République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Physique théorique

Thème

L'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski

Présenté par

M^{r}. AMIROUCHE Mohamed essaghir

Soutenu publiquement le : 10 / 07/ 2019 Devant le Jury composé de :

GHARBI Abdelhakim	Professeur	U.A.M. Béjaia	Président
BELABBAS Abdelmoumene	MCB	U.A.M. Béjaia	Examinateur
FOUGHALI Taoufik	MCA	U.A.M. Béjaia	Rapporteur

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu Tout Puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail, également je remercie infiniment mes parents, mes frère, mes soeurs qui m'ont encouragés et aidés à arriver à ce niveau.

Mes remerciements vont à monsieur Foughali Toufik mon encadreur pour, le temps qu'il a si généreusement consacré à mon apprentissage. Je le remercie pour la grande liberté qu'il m'a accordée durant la préparation de ce mémoire, tout en me guidant par ses conseils et ses encouragements.

J'ai le plaisir de remercier tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en y participant : GHARBI Abdelhakim, professeur à l'université de Béjaia, d'avoir accépté de présider le jury de soutenance et Mr BELABBAS Abdelmoumene, Maitre de conférences à l'université de Béjaia, qui a accépté d'étre examinateur de ce modeste travail.

je remercie vivement les étudiants de Master physique théorique (Ait bara Samir, Faid Massinissa, Bouandas Nassim, Loudadji Charaf, Ghenouche Rahima, Louacini Dounia, Bechker Katia, Haddad Hassiba, Kecir L hanane, Larab Lydia) pour leur aide morale durant toute la période de préparation

Merci à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents, Les mots ne seront jamais suffisants pour vous exprimer tout l'amour, toute l'estime que je ressens à votre égard. Vous avez toujours su être des parents exemplaires ; ce travail n'est qu'une goutte d'eau dans l'océan de bonheur que je souhaite vous offrir. Prions pour que Dieu vous garde toujours pour nous.

Mes frères (Zitouni, Sassi, Adel) et mes soeurs (Salima, Khokha, Safia, Chahra, Rahma) et les petits fils de ma famile (Tarek, Mouna, Khirdine)

Tous mes amis, en particulier (Bouarouri Wahib et Sawli Eldjamai)

Table des matières

Introduction générale

La relativité et l'astronomié sont les deux sciences qui ont occupé, depuis longtemps, l'attention des scientifiques. La relativité partit avec Galilée (1564-1642) qui a fondé la cinématique de point et a étudié la chute des corps. Après, Newton (1642-1727) était le premier à donner une conception d'un espace et d'un temps absolus et définir la notion de force, ce qui l'a amené à fonder la dynamique qui a conduit Galilée à mettre son principe d'invariance qui devient la première formulation du principe de relativité. Newton élabore également une théorie de la gravitation. A la fin du dix-neuvième siècle, Einstein (1879-1955) étend le principe de relativié à l'ensemble des lois de la physique, cela le conduit à la théorie de la relativité restreinte qui néccissite une refonte révolutionnaire des concepts d'espace et de temps. Une nouvelle formulation de la dynamique et de la cinématique apparait, mais reformulée de manière extrêmement compacte. Einstein a proposé une extention du principe de relativité aux referentiels accélerés, c'est la relativité générale qui devient la base de la cosmologie.

La théorie de la relativité restreinte a commencé par Einstein en 1905, avec les deux postulats suivents :

a) toutes les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.

b) la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels, elle est égale à $c = 3 \times 10^8 m/s$.

Cette nouvelle théorie à permis la réconciliation entre la mécanique et l'éléctromagnetisme, donnant naissance à la mécanique relativiste. Cette théorie est connue par la célébre relation d'Einstein $E = mc^2$, mais la relativité restreinte n'a fait ses preuves que pour des énergies très basses, comparées aux énergies déployées dans certains processus astronomiques, tels que les rayons cosmiques, qui se caractérisent par des énergies très élevées comparativement à celles produites dans les accélérateurs de particules.

Pour remédier à ce problème de désaccord entre la relativité restreinte et quelques données expérimentales, certains physiciens théoriciens ont opté pour la révision des principes fondateurs de cette théorie. On a vu naitre la relativité spéciale déformée (DSR), avec les résultats des travaux du physicien italien Giovanni Amelino-Camelia au départ, ensuite un groupe de physiciens mathématiciens a élaboré un formalisme mathématique qui entre dans le contexte de la géométrie non-commutative, dans lequel les théories de la DSR s'expriment d'une manière cohérente. Cette théorie repose sur la déformation des équations de la relativité d'Einstein de telle sorte qu'elles soient en accord avec le principe de Poincaré. Cette déformation engendre de nouvelles équations non linéaires, ce qui donne le nom de relativité non linéaire.

La relativité non linéaire de Fock [1], basée sur les transformations de Fock des coordonnées, et établie sur un rapport des fractions linéaires de Lorentz avec le même dénominateur. Dans le cadre de cette théorie émerge une nouvelle constante universelle, en plus de la vitesse de la lumière c, c'est la longueur R qui représente le rayon de l'univers observé. Dans un travail récent, Bouda et Foughali ont [2] apporté des modifications à cette théorie en proposant de nouveaux crochets de Poisson déformés dépendants d'un paramètre R qui a la dimension d'une longueur.

Afin de construire un premier Casimir invariant de la théorie, Bouda et Foughali ont complété l'algèbre construite par les crochets de Poisson des générateurs de rotations et de boosts. Cette tâche nécessite une modification du générateur des boosts N_i, d'une manière qui n'affecte pas la loi de transformation des coordonnées et des impulsions lors d'une transformation infinitésimale. Cette étude algébrique a conduit à une correspondance entre l'espace de la transformation de Fock-Lorentz et l'espace de de Sitter [3]. Après quantification, l'algèbre des crochets de Poisson devient l'algèbre des commutateurs. En égalant le premier Casimir invariant à un scalaire, qui désigne une masse en général, ils ont obtenu l'équation de Klein-Gordon, qui décrit le champ scalaire libre dans l'espace-temps R-Minkowski. En substituant les générateurs dans l'équation de Klein-Gordon par leurs opérateurs associés, ils ont abouti à une équation qui correspond à l'équation de Klein-Gordon dans l'espace de de Sitter.

Dans un travail ultérieur, Bouda et Foughali on dérivé l'équation de Dirac dans le contexte de l'espace-temps R-Minkowski [14], en utilisant l'algèbre R-Poincaré obtenue auparavant. Ils ont démontré que cette équation est exactement l'équation de Dirac dans l'espace-temps conforme plat de de Sitter avec un facteur de conformité bien défini. En utilisant la représentation de Schrödinger, ils ont développé une nouvelle méthode pour la résolution de l'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski/de Sitter. Dans ce mémoire, nous expliciterons essentiellement ce dernier travail.

Le travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre : nous allons présenter un rappel sur les relations et les résultats fondamentaux de la relativité restreinte ainsi que le groupe de Poincaré. Par la suite, nous exposons la déformation des crochets de Poisson et sa conséquence sur la loi de transforfmation des coordonnées. Ainsi, nous présentons la nouvelle formulation de la transformation des impulsions et de l'énergie qui nous permettra l'élaboration de la nouvelle relation de dispersion dans le cadre de la théorie de Fock. A la fin de ce chapitre, nous allons construire le premier Casimir et nous présentons la nouvelle équation de Klein-Gordon.

Le deuxiéme chapitre : on va définir l'équation de Dirac pour la particule libre de spin $\frac{1}{2}$ dans l'espace-temps R-Minkowski. Pour résourdre l'équation de Dirac on va utiliser l'image de Schrodinger, et on va donner la solution en fonction des fonctions de Bessel et des spineurs harmonique sphériques.

Le mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

L'espace-temps R-Minkowski

1.1 L'espace-temps de Minkowski

L'espace-temps de Minkowski est un système des coordonnées de quatre dimensions, le temps et les coordonnées spatiales sont liées par les transformation de Lorentz. L'élément de ligne infinitésimal ds entre deux points infiniment proches est donné par la relation suivante :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dX^2$$

avec $dX^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ et $d\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2}dt$, où v est la vitesse de déplacement.

Le repère inertiel

Le repère d'inertie est le cadre principal de toute la géométrie et de la physique. Dans un espace il existe une infinité de repère en translation uniforme les uns par rappont aux autres. Les lois de la nature doivent être covariantes lors d'un changement d'un repère inertiel à un autre.

La transformation de Lorentz

Soit les deux repères (R) et (R'). Le repère (R) est doté du système de coordonnées (t, x, y, z) et le repére (R') du système (t', x', y', z'). Le repére (R') se déplace suivant l'axe x avec une vitesse constante v par rapport à (R). La transformation de Lorentz entre les coordonnées de (R) et (R') et donnée par

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Remarque : pour les vitesses faibles $v \ll c \Rightarrow \frac{v}{c} \ll 1$ donc $\gamma \approx 1$ la transformation précédente devient la transformation de Galillée. Nous pouvons démontrer que l'élément invariant par la transformation de Lorentz est la pseudo-norme $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

On obtient la transformation de Lorentz inversse, en remplaçant v par -v dans le système précédent

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases} \tag{1.2}$$

Transformation des impulsions et de l'énergie

On définit le quadrivecteur vitesse par

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}) = (V^0, V^i), \quad \mu = 0,1,2,3 \text{ et } i = 1,2,3. \tag{1.3}$$

En multipiant V^μ par l'invariant scalaire m_0, on définit le quadri-impulsion

$$P^\mu = m_0\frac{dx^\mu}{d\tau} = (m_0\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, m_0\frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}) = (P^0, P^i), \quad \mu = 0,1,2,3 \text{ et } i = 1,2,3. \tag{1.4}$$

Nous pouvons mettre $m = m_0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$ de telle sorte à pouvoir écrire

$$P^\mu = (mc, m\vec{v}) = (P^0, \vec{P}). \tag{1.5}$$

En multipliant P^μ par c on obtient

$$cP^\mu = (cP^0, cP) = (E, cP) \tag{1.6}$$

Il s'ensuit que

$$(cP^\mu)^2 = cP_\mu cP^\mu = c^2\eta_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = E^2 - c^2P^2 = m_0^2c^4, \tag{1.7}$$

où $\eta_{\mu\nu} = [1, -1, -1, -1]$ est la métrique de Minkowski, et E est l'énergie totale de la particule.

L'invariant $E^2 - c^2P^2$ est égale à $(m_0c^2)^2$ dans tous les repéres inertiels. Dans le repère où la particule est au repos, dans ce cas $\vec{P} = 0$, on trouve la relation célébre d'Einstein

$$E = m_0c^2. \tag{1.8}$$

En appliquant la transformation de Lorentz pour le quadri-vecteur d'énergie-impulsion, on obtient

$$\begin{cases} \frac{E'}{c^2} = \gamma\{(\frac{E}{c^2}) - (\frac{v}{c^2})P_x\} \\ P'_x = \gamma\{P_x - v(\frac{E}{c^2})\} \\ P'_y = P_y \\ P'_z = P_z \end{cases} \tag{1.9}$$

1.2 La transformation de Fock

Dans l'espace de Minkowski, la matrice Λ, qui définit une transformation de Lorentz propre dans la direction de x, s'écrit sous la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$.

Alors, une transformation de Lorentz s'écrit

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\mu}, \quad \text{ou} \quad x' = \Lambda x. \tag{1.11}$$

Depuis la théorié de la relativité restreinte, les physiciens theoriciens ont cherché la transformation la plus générale entre des repéres inertiels et qui préserve le principe de la relativité de Poincaré. Fock a étudié ce problème et a proposé une transformation plus générale que celle de Lorentz avec le même dénominateur.

