



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Physique Théorique

Thème

Quelques aspects fondamentaux de la théorie de l'estimation quantique

Présentée par

Mr. LOUDADJI Raouf

Soutenu le: 26/10/2020

Devant le Jury composé de:

Nom	Prénom	Département d'affiliation	Qualité
AOUDIA	Sofiane	Physique	Président
BELABBAS	Abdelmoumene	Physique	Examineur
GHARBI	Abdelhakim	Physique	Encadreur

Année universitaire 2019/2020

Dédicace

Louange à Dieu de nous avoir aidé à accomplir ce modeste travail de fin de cursus universitaire que je dédie particulièrement à :

Ma très chère mère et tout ce qu'elle présente pour moi insigne de reconnaissance à celle qui ma prodiguées toute l'affection et l'amour, qui n'a jamais cessé de me soutenir et me tenir la main dans les moments les plus dures, et qu'elle n'a pas cessé de m'encourager dans mes études.

Mon très cher père, le repère et le symbole de tous mes progrès avec autant d'admiration pour ses sacrifices, ses encouragements et son aide afin de poursuivre mes études.

A mon très cher grand père.

Mes frères : Samir, Nacer Eddine, Takfarinas.

Ma sœur et son fil : Hamida, Ghiles.

A mes oncles : Bouallem, Yazid, Djeloul.

A mon oncle Kamel, Makhelouf, et leur fils.

A mes tantes : Sabah, Rachida, Oum lkhir, Hassina, Khadidja, Massouda.

A mes cousins et leur fils, A chaque membre ma famille.

A la mémoire de mes grands-parents et Imene.

Mes amis : Oussama, Fahem, Charaf, Nassim, Samir, Fouzi, Karim, Asma, Lila, Toufik, Bousaad, Rabie, Ouardi, Soufiane, Salim, Lydia, Manel, Fatima.

Et à chaque membre de ma promotion : Massinissa, Saleh, Moufida, Sabiha, Dihia, Dounia.

Remerciement

Nous remercions et nous louons, d'abord Dieu tout puissant de nous avoir aidé à atteindre ce but, et de défier tous les obstacles afin de mener à terme ce modeste mémoire, sans lui rien ne se fait et ne crée.

C'est avec un immense plaisir que j'exprime mes remerciements les plus chaleureux à mon encadreur Pr : AbdElhakim Gharbi, qui m'a bien soutenu tout au long de mon travail et pour ces précieux conseils et orientation.

Mes gratitude et respect à monsieur le président et les membres de jury, d'avoir bien voulu me faire l'honneur de juger mon travail.

En fin pour tous ceux qui me contribué de près ou de loin pour rendre ce travail possible.

Table des Matières

Introduction.....	1
Chapitre 1 Rappel de Mécanique Quantique.....	3
1.1 Postulats de la Mécanique Quantique.....	3
1.2 Etats mixtes et matrice de densité.....	7
1.3 Système composite et trace partielle.....	10
1.4 Les systèmes à un et à deux qubits.....	11
Chapitre 2 Théorie de L'estimation Classique.....	14
2.1 Introduction.....	14
2.2 Notion d'estimateur.....	14
2.3 Fonction classique de Fisher et limite de Cramer-Rao.....	17
2.4 Méthodes d'estimation ponctuelle.....	22
Chapitre 2 Théorie de l'Estimation Quantique	27
3.1 Introduction	27
3.2 Inégalité de Cramer Rao Quantique Information de Fisher Quantique.....	27
3.3 Exemple sur les opérateurs unitaires et les états purs.....	35
3.4 Conclusion.....	39
Conclusion.....	41
Bibliographie.....	42

Introduction

En Physique, nombreuses sont les quantités d'intérêt physique qui ne sont pas directement accessibles expérimentalement, et cela pour des raisons fondamentales ou des limitations expérimentales. Cette situation désavantageuse est d'autant plus accentuée lorsqu'on est amené à traiter des systèmes quantiques. En effet, des quantités pertinentes telles que la pureté, l'intrication, la phase, le temps et les constantes de couplages des interactions ne peuvent être, en principe, représentées par des observables (des opérateurs hermitiens) auxquelles on peut associer une POVM ou des mesures quantiques projectives. Dans ce cas de figure, il est impératif de recourir à des mesures indirectes, à savoir, inférer la valeur du paramètre d'intérêt en analysant les résultats provenant de la mesure d'une ou plusieurs observables quantiques. Une telle approche nous met directement dans le cœur d'un problème de l'estimation de paramètres inhérent à la théorie de l'estimation quantique.

En fait, la théorie de l'estimation quantique est un domaine de recherche qui s'est beaucoup développé durant ces dernières années après les premiers travaux de Helstrom [1] et Holevo [2], notamment dans la perspective d'une deuxième révolution quantique dont l'objectif principal est d'utiliser certains phénomènes quantiques pour améliorer la performance de plusieurs tâches de théorie de l'information. En effet, la théorie de l'estimation quantique a été appliquée avec succès pour la conception de mesures très précises à la limite quantique telles que l'estimation des champs magnétique à l'échelle atomique [3], le déplacement provoqué par les ondes gravitationnelles dans les interféromètres gravitationnels [4], la température d'échantillons nanoscopiques [5].

L'objectif de ce mémoire est de donner une introduction succincte à l'approche de l'estimation quantique [6,7] comme cadre théorique permettant de déterminer les états sondes quantiques optimaux, moyennant la fonction de Fisher Quantique et les mesures quantiques

optimales via la fonction de Fisher classique, conduisant ainsi à l'estimateur quantique optimal du paramètre recherché, exprimé en termes de la dérivée logarithmique symétrique.

Le présent travail sera organisé comme suit. Dans le premier chapitre, nous allons donner un rappel de mécanique quantique [8,9,10], en mettant en exergue les trois concepts de base véhiculés par les postulats de la théorie, à savoir, les notions d'états quantiques, de mesure quantiques et d'évolution des systèmes quantiques. Nous allons aussi présenter la généralisation du concept de l'état en termes de l'opérateur densité ainsi que l'adaptation des postulats à ce nouveau formalisme. Par ailleurs, la construction des états quantiques des systèmes composés y sera brièvement exposée ainsi que l'exemple emblématique du qubit [11,12].

Le deuxième chapitre sera consacré à la théorie classique de l'estimation [13,14]. On y présentera les notions d'estimation biaisées et non biaisées, la variance de l'estimateur, l'erreur quadratique moyenne, l'estimateur sans biais à variance minimale, l'erreur standard d'un estimateur, la méthode des moments et la méthode de vraisemblance maximale.

Le troisième chapitre est dédié à la théorie de l'estimation quantique, où des formules explicites pour la dérivée logarithmique symétrique et les informations quantiques de Fisher seront données. Aussi, nous y évaluerons la limite ultime de précision du paramètre à estimer dans le cadre des inégalités de Cramer Rao Quantique et nous présentons la mesure optimale atteignant cette précision.

Finalement, on termine par une conclusion succincte.

Chapitre 1

Rappel de Mécanique Quantique

La mécanique quantique est la branche de la physique théorique qui étudie et décrit les phénomènes fondamentaux des systèmes physiques par une description mathématique dans l'espace de Hilbert. Pour donner une meilleure description, on aura besoin de bien décrire les états des systèmes physiques, leurs évolutions, ainsi que les processus de mesure. Ces notions forment les concepts fondamentaux véhiculés par les postulats de la mécanique quantique.

1.1 Postulats de la Mécanique Quantique

Comme toutes les théories de la physique, la mécanique quantique est basée sur quelques hypothèse ou postulats mathématique que nous allons présenter dans cette section.

Postulat 1 : Espace des états et principe de superposition

A chaque système physique est associé un espace de Hilbert \mathcal{H} . L'état du dit système est défini à chaque instant par un vecteur normé $|\psi(t)\rangle$ de l'espace de Hilbert \mathcal{H} . D'un point de vue mathématique, l'espace de Hilbert \mathcal{H} est un espace vectoriel complexe de dimension fini ou infinie, muni d'une norme et d'un produit scalaire défini positif. Ainsi, la norme d'un état est donnée par :

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle},$$

Et la condition de normalisation s'écrit $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$.

Une conséquence importante du fait que l'espace de Hilbert \mathcal{H} est un espace vectoriel est que le principe de superposition y est inhérent, autrement dit, toute combinaison linéaire d'états est aussi un état possible du système. Par ailleurs, il est toujours possible de doter l'espace de Hilbert, qu'on considère de dimension d , d'une base orthonormée $\{|\varphi_n\rangle\}$ avec $n = 1, \dots, d$. De sorte que tout vecteur $|\psi\rangle$ peut se décomposer sur cette base comme suit :

$$|\psi\rangle = \sum_n^d C_n |\varphi_n\rangle \quad (1.1)$$

Où les C_n sont les composantes de $|\psi\rangle$ dans la base $\{|\varphi_n\rangle\}$ calculées par le moyen du produit scalaire $C_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle$. Un vecteur $|\psi\rangle$ est dit normalisé si

$$\sum_n^d |C_n|^2 = 1. \quad (1.2)$$

La relation de fermeture s'obtient en écrivant :

$$|\psi\rangle = \sum_n^d C_n |\varphi_n\rangle = \quad (1.3)$$

$$\sum_n \langle\varphi_n|\psi\rangle |\varphi_n\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|\psi\rangle = |\psi\rangle \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| \quad (1.4)$$

Ce qui conduit finalement à la relation,

$$\sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| = 1 \quad (1.5)$$

Qui est la relation de fermeture.

