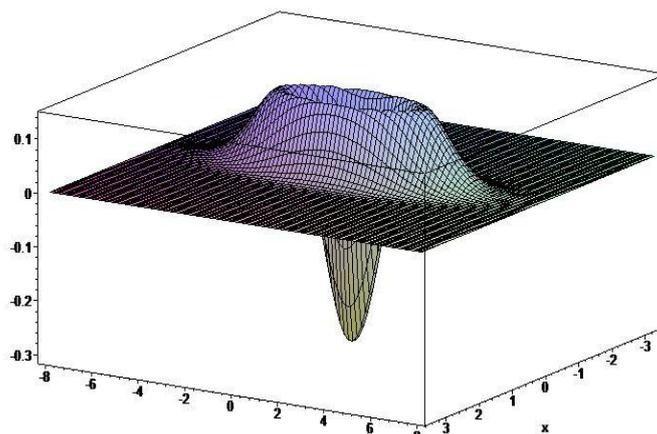


Figure 19 : Fonction de Wigner de l'état de Fock comprimé  $S(\varepsilon)|1\rangle$

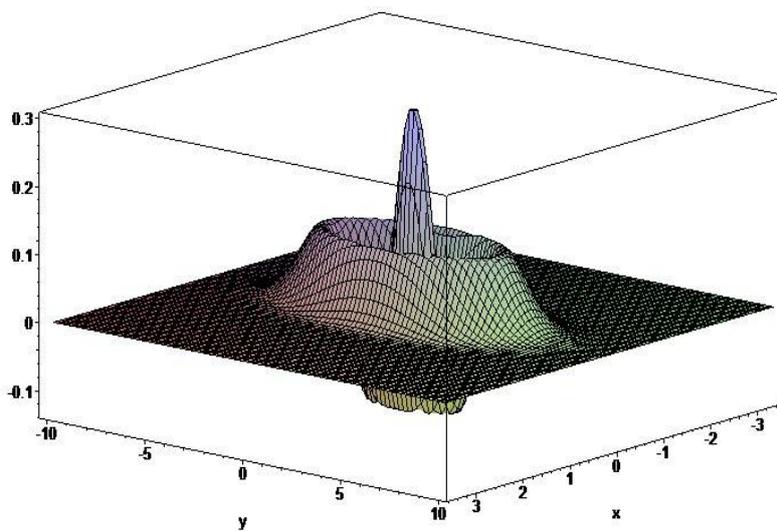


Figure 20 : Fonction de Wigner de l'état de Fock comprimé  $S(\varepsilon)|2\rangle$

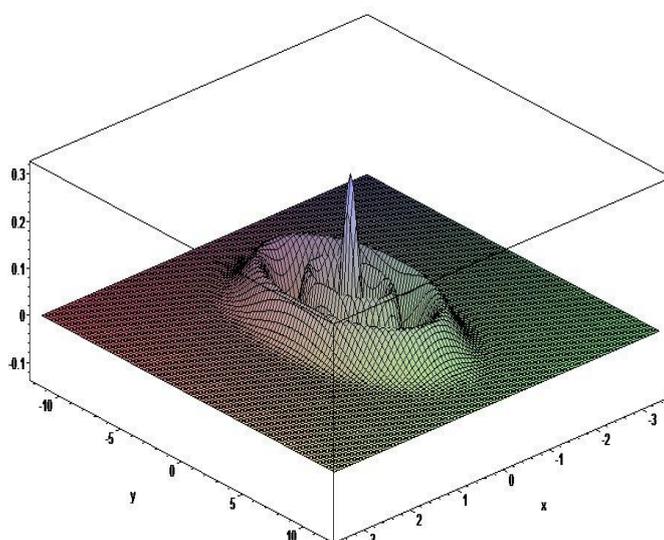


Figure 21 : Fonction de Wigner de l'état de Fock comprimé  $S(\varepsilon)|4\rangle$

## 4.2. L'état comprimé à deux modes

Jusqu'à présent, nous avons considéré les états non-classiques d'un champ monomodal, nous allons maintenant passer à un autre type d'états, à savoir les états comprimés à deux modes. En effet, nous allons discuter un état simple et très important, qui est l'état du vide comprimé à deux modes, l'état le plus simple intriqué en quadratures [5].