Soit la transformation des coordonnées

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{1.12}$$

D'aprés le premier postulat de la relativité restreinte, Fock a démontré que les transformations f^{μ} doivent satisfaire les conditions suivantes [1] :

$$\frac{\partial^2(\alpha(x) f^{\mu})}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0. \tag{1.13}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction linéaire

$$\alpha(x) = \alpha(0) + \alpha_{x^0} x^0 + \alpha_{x^1} x^1 + \alpha_{x^2} x^2 + \alpha_{x^3} x^3 \tag{1.14}$$

où les α_{x^i} sont des constantes à déterminer. La relation (1.13) confirme que αf^{μ} est une fonction linéaire des coordonnées x^{μ}. Alors la relation (1.12) devient $x'^{\mu} = \frac{G^{\mu}_{\nu} x^{\nu}}{\alpha(x)}$ qui est appelée la transformation de Fock, les G^{μ}_{ν} sont des constantes à déterminer. Avec la suposition qu'à l'origine $\alpha = 1 \Rightarrow \alpha(0) = 1$; la transformation devient linéaire et les G^{μ}_{ν} sont exactement les coefficients de la transformation de Lorentz $G^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$.

On va déterminer les α_{x^i} dans le cas où (R') est en mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport à (R). Pour fixer les α_{x^i}, les trois axiomes suivants suffisent

Le premier axiome : pendant tout le mouvement (dans la direction $\overrightarrow{x}$), le plan$(y'z')$ reste parallèle au plan (yz). Ainsi, si R et R' coincident à $t = t' = 0$, ça implique qu'au point $P_0(0, 0, y', z')$ correspond le point $P(0, 0, y, z)$ où $y' = y$ et $z' = z$ on conclut que $\alpha_y = \alpha_z = 0$

Le deuxième axiome : dans le cas d'une inversion , $\overrightarrow{x} \rightarrow \overrightarrow{-x}$, la loi de transformation reste la même. Dans ce cas :$\overrightarrow{x'} \rightarrow \overrightarrow{-x'}$, $\overrightarrow{x} \rightarrow \overrightarrow{-x}$ et $\overrightarrow{v} \rightarrow \overrightarrow{-v}$ ou $\beta \rightarrow -\beta$ avec $\beta = \frac{v}{c}$. Prenons par exemple la transformation pour la coordonnée z

$$\begin{cases} -z' = \frac{-z}{1+\alpha^t(-v)x^0+\alpha^x(-v)(-x)} \\ \Rightarrow z' = \frac{z}{1+\alpha^t(-v)x^0-\alpha^x(-v)(x)} \end{cases} \tag{1.15}$$

on remarque que $\alpha^t(-v) = \alpha^t(v) \Rightarrow \alpha^t$ est une fonction paire et $\alpha^x(-v) = -\alpha^x(v) \Rightarrow \alpha^x$ est une fonction impaire.

A partir de la succession des transformation $z \rightarrow z'$, et son inverse $z' \rightarrow z$, on trouve la transformation identité $z \rightarrow z$.

$$\begin{cases} z = \frac{z'}{1+\alpha^t(-v)x'^0+\alpha^x(-v)x'} \\ = \frac{\frac{z}{1+\alpha^t(v)x^0+\alpha^x(v)x}}{1+\alpha^t(v)\frac{\gamma(x^0-\beta x)}{1+\alpha^t(v)x^0+\alpha^x(v)x}-\alpha^x(v)\frac{\gamma(x-\beta x^0)}{1+\alpha^t(v)x^0+\alpha^x(v)x}} \\ = \frac{z}{1+\alpha^t(v)x^0+\alpha^x(v)+\alpha^t(v)\gamma(x^0-\beta x)-\alpha^x(v)\gamma(x-\beta x^0)} = z \end{cases} \tag{1.16}$$

ce qui implique

$$1 + \alpha^t(v)x^0 + \alpha^x(v) + \alpha^t(v)\gamma(x^0 - \beta x) - \alpha^x(v)\gamma(x - \beta x^0) = 1 \tag{1.17}$$

Cette relation donne le systeme suivant :

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^t(v) + \alpha^t(v)\gamma + \alpha^x(v)\gamma\beta = 0 \\ \alpha^x(v) - \alpha^t(v)\gamma\beta - \alpha^x(v)\gamma = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

à partir de ce systeme on trouve les relations suivante :

$$\begin{cases} \alpha^x(v) = -\frac{1+\gamma}{\gamma\beta}\alpha^t(v) \\ \alpha^t(v) = \frac{1-\gamma}{\gamma\beta}\alpha^x(v) \end{cases} \tag{1.19}$$

Le troisième axiome : la succession des transformation $R_1 \to R_2$;$R_2 \to R_3$ est égale à $R_1 \to R_3$ de type de Fock, ce qui nous conduit à [15]

$$\begin{cases} \alpha^x(v) = \gamma\beta\lambda \\ \alpha^t(v) = -(\gamma-1)\lambda \end{cases} \tag{1.20}$$

Finalement la transformation de Fock-Lorentz est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} x'^0 = \frac{\gamma(x^0-\beta x)}{1-\lambda((\gamma-1)x^0-\gamma\beta x)} \\ x' = \frac{\gamma(x-\beta x^0)}{1-\lambda((\gamma-1)x^0-\gamma\beta x)} \\ y' = \frac{y}{1-\lambda((\gamma-1)x^0-\gamma\beta x)} \\ z' = \frac{z}{1-\lambda((\gamma-1)x^0-\gamma\beta x)} \end{cases} \tag{1.21}$$

λ est une nouvelle constante universelle donnée par :

$$\lambda = \frac{\alpha_1^x}{\gamma_1\beta_1} = \frac{\alpha_2^x}{\gamma_2\beta_2} = \frac{1}{R}, \tag{1.22}$$

où R est une nouvelle constante universelle.

1.3 La R-algèbre de Poincaré

1.3.1 Générateurs et algèbre du groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est un groupe qui rassemble les transformations par rotation et les transformation par translation dans l'espace de Minkowski, il est défini comme l'ensemble des transformations affines de R^4 qui laissent invariant le carré de l'élément de longueur lorentzien $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, où $\eta_{\mu\nu} = [1,-1,-1,-1]$. Autrement dit, le groupe de Poincaré est constitué par l'ensemble des transformations de Lorentz ; $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, plus l'ensemble de toutes les translations spatio-temporelles ; $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, où a^μ sont les composantes d'un quadri-vecteur constant. les transformation de Poincaré ont alors la forme

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.23}$$

Le groupe de Poincaré joue un rôle primordial dans les théories physiques ; car les lois de la physique doivent être covariantes sous l'action de ce groupe.

Soit une fonction différentiable des coordonnées $F(x) \equiv F(x^\mu)$. La variation infinitésimale de $F(x)$ sous l'action d'une transformation infinitésimale de Poincaré est telle que

$$\delta F = F(x') - F(x) = (w^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu - a^\mu\partial_\mu)F(x) \tag{1.24}$$

Etant donnée l'antisymétrie de $w^{\mu\nu}$, qui implique

$$w^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu = \frac{1}{2}(w^{\mu\nu} - w^{\nu\mu})x_\nu\partial_\mu \tag{1.25}$$

$$= \frac{1}{2}(w^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu - w^{\nu\mu}x_\nu\partial_\mu)$$

$$= \frac{1}{2}(w^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu - w^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu)$$

$$= \frac{1}{2}w^{\mu\nu}(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu)$$

La variation infinitésimale de F(x) est :

$$\delta F(x) = (\frac{1}{2}w^{\mu\nu}(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu) - a^\mu\partial_\mu)F(x) \tag{1.26}$$

qui peut s'exprimer en fonction des opérateurs de translation P_μ et de Lorentz $L_{\mu\nu}$

$$\delta F(x) = F(x') - F(x) = (ia^\mu P_\mu - \frac{i}{2}w^{\mu\nu}L_{\mu\nu})F(x) \tag{1.27}$$

où

$$P_\mu = i\partial_\mu \text{ et } L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu. \tag{1.28}$$

Remarque :

Pour avoir les transfomations infinitésimales de Poincaré, on pose $F(x) = x^\mu$. On poura écrire

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = (ia^\sigma P_\sigma - \frac{i}{2}w^{\sigma\rho}L_{\sigma\rho})x^\mu$$

$$\Rightarrow x'^\mu = (1 + ia^\sigma P_\sigma - \frac{i}{2}w^{\sigma\rho}L_{\sigma\rho})x^\mu \tag{1.29}$$

Pour avoir la variation infinitésimale d'une transformation de Lorentz, il suffit de prendre $a^\sigma = 0$

$$\delta x^\mu = -\frac{i}{2}w^{\sigma\rho}L_{\sigma\rho}x^\mu \tag{1.30}$$

Relations de commutation

L'algèbre de Lie du groupe de Poiancaré est l'espace vectoriel engendré par les 6 générateurs, $L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}$, du groupe de lorentz et 4 générateurs p_μ du groupe des translations. Un élément du groupe de Poincaré est représenté à l'aide de l'application exponentielle comme :

$$U(\Lambda, a) = \exp\left(-\frac{i}{2}w^{\mu\nu}L_{\mu\nu} + ia^\mu p_\mu\right) \tag{1.31}$$

avec $p_\mu = i\partial_\mu$ et $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$. Les générateurs de l'algèbre de Poiancaré vérifient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{cases} [p_\mu, p_\nu] = 0 \\ [L_{\mu\nu}, p_\rho] = \eta_{\mu\rho}p_\nu - \eta_{\nu\rho}p_\mu \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}L_{\sigma\nu} - \eta_{\nu\rho}L_{\sigma\mu} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} \end{cases} \tag{1.32}$$

1.3.2 Les nouveaux crochets de Poisson

On propose les nouveaux crochets de Poisson dans l'espace de phase comme suit :

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0 \tag{1.33}$$

$$\{x^i, p^j\} = -\eta^{ij} = \delta^{ij} \tag{1.34}$$

$$\{x^i, p^0\} = \frac{x^i}{R} \tag{1.35}$$

$$\{p^i, p^j\} = 0 \tag{1.36}$$

$$\{p^i, p^0\} = -\frac{p^i}{R} \tag{1.37}$$

$$\{x^0, p^i\} = 0 \tag{1.38}$$

$$\{x^0, p^0\} = -1 + \frac{x^0}{R}, \tag{1.39}$$

qu'on peut mettre sous une forme quadri-dimensionnelle

$$\begin{cases} \{x^\mu, x^\nu\} = 0 \\ \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{R}\eta^{0\nu}x^\mu \\ \{p^\mu, p^\nu\} = -\frac{1}{R}(p^\mu\eta^{0\nu} - p^\nu\eta^{\mu 0}) \end{cases} \tag{1.40}$$

On remarque que l'algébre des crochets de Poisson satisfait également les identités de Jacobi

$$\{x^\mu, \{x^\nu, x^\lambda\}\} + \{x^\lambda, \{x^\mu, x^\nu\}\} + \{x^\nu, \{x^\lambda, x^\mu\}\} = 0 \tag{1.41}$$

$$\{p^\mu, \{x^\nu, x^\lambda\}\} + \{x^\lambda, \{p^\mu, x^\nu\}\} + \{x^\nu, \{x^\lambda, p^\mu\}\} = 0 \tag{1.42}$$

$$\{p^\mu, \{p^\nu, p^\lambda\}\} + \{p^\lambda, \{p^\mu, p^\nu\}\} + \{p^\nu, \{p^\lambda, p^\mu\}\} = 0 \tag{1.43}$$

La relation (1.41) est évidente car $\{x^\mu, x^\nu\} = 0$. La relation (1.42) est facile à démontrer parce que tous les termes sont nuls $\{x^\lambda, \{p^\mu, x^\nu\}\} = \{x^\lambda, \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{R}\eta^{0\mu}x^\nu\} = 0$.