Si le système est composite, constitué de sous-système plus petit, alors son espace des états est le produit tensoriel des espaces de Hilbert correspondant à chaque sous-système.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n \quad (1.6)$$

Postulat 2 : Les Mesure Quantiques

La mesure en mécanique quantique est d'une importance cruciale du fait qu'elle perturbe le système mesuré d'une manière irréversible, alors qu'en mécanique classique, la mesure de n'importe quelle grandeur du système peut se faire sans affecter le système, du moins d'une façon drastique.

Ainsi, la mesure quantique est définie par un ensemble d'opérateur $\{M_m\}$ qui agit dans l'espace Hilbert. Soit $|\psi\rangle$ l'état de système, la probabilité que la mesure donne pour résultat la valeur m est donnée par la règle de Born

$$P(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (1.7)$$

Et l'état du système juste après la mesure, en vertu de la règle de réduction, devient

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} \quad (1.8)$$

Aussi, le fait que la somme des probabilités de tous les résultats doit être égale à un, indépendamment de l'état du système, impose aux opérateurs de mesures la condition

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = 1 \quad (1.9)$$

Lorsque on ne s'intéresse pas à l'état post mesure, Les mesures quantiques sont décrites par une collection d'opérateurs $\{E_m\}$ définis par

$$E_m = M_m^\dagger M_m \quad (1.10)$$

L'ensemble $\{E_m\}$ constitue une POVM (Positive Valued Operator Measure) et permet de donner une certaine description du processus de mesure.

Ainsi, la règle de Born devient

$$P(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle \quad (1.11)$$

Et la condition (1.9) prend la forme

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m E_m = 1 \quad (1.12)$$

On note aussi que les E_m sont des opérateurs positifs, autrement dit, $\forall |\psi\rangle$

$$\langle \psi | E_m | \psi \rangle \geq 0 \quad (1.13)$$

Une classe de mesures quantiques importante est celle des mesures projectives $\{P_m\}$ correspondant à une observable A agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . On écrit la décomposition spectrale de A en termes des $\{P_m\}$

$$A = \sum_i m_i P_i \quad (1.14)$$

Où $\{m_i\}$ est l'ensemble des valeurs propres réelles de A et on écrit

$$A|i\rangle = m_i|i\rangle \quad (1.15)$$

Et pour une valeur propre non dégénérée, on a

$$P_i = |i\rangle\langle i| \quad (1.16)$$

Les projecteurs P_i vérifient la condition d'orthogonalité

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad (1.17)$$

Et la relation de complétude

$$\sum_i P_i = 1 \quad (1.18)$$

La probabilité d'obtenir le résultat m_i est

$$P(i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle \quad (1.19)$$

La valeur moyenne de A est donnée par

$$\langle A \rangle = \sum_i m_i P_i = \langle \psi | \sum_i m_i P_i | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (1.20)$$

Il est à noter que les mesures projectives sont celles qu'on introduit dans un premier lieu dans les ouvrages usuels de la mécanique quantique.

Postulat 3 : Evolution de temps

L'évolution d'un système quantique isolé est décrite par un opérateur unitaire.

Si le système se trouve dans l'état $|\psi(t_0)\rangle$ à un temps initial t_0 , son état à un instant t ultérieur $|\psi(t)\rangle$ est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.21)$$

$U(t, t_0)$ est un opérateur unitaire, ($UU^* = 1$), dépendant uniquement de t et t_0 et de l'hamiltonien du système, il est dit opérateur d'évolution. Ainsi, dans l'image de Schrödinger, les états évoluent selon l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \quad (1.22)$$

Où H est l'Hamiltonien de système. En substitut (1.21) dans (1.22) on trouve que

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0) \quad (1.23)$$

Si H est constant dans le temps, l'opérateur d'évolution peut être écrite :

$$U(t, t_0) = e^{\frac{-i}{\hbar}H(t, t_0)} \quad (1.24)$$

Maintenant si $H(t)$ dépend de temps, alors U peut être généralisé à

$$U(t, t_0) = \sum \mathfrak{T} \frac{\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_0 H(t_0)\right)^n}{n!} = \mathfrak{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right\} \quad (1.25)$$

\mathfrak{T} étant l'opérateur d'ordre chronologique, nous avons une exponentielle chronologiquement ordonnée.

1.2 Etats mixtes et matrice de densité

La formulation usuelle de la mécanique quantique repose sur le principe que l'on prépare un système donné dans un état décrit par un vecteur $|\psi\rangle$ de l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Dans la plupart des cas, nous ne sommes pas en position de connaître avec certitude dans quel état se trouve le système, cela se produit souvent quand nous considérons une partie d'un système composé (mixte). Dans ce cas, on est dans l'obligation de généraliser la notion du vecteur d'état et par conséquent, reformuler adéquatement les postulats de la mécanique quantique.

Opérateur de densité

De manière générale, notre connaissance de l'état du système est représentée par une distribution statistique $\{P_i, |\psi_i\rangle\}$ qui signifie que le système a la probabilité P_i d'être dans l'état $|\psi_i\rangle$ (normé) où $\sum_i P_i = 1$, on dit que le système est dans un état mixte.

Considérons, dans un premier lieu, un cas idéal où le système est dans un état pur décrit par le vecteur normé $|\psi(t)\rangle$, nous définissons l'opérateur densité $\rho(t)$:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (1.26)$$

Si le système est dans un état mixte tel que chaque un des états purs $|\psi_i\rangle$ se produit avec une probabilité de P_i , alors l'opérateur densité $\rho(t)$ décrivant ce mélange statistique est

$$\rho(t) = \sum_i P_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| \quad (1.27)$$

On démontre que l'opérateur ρ est Hermitien, positif et de trace égale à 1, $\text{tr}(\rho)=1$. En fait, d'une manière générale, tout opérateur agissant dans l'espace de Hilbert et vérifiant ces trois propriétés est dit opérateur densité.

Si le système est dans un état pur ρ , alors $\text{tr}(\rho^2) = 1$, sinon, généralement, $\text{tr}(\rho^2) < 1$. Cela nous conduit à l'introduction de la notion de la pureté d'un état μ :

$$\mu = \text{tr}(\rho^2) \quad (1.28)$$

Maintenant, nous allons nous intéresser à l'évolution de l'opérateur densité dans le temps. Pour un état pur, l'évolution est dictée par l'équation de schrodinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle, \quad (1.29)$$

qui a une solution formelle

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi_0\rangle. \quad (1.30)$$

L'opérateur unitaire U qui donne l'évolution est la solution de l'équation

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU(t, t_0) \quad (1.31)$$

Si l'hamiltonien est indépendant du temps, l'opérateur aura la forme

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (1.32)$$

Ainsi, la Dynamique d'un état pur sous forme d'opérateur d'état $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ est simplement donné par

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (1.33)$$

$$= U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \langle \psi(t_0)| U^\dagger(t, t_0) \quad (1.34)$$

$$= U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (1.34)$$

Par ailleurs, on peut construire une équation différentielle pour l'opérateur densité, moyennant l'équation de Schrödinger comme suit :

$$ih \frac{d\rho}{dt} = ih \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \langle \psi(t)| + ih |\psi(t)\rangle \frac{d\langle \psi(t)|}{dt} \quad (1.35)$$

$$= H |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| H \quad (1.36)$$

$$= [H(t), \rho(t)] \quad (1.37)$$

Passons maintenant à la description de la mesure quantique appropriée au formalisme de la matrice densité ρ . On considère une mesure $\{M_m\}$, la probabilité d'obtenir le résultat m sera donnée par

$$P(m) = \text{tr} (M_m \rho M_m^\dagger) \quad (1.38)$$

$$P(m) = \text{tr} (M_m^\dagger M_m \rho) \quad (1.39)$$

Si le résultat est m , le système sera dans l'état

$$\rho' = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr} (M_m^\dagger M_m \rho)} \quad (1.40)$$

Aussi la valeur moyenne d'une observable A sur un état $\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ est donnée par

$$\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \quad (1.41)$$

$$= \sum_i P_i \text{tr} (|\psi_i\rangle \langle \psi_i| A) \quad (1.42)$$

$$= \sum_i \text{tr} (P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| A) \quad (1.43)$$

$$= \text{tr} \left(\sum_i (P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| A) \right) \quad (1.44)$$

$$= \text{tr} (\rho A) \quad (1.45)$$

1.3 Système composite et trace partielle

Si le système est composé de n parties, alors son espace d'état est le produit tensoriel des espaces de Hilbert correspondant à ses parties

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n \quad (1.46)$$

On définit la trace partielle d'un système bipartite sur $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, où les systèmes \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B sont détenus par deux parties : Alice et Bob. Evidemment, ce formalisme peut être appliqué pour un système composé de plus de deux parties. On peut définir une base tensorielle

$$|ij\rangle = |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B = |ij\rangle, \quad (1.47)$$

Où $\{|i\rangle\}$ et $\{|j\rangle\}$ sont respectivement des bases orthonormées des espaces \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B . Ainsi, l'expression la plus générale pour la matrice de densité est

$$\rho = \sum_{ij} \sum_{hk} \rho_{ij,hk} |ij\rangle\langle hk| \quad (1.48)$$

La description de la connaissance qu'Alice a de son sous-système est donnée par l'opérateur densité réduit ρ_A . Ce dernier sera construit par l'outil mathématique de la trace partielle :

$$\begin{aligned} \rho_A = tr_B[\rho] &= \sum_l \langle l|\rho|l\rangle_B \\ &= \sum_l \sum_{ij} \sum_{hk} \rho_{ij,hk} \langle l|ij\rangle_B \langle hk|l\rangle_B \\ &= \sum_l \sum_{ih} \rho_{il,hl} |i\rangle_A \langle h|_A \end{aligned} \quad (1.49)$$

On a utilisé l'orthonormalité de la base de \mathcal{H}_B , $\langle i|j\rangle_B = \delta_{ij}$.

La matrice de densité ρ_A est nommée matrice de densité réduite pour le système A. La même opération peut être utilisée pour trouver ρ_B .

