

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes

Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Dynamique des fluides et énergétique

Thème

Etude de l'écoulement annulaire de deux couches de fluides dans une conduite cylindrique

Présenté par

BOUAMAR NAIMA

Soutenu le: 06/07/2019

Devant le Jury composé de:

DJEMA	Amar	MCB	Président
NESSAS DJESSAS	Houria	MAA	Examineur
BOUBALOU	Nabila	MAA	invitée
MEHIDI BOUAM	Nadia	Prpfesseur	Rapporteur

Année universitaire 2018/2019

A decorative border in a deep blue color, featuring intricate floral and scrollwork patterns at the corners and along the edges. The border frames the central text.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- *Mon père et ma mère*
- *Mes chères frères et sœurs*
- *Tous mes amis*
- *Toute ma famille*

Remerciements

En premier lieu, je remercie « ALLAH » le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il m'a donné durant toutes mes années d'études.

Je remercie très sincèrement mon encadreur Madame Mehidi Nadia d'avoir accepté de diriger ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques m'ont permis la réalisation de ce mémoire dans de bonnes conditions.

Mes remerciements vont également aux membres du jury Monsieur Djema Amar, Madame Nessas Houria et Madame Boubalou Nabila, pour avoir accepté d'examiner le présent travail. A travers eux je remercie tous les enseignants, étudiants qui ont contribué dans mon cycle de formation.

Je tiens à remercier vivement Mr. LAOUAMRI T, et M^{elle} Amaouche.A pour l'intérêt et l'attention qu'ils ont apportés à mon travail, leur grande disponibilité et leurs conseils avisés, et toutes leurs aides précieuses et leurs soutiens afin que je finalise ce mémoire.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à tout le groupe GTFT pour leur aimable coopération.

Merci

Principales notations

• Lettres latines :

Célérité de l'onde de surface [$m \cdot s^{-1}$]	C
Dérivée particulaire	$\frac{D}{Dt}$
Accélération de la pesanteur [$m \cdot s^{-2}$]	g
Epaisseur du film [m]	h
Nombre d'onde [m]	k
Vecteur normal à la surface libre	n
Vecteur tangente à la surface libre	t
Pression [P]	p
Pression adimensionnée	P
Temps [s]	t
Dérivée partielle par rapport au temps(t)	∂_t
Dérivée partielle par rapport à (x)	∂_x
Dérivée partielle par rapport à (r)	∂_r
Deuxième Dérivée par rapport à (x)	∂_{xx}
Deuxième Dérivée par rapport à (r)	∂_{rr}
Vitesse de l'écoulement de base [$m \cdot s^{-1}$]	U
Composantes du vecteur vitesse [$m \cdot s^{-1}$]	(u, w, v)
Coordonnée axiale [m]	x
Coordonnée radiale [m]	r

• Symboles grecs :

Masse volumique [$kg \cdot m^{-3}$]	ρ_j
Viscosité dynamique [$P_a \cdot s$]	μ_j
Tenseur des contraintes visqueuses	$\bar{\tau}$
Tension de surface [$N \cdot m^{-1}$]	σ

Fonctions de courant..... (ψ_j)

Amplitudes des fonctions de courant..... (φ_j)

Taux d'amplification ω_j

- **Indices et exposants :**

Quantités fluctuantes \sim

Dérivation par rapport à (r) $'$

- **Opérateurs**

Opérateur Divergence..... ∇

Opérateur Gradient..... \overrightarrow{grad}

Opérateur Laplacien..... Δ

- **Nombres sans dimensions**

Nombre de Reynolds..... $R_e = R$

Nombre de Weber..... W_e

Rapport des viscosités..... μ

Rapport des épaisseurs..... d

Rapport des masses volumiques..... ρ

- **Liste des tableaux**

Tableau 1.1 : viscosité dynamique des quelques fluides Newtoniens.....16

Tableau 1.2 : tension superficielles de quelques fluides à la température ambiante.....16

• **Liste des figures**

Figure 1.1 : Géométrie de l'écoulement annulaire.....14

Figure 1.2 : Carte de stabilité en fonction du rapport des viscosités et du rapport des épaisseurs montrant des régions stables et instables : Résultats de Yih (1967) [13]. η étant la viscosité dynamique.....22

Figure 1.3 : Courbe c_i/iR fonction de l'épaisseur du fluide 1 $h_1 = \frac{1}{d}$ pour différentes valeur du rapport des viscosités μ . Résultats obtenus par Hickox [3] et [8] en l'absence de la tension superficielle. Configuration où le fluide à cœur est moins visqueux ($\mu > 1$)23

Figure. 1.4 : Taux d'amplification en fonction du nombre d'onde correspondant aux modes axisymétriques et non axisymétriques : Résultats de Preziosi et al (1989) [9].
.....25

Figure 2.1 : *Influence du rapport des viscosités μ et du rapport des épaisseurs ($h_1 = 1/d$) Sur l'écoulement de base (a) $h_1 = 0.3$, (b) $h_1 = 0.5$, (c) $h_1 = 0.8$.*
.....29

Figure 4.1 : *Dépendance du R_c/\sqrt{J} en fonction de la stratification de la viscosité dans le cas $\mu < 1$ qui correspond au fluide pariétal moins visqueux que le fluide à cœur et du rapport des épaisseurs h_1 .*50

Figure 4.2 : *Dépendance du R_c/\sqrt{J} en fonction de la stratification de la viscosité dans le cas $\mu > 1$ qui correspond au fluide pariétal moins visqueux que le fluide à cœur et du rapport des épaisseurs h_1 .*51

Figure 4.3 : Reynolds critique R_c dans le plan (μ, d) pour ($\mu < 1$).....52

Figure 4.4 : *A gauche : Changement d'orientation de la courbe représentée sur la figure (4.3) de façon à observer la variation de Reynolds critique en fonction de μ .*
A droite : Changement d'orientation de la courbe représentée sur la figure (4.3) de façon à observer la variation de Reynolds critique en fonction de h_152

Figure 4.5 : Reynolds critique R_c dans le plan (μ, d) pour ($\mu > 1$).....53

Figure 4.6 : *A gauche : Changement d'orientation de la courbe représentée sur la figure (4.5) de manière à observer la variation de Reynolds critique en fonction de μ .*.....53

Figure 4.7 : Courbe de stabilité marginale représentant le nombre de Reynolds R en fonction du nombre d'onde k . Valeurs des paramètres :
 $\mu = 0.05, \rho = 1, d = 1.08 (h_1 = 0.925)$ et $J = 2102$54

Figure 4.8 : Courbe de stabilité marginale représentant le nombre de Reynolds R en fonction du nombre d'onde k pour deux valeurs différentes de J exprimant l'influence de la tension superficielle.

Valeurs des paramètres : $\mu = 0.05, \rho = 1, d = 1.08 (h_1 = 0.925)$55

Figure 4.9: Célérité complexe $c_i = \omega_i/k$ en fonction du nombre d'onde pour différentes valeur du nombre de Reynolds : $J = 2102$.

Valeurs des paramètres : $\mu = 0.05, \rho = 1, d = 1.08 (h_1 = 0.925)$56

Figure 4.10 : Célérité complexe $c_i = \omega_i/k$ en fonction du nombre d'onde montrant l'influence de la tension superficielle.

Valeurs des paramètres : $\mu = 0.05, \rho = 1, d = 1.08 (h_1 = 0.925), R = 2$57

Table des matières

Principales Notations.....	3
Introduction générale.....	10
Chapitre 1 Equations gouvernant le problème et étude bibliographique.....	12
1.1 Introduction.....	13
1.2 Formulation mathématiques du problème.....	13
1.2.1 Rappel des équations du mouvement.....	13
1.2.2 Conditions aux limites.....	17
1.3 Ecoulement de base.....	19
1.4 Etude bibliographique.....	21
1.4.1 Yih (1967).....	21
1.4.2 Hickox (1970).....	22
1.4.3 Preziosi (1989).....	23
1.4.4 Chen et Joseph (1991).....	24
Chapitre 2:Equations sans dimensions.....	25
2.1 Introduction.....	26
2-2 Formes adimensionnelles des équations 2D.....	26
2-3 Ecoulement axisymétrique.....	26
2-4 Nombres adimensionnés.....	31
Chapitre 3: Equations linéarisées : Equations d'Orr-Sommerfeld.....	33
3-1-Introduction.....	34
3-2 Equations Linéarisées.....	34
3.3 Equations d'Orr-Sommerfeld.....	37
Chapitre 4: Développement asymptotique aux grandes ondes.....	41
4.1-Introduction.....	42
4.2 Hypothèse ondes longues.....	42

4.3 Mise en équation.....	43
4.3 .1 Résolution à l'ordre zéro.....	45
4.3.2 Résolution à l'ordre un.....	47
4.4 Seuil de stabilité linéaire : condition critique.....	49
4.4.1 Reynolds critique: ($\mu < 1$).....	49
4.4.2 Reynolds critique: ($\mu > 1$).....	51
4.5 Stabilité marginale: loin du seuil	53
Conclusion générale	58
Références bibliographiques	Erreur ! Signet non défini.

Introduction générale

Dans la nature et dans l'industrie on trouve plusieurs illustrations d'écoulements des films liquides présentant une interface déformable dans laquelle se font les transferts de masse, de quantité de mouvement, ainsi que d'énergie. Ces transferts dépendent de la dynamique de l'interface. Les écoulements de ces films minces sont étudiés dans divers domaines tel que l'industrie pétrolière et gazière, les échangeurs thermiques, l'aérodynamique automobile, l'industrie agroalimentaire, le domaine environnemental, etc....

Ceci a engendré de nombreuses études théoriques, numériques et expérimentales sur la stabilité des films minces en fonction des paramètres physiques des liquides (viscosité, masse volumique, tension superficielle...), et de la géométrie de l'écoulement (plane, cylindrique).

Dans notre travail, on s'intéresse à l'étude de la stabilité de deux couches de fluides dans un canal cylindrique vertical. Notons que peu d'études sont consacrées au cas où les parois sont courbes. Tandis que le modèle d'un film liquide en écoulement le long d'un plan incliné a été largement étudié. La connaissance des conditions d'instabilités dans tels écoulements présente des intérêts tant du point de vue fondamentale que expérimentale et ce problème intéresse particulièrement le secteur industriel tels que (les échangeurs, l'évaporateur, papeterie, condensateur).

Pour mieux appréhender le fonctionnement de ces phénomènes, les chercheurs se sont penchés sur l'étude d'écoulements à travers des géométries connues. Ainsi notre cas d'étude suit le même objectif, c'est-à-dire comprendre et modéliser un phénomène existant à savoir l'étude d'une instabilité interfaciale. Dans le contexte de cette étude, on a subdivisé notre travail en quatre chapitres.

- Le premier chapitre est consacré à la formalisation et présentation de notre problème, suivi par les équations gouvernantes et les conditions aux limites associées, ainsi qu'une synthèse bibliographique des travaux effectués en rapport avec le problème posé.
- Le deuxième chapitre est dédié à l'écriture des équations obtenues dans le chapitre précédent sous forme adimensionnelle. Ceci a permis de faire ressortir les paramètres pertinents caractérisant le problème. Dans la suite, nous avons déterminé les profils de pression, et de la vitesse de l'écoulement de base (non perturbé).

- Le troisième chapitre est consacré à l'établissement des équations d'Orr-Sommerfeld, par la perturbation de l'état de base qui nous permet par la suite de poser les éléments d'analyse de stabilité linéaire par la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée à deux fluides.
- Et dans le dernier chapitre, nous exposons la solution analytique du problème c'est-à-dire un développement asymptotique qui nous permet de déterminer analytiquement les seuils d'instabilité.

Chapitre 1

Equations gouvernant le problème et étude bibliographique

1.1. Introduction

L'étude de la stabilité de l'interface entre deux couches de fluides en écoulement laminaire à fait l'objet de nombreux travaux. Les deux configurations les plus étudiées sont celles d'un écoulement entre deux plaques planes et celle d'un écoulement annulaire en conduite cylindrique. Dans ce chapitre, on présente les équations mathématiques qui gouvernent le problème de l'écoulement annulaire, ainsi que les principaux résultats obtenus en matière de stabilité de l'interface entre deux couches de fluides.

1.2. Formulation mathématiques du problème

1.2.1 Rappel des équations du mouvement

Dans notre étude, on s'intéresse à l'interface entre deux fluides visqueux notés fluide 1 et fluide 2 en écoulement annulaire. Le fluide 2 entraîne un fluide à cœur de forme cylindrique et de longueur infini ($-\infty < x < \infty$) où (ox) désigne la direction de l'écoulement.

Le fluide 1 non perturbé possède un rayon R_1 , une viscosité μ_1 et une densité ρ_1 , et le fluide 2 de viscosité μ_2 et de densité ρ_2 , adhère au cylindre de rayon R_2 . Les effets de la gravité g et de la tension superficielle sont pris en considération. Les deux fluides sont incompressibles et non miscibles (figure 1.1).

L'interface entre les deux fluides est notée par $s = h(x, r, t)$. On note $p_j(r, \theta, x)$ la pression dans chaque fluide. L'étude de l'évolution de cette interface est gouvernée par deux équations seulement : l'équation de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de la masse.

$$\rho_j(\partial_t \vec{u}_j + (\vec{u}_j \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_j) = \rho_j \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_j \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_j = 0 \quad (1.2)$$

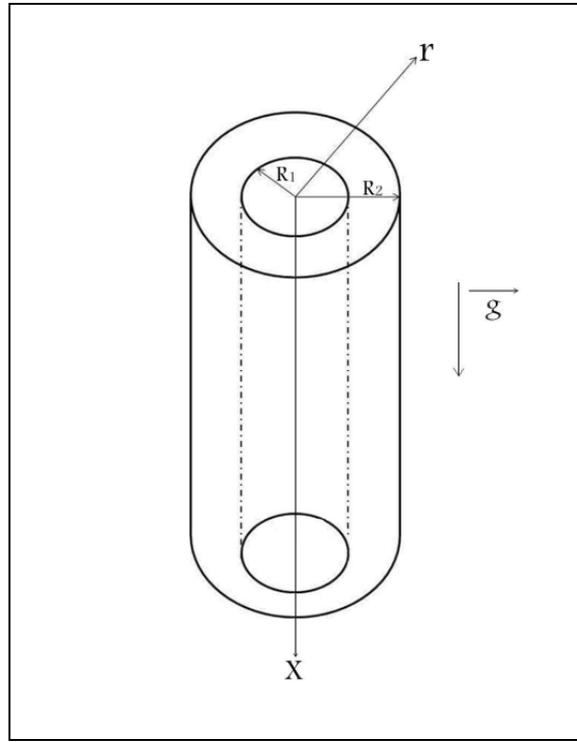


Figure 1.1 : Géométrie de l'écoulement annulaire.