Nous démontrons alors, la relation (1.43)

$$\begin{aligned}
&\{p^\mu, \{p^\nu, p^\lambda\}\} + \{p^\lambda, \{p^\mu, p^\nu\}\} + \{p^\nu, \{p^\lambda, p^\mu\}\}, \\
&= -\tfrac{1}{R}\{p^\mu, p^\nu\eta^{0\lambda} - p^\lambda\eta^{\nu 0}\} - \tfrac{1}{R}\{p^\lambda, p^\mu\eta^{0\nu} - p^\nu\eta^{\mu 0}\} - \tfrac{1}{R}\{p^\nu, p^\lambda\eta^{0\mu} - p^\mu\eta^{\lambda 0}\}, \\
&= -\tfrac{1}{R}\{p^\mu, p^\nu\}\eta^{0\lambda} + \tfrac{1}{R}\{p^\mu, p^\lambda\}\eta^{\nu 0} - \tfrac{1}{R}\{p^\lambda, p^\mu\}\eta^{0\nu} + \tfrac{1}{R}\{p^\lambda, p^\nu\}\eta^{\mu 0} - \tfrac{1}{R}\{p^\nu, p^\lambda\}\eta^{0\mu} + \tfrac{1}{R}\{p^\nu, p^\mu\}\eta^{\lambda 0}, \\
&= -\tfrac{2}{R}\{p^\mu, p^\nu\}\eta^{0\mu} + \tfrac{2}{R}\{p^\mu, p^\lambda\}\eta^{\nu 0} + \tfrac{2}{R}\{p^\lambda, p^\nu\}\eta^{\mu 0}, \\
&= \tfrac{2}{R^2}(p^\mu\eta^{0\nu} - p^\nu\eta^{\mu 0})\eta^{0\lambda} - \tfrac{2}{R^2}(p^\mu\eta^{0\lambda} - p^\lambda\eta^{\mu 0})\eta^{\nu 0} - \tfrac{2}{R^2}(p^\lambda\eta^{0\nu} - p^\nu\eta^{\lambda 0})\eta^{\mu 0} = 0
\end{aligned}$$

L'opérateur du moment aungulaire est défini par :

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu. \tag{1.44}$$

En utilisant les propriétés des crochets de Poisson, on trouve

$$\begin{cases} \{J_{\mu\nu}, x_\lambda\} = \eta_{\nu\lambda}x_\mu - \eta_{\mu\lambda}x_\nu - \frac{x_\lambda}{R}(x_\mu\eta_{\nu 0} - x_\nu\eta_{\mu 0}) \\ \{J_{\mu\nu}, p_\lambda\} = \eta_{\nu\lambda}p_\mu - \eta_{\mu\lambda}p_\nu + \frac{p_\lambda}{R}(x_\mu\eta_{\nu 0} - x_\nu\eta_{0\mu}) \end{cases} \tag{1.45}$$

Nous pouvons vérifier que l'algébre de Lorentz reste inchangée

$$\{J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}\} = -\eta_{\mu\rho}J_{\lambda\nu} + \eta_{\nu\rho}J_{\lambda\mu} + \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho}. \tag{1.46}$$

Une transformation infinitésimale $\delta\Phi$ est défini par $\delta\Phi = \{-\frac{1}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, \Phi\}$, où $w_{\mu\nu}$ sont des paramètres infinitésimaux vérifiant $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$. La variation infinitésimale des coordonnées et des impulsions est donnée par [15]

$$\begin{cases} \delta x^\lambda = \{-\frac{1}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, x^\lambda\} \\ \delta p^\lambda = \{-\frac{1}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, p^\lambda\} \end{cases} \tag{1.47}$$

1.3.3 La transformation des coordonnées et des Impulsions

Prenons le cas spécial où le seul paramètre non nul est $w^{01} = -w^{10} = -\delta\Phi$. En utilisant les notations conventionnelles $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ et $(p^0, p^1, p^2, p^3) = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$, on déduit

$$\begin{cases} \delta t = (-\frac{x}{c} + \frac{tx}{R})\delta\Phi \\ \delta x = (-ct + \frac{x^2}{R})\delta\Phi \\ \delta y = (\frac{xy}{R})\delta\Phi \\ \delta z = (\frac{xz}{R})\delta\Phi \end{cases} \tag{1.48}$$

$$\begin{cases} \delta E = -(cp_x + \frac{xE}{R})\delta\Phi \\ \delta p_x = -(\frac{E}{c} + \frac{xp_x}{R})\delta\Phi \\ \delta p_y = -\frac{yp_y}{R}\delta\Phi \\ \delta p_z = -\frac{xp_z}{R}\delta\Phi \end{cases} \tag{1.49}$$

En posant $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$, la solution du système (1.48) est donnée par

$$\begin{cases} t' = \frac{\gamma(t - \frac{vx}{c^2})}{\alpha_R} \\ x' = \frac{\gamma(x - vt)}{\alpha_R} \\ y' = \frac{y}{\alpha_R} \\ z' = \frac{z}{\alpha_R} \end{cases} \tag{1.50}$$

et celle du système (1.49)

$$\begin{cases} E' = \alpha_R\gamma(E - vp_x) \\ p'_x = \alpha_R\gamma(p_x - \frac{v}{c^2}E) \\ p'_y = \alpha_R p_y \\ p'_z = \alpha_R p_z \end{cases} \tag{1.51}$$

où

$$\alpha_R = 1 + \frac{1}{R}[(\gamma - 1)ct - \gamma\frac{vx}{c}].$$

Les equations (1.50) sont appelées la transformation de Fock des coordonnées. Lorsque $R \to \infty$, les équations (1.50) et(1.51) se réduisent à la transformation de Lorentz des coordonnées et de quadri-vitesse impulsion.

De (1.50) et (1.51) on peut définir les invariants de cette théorie comme suit :

$$\begin{cases} I_x = (1 - \frac{ct}{R})^{-2}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \\ I_p = (1 - \frac{ct}{R})^{2}\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu \end{cases} \tag{1.52}$$

Lorsque $R \to \infty$ les invariants I_x et I_p se réduisent aux invariants habituels de la relativité restreinte.

Les variables canoniques

A partir de (1.52) nous déterminons les variables canonique suivantes :

$$\begin{cases} X^\mu = (1 - \frac{x^0}{R})^{-1}x^\mu \\ P^\mu = (1 - \frac{x^0}{R})p^\mu \end{cases} \tag{1.53}$$

pour que les invariants I_x et I_p peuvent être exprimés comme en relativité restreinte

$$\begin{cases} I_x = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \\ I_p = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu \end{cases} \tag{1.54}$$

et les crochets de Poisson entre les variables canoniques deviennent

$$\{X^\mu, X^\nu\} = 0 \tag{1.55}$$

$$\{X^\mu, P^\nu\} = -\eta_{\mu\nu} \tag{1.56}$$

$$\{P^\mu, P^\nu\} = 0 \tag{1.57}$$

On constate que les variables (X^μ, P^μ) sont canoniques et se transforment comme des vecteurs lorentziens habituels de la relativité réstreinte, on déduit facilement l'inverse des relations du système (1.53)

$$\begin{cases} x^\mu = (1 - \frac{X^0}{R})^{-1} X^\mu \\ p^\mu = (1 - \frac{X^0}{R}) P^\mu \end{cases} \tag{1.58}$$

Le système(1.58) nous permet de définir l'élément de ligne ds en fonction des variables canoniques comme

$$ds^2 = dX^{0^2} - d\mathbf{X}^2 = c^2 dT^2 - d\mathbf{X}^2 \tag{1.59}$$

où $cT = X^0$ et $\mathbf{X}$ est le vecteur position tri-dimensionnel dans l'espace des variables canoniques.

En utilisant la première équation du systeme (1.53), cette dernière relation reproduit l'expression de l'élement de ligne infinitésimal dans l'espace R-Minkowski

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{ct}{R}\right)^{-4} \left[1 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{3} \left[\left(1 - \frac{ct}{R}\right) v^i + \frac{cx^i}{R}\right]^2\right] dt^2, \tag{1.60}$$

où $v_i = \frac{dx^i}{dt}$. Le repére R(o,x,y,z) est orthonormé, ds peut être écrit sous la forme

$$ds = \frac{c}{(1 - \frac{ct}{R})^2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(1 - \frac{ct}{R}\right) \overrightarrow{v} + \frac{c\overrightarrow{x}}{R}\right]^2} dt \tag{1.61}$$

où $\overrightarrow{x}$ est le vecteur position et $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{x}}{dt}$ est la vitesse.

En utilisant les variables canoniques, il est facile de trouver l'expression de la quadri-impulsion dans l'espace R-Minkowski. On a

$$P^\mu = mc \frac{dX^\mu}{ds} \tag{1.62}$$

En remplaçant X^μ et P^μ par leurs expression (1.53), on obtient

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{ct}{R} \overrightarrow{v} + \frac{c\overrightarrow{x}}{R}\right]^2}} \left[\frac{dx^\mu}{dt} + \frac{cx^\mu}{R\left(1 - \frac{ct}{R}\right)}\right] \tag{1.63}$$

Ainsi, l'impulsion est donnée par :

$$\overrightarrow{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(1 - \frac{ct}{R}\right) \overrightarrow{v} + \frac{c\overrightarrow{x}}{R}\right]^2}} \left[\overrightarrow{v} + \frac{c\overrightarrow{x}}{R\left(1 - \frac{ct}{R}\right)}\right] \tag{1.64}$$

et l'énergie par

$$E = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{ct}{R}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(1 - \frac{ct}{R}\right)\overrightarrow{v} + \frac{c\overrightarrow{x}}{R}\right]^2}} \tag{1.65}$$

quand $R \to \infty$ les relations (1.64) et (1.65) se réduisent aux expressions de quadri-impulsion en relativité resteinte.

La relation de dispersion

Pour trouver la nouvelle relation de dispersion, on doit définir le paramétre M de dimension de masse par

$$M^2c^2 = I_p. \tag{1.66}$$

Nous savons que les variables canoniques se transforment comme des vecteurs Lorentziens habituels, donc on doit définir la masse au repos m en fonction de ces variables en utilisant l'expression qui définie la masse au repos en relativité restreinte

$$\frac{1}{m} = \lim_{P \to 0} \frac{1}{P}\frac{\partial P^0}{\partial P}$$

où $P = \mid \overrightarrow{P} \mid$. Il s'ensuit que la relation de dispersion de la relativité non linéaire de Fock est donnée par

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{\left(1 - \frac{ct}{R}\right)^2} + p^2c^2. \tag{1.67}$$

Quand $R \to \infty$ cette relation se réduit à celle de la relativité restreinte.

1.4 L'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps R-Minkowski

1.4.1 Un Casimir Pour la R-Algèbre

Nous avons vu que la transformation de Fock peut être obtenue avec la déformation des crochets de Poisson (1.40). L'algèbre des crochets de Poisson déformée est une algèbre des groupes cinématiques qui s'accorde avec la symétrie de base de l'espace-temps comme l'homogénèité, l'isotropie et l'invariance sous les boosts. Notre but est de construire un Casimir pour la R-algèbre de Poincaré, nous remarquons que I_p n'est pas un Casimir. En fait, nous pouvons vérifer que I_p ne commute pas avec les générateurs du groupe R-Poincaré p^0 et p^i. Pour construire le premier Casimir de la R-algèbre, on doit compléter les relations (1.40) avec les relations entre les rotations pures :

$$M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk} \tag{1.68}$$

et les boosts :

$$\tilde{N}_i = J_{0i} \tag{1.69}$$

où $J_{\mu\nu} = x_\mu p^\nu - x_\nu p_\mu$ est l'opérateur du moment angulaire et ϵ_{ijk} est le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ($\epsilon_{123} = 1$)

Tout d'abord, on prend la combinaison possible de ces générateurs avec les p_0 et p_i, alors le Casimir est décrit sous la forme générale suivant [17] :

$$C = p^\mu p_\mu + \alpha\overrightarrow{M}.\overrightarrow{M} + \beta\overrightarrow{N}.\overrightarrow{N} + \gamma\overrightarrow{N}.\overrightarrow{p} + \sigma\overrightarrow{M}.\overrightarrow{N} \tag{1.70}$$

où on a exclu $\overrightarrow{M}.\overrightarrow{p}$ car $M_i p_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k p_i = 0$. α , β , γ , σ sont des constants à détérminer.