Maintenant, on considère un opérateur de mesure O_A qui agit sur le système d'Alice, la valeur moyenne de son extension $O = O_A \otimes I$ agissant dans l'espace de Hilbert total est

$$\langle O \rangle = tr[\rho O] = \sum_{ij} \langle ij|\rho O|ij\rangle \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{ij} \langle ij | \left(\sum_{im} \sum_{hk} \rho_{im,hk} |lm\rangle \langle hk| \right) (O_A \otimes I) |ij\rangle \\
&= \sum_{ij} \sum_h \rho_{ij,hj} \langle h | O_A | i \rangle \\
&= \sum_{ih} \langle i | \rho_A | h \rangle \langle h | O_A | i \rangle \\
&= \sum_i \langle i | \rho_A O_A | i \rangle = \text{tr} [\rho_A O_A] \quad (1.51)
\end{aligned}$$

On voit bien que la matrice densité réduite rend compte effectivement du comportement statistique du sous-système.

1.4 Les systèmes à un et à deux qubits

L'espace d'état d'un système quantique peut avoir n'importe quelle dimension finie ou infinie D . Dans le cadre de la théorie de l'information quantique, les qubits, qui sont des systèmes quantiques avec dimension $D=2$, sont fondamentaux. Le qubit est l'unité fondamentale de l'information quantique.

Qubits et la sphère de Bloch

Tout système quantique à deux niveaux peut former un qubit, par exemple des photons polarisés, des particules de spin $1/2$, des atomes excités, et des atomes à l'état fondamental.

On introduit une base orthonormée $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ du système, formée des kets $|0\rangle$ et $|1\rangle$, qui sont l'extension des bits classiques 0 et 1, c'est ce que on appelle la base de computation.

L'état général d'un qubit, qui est par définition normé, dans cette base est

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.52)$$

Où α et β sont deux nombres complexe qui vérifient la relation de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

En mécanique quantique, la sphère de Bloch est une représentation géométrique de l'espace d'état pure $|\psi\rangle$ d'un système de mécanique quantique à deux niveau (qubit). Donc on peut écrire

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (1.53)$$

Où $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. On définit dans \mathcal{R}^3 un vecteur, $\vec{n} = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, Où $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

Lorsqu'un système de qubit est dans un état mixte on considère l'opérateur de densité ρ qui est représenté par un vecteur non unitaire \vec{n} dans la sphère de Bloch appelé le vecteur de Bloch.

$$n_i = \text{tr} [\sigma_i \rho] \quad \text{ou } i = x, y, z \quad (1.54)$$

Tout opérateur de densité ρ à deux dimensions peut être étendu en utilisant l'identité I et les matrices de Pauli $\vec{\sigma}_i$.

Les matrices de Pauli sont un ensemble de trois matrices complexes (2×2), qui sont hermitiens et unitaires, elles sont

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Ensemble avec la matrice d'identité ils forment une base pour l'espace de Hilbert réel de matrices hermitiennes complexes (2×2).

Ces matrices sont des matrices de trace nulle qui satisfont la relation de commutation $[\sigma_i, \sigma_j] = \varepsilon_{ijk} \sigma_k$, avec ε_{ijk} le tenseur totalement antisymétrique de Lévi-Civita, ils satisfont la relation $\sigma_i^2 = 1$.

L'opérateur de densité peut donc être écrit sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad (1.56)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n_x}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n_y}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{n_z}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_x & n_x - in_y \\ n_x + in_y & 1 - n_z \end{pmatrix} \quad (67)$$

Où $\vec{n} \in \mathcal{R}^3$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ vecteur de matrice de Pauli.

Nous pouvons représenter quelque propriété de l'état du qubit moyennant a représentation de Bloch, Ainsi la pureté de l'état qui est proportionnelle au carré de la norme euclidienne du vecteur de Bloch

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\vec{n}\|^2 \quad (1.57)$$

Si $\|\mu\| = 1$ pour les états mixtes le vecteur de Bloch se trouve à l'intérieur de la sphère de Bloch.

Un système composé de plus d'un qubit est représenté comme le produit tensoriel des espaces Hilbert à un qubit

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$$

La base de calcul d'un système multi qubit est données par les états du produit

$$|a_0 a_1 \dots a_n\rangle = |a_0\rangle \otimes |a_1\rangle \dots \otimes |a_n\rangle \quad \text{à } a_i \in \{0,1\}. \quad (1.58)$$

Chapitre 2

Théorie de L'estimation Classique

2.1 Introduction

En statistiques, le problème général de la caractérisation d'une distribution de probabilité à partir de données empiriques est souvent extrêmement difficile. Cependant, on est toujours capable de restreindre le problème à une classe de distributions de probabilités paramétrées par un certain nombre fini de paramètres réels. La théorie de l'estimation est la branche de la statistique qui traite de l'estimation des vraies valeurs de ces paramètres à partir de données empiriques. Dans notre travail, nous allons opter pour le point de vue « fréquentistes » pour lequel le paramètre à estimer est supposé ayant toujours une valeur vraie et, en conséquence, les statistiques des données observées obéissent à la vraie distribution de probabilité [7,13,14,15,16,17]. Dans le présent chapitre, nous introduisons les concepts les plus pertinents de la théorie de l'estimation et passons en revue certains résultats importants que l'on utilisera par la suite dans le chapitre 3.

2.2 Notion d'estimateur

Nous considérons un modèle statistique noté $p(x|\lambda)$ et il représente simplement une collection de distributions de probabilité pour la variable aléatoire x , libellée par un paramètre réel λ . La vraie valeur du paramètre est λ_0 et la probabilité correspondante est $p(x|\lambda_0)$. Le point de départ de l'analyse statistique est un ensemble de M observations empiriques indépendantes $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$; en termes pratiques, les M points de données sont généralement obtenus à partir de M répétitions d'une expérience avec des préparations initiales identiques. En d'autres termes, et dans un langage statistique, l'ensemble $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ n'est qu'un échantillon aléatoire uniformément distribué selon $p(x|\lambda)$ où λ est le paramètre à estimer. Par exemple,

λ peut être la moyenne de la population, la variance ou toutes autres caractéristiques statistiques [7,13,14,15,16,17].

Définition : un estimateur est une fonction (une statistique) qui associe à l'ensemble des résultats d'une mesure un nombre de l'espace des paramètres

$$\hat{\lambda}(\Omega) = \lambda(x_1, \dots, x_M). \quad (2.1)$$

L'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ étant aléatoire, l'estimateur lui-même est une variable aléatoire.

Exemple : On considère une population statistique formée par l'ensemble des adultes algériens et une variable aléatoire x , qui correspond à la taille des adultes, distribuée par une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, nous voulons estimer la taille moyenne $\mu = E(x)$ ou bien la variance $\sigma^2 = Var(x)$. Pour ce faire, nous allons prendre un échantillon aléatoire $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$. Nous pouvons estimer la taille moyenne μ moyennant l'un des estimateurs suivants [7,13,14,15,16,17]. :

La moyenne de l'échantillon : $\hat{\mu}_1(x_1, \dots, x_M) = E(x) = \bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$

La médiane de l'échantillon : $\hat{\mu}_2(x_1, \dots, x_M) = Med(x_1, \dots, x_M)$

La moyenne géométrique de l'échantillon.

Nous pouvons estimer la variance de la population σ^2 par le biais des estimateurs

La variance de l'échantillon : $\sigma_1^2(x_1, \dots, x_M) = Var(x) = s^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2$

Où par les estimateurs suivants

$$\sigma_2^2(x_1, \dots, x_M) = s_M^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma_3^2(x_1, \dots, x_M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |(x_i - \bar{x})|$$

$$\sigma_4^2(x_1, \dots, x_M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |(x_i - Med)|$$

Critères d'estimation : Nous venons de voir que pour un seul problème d'estimation, nous pouvons trouver plusieurs estimateurs. Une question se pose : sur quel critère se baser pour choisir l'estimateur optimal. Dans notre cas, nous allons opter pour les estimateurs non biaisés à variance minimale.

2.2.1 Estimateur non biaisé :

Un estimateur $\hat{\lambda}(\Omega) = \lambda(x_1, \dots, x_M)$ est dit non biaisé ou sans biais pour le paramètre λ si la valeur moyenne de l'estimateur $E(\hat{\lambda})$, qui aussi une variable aléatoire, est égale à la valeur vraie du paramètre λ_0 .

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda_0 \quad (2.2)$$

Exemple 1 : on considère une variable aléatoire x régie par la loi binomiale

$$p(x) = \text{Bin}(x, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Où x est le nombre de succès, n est le nombre d'essais et p est la probabilité de succès. Nous voulons estimer p . Nous considérons un estimateur $\hat{p} = \frac{x}{n}$, est-il non biaisé ? Calculons la moyenne

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} E(x) = \frac{1}{n} np = p$$

Ainsi, notre estimateur est non biaisé.

Exemple 2 : Considérons une variable aléatoire x régie par la loi de Poisson [7,13,14,15,16,17].

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Nous voulons estimer λ à partir d'un échantillon (x_1, \dots, x_M) . Nous pouvons définir les estimateurs suivants :

$$\hat{\lambda}_1 = x_1, \hat{\lambda}_2 = \frac{x_1+x_2}{2}, \hat{\lambda}_3 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dots, \hat{\lambda}_M = \frac{x_1+x_2+\dots+x_M}{M}$$

$$\text{et } \hat{\lambda}_S = \text{Var}(x) = s^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2$$

Nous allons voir que tous ces estimateurs sont non biaisés pour le paramètre λ .

$$E(\hat{\lambda}_1) = E(x_1) = \lambda, E(\hat{\lambda}_2) = E\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{E(x_1)+E(x_2)}{2} = \frac{\lambda+\lambda}{2} = \lambda$$

De même $E(\hat{\lambda}_3) = \dots = E(\hat{\lambda}_M) = E(\hat{\lambda}_S) = \lambda$. Tous ces estimateurs sont sans biais, nous devons faire appel à un critère supplémentaire qui est le minimum de variances.