L'équation (1.1) traduit la conservation de la quantité de mouvement et l'équation (1.2) représente la conservation de la masse et elle est appelée également équation de continuité. Les fluides considérés étant newtoniens, on introduit une loi de comportement afin de relier le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ aux inconnues \vec{u}_j et p_j qui sont respectivement la vitesse et la pression dans chaque fluide. On décompose le tenseur $\bar{\sigma}$ de la manière suivante :

$$\bar{\sigma}_j = -p_j \bar{I} + \bar{\tau}_j \quad (1.3)$$

Où $\bar{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses et \bar{I} est le tenseur identité. On se place dans un repère en coordonnées cylindriques (r, θ, x) dont l'origine est au centre du cylindre, associées aux composantes des vecteurs vitesses :

$\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$ pour le fluide 1, et $\vec{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ pour le fluide 2.

Le tenseur des contraintes visqueuses pour des fluides newtoniens est donné par la relation suivante:

$$\bar{\tau}_i = 2\mu_j \bar{D}_j \quad (1.4)$$

$$\text{Où } \bar{D}_j = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \vec{u}_1 + (\overline{\text{grad}} \vec{u}_1)^T \right)$$

On trouve le tenseur des contraintes visqueuses dans chaque couche en coordonnées cylindriques, sous la forme suivante :

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rx} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta x} \\ \tau_{xr} & \tau_{z\theta} & \tau_{xx} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\tau_{rr} = 2\mu v_r$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} v_\theta + \frac{u}{r} \right)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu u_x$$

$$\tau_{rx} = \tau_{xr} = \mu(u_r + v_x)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \left(r \partial_r \left(\frac{w}{r} \right) + \frac{1}{r} u_\theta \right)$$

$$\tau_{x\theta} = \tau_{\theta x} = \mu \left(w_x + \frac{1}{r} u_\theta \right)$$

La variation du tenseur des contraintes visqueuses et des taux de formations est linéaire et vérifie la relation (1.4). L'huile l'eau et l'air sont des exemples de fluide newtoniens. Nous avons représenté dans le tableau (1.1) quelques valeurs de viscosité dynamique de ces fluides. Notons que beaucoup de fluides ne vérifient pas la relation (1.4), leurs contraintes et taux de déformations sont sous forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Ce qui rend encore leurs études plus compliquées.

Fluide	$\mu(p_{a.s})$
Eau (0°C)	$1.787. 10^{-3}$
Eau (20°C)	$1.002. 10^{-3}$
Eau (100°C)	$0.2818. 10^{-3}$
Air	$1.85. 10^{-5}$
Gaz brut (15°C)	$1.275. 10^{-2}$
Pétrole brut(20°C)	$0.65. 10^{-3}$

Tableau 1.1 : viscosité dynamique des quelques fluides newtoniens

Nous avons également donné un tableau représentant les tensions superficielles de quelques fluides usuels.

Fluide	Température (°C)	Tension superficielle $\sigma[N.m^{-1}]$
Pétrole/eau	20	$30. 10^{-3}$
Eau/Huile	20	$20. 10^{-3}$
Huile/Air	20	$32. 10^{-3}$
(Eau+Surfactant pulmonaire) /Eau	20	$73. 10^{-3}$

Tableau 1.2 : Tension superficielle de quelques fluides à la température de 20 °C

Les équations (1.1) et (1.2) projetées suivant les axes en coordonnées cylindriques sont données par :

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r v_1) + \frac{1}{r} \partial_\theta w_1 + \partial_x u_1 = 0 \quad (1.5)$$

Equations de conservation de la quantité de mouvement :

- Equation de conservation de la quantité de mouvement radiale

$$\partial_t v_1 + v_1 \partial_r v_1 + \frac{1}{r} w_1 \partial_\theta v_1 + u_1 \partial_x v_1 = -\frac{1}{\rho_1} \partial_r p_1 + \frac{1}{\rho_1} \mu_1 \left(\nabla^2 v_1 - \frac{v_1}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta v_1 \right) \quad (1.6)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement axiale

$$\partial_t u_1 + v_1 \partial_r u_1 + \frac{1}{r} w_1 \partial_\theta u_1 + u_1 \partial_x u_1 = -\frac{1}{\rho_1} \partial_x p_1 + g + \frac{1}{\rho_1} \mu_1 (\nabla^2 u_1) \quad (1.7)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement azimutale

$$\begin{aligned} \partial_t w_1 + v_1 \partial_r w_1 + \frac{1}{r} w_1 \partial_\theta w_1 + u_1 \partial_x w_1 + \frac{1}{r} v_1 w_1 \\ = \frac{1}{\rho_1 r} \partial_\theta p_1 + \frac{1}{\rho_1} \mu_1 \left(\nabla^2 w_1 + \frac{2}{r^2} \partial_\theta v_1 + \frac{1}{r^2} u_1 \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles d'ordre deux en espace pour les fluides visqueux. A ces équations il faut ajouter les conditions aux limites.

1.2.2 Conditions aux limites

Condition d'adhérence à la paroi du cylindre

$$u_2 = 0 \text{ en } r = R_2$$

Conditions à l'interface fluide-fluide

Les conditions à l'interface sont de deux types : une condition sur les contraintes ou conditions dynamiques et une condition cinématique qui traduit l'imperméabilité de

l'interface. On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers cette interface ni de gradient de concentration.

On définit les vecteurs unitaires tangents \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 et \mathbf{n} la normale extérieure à l'interface leurs coordonnées s'expriment par :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}\right)h_\theta^2 + h_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{r}h_\theta \\ -h_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} \begin{pmatrix} h_x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}h_\theta\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{r}h_\theta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \partial_r \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \vec{e}_\theta + \partial_z \vec{e}_z$$

- *Condition cinématique*

La vitesse normale à l'interface sera la même de part et d'autre de l'interface.

D'où $s(x, r, t) = 0 \rightarrow \frac{DS}{Dt} = 0$

Avec $\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\partial_r + \frac{1}{r}v\partial_\theta + \partial_x$ est la dérivée matérielle.

Alors $v_1 = h_t + \frac{1}{r}w_1h_\theta + u_1h_x$ (1.9)

Et $v_2 = h_t + \frac{1}{r}w_2h_\theta + u_2h_x$ (1.10)

Cette condition traduit l'absence de transfert de masse à l'interface.

Condition sur la continuité des vitesses

Le vecteur vitesse est continue à la traversée de l'interface, cette condition est imposée par la viscosité de l'écoulement.

$$u_1 = u_2$$

Condition sur la continuité des contraintes tangentielles à l'interface :

On suppose une interface entre deux fluides newtoniens possédant une tension superficielle σ constante.

Les conditions de continuité des contraintes tangentielles dont les forces proviennent des efforts de cisaillement dus à la viscosité à l'interface s'écrivent :

$$t_1 \cdot \sigma_1 \cdot n - t_1 \cdot \sigma_1 \cdot n = 0$$

$$t_2 \cdot \sigma_2 \cdot n - t_2 \cdot \sigma_2 \cdot n = 0$$

1.3 Ecoulement de base

Afin de calculer la solution de base de l'écoulement annulaire axisymétrique, on va considérer les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est stationnaire et uniforme $h(x, t) = R_1$.
- la vitesse de l'écoulement se réduit à la composante axiale $u(r)$ qui est fonction uniquement de la composante radiale r . Un régime permanent uniforme est établi où il y a équilibre entre forces visqueuses et force motrice qui est représentée par la gravité. Dans ces conditions les équations de Navier-Stokes prennent la même forme que les équations ((1.4)-(1.6)) avec ($v = w = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$). Ces équations admettent une solution simple.

Fluide 1

$$g + \mu_1 \rho_1 (u_{1rrr} + \frac{1}{r} u_{1r}) = 0 \quad (1.11)$$

Fluide 2

$$g + \mu_2 \rho_2 (u_{2rrr} + \frac{1}{r} u_{2r}) = 0 \quad (1.12)$$

Par intégration des équations ((1.9), (1.10)) on obtient les solutions suivantes :

$$0 \leq r \leq R_1 \quad U_1(r) = -\frac{\rho_1}{4\mu_1} g r^2 + C_{11} \ln r + C_{12} \quad (1.13)$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 \quad U_2(r) = -\frac{\rho_2}{\mu_2} g r + C_{21} \ln r + C_{22} \quad (1.14)$$

L'utilisation des conditions aux limites nous permettent de déterminer les constantes C_{11} , C_{12} , C_{21} et C_{22}

On suppose la vitesse est définie en $\mathbf{0}$, on prend alors $u_1(0)$ finie ce qui impose de prendre $C_{11} = \mathbf{0}$

La vitesse est nulle à la paroi c'est-à-dire en $r=R_2$: $u_2(R_2) = 0$.

D'où

$$-\frac{\rho_2}{\mu_2} g r + C_{21} \ln r + C_{22} = 0 \quad (1.15)$$

La continuité des vitesses en $r=R_1$ nous permet d'écrire la relation suivante :

$$-\frac{\rho_1}{4\mu_1} g R_1^2 + C_{12} = -\frac{\rho_2 R_2^2}{\mu_2 4} g + C_{21} \ln R_1 + C_{22} \quad (1.16)$$

La continuité des contraintes tangentielles permet d'écrire

$$-\rho_1 \frac{R_1^2}{2} g = -\rho_1 \frac{R_1^2}{2} g + \mu_1 C_{21} \quad (1.17)$$

À l'aide des conditions aux limites on peut déterminer les constantes d'intégration :

$$C_{21} = \frac{1}{\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) g \frac{R_1^2}{2}$$

$$C_{22} = \frac{\rho_2}{\mu_2} g \frac{R_2^2}{4} - \frac{1}{\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) g \frac{R_1^2}{2} \ln R_2$$

$$C_{12} = \frac{\rho_2}{4\mu_2} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{1}{\mu_2} (\rho_2 - \rho_1) g \frac{R_1^2}{2} \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\rho_1}{\mu_1}$$

D'où

$$U_1(r) = \left(\frac{-1}{4} \frac{g}{v_1 \mu} \right) \{ (1 + 2R_1^2(\rho - 1) \ln r) + (-\mu R_1^2 + \rho R_1^2 - \rho R_2^2) \} - \frac{gr^2}{4v_1} \quad (1.18)$$

$$U_2(r) = \left(\frac{-1}{4} \frac{g}{v_1 \mu} \right) \{ (1 + 2R_1^2(\rho - 1) \ln r) + (2R_1^2(\rho - 1) \ln R_2 - \rho R_2^2) \} \quad (1.19)$$

En $r = 0$:

$$U_1(r = 0) = \left(\frac{-1}{4} \frac{g}{v_1 \mu} \right) \{ (1 + 2R_1^2(\rho - 1) \ln r) + (-\mu R_1^2 + \rho R_1^2 - \rho R_2^2) \} \quad (1.20)$$

Ou $u_1(r = 0)$ est une vitesse caractéristique

Cette solution met en évidence deux échelles caractéristiques du problème étudié qui sont l'épaisseur R_1 du fluide 1 et la vitesse $u_1(0)$ du fluide 1. On obtient :

$$U_1(r^*) = \frac{u_1(r)}{u_1(0)} = 1 - \alpha_1 r^{*2} \quad (1.21)$$

$$U_2(r^*) = \frac{u_2(r)}{u_1(0)} = \alpha_2 r^{*2} + \beta_1 \ln r^* + \gamma_1 \quad (1.22)$$

Avec :

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{[\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho)\ln d]}$$

$$\alpha_2 = \frac{-\rho}{[\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho)\ln d]}$$

$$\beta_1 = \frac{-2(1-\rho)}{[\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho)\ln d]}$$

$$\gamma_1 = \frac{\rho d^2 + 2(1-\rho)\ln d}{[\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho)\ln d]}$$

On pose :

$$r^* = \frac{r}{R_1}, \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{ et } d = \frac{R_2}{R_1}$$

On conclue que L'écoulement de base dépend des rapports des viscosités μ , des densités ρ et des épaisseurs d des deux couches de fluids. La figure (2.1) montre les profils de vitesse de l'état de base pour différents rapports des épaisseurs quand un

fluide moins visqueux ($\mu < 1$) ou un fluide plus visqueux ($\mu > 1$) est tout près de la paroi.

1.4 Etude bibliographique

Les études de stabilité de l'interface entre deux fluides visqueux quelconques ont été menées pour un écoulement de Poiseuille, de Couette plan ou axisymétrique. La différence des propriétés rhéologiques entre les couches de fluides sont à l'origine d'instabilités qui se manifestent par l'apparition d'ondes. Ces études supposent que l'écoulement est soumis à des perturbations infinitésimales qui génèrent des ondes à l'interface qui vont se propager le long de l'écoulement.

Lorsque les effets de la tension superficielle sont plus importants que les effets visqueux, les instabilités sont qualifiées d'instabilités capillaires. Nous parlons d'instabilités visqueuses lorsque ces instabilités sont dues à une différence de viscosité.

1.4.1 Yih (1967)

Yih [13] a étudié le cas de deux fluides stratifiés en viscosité confinés entre deux parois planes à petits nombres de Reynolds dans les cas d'écoulements de Poiseuille et de Couette. Son étude est basée sur une approche asymptotique aux grandes longueurs d'ondes. Pour deux fluides de densité égale, il montre que, dans le cas où la couche inférieure est plus visqueuse que la couche supérieure, cette stratification en viscosité a un effet déstabilisant sur l'écoulement. Il identifie des instabilités pour certaines combinaisons de rapports de viscosité et épaisseurs de couches, avec des taux de croissance proportionnels au nombre de Reynolds. Il en déduit donc que la limite de stabilité neutre est atteinte pour $R_e \rightarrow 0$ et montre ainsi la nécessité de la présence d'inertie pour déclencher des instabilités.

Yih [13] le premier en 1967 a proposé une étude sur la stabilité de l'écoulement bicouche de deux fluides newtoniens de viscosités différentes, pour des écoulements de Couette et de Poiseuille plans. Son analyse consiste en une étude asymptotique aux **grandes longueurs d'ondes**. Il montre qu'en fonction des rapports des épaisseurs des couches et du rapport des viscosités, la différence de viscosité peut être la cause d'instabilité. Aussi faible que soit le nombre de Reynolds, l'écoulement de Couette sera instable si le fluide le plus visqueux est majoritaire. Il l'est également lorsque le fluide le plus visqueux est minoritaire, mais qu'il est moins dense que le

fluide le moins visqueux. Dans les deux cas on tend vers une interface neutre (ni stable ni instable) lorsque le rapport des viscosités tend vers 1.

Yih (1967) montre que dans le cas d'épaisseurs égales et de densités égales, l'écoulement plan de Poiseuille est toujours instable quel que soit le nombre de Reynolds. Ces instabilités ne sont donc pas la conséquence d'un passage de régime laminaire à la turbulence de l'un des deux fluides. De plus, comme Yih (1967) suppose une tension interfaciale nulle entre les deux fluides, il ne s'agit pas non plus d'instabilités capillaires. Ces résultats sont représentés sur la Figure. 1.2.