L'opération de symétrisation permet d'écrire

$$N_i = x_0 p_i - \frac{1}{2}(x_i p_0 + p_0 x_i). \tag{1.71}$$

Ainsi le casimir C est définir par :

$$C = p_0^2 - \overrightarrow{p}.\overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{M}.\overrightarrow{M} + \beta \overrightarrow{N}.\overrightarrow{N} + \gamma \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{N}.\overrightarrow{p} + \overrightarrow{p}.\overrightarrow{N}\right) + \sigma \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{M}.\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}.\overrightarrow{M}\right) \tag{1.72}$$

Pour fixer les coefficients α β γ σ, on impose l'ensemble des contraintes suivantes au Casimir C :

$$\begin{cases} \{C, p_i\} = 0 \\ \{C, p_0\} = 0 \\ \{C, N_i\} = 0 \\ \{C, M_i\} = 0 \end{cases} \tag{1.73}$$

On constate qu'il est impossible de construire un tel Casimir, si on maintient la définition des générateurs des boosts par $\tilde{N}_i = J_{0i} = x_0 p_i - x_i p_0$. A ce stade là, il est essentiel de redéfinir les générateurs des boosts N_i. Cette redéfinition est tout à fait naturel, du fait que la déformation est dans la direction p_0.

1.4.2 La R-algébre étendue

A.Bouda et T.Foughali ont suggéré une redéfinition du générateur N_i come suit [14] :

$$N_i = x_0 p_i - x_i p_0 - \frac{1}{2R} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu P_i \tag{1.74}$$

Après la déformation des crochets de Poisson fondamentaux , on va construire la R-algèbre par les crochets de Poisson qui font intervenir les générateurs des rotations et les nouveaux générateurs des boosts donnés par (1.74). Après calculs, on obtient [18] :

$$\{N_i, p_0\} = -p_i + \frac{N_i}{R} \tag{1.75}$$

$$\{N_i, p_j\} = \eta_{ij} p_0 - \frac{1}{R} \epsilon_{ijk} M_k \tag{1.76}$$

$$\{M_i, p_0\} = 0 \tag{1.77}$$

$$\{M_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k \tag{1.78}$$

$$\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} M_k \tag{1.79}$$

$$\{M_i, N_j\} = \epsilon_{ijk} N_k \tag{1.80}$$

$$\{N_i, N_j\} = -\epsilon_{ijk} M_k \tag{1.81}$$

1.4.3 La quantification

Les variables classiques deviennent des opérateurs

$$x, p \to \widehat{x}, \widehat{p}$$

et les crochets de Poiasson deviennent des commutateurs

$$\{,\} \to \frac{1}{i\hbar}[,]$$

Le générateur N_i définit par la relation (1.74) devient l'opérateur quantique

$$\widehat{N_i} = \widehat{x}_0\widehat{p}_i - \frac{1}{2}(\widehat{x}_0\widehat{p}_0 + \widehat{p}_0\widehat{x}_i) - \frac{1}{2R}\widehat{x}_0{}^2\widehat{p}_i + \frac{1}{4R}\left(\widehat{X}^2\widehat{p}_i + \widehat{p}_i\widehat{X}^2\right) \tag{1.82}$$

Dans l'espace R-Minkowski, les crochets de Poisson fondamentaux prennent les formes suivates :

$$[\widehat{x}^\mu, \widehat{x}^\nu] = 0 \tag{1.83}$$

$$\left[\widehat{x}^0, \widehat{p}^i\right] = 0 \tag{1.84}$$

$$\left[\widehat{p}^i, \widehat{p}^j\right] = 0 \tag{1.85}$$

$$\left[\widehat{p}^i, \widehat{p}^0\right] = -i\hbar\frac{\widehat{p}^i}{R} \tag{1.86}$$

$$\left[\widehat{x}^i, \widehat{p}^j\right] = -i\hbar\eta^{ij} \tag{1.87}$$

$$\left[\widehat{x}^i, \widehat{p}^0\right] = i\hbar\frac{x^i}{R} \tag{1.88}$$

$$\left[\widehat{x}^0, \widehat{p}^0\right] = -i\hbar\left(1 - \frac{\widehat{x}^0}{R}\right) \tag{1.89}$$

et la R-algèbre de Poincaré devient :

$$[M_i, \widehat{p}_0] = 0 \tag{1.90}$$

$$[M_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{p}_k \tag{1.91}$$

$$[M_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k \tag{1.92}$$

$$[M_i, N_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}N_k \tag{1.93}$$

$$[N_i, N_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}M_k \tag{1.94}$$

$$[N_i, \widehat{p}_0] = -i\hbar\widehat{p}_i + i\hbar\frac{N_i}{R} \tag{1.95}$$

$$[N_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\eta_{ij}\widehat{p}_0 - \frac{i\hbar}{R}\epsilon_{ijk}M_k \tag{1.96}$$

1.4.4 Le Casimir

Un Casimir est un opérateur scalaire,

$$C = p_0^2 - \overrightarrow{p}\,\overrightarrow{p} + \alpha\overrightarrow{M}\overrightarrow{M} + \beta\overrightarrow{N}\overrightarrow{N} + \gamma\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{N}\overrightarrow{p} + \overrightarrow{p}\overrightarrow{N}\right) + \sigma\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{M}\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}\overrightarrow{M}\right)$$

nous pouvons définir un nouveau Casimir pour notre model à partir de l'ensemble des commutateurs (1.83)-(1.96). On a :

$$[C,\widehat{p}_0] = \left[\widehat{p}_0{}^2 - \widehat{p}_i\widehat{p}_i + \alpha M_iM_i + \beta N_iN_i + \tfrac{\gamma}{2}\left(N_i\widehat{p}_i + \widehat{p}_iN_i\right) + \tfrac{\sigma}{2}\left(M_iN_i + N_iM_i\right), \widehat{p}_0\right]$$

$$= 2i\hbar\frac{\widehat{p}_i\widehat{p}_i}{R} + \beta\left[\left(-i\hbar\widehat{p}_i + i\hbar\frac{1}{R}N_i\right)N_i + N_i\left(-i\hbar\widehat{p}_i + i\hbar\frac{1}{R}N_i\right)\right]$$

$$+\frac{\gamma}{2}\left[\left(-i\hbar\widehat{p}_i + i\hbar\frac{1}{R}N_i\right)\widehat{p}_i + N_i\left(-i\hbar\frac{\widehat{p}_i}{R}\right) + \widehat{p}_i\left(-i\hbar\widehat{p}_i + i\hbar\frac{1}{R}N_i\right) + \left(-i\hbar\frac{\widehat{p}_i}{R}\right)N_i\right]$$

$$+\frac{\sigma}{2}\left[M_i\left(-i\hbar\widehat{p}_i + i\hbar\frac{1}{R}N_i\right) + \left(i\hbar\widehat{p}_i + i\hbar\frac{1}{R}N_i\right)M_i\right]$$

$$= 2i\hbar\frac{\widehat{p}_i\widehat{p}_i}{R} - i\hbar\gamma\widehat{p}_i\widehat{p}_i + i\hbar\beta\left[2N_iN_i - (\widehat{p}_iN_i + N_i\widehat{p}_i)\right] + i\hbar\frac{\sigma}{2R}\left[M_iN_i + N_iM_i\right]$$

Maintenant en imposant que $[C,\widehat{p}_0] = 0$, nous montrons que :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \sigma = 0 \\ \gamma = \frac{2}{R} \end{cases} \tag{1.97}$$

Pour fixer α on calcule le commutateur $[C,\widehat{p}_i]$. Avec l'utilisation des valeurs β , γ , σ données par (1,97), on trouve :

$$[C,\widehat{p}_j] = \left[\widehat{p}_0{}^2 - \widehat{p}_i\widehat{p}_i + \alpha M_iM_i + \frac{1}{R}\left(N_i\widehat{p}_i + \widehat{p}_iN_i\right), \widehat{p}_j\right]$$

$$= [\widehat{p}_0,\widehat{p}_j]\,\widehat{p}_0 + \widehat{p}_0\,[\widehat{p}_0,\widehat{p}_j] + \alpha\left([M_i,\widehat{p}_j]\,M_i + M_i\,[M_i,\widehat{p}_j]\right) + \frac{1}{R}\left([N_i,\widehat{p}_j]\,\widehat{p}_i + \widehat{p}_i\,[N_i,\widehat{p}_j]\right)$$

$$= \tfrac{i\hbar\widehat{p}_j\widehat{p}_0}{R} + \tfrac{i\hbar\widehat{p}_0\widehat{p}_j}{R} + \alpha i\hbar\epsilon_{ijk}\left(\widehat{p}_kM_i + M_i\widehat{p}_k\right) + \tfrac{1}{R}\left[\left(-i\hbar\delta_{ij}\widehat{p}_0 - \tfrac{i\hbar}{R}\epsilon_{ijk}M_k\right)\widehat{p}_i + \widehat{p}_i\left(-i\hbar\delta_{ij}\widehat{p}_0 - \tfrac{i\hbar}{R}\epsilon_{ijk}M_k\right)\right]$$

$$= \alpha i\hbar\epsilon_{ijk}\left[\widehat{p}_kM_i + M_i\widehat{p}_k\right] - \frac{i\hbar}{R^2}\epsilon_{ijk}\left[M_k\widehat{p}_i + \widehat{p}_iM_k\right]$$

$$= \alpha i\hbar\epsilon_{ijk}\left[\widehat{p}_kM_i + M_i\widehat{p}_k\right] - \frac{i\hbar}{R^2}\epsilon_{kji}\left[\widehat{p}_kM_i + M_i\widehat{p}_k\right]$$

$$= i\hbar\epsilon_{ijk}\left(\alpha + \frac{1}{R^2}\right)\left[\widehat{p}_kM_i + M_i\widehat{p}_k\right]$$

Avec la contrainte $[C,\widehat{p}_j] = 0$ on déduit que $\alpha = \frac{-1}{R^2}$

La forme finale du casimir C est donnée par :

$$C = \widehat{p}_0{}^2 - \widehat{p}^i\widehat{p}^i - \frac{1}{R^2}M^iM^i + \frac{1}{R}\left(N^i\widehat{p}^i + \widehat{p}^iN^i\right). \tag{1.98}$$

Quand $R \to \infty$, le Casimir C se réduit au premier Casimir du groupe de Poincaré pour la relativité restreinte

$$C = \widehat{p}_0{}^2 - \widehat{p}^i\widehat{p}^i.$$

1.4.5 L'équation de Klein-Gordin

A partir du Casimir (1.98), nous pouvons construir l'équation de Klein-Gordon qui décrit une particule scalaire libre dans l'espace R-Minkowski.

Comme C est un scalaire, alors nous pouvons l'égaler à une constante qui peut être la masse au repos de la particule. L'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps R-Minkowski est alors donnée par :

$$C\psi = m^2c^2\psi \tag{1.99}$$

où ψ est la fonction d'onde décrivant la particule scalaire.

En utilisant l'expression du Casimir donnée par (1.98), l'equation de Klein Gordon devient :

$$\left[\widehat{p_0}^2 - \widehat{p}^i\widehat{p}^i - \frac{1}{R^2}M^iM^i + \frac{1}{R}\left(N^i\widehat{p}^i + \widehat{p}^iN^i\right)\right]\psi = m^2c^2\psi \tag{1.100}$$

1.4.6 Une Représentation pour la R-algèbre de Poincaré

Nous pouvons vérifier qu'une représentation pour l'algèbre (1.40) peut être donnée par les opérateur $\widehat{x}^\mu$ et $\widehat{p}^\mu$ suivants,

$$\widehat{x}^\mu = x^\mu$$
$$\widehat{p}^0 = i\hbar(\partial^0 - \frac{1}{R}x^\mu\partial_\mu) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{i\hbar}{R}(x^0\frac{\partial}{\partial x^0} + x^i\frac{\partial}{\partial x^i})$$
$$\widehat{p}^i = i\hbar\partial^i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla}^i$$

Ainsi, l'équation de Klein-Gordon dans lespace-temps R-Minkowski (1.100) devient

$$[(1 - \frac{x^0}{R})^2(\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \overrightarrow{\nabla}^2) + \frac{2}{R}(1 - \frac{x^0}{R})\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\psi = 0 \tag{1.101}$$

En utilisuant, l'expression générale de l'équation de Klein-Gordon dans un espace courbe donné par sa métrique $g = g_{\mu\nu}$

$$[\frac{1}{\sqrt{\mid g \mid}}\partial_\mu(\sqrt{\mid g \mid}g^{\mu\nu}\partial_\nu) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}] = 0 \tag{1.102}$$

L'équation (1.101) est exactement l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps de de Sitter donné par sa metrique conforme

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - \frac{x^0}{R})^2}[dx^{0^2} - dX^2] \tag{1.103}$$

Ce résultat prouve qu' il existe une correspondance entre l'espace-temps R-Minkowski et l'espace-temps de de Sitter.