Erreur Quadratique Moyenne : Il est commun de choisir l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur $\hat{\lambda}$ pour quantifier l'erreur dans l'estimation, elle définit par

$$MSE(\hat{\lambda}) = E[(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2] = \int (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 p(\Omega) d\Omega \quad (2.3)$$

où la distribution de probabilité des résultats est $p(\Omega) d\Omega = \prod_{i=1}^M p(x_i | \lambda_0) dx_i$, puisque les variables x_i sont indépendantes et distribuées de manière identique.

La variance de l'estimateur est définie comme [7,13,14,15,16,17].

$$\text{Var}(\lambda) = E[(\hat{\lambda} - E(\hat{\lambda}))^2] \quad (2.4)$$

Pour les estimateurs sans biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne sont égales. Il est à noter que la variance quantifie l'écart autour de la valeur moyenne de l'estimateur et non pas l'erreur d'estimation de sorte que qu'une faible valeur de la variance correspond à moins d'incertitude dans l'estimation de la valeur vraie λ_0 à partir des données observées.

2.3 Fonction classique de Fisher et limite de Cramer-Rao :

La solution à un problème d'estimation de paramètre revient à trouver un estimateur, i.e. une application de l'ensemble des résultats de mesure dans l'espace des paramètres. Dans la théorie classique de l'estimation, un estimateur optimal est celui qui sature la fameuse inégalité de Cramer-Rao

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{MF(\lambda)} \quad (2.5)$$

Cette inégalité nous indique que quel que soit l'estimateur utilisé dans la procédure d'estimation, sa précision, qui ne peut être infinie, ne peut aller au-delà de la borne inférieure imposée à la variance dans l'inégalité (2.5) et plus on se rapproche de cette dernière plus notre estimation est meilleure[7,13,14,15,16,17]..

Le nombre M dans (2.5) correspond au nombre de mesures (taille de l'échantillon) et $F(\lambda)$ correspond à ce que l'on appelle l'information classique de Fisher (ICF)

$$F(\lambda) = \int dx p(x|\lambda) \left(\frac{\partial \ln p(x|\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 = \int dx \frac{1}{p(x|\lambda)} \left(\frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2. \quad (2.6)$$

Où $p(x|\lambda)$ désigne la probabilité conditionnelle d'obtenir la valeur x lorsque le paramètre a la valeur λ . L'information classique de Fisher (ICF) peut être interpréter comme une mesure quantifiant de combien une distribution de probabilité $p(x|\lambda)$ change par rapport à un paramètre λ .

Dans ce qui suit, nous présentons une démonstration heuristique de l'inégalité de Cramer-Rao : On considère la densité de probabilité $p(x|\lambda)$ qui vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x|\lambda) dx = 1,$$

ce qui implique

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x|\lambda) dx = \frac{\partial}{\partial \lambda} 1 = 0$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} dx = 0,$$

en multipliant par $\frac{p(x|\lambda)}{p(x|\lambda)}$ dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p(x|\lambda)} \frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} p(x|\lambda) dx = 0,$$

or

$$\frac{1}{p(x|\lambda)} \frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} p(x|\lambda) dx = 0$$

qui reste toujours valable après multiplication par λ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} p(x|\lambda) dx = 0. \quad (2.7)$$

Par ailleurs, pour un estimateur non biaisé $\hat{\lambda}$, c'est-à-dire, $E[\hat{\lambda}] = \lambda$, on écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda} p(x|\lambda) dx = \lambda,$$

ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda} p(x|\lambda) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda} \frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} dx = 1,$$

En multipliant par $\frac{p(x|\lambda)}{p(x|\lambda)}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda} \frac{1}{p(x|\lambda)} \frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} p(x|\lambda) dx = 1$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda} \frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} p(x|\lambda) dx = 1. \quad (2.8)$$

Considérons la différence (2.8)- (2.7), termes à termes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\lambda} - \lambda) \frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} p(x|\lambda) dx = 1,$$

Cela correspond à la moyenne

$$E \left[(\hat{\lambda} - \lambda) \frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} \right] = 1.$$

Maintenant considérons les deux variables aléatoires X et Y définies par

$$\begin{aligned} X &= (\hat{\lambda} - \lambda) \\ Y &= \frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

avec

$$E[XY] = 1.$$

Moyennant l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les variables aléatoires[7,13,14,15,16,17]. :

$$E[X^2]E[Y^2] \geq E^2[XY],$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} E \left[(\hat{\lambda} - \lambda)^2 \right] E \left[\left(\frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right] &\geq E^2[XY] \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

or, pour un estimateur non biaisé, la variance de l'estimateur qui est identique à l'erreur quadratique moyenne, est donnée par

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) = E \left[(\hat{\lambda} - \lambda)^2 \right],$$

aussi le deuxième terme

$$E \left[\left(\frac{\partial \ln[p(x|\lambda)]}{\partial \lambda} \right)^2 \right] = \int \left(\frac{\partial \ln p(x|\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 p(x|\lambda) dx = F(\lambda).$$

Nous retrouvons alors l'inégalité de Cramer-Rao pour une seule mesure.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\lambda})F(\lambda) &\geq 1 \\ \text{Var}(\hat{\lambda}) &\geq \frac{1}{F(\lambda)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour un échantillon à M mesure, on démontre que la fonction de Fisher

$$F_M(\lambda) = MF(\lambda),$$

Pour écrire enfin,

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{MF(\lambda)}. \quad (2.10)$$

Selon l'inégalité de Cramer-Rao, la mesure optimale pour estimer la quantité λ est celle dont la distribution $p(x|\lambda)$ maximise l'information de Fisher $F(\lambda)$. Ainsi, nous pouvons dire que, pour toute mesure, un estimateur efficace est un estimateur qui sature l'inégalité de Cramer-Rao. Par conséquent, une estimation optimale d'une grandeur λ consiste donc à choisir une mesure, c'est-à-dire un modèle statistique $p(x|\lambda)$, maximisant l'information de Fisher $F(\lambda)$ puis à traiter les données par un estimateur efficace. Cependant, l'existence d'un estimateur efficace n'est pas toujours garantie. En fait, on ne connaît que deux estimateurs asymptotiquement non biaisés et asymptotiquement efficaces, dans la limite d'un très grand nombre d'observations $M \rightarrow \infty$, qui sont l'estimateur du maximum de vraisemblance et l'estimateur bayésien[7,13,,15,16,17].

Un autre point à discuter est le comportement de $F(\lambda)$ lors d'un changement de paramétrisation $\lambda \rightarrow \theta(\lambda)$ qui est de la forme

$$F(\theta) = \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 F(\lambda) \quad (2.11)$$

2.4 Méthodes d'estimation ponctuelle

2.4.1 Méthodes des moments

La première méthode de génération d'estimateurs paramétriques que nous étudierons s'appelle la méthode des moments. Bien que ces estimateurs ne sont pas optimaux, ils sont souvent faciles à calculer et ils fournissent également des estimateurs utiles comme valeurs de départ pour d'autres méthodes[7,13,14,15,16,17].

On considère k paramètres à estimer $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \underline{\lambda}$ d'une population régie par $p(x|\underline{\lambda})$ moyennant un échantillon $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_M)$. On considère les k premiers moments de la populations

$$\begin{cases} \mu'_1 = E[x] = \hat{\lambda}_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \\ \mu'_2 = E[x^2] = \hat{\lambda}_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \\ \vdots \\ \mu'_k = E[x^k] = \hat{\lambda}_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \end{cases} \quad (2.12)$$

où μ'_k est le k-ième moment de la population et $\hat{\lambda}_k$ est une statistique sur l'échantillon. Supposons qu'on peut résoudre le système (1) comme

$$\begin{cases} \lambda_1 = h_1(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \\ \lambda_2 = h_2(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \\ \vdots \\ \lambda_k = h_k(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \end{cases} \quad (2.13)$$

Maintenant, définissons les différents moments de l'échantillon

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i \\ \alpha_2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i)^2 \\ \vdots \\ \alpha_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i)^k \end{cases} \quad (2.14)$$

Dans la méthode des moments, on remplace les μ'_i par les α_i avec $(i = 1, \dots, k)$ dans le système d'équation (2.13), pour obtenir ainsi les expressions des estimateurs

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = h_1(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \\ \hat{\lambda}_2 = h_2(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_k = h_k(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \end{cases} \quad (2.15)$$

L'idée de base dans cette méthode est d'égaliser les moments de la population à ceux de l'échantillon ; et la dimension des différents systèmes d'équation est à prendre égale au nombre de paramètres à estimer. Il est à noter que l'estimateur obtenu par cette méthode peut être biaisé ou non biaisé[7,13,14].

Exemple

On considère une population régie par la distribution gamme

$$P(x|\alpha, \beta) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{Où } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

On montre que les premiers moments de cette distribution sont

$$E[x] = \alpha\beta \text{ et } E[x^2] = \alpha\beta^2(\alpha + 1) \quad (2.16)$$

Ainsi les estimateurs de α et β sont obtenu, via la méthode des moments, en résolvant pour un échantillon (x_1, x_2, \dots, x_M)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^M \frac{x_i}{M} = \alpha\beta \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^M \frac{x_i^2}{M} = \alpha(\alpha + 1)\beta^2 \quad (2.17)$$

A partir du résultat ci-dessus, il est possible d'écrire les estimateurs

$$\hat{\alpha} = \frac{(\bar{x})^2}{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2} \quad \text{et} \quad \hat{\beta} = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2}{\bar{x}} \quad (2.18)$$

2.4.2 Méthode du Maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance a été introduite pour la première fois par R. A. Fisher, généticien et statisticien, dans les années 1920. La plupart des statisticiens

recommandent cette méthode, du moins lorsque la taille de l'échantillon est grande, car les estimateurs résultants ont certaines propriétés d'efficacité souhaitables.