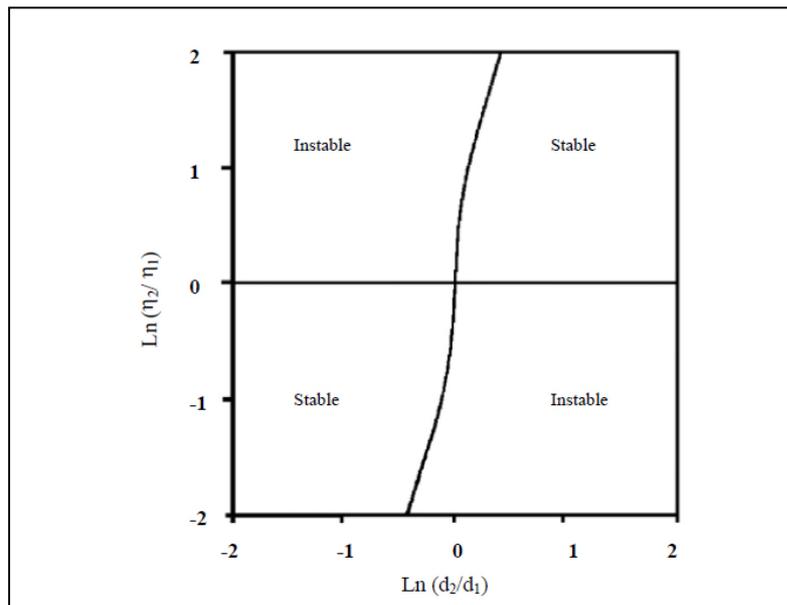


Figure (1.2) : Carte de stabilité en fonction du rapport des viscosités et du rapport des épaisseurs montrant des régions stables et instables : Résultats de Yih (1967). η étant la viscosité dynamique.

1.4.2 Hickox (1970)

Hickox [3] a examiné la stabilité de l'interface dans le cas d'écoulements stratifiés axisymétriques, concentriques. Dans cette étude Seule la configuration où le fluide à cœur est moins visqueux que le fluide pariétal $\mu > 1$ a été prise en compte. Il a traité le problème aux perturbations aux ondes longues, en négligeant la tension superficielle. L'instabilité mise en évidence par Hickox correspond donc à celle donnée par Yih [13]. Comme dans l'étude de Yih [13], c'est la différence de viscosité qui contrôle la stabilité de l'interface.

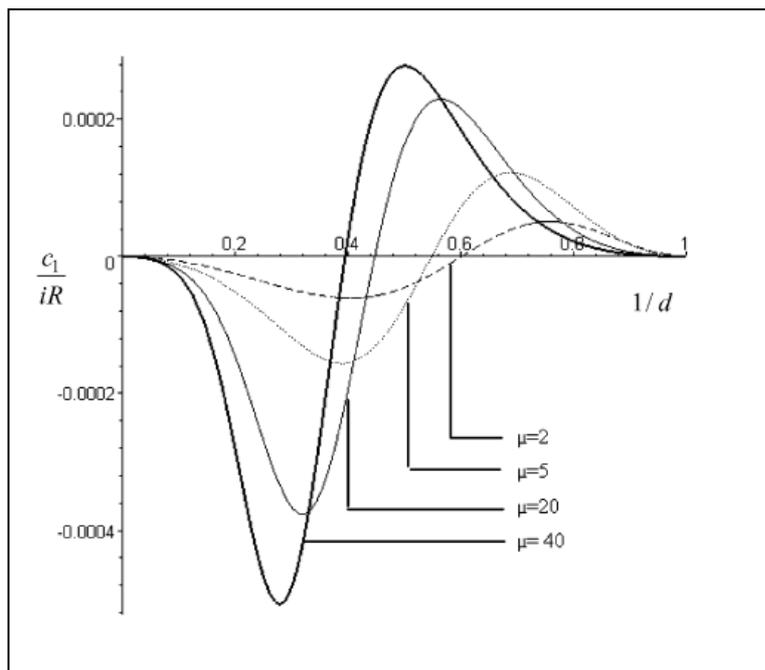


Figure (1.3) : Courbe c_1/iR fonction de l'épaisseur du fluide 1 $h_1 = \frac{1}{d}$ pour différentes valeurs du rapport des viscosités μ . Résultats obtenus par Hickox [3] et [8] en l'absence de la tension superficielle. Configuration où le fluide à cœur est moins visqueux ($\mu > 1$).

1.4.3 Preziosi (1989)

Preziosi et al [9] se sont intéressés à l'écoulement annulaire de deux fluides visqueux newtoniens. Dans leur étude numérique basée sur une méthode spectrale, ils déterminent un taux d'amplification des perturbations sinusoïdales. Le code de calcul développé fonctionne bien pour les perturbations axisymétriques et non axisymétriques de forme $\exp[in\theta + ik(x - ct)]$. Ils montrent que pour tous les nombres d'ondes k l'écoulement le plus instable est axisymétrique (figure 1.2). Les termes k , c et t désignent respectivement le nombre d'onde, la vitesse complexe de l'onde et le temps.

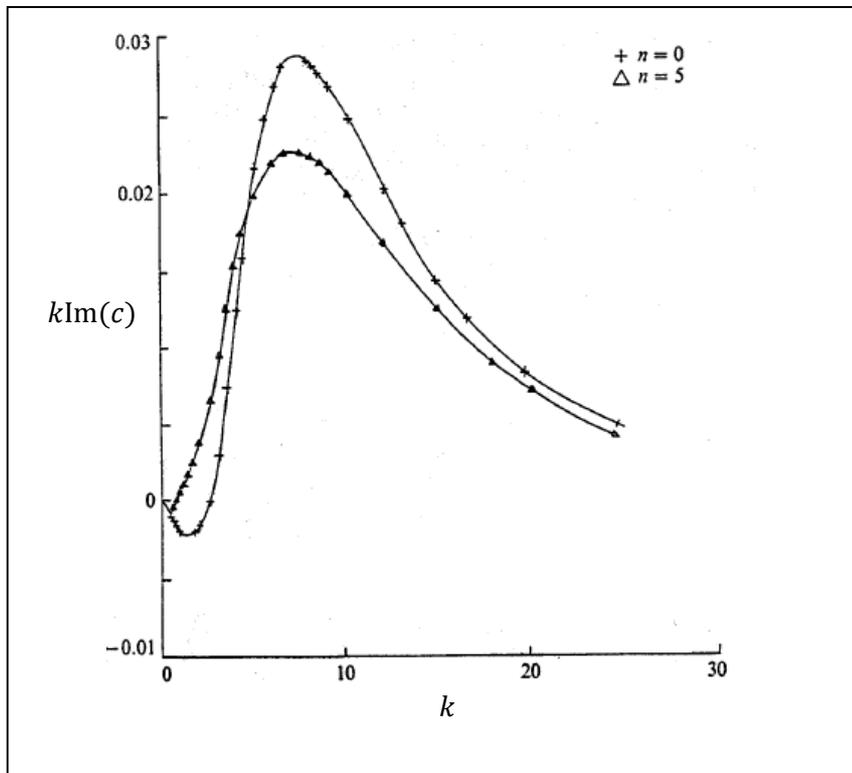
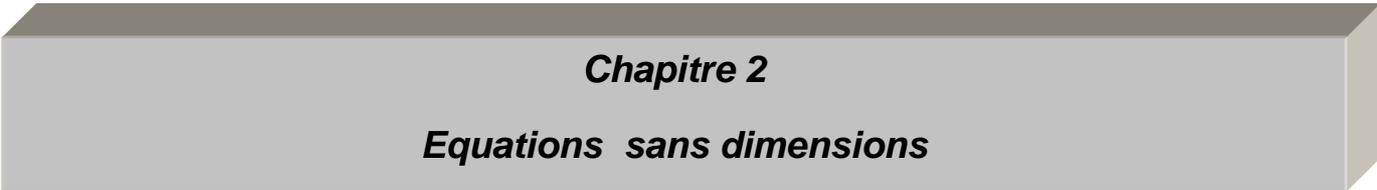


Figure (1.3) : Taux d'amplification en fonction du nombre d'onde correspondant aux modes axisymétriques et non axisymétriques : Résultats de Preziosi et al [9].

1.4.4 Chen et Joseph (1991)

Chen & Joseph [2] ont étudié la stabilité de l'interface entre deux fluides newtoniens en écoulement coaxial, pour n'importe quel rapport des épaisseurs et pour n'importe quel rapport des viscosités des fluides. Ils donnent pour la première fois l'expression analytique exacte du taux de croissance d'une onde interfaciale de **grande longueur d'onde**. Les effets de la tension superficielle sont pris en considération dans leur calcul. En plus de l'instabilité qui a été mise en évidence par yih [13] et Hickox [3], ils mettent en évidence une instabilité capillaire, qui augmente lorsque la tension superficielle augmente.



Chapitre 2

Equations sans dimensions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude adimensionnelle de manière générale qui nous permet de déterminer les ordres de grandeur respectifs de chacun des termes des équations développées au chapitre précédent, dans le but de ne conserver que les termes les plus importants dans le problème considéré. Notons que chaque auteur établit son propre adimensionnement ce qui rend difficile l'étude comparative des résultats obtenus.

2.2 Formes adimensionnelles des équations 2D

La mise sous forme adimensionnelle des équations est obtenue en prenant en considération la géométrie du problème et les paramètres du fluide interne. Les grandeurs de référence sont $u(0)$ la vitesse considérée finie sur l'axe du cylindre et L une longueur caractéristique suivant la direction de l'écoulement. Pour prendre en considération l'hypothèse de grande longueur d'onde, on introduit le paramètre $\varepsilon = \frac{R_1}{L} \ll 1$.

Par la suite, nous allons travailler avec des grandeurs sans dimension, les équations du paragraphe précédent seront exprimées à l'aide de ces variables sans dimension. Cette opération est importante. Elle permet d'abord de mettre en évidence les nombres sans dimension qui comparent les effets physiques entre eux. Ensuite la mise sous forme sans dimension des équations permet de simplifier celles-ci, en éliminant les petits termes.

2.3 Ecoulement axisymétrique

Pour rendre notre problème bidimensionnel on s'intéresse à un écoulement axisymétrique où l'épaisseur des fluides reste constant autour de cylindre, cela nous permet de prendre les dérivées locales par rapport à la variable θ nulles.

$$\frac{\partial u_j}{\partial \theta} = \frac{\partial v_j}{\partial \theta} = \frac{\partial w_j}{\partial \theta} = 0$$

et la composante azimutale le vecteur vitesse dans chaque fluide $w_j = 0$.

Les équations adimensionnées du problème s'écrivent donc :

Fluide 1

Dans le domaine $0 < r < h(x, t)$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r v_1) + \partial_x u_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial_t v_1 + v_1 \partial_r v_1 + u_1 \partial_x v_1 = -\frac{1}{\rho_1} \partial_r p_1 + \frac{\mu_1}{\rho_1} (\nabla^2 v_1 - \frac{v_1}{r^2}) \quad (2.2)$$

$$\partial_t u_1 + v_1 \partial_r u_1 + u_1 \partial_x u_1 = -\frac{1}{\rho_1} \partial_x p_1 + g + \frac{\mu_1}{\rho_1} (\nabla^2 u_1) \quad (2.3)$$

Fluide 2

Dans le domaine $h(x, t) < r < R_2$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r v_2) + \partial_x u_2 = 0 \quad (2.4)$$

$$\partial_t v_2 + v_2 \partial_r v_2 + u_2 \partial_x v_2 = -\frac{1}{\rho_2} \partial_r p_2 + \frac{\mu_2}{\rho_2} (\nabla^2 v_2 - \frac{v_2}{r^2}) \quad (2.5)$$

$$\partial_t u_2 + v_2 \partial_r u_2 + u_2 \partial_x u_2 = -\frac{1}{\rho_2} \partial_x p_2 + g + \frac{\mu_2}{\rho_2} (\nabla^2 u_2) \quad (2.6)$$

Conditions aux limites en zéro et à la paroi : $r = R_2$

$$v_2(r = R_2, x, t) = u_2(r = R_2, x, t) = 0 \quad (2.7)$$

$$v_1(r = 0, x, t) = u_1(r = 0, x, t) \quad \text{vitesse finie} \quad (2.8)$$

Conditions aux limites à l'interface : $r = h(x, t)$

-Continuité des vitesses

$$u_1 = u_2 \quad (2.9)$$

$$v_1 = v_2 \quad (2.10)$$

Condition normale

$$p_2 - p_1 + \frac{2}{1+h_x^2} ((\mu_1 v_{1r} - \mu_2 v_{2r}) + 2h_x^2 (\mu_1 u_{1x} - \mu_2 v_{2x}) + 2\mu_1 (v_{1x} + u_{1r})h_x - 2\mu_2 (v_{2x} + u_{2r})) = \sigma K \quad \text{avec } K = \text{div} \vec{n} \quad (2.11)$$

Condition tangentielle

$$[2\mu_1 h_x (v_{1r} - u_{1x}) + \mu_1 (v_{1x} + u_{1r})(1 - h_x^2)] - [2\mu_2 h_x (v_{2r} - u_{2x}) + \mu_2 (v_{2x} + u_{2r})(1 - h_x^2)] = 0 \quad (2.12)$$

Condition cinématique

$$v_j = h_t + u_j h_t \quad (2.13)$$

Où $j = 1, 2$.