Chapitre 2

L'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski

Dans ce chapitre, on examine l'équation de Dirac libre dans l'espace-temps R-Minkowski. Nous visons aussi d'explorer davantage la correspondence, déja établie dans [3], entre l'espace-temps de de Sitter et l'espace-temps R-Minkowski.

On a déja les générateurs de rotations pure

$$M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk} \tag{2.1}$$

et le boost

$$\tilde{N}_i = J_{0i}$$

où $\tilde{J}_\mu = x_\mu p - x p_\mu$ est le générateur du moment cinétique [7]. Nous avons proposé une expression modifiée des générateurs de boost

$$N_i = J_{0i} - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i, \tag{2.2}$$

qui permet d'otenir le premier Casimir

$$C = p_0^2 - p^i p^i + \frac{1}{R}(N^i p^i + p^i N^i) - \frac{1}{R^2}M^i M^i \tag{2.3}$$

2.1 L'équation de Dirac dans l'espaces-temps R-Minkowski

Pour construire l'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski , on impose que le carré de l'opérateur de Dirac reproduit en partie l'opérateur de Klein-Gordon donné par le Casimir d'expression (2.3). En tentant compte des comutateurs

$$[x^\mu, x^\nu] = 0,$$

$$[x^\mu, p^\nu] = -i\hbar(\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{R}\eta^{0\nu}x^\mu),$$

$$[p^\mu, p^\nu] = -\frac{i\hbar}{R}(p^\mu \eta^{0nu} - p^\nu \eta^{\mu 0}).$$

Nous pouvons montrer que :

$$M^i M^i = \epsilon^{ijk}\epsilon^{ilm}x^j p^k x^l p^m = (\overrightarrow{x})^2(\overrightarrow{p})^2(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p})^2 + i\hbar\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p} \tag{2.4}$$

$$N^i p^i = x^0(\overrightarrow{p})^2 - \overrightarrow{x}.\overrightarrow{p}p^0 - \frac{i\hbar}{R}\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p} - \frac{1}{2R}(x^0)^2(\overrightarrow{p})^2 + \frac{1}{2R}(\overrightarrow{x})^2(\overrightarrow{p})^2 \tag{2.5}$$

$$p^i N^i = x^0(\overrightarrow{p})^2 - \overrightarrow{x}.\overrightarrow{p}p^0 - \frac{i\hbar}{R}\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p} - \frac{1}{2R}(x^0)^2(\overrightarrow{p})^2 + \frac{1}{2R}(\overrightarrow{x})^2(\overrightarrow{p})^2 + 3i\hbar p_0 \tag{2.6}$$

En remplaçant les expressions ci-dessus dans (2.3), on obtient

$$C = p_0^2 - \left(1 - \frac{x^0}{R}\right)^2 (\overrightarrow{p})^2 - \frac{2}{p}\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p}p^0 + \frac{1}{R^2}(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p})^2 - \frac{3i\hbar}{R^2}\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p} + \frac{3i\hbar}{R}p_0 \tag{2.7}$$

il est intéressant de noter qu'en utilisant cette dernière expression et la fait que

$$\gamma^0\gamma^i p_0 \left(1 - \frac{x^0}{R}\right) p_i + \gamma^i\gamma^0 \left(1 - \frac{x^0}{R}\right) p_i p_0 = 0 \tag{2.8}$$

et

$$\frac{\gamma^i\gamma^0}{R} p_i x^j p_j + \frac{\gamma^0\gamma^i}{R} x^j p_j p_i = -i\hbar\frac{\gamma^0\gamma^i}{R} p_i \tag{2.9}$$

nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned} & C - m^2c^2 - i\hbar\left(1 - \frac{x^0}{R}\right)\frac{\gamma^0\gamma^i}{R}p_i - \frac{9\hbar_2}{4R^2} \\ = & \left[\gamma^0 p_0 + \left(1 - \frac{x^0}{R}\right)\gamma^i p_i + \frac{\gamma^0}{R}x^i p_i + i\frac{3\hbar\gamma^0}{2R} + mc\right] \\ \times & \left[\gamma^0 p_0 + \left(1 - \frac{x^0}{R}\right)\gamma^i p_i + \frac{\gamma^0}{R}x^i p_i + i\frac{3\hbar\gamma^0}{2R} - mc\right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

γ^0 et γ^i sont des matrice de Dirac.

L'équation (2.10) suggére d'écrire l'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski sous la forme suivante

$$\left[\gamma^0 p_0 + \left(1 - \frac{x^0}{R}\right)\gamma^i p_i + \frac{\gamma^0}{R}x^i p_i + i\frac{3\hbar\gamma^0}{2R} - mc\right]\psi = 0 \tag{2.11}$$

En effet, les deux derniers termes de (2.10) qui font que le carré de l'operateur de Dirac est différent de l'opérateur de Klein-Gordon sont la manifestation du spin $\frac{1}{2}$ pour la particule de Dirac. Pour plus de détails, la présence de ces deux termes supplémentaires est justifiée à l'annexe A.1. Généralement, dans l'espace courbe la solution de l'équation de Dirac n'est pas une solution de l'équation de Klein-Gordon.

Utilisons, maintenant, la représentation des opérateurs $\hat{x}$, $\hat{p}_0$, $\hat{p}^i$, trouvée pour la R-algèbre de Poincaré

$$\hat{x}^\mu = x^\mu, \tag{2.12}$$

$$\hat{p}^0 = i\hbar(\partial^0 - \frac{1}{R}x^\mu\partial_\mu) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{i\hbar}{R}(x^0\frac{\partial}{\partial x^0} + x^i\frac{\partial}{\partial x^i}), \tag{2.13}$$

$$\hat{p}^i = i\hbar\partial^i = i\frac{\partial}{\partial x_i} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla}^i. \tag{2.14}$$

on obtient,

$$\begin{aligned} & \big(\gamma^0 p_0 + (1 - \frac{x^0}{R})\gamma^i p_i + \frac{\gamma^0}{R}x^i p_i + i\frac{3\hbar\gamma^0}{2R} - mc\big)\psi \\ = & \big(\gamma^0(i\partial_0 - \frac{i}{R}(x^0\partial_0 + x^i\partial_i)) + i(1 - \frac{x^0}{R})\gamma^i\partial_i + i\frac{\gamma^0}{R}x^i\partial_i + i\frac{3\gamma^0}{2R} - mc/\hbar\big)\psi \\ = & \big(i(1 - \frac{x^0}{R})\gamma^0\partial_0 + i(1 - \frac{x^0}{R})\gamma^i\partial_i + i\frac{3\gamma^0}{2R} - mc/\hbar\big)\psi = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Cette dernière équation est l'équation de Dirac dans l'espace de de Sitter donnée par sa métrique conforme plate avec un facteur de conformité $a(t) = (1 - \frac{x^0}{R})^{-1} = (1 - \omega t)^{-1}$ (posons $\omega = \frac{c}{R}$).

2.2 Image de Schrodinger de l'équation de Dirac

Nous utilisons l'image de Schrodinger développée dans [8] pour résourdre l'équation (2.15), et pour donner une solution exacte de l'équation de Dirac dans le R-Minkowski .

La représentation de Schrödinger (SP) dans un espace courbe de l'équation de Dirac est la représentation où la partie cinétique de l'équation de Dirac libre prend la forme standard que la partie cinétique de l'équation de Dirac en relativité restreinte $\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i$, et l'interaction avec le champ gravitationel est séparé dans un terme approprié. Cotăescu a démontré que la transformation $\psi(x) \to \psi_S(x) = W(x)\psi(x)$ menant à la SP dans l'espace de de Sitter est produite par l'opérateur des dilatations dépendant du temps

$$\psi(x) \to \psi_s(x) = W(x)\psi(x)$$

A partir de l'image de Schrodinger on a

$$W(x) = exp\left[-ln\left(\alpha(t)\right)\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{\partial}\right)\right] \tag{2.16}$$

avec

$$W(x)^{\dagger} = \alpha^3(t)W(x)^{-1} \tag{2.17}$$

et les propriétés suivantes

$$W(x)F(x)W(x)^{-1} = F\left(\frac{1}{\alpha(t)}x\right); W(x)G(\overrightarrow{\partial})W(x)^{-1} = G(\alpha(t)\overrightarrow{\partial}) \tag{2.18}$$

F et G sont des fonctions arbitraires

Posons $\alpha \equiv \xi^{-1} = (1 - \frac{x^0}{R})^{-1}$ dans (2.16),

$$W(x) = exp\left[\frac{i}{\hbar}ln(\xi)(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p})\right] \tag{2.19}$$

et

$$W(x)G(\overrightarrow{P})W(x)^{-1} = G(\alpha(t)\overrightarrow{P}) \tag{2.20}$$

En utilisant le fait que p_0 commute avec $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p}$ et $[p_0, \xi] = \frac{-i\hbar\xi}{R}$ nous avons

$$\begin{aligned} W(x)p_0W(x)^{-1} &= W(x)\left[p_0, W(x)^{-1}\right] + p_0 \\ &= W(x)\left[p_0, \xi\right]\frac{\partial W(x)^{-1}}{\partial\xi} + p_0 \\ &= p_0 - \frac{\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p}}{R} \end{aligned} \tag{2.21}$$

En remplaçant dans (2.11) $\psi(x)$ par $W^{-1}\psi(x)$ et en multipliant à gauche la même équation par W , nous obtenons dans l'image de Schrodinger l'équation de Dirac libre dans l'espace-temps R-Minkowski

$$\left[\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - 2\frac{\gamma^0}{R}\overrightarrow{x}.\overrightarrow{p} + i\frac{3\gamma^0}{2R} - mc\right]\psi_s = 0 \tag{2.22}$$

où les relations (2.20) et (2.21) ont été utilisées. Avec la représentation donnée dans (2.13) et (2.14), la forme différentielle de cette derniere équation est

$$\left[i\gamma^0\left(\left(1 - \frac{x^0}{R}\right)\partial_0 + \frac{x^i\partial_i}{R} + \frac{3}{2R}\right) + i\gamma^i\partial_i - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi_s = 0 \tag{2.23}$$

2.3 Solution de l'équation de Dirac libre dans l'espace-temps R-Minkowski

Définissons le bispineur $\tilde{\psi}$ par

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

où Φ et χ sont deux spineur à déterminer.