On considère une population régie par le modèle statistique $p(x|\lambda)$ où λ est le paramètre à estimer à partir de l'échantillon aléatoire $\Omega = (x_1, x_2, \dots, x_M)$. La densité de probabilité globale de l'échantillon sera donnée par [7,13,14,15,16,17]

$$L(x_1, \dots, x_M|\lambda) = \prod_{i=1}^M p(x_i|\lambda) dx_i, \quad (2.18)$$

Cette fonction est appelée fonction de vraisemblance de l'échantillon.

L'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) du paramètre λ est défini comme la quantité $\hat{\lambda}_{ml} = \hat{\lambda}_{ml}(x_1, x_2, \dots, x_M)$ qui maximise $L(x_1, \dots, x_M|\lambda)$ pour les variations de λ , est donnée par la solution des équations.

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_M|\lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(x_1, \dots, x_M|\lambda)}{\partial \lambda^2} < 0. \quad (2.19)$$

Ainsi, la valeur du paramètre le plus probable a généré par l'échantillon est celle qui maximise cette fonction. Par ailleurs, puisque la fonction $L(x_1, \dots, x_M|\lambda)$ est positive, nous pouvons introduire la fonction $l(x_1, \dots, x_M|\lambda) = \ln L(x_1, \dots, x_M|\lambda) = \sum_{i=1}^M \ln p(x_i|\lambda)$, dite fonction de vraisemblance logarithmique. Afin de faciliter les calculs dans la méthode, il est préférable de travailler avec cette dernière fonction, pour laquelle les conditions + deviennent

$$\frac{\partial l(x_1, \dots, x_M|\lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^2 l(x_1, \dots, x_M|\lambda)}{\partial \lambda^2} < 0. \quad (2.20)$$

Un dernier point concerne la variance de cet estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_{ml}$. La variance qui, dans la limite M très grand, sature la borne de Cramer-Rao est donnée par

$$Var(\lambda_{ml}) = \int \left[\prod_i dx_i p(x_i|\lambda) \right] [\lambda_{ml}(x_1, x_2, \dots, x_M) - \lambda]^2 \quad (2.21)$$

Exemple

On considère une population régie par la distribution $p(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$. La fonction de vraisemblance

$$L(x_1, \dots, x_M | \lambda) = (\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2}) \dots (\lambda e^{-\lambda x_M}) = \lambda^M e^{-\lambda \sum x_i}$$

La fonction de vraisemblance logarithmique

$$\ln L(x_1, \dots, x_M | \lambda) = M \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

Nous pouvons alors écrire

$$\frac{dL(x_1, \dots, x_M | \lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{M}{\lambda} - \sum x_i = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{M}{\sum x_i}$$

Et par conséquent, l'estimateur de maximum e vraisemblance est

$$\hat{\lambda} = \frac{M}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}} \quad (2.22)$$

2.4.3 Estimateur bayésien

Dans l'approche bayésienne, on commence avec une information préalable sur la valeur du paramètre, traité comme une variable aléatoire, avec une distribution de probabilité à priori. Cette probabilité initiale est ensuite conditionnée par les observations empiriques, pour être mise à jour. Par la suite, Cette nouvelle probabilité à posteriori sera utilisée pour inférer la vraie valeur du paramètre considéré[7,13,14,15,16,17].

Rappelons que la règle de Bayes permet de calculer la distribution de probabilité conditionnée d'une variable aléatoire x , compte tenu d'une valeur observée d'une autre variable aléatoire x :

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}, \quad (2.23)$$

Cela est dû à la relation entre la probabilité conjointe et les probabilités conditionnelles $p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x)$, sachant que la probabilité conjointe est symétrique par rapport à la permutation de ses arguments.

Maintenant, revenons à notre problème d'estimation du paramètre λ moyennant les observations $\Omega = (x_1, x_2, \dots, x_M)$. La probabilité d'obtenir les résultats $\Omega =$

(x_1, x_2, \dots, x_M) étant donné que la valeur du paramètre est λ est $p(\Omega|\lambda)$. Ainsi, moyennant la règle de Bayes, on peut écrire

$$p(\lambda|\Omega) = \frac{p(\Omega|\lambda)p(\lambda)}{\int_{\Lambda} p(\Omega|\lambda)p(\lambda)d\lambda} \quad (2.24)$$

Où l'intégrale $p(\Omega) = \int p(\Omega|\lambda)p(\lambda)d\lambda$ est calculée sur tout l'espace des paramètres Λ . La distribution de probabilité $p(\lambda)$ est dite distribution a priori et devant refléter les informations précédentes sur la valeur du paramètre λ_0 . La quantité $p(\lambda|\Omega)$ est la distribution a posteriori et elle représente l'information que nous avons a posteriori, après observation des données Ω .

Ayant calculer la probabilité a posteriori $p(\lambda|\Omega)$, l'estimation bayésien souvent utilisé est défini par

$$\hat{\lambda}_B(\Omega) = \int \lambda p(\lambda|\Omega)d\lambda. \quad (2.25)$$

Ce dernier estimateur minimise l'erreur quadratique moyenne calculée par rapport à la distribution conjointe

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\lambda}) &= E[(\hat{\lambda} - \lambda)^2] = \iint (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p(\Omega, \lambda)d\Omega d\lambda \\ &= \iint (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p(\Omega|\lambda)p(\lambda)d\Omega d\lambda \quad (2.26) \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour le même estimateur, l'erreur quadratique moyenne est égale à la variance de la distribution postérieure

$$Var(\hat{\lambda}_B) = \int (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p(\lambda|\Omega)d\lambda, \quad (2.27)$$

Dans la limite $M \rightarrow \infty$, on démontre que la distribution de probabilité à priori devient sans importance et que l'estimateur bayésien devient asymptotiquement sans biais et efficace, saturant ainsi l'inégalité de Cramér-Rao.

Chapitre 3

Théorie de l'Estimation Quantique

3.1 Introduction

Plusieurs grandeurs d'intérêt en théorie de l'information quantique ne correspondent pas aux observables quantiques et ne peuvent être évaluées directement par mesure. Des exemples sont la pureté d'un état quantique, une phase quantique ou des corrélations quantiques. La manière usuelle de résoudre ce problème est d'utiliser les outils de la théorie de l'estimation quantique. Dans ce chapitre, nous ne passons en revue que les principaux outils de la théorie de l'estimation quantique. Le but d'une procédure d'estimation est de trouver la meilleure stratégie pour déduire la valeur d'un paramètre inconnu avec la plus grande précision possible. Cela se fait en effectuant des mesures indirectes sur le système quantique, c'est-à-dire en déduisant la valeur du paramètre en traitant l'ensemble de résultats à partir de la mesure d'une observable différente, ou d'un ensemble de variables [6,7,15,17].

Historiquement, la théorie de l'estimation quantique a été développée par Helstrom et Holevo, mais le domaine est devenu plus pertinent pour les applications métrologiques lorsque Braunstein et Caves ont explicitement montré le lien avec la théorie classique de l'estimation.

3.2 Inégalité de Cramer Rao Quantique Information de Fisher Quantique

En statistiques classique, un problème d'estimation concerne en général un ensemble de données classiques. Dans le scénario quantique, les données sont collectées via une mesure quantique de l'état du système, qui dépend du paramètre. On a donc une famille d'états quantiques (opérateurs densité) ρ_λ , c'est-à-dire une variété dans l'ensemble des états $S(H)$, libellés par un paramètre λ à estimer. La mesure quantique est décrite par une mesure généralisée (POVM) $\{\Pi_x\}$ tel que $\int \Pi_x dx = 1$. La règle de Born permet de calculer la probabilité conditionnelle [6,7,15,17]

$$p(x|\lambda) = \text{Tr}[\Pi_x \varrho_\lambda] \quad (3.1)$$

Ainsi, l'information de Fisher classique donnée par (2.6) devient

$$F(\lambda) = \int dx \frac{\left(\frac{\partial \text{Tr}[\Pi_x \varrho_\lambda]}{\partial \lambda}\right)^2}{\text{Tr}[\Pi_x \varrho_\lambda]} \quad (3.2)$$

Introduisant la dérivée logarithmique symétrique (SLD) L_λ en tant qu'opérateur autoadjoint satisfaisant l'équation

$$\frac{L_\lambda \varrho_\lambda + \varrho_\lambda L_\lambda}{2} = \frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial \lambda} \quad (3.3)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_\lambda p(x|\lambda) &= \partial_\lambda \text{Tr}(\pi_x \varrho_\lambda) = \text{Tr}(\pi_x \partial_\lambda \varrho_\lambda) \\ &= \text{Tr}\left(\pi_x \frac{L_\lambda \varrho_\lambda + \varrho_\lambda L_\lambda}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\pi_x L_\lambda \varrho_\lambda) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\pi_x \varrho_\lambda L_\lambda) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\pi_x L_\lambda \varrho_\lambda) + \frac{1}{2} [\text{Tr}((\pi_x \varrho_\lambda L_\lambda)^+)]^* \end{aligned}$$

Moyennant la définition de l'opérateur adjoint et la cyclicité de la trace

$$\partial_\lambda p(x|\lambda) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\pi_x L_\lambda \varrho_\lambda) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\pi_x L_\lambda \varrho_\lambda)^*$$

On aboutit à

$$\partial_\lambda p(x|\lambda) = \text{Re}[\text{Tr}(\pi_x L_\lambda \varrho_\lambda)]$$

L'information classique de Fisher prend la forme

$$F(\lambda) = \int dx \frac{(\text{Re}[\text{Tr}[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]])^2}{\text{Tr}[\Pi_x \varrho_\lambda]} \quad (3.4)$$

Cette Information classique de Fisher (ICF) quantifie la précision qui peut être obtenue en implémentant un estimateur approprié sur les résultats de la mesure généralisée (POVM) $\{\Pi_x\}$.