L'écoulement de base calculé dans la partie précédente, nous permet de mettre en évidence les échelles caractéristiques du problème. Ces grandeurs sont données par l'épaisseur R_1 et la densité ρ_1 du fluide 1 ainsi que la composante de la vitesse axiale le long de l'axe de symétrie $u_1(0)$:

$$U_1(0) = \frac{\rho_1 g R_1^2}{4\mu_2} [\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho)\ln d] \quad (2.14)$$

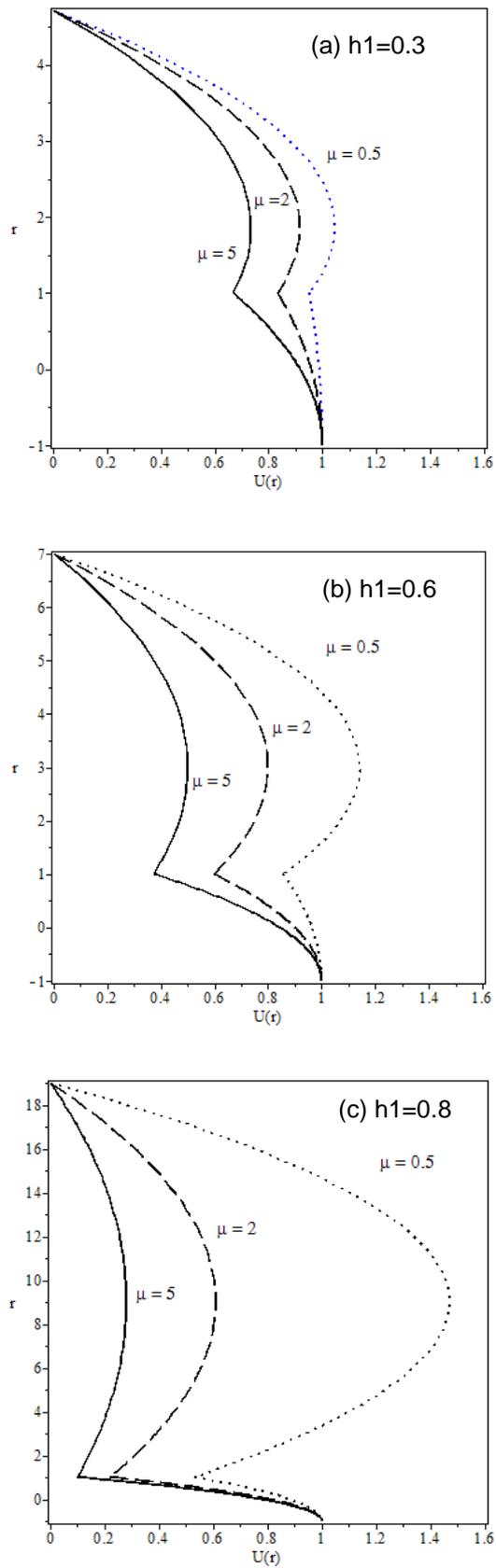


Figure 2.1 : Influence du rapport des viscosités μ et du rapport des épaisseurs ($h_1 = 1/d$) Sur l'écoulement de base (a) $h_1 = 0.3$, (b) $h_1 = 0.5$, (c) $h_1 = 0.8$.

Les profils de vitesses sont fortement influencés par le rapport des épaisseurs et le rapport des viscosités des couches de fluides. Pour tout rapport des épaisseurs des couches de fluides une diminution des rapports des viscosités correspond à une augmentation de la vitesse dans la couche pariétale. Une analyse dimensionnelle sera effectuée en choisissant les grandeurs adéquates du problème. Pour cela on fait le choix suivant :

- $x_{ref} = L$
- $r_{ref} = R_1$
- $U_{ref} = U(0)$
- $t_{ref} = \frac{L}{U(0)}$
- $V_{ref} = \frac{R_1 U(0)}{L}$
- $p_{ref} = \mu \frac{U(0)}{R_1} L$

Où L représente une longueur d'onde caractéristique suivant la direction de l'écoulement, U_N représente une vitesse moyenne et ε est appelé paramètre de l'onde.

Après substitution et quelques opérations simples, on trouve les équations adimensionnelles. Dans ce qui suit, afin de ne pas encombrer l'écriture des équations, nous adoptons la même notation pour les grandeurs avec dimension et celles sans dimension.

Les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites deviennent :

- Le fluide 1 : $0 < R < h$

$$R_e \varepsilon (u_{1t} + u_1(u_{1x}) + v_1(u_{1r})) + p_{1x} - \varepsilon^2 (u_{1xx}) - (u_{1rr}) - \frac{1}{r} (u_{1r}) - G = 0 \quad (2.15)$$

$$R_e \varepsilon^3 (v_{1t} + u_1(v_{1x}) + v_1(v_{1r})) + p_{1r} + G \varepsilon B - \varepsilon^4 (v_{1xx}) - \varepsilon^2 (v_{1rr}) + \frac{1}{r} (v_{1r}) - \frac{v_1}{r^2} = 0 \quad (2.16)$$

- Le fluide 2 : $h < R < d$

$$\rho R_e \varepsilon (u_{2t} + u_2(u_{2x}) + v_2(u_{2r})) - \varepsilon^2 \mu (u_{2xx}) - \mu \left((u_{2rr}) - \frac{1}{r} (u_{2r}) \right) - \rho G + p_{2x} = 0 \quad (2.17)$$

$$\rho R_e \varepsilon^3 (v_{12t} + u_2(v_{2x}) + v_2(v_{2r})) + p_{2r} + G\rho\varepsilon B - \varepsilon^4 \mu(v_{2xx}) - \varepsilon^2 \mu(v_{2rr}) + \frac{1}{r}(v_{2r}) - \frac{v_2}{r^2} = 0 \quad (2.18)$$

Ou :

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad d = \frac{R_2}{R_1}$$

$G = \frac{gR_1 R_e}{U_1(0)}$, coefficient mesurant les effets de la gravité.

-condition d'adhérence à la paroi

$$U_1(d) = U_2(d) = 0 \quad \text{En } R=d \quad (2.19)$$

-Vitesse finie en $R = 0$ pour le fluide 1

-La condition de saut cinématique à l'interface 2D est la suivante

$$v = h_t + U h_x \quad (2.20)$$

-Conditions aux limites à l'interface fluide-fluide en $R = h(x, t)$

-Continuité des vitesses

$$U_1 = U_2 \quad (2.21)$$

$$v_1 = v_2 \quad (2.22)$$

-Condition normale

$$p_2 - p_1 = \frac{2\varepsilon}{R_e} (\mu v_{2r} - v_{1r}) - \frac{2\varepsilon h_x}{R_e} (\mu U_{2r} - U_{1r}) + \varepsilon w_e \left\{ \frac{1}{h} - \frac{\varepsilon^2 h_x^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{xx} \right\} \quad (2.23)$$

-Condition tangentielle

$$U_{1r} - \mu U_{2r} = \{ 2h_x (U_{1x} - \mu U_{2x}) - 2h_x (v_{1r} - \mu v_{2r}) - (v_{1x} - \mu v_{2x}) \} \quad (2.24)$$

2.4 Nombres adimensionnés

Les paramètres sans dimension qui apparaissent dans les équations précédentes sont :

- Le nombre de Reynolds , qui mesure les forces d'inertie par rapport à la viscosité.

$$R_e = \frac{\rho_1 R_1 U_1(0)}{\mu_1}$$

- Le nombre de Weber qui compare la tension superficielle et la contrainte normale à l'interface.

$$w_e = \frac{\sigma}{\rho h_N U_N^2} = \frac{J}{Re d^2}$$

-La stratification de la viscosité, de la masse volumique et le rapport des épaisseurs des couches fluides sont respectivement :

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \text{ et } d = \frac{R_2}{R_1}$$

Chapitre 3

Equations linéarisées : Equations d'Orr-Sommerfeld

3.1 Introduction

Dans la situation de l'écoulement d'un film mince visqueux qui est considéré comme un écoulement de faible épaisseur, les effets de la viscosité jouent un rôle prédominant dans la dynamique de l'écoulement. On peut donc négliger les effets inertiels non linéaires devant les effets visqueux. Au cours de ce chapitre on va effectuer les étapes suivantes :

La première étape consiste à étudier la stabilité linéaire, c'est-à-dire l'évolution d'une perturbation selon les équations linéarisées autour de l'état de base. en suite on va simplifier les équations du mouvement qui rappellent le sont non linéaires et contiennent six grandeurs inconnues qui sont les champs de vitesse et les champs de pression dans chaque couche de fluide. Et la dernière étape consiste à donner les équations linéaires permettant d'aboutir aux équations d'Orr-Sommerfeld.

3.2 Equations Linéarisées

Nous appliquons dans ce chapitre, les développements introduits par Yih [13] pour un écoulement de Poiseuille plan deux couches de fluide. Dans notre cas on s'intéresse à la géométrie cylindrique qui prend en considération les effets de la courbure et de la tension superficielle.

Dans le calcul de l'écoulement de base au chapitre précédent, nous avons supposé que l'interface est indéformable (écoulement uniforme). Nous introduisons ici des perturbations de cet écoulement de base où apparaissent de petites variations de l'interface.

On pose la décomposition suivante :

$$u_j = U_j(r) + \delta \tilde{u}_j \quad (3.1)$$

$$v_j = 0 + \delta \tilde{v}_j \quad (3.2)$$

$$p_j = P + \delta \tilde{p}_j \quad (3.3)$$

$$h = 1 + \delta \tilde{h}_j \quad (3.4)$$

L'équation de conservation de la masse pour un écoulement perturbé devient :

$$\frac{\delta \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{\delta \bar{v}_j}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

Les équations de Navier-Stockes :

Fluide 1

Suivant $x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_e \varepsilon [U_1(r) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{11}(x, r, t) \right) + v_{11}(x, r, t) \left(\frac{d}{dr} U_1(r) + \frac{\partial}{\partial t} u_{11}(x, r, t) \right)] + \frac{\partial}{\partial x} p_{11}(x, r, t) \\ - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{11}(x, r, t) \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_{11}(x, r, t) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_{11}(x, r, t)}{r} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Suivant $r \Rightarrow$

$$\begin{aligned} R_e \varepsilon^3 \left[U_1(r) \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{11}(x, r, t) \right) + \frac{\partial}{\partial t} v_{11}(x, r, t) \right] + \frac{\partial}{\partial r} p_{11}(x, r, t) - \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{11}(x, r, t) \right) \\ - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} v_{11}(x, r, t) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_{11}(x, r, t)}{r} - \frac{v_{11}(x, r, t)}{r^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Fluide 2

Suivant $x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \rho R_e \varepsilon [U_2(r) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{22}(x, r, t) \right) + v_{22}(x, r, t) \left(\frac{d}{dr} U_2(r) + \frac{\partial}{\partial t} u_{22}(x, r, t) \right)] \\ - \varepsilon^2 \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{22}(x, r, t) \right) - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_{22}(x, r, t) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_{22}(x, r, t)}{r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} p_{22}(x, r, t) = 0 \end{aligned}$$

(3.8)

Suivant $r \Rightarrow$

$$R_e \varepsilon^3 \left[U_2(r) \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{22}(x, r, t) \right) + \frac{\partial}{\partial t} v_{22}(x, r, t) \right] + \frac{\partial}{\partial r} p_{22}(x, r, t) - \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{22}(x, r, t) \right) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} v_{22}(x, r, t) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_{22}(x, r, t)}{r} - \frac{v_{22}(x, r, t)}{r^2} \right) = 0 \quad (3.9)$$

Notons que $u_{11} = \tilde{u}_1, v_{11} = \tilde{v}_1, p_{11} = \tilde{p}_1$ sont les perturbations relatives à la couche du fluide 1 et $u_{22} = \tilde{u}_2, v_{22} = \tilde{v}_2, p_{22} = \tilde{p}_2$ celles relatives à la couche du fluide 2.

Les conditions aux limites linéarisées sont :

- Condition d'adhérence en $r = \frac{R_2}{R_1} = d$

$$\tilde{u}_2 = 0 \quad (3.10)$$

$$\tilde{v}_2 = 0 \quad (3.11)$$

- La condition cinématique reste inchangée après dimensionnement

$$\tilde{v}(1) = \tilde{h}_t + \tilde{u}(1)\tilde{h}_x \quad (3.12)$$

- Condition sur la contrainte tangentielle adimensionnée

$$(\tilde{h}U_1'' + \tilde{u}_{1r} + \varepsilon^2 \tilde{v}_{1x}) = \mu(\tilde{h}U_2'' + \tilde{u}_{2r} + \tilde{v}_{2x}) \quad (3.13)$$

- La contrainte normale évalué en $r = 1$

$$\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 - 2\varepsilon^2(\tilde{v}_{1r} + \mu\tilde{v}_{2r}) = -\varepsilon w_e R_e (\varepsilon^2 \tilde{h}_{xx} + \tilde{h}) \quad (3.14)$$

- L'évaluation de la contrainte normale en $r = 1 + \delta\tilde{h}(x, t)$

$$\delta\tilde{p}_1 - \delta\tilde{p}_2 + \delta\sigma \left(h_{xx} + \frac{h}{R_1^2} \right) = 2\mu_1 \delta\tilde{v}_{1r} - 2\mu_2 \delta\tilde{v}_{2r} - \{2\mu_1 \delta\tilde{h}_x \tilde{u}_{1r}(1) + 2\mu_2 \delta\tilde{h}_x \tilde{u}_{2r}(1)\} \quad (3.15)$$

⇒ En $r = 1$

$$2\delta\tilde{h}_x (\mu_1(1)\tilde{u}_{1r}(1) - \mu_2\tilde{u}_{2r}(1)) = 0 \quad (3.16)$$

Rappelons que pour l'écoulement de base on a :

$$(\mu_1(1)\tilde{u}_{1r}(1) - \mu_2\tilde{u}_{2r}(1)) = 0$$

Finalement la contrainte normale évaluée en $r = 1$:

$$\delta\tilde{p}_1 - \delta\tilde{p}_2 + \delta\sigma \left(h_{xx} + \frac{h}{R_1^2} \right) = 2\mu_1\delta\tilde{v}_{1r} - 2\mu_2\delta\tilde{v}_{2r} \quad (3.17)$$

Qu'on peut écrire :

$$\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 + 2\mu_1\tilde{v}_{1r} + 2\mu_2\tilde{v}_{2r} = -\sigma \left(h_{xx} + \frac{h}{R_1^2} \right) \quad (3.18)$$

3.3 Equations d'Orr-Sommerfeld

La linéarisation des équations des deux fluides suivant les deux directions ainsi que les conditions aux limites peuvent être écrites à l'aide des fonctions de courant définies pour chaque fluide qu'on note ψ_1 et ψ_2 . L'écoulement est bidimensionnel et incompressible, ce qui nous autorise à écrire les perturbations des vitesses en termes de fonctions de courant.

$$\tilde{u}_j = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \quad (3.19)$$

$$\tilde{v}_j = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \quad (3.20)$$

Avec $\psi(x, r, t)$

En suit, on introduit les solutions de ce problème sous forme de modes normaux, en introduisant la transformée de Fourier des perturbations sous forme :

$$\begin{cases} \psi_j = \varphi_j e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{p}_j = \pi_j e^{ik(x-ct)} \\ \tilde{h} = H_0 e^{ik(x-ct)} \end{cases}$$

✚ L'écoulement de base perturbé:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \pi_1(x, r, t) - U_1''(r) - \frac{u_1'(r)}{r} - G + \frac{\partial}{\partial r} \pi_1(x, r, t) - \mu \left(U_2'' + \right. \\ \left. \frac{U_2''(r)}{r} \right) - \rho G + \frac{\partial}{\partial x} \pi_2(x, r, t) + \frac{\partial}{\partial r} \pi_2(x, r, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

On calcul H_0 à partir de la condition cinématique :

$$\tilde{v}(1) = \tilde{h}_t + \tilde{u}(1)\tilde{h}_x \quad (3.22)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \tilde{u}(1) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \quad (3.23)$$

$$-\frac{ik}{r}\varphi(r)e^{ik(x-ct)} = [H_0(-ikc) + U_1(1)H_0ik]e^{ik(x-ct)} \quad (3.24)$$

$$H_0ik(U_1(1) - c) = -\frac{ik\varphi(r)}{r} \quad (3.25)$$

En $r = 1$

$$H_0 = \frac{\varphi_1(r)}{(c-U_1(1))} = \frac{\varphi_2(r)}{(c-U_2(1))} \quad (3.26)$$

Le développement de (3.21) et élimination de terme de pression dans l'écoulement de base, nous permet d'établir une équation d'Orr-Sommerfeld pour chaque couche de fluide et les conditions aux limites associées.