Faisons la substitution $\psi_s = (1 - \frac{x^0}{R})^{\frac{3}{2}}\tilde{\psi}$ dans l'équation (2.23) pour obtenir :

$$\left[i\gamma^0\left(\left(1 - \frac{x^0}{R}\right)\partial_0 + \frac{x^i\partial_i}{R}\right) + i\gamma^i\partial_i - \frac{mc}{\hbar}\right]\tilde{\psi} = 0 \tag{2.25}$$

On pose $c = \hbar = 1$, et en multipliant à gauche de (2.25) par γ^0, on obtient

$$\left[i\left(1 - \frac{x^0}{R}\right)\partial_0 + i\left(\alpha^i + \frac{x^i}{R}\right)\partial_i - \gamma^0 m\right]\tilde{\psi} = 0. \tag{2.26}$$

En posant $\xi = \left(1 - \frac{x^0}{R}\right)$, cette dernière équation devient

$$\left[\xi\partial_\xi - (R\alpha^i + x^i)\partial_i - i\gamma^0 Rm\right]\tilde{\psi} = 0 \tag{2.27}$$

En utilisant la réprésentation standard des matrices γ^μ de Dirac , l'équation (2.27) conduit aux équations suivantes :

$$\left(\xi\partial_\xi - x^i\partial_i - iRm\right)\Phi - R\sigma^i\partial_i\chi = 0 \tag{2.28}$$

$$\left(\xi\partial_\xi - x^i\partial_i + iRm\right)\chi - R\sigma^i\partial_i\Phi = 0 \tag{2.29}$$

Multiplions à gauche (2.29) par $R\sigma^i\partial_i$

$$R\sigma^i\partial_i\left[\left(\xi\partial_\xi - x^i\partial_i + iRm\right)\chi - R\sigma^i\partial_i\Phi\right] = 0. \tag{2.30}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\xi\partial_\xi - 1 - x^i\partial_i + iRm\right)\left(\xi\partial_\xi - x^j\partial_j - iRm\right) - R^2\nabla^2\right]\Phi = 0 \\
\Rightarrow &\Big[\xi^2\partial_\xi^2 + \cancel{\xi\partial_\xi} - \xi x^i\partial_i\partial_\xi - i\cancel{Rm\xi\partial_\xi} - \cancel{\xi\partial_\xi} + x^i\partial_i + iRm \\
&- \xi x^i\partial_i\partial_\xi + x^i\partial_i + x^ix^j\partial_i\partial_j + i\cancel{Rmx^i\partial_i} + i\cancel{Rm\xi\partial_\xi} - i\cancel{Rmx^i\partial_i} + R^2m^2 - R^2\nabla^2\Big]\Phi = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, on aboutit à l'équation suivante pour Φ

$$\left(\xi^2\partial_\xi^2 - 2\xi x^i\partial_i\partial_\xi + 2x^i\partial_i + x^ix^j\partial_i\partial_j - R^2\nabla^2 + iRm + R^2m^2\right)\Phi = 0 \tag{2.31}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\left((\xi\partial_\xi - x^i\partial_i)^2 - (\xi\partial_\xi - x^i\partial_i) - R^2\nabla^2 + iRm + R^2m^2\right)\Phi = 0. \tag{2.32}$$

Dans le système des coordonnées sphériques (r, θ, ϑ), ∇^2 est défini par

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla^2_{(\theta,\vartheta)} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial_r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\right) - \frac{\overrightarrow{L}^2}{r^2} \tag{2.33}$$

avec $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{p}$ est le générateur des moments

$$\overrightarrow{L}^2 = -\nabla^2_{(\theta,\vartheta)}$$

donc

$$\overrightarrow{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}$$

Sachant que $x^i\partial_i = r\partial_r$, l'équation (2.32) devient

$$\left[(\xi\partial_\xi - r\partial_r)^2 - (\xi\partial_\xi - r\partial_r) - \frac{R^2}{r^2\partial_r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\right) + \frac{R^2}{r^2}\overrightarrow{L}^2 + iRm + R^2m^2\right]\Phi = 0 \tag{2.34}$$

Cette équation est séparable, on peut considérer le schéma de séparation suivant

$$\Phi = U(\xi, r)\Omega(\theta,\vartheta) \tag{2.35}$$

Ce qui conduit au systéme suivant

$$\overrightarrow{L}^2\Omega(\theta,\vartheta) - \lambda\Omega(\theta,\vartheta) = 0 \tag{2.36}$$

Où λ est une constante de séparation. En remplaçant (2.35) dans (2.34), on obtient la partie radiale sous la forme :

$$\left[(\xi\partial_\xi - r\partial_r)^2 - (\xi\partial_\xi - r\partial_r) - \frac{R^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial_r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\right) + iRm + R^2m^2 + \frac{R^2}{r^2}\lambda\right]U(\xi, r) = 0 \tag{2.37}$$

La solution (2.36) est rèalisée pour $\lambda = l(l+1)$ à l'aide des spineurs harmoniques sphériques, qui sont définis par les relations (A.10) et (A.11). EN faisant le changement des variables $\eta = \xi r$ et $\xi = \zeta$ tel que

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = r\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{\eta}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\zeta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \xi\frac{\partial}{\partial\eta} = \zeta\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{2.38}$$

ce qui implique que $\quad \xi\partial_\xi - r\partial_r = \zeta\partial_\zeta$.

d'autre part $\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) = \frac{1}{r^2}\zeta\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{\eta^2}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta}) = \zeta^2(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{2}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta})$.

et en les remplaçant dans (2.37), cette dernière prendra la forme suivante :

$$\frac{1}{R^2\zeta^2}\left(\zeta^2\partial_\zeta^2 + iRm + R^2m^2\right)U_l(\zeta,\eta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{2\partial}{\eta\partial\eta} - \frac{l(l+1)}{\eta^2}\right)U_l(\zeta,\eta) \tag{2.39}$$

Ainsi, si nous définissons $U_l(\zeta,\eta) = V(\zeta)Z_l(\eta)$, nous pouvons obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} \left(\zeta^2\partial_\zeta^2 + R^2t^2\zeta^2 + iRm + R^2m^2\right)V(\zeta) = 0 \\ \left(\eta^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + t^2\eta^2 - l(l+1)\right)Z_l(\eta) = 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

où t^2 est une constante de séparation. La premiére relation de (2.40) possède une solution qu'on peut exprimer à l'aide de la fonction de Hankel de premier type [10],[11]

$$V(\zeta) = \zeta_{\frac{1}{2}}H_{\nu-}(Rk\zeta), \tag{2.41}$$

par contre les solutions de la deuxième relation (2.40) sont des fonctions de Bessel sphériques et la seule solution qui existe pour $\mid t \mid > 0$ est :

$$Z(\xi, r) = N_l j^l(t\, r\, \xi) \tag{2.42}$$

où N_l est une constante de normalisation. Ainsi, la solution physique de (2.37) est

$$U_l(\xi, r) = N_l \xi^{\frac{1}{2}} H_{\nu-}(Rt\xi) j^l(tr\xi) \tag{2.43}$$

Pour le deuxième spineur χ, on pose $t = p$ et $X = pr\xi$ et en utilisant la propriété suivante :

$$\overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{\nabla} f(r)\Omega^l_{j,m} = \left[\frac{df(r)}{dr} + \frac{1+k}{r} f(r)\right] (\overrightarrow{\sigma}.\widehat{r})\Omega^l_{j,m} \tag{2.44}$$

où

$$k = \pm(j + \frac{1}{2}) = \begin{cases} -(l+1) \; pour \; j = l + \frac{1}{2} \\ l \; pour \; j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.45}$$

avec $(\overrightarrow{\sigma}.\widehat{r})\Omega^k_{j,m} = -\Omega^{-k}_{j,m}$. On a alors

$$R\sigma^i \partial_i \Phi = N_l R \sigma^i \partial_i \left[j_l(X)\Omega^l_{j,m}(\theta, \vartheta)\right] \xi^{\frac{1}{2}} H_{\nu-}(Rp\xi) \tag{2.46}$$

$$= N_l R \left\{ \left[\frac{d_{j_l(X)}}{dr} + \frac{1+k}{r} j_l(X)\right] (\overrightarrow{\sigma}.\widehat{r})\Omega^l_{j,m} \right\} \xi^{\frac{1}{2}} H_{\nu-}(Rp\xi)$$

$$= -N_l Rp \xi^{\frac{3}{2}} H_{\nu-}(Rp\xi) j_{l^-}(X)\Omega^{l^-}_{j,m}$$

avec $l^- = 2j - l$. En utilisant les propriétés des fonctions de Bessel d'ordre entier

$$\frac{dj_l}{d\rho}(\rho) = \frac{l}{\rho} j_l(\rho) - j_{l+1}(\rho)$$

$$\frac{dj_l}{d\rho}(\rho) = j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} j_l(\rho)$$

$$j_{-l} = (-1)^l j_l$$

avec l'utilisation de (2.46) et du fait que $x^i \partial_i = r\partial_r$, l'équation (2.29) donne

$$(\xi\partial_\xi - r\partial_r + iRm)\, \chi = -N_l Rp \xi^{\frac{3}{2}} H_{\nu-}(Rp\xi) j_{l^-}(X)\Omega^{l^-}_{j,m} \tag{2.47}$$

On pose $\tilde{\chi} = \xi^{\frac{1}{2}}\chi$, la dernière équation prendera la forme suivante :

$$\left(\xi\partial_\xi - r\partial_r + iRm + \frac{1}{2}\right) \tilde{\chi} = -N_l (Rp\xi) H_{\nu-}(Rp\xi) j_{l^-}(X)\Omega^{l^-}_{j,m} \tag{2.48}$$

En posant $Z = Rp\xi$ on arrive à l'équation suivane :

$$\left(Z\partial_Z - r\partial_r + iRm + \frac{1}{2}\right) \tilde{\chi} = -N_{lZ} H_{\frac{1}{2}-iRm}(Rp\xi) H_{\nu-}(Rp\xi) j_{l^-}(X)\Omega^{l^-}_{j,m} \tag{2.49}$$

Comme $X = pr\xi$, il est facile de vérifier que $(\xi\partial_\xi - r\partial_r)\, j^l(X) = 0$, il en résulte par utilisation de la relation de récurrence pour les fonctions de Bessel

$$Z\partial_Z \wp_\nu(Z) + \nu\wp_\nu(Z) = Z\wp_{\nu-1}(Z) \tag{2.50}$$

et les propriétés des fonctions de premier type de Hankel

$$\begin{cases} H^{(1)}_{-\nu}(Z) = \exp(i\pi\nu)H^{(1)}_{\nu}(Z) \\ H^{(2)}_{-\nu}(Z) = \exp(-i\pi\nu)H^{(2)}_{\nu}(Z) \end{cases} \tag{2.51}$$

que la solution pour le spineur χ peut être obtenue comme

$$\chi = -N_l \exp(-i\pi\nu)H^{(1)}_{\nu_+}(Rp\xi)_{jl^-}(pr\xi)\Omega^{l^-}_{j,m} \tag{2.52}$$

avec $\nu_+ = \frac{1}{2} + iRm$. Ainsi, la solution pour l'équation de Dirac réduite (2.25) peut s'écrire comme

$$\tilde{\psi} = N_l\xi^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{\pi}{2}Rm) \begin{pmatrix} \exp(\frac{\pi}{2}Rm)H^{(1)}_{\nu_-}(Rp\xi)_{jl}(pr\xi)\Omega^{l}_{j,m}(\theta,\vartheta) \\ \exp(-\frac{\pi}{2}Rm)H^{(1)}_{\nu_+}(Rp\xi)_{jl^-}(pr\xi)\Omega^{l^-}_{j,m}(\theta,\vartheta) \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

Enfin, on peut écrire la solution de l'équation de Dirac (2.23) comme suit

$$\psi_s = \xi^{\frac{3}{2}}\tilde{\psi} = N_l\xi^2 \exp(-\frac{\pi}{2}Rm) \begin{pmatrix} \exp(\frac{\pi}{2}Rm)H^{(1)}_{\nu_-}(Rp\xi)_{jl}(pr\xi)\Omega^{l}_{j,m}(\theta,\vartheta) \\ \exp(-\frac{\pi}{2}Rm)H^{(1)}_{\nu_+}(Rp\xi)_{jl^-}(pr\xi)\Omega^{l^-}_{j,m}(\theta,\vartheta) \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

Normalisation

La constante de normalisation N_l est déterminée par la condition

$$\int_\Sigma d^3x\Psi^\dagger(x)\Psi(x) = 1, \qquad d^3x = r^2 dr d\Omega.$$

où on intègre sur l'hypersurface de genre espace "*spacelike*" à temps constant Σ.
Les spineurs harmoniques sphériques sont normalisés par la condition

$$\int (\Omega^*)^{l'}_{j',m'}\Omega^{l}_{j,m}d\Omega = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{2.55}$$

et la condition de normalisation standard des fonctions de Bessel sphériques est

$$\int_0^\infty r^2 j_l(kr)j_{l'}(k'r)dr = \frac{\pi}{2k^2}\delta(k-k')\delta_{ll'}, \tag{2.56}$$

avec $k = p\xi$ et en appliquant la propriété $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta x$, on obtient

$$\int_0^\infty r^2 j_l(p\xi r)j_{l'}(p\xi' r)dr = \frac{\pi}{2p^2\xi^3}\delta(p-p')\delta_{ll'}. \tag{2.57}$$