Cette dernière expression de $F(\lambda)$ peut être maximisée analytiquement sur toutes les POVM

possibles pour en déduire l'existence une borne supérieure. Pour ce faire, nous commençons par le bien connu résultat des nombres complexes[6,7,15,17] :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{Re}(z) \leq |z|$$

Par conséquent

$$\text{Re}[Tr[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]] \leq |Tr[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]|$$

Ainsi

$$F(\lambda) = \int dx \frac{(\text{Re}[Tr[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]])^2}{Tr[\Pi_x \varrho_\lambda]} \leq \int dx \frac{|Tr[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]|^2}{Tr[\Pi_x \varrho_\lambda]} \quad (3.5)$$

Maintenant reprenons l'expression $|Tr[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]|^2$ qui apparait dans l'intégrale précédente. Puisque ϱ_λ et Π_x sont des opérateurs positifs et par conséquent hermitiens, on peut toujours définir leurs racines aux carrés $\sqrt{\varrho_\lambda}$ et $\sqrt{\Pi_x}$ qui sont aussi des opérateurs positifs. On écrit

$$L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x = L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda} \sqrt{\varrho_\lambda} \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\Pi_x}$$

Et sous la trace, qui est cyclique, nous avons[6,7,15,17]

$$\begin{aligned} Tr[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x] &= Tr[L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda} \sqrt{\varrho_\lambda} \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\Pi_x}] \\ &= Tr[(\sqrt{\varrho_\lambda} \sqrt{\Pi_x}) \sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda}] \\ &= Tr[(\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\varrho_\lambda})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda})] \end{aligned}$$

A ce niveau, introduisons les définitions

$$A = \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\varrho_\lambda} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda}$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz pour les opérateurs :

$$|Tr[A^\dagger B]|^2 \leq Tr(A^\dagger A) Tr(B^\dagger B),$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |Tr[(\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\varrho_\lambda})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda})]|^2 &\leq Tr((\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\varrho_\lambda})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\varrho_\lambda})) \\ &\quad \times Tr((\sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda})), \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Tr} \left((\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\varrho_\lambda})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\varrho_\lambda}) \right) = \text{Tr}(\Pi_x \varrho_\lambda)$$

$$\text{Tr} \left((\sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda})^\dagger (\sqrt{\Pi_x} L_\lambda \sqrt{\varrho_\lambda}) \right) = \text{Tr}(L_\lambda \Pi_x L_\lambda \varrho_\lambda)$$

Pour obtenir Tapez une équation ici.

$$|\text{Tr}[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]|^2 \leq \text{Tr}(\Pi_x \varrho_\lambda) \text{Tr}(L_\lambda \Pi_x L_\lambda \varrho_\lambda)$$

On écrit alors

$$F(\lambda) \leq \int dx \frac{|\text{Tr}[L_\lambda \varrho_\lambda \Pi_x]|^2}{\text{Tr}[\Pi_x \varrho_\lambda]} \leq \int dx \frac{\text{Tr}(\Pi_x \varrho_\lambda) \text{Tr}(L_\lambda \Pi_x L_\lambda \varrho_\lambda)}{\text{Tr}[\Pi_x \varrho_\lambda]}$$

$$F(\lambda) \leq \int dx \text{Tr}(L_\lambda \Pi_x L_\lambda \varrho_\lambda)$$

$$F(\lambda) \leq \text{Tr} \left(L_\lambda \left(\int \Pi_x dx \right) L_\lambda \varrho_\lambda \right),$$

Sachant que

$$\int \Pi_x dx = 1$$

Finalement, on trouve

$$F(\lambda) \leq \text{Tr}(L_\lambda^2 \varrho_\lambda), \quad (3.6)$$

La chaîne d'inégalités précédent prouve bel et bien que l'information de Fisher $F(\lambda)$ de toute mesure quantique est bornée supérieurement par ce que l'on appelle l'information de Fisher quantique $H(\lambda)$ définie par [6,7,15,17]

$$H(\lambda) = \text{Tr}(L_\lambda^2 \varrho_\lambda) \quad (3.7)$$

Et sachant que

$$\text{Tr}(L_\lambda^2 \varrho_\lambda) = \text{Tr}(L_\lambda L_\lambda \varrho_\lambda) = \text{Tr}(L_\lambda \varrho_\lambda L_\lambda)$$

Que nous pouvons réécrire moyennant la définition de la SLD et la propriété de cyclicité de la trace

$$\text{Tr}(L_\lambda^2 \varrho_\lambda) = \text{Tr}\left(\frac{L_\lambda \varrho_\lambda + L_\lambda \varrho_\lambda}{2} L_\lambda\right) = \text{Tr}\left(\frac{\varrho_\lambda L_\lambda + L_\lambda \varrho_\lambda}{2} L_\lambda\right) = \text{Tr}(\partial_\lambda \varrho_\lambda L_\lambda)$$

Pour enfin écrire

$$H(\lambda) = \text{Tr}(\partial_\lambda \varrho_\lambda L_\lambda) \quad (3.8)$$

Nous pouvons aussi conclure que l'inégalité (3.6) implique qu'il y a une borne imposée par la mécanique quantique à la précision dans l'estimation d'un paramètre λ de vraie valeur λ_0 , c'est la borne quantique de Cramer-Rao[6,7,15,17]

$$\text{Var}(\hat{\lambda}) \geq \frac{1}{M H(\lambda)} \quad (3.9)$$

Cette version quantique du théorème de Cramer-Rao fournit une borne ultime: elle dépend de la structure géométrique du modèle statistique quantique $\{\rho_\lambda\}$ et ne dépend pas de la mesure quantique (POVM) $\{\Pi_x\}$. Les mesures quantiques optimales pour l'estimation de λ correspondent donc à des POVM avec une information classique de Fisher égale à l'information quantique de Fisher. On peut montrer qu'une 'projection sur les états propres de L_λ sature l'inégalité (3.6), autrement dit la POVM $\{\Pi_\lambda\}$ construite à partir des projecteur orthogonaux associés à L_λ est une mesure optimale. Si L_λ possède une représentation spectrale

$$L_\lambda = \sum_i l_{i\lambda} |\phi_{i\lambda}\rangle\langle\phi_{i\lambda}|$$

Alors

$$\Pi_{i\lambda} = |\phi_{i\lambda}\rangle\langle\phi_{i\lambda}|$$

Où $|\phi_\lambda\rangle$ est un vecteur propre de L_λ et l_λ est la valeur propre correspondante.

Pour obtenir une expression explicite de l'information de Fisher quantique $H(\lambda)$, nous notons que (3.3) est une équation de Lyapunov pour l'opérateur L_λ , qui peut être formellement résolue comme[6,7,15,17]

$$L_\lambda = 2 \int_0^\infty e^{-\rho_\lambda t} (\partial_\lambda \rho_\lambda) e^{-\rho_\lambda t} dt \quad (3.10)$$

Nous pouvons vérifier cela en écrivant l'opérateur densité ρ_λ dans sa base propre comme $\rho_\lambda = \sum_n c_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, nous calculons

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda L_\lambda &= 2 \left(\sum_i c_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \int_0^\infty dt \left(\sum_n e^{-c_n t} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \right) (\partial_\lambda \rho_\lambda) \times \left(\sum_m e^{-c_m t} |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \right) \\
&= \sum_{i,n,m} 2c_i \langle\psi_i|\psi_n\rangle \int_0^\infty dt e^{-(c_n+c_m)t} \langle\psi_n| (\partial_\lambda \rho_\lambda) |\psi_i\rangle\langle\psi_m| \\
&= \sum_{n,m} \frac{2c_n}{c_n+c_m} \langle\psi_n| (\partial_\lambda \rho_\lambda) |\psi_m\rangle |\psi_n\rangle\langle\psi_m| \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi déduire que

$$\begin{aligned}
(\rho_\lambda L_\lambda)^+ &= L_\lambda \rho_\lambda = \sum_{n,m} \frac{2c_n}{c_n+c_m} \langle\psi_m| (\partial_\lambda \rho_\lambda) |\psi_n\rangle |\psi_m\rangle\langle\psi_n| \\
&= \sum_{n,m} \frac{2c_m}{c_n+c_m} \langle\psi_n| (\partial_\lambda \rho_\lambda) |\psi_m\rangle |\psi_n\rangle\langle\psi_m| \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Nous regroupons les deux résultats précédents (3.11) et (3.12) dans la partie gauche de l'équation (3.3)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (\rho_\lambda L_\lambda + L_\lambda \rho_\lambda) &= \sum_{n,m} \left(\frac{c_n + c_m}{c_n + c_m} \right) \langle\psi_n| (\partial_\theta \rho_\theta) |\psi_m\rangle |\psi_n\rangle\langle\psi_m| \\
&= \sum_{n,m} \langle\psi_n| (\partial_\theta \rho_\theta) |\psi_m\rangle |\psi_n\rangle\langle\psi_m| \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n,m} \langle\psi_n| \rho_\theta |\psi_m\rangle |\psi_n\rangle\langle\psi_m| \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n,m} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \rho_\theta |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \\
&= \partial_\theta \rho_\theta \quad (3.13)
\end{aligned}$$

On voit bien que l'expression (3.10) de L_λ est solution de (3.3). Maintenant reprenons l'expression (3.10)

$$L_\lambda = 2 \int_0^\infty e^{-\rho_\lambda t} (\partial_\lambda \rho_\lambda) e^{-\rho_\lambda t} dt$$