D'abord, introduisons par analogie avec l'opérateur de compression à un mode de l'équation (4.1.5), l'opérateur de compression à deux modes [5,14] :

$$\hat{S}_2(\varepsilon) = e^{(\varepsilon^* \hat{a} \hat{b} - \varepsilon \hat{a}^+ \hat{b}^+)} \quad (4.2.1)$$

où  $\varepsilon = r e^{i\theta}$ , et  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  sont les opérateurs d'annihilation de chacun des modes. L'état du vide comprimé à deux modes est obtenu par l'action de  $\hat{S}_2(\varepsilon)$  sur le vide bimodal

$$|\varepsilon\rangle_2 = \hat{S}_2(\varepsilon)|0,0\rangle \quad (4.2.2)$$

où

$$|0,0\rangle = |0\rangle_a |0\rangle_b \quad (4.2.3)$$

Les opérateurs de quadratures de superposition sont définis comme suit [5] :

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2^2} (\hat{a} + \hat{a}^+ + \hat{b} + \hat{b}^+) \quad (4.2.4)$$

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{2^2} (\hat{a} - \hat{a}^+ + \hat{b} - \hat{b}^+) \quad (4.2.5)$$

et ils vérifient la relation de commutation  $[\hat{X}_1, \hat{Y}_1] = \frac{i}{2}$ .

A l'aide la relation de Baker-Campbell-Hausdorff, on peut vérifier les propriétés de compression [5,14] :

$$\hat{S}_2^+(\varepsilon) \hat{a} \hat{S}_2(\varepsilon) = \hat{a} \cosh(r) - \hat{b}^+ e^{i\theta} \sinh(r) \quad (4.2.6. a)$$

$$\hat{S}_2^+(\varepsilon) \hat{b} \hat{S}_2(\varepsilon) = \hat{b} \cosh(r) - \hat{a}^+ e^{i\theta} \sinh(r) \quad (4.2.6. b)$$

$$\hat{S}_2^+(\varepsilon) \hat{a}^+ \hat{S}_2(\varepsilon) = \hat{a}^+ \cosh(r) - \hat{b} e^{-i\theta} \sinh(r) \quad (4.2.6. c)$$

$$\hat{S}_2^+(\varepsilon) \hat{b}^+ \hat{S}_2(\varepsilon) = \hat{b}^+ \cosh(r) - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh(r) \quad (4.2.6. d)$$

En faisant les mêmes calculs déjà vus avec l'état comprimé monomodal, on démontre que [5]

$$(\Delta \hat{X}_1)^2 = \frac{1}{4} (\cosh^2(r) + \sinh^2(r) - 2 \cosh(r) \sinh(r)) = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (4.2.7)$$

$$(\Delta\hat{Y}_1)^2 = \frac{1}{4}(\cosh^2(r) + \sinh^2(r) + 2\cosh(r)\sinh(r)) = \frac{1}{4}e^{2r} \quad (4.2.8)$$

d'où,

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{Y}_1 = \frac{1}{4} \quad (4.2.9)$$

Comme nous le remarquons bien, les résultats (4.2.7-4.2.9) sont mathématiquement identiques avec les résultats (4.1.27-4.1.29) de l'état du vide comprimé monomodal. Aussi, ces états minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg.

Pour obtenir un vide comprimé à deux modes en terme des deux états de nombre de mode  $|n, m\rangle$ , nous suivons notre procédure précédente en commençant par [5]

$$\hat{a}|0,0\rangle = 0 \quad (4.2.10)$$

Après multiplication par  $\hat{S}_2(\varepsilon)$  et insertion de  $\hat{S}_2^+(\varepsilon)\hat{S}_2(\varepsilon)$ , on obtient

$$\hat{S}_2(\varepsilon)\hat{a}\hat{S}_2^+(\varepsilon)\hat{S}_2(\varepsilon)|0,0\rangle = (\mu\hat{a} + \vartheta\hat{b}^+)\hat{S}_2(\varepsilon)|0,0\rangle = (\mu\hat{a} + \vartheta\hat{b}^+)|\varepsilon\rangle_2 = 0 \quad (4.2.11)$$

Nous supposons que l'état de vide comprimé à deux modes va s'écrire sous la forme

$$|\varepsilon\rangle_2 = \sum_{n,m}^{\infty} C_{n,m} |n, m\rangle \quad (4.2.12)$$