Il s'ensuit

$$|N_l|^2\frac{\pi}{2p^2\xi^3}\xi^4 e^{-\pi Rm}\left[e^{-\pi Rm}(H^1_{\nu_+})^*(Rp\xi)H^1_{\nu_+}(Rp\xi) + e^{\pi Rm}(H^1_{\nu_-})^*(Rp\xi)H^1_{\nu_-}(Rp\xi)\right] = 1 \tag{2.58}$$

En utilisant, maintenant, les propriétes suivantes des fonctions de Hankel

$$(H^{1,2}_{\nu_\pm})^* = H^{2,1}_{\nu_\mp}, \qquad \nu_\pm = \frac{1}{2} \pm k, \tag{2.59}$$

$$e^{\pm\pi k}H^1_{\nu_\mp}(z)H^2_{\nu_\pm}(z) + e^{\mp\pi k}H^1_{\nu_\pm}(z)H^2_{\nu_\mp}(z) = \frac{4}{\pi z} \tag{2.60}$$

l'équation (2.58) devient

$$|N_l|^2 \frac{\pi\xi}{2p^2} e^{-\pi Rm} \frac{4}{\pi Rp\xi} = 1 \Rightarrow |N_l| = \frac{R^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{2}}}{2} e^{\frac{1}{2}\pi Rm}. \tag{2.61}$$

Finalement la fonction d'onde normalisée est donnée par

$$\psi_s = \frac{R^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{2}}}{2} \xi^2 \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}Rm} H_{\nu_-}(Rp\xi) j_l(pr\xi) \Omega^l_{j,m}(\theta,\phi) \\ ie^{-\frac{\pi}{2}Rm} H_{\nu_+}(Rp\xi) j_{\bar{l}}(pr\xi) \Omega^{\bar{l}}_{j,m}(\theta,\phi). \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

or

$$\psi_s = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{\pi R}{2\xi r}} \xi^2 \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}Rm} H_{\nu_-}(Rp\xi) j_l(pr\xi) \Omega^l_{j,m}(\theta,\phi) \\ ie^{-\frac{\pi}{2}Rm} H_{\nu_+}(Rp\xi) j_{\bar{l}}(pr\xi) \Omega^{\bar{l}}_{j,m}(\theta,\phi). \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

En utilisant maintenant l'opérateur inverse W^{-1}, on obtient l'équation d'onde normalisée dans l'image naturelle

$$\psi_{NP} = W^{-1}\Psi_s = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{\pi R}{2r}} \xi^2 \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}Rm} H_{\nu_-}(Rp\xi) j_l(pr) \Omega^l_{j,m}(\theta,\phi) \\ ie^{-\frac{\pi}{2}Rm} H_{\nu_+}(Rp\xi) j_{\bar{l}}(pr) \Omega^{\bar{l}}_{j,m}(\theta,\phi) \end{pmatrix}. \tag{2.64}$$

A la limite $R \to \infty$, cette solution tend à la solution de léquation de Dirac libre dans l'espace de Minkowski en coordonnées sphériques.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons exposé la théorie de la relativité non linéaire, en utilisant des méthodes analogues à celles développées dans le cadre des algèbres déformées et de la géométrie non commutative. Un travail récent réalisé par A.Bouda et T.Foughali, a permis de reproduire la transformation de Fock des coordonnées avec un paramètre R invariant qui a la dimension d'une longueur, qu'on a identifié au rayon de l'univers. Contrairement à la DSR, cette transformation ne dépend, ni de l'énergie, ni de l'impulsion de la particule. Cette nouvelle approche de la relativité non linéaire de Fock, est basée sur la déformation des crochets de Poisson fondamentaux relatifs aux coordonnées et aux moments conjugués $(x^\mu; p^\mu)$. Nous avons trouvé des invariants I_x et I_p qui ont permis de construire des variables canoniques (X_μ, P_μ) qui se transforment comme des vecteurs Lorentziens, ce qui nous a permis d'établir la relation de dispersion dans le cadre de la relativité non linéaire de Fock.

La seconde étape consiste à construire des théories des champs où les équations de mouvement restent covariantes par rapport à la transformation non linéaire de Fock-Lorentz. Pour cela nous avons effectué un travail algébrique afin de construire le premier Casimir de cette théorie comme une combinaison de tous les scalaires possibles formé par tous les générateurs. La construction d'un tel Casimir a été rendue possible grâce à une redéfinition appropriée des générateurs de boosts.

Ensuite, nous avons procédé à une quantification afin de transformer l'algèbre des crochets de Poisson à l'algèbre des commutateurs, et qui nous a permis d'obtenir l'équation de Klein-Gordon. La version différentielle de cette dernière équation a mis en évidence la correspondance entre l'espace R-Minkowski et l'espace de de Sitter et a confirmé la suggestion que la nouvelle constante universelle R, qui figure dans la transformation de Fock, représente réellement le rayon de l'univers

Dans le deuxième chapitre, nous avons construit l'équation libre de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski. Aprés avoir utilisé une certaine réalisation de l'algèbre R-Poincaré, il se retourna sur que l'équation obtenue est exactement l'équation de Dirac dans l'espace-temps conforme de Sitter.

Nous avons présenté la méthode de construction de l'équation de Dirac libre dans l'espace-temps R-Minkowski, proposée par Foughali-Bouda. En utilisant une réalisation de l'algèbre R-Poincaré trouvée auparavant, il s'est avéré que l'équation obtenue est exactement l'équation de Dirac dans l'espace conforme plat de de Sitter. Ce résultat est une autre preuve de la correspondance entre l'espace-temps R-Minkowski et l'espace-temps de de Sitter. Il s'ensuit que la physique de l'algèbre R-Poincaré est la même que dans la relativité de de Sitter. Nous avons également présenté une nouvelle méthode pour résourdre l'équation de Dirac dans l'espace-temps R-Minkowski.

Annexe A

Annexe

A.1 Carré de l'équation de Dirac dans un espace courbe

Dans un espace-temps courbe, l'équation de Dirac est donnée par [13]

$$\left(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0 \tag{A.1}$$

où D_μ est la dérivé covariante de spineur

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi \tag{A.2}$$

et

$$\Omega_\mu(x) \equiv \frac{-i}{4}W_{ab\mu}(x)\sigma^{ab} = \frac{1}{8}W_{ab\mu}(x)\left[\gamma^a, \gamma^b\right]$$
$$W^a_{b\mu} = e^a_\nu\left(\partial_\mu e^\nu_b + e^\sigma_b\Gamma^\nu_{\sigma\mu}\right)$$

Sont respectivement les coefficients de Fock-Ivanenko et la connexion de spin, $\Gamma^\nu_{\sigma\mu}$ sont des symboles de Christoffel. Il en résulte que le carré de l'équation de Dirac est égale à

$$\left(i\gamma^\mu D_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\left(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \tag{A.3}$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\left[g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu - \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}K_{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0, \tag{A.4}$$

où

$$K_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu\right) = \partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu]$$

est la courbure de spin. L'équation (A.4) est l'extension générale de l'équation de Pauli-Schodinger qui décrit les particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un environnement gravitationnel

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu\psi &= \left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\right)\psi + g^{\mu\nu}\left[(D^\mu\Omega_\nu) + 2\Omega_\mu\partial_\mu\right]\psi \\ &= \Box_{KG}\psi + g^{\mu\nu}\left[(D_\mu\Omega_\nu) + 2\Omega_\nu\partial_\mu\right]\psi \end{aligned} \tag{A.5}$$

Dans notre cas, l'espace R-Minkowski correspond à l'espace-temps de de Sitter donné par la métrique

$$ds^2 = \frac{1}{(1-\frac{x^0}{R})^2}\left[(dx^0)^2 - d(\overrightarrow{x})^2\right] = \frac{1}{\xi^2}\left[(dx^0)^2 - d(\overrightarrow{x})^2\right]$$

dans la carte où $x \in]-\infty, 0]$; le champ tétrade est donné par $e_a^\mu = \xi \delta_a^\mu$ et la connexion de spin est donnée par $W_{ab\mu} = (R\xi)^{-1} [\eta_{\mu b}\delta_a^0 - \eta_{\mu a}\delta_b^0]$. La dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4R\xi}\eta_{\mu a}\left[\gamma^0, \gamma^a\right]$$

est le calcule donne pour la somme des termes des coefficients Ω de Fock-Ivanenko

$$g^{\mu\nu}\left[(D_\mu \Omega_\nu) + 2\Omega_\nu \partial_\nu\right] = g^{\mu\nu}\left[(\partial_\mu \Omega_\nu) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Omega_\sigma + \Omega_\mu\Omega_\nu + 2\Omega_\nu\partial_\mu\right] = -\frac{1}{R}\xi\gamma^0\gamma^i\partial_i - \frac{3}{4R^2} \tag{A.6}$$

en outre, on a

$$-\frac{1}{R}\sigma^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = \frac{\Re}{4} \tag{A.7}$$

où $\Re$ est un scalaire de Ricci. Dans l'espace de Sitter, on a $\Re = \frac{12}{R^2}$.

En tenant compte des équations (A.5) (A.6) et (A.7) la relation (A.4) peut sécrire comme suit :

$$\left[\Box_{KG} - \frac{1}{R}\xi\gamma^0\gamma^i\partial_i + \frac{9}{4R^2} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0 \tag{A.8}$$

en comparant avec (2.10), il est clair que les termes supplémentaires dans le carrée de l'opérateurs de Dirac par rapport à celui de Klein-Gordon sont établis.

A.2 Spineurs harmoniques sphériques

Considérons un système physique constitué de deux parties. Supposons que la première partie est décrite par les harmoniques sphériques Y_{lm}, fonctions propres du moment orbital L, et la deuxiéme partie par les spineurs de base $\varphi(S_3)$, vecteurs propres du spin $S = \frac{1}{2}$. Alors la fonction d'onde du système total est donnée par l'expression suivante :

$$\Omega_{jlm} =< j, m \mid l, m', \frac{1}{2}, S_3 > Y_{lm}(\theta, \vartheta)\varphi(S_3) \tag{A.9}$$

En considérant que le couplage spin-orbital (interaction entre le spin de la particule et son moment orbital) est négligeable, alors conformément au modéle vectoriel d'addition des moments cinétiques, le moment cinétique total est $j = l + \frac{1}{2}$. Dans ce cas , en remplaçant dans (A.9) les coefcients $< j, m \mid l, m', \frac{1}{2}, S_3 >$, les fonctions d'onde d'un tel systéme s'expriment comme suit :

$$\Omega_{j+\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\varphi_{\frac{1}{2}}Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\varphi_{-\frac{1}{2}}Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

$$\Omega_{j-\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\varphi_{\frac{1}{2}}Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\varphi_{-\frac{1}{2}}Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

où les spineurs

$$\varphi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

$$\varphi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

décrivent la particule dans les états, de spin $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, respectivement. Ce sont des vecteurs propres des matrices de Pauli, reliés au spin de la particule par la relation

$$\overrightarrow{S} = \hbar\frac{\overrightarrow{\sigma}}{2} \tag{A.14}$$

De plus, les fonctions décrivant une particule de moment orbital l sont les harmoniques sphérique. Ils sont définis, dans notre cas, par :

$$Y_{l,m}(\theta,\vartheta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l- \mid m \mid)!}{4\pi(l+ \mid m \mid)!}} \tag{A.15}$$

En tenant compte de (A.12 ; A.13) et (A.15), les spineurs sphériques pour les deux valeurs de moment cinétique total $j = \pm\frac{1}{2}$ s'expriment sous la forme :

$$\Omega_{j+\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

$$\Omega_{j-\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

Ces spineurs sphérique sont normalisés par la condition [19]