Et insérant $\rho_\lambda = \sum_n c_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ pour avoir

$$\begin{aligned} L_\lambda &= 2 \sum_{n,m} \int_0^\infty e^{-(c_n+c_m)t} |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \partial_\lambda \rho_\lambda |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \\ &= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle\psi_n|(\partial_\lambda \rho_\lambda)|\psi_m\rangle}{c_n+c_m} |\psi_n\rangle\langle\psi_m| \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ce dernier résultat nous permettra d'écrire dans la définition de l'information quantique de Fisher $H(\lambda)$ donnée par (3.8) ce qui suit[6,7,15,17]

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= Tr\{(\partial_\lambda \rho_\lambda)L_\lambda\} = Tr\left\{(\partial_\lambda \rho_\lambda)2 \sum_{n,m} \frac{\langle\psi_n|(\partial_\lambda \rho_\lambda)|\psi_m\rangle}{c_n+c_m} |\psi_n\rangle\langle\psi_m|\right\} \\ &= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle\psi_n|\partial_\lambda \rho_\lambda|\psi_m\rangle}{c_n+c_m} Tr\{\partial_\lambda \rho_\lambda |\psi_n\rangle\langle\psi_m|\} \\ &= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle\psi_n|(\partial_\lambda \rho_\lambda)|\psi_m\rangle}{c_n+c_m} \langle\psi_m|\partial_\lambda \rho_\lambda|\psi_n\rangle \end{aligned}$$

$$H(\lambda) = 2 \sum_{n,m} \frac{|\langle\psi_n|(\partial_\lambda \rho_\lambda)|\psi_m\rangle|^2}{c_n+c_m} \quad (3.15)$$

où la somme porte sur les termes pour lesquels $c_n + c_m \neq 0$. Cette relation représente une expression explicite de l'information de Fisher quantique[6,7,15,17].

Nous pouvons dériver une formule différente pour $H(\lambda)$, en remarquant que L_λ n'est défini qu'en termes de ρ_λ et que les valeurs propres et les vecteurs propres peuvent dépendre du paramètre λ .

Partant de $\rho_\lambda = \sum_n c_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, on écrit

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \rho_\lambda &= \partial_\lambda \left(\sum_n c_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \right) \\ &= \left[\sum_n (\partial_\lambda c_n) |\psi_n\rangle\langle\psi_n| + c_n |\partial_\lambda \psi_n\rangle\langle\psi_n| + c_n |\psi_n\rangle\langle\partial_\lambda \psi_n| \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

On utilise la notation :

$$|\partial_\lambda \psi_n\rangle = \partial_\lambda |\psi_n\rangle = \sum_k \partial_\lambda \psi_{n,k} |k\rangle \quad (3.17)$$

Où $\psi_{n,k}$ sont obtenus en développant $|\psi_n\rangle$ sur une base arbitraire $\{|k\rangle\}$ indépendant de λ .

Puisque $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{n,m}$. On a

$$\begin{aligned} \partial_\lambda [\langle \psi_n | \psi_m \rangle] &= \langle \partial_\lambda \psi_n | \psi_m \rangle + \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle \partial_\lambda \psi_n | \psi_m \rangle &= - \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

En utilisons les équations (3.14) et (3.16) on obtient :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= \sum_{n,m,i} \frac{2}{c_n + c_m} \langle \psi_n | [(\partial_\lambda c_n) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| + c_i |\partial_\lambda \psi_i\rangle \langle \psi_i| + c_i |\psi_i\rangle \langle \partial_\lambda \psi_i|] | \psi_m \rangle | \psi_n \rangle \langle \psi_m | \\ &= \sum_n \frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + \sum_{n,m,i} \frac{2c_i}{c_n + c_m} [\langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | \psi_i \rangle \langle \partial_\lambda \psi_m \rangle] | \psi_n \rangle \langle \psi_m | \\ &= \sum_n \frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + \sum_{n,m,i} \frac{2}{c_n + c_m} [c_m \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle + c_n \langle \partial_\lambda \psi_n | \psi_m \rangle] | \psi_n \rangle \langle \psi_m | \end{aligned} \quad (2.19)$$

Moyennant le résultat (3.19) :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= \sum_n \frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + \sum_{n,m} \frac{2}{c_n + c_m} [c_m \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle - c_n \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle] | \psi_n \rangle \langle \psi_m | \\ &= \sum_n \frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + 2 \sum_{n,m} \frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle | \psi_n \rangle \langle \psi_m | \end{aligned} \quad (3.20)$$

En mettant au carré l'expression de L_λ , On trouve :

$$\begin{aligned} L_\lambda^2 &= \left(\sum_n \frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + 2 \sum_{n,m} \frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle | \psi_n \rangle \langle \psi_m | \right) \\ &\times \sum_{n',m'} \frac{\partial_\lambda c_{n'}}{c_{n'}} |\psi_{n'}\rangle \langle \psi_{n'}| + 2 \sum_{n',m'} \frac{c_{m'} - c_{n'}}{c_{n'} + c_{m'}} \langle \psi_{n'} | \partial_\lambda \psi_{m'} \rangle | \psi_{n'} \rangle \langle \psi_{m'} | \\ &= \sum_n \left(\frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} \right)^2 |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + 2 \sum_{n,m'} \frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} \left(\frac{c_{m'} - c_n}{c_n + c_{m'}} \right) \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_{m'} \rangle | \psi_n \rangle \langle \psi_{m'} | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{n,m} \frac{\partial_\lambda c_m}{c_m} \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle | \psi_n \rangle \langle \psi_m | \\
& +4 \sum_{n,m,m'} \left(\frac{c_{m'} - c_n}{c_n + c_{m'}} \right) \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_{m'} \rangle \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Donc on peut utiliser le résultat (3.19) pour déduire l'expression de l'information quantique de Fisher[6,7,15,17].

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= Tr\{L_\lambda^2 \rho_\lambda\} = Tr\left\{\left(\sum_n c_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right) L_\lambda^2\right\} \\
&= \sum_n c_n \langle \psi_n | L_\lambda^2 | \psi_n \rangle \quad (3.22)
\end{aligned}$$

On utilise l'expression de L_λ^2 pour écrire

$$H(\lambda) = \sum_n \left(\frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} \right)^2 + 4 \sum_{n,m} c_n \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) \left(\frac{c_n - c_m}{c_m + c_n} \right) \langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle \langle \psi_m | \partial_\lambda \psi_n \rangle$$

On utilise l'équation $\langle \partial_\lambda \psi_n | \psi_m \rangle = -\langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle$, Donc on peut écrire :

$$H(\lambda) = \sum_n \left(\frac{\partial_\lambda c_n}{c_n} \right)^2 + 2 \sum_{n,m} \tilde{\sigma}_{n,m} |\langle \psi_n | \partial_\lambda \psi_m \rangle|^2 \quad (3.23)$$

Où $\tilde{\sigma}_{n,m} = 2c_n \left[\left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) \right]^2 \cdot \rho = \sum_n c_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$.

3.3 Exemple sur les opérateurs unitaires et les états purs

a- Les opérateurs unitaires

Soit une d'opérateur unitaire $U(\lambda)$, agissant sur un espace vectoriel hermitien de dimension fini, dépendant d'un paramètre réel[6,7,15,17].

On considère le cas où le paramètre d'intérêt est l'amplitude d'une perturbation unitaire appliquée à un état initial donné ρ_0 . On peut exprimer l'état quantique après application de $U(\lambda)$ comme suit

$$\rho_\lambda = U_\lambda \rho_0 U_\lambda^\dagger \quad (3.24)$$

Avec $U_\lambda = e^{-i\lambda G}$ est un opérateur unitaire et G est le générateur hermitien de la transformation. Moyennant l'expansion de l'état non perturbé (initial) dans sa base propre

$\rho_0 = \sum_n c_n |k\rangle\langle k|$, On a $\rho_\theta = \sum_k c_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, Où

$$|\psi_k\rangle = U_\lambda |k\rangle \quad (3.25)$$

Par conséquent, nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \rho_\lambda &= \sum_k c_k [(\partial_\lambda |\psi_k\rangle)\langle\psi_k| + |\psi_k\rangle(\partial_\lambda \langle\psi_k|)] \\ &= -i \sum_k c_k [G|\psi_k\rangle\langle\psi_k| - |\psi_k\rangle\langle\psi_k|G] \\ &= -i[G, \rho_\lambda] = -iU_\lambda[G, \rho_0]U_\lambda^\dagger \quad (3.26) \end{aligned}$$

Maintenant, pour obtenir L_λ , nous avons :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle\psi_n|(\partial_\lambda \rho_\lambda)|\psi_m\rangle}{c_n + c_m} |\psi_n\rangle\langle\psi_m| \\ &= -2i \sum_{n,m} \frac{\langle n|U_\lambda^\dagger U_\lambda[G, \rho_0]U_\lambda^\dagger U_\lambda|m\rangle}{c_n + c_m} U_\lambda |n\rangle\langle m|U_\lambda^\dagger \\ &= U_\lambda \left(-2i \sum_{n,m} \frac{\langle n|[G, \rho_0]|m\rangle}{c_n + c_m} |n\rangle\langle m| \right) U_\lambda^\dagger \\ &= U_\lambda \left(-2i \sum_{n,m} \langle n|G|m\rangle \frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} |n\rangle\langle m| \right) U_\lambda^\dagger \quad (3.27) \end{aligned}$$

On pose que

$$L_0 = -2i \sum_{n,m} \langle n|G|m\rangle \frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} |n\rangle\langle m|$$

Pour aboutir à
$$L_\theta = U_\theta L_0 U_\theta^\dagger \quad (3.28)$$

Calculons l'information quantique de Fisher $H(\lambda)$:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \text{Tr}\{\rho_\lambda L_\lambda^2\} = \text{Tr}\{(U_\lambda \rho_0 U_\lambda^\dagger)(U_\lambda L_0^2 U_\lambda^\dagger)\} \\ &= \text{Tr}\{\rho_0 L_0^2\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

On voit bien que cette dernière est indépendante de la valeur du paramètre.

Passons au calcul de L_0^2 :

$$\begin{aligned} L_0^2 &= \left[-2i \sum_{n,m} \langle n|G|m\rangle \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) |n\rangle\langle m| \right] \\ &\quad \times \left[-2i \sum_{n',m'} \langle n'|G|m'\rangle \left(\frac{c_{m'} - c_{n'}}{c_{n'} + c_{m'}} \right) |n'\rangle\langle m'| \right] \\ &= -4 \sum_{n,m,m'} \langle n|G|m\rangle\langle m|G|m'\rangle \left(\frac{c_{m'} - c_n}{c_n + c_{m'}} \right) \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) |n\rangle\langle m'| \end{aligned} \quad (3.30)$$

En multipliant par ρ_0 , on trouve :

$$\begin{aligned} \rho_0 L_0^2 &= -4 \left(\sum_n c_n |k\rangle\langle k| \right) \sum_{n,m,m'} \langle n|G|m\rangle\langle m|G|m'\rangle \left(\frac{c_{m'} - c_n}{c_n + c_{m'}} \right) \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) |n\rangle\langle m'| \\ &= -4 \sum_{n,m,m'} c_n \langle n|G|m\rangle\langle m|G|m'\rangle \left(\frac{c_{m'} - c_n}{c_n + c_{m'}} \right) \left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) |n\rangle\langle m'| \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ce qui conduit à la forme suivant de l'information quantique de Fisher [6,7,15,17] :

$$H(\theta) = \text{Tr}\{\rho_0 L_0^2\} = 2 \sum_{n,m} \sigma_{n,m} |\langle n|G|m\rangle|^2 \quad (3.32)$$

Où $\sigma_{n,m} = 2c_n \left[\left(\frac{c_m - c_n}{c_n + c_m} \right) \right]^2$.

b- Les états purs

Maintenant considérons un familles d'états purs $\rho_\theta = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|$. Puisque $\rho_\lambda^2 = \rho_\lambda$, On a :

$$\partial_\lambda \rho_\lambda = \partial_\lambda (\rho_\lambda^2) = \rho_\lambda (\partial_\lambda \rho_\lambda) + (\partial_\lambda \rho_\lambda) \rho_\lambda \quad (3.33)$$

Si en identifiant la relation (3.3) à l'expression (3.33), on trouve que pour un état pur :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= 2\partial_\lambda \rho_\lambda = 2\partial_\lambda (|\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|) \\ &= [|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Maintenant, nous pouvons calculer l'information Quantique de Fisher

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= Tr\{(\partial_\lambda \rho_\lambda)L_\lambda\} = \frac{1}{2} Tr\{L_\lambda^2\} \\ &= 2 Tr\{[|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|][|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|]\} \\ &= 2 Tr\{|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| \\ &\quad + |\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda| + |\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\} \\ &= 2[\langle\psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle + \langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle \\ &\quad + \langle\psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle + \langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle] \end{aligned}$$

$$H(\lambda) = 4[\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle + \langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle^2] \quad (3.35)$$

Maintenant pour des opérateurs unitaires appliqués sur des états purs, nous avons les résultats suivants[6,7,15,17]

Partant du fait que

$$|\psi_\lambda\rangle = U_\lambda|\psi_0\rangle$$

$$|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle = \partial_\lambda (U_\lambda|\psi_0\rangle) = (\partial_\lambda U_\lambda)|\psi_0\rangle = -iGU_\lambda|\psi_0\rangle = -iG|\psi_\lambda\rangle \quad (3.36)$$

$$\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\partial_\lambda \psi_\lambda\rangle = \langle\psi_\lambda|G^2|\psi_\lambda\rangle = \langle\psi_0|U_\lambda^\dagger G^2 U_\lambda|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|G^2|\psi_0\rangle \quad (3.37)$$

$$\langle\partial_\lambda \psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle = i\langle\psi_\lambda|G|\psi_\lambda\rangle = i\langle\psi_0|U_\lambda^\dagger G U_\lambda|\psi_0\rangle = i\langle\psi_0|G|\psi_0\rangle \quad (3.38)$$

Par conséquent, l'information de Fisher Quantique se calcule aisément :

$$H(\lambda) = 4[\langle\psi_0|G^2|\psi_0\rangle + (i\langle\psi_0|G|\psi_0\rangle)^2]$$

$$\begin{aligned}
&= 4[\langle \psi_0 | G^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | G | \psi_0 \rangle^2] \\
&= 4\langle \psi_0 | (\Delta G)^2 | \psi_0 \rangle \\
&= 4\langle (\Delta G)^2 \rangle \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Un résultat important pour ce cas particulier est que l'information Fisher Quantique $H(\lambda)$ est indépendante du paramètre λ et elle est proportionnelle à la variance du générateur λ sur l'état non perturbé [6,7,15,17].

Ainsi, moyennant la borne quantique Cramèr-Rao, on obtient :

$$V(\theta) \geq \frac{1}{MH(\theta)} \Rightarrow V(\theta) = \frac{1}{4M\langle (\Delta G)^2 \rangle} \quad (3.40)$$

3.4 Conclusion

La théorie de l'estimation quantique permet de trouver la procédure optimal pour estimer efficacement la valeur d'un paramètre inconnu. La limite ultime de précision de la variance associée à un estimateur est bornée par le bas selon le théorème quantique de Cramer-Rao et elle est proportionnelle à l'inverse de l'information de quantique de Fisher [6,7,15,17].

Conclusion

Après un rappel concis du formalisme de la mécanique quantique, nous avons traité, le long de ce mémoire, la problématique de la détermination des quantités physique ne pouvant être mesurer directement. En effet, leurs valeurs sont déduites via une méthode d'estimation qui repose sur une série de mesure d'une observable du système étudié et qui est relié d'une façon ou d'une autre au paramètre à estimer. Par la suite les résultats obtenus seront analysés par le biais d'un estimateur qui est formellement une fonction statistique de l'échantillon. Sachant que les résultats de l'expérience ainsi que leurs analyses statistiques sont toujours accompagnés d'erreur, cela induit, inévitablement une imprécision dans les valeurs données par l'estimateur. Ce qui nous ramène directement au concept de l'inégalité de Cramér-Rao dont la limite inférieure est donnée par l'inverse de l'information de Fisher. Juste après, nous nous sommes focalisées la notion d'information de Fisher quantique, introduite comme un Information de Fisher associée à une mesure optimale et qui constitue une borne supérieure de l'information de Fisher classique. De par sa définition, l'information de Fisher quantique ne dépend que de l'état sonde quantique et permet par conséquent d'introduire une version quantique l'inégalité de Cramér-Rao donnant ainsi une nouvelle limite de précision, encore plus petite, à toute stratégie d'estimation, cette dernière est bien sûr de nature quantique. En somme, l'importance de la théorie de l'estimation quantique réside dans le fait qu'elle nous aide à déterminer les états sondes quantiques ainsi que les mesures optimales à effectuées pour estimer le paramètre recherché avec la meilleure précision possible.

Bibliographie

- [1] C. W. Helstrom, Quantum detection and estimation theory. Academic Press, 1976.
- [2] A. S. Holevo, Probabilistic and statistical aspects of quantum theory, vol. 1. Springer Science & Business Media, 2011.
- [3] L. Rondin, J. Tetienne, T. Hingant, J. Roch, P. Maletinsky, and V. Jacques, “Magnetometry with nitrogen-vacancy defects in diamond,” Rep. Prog. Phys., vol. 77, no. 5, p. 056503, 2014.
- [4] V. B. Braginsky, V. B. Braginsky, and F. Y. Khalili, Quantum measurement. Cambridge University Press, 1995.
- [5] A. De Pasquale and T. M. Stace, “Quantum Thermometry,” arXiv:1807.05762, July 2018.
- [6] M. G. Paris, “Quantum estimation for quantum technology,” Int. J. Quantum Inf., vol. 7, pp. 125–137, 2009.
- [7] Notes de cours, « Quantum estimation theory », Jader P. Santos, <http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/quantum-estimation.pdf>
- [8] M. G. Paris, “The modern tools of quantum mechanics,” The European Physical Journal Special Topics, vol. 203, no. 1, pp. 61–86, 2012.
- [9] M. A. Nielsen and I. Chuang, “Quantum computation and quantum information,” 2002.
- [10] J. Preskill, “Lecture notes for physics 229 : Quantum information and computation,” California Institute of Technology, vol. 16, 1998.
- [11] Thèse de doctorat , «Decoherence, non-Markovianity and quantum estimation in qubit systems subject to classical noise » , Claudia BENEDETTI, Université de Milan 2013.
- [12] Thèse de doctorat, « Advances in quantum parameter estimation and other topics», Luigi Seveso, Université de Milan 2017.

[13] J. L. Devore, Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. Brooks/Cole, 8th ed., January 2011.

[14] E. L. Lehmann and G. Casella, Theory of point estimation. Springer Science & Business Media, 2003.

[15] Thèse de doctorat, « Continuous measurements and nonclassicality as resources for quantum technologies», Francesco ALBARELLI, Université de Milan 2017.

[16] Thèse de doctorat, « Quantum Estimation and Discrimination in Continuous Variable and Fermionic Systems», Carmen Invernizzi, Université de Milan 2011.

[17] Thèse de doctorat, « Amplification quantique», ADNANE Hamza, Université de Bejaia 2019.