Fluide 1

$$\begin{aligned} \frac{Ik}{r} \left\{ -U_1(r)\varphi_1(r)k^2 + \varphi_1(r)U_1''(r) - \frac{U_1(r)\varphi_1'(r)}{r} + U_1(r)\varphi_1''(r) + \frac{\varphi_1(r)U_1'(r)}{r} \right. \\ \left. + \frac{\varphi_1'(r)c}{r} - \varphi_1''(r)c + u_1(r)\varphi_1(r)k^2 \right\} R_e \\ - \frac{1}{r} \left\{ \frac{2\varphi_1'(r)k^2}{r} + 2\varphi_1''(r)k^2 + \frac{3\varphi_1'(r)}{r^3} - \frac{3\varphi_1''(r)}{r^2} + \frac{2\varphi_1'''(r)}{r} - \varphi_1''''(r) \right. \\ \left. - \varphi_1(r)k^4 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Fluide 2

$$\begin{aligned}
 \frac{Ik\rho}{r} \left\{ -\frac{U_2(r)}{\rho} \varphi_2(r)k^2 + \varphi_2(r)U_2''(r) - \frac{U_2(r)\varphi_2'(r)}{r} + U_2(r)\varphi_2''(r) + \frac{\varphi_2(r)U_1'(r)}{r} \right. \\
 \left. + \frac{\varphi_2'(r)c}{r} + \frac{\varphi_2(r)k^2c}{\rho} - \varphi_2''(r) \right\} R_e \\
 - \frac{\mu}{r} \left\{ \frac{\varphi_2'(r)k^2}{r} + \varphi_2''(r)k^2 + \frac{3\varphi_2'(r)}{r^3} - \frac{3\varphi_2''(r)}{r^2} + \frac{2\varphi_2'''(r)}{r} - \varphi_2''''(r) \right. \\
 \left. - \varphi_2(r)k^4 - \frac{\varphi_2'(r)k^2}{r} + 2\varphi_2''(r)k^2 \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Les conditions aux limites correspondantes sont :

✚ Condition d'adhérence a la paroi : En $r = d$

$$\begin{cases} \varphi_2'(r) = 0 \\ -\varphi_2(r) = 0 \end{cases}
 \tag{3.29}$$

✚ Condition sur la vitesse radiale : en $r = 1$

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2
 \tag{3.30}$$

✚ Condition sur la vitesse axiale : en $r = 1$

$$H_0U_1'(r) + \frac{1}{r}\varphi_1'(r) = H_0U_1'(r) + \frac{1}{r}\varphi_2'(r)
 \tag{3.31}$$

✚ La condition sur la vitesse qui est finie en $r = 0$

$$\begin{cases} \varphi_1(0) \\ \varphi_1'(0) \end{cases} \text{ est finie}
 \tag{3.32}$$

✚ La condition sur la contrainte tangentielle : en $r = 1$

$$\begin{aligned}
 H_0U_1''(1) - \frac{\varphi_1'(1)}{r^2} + \frac{\varphi_1''(1)}{r} + \frac{\varphi_1(1)k^2}{r} - H_0\mu U_2''(1) \\
 + \mu \left(\frac{\varphi_2'(1)}{r^2} - \frac{\varphi_2''(1)}{r} - \frac{\varphi_2(1)k^2}{r} \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

✚ La condition sur la contrainte normale : en $r = 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{R_e U_1(1) \varphi_1'(1)}{r} + \frac{R_e \varphi_1'(1) c}{r} + \frac{R_e \varphi_1(1) U_1'(1)}{r} - \frac{I \mu \varphi_2''(1)}{k r^2} - \frac{3 I \mu \varphi_2'(1) k}{r} \\
& + \frac{3 I k \varphi_1'(1)}{r} + \frac{2 I \mu \varphi_2(1) k}{r^2} + \frac{\rho R_e U_2(1) \varphi_2'(1)}{r} - \frac{\rho R_e \varphi_2'(1) c}{r} \\
& - \frac{\rho R_e \varphi_2(1) U_2'(1)}{r} + \frac{I \mu \varphi_2'''(1)}{k r} + \frac{I \varphi_2''(1)}{k r^2} + \frac{I \mu \varphi_2'(1)}{k r^3} - \frac{I \varphi_2'''(1)}{k r} \\
& - \frac{2 I \varphi_1(1) k}{r^2} - \frac{I \varphi_1'(1)}{k r^3} - w_e R_e k^2 H_0 + w_e R_e H_0 = 0
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

Les équations de Navier-Stokes linéarisées autour du profil de base conduisant aux équations d'Orr-Sommerfeld, ces dernières ne sont pas intégrables directement, leurs solutions sont calculées de manière approchées (asymptotique) ou numérique.

Chapitre 4

Développement asymptotique aux grandes ondes

4.1 Introduction

Nous consacrons ce chapitre pour étudier la méthode des développements asymptotiques aux grandes ondes dans le cadre d'un écoulement annulaire axisymétrique de deux couches de fluides. Nous allons suivre la démarche initiée par Yih [13], reprise par la suite par un grand nombre d'auteurs [2,3,4,9,11]. Notons que cette démarche a été reprise dans un grand nombre de travaux sur les écoulements de Poiseuille plan et cylindrique, aussi bien dans le cas d'une seule couche ou de plusieurs couches de fluide. Récemment, Yiantsios [11] a développé une étude numérique pour explorer l'effet des nombreux paramètres sur la stabilité de l'interface entre deux couches de fluides newtoniens pour l'écoulement de Poiseuille plan.

Le but de cette étude est de donner des résultats permettant de comprendre le rôle des différents effets physiques qui favorisent ou suppriment les instabilités de l'interface. Ce développement nous a permis de déterminer les expressions analytiques du taux d'amplification des ondes à l'interface fluide-fluide. Rappelons que notre calcul prend en considération les effets de la tension superficielle et il est valable pour n'importe quelle valeur du rapport des viscosités $\mu < 1$ et $\mu > 1$.

Les résultats du développement asymptotique sont validés par les résultats de la stabilité marginale donnés par un modèle intégrale [8].

4.2 Hypothèse ondes longues

On fait une étude de stabilité linéaire aux faibles nombres de Reynolds, où on s'intéresse au développement des ondes périodiques de petites amplitudes sous forme $e^{ik(x-ct)}$, les paramètres k et c désignent respectivement le nombre d'onde et la célérité complexe des ondes. Dans la résolution temporelle considérée dans notre étude de stabilité, le nombre d'onde k est pris réel tandis que la célérité c est complexe, on a alors à trouver une relation de la forme suivante :

$$c(k) = c_r(k) + ic_i(k)$$

Où c_r est la vitesse de phase de l'onde et $\omega_i = kc_i$ son taux d'amplification temporelle.

L'écoulement est alors :

- temporellement stable si $\omega_i < 0$,
- marginalement stable si $\omega_i = 0$,
- temporellement instable si $\omega_i > 0$.

4.3 Mise en équation

Afin de simplifier l'écriture indicielles des équations ((3.27), (3.28)), on pose dans la suite du travail $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_2 = \psi$. Nous réécrivons les équations d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites associées :

$$\begin{aligned} \frac{Ik}{r} \left\{ -U_1 \varphi k^2 + \varphi U_1'' - \frac{(c - u_1) \varphi'}{r} + U_1 \varphi'' + \frac{\varphi U_1'}{r} + \frac{\varphi' c}{r} - \varphi'' c + U_1 \varphi k^2 \right\} R_e \\ - \frac{1}{r} \left\{ \frac{2\varphi' k^2}{r} + 2\varphi'' k^2 + \frac{3\varphi'}{r^3} - \frac{3\varphi''}{r^2} + \frac{2\varphi'''}{r} - \varphi'''' - \varphi k^4 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{Ik\rho}{r} \left\{ -\frac{U_2(r)}{\rho} \psi(r) k^2 + \psi(r) U_2''(r) - \frac{U_2(r) \psi'(r)}{r} + U_2(r) \psi''(r) + \frac{\psi(r) U_1'(r)}{r} + \frac{\psi'(r) c}{r} \right. \\ \left. - \psi''(r) c + \frac{U_2(r) \psi(r) k^2}{\rho} \right\} R_e \\ - \frac{\mu}{r} \left\{ \frac{2\psi'(r) k^2}{r} + 2\psi''(r) k^2 + \frac{3\psi'(r)}{r^3} - \frac{3\psi''(r)}{r^2} + \frac{2\psi'''}{r} - \psi''''(r) \right. \\ \left. - \psi(r) k^4 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les conditions d'adhérence à la paroi du cylindre :

$$\begin{aligned} \psi(d) &= 0 \\ \psi'(d) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

La vitesse est finie en $r = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les conditions à l'interface sont aux nombres de quatre, soit :

$$\varphi(1) = \psi(1) \quad (4.5)$$

$$H_0 U_1'(1) + \frac{1}{r} \varphi'(1) - H_0 U_2'(1) - \frac{1}{r} \psi'(1) = 0 \quad (4.6)$$

$$H_0 U_1''(1) - \varphi'(1) + \varphi''(1) + \varphi(1)k^2 - H_0 \mu U_2''(1) + \mu(\psi'(1) - \psi''(1) - \psi(1)k^2) = 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_e U_1(1) \varphi_1'(1)}{r} + \frac{R_e \varphi_1'(1) c}{r} + \frac{R_e \varphi_1(1) U_1'(1)}{r} - \frac{I \mu \varphi_2''(1)}{kr^2} - \frac{3I \mu \varphi_2'(1) k}{r} \\ & + \frac{3Ik \varphi_1'(1)}{r} + \frac{2I \mu \varphi_2(1) k}{r^2} + \frac{\rho R_e U_2(1) \varphi_2'(1)}{r} - \frac{\rho R_e \varphi_2'(1) c}{r} \\ & - \frac{\rho R_e \varphi_2(1) U_2'(1)}{r} + \frac{I \mu \varphi_2'''(1)}{kr} + \frac{I \varphi_2''(1)}{kr^2} + \frac{I \mu \varphi_2'(1)}{kr^3} - \frac{I \varphi_2'''(1)}{kr} \\ & - \frac{2I \varphi_1(1) k}{r^2} - \frac{I \varphi_1'(1)}{kr^3} - w_e R_e k^2 H_0 + w_e R_e H_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

On fait donc un développement asymptotique autour du petit paramètre k . On développe la célérité c et les amplitudes φ et ψ de la fonction de courant sous forme de séries de puissances de ce petit paramètre k :

Les solutions analytiques $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ s'écrivant comme suit:

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) + k\varphi_1(r) + k^2\varphi_2(r) + \dots \quad (4.1)$$

$$\psi(r) = \psi_0(r) + k\psi_1(r) + k^2\psi_2(r) + \dots \quad (4.2)$$

$$c = c_0 + kc_1 + k^2c_2 + \dots \quad (4.3)$$

Ces développements sont introduits dans les équations d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites ((4.1), (4.2) - (4.3)-(4.8)), puis on regroupe les termes en puissance du paramètre k . On obtient un système d'équations à résoudre pour chaque ordre. La résolution sera faite par la suite pour l'ordre zéro et l'ordre 1 en k . Le développement des calculs que nous présentons dans cette section suivent ceux

développés pour la première fois par Yih [12] dans le cas d'un l'écoulement visqueux sur un plan incliné pour une couche de fluide newtonien. Yih [12] a étendu cette démarche au cas de l'écoulement de Poiseuille plan de deux couches de fluides newtoniens. Cette méthode conduit à un système d'équations différentielles simplifiées décrivant l'évolution de l'amplitude des couches de fluides $\varphi_1(r) = \varphi(r)$, $\varphi_2(r) = \psi(r)$ et la célérité des ondes c . Dans la limite des grandes longueurs d'ondes, cette étude permet de déterminer les conditions exactes d'apparition des instabilités.

4.3 .1 Résolution à l'ordre zéro

Les solutions du problème à l'ordre zéro en k sont données analytiquement. On détermine $\varphi_0(r)$ et $\psi_0(r)$

Les équations d'Orr-Sommerfeld sont :

$$-\varphi_0''''(r) + \frac{2}{r}\varphi_0'''(r) - \frac{3}{r^2}\varphi_0''(r) + \frac{3}{r^3}\varphi_0'(r) = 0 \quad (4.9)$$

Et

$$-\psi_0''''(r) + \frac{2}{r}\psi_0'''(r) - \frac{3}{r^2}\psi_0''(r) + \frac{3}{r^3}\psi_0'(r) = 0 \quad (4.10)$$

Les conditions aux limites en $r = 1$:

$$\varphi_0(1) = 0 \quad (4.11)$$

$$\varphi_0'(1) = 0 \quad (4.12)$$

$$\psi_0(1) = 0 \quad (4.13)$$

$$\psi_0'(1) = 0 \quad (4.14)$$

$$\varphi_0(1) - \psi_0(1) = 0 \quad (4.15)$$

$$-2B\varphi_0(1) + D(\psi_0'(1) - \varphi_0'(1)) = 0 \quad (4.16)$$

$$-2\mu\psi_0(1) + D[\varphi_0'(1) + \mu\psi_0'(1)] + D[\mu\psi_0''(1) - \varphi_0''(1)] + 2\mu\varphi_0(1) = 0 \quad (4.17)$$

$$-\varphi_0'(1) + \psi_0'(1) + d[\varphi_0''(1) - \mu\psi_0''(1)] + d[\mu\psi_0'''(1) - \varphi_0'''(1)] = 0 \quad (4.18)$$

Avec

$$A = (d^2 + \mu - 1)$$

$$B = (-2\mu + 2)$$

Et

$$D = c_0 A + (d^2 + 1)$$

La résolution du système précédent donne la solution suivante :

On a:

$$\varphi_0(r) = c_{12}r^4 + c_{13}r^2 + c_{11} \ln r = 0 \quad (4.19)$$

On pose $c_{11} = 0$

$$\varphi_0(r) = c_{12}r^4 + c_{13}r^2 \quad (4.20)$$

Et

$$\psi_0(r) = c_{21} + c_{22}r^4 + c_{23}r^2 + c_{24}r^2 \ln(r) = 0 \quad (4.21)$$

D'où

$$\psi_0(r) = c_{22}r^4 + c_{23}r^2 + c_{24}r^2 \ln(r) \quad (4.22)$$

Nous nous trouvons en présence d'un système de quatre équations composées des conditions aux limites à l'interface et de cinq inconnues $c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{24}$ et c_0 .