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\vartheta \Omega^{\dagger}_{j',l',m'}(\theta,\vartheta)\Omega_{j,l,m} = \delta_{j',j}\delta_{l',l}\delta_{m',m} \tag{A.18}$$

A.3 Fonctions de Bessel

Ces fonction apparaissent dans la physique (electromagnétisme et mécanique quantique)

Les fonctions de Bessel cylindriques

les fonctions de Bessel cylindriques y vérifient l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \tag{A.19}$$

où λ est réel, on cherche une solution sous forme de séries

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$$

tel que les dérivées sont donneés par

$$y' = \frac{dy}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha) a_k x^{k+\alpha-1}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1) a_k x^{k+\alpha-2}$$

on remplace y, y', y'' dans (A.19) et on déduit :

$$\left[(k+\alpha)^2-\lambda^2\right]a_k+a_{k-2}=0 \tag{A.20}$$

si $k<0 \Rightarrow a_k=0$
si k=0 on a $(\alpha^2-\lambda^2)\,a_0+a_{-2}=0$
hypothèse :
$a_{-2}=0$ et $a_0=0$
on remarque que : $\alpha^2-\lambda^2=0$
$\Rightarrow \alpha=+\lambda$ ou $\alpha=-\lambda$ si $\alpha=+\lambda \to y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\lambda}=x^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\exp^k$
(Solution régulière à lorigine)
si $\alpha=-\lambda \to y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k-\lambda}=x^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\exp^k$ (Solution irrégulière à lorigine)
si $\alpha=\lambda>0 \to y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\lambda}=x^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\exp^k$
on remplace α par λ dans (A.20) et on déduit :

$$\left(k^2+2k\lambda\right)a_k+a_{k-2}=0 \tag{A.21}$$

on remarque k est entier donc touts les coeffecients a_{-k} sont nuls , après les calcules on trouve

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2\times4\times6...(2+2\lambda)(4+2\lambda)...} \tag{A.22}$$

et a_0 est donnée par :

$$a_0=\frac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)} \tag{A.23}$$

La fonction de Bessel régulière sera notée $J_\lambda(x)$ tel que

$$J_\lambda(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{\lambda}+2k}{k!\Gamma(\lambda+k+1)} \tag{A.24}$$

avec la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}\exp^{-t}t^{z-1}dt. \tag{A.25}$$

Quand λ est entier, $\lambda=n$, nous pouvons définir la fonction de Bessel à indice entier par

$$J_n(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{n+2k}}{k!(m+k)!} \tag{A.26}$$

Fonction génératrice

soit la fonction :

$$G(x,t)=\exp^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_nt^n \tag{A.27}$$

mais

$$\exp^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\exp^{\frac{xt}{2}}.\exp^{\frac{-x}{2t}}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{xt}{2}\right)^k\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{-x}{2t}\right)^p$$

on pose n=k-p

$$(k,p) \to (n,p)$$

on utilise le dévloppement de Tayler

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

alors l'équation (A.27) devient

$$G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(\frac{x}{2})^{n+2p}}{(n+p)!p!} \tag{A.28}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(\frac{x}{2})^{n+2p}}{(n+p+1)!p!} \right) t^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n$$

$$G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n \tag{A.29}$$

l'équation (A.29) est appellée la fonction génératrice des $J_n(x)$

$$G(x,t) = ...J_{-2}(x)t^2 + J_{-1}(x)t^1 + J_0(x)t^0 + J_1(x)t^1 + J_2(x)t^2...$$

la fonction génératrice présente beaucoup de proprietés de $J_n(x)$

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$G(x,t) = \exp^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$$

$$G(-x,-t) = \exp^{\frac{-x}{2}(-t+\frac{1}{t})} = G(x,t) = \exp^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$$

$$\sum_{n=\infty}^{+\infty} J_n(-x)(-t)^n = \sum_{n=\infty}^{+\infty} J_n(x)(t)^n$$

on peut ecrire

$$\sum_{n=\infty}^{+\infty} J_n(-x)(-1)^n(t)^n = \sum_{n=\infty}^{+\infty} J_n(x)(t)^n$$

par identification on déduit $(-1)^n J_n(-x) = J_n(x)$ et $(-1)^{2n} J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$
quand : $(-1)^{2n} = 1$

$$\Longrightarrow J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

exemple :

$$J_4(-x) = (-1)^4 J_n(x) = J_4(x)$$

$$J_7(-x) = (-1)^7 J_n(x) = -J_7(x)$$

on remarque que les fonctiions d'indice pair sont paires et les fonctions d'indice impair sont impaires .

Fonction de Bessel sphérique

Lorsque λ n'est pas entier, les solutions $y(x)$ de l'équation (A.19) sont données par :

$$y(x) = C_1 J_\lambda(x) + C_2 J_{-\lambda}(x) \tag{A.30}$$

où

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{A.31}$$

en posant $y(x) = x^{\frac{1}{2}} Z(x)$, et $\lambda = l + \frac{1}{2}$; on obtient l'équation

$$x^2 z'' + 2xz' + \left[x^2 - l(l+1)\right] Z = 0 \tag{A.32}$$

la solution générale (A.32) déduite de celle de (A.19) est donnée par

$$Z(x) = C_1 j_l(x) + C_2 n_l(x) \tag{A.33}$$

avec

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

et

$$n_l(x) = (-1)^l \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-l-\frac{1}{2}}(x)$$

Les fonctions $j_l(x)$ et $n_l(x)$ sont appelées fonction de Bessel sphérique et fonction de Neumann sphérique respectivement. les facteurs additionnels sont introduits pour simplifier les formules ultérieures, Le wronkien de ces solutions est

$$j_l'(x) n_l(x) - j_l(x) n_l'(x) = x^{-2}$$

Les fonctions $j_l(x)$ et $n_l(x)$ ont la particularité parmi les fonctions de Bessel d'être des fonctions élémentaires données par

$$j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x} \tag{A.34}$$

$$n_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \frac{\cos x}{x} \tag{A.35}$$

pour $l = 0$, on déduit que

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$n_0(x) = \frac{\cos x}{x}$$

pour $l = 1$, on trouve que

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$n_1(x) = \frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x}$$

pour $x \to 0$ on a :

$$j_l(x) \to \frac{x^l}{(2l+1)!!}$$

$$n_l(x) \to (2l+1)!! x^{-l-1}$$

où $m!! = m[(m-2)!!]$ et $0!! = 1$, on déduit les comportement asymptotiques

$$j_l(x) \to \frac{1}{x}\sin(x - \frac{1}{2}l\pi)$$

$$n_l(x) \to \frac{1}{x}\cos(x - \frac{1}{2}l\pi)$$

qui sont très importants pour la théorie des collisions.

A.4 Les crochet de Poisson

Les crochets de poisson sont des expressions mathématiques introduites initialement dans le cadre de la mécanique analytique. Ils ont une grande importance dans divers domaines de la physique mathématique. Ils sont par exemple indispensables dans l'étude de l'intégrabilité des systèmes classiques et dans la quantification canonique. On peut générer le groupe de Poincaré à l'aide du crochet de Poisson$\{,\}$ et des quadri-vecteurs fondamentaux x et p de l'espace de phase associées au mouvment d'une particule libre. On définit le crochet de Poisson de deux fonctions f et g comme suit :

$$\{f,g\} = -\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\frac{\partial g}{\partial P^\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P^\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_\lambda} \tag{A.36}$$

α et β sont deux réels et f,g,h sont trois fonctions qui dépendent de x,p,t on peut résumer les propriétés du crochet de Poisson dans les points suivantes :

1) L'antisymétrie : $\{f,g\} = -\{g,f\} \Rightarrow \{f,f\} = 0$

2) La linéarité :$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\}$

3)L'identité de Jacobi :$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$

4)règle de Leibniz 1 :$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$

5)règle de Leibniz 2 :$\{\frac{df}{dt},g\} + \{f,\frac{dg}{dt},\} = \frac{d}{dt}\{f,g\}$

Bibliographie

[1] V. Fock, The theory of space-time and gravitation, Pergamon Press,(1964).

[2] A. Bouda, T. Foughali, Modern Physics Letters A, Vol. 27, No. 6 1250036 (2012).

[3] T. Foughali and A. Bouda, Can. J. Phys. 93, 734 (2015), arXiv e-print : 1605.01943.

[4] S. Gosh and P. Pal, Phys. Rev. D 75, 105021 (2007).

[5] J.A. Magpantay. Int. J. Mod. Phys. A, 25, 1881 (2010). doi :10.1142/ S0217751X1004807X.

[6] J.A. Magpantay. Phys. Rev. D, 84, 024016 (2011). doi :10.1103/PhysRevD.84.024016.

[7] J. A. Magpantay, Phys. Rev. D84, 024016 (2011), arXiv e-print : 1011.3888.

[8] I. I. Cotaescu, Mod. Phys. Lett. A22, 2965 (2007).

[9] I. I. Cotaescu, R. Racoceanu and C. Crucean, Mod. Phys. Lett. A21, 1313 (2006), arXiv e-print : hep-th/0602077.

[10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover (1964).

[11] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products, Corrected and Enlarged Edition, Academic Press, Inc, New York (1980)

[12] Voja.Radovanovic.Problem Book Quantum Field Theory.

[13] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press (1982).

[14].T. Foughali and A. Bouda. Int. J. Theor. Phys. DOI 10.1007/s10773-015-2863-0 (2015).

[15] Mr.FOUGHALI Taoufik.Thèse de doctorat. Sur les extensions de la Relativité Générale. Université A.MIRA de Béjaia (2006).

[16] P G. Bergmann, the Special Theory of Relativity, S. Flügge. Encyclopedia of Physics, Vol. IV. Berlin, Springer-Verlag, (1962).

[17] P G. Bergmann, Introduction to the Theory of Relativity, Butterworths, London, (1958).

[18] S. Hassani, Eur. J. Phys. 29 103-111 (2008).

[19] J-L. Basdevant, J. Dalibard, Mécanique quantique : Cours de l'école polytechnique, Février 2002.

L’espace-temps R-Minkowski est l’espace de background d’une relativité restreinte basée sur la transformation de Fock à la place de la transformation de Lorentz. Cette théorie de la relativité est appelée aussi la relativité projective. La transformation de Fock est une transformation de type fraction linéaire. Cette théorie donne lieu à l’existance d’une nouvelle constante universelle, à coté de la vitesse de la lumière c, qui représente le rayon de l’univers observé. Le groupe de symétrie de cette nouvelle théorie est appelé le groupe R-Poincaré et son algèbre est l’algèbre R-Poincaré. On propose dans ce travail d’étudier l’équation de Dirac, qui représente l’équation fondamentale des particules de la matière, dans l’espace-temps R-Minkowski et de donner une solution exacte et normalisée de cette équation.

The R-Minkowski space-time is the background space of a special relativity based on the Fock transformation in place of the Lorentz transformation. This theory of relativity is also called projective relativity. The Fock transformation is a linear fraction transformation. This theory gives rise to the existence of a new universal constant, next to the speed of light c, which represents the radius of the observed universe. The symmetry group of this new theory is called the R-Poincaré group and its algebra is the R-Poincaré algebra. It is proposed in this work to study the Dirac equation, which represents the fundamental equation of the particles of matter, in the R-Minkowski space-time and to give an exact and standardized solution of this equation.

الفضاء R−Minkowski هي خلفية للنسبية الخاصة القائمة على تحول Fock بدلاً من تحول Lorentz. وتسمى نظرية النسبية هذه أيضًا النسبية الإسقاطية. تحول Fock هو تحول كسري خطي. تؤدي هذه النظرية إلى وجود ثابت عالمي جديد ، بجانب سرعة الضوء c ، الذي يمثل نصف قطر الكون المرصود. تسمى مجموعة التناظر لهذه النظرية الجديدة مجموعة R−Poincaré وجبرها هو جبر R−Poincaré. يُقترح في هذا العمل دراسة معادلة Dirac ، التي تمثل المعادلة الأساسية لجزيئات المادة ، في الفضاء R−Minkowski وإعطاء حل دقيق وموحد لهذه المعادلة.