Université A.Mira Béjaia
Faculté des Sciences exactes
Département de Physique

Mémoire de Master

Rédigé par

HADDAD Hassiba

En vue d'obtention du diplôme de master en Physique
Spécialité *: Physique Théorique*

Intitulé

L'équation de Dirac dans un espace-temps de de Sitter

Soutenu publiquement le 08/07/2019 devant le jury composé de :

Mr	**AOUDIA Sofiane**	*Président*	MCA	Béjaia
Mr	**BELHADI Zahir**	*Examinateur*	MCA	Béjaïa
Mr	**FOUGHALI Taoufik**	*Rapporteur*	MCA	Béjaïa

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

je tiens à remercier Allah qui m'a donné la force pour faire ce modeste travail

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance à Mr FOUGHALI Taoufik, en tant que enseignant à l'université de Béjaia et encadrant de ce mémoire qui a suivi ce travail avec un grand intéret, Je le remercie énormément pour son encouragements, pour sa confiance, sa compréhension et surtout sa patience

J'adresse mes vifs remerciements à Mr. AOUDIA Sofiane enseignant à l'université de Béjaia d'avoir accépter de précider le jury de soutenance et pour ses précieux consiels.

Je remericie chaleureusement Mr, BELHADI Zahir enseignant à l'université de Béjaia qui a accépté d'étre examinateur de ce modeste travail et sa disponibilité permanente.

Je remercie également mes enciens enseignants Eiad Sabrina, Samsar Issa, Laemiri qui m'ont donné l'envie et le courage d'étre là aujourd'huit

Mes remerciements vont enfin à toute personne qui a contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail de fin d'études.

Dédicaces

Du profond de mon coeur, je dédie ce modeste travail en signe de respect, de connaissance et gratitude à :

Mon àme-soeur, ma mére je te remercie pour tout le soutien et l'amour que te me porte depuis mon enfance et j'espère que ta bénédiction m'accompagne pour toujours. Puisse Dieu, t'accorder santé, bonheur et une longue vie.

je n'oublierai jamais de remercier mon père, le héro de ma vie, celui qui n'a jamais cessé de m'encourager. j'espère que ce travail soit le fruit de vos innombrables sacrifices, merci papa.

Mon frére Walid, les mots ne sont pas assez forts pour exprimer ma gratitude envers lui, je le remercie pour son amour inconditionnel et ses encouragements.

Mes deux adorables soeurs Nadira et Wassila, inchallah plus de réussite et de bonheurs dans leurs vies. Sans oublier le nouveau né Axel, mon étoile qui illumine mes journées.Je dédié ce travail egalement à ma meilleure amie Halima ou plutot ma soeur que la vie m'a donné.

Mon ange gardien qui m'est trés cher, qui m'a prodigué des enseignements, suivi pas par pas, s'est donné la peine de me soutenir et surtout de supporter mes sautes d'humeur durant l'élaboration de mon mémoire, je le remercie pour tout cela, et puisse dieu tout puissant le protéger et pour toujours égayer son chemin.

Mes meilleurs amis : Katia, Laldja Hanen, Lydia, Bilal, Karim. Les trois mousquetaire : Wassila, Lydia et Meriem

Table des matières

Introduction

Les découvertes d'un concept quantique et d'un nouveau concept d'espace temps ont été de grandes réalisations au cours du siècle dernier. La première découverte a été systématisée comme une théorie d'ensemble avec la mécanique quantique. Cette dernière est apparue pour résoudre des problèmes que la mécanique classique de Newton ainsi que l'électromagnétisme de Maxwell échouaient à expliquer, comme les rayonnements du corps noir, l'effet photo-électrique, ou encore l'existence des raies spectrales [1]. Cette théorie introduit la notion purement quantique de « Spin », qui n'a pas d'équivalent en mécanique classique, contrairement à la position, l'impulsion ou l'énergie d'une particule. Le spin étant une propriété intrinsèque des particules découvert par Stern et Gerlach en 1922 [2].

La deuxième découverte a été introduite par Einstein dans la théorie de la relativité générale achevée en 1916 [3]. Cette dernière est l'une des plus importantes théories en physique, qui généralise la théorie de la relativité restreinte à tous les référentiels de la nature, et associe la notion de géométrie à la gravité. Là où Newton voyait la gravitation comme une force, formulée dans la loi universelle de gravitation, il y a plus deux cents ans auparavant, sous la forme

$$F_{A/B} = G\frac{M_A M_B}{d^2}$$

Einstein trouve une déformation de la géométrie de l'espace-temps dépendant de la distribution de la matière ou plutôt de l'énergie et l'impulsion et inversement, selon sa fameuse équation

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Cette théorie est à l'origine de l'explication de plusieurs phénomènes et aspects de l'univers, et comporte les outils de base qui permettront d'étudier une particule de spin dans le cas de la relativité générale [4] [5].