Les fonctions de courant sont définies à un facteur multiplicatif près et on introduit une normalisation des fonctions propres. La détermination de ces coefficients conduit à donner la valeur c_0 , on trouve deux modes différents :

Mode 1

$$c_0 = \frac{(d^2-1)}{d^2+\mu-1} \quad (4.23)$$

Mode 2

$$c_0 = \frac{d^2(d^2-1)}{d^4+\mu-1} \quad (4.24)$$

On détermine les coefficients qui interviennent dans les expressions des fonctions de courant φ_0 et ψ_0 dans le mode 2 à l'aide des conditions aux limites :

$$c_{12} = \mu ,$$

$$c_{13} = d^2(d^2 - 2) - \mu + 1$$

$$c_{21} = d^4$$

$$c_{23} = -2d^2$$

$$c_{24} = 0$$

D'où

$$\varphi_0(r) = \mu r^4 + (d^2(d^2 - 2) - \mu + 1)r^2 \quad (4.25)$$

Et

$$\psi_0(r) = -d^4 + r^4 + \frac{(2d^2\mu - 2d^2)r^2}{(\mu - 1)} \quad (4.26)$$

Toutes les équations du système sont réelles ainsi que c_0 qui est réelle et positive. c_0 peut être interprétée comme une vitesse de la perturbation. Les ondes se propagent avec une célérité constante.

A l'ordre 0, l'écoulement ne présente pas d'instabilité vis-à-vis de la perturbation de grandes longueurs d'ondes. Ceci est liée au fait, que nous avons résolu le problème correspondant à un équilibre gravité-force visqueuse (force d'inertie nulle). La vitesse de phase c_0 est indépendante du nombre d'onde k , ces ondes ne sont pas dispersives. Le développement doit être poussé jusqu'à l'ordre où le critère de stabilité apparaît c'est-à-dire à l'ordre un.

4.3.2 Résolution à l'ordre un

A cet ordre, les équations d'Orr Sommerfeld $\{\psi_1(r) \text{ et } \varphi_1(r)\}$ sont des fonctions connues de $\psi_0(r)$ et $\varphi_0(r)$ et de leurs dérivées. Il en est de même pour les conditions aux limites. Ces équations ainsi que les conditions aux limites sont représentées comme suit :

$$\frac{1}{rEA} \{IR(FE - G)\} [\varphi'_0(r) + \varphi''_0(r)] + \frac{3I}{r^3} [\varphi'_1(r) + \varphi''_1(r)] - \frac{2I}{r^2} \varphi'''_1(r) - I\varphi''''_1(r) = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{rEA} \{IR_{ee}(HE - G)\} [\psi'_0(r) + \psi''_0(r)] + \frac{3I}{r^3} [\psi'_1(r) + \psi''_1(r)] + \frac{2I}{r^2} \psi'''_1(r) - I\psi''''_1(r) = 0 \quad (4.28)$$

Avec

$$\begin{aligned} E &= (d^4 + \mu - 1)(d^2 + \mu - 1)^2 \\ F &= (\mu r^2 + d^2 + \mu - 1) \\ G &= (d^8 + 2d^6\mu - 3d^6 - d^4\mu^2 - 4d^4\mu + 3d^4 - d^2\mu^2 + 2d^2\mu + d^2) \\ H &= (d^2 - 1^2) \end{aligned}$$

Les conditions aux limites en $r = 1$:

$$I\varphi_1(1) = 0 \quad (4.29)$$

$$I\varphi'_1(1) = 0 \quad (4.30)$$

$$I\psi_1(1) = 0 \quad (4.31)$$

$$I\psi'_1(1) = 0 \quad (4.32)$$

$$I\varphi_1(1) - I\psi_1(1) = 0 \quad (4.33)$$

$$IL[\psi'_1(1)\varphi'_1(1)] + IMc_1A[\psi_0(1) - \varphi_0(1)] + \{2IM(\mu - 1)\}\varphi_1(1) = 0 \quad (4.34)$$

$$IAN[\psi_1''(1) - \varphi_1''(1)] + IAN[\psi'_1(1) - \varphi'_1(1)] + IQ\{[\psi_0''(1) - \varphi_0''(1)] + [\psi_0'(1) - \varphi_0'(1)]\} + 2\mu IM[\psi_1(1) - \varphi_1(1)] = 0 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & [\varphi_1'''(1) - \mu\psi_1'''(1)] \\ = & \left\{ -\frac{2}{D}R_e[\psi_0(1) + \varphi_0(1)] + \left(\frac{D}{A}R_e - \frac{1}{D}c_1\right)[\varphi_0'(1) + \psi_0'(1)] \right. \\ & + \frac{A}{D}c_1[\varphi_0''(1) - \mu\psi_0''(1)] + \frac{A}{D}c_1[\varphi_0'''(1) - \mu\psi_0'''(1)] \\ & \left. - [\varphi_1'(1) - \mu\psi_1'(1)] + [\varphi_1''(1) - \mu\psi_1''(1)] \right\} \end{aligned}$$

(4.36)

Avec

$$L = (d^4\mu - d^4 - 2d^2\mu - \mu + 2d^2 + 2\mu - 1)$$

$$M = (d^4 + \mu - 1)$$

$$N = \mu(\mu - 1)(d - 1)^2(d + 1)^2$$

$$Q = (d^2\mu - 4d^2 - 3\mu + 4)$$

On trouve :

$$c_1 = \frac{1}{144} \frac{1}{A^2 M^3} (9JM^4 A^2 [4M \ln d + HQ] - d(\mu - 1) [(H(d^4(2d^8 + 9d^6\mu - 16d^6 + 12d^4\mu^2 - 53d^4\mu + 15d^2\mu^3 + 46d^4 - 135d^2\mu^2 + 280d^2\mu - 87d\mu^3 - 160d^2 + 449d\mu^2 - 9d^2\mu^4 - 648d\mu + 177d^2\mu^3 + 286d) - \mu(535d^2\mu + 21\mu + 575d^2 - 105\mu^2 + 197\mu - 163) - 208d^2 + 50) + 24(\mu - 1)M(2d^2(d^2\mu - 2d^2 - 3\mu + 3) - \mu^2 + 3\mu - 2) \ln d]) \quad (4.37)$$

L'étude asymptotique ($k \rightarrow 0$) des équations d'Orr-Sommerfeld, nous a permis de trouver explicitement la valeur de la célérité c_1 qui caractérise la stabilité en fonction des nombreux paramètres du problème. Nous avons choisi de donner les expressions analytiques de c_0 et c_1 pour des fluides de même densité $\rho = 1$.

La célérité complexe est donc donnée par :

$$c = c_0 + kc_1$$

La célérité c_0 est donnée par la relation (4.24), et c_1 est donnée par (4.37).

4.4 Seuil de stabilité linéaire : condition critique

Le seuil de stabilité est déterminé à travers le Reynolds critique que l'on détermine en imposant $c_1 = 0$. On va tracer les courbes de Reynolds critique en fonction de la stratification de la viscosité μ figure((4.2),(4.3)). L'échelle est logarithmique sur l'axe présentant le Reynolds critique R_c . Il est possible aussi de présenter les courbes R_c dans le plan (μ, d) (figure 4. 1).

4.4.1 Reynolds critique : ($\mu < 1$)

La figure (4.2) montre la variation du Reynolds critique en fonction de la stratification de la viscosité pour différentes valeurs des épaisseurs des couches fluides h_1 tel que $h_1 = \frac{1}{d}$. On s'intéresse dans cette partie au cas où le fluide pariétal est le moins visqueux des deux fluides. On voit sur la figure (4.2) que le nombre de Reynolds critique varie de manière importante en fonction de μ et h_1 . Au fur et à mesure que h_1 diminue le nombre de Reynolds augmente. Remarquons cependant que $0.6451 <$

$h_1 < 0.99$, ce qui signifie que le fluide le plus visqueux (huile) occupe un volume plus important que le fluide le moins visqueux (eau). En présence d'un écoulement moins visqueux et mince l'écoulement est stable. Ce phénomène est qualifié d'effet de couche mince par plusieurs auteurs [2,3,5,8]. Nous avons retrouvé les résultats de la courbe asymptotique 3(a) de [8]. Cette figure montre également que l'écoulement peut être stabilisé plus facilement dans la gamme des paramètres suivants $0.6896 < h_1 < 0.9523$ et $0.1 < \mu < 0.9$. Nous avons souhaité reproduire la figure 3 de Preziosi et al [9]. On a souhaité explorer plus en détail la région comprise entre $d = 1.45$ et $d = 1.5$ de la figure 3 [9], on a pu voir apparaître une singularité pour la valeur de $h_1 = 0.67172$ correspondant à $d = 1.48871$. On peut conclure qu'au-delà de cette valeur il est difficile de stabiliser l'écoulement pour la configuration considérée dans ce paragraphe.

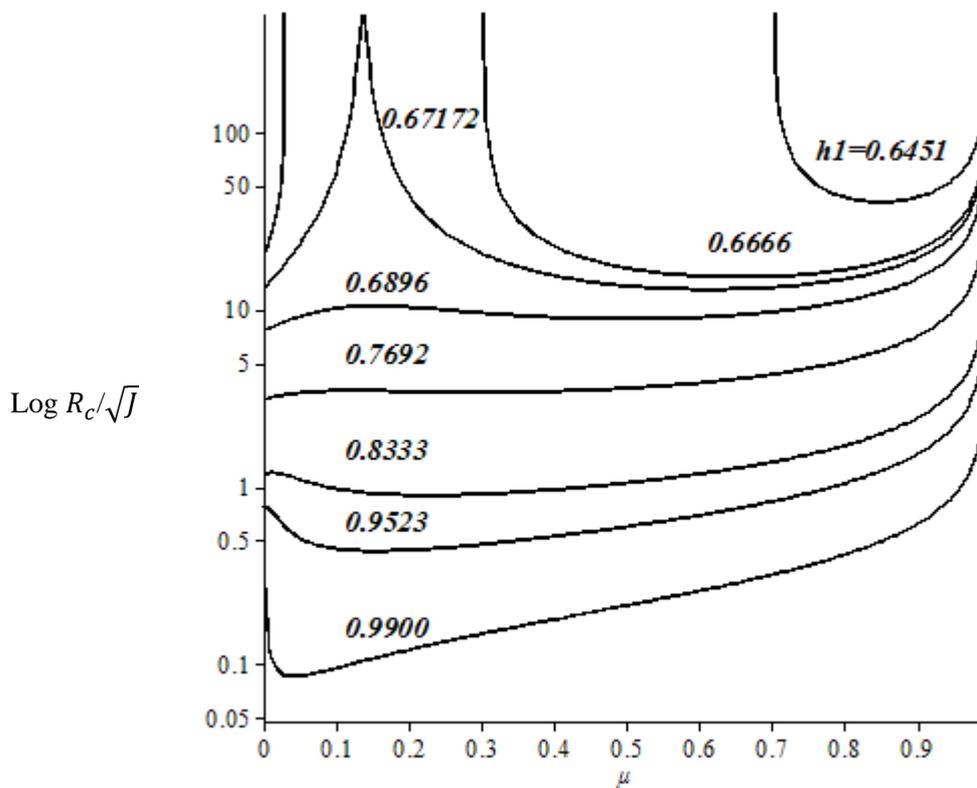


Figure 4.1 : Dépendance du R_c/\sqrt{J} en fonction de la stratification de la viscosité dans le cas $\mu < 1$ qui correspond au fluide pariétal moins visqueux que le fluide à cœur et du rapport des épaisseurs h_1 .

4.4.2 Reynolds critique : ($\mu > 1$)

Dans cette partie la configuration considérée est telle que le fluide à cœur est le moins visqueux des deux. Cette situation a été étudiée par Hickox [3], sans prendre en considération la tension superficielle. On constate, que la variation du Reynolds critique diffère complètement de celle de la figure (4.1). Dans cette configuration, on voit sur la figure (4.2) que augmenter h_1 augmente le Reynolds critique mais pas de façon linéaire.

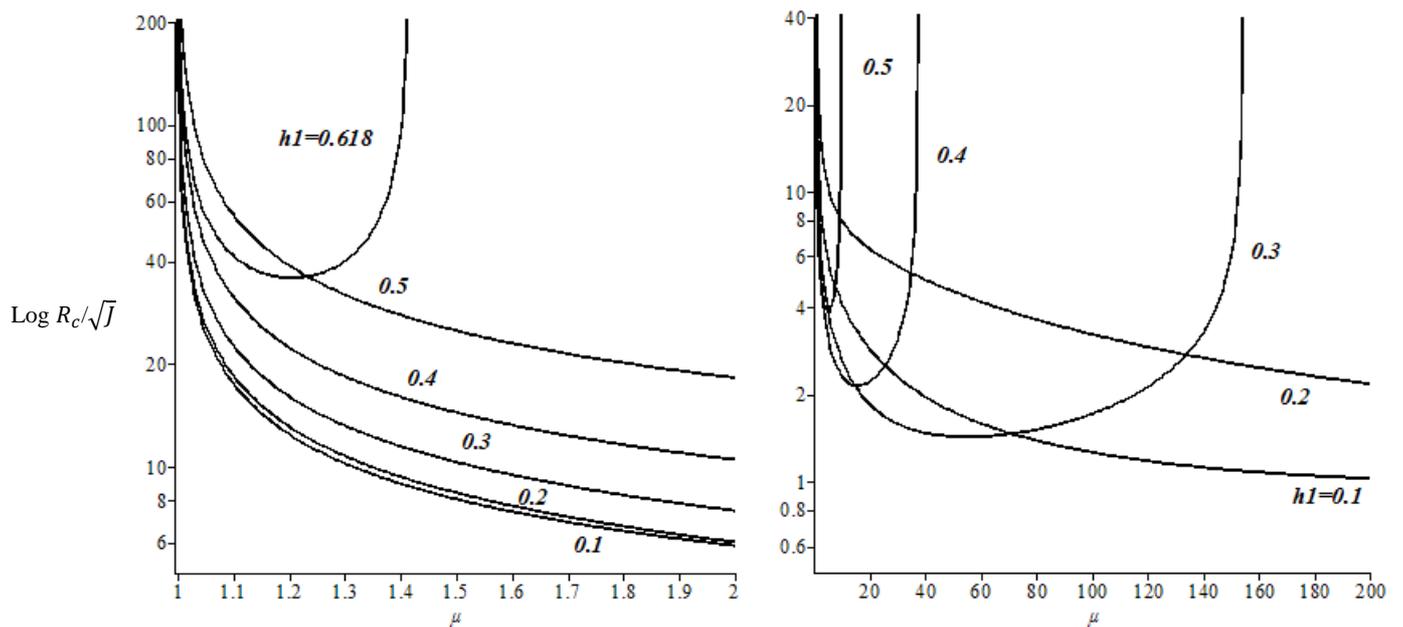


Figure 4.2 : Dépendance du R_c/\sqrt{J} en fonction de la stratification de la viscosité dans le cas $\mu > 1$ qui correspond au fluide pariétal moins visqueux que le fluide à cœur et du rapport des épaisseurs h_1 .