En faisant les mêmes calculs que nous avons fait avec un état du vide comprimé monomodal, nous trouverons que

$$\sum_{n,m}^{\infty} C_{n,m} \mu \sqrt{n} |n-1, m\rangle + \sum_{n,m}^{\infty} C_{n,m} \vartheta \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle = 0 \quad (4.2.13)$$

Il existe de nombreuses solutions possibles, mais nous ne nous intéressons qu'à celle contenant l'état du vide à deux modes, cette solution à la forme :

$$C_{n,m} = (-1)^n e^{in\theta} \tanh^n(r) C_{0,0} \delta_{n,m} \quad (4.2.14)$$

où le  $C_{0,0}$  s'obtient à partir de la relation de normalisation. En effet,

$$C_{0,0} = \frac{1}{\cosh(r)} \quad (4.2.15)$$

Donc, les états du vide comprimés bimodaux en termes des états de nombre de photon, sont [5,14] :

$$|\varepsilon\rangle_2 = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\theta} \tanh^n(r) |n, n\rangle \quad (4.2.16)$$

Afin de simplifier les notations et de s'affranchir des termes  $(-1)^n$  et  $e^{in\theta}$  dans l'équation (4.2.16), nous noterons l'état [15]

$$|\varepsilon\rangle_2 = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n, n\rangle \quad (4.2.17)$$

avec  $\lambda = \tanh(r)$ .

L'état du vide comprimé à deux modes (4.2.17) est aussi appelé état de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)  $|\Psi_{EPR}\rangle$  est un état dont les quadratures sont intriquées entre elles. Il peut être obtenu en combinant deux vides comprimés dans des directions orthogonales sur une lame séparatrice [15]. D'après l'équation (4.2.17), nous remarquons que les deux modes contiennent exactement le même nombre de photons, ce qui est une propriété utilisée pour préparer des états de Fock de manière probabiliste, c.à.d. une mesure de  $n$  photons de un mode projette l'autre mode dans l'état  $|n\rangle$ .

---

# Conclusion générale

Le but de notre travail était d'introduire les outils théoriques de base nécessaires à la description du champ, en termes de variables continues et discrètes, ce qui permet de d'étudier les caractéristique des états de la lumière.

Nous avons d'abord commencé par rappeler certaines propriétés de l'oscillateur harmonique. Après avoir fait le passage de l'oscillateur harmonique classique à l'oscillateur harmonique quantique, nous avons trouvé les valeurs propres et les vecteurs propres de ce dernier. Par la suite, nous avons retrouvé le principe d'incertitude de Heisenberg après calculer les valeurs moyennes. Dans la dernière section de ce chapitre, nous avons introduit la fonction de Wigner, qui nous a servi pour définir les états gaussiens.

Le deuxième chapitre a été consacré à la quantification du champ électromagnétique. Nous avons d'abord fait une quantification monomodale des équations de Maxwell dans le vide. Par la suite, nous sommes passés au cas multimodal, où nous avons montré que l'énergie du rayonnement peut se mettre sous la forme d'une somme de termes relatifs à chacun des modes, et nous avons utilisé l'analogie entre les différents modes et un ensemble d'oscillateurs harmoniques pour quantifier le champ du rayonnement.

Dans le chapitre trois, nous avons présenté quelques états de la lumière : les états gaussiens et les états non gaussiens, leurs définitions, leurs propriétés puis le calcul des fonctions de Wigner pour chaque état et sa représentation. Nous avons montré que les états cohérents ont la propriété de minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg et que la moyenne de l'opérateur de champ dans ces états est égale au champ classique, ce qui fait des états cohérents des états quasi-classiques. D'ailleurs, la représentation de leurs fonctions de Wigner a confirmé cela puisque elle est gaussienne sans régions négative, comme l'exige bel et bien une densité de probabilité classique. Nous avons aussi montré que l'état thermique est état gaussien, et que la fonction de Wigner qui lui est associée est une densité de probabilité positive partout. Nous avons constaté aussi que la fonction de Wigner pour les états de Fock comportent des régions négative, c'est-à-dire qu'ils sont des états non classiques et non gaussiens. Nous avons terminé par les états chat de Schrödinger qui sont des états non classiques car la représentation de leurs fonctions de Wigner montre une oscillation entre les valeurs positives et négatives, signe d'un comportement non classique.

Dans le chapitre quatre, nous avons étudié les états comprimés qui sont le vide comprimé, l'état cohérent comprimé et l'état EPR qui minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg. Nous avons vu d'abord que l'état du vide comprimé est un état avec un nombre de photons toujours pair, puis nous avons montré, après avoir calculé et représenté

---

la fonction de Wigner, que ce dernier est un état gaussien centré à l'origine mais non symétrique par rapport à l'axe vertical car la fonction de Wigner est comprimée dans la direction de l'une des quadratures, tandis que les autres états de Fock comprimés sont d'états non gaussiens et non classiques car leurs fonctions de Wigner ont des régions négatives.

---

# Bibliographie

- [1] Dr. A. Djeraba, *Cours de mécanique quantique II*, Université Mohamed Boudiaf, Oran (2018), [http://dspace.univ-usto.dz/bitstream/123456789/386/1/MQ\\_dja.pdf](http://dspace.univ-usto.dz/bitstream/123456789/386/1/MQ_dja.pdf)
- [2] D. Marchand, *L'oscillateur harmonique*, Paris, <https://cours.espci.fr/>
- [3] M. Fox, *Quantum Optics: An Introduction*, Oxford University Press (2006).
- [4] A. Ourjountsev, *Étude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d'états intriqués non-gaussiens de la lumière*, thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI (2007).
- [5] C. Gerry, P. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press (2005).
- [6] A. Benmoussa, *Solutions Manual: To introductory quantum optics*, by C.Gerry and P. Knight (2005).
- [7] N.Engo, *Quantification du champ électromagnétique*, Université Yaounde I (2020), <https://www.researchgate.net/publication/339339572>.
- [8] G. Gilbert, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction to Quantum Optics From the Semi-classical Approach to Quantized Light*, Cambridge University Press (2010).
- [9] M. T. Amri, *Comportement quantique des appareils de mesure : illustrations en optique quantique*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie- Paris VI (2011).
- [10] M. F. Hache, M. P. Grangier, *Etude théorique de procédures pour augmenter l'intrication d'états quantiques de la lumière*, rapport de Stage, Ecole Polytechnique, France (2008).
- [11] Q. Glorieux, *Etude théorique et expérimentale des corrélations quantiques obtenus par mélange à quatre ondes dans une vapeur atomique*, thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII (2010).
- [12] Z. Ficek, M. R. Wahiddin, *Quantum optics for beginners*, CRC Press (2014).
- [13] A. Minneci, *Information quantique : optique quantique en variables continues*, thèse de doctorat, Université SorbonneParis Cité (2018).
- [14] S. Olivares, *Introduction to generation, manipulation and characterization of optical quantum states*, Université Milano (2018).
- [15] R. Blandino, *Intrication de champs quantiques mesoscopiques pour les communications quantiques*, thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI(2013).
- [16] L. Olislager, *Etude des relais et répéteurs quantiques à variables continues*, Mémoire de fin d'études, Université Libre de Bruxelles (2008).
- [17] I. Rebahi, *Sur la fonction de Wigner en mécanique Quantique*, Mémoire de Master, Université Béjaia (2017).
- [18] M.Orszag, *Quantum Optics Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum trajectories, and decoherence*, Catalica University, Chile (2016).
- [19] F. Assemat, *Manipulation d'états quantiques de la lumière par l'intermédiaire d'un atome de Rydberg unique*, Thèse de doctorat, Université Sorbonne (2019).
- [20] J. Beugnon, *Notes de cours : Physique statistique quantique* (2016), <http://www.lkb.upmc.fr/boseeinsteinsondensates/people/beugnon/>
- [21] J. Hare, *Notes de cours : États pointeurs Fonction de Wigner du Champ Création et décohérence du chat de Schrödinger* (2012).
- [22] S. Haroche, J. M.Raimond, *Exploring the Quantum Atoms, Cavities and Photons*, Oxford University Press (2006).

- [23] Roy J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Physical Review, vol.131, no. 6, pages 2766–2788, (1963).
- [24] William B. Case, *Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians*, Am. J. Phys. vol. 76, no. 10, pages 937-946, (2008).
- [25] J. Brogaard, *Wigner function formalism in Quantum Mechanics*, Bachelor's project in Physics, University of Copenhagen,(2015).