L'une des directions les plus importantes de la physique théorique moderne, est la recherche d'une possible théorie qui unifierait les 4 interactions fondamentales, où l'unification cohérente de la mécanique quantique et de la force gravitationnelle exigerait une attention particulière. En outre, la généralisation des théories physiques, construites dans l'espace plat de Minkowski, à un espace-temps courbe n'est pas une tache simple. La théorie des champs quantiques et la mécanique quantique relativiste sont basée sur la théorie de Dirac pour les fermions. Notons que l'équation de Dirac est conçue pour être cohérente avec la relativité restreinte (SR), c'est-à-dire un espace-temps plat. Le formalisme traditionnel de la relativité générale, reposant sur le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et les symboles de Christoffel, n'est pas adéquat pour la description des spineurs. Il est nécessaire de développer un formalisme alternatif qui permet une reformulation de la relativité générale, incluant naturellement les spineurs et leur transformations associées. En partant de la théorie générale de la relativité (GR) selon laquelle l'espace-temps est courbé par la présence de la matière, la version de la théorie de Dirac conçue pour la SR, ne prend pas en compte l'interaction entre la particule élémentaire et la courbure de l'espace-temps. Fock et Ivanenko ont généralisé l'équation relativiste de Dirac pour l'électron en introduisant la dérivée covariante d'un spineur dans un espace-temps riemannien. Pour incorporer des champs de spineurs dans une théorie métrique de la gravitation, nous devons construire une différentiation covariante des spineurs pour une connexion affine générale.

Dans ce travail nous proposons d'étudier la fameuse équation de Dirac qui constitue l'équation fondamentale des particules de la matière de spin demi entier se propageant dans un espace courbé définie par la géométrie riemannienne. Nous allons discuter des effets gravitationnels sur les particules de Dirac en fournissant un cadre simple pour reformuler le formalisme traditionnel de la relativité générale reposant sur le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et les symboles de Christoffel qui ne s'applique pas pour la description des spineurs.

Dans le premier chapitre, nous remédions à ce problème, en introduisant la notion de vierbein à la place du tenseur métrique qui fait le passage entre la base naturelle et la base des tétrades, en faisant appel à une connexion de spin à la place des symboles de Christoffel, pour construire la dérivée covariante spinorielle [6] [7].

Afin de simplifier notre travail, nous exprimons l'équation de Dirac par une approche trés importante appelée l'approche de Schishkin qui permet de faire une séparation de variables.

En suite dans le deuxiéme chapitre nous allons étudier cette équation dans un espace courbé avec une constante cosmologique positive considérée comme la seule et unique solution d'équations d'Einstein dans le vide, appelé espace de " de sitter". Enfin, nous allons chercher la solution exacte de l'équation de Dirac dans cet espace.

CHAPITRE 1

L'équation de Dirac en relativité générale

L'équation de Dirac est une équation qui est capable de décrire les effets relativistes dus à la vitesse et au spin des particules. Son importance provient du fait qu'elle permet de décrire les particules élémentaires, de spin $\frac{1}{2}$, qui constituent la matière, et qu'on appelle les fermions. Dans l'espace de Minkowski cette équation est donnée par l'expression suivante

$$(i\gamma^a \partial_a - m)\,\Psi(x) = 0 \ , \tag{1.0.1}$$

où $\Psi(x)$ est la fonction d'onde de Dirac, appelée bi-spineur de Dirac.

Au cours de ce chapitre, nous allons traiter et exprimer cette équation dans le cas de la relativité générale. Cette dernière a été l'origine d'un changement radical de la compréhension de l'espace-temps et principalement de la gravitation puisque elle n'est plus considérée comme une force tel que Newton l'a montré, mais comme une propriété géométrique de l'espace-temps selon Einstein. Aussi, nous discuterons des effets gravitationnels sur les particules de Dirac qui se propagent dans la géométrie riemannienne :

-Premièrement en faisant intervenir le formalisme de tétrades qui fait en quelque sorte le lien entre l'espace-temps courbe et l'espace-temps tangent plat.

-Deuxièmement, en définissant la dérivée covariante spinorielle en remplaçant la dérivée partielle par une dérivée covariante, mais comme il s'agit d'une dérivée agissant sur les spineurs, le terme de connexion que nous allons introduire est un objet mathématique plus complexe appelé la connexion de spin.