Nous avons choisi de représenter le Reynolds critique dans le plan (μ, h_1) sans restriction sur le rapport des épaisseurs. Les résultats obtenus sont sous forme de surfaces. Sur les figures (4.2) et (4.3), nous avons représenté le cas où le fluide pariétal est moins visqueux ($\mu < 1$). Le cas où le fluide à cœur est moins visqueux est représenté sur les figures (4.2) et (4.5). Ces figures montrent que moins un fluide dans une couche mince est visqueux, plus l'écoulement est stable.

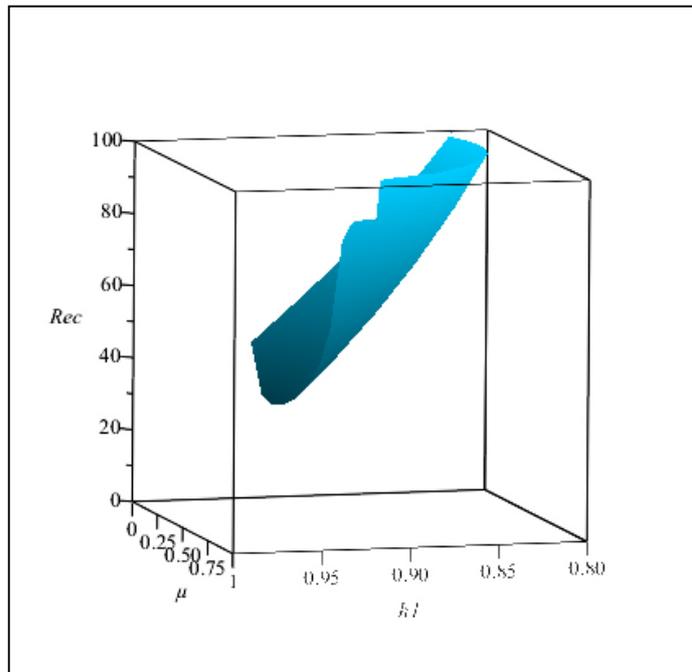


Figure 4.3 : Reynolds critique R_c dans le plan (μ, d) pour $(\mu < 1)$.

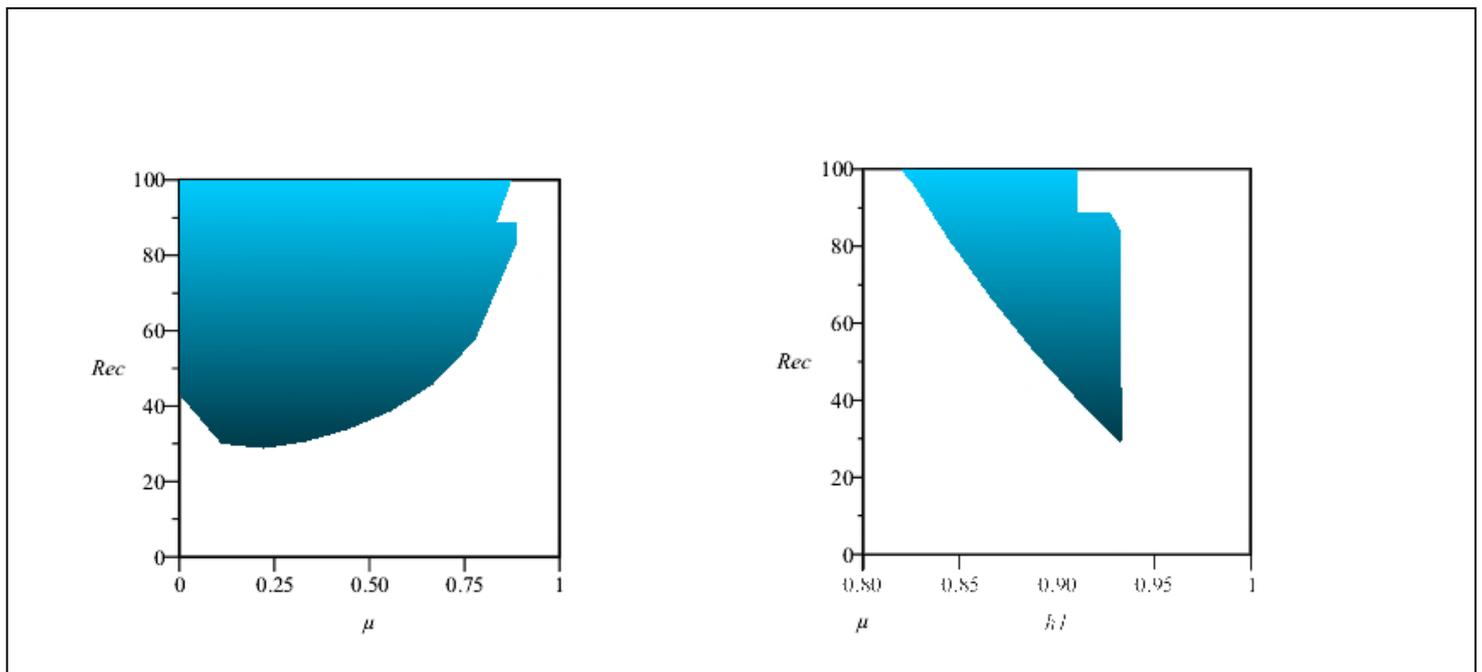


Figure 4.4 : A gauche : Changement d'orientation de la courbe représentée sur la figure (4.3) de manière à observer la variation de Reynolds critique en fonction de μ .

A droite : Changement d'orientation de la courbe représentée sur la figure (4.3), de manière à observer la variation de Reynolds critique en fonction de h_1 .

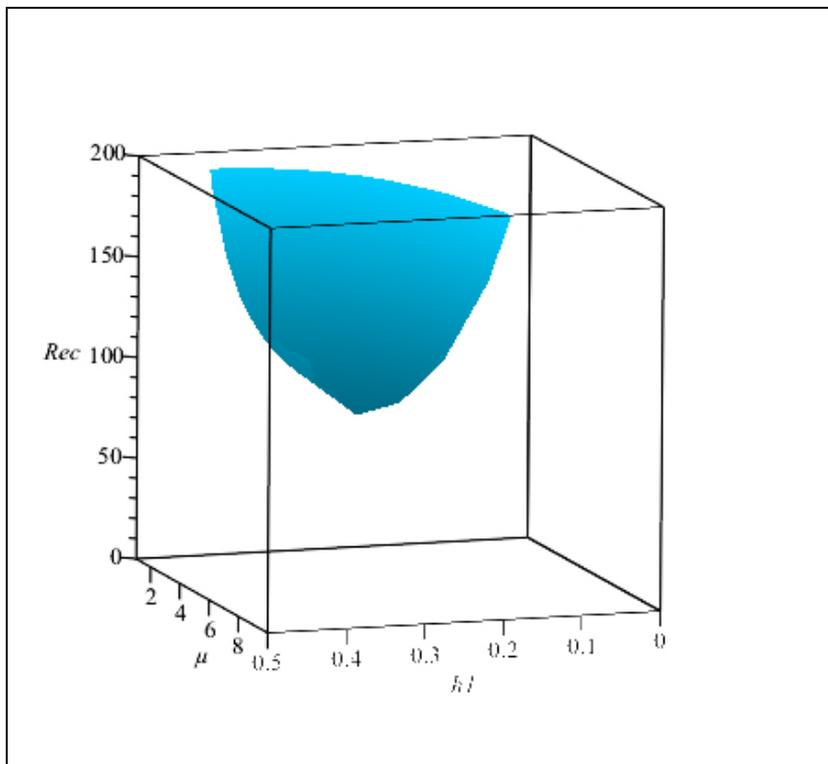


Figure 4.5 : Reynolds critique R_c dans le plan (μ, d) pour $(\mu > 1)$

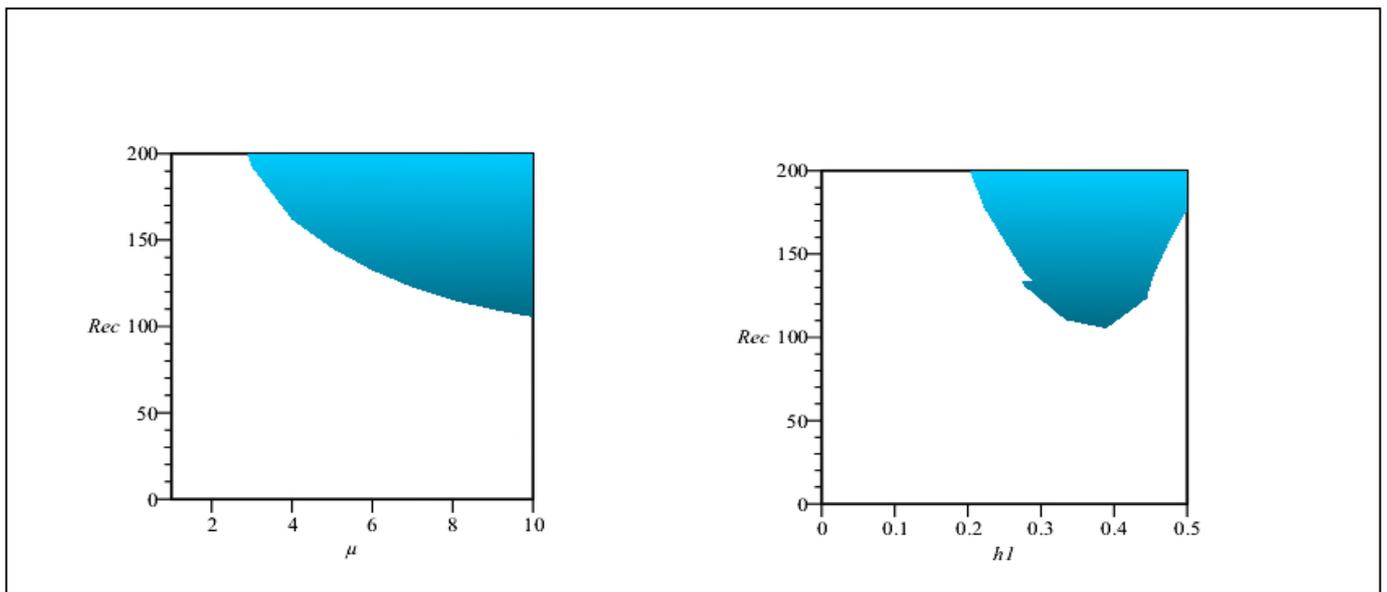


Figure 4.6 : A gauche : Changement d'orientation de la courbe représentée sur la figure (4.5) de manière à observer la variation de Reynolds critique en fonction de μ . A droite : Changement d'orientation de la courbe représentée sur la figure (4.5) de manière à observer la variation de Reynolds critique en fonction de h_1 .

4.5 Stabilité marginale : loin du seuil

Quand l'écoulement est perturbé, on observe deux modes instables avec différents nombre d'onde et différentes célérité c_0 . Le premier mode est un mode relatif aux grandes ondes, il est caractérisé par des nombres d'onde $0 < k < 1$ et une célérité

$c_{01} = \frac{d^2(d^2-1)}{d^4+\mu-1}$. Le second mode peut être qualifié d'onde courte, il est caractérisé par des valeurs du nombre d'onde plus grandes voisines de 1 et une célérité $c_{02} = \frac{(d^2-1)}{d^2+\mu-1}$. Nous avons représenté sur la figure (4.8) des courbes de stabilité marginale correspondant à $c_i = 0$. Les résultats du modèle asymptotique sont comparés avec les résultats que donne un modèle intégrale [8]. Cette comparaison est représentée sur la figure (4.7). Le nombre de Reynolds en fonction du nombre d'onde est donné pour le choix des paramètres suivants : $\mu = 0.05$, $d = 1.08$ et $J = 2102$. Pour la gamme des valeurs du nombre d'onde correspondant aux grandes ondes les courbes du modèle et celle de notre développement asymptotique sont en très bon accord. Cependant, on note la présence d'un second mode mis en évidence par le développement asymptotique et qui n'apparaît pas dans le modèle intégral [8]. A partir des nombres d'ondes d'ordre 1 l'hypothèse grandes ondes n'est plus vérifiée et il faudrait prendre en considération les termes non linéaire d'origine inertielle dans les équations de Navier-Stokes présentées dans le chapitre deux. De manière générale, les courbes de stabilité marginale varient qualitativement de manière importante quand μ et d varient preziosi [8].

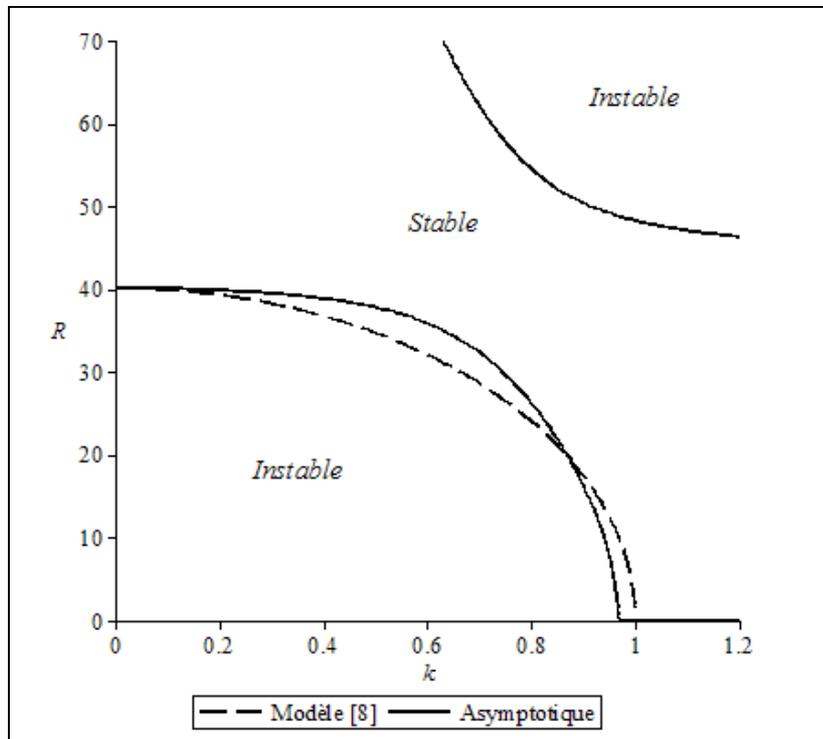


Figure 4.7 : Courbe de stabilité marginale représentant le nombre de Reynolds R en fonction du nombre d'onde k . Valeurs des paramètres : $\mu = 0.05$, $\rho = 1$, $d = 1.08$ ($h_1 = 0.925$) et $J = 2102$.

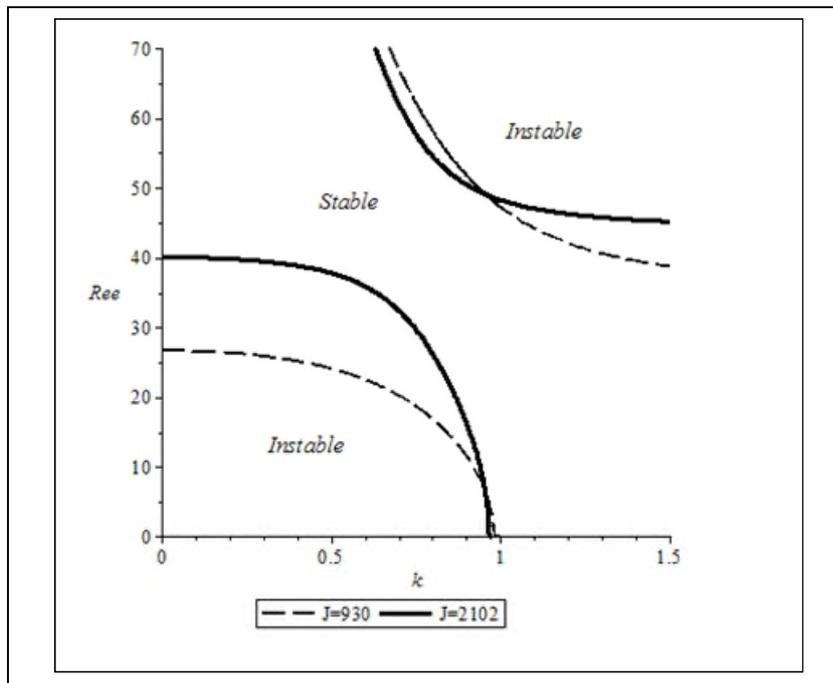


Figure 4.8 : Courbe de stabilité marginale représentant le nombre de Reynolds R en fonction du nombre d'onde k pour deux valeurs différentes de J exprimant l'influence de la tension superficielle.

Valeurs des paramètres : $\mu = 0.05$, $\rho = 1$, $d = 1.08$ correspondant à $h_1 = 0.925$.

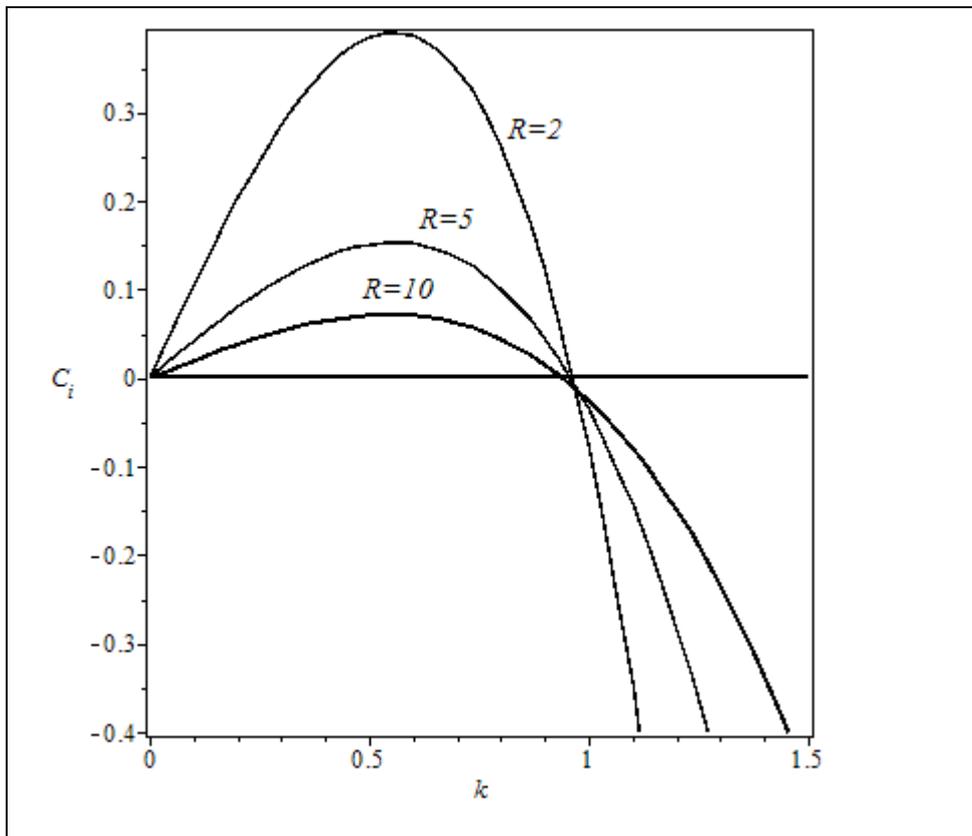


Figure 4.9: Célérité complexe $c_i = \omega_i/k$ en fonction du nombre d'onde k pour différentes valeur du nombre de Reynolds : $J = 2102$.

Valeurs des paramètres : $\mu = 0.05, \rho = 1, d = 1.08$ correspondant à $h_1 = 0.925$.

La figure (4.9) montre la variation de $c_i = \omega_i/k$ en fonction du nombre d'onde k . ω_i défini le taux d'amplification de la perturbation. On voit sur la figure (4.9) que lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds le taux d'amplification diminue. Ce résultat indique qu'on est en présence d'une instabilité capillaire. L'instabilité capillaire est stabilisée par l'inertie, ce qui n'est pas le cas pour l'écoulement de Poiseuille plan où l'inertie déstabilise l'interface. L'influence de la tension superficielle sur la variation du taux d'amplification en fonction du nombre d'onde est observée sur la figure (4.10). L'augmentation de la tension superficielle augmente le taux

d'amplification et cette augmentation peut conduire à une émulsion, où un des deux fluides se transforme en gouttes dans l'autre fluide.

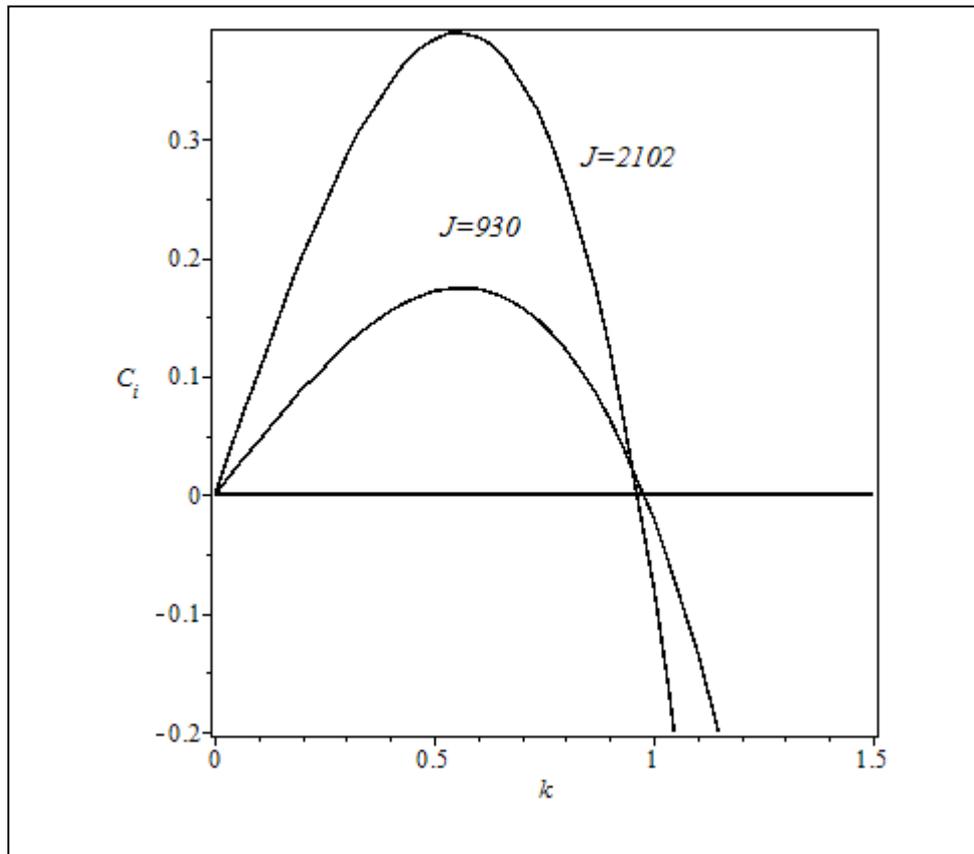


Figure 4.10 : Célérité complexe $c_i = \omega_i/k$ en fonction du nombre d'onde montrant l'influence de la tension superficielle.

Valeurs des paramètres : $\mu = 0.05, \rho = 1, d = 1.08 (h_1 = 0.925), R_e = 2$.

Conclusion générale

Dans ce projet de fin d'études, nous nous sommes intéressées à la stabilité linéaire de l'écoulement de deux couches de fluides de viscosités et d'épaisseurs différentes dans un canal cylindrique où le mouvement des fluides est généré par la gravité et la tension superficielle. Notre objectif principal est la détermination du seuil des instabilités et la caractérisation de la vitesse des ondes à l'interface.

L'analyse de stabilité de l'interface a été effectuée à l'aide de la méthode des petites perturbations et cela nous a permis d'établir les équations d'Orr-Sommerfeld qui gouvernent la stabilité de cet écoulement. La résolution de ce système a été abordée par développement asymptotique aux grandes longueurs d'ondes. Ce développement nous a livré des informations utiles sur l'écoulement au début de l'instabilité. et parmi les avantages importants de cette méthode on trouve :

- On obtient une relation de dispersion analytique.
- Détermination du seuil de l'instabilité (critère d'instabilité).
- Nous montrons que les effets pertinents qui permettent de contrôler l'interface sont la courbure et la tension superficielle .
- On a mis en évidence deux modes dont un correspond à une instabilité capillaire.

Références Bibliographiques

- [1] Boukorras, S. Etude de la stabilité d'écoulements gravitaires de films liquides, mémoire de master,(2015)
- [2] Chen, K. P. , Joseph, D. D., Long wave and lubrication theories for core-annular flow, Phys. Fluids, 1991, Vol. A3, pp. 2672
- [3] Hickox C.E, "Instability due to viscosity and density stratification," Phys. Fluids, vol. 14,N°2, (February 1971), pp. 251-262
- [4] Hooper A.P. ,"Long wave instability at the interface between two viscous fluids : thin layer effects", Phys. Fluids, vol 28 N°6 (1985), pp. 1613-1618
- [5] Joseph D. D., Renardy M., Renardy Y. Y., "Instability of two immiscible liquids with different viscosities in a pipe", J. Fluid. Mech., Vol. 141, (1984), pp. 309-317
- [6] Leblanc, S. Hydrodynamique, problèmes corrigés. EDP Sciences. ISBN 978-2-7598-0525-9,(2010)
- [7] Mehidi N., Stabilité, bifurcation et comportement chaotique d'une interface entre deux fluides. Thèse de Doctorat, Université de Bejaïa, (2007)
- [8] *Mehidi N. et Amatousse N., Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux, C.R.Mécanique, 337,(2009), pp.112-118*
- [9] Preziosi L., Chen K., Joseph D.D., Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, J. Fluid Mech. 201, (1989), pp.323–356
- [10] Toufouti .Z, Analyse linéaire d'un film liquide s'écoulant sur une paroi : équation d'Orr-Sommerfeld, mémoire de master, (2017)
- [11] Yiantsios S.G. and Higgins B.G., Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids, Phys. Fluids 31, (1988), pp.3225-3238
- [12] Yih, C.-S. , Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids 6 , (1963),pp. 321-334
- [13] Yih, C. S. Instability due to viscosity stratification. J. Fluid. Mech., Vol. 27 , (1967), pp.337-352

Résumé :

Ce mémoire est consacré à l'étude de stabilité d'écoulement de deux couches de fluides dans une conduite cylindrique en présence de l'effet de gravité et de la tension superficielle. Les équations gouvernant un tel mouvement sont d'un formalisme mathématique particulièrement compliqué, en effet il s'agit d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace et non linéaires. vu qu'il n'existe pas un cadre générale pour ce genre de problème, des hypothèses simplificatrices sont formulées afin d'obtenir des modélisations mathématiques abordables.

Le problème obtenu nous permis de mettre en œuvre une méthode de résolution asymptotique des équations d'Orr-Sommerfeld et des conditions aux limites associées, ces équations sont obtenues après la linéarisation des équations de gouvernantes qui décrivent la dynamique de l'écoulement. En suite, il s'agira de déterminer les conditions critiques du déclenchement des instabilités. La connaissance de ces conditions intéresse particulièrement le secteur industriel où il est important de maîtriser le déclenchement des instabilités.

Mots clés : Stabilité, Tension superficielle, condition critique

Abstract

This thesis is devoted to the study of flow stability of two fluid layers in a cylindrical pipe in the presence of the gravity effect and the surface tension. The equations governing such a movement are of particularly complicated mathematical formalism. They are in fact partial differential equations in time and space and nonlinear.

Since there is no general framework for this kind of problem simplistic assumptions are formulated to obtain affordable mathematical modeling.

The problem obtained allows us to implement a method of asymptotic resolution of the Orr-Sommerfeld equations and associated boundary conditions. These equations are obtained after linearization of the governing equations that describe the dynamic of flow. It will necessary to determine the critical conditions of the triggering of the instabilities. The knowledge of these conditions is of particular sector where it is important to control the triggering of instabilities.

Keywords: Stability, surface tension, critical conditions.

الخلاصة:

هذه الأطروحة مكرسة لدراسة ثبات التدفق لطبقتين من السوائل في أنبوب أسطواناني في وجود الجاذبية و التوتر السطحي. المعدلات التي تحكم مثل هذه الحركة هي في الواقع واحدة من المعدلات الشكليات الرياضية المعقدة بشكل خاص المشتقات الجزئية في المكان و الزمان و الغير خطية. لا يوجد إطار عام لهذا النوع لذلك تصاغ فرضيات مبسطة من أجل الحصول على تعادلات رياضي. و تتيح لنا المشكلة التي تم الحصول عليها تنفيذ طريقة الاقتراب من معادلات و Orr-Somerfeld الشروط المرتبطة بها , و يتم الحصول على هذه المعادلات بعد الخطية الحاكمة التي تصف ديناميكيات التدفق بعد ذلك سيكون من الضروري تحديد الظروف التي تأثر استقرار التدفق. هذه الظروف مهمة خاصة في القطاع الصناعي حيث من المهم التحكم في إثارة عدم الاستقرار.

الكلمات الرئيسية: عدم الاستقرار, التوتر السطحي, الظروف التي تأثر استقرار التدفق