1.1 Le formalisme des tétrades

Le formalisme des tétrades est une approche de la relativité générale qui remplace le choix d'une base naturelle de coordonnées notée $\{\partial_\mu\}$, de l'espace tangent à la variété différentielle muni d'une métrique riemannienne $g_{\mu\nu}$ en un point par une autre base locale (au même point), c'est la base des tétrades $\{e_a\}$, qui est définie par quatre vecteurs qui sont linéairement indépendants. La matrice de changement de base permettant de passer de la base naturelle à la base tétrade notée ${e_a}^\mu$, est définie par la relation

$$e_a = {e_a}^\mu \partial_\mu \tag{1.1.1}$$

Par définition, le grand avantage d'une tétrade est que cette base doit étre construite de telle façon que la métrique devient localement Minkowskienne. Imposer l'orthogonalité des vecteurs de base de la tétrade revient à écrire

$$\eta_{ab} = g(e_a, e_b) \tag{1.1.2}$$

Si on introduit les matrices de changements de base à partir de l'équation précédente (1.1.2), on trouve le lien entre $g_{\mu\nu}$ l'expression du tenseur métrique dans la base naturelle de coordonnées,

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) \tag{1.1.3}$$

et η_{ab} l'expression de ce même tenseur dans la tétrade

$$\eta_{ab} = g(e_a, e_b) = g(e_a^{\ \mu}\partial_\mu, e_b^{\ \nu}\partial_\nu) = e_a^{\ \mu}\ e_b^{\ \nu}\ g(\partial_\mu, \partial_\nu) = e_a^{\ \mu}\ e_b^{\ \nu} g_{\mu\nu} \tag{1.1.4}$$

Remarque :

Etant donné que dans la base de la tétrade, la métrique est localement Minkowskienne, la théorie de la relativité restreinte s'applique localement. En particulier, d'un point de vu calculatoire (la convention de sommation d'Einstein) tous les indices relatifs à la tétrade (indices latins) peuvent étre montés et descendus au moyen de la métrique de Minkowski η_{ab}, alors que tous les indices relatifs à la base naturelle (les indices grec) sont montés et descendus avec la métrique $g_{\mu\nu}$. Nous pouvons donc introduire la tétrade inverse à $e_a^{\ \mu}$, que nous noterons ${e_\mu}^a$ telle que

$$e_\nu^{\ c} e_b^{\ \nu} = \delta_b^c$$

où le symbole de Kronecker δ_b^a est défini par $\delta_b^a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$

Si nous prenons la relation (1.1.4) et nous la multiplions par η^{ca}, nous trouvons que

$$\eta^{ca}.\eta_{ab} = \eta^{ca} {e_a}^\mu e_b^{\ \nu}\ g_{\mu\nu} \tag{1.1.5}$$
$$\delta_b^c = \eta^{ca} {e_a}^\mu e_b^{\ \nu}\ g_{\mu\nu} \tag{1.1.6}$$

en tenant compte de l'expression du Kroneker δ_b^a, nous obtenons

$$\begin{aligned} e_\nu^{\ c} e_b^{\ \nu} &= \eta^{ca} e_a^{\ \mu}\ {e_b}^\nu\ g_{\mu\nu} \\ e_\nu^{\ c} &= \eta^{ca} e_a^{\ \mu}\ g_{\mu\nu} \\ e_\nu^{\ c} &= {e^c}_\nu. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Ceci montre que la matrice inverse de la transformation de coordonnées peut être obtenue simplement en levant et en descendant les indices en tenant compte du fait que les indices se référant à la tétrade se bougent avec la métrique de Minkowski tandis que les indices se référent à la base naturelle se bougent avec la métrique riemannienne. Grâce à cette transformation, nous pouvons passer de la base de tétrade à la base naturelle comme suit

$$\partial_\mu = e^a_\mu e_a \tag{1.1.8}$$

Cette dernière nous permet de faire le lien entre les bases des espaces cotangents. En effet, si on note la base duale naturelle de coordonnées par $\{dx^\mu\}$ qui est la base duale de $\{\partial_\mu\}$, et si on note la base duale de la tétrade par $\{e^a\}$ qui est la base duale de $\{e_a\}$, et par la définition de la base duale

$$e^a[e_b] = \delta^a_b \tag{1.1.9}$$

où $e^a[e_b]$ représente l'action de la 1-forme sur un vecteur e_b.

En remplaçant (1.1.1) dans (1.1.9), on aboutit à

$$e^a[e^\mu_b \partial_\mu] = \delta^a_b$$

d'après la relation (1.1.5) on trouve que

$$e^\mu_b e^a[\partial_\mu] = e^a_\nu . e^\nu_b = e^a_\mu . e^\mu_b$$

alors

$$e^a[\partial_\mu] = e^a_\mu \tag{1.1.10}$$

Cette dernière est équivalente à la relation suivante

$$e^a = e^c{}_\mu dx^\mu \tag{1.1.11}$$

Les liens entre les vecteurs de la base naturelle et de la tétrade, et les transformations de la base duale sont données par :

$$e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu \Leftrightarrow \partial_\mu = e_\mu{}^a e_a \tag{1.1.12}$$
$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu \Leftrightarrow dx^\mu = e^\mu{}_a e^a \tag{1.1.13}$$

Tous les tenseurs de la théorie peuvent étre exprimés dans la base des tétrades grâce à la matrice tétrade qui donne les transformations des composantes de ces tenseurs. A titre d'exemple, si on prend un vecteur quelconque de l'espace tangent v et on note v^μ ses composantes dans la base naturelle et v^a ses composantes dans la base tétrade, on peut écrire que

$$v = v^\mu \ \partial_\mu \tag{1.1.14}$$

$$v = v^a e_a \tag{1.1.15}$$

En injectant la relation (1.1.1) dans (1.1.15), on trouve

$$v = v^a \ e^\mu_a \partial_\mu \Rightarrow v^\mu = e^\mu_a v^a \tag{1.1.16}$$

En injectant la relation (1.1.8) dans (1.1.14), on trouve

$$v = v^{\mu} e^{a}_{\mu} e_a \Rightarrow v^a = \; e^{a}_{\mu} v^{\mu} \tag{1.1.17}$$

Nous pouvons aussi exprimer les 1-formes dans la base cotétrade, mais leurs composantes vont se transformer de la manière suivante

$$\omega = \omega_{\mu} dx^{\mu} \tag{1.1.18}$$

$$\omega = \omega_a e^a \tag{1.1.19}$$

On remplace (1.1.13) et (1.1.12) dans (1.1.18) et (1.1.19) respectivement, pour obtenir

$$\omega_a = e^{\mu}_{a} \omega_{\mu} \tag{1.1.20}$$

$$\omega_{\mu} = \; e^{a}_{\mu} \; \omega_a \tag{1.1.21}$$

La transformation d'un tenseur d'ordre 2 est donnée par

$$\begin{aligned}
T^{ab} &= e^{a}_{\mu} e^{b}_{\nu} T^{\mu\nu} \Longrightarrow T^{\mu\nu} = e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} T^{ab} \\
T_{ab} &= e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} T_{\mu\nu} \Longrightarrow T_{\mu\nu} = e^{a}_{\mu} e^{b}_{\nu} T_{ab} \\
T^{a}_{b} &= e^{a}_{\mu} e^{\nu}_{b} T^{\mu}_{\nu} \Longrightarrow T^{\mu}_{\nu} = e^{\mu}_{a} e^{b}_{\nu} T^{a}_{b}
\end{aligned}$$

L'orthogonalité de la tétrade impose la relation suivante

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) = g(e^{a}_{\mu} e_a, e^{b}_{\upsilon} e_b) = e^{a}_{\mu} e^{b}_{\upsilon} g(e_a, e_b) = e^{a}_{\mu} e^{b}_{\upsilon} \eta_{ab} \tag{1.1.22}$$

Nous pouvons aussi déduire

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \det(e^{a}_{\mu} e^{b}_{\upsilon} \eta_{ab}) = (\det e^{a}_{\mu})^2 \det(\eta_{ab}) \;\; \Rightarrow \det e^{a}_{\mu} = \sqrt{g}$$

L'invariant relativiste s'écrit dans les deux base comme

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} e^a e^b = \eta_{ab} e^a e^b. \tag{1.1.23}$$

Les vecteurs de base de tétrade vérifient les crochet de Lie

$$[e_a, e_b] = c^{d}_{ab} e_d, \text{ avec } c^{d}_{ab} = \; e^{\nu}_{a} e^{\mu}_{b} [\partial_{\mu}(e^{d}_{\nu}) \; - \partial_{\nu}(e^{d}_{\mu})] \tag{1.1.24}$$

Remarque :

Le formalisme de tétrade est un système formel composé d'un langage formel et d'une sémantique représentée par un système déductif et calculatoire. l'objectif de ce formalisme dans notre cas est de réécrire les équations d'une autre manière, ne faisant pas de prédictions différentes, il permet néanmoins aux équations pertinentes d'étre exprimées différemment.

1.2 La dérivée covariante spinorielle

La dérivée covariante spinorielle, introduite par Fock et Ivanenko, est une généralisation de la dérivée ordinaire, perméttant d'étendre la théorie de Dirac pour les fermions à des espaces courbes.

1.2.1 La connexion affine

Prenons deux points d'espace-temps x^α et $x^\alpha + \delta x^\alpha$ appelés i et j respectivement. Le quadrivecteur au point i est noté $V^\alpha(x)$ et celui au point j est noté par$V^\alpha(x)$ $+\delta V^\alpha(x)$. Le champ au point $x^\alpha + \delta x^\alpha$ adjacent à x^αest donné par

$$V^\alpha(x+\delta x) = V^\alpha(x) + \delta x^\beta \partial_\beta V^\alpha = V^\alpha(x) + \delta V^\alpha(x) \tag{1.2.1}$$

Donc

$$\delta V^\alpha(x) = \delta x^\beta \partial_\beta V^\alpha = V^\alpha(x+\delta x) - V^\alpha(x)$$

La différence entre le champ au point j $V^\alpha(x+\delta x)$ et le champ qui est transporté parallèlement par rapport au champ $V^\alpha(x)$ en même point est

$$[V^\alpha(x) + \delta V^\alpha(x)] - [V^\alpha(x) + \delta' V^\alpha(x)] = \delta V^\alpha(x) - \delta' V^\alpha(x)$$

$\delta' V^\alpha(x)$ doit disparaitre si δx^α ou $V^\alpha(x)$ disparait , donc nous choisissons sous la forme

$$\delta' V^\alpha(x) = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) V^\beta(x) \delta x^\gamma \tag{1.2.2}$$

où $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ est un facteur multiplicatif, et nous le considérons comme un moyen pour tenir compte de la courbure de la variété.

La dérivée covariante peut être construite comme suit

$$\nabla_\gamma V^\alpha(x) = \frac{1}{\delta x^\gamma}\{V^\alpha(x+\delta x) - [V^\alpha(x) + \delta' V^\alpha(x)]\}. \tag{1.2.3}$$

On remplace (1.2.1) et (1.2.2) dans (1.2.3)

$$\nabla_\gamma V^\alpha(x) = \frac{1}{\delta x^\gamma}\{V^\alpha(x) + \delta x^\gamma \partial_\gamma V^\alpha(x) - V^\alpha(x) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) V^\beta(x) \delta x^\gamma\}$$

Nous avons la simple expression de la dérivée covariante dans la base des coordonnées $\{x^\mu\}$ qui est donnée par la dérivée partielle plus un terme de correction [8]

$$\nabla_\gamma V^\alpha(x) = \partial_\gamma V^\alpha(x) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) V^\beta(x)$$

Les connexions affines, ou les symboles de Christoffel dans une terminologie plus ancienne, sont des objets définis par des expressions mathématiques qui ont l'air compliquées. Mais l'idée de laquelle dérivent ces objets est très simple. Considérons deux tenseurs dont les composantes sont définies par rapport à deux repères différents. Ils ne peuvent être comparés que si nous connaissons un lien entre ces deux repères. Ceci est le but des connexions affines, c'est-à-dire qu'elles permettent d'effectuer un lien entre deux repères naturels infiniment voisins. [4]

1.2.2 La connexion de spin

Considérons la dérivée covariante du formalisme de tétrade et introduisons la notion de connexion de spin. Dans le formalisme métrique, la dérivée covariante du vecteur V^{μ} est

$$\nabla_{\nu} V^{\mu} = \partial_{\nu} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} V^{\lambda} \tag{1.2.4}$$

où la connexion affine est donnée par une expression symbolique standard de Christoffel

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) \tag{1.2.5}$$

Notre but est de construire une version de dérivée covariante avec d'autres objets comme les tetrades, qui ont des indices locaux de Lorentz. De toute évidence, ceci est une tâche non-triviale, car la tétrade n'est pas un tenseur et par conséquent, sa dérivé covariante n'est pas quelque chose de naturel. Logiquement ces constructions impliquent nécessairement un certain nombres d'hypothèses.

Il est facile de comprendre que dans le cas de Lorentz, la dérivée covariante du même vecteur ne peut étre égale à $\partial_a V^b$ puisque c'est une contradiction, la raison est que tout décalage par rapport à un point signifie un changement d'un espace tangent à un autre et donc dérivant la différence entre deux valeurs de vecteur nécessitent une définition supplimentaire. L'expression générale qui satisfaie ces conditions est

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + w^b{}_{ca} V^c \tag{1.2.6}$$

où $w^b{}_{ca}$ sont des coefficients inconnus mais qui sont nuls dans un espace-temps plat $w^b{}_{ca} = 0$.

Les composantes d'un tenseur satisfaisant la relation siuvante :

$$\nabla_{\upsilon} V^{\mu} = e^a_{\nu} e^{\mu}_b \nabla_a V^b. \tag{1.2.7}$$

On injecte (1.2.6) dans (1.2.7) ensuite

$$\nabla_{\lambda} V^{\mu} = e^a_{\lambda} e^{\mu}_b (\partial_a V^b + w^b{}_{ca} V^c).$$

D'après le formalisme des tétrades, on a démontré que

$$V^b = e^b_{\gamma} V^{\gamma}$$

donc

$$\nabla_{\lambda} V^{\mu} = e^a_{\lambda} e^{\mu}_b (\partial_a [e^b_{\gamma} V^{\gamma}] + w^b{}_{ca} V^c = e^a_{\lambda} e^{\mu}_b (V^{\gamma} \partial_a e^b_{\gamma} + e^b_{\gamma} \partial_a V^{\gamma} + w^b{}_{ca} V^c).$$

En utilisant la relation (1.1.8) , on obtient

$$\nabla_{\lambda} V^{\mu} = \partial_{\lambda} V^{\mu} + V^{\gamma} [e^{\mu}_b \partial_{\lambda} e^b_{\gamma} + e^{\mu}_b w^b{}_{c\lambda} e^c_{\gamma}] \tag{1.2.8}$$

Nous remarquons d'après (1.2.8) et (1.2.4) que

$$\Gamma^{\mu}_{\gamma\lambda} = e^{\mu}_{b}\partial_{\lambda}e^{b}_{\gamma} + e^{\mu}_{b}w^{b}{}_{c\lambda}e^{c}_{\gamma} \tag{1.2.9}$$

En multipliant la dernière équation par $e^{a}_{\mu}e^{\gamma b}$, on arrive à

$$e^{a}_{\mu}e^{\gamma b}\Gamma^{\mu}_{\gamma\lambda} = e^{a}_{\mu}e^{\gamma b}e^{\mu}_{b}\partial_{\lambda}e^{b}_{\gamma} + e^{a}_{\mu}e^{\gamma b}e^{c}_{\gamma}e^{\mu}_{d}w^{d}{}_{c\lambda} = e^{\gamma b}\partial_{\lambda}e^{a}_{\gamma} + w^{ab}{}_{\lambda},$$

pour aboutir à la connexion de spin

$$w^{ab}{}_{\lambda} = e^{a}_{\mu}e^{\gamma b}\Gamma^{\mu}_{\gamma\lambda} - e^{\gamma b}\partial_{\lambda}e^{a}_{\gamma} \tag{1.2.10}$$

on peut la réécrire aussi

$$w^{a}{}_{b\lambda} = e^{a}_{\mu}e^{\gamma}_{b}\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma} - e^{\gamma}_{b}\partial_{\lambda}e^{a}_{\gamma}\ . \tag{1.2.11}$$

On considère la somme $w^{ab}{}_{\mu} + w^{ba}{}_{\mu}$ et on remplace le symbole de Christoffel $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ par son expression, on constate que

$$w^{ab}{}_{\mu} = -w^{ba}{}_{\mu} \tag{1.2.12}$$

Dérivée covariante de la tétrade

D'après la relation (1.2.4) on a

$$\nabla_{\nu}V^{\mu} = \partial_{\nu}V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}V^{\lambda} \Leftrightarrow \nabla_{\nu}(e^{\mu}_{a}V^{a}) = \partial_{\nu}(e^{\mu}_{a}V^{a}) + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\ V^{\lambda} \tag{1.2.13}$$

On s'intéresse à la dérivée partielle

$$\begin{aligned} \partial_{\nu}(e^{\mu}_{a}V^{a}) &= e^{a}_{\nu}\partial_{a}(e^{\mu}_{b}V^{b}) \\ &= e^{a}_{\nu}e^{\mu}_{b}\partial_{a}(V^{b}) + e^{a}_{\nu}V^{b}\partial_{a}(e^{\mu}_{b}), \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

si on remplace (1.2.14) dans (1.2.13), on aura

$$\nabla_{\nu}(V^{\mu}) = e^{a}_{\nu}e^{\mu}_{b}\partial_{a}(V^{b}) + e^{a}_{\nu}V^{b}\partial_{a}(e^{\mu}_{b})\ + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}V^{\lambda} \tag{1.2.15}$$

en appliquant le formalisme des tétrades sur les composantes du tenseur dérivée covariante, on obtient

$$\nabla_{\nu}V^{\mu} = e^{a}_{\nu}\nabla_{a}(e^{\mu}_{b}V^{b}) = e^{a}_{\nu}e^{\mu}_{b}\nabla_{a}(V^{b}) + e^{a}_{\nu}V^{b}\nabla_{a}(e^{\mu}_{b}). \tag{1.2.16}$$

Selon la relation (1.2.6), l'expression précédente devient

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu}V^{\mu} &= e^{a}_{\nu}e^{\mu}_{b}[\partial_{a}V^{b} + w^{b}{}_{ca}V^{c}] + e^{a}_{\nu}V^{b}\nabla_{a}(e^{\mu}_{b}) \\ &= e^{a}_{\nu}e^{\mu}_{b}\partial_{a}V^{b} + e^{a}_{\nu}e^{\mu}_{b}V^{c}w^{b}{}_{ca} + e^{a}_{\nu}V^{b}\nabla_{a}(e^{\mu}_{b}). \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

On comparant les deux relations (1.2.15) et (1.2.17), on oboutit aprés quelques manipulations à l'expression suivante pour la dérivée covariante des tétrades

$$\nabla_{\tau}(e^{\mu}_{b}) = e^{a}_{\tau}\partial_{a}(e^{\mu}_{b}) + e^{\lambda}_{b}\Gamma^{\mu}_{\lambda\tau} - e^{\mu}_{c}w^{c}{}_{b\tau}. \tag{1.2.18}$$

Enfin, aprés le remplacement direct de (1.2.11) dans (1.2.18), on peut facilement vérifier que la dérivée covariante de tétrade disparait, d'une part

$$\begin{aligned}\nabla_\tau(e_b^\mu) &= e_\tau^a\partial_a(e_b^\mu)+e_b^\lambda\Gamma_{\lambda\tau}^\mu-e_c^\mu[e_\nu^c e_b^\lambda\Gamma_{\tau\lambda}^\nu-e_b^\lambda\partial_\tau e_\lambda^c] \\ &= \partial_\tau(e_b^\mu)+e_c^\mu e_b^\lambda\partial_\tau e_\lambda^c\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

d'autre part, nous avons

$$\partial_\tau[e_\lambda^c e_c^\mu]=e_\lambda^c\partial_\tau[e_c^\mu]+e_c^\mu\partial_\tau[e_\lambda^c]\Leftrightarrow e_c^\mu\partial_\tau[e_\lambda^c]=-e_\lambda^c\partial_\tau[e_c^\mu] \tag{1.2.20}$$

en injectant (1.2.20) dans (1.2.19), on trouve

$$\nabla_\tau(e_b^\mu)=0 \tag{1.2.21}$$

Ce résultat n'est rien d'autre que la conséquence directe de la propiété de la dérivée covariante de la métrique riemanienne, car

$$\nabla_\tau(g_{\mu\nu})=\nabla_\tau(\eta_{ab}e_\mu^a e_\upsilon^b)=2\eta_{ab}e_\mu^a\nabla_\tau(e_\upsilon^b)=0 \tag{1.2.22}$$

La connexion de spin d'après Weyl

Hermann Weyl a démontré comment le concept de spineur pourrait étre reporté sur un espace courbe de la relativité générale [9]. Avant, les spineurs étaient reconnus principalement comme des objets mathématiques transformés dans l'espace sous le groupe $SU(2)$. Dirac montra qu'ils étaient essentiels à la description de la mécanique quantique (les particules de spin demi-entier comme les électrons). Cependant l'espace-temps dans lequel les spineurs de Dirac opéraient était toujours Lorentzien puisque les spineurs de Dirac ne sont ni des scalaires ni des vecteurs, on ne savait pas encore comment ils se comportaient dans les espaces courbes. Weyl a fourni un moyen à cette description en utilisant les tétrades comme un lien nécessaire entre l'espace de Lorentz et l'espace de Riemann. Nous pouvons raisonnablement s'attendre à ce qu'une forme similaire soit vérifiée pour la dérivée covariante d'un spineur dans un espace courbe. Weyl a eu la perspicacité de reconnaitre cette identification comme un principe général et il a exprimé la dérivée dans l'espace courbe du spineur de Dirac comme

$$\begin{aligned}\partial_\mu\Psi &\longrightarrow D_\mu\Psi \\ D_\mu\Psi &= (\partial_\mu-\Gamma_\mu)\Psi\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

où Γ_μ sont des matrices 4×4 qui rendent l'équation de Dirac valable pour un espace courbe, elles representent la connexion de spin.

En ce qui concerne les propiétés de la transformation de $\Psi(x)$ lui même, on considère le changement résultant d'un déplacement infinitésimal

$$\Psi(x+dx)=\Psi(x)+\partial_\mu\Psi dx^\mu=\Psi(x)+d\Psi$$

donc

$$d\Psi=\Psi(x+dx)-\Psi(x)=\partial_\mu\Psi dx^\mu.$$

On peut alors exiger que la variation totale dans un espace courbe sous un transfert parallèle soit

$$\Psi(x+dx) = \Psi(x) + \Gamma_\mu \Psi(x) dx^\mu = \Psi(x) + D_\mu \Psi(x)$$

avec

$$D_\mu \Psi = \Gamma_\mu \Psi(x) dx^\mu \Rightarrow D_\mu \Psi^\dagger = \Psi^\dagger \Gamma_\mu^\dagger dx^\mu \tag{1.2.24}$$

La quantité scalaire de Dirac est donnée par

$$I = \bar{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \tag{1.2.25}$$

avec

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{la représentation de Weyl} \\
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{la représentation de Dirac}
\end{aligned}$$

Pour écrire l'équation de Dirac en relativité générale, nous introduisons les matrices dépendantes du l'espace-temps $\gamma^\mu(x)$ et qui sont liées aux matrices γ^a, de l'espace plat de Minkowski, par la relation suivante

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_a \gamma^a \Rightarrow \gamma_\mu(x) = e^a_\mu \gamma_a \tag{1.2.26}$$

sachant que l'anticommutateur des matrices de Dirac ordinaire γ^a est donnée par

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} I \tag{1.2.27}$$

d'après les relations (1.2.27) et (1.1.22), on trouve que l'anticommutateur entre deux matrices $\gamma^\mu(x)$ est donné par

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu} I \tag{1.2.28}$$

Nous pouvons aussi déduire que $D_\mu\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = 0$, en tenant compte de (1.2.22).

Nous devons tenir compte de la possibilité que les matrices gamma puissent être des fonctions de coordonnées, par conséquent, nous écrivons γ^0 comme $\gamma^0(x)$ donc, en appliquant la dérivée covariante sur la relation (1.2.25)

$$\begin{aligned}
DI &= D(\Psi^\dagger \gamma^0 \Psi) \\
&= D(\Psi^\dagger)\gamma^0\Psi + \Psi^\dagger D(\gamma^0)\Psi + \Psi^\dagger \gamma^0 D(\Psi)
\end{aligned}$$

D'après les deux relations (1.2.25) et (1.2.24) on trouve

$$\begin{aligned} D_\mu I &= \Psi^\dagger \Gamma_\mu^\dagger \gamma^0(x) \Psi dx^\mu + \Psi^\dagger \partial_\mu \gamma^0(x) \Psi dx^\mu + \Psi^\dagger \gamma^0(x) \Gamma_\mu \Psi dx^\mu \\ &= \Psi^\dagger [\Gamma_\mu^\dagger \gamma^0(x) + \partial_\mu \gamma^0(x) + \gamma^0(x) \Gamma_\mu] \Psi dx^\mu = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma_\mu^\dagger \gamma^0(x) = -\partial_\mu \gamma^0(x) - \gamma^0(x) \Gamma_\mu \tag{1.2.29}$$

$\bar{\Psi}\gamma^\lambda\Psi$ est un vecteur, on peut le noter $V^\lambda(x)$ et on suppose que ce vecteur est parallèlement transféré de la même manière qu'il est en relativité générale

$$\delta V^\lambda = \Gamma^\lambda_{a\mu} V^a dx^\mu,$$

De la même maniére, on suppose que $V^a = \Psi\gamma^a\Psi$ est un L-vecteur, donc sa derivée covariante est égale à

$$\begin{aligned} DV^\lambda &= D\left[\Psi\gamma^\lambda\Psi\right] \\ &= D\left[\Psi^\dagger\gamma^0(x)\gamma^\lambda\Psi\right] \\ &= D(\Psi^\dagger)\gamma^0\gamma^\lambda\Psi + \Psi^\dagger D(\gamma^0)\gamma^\lambda\Psi + \Psi^\dagger\gamma^0(x)D(\gamma^\lambda)\Psi + \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\lambda D(\Psi) \end{aligned}$$

En injectant la (1.2.24) dans l'expression de la derivée covariante, on trouve

$$\begin{aligned} DV^\lambda &= \Psi^\dagger\Gamma_\mu^\dagger\gamma^0(x)\gamma^\lambda\Psi dx^\mu + \Psi^\dagger\partial_\mu\gamma^0(x)\gamma^\lambda\Psi dx^\mu + \Psi^\dagger\gamma^0(x)\partial_\mu\gamma^\lambda\Psi dx^\mu + \Psi^\dagger\gamma^0(x)\gamma^\lambda\Gamma_\mu\Psi dx^\mu \\ &= \Psi^\dagger[\Gamma_\mu^\dagger\gamma^0(x)\gamma^\lambda + \partial_\mu\gamma^0(x)\gamma^\lambda + \gamma^0(x)\partial_\mu\gamma^\lambda + \gamma^0(x)\gamma^\lambda\Gamma_\mu]\Psi dx^\mu. \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Dans le cas de la relativité générale

$$\begin{aligned} DV^\lambda &= \Gamma^\lambda_{a\mu} V^a dx^\mu \\ &= \Psi^\dagger[\Gamma^\lambda_{a\mu}\gamma^0(x)\gamma^a]\Psi dx^\mu \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

Donc on a l'égalité suivante

$$\Gamma_\mu^\dagger\gamma^0(x)\gamma^\lambda + \partial_\mu\gamma^0(x)\gamma^\lambda + \gamma^0(x)\partial_\mu\gamma^\lambda + \gamma^0(x)\gamma^\lambda\Gamma_\mu = \Gamma^\lambda_{a\mu}\gamma^0(x)\gamma^a$$

En utilisant la relation (1.1.23) on peut se débarrasser du terme $\Gamma_\mu^\dagger\gamma^0(x)$ pour aboutir à

$$D_\mu(\Gamma)\gamma^\lambda = \partial_\mu\gamma^\lambda - \Gamma^\lambda_{a\mu}\gamma^a = \Gamma_\mu\gamma^\lambda - \gamma^\lambda\Gamma_\mu.$$

De même pour la L-forme $V^a = \Psi\gamma^a\Psi$, nous trouvons

$$\omega^a{}_{b\mu}\gamma^b = \gamma^a\Gamma_\mu - \Gamma_\mu\gamma^a. \tag{1.2.32}$$

Grâce au formalisme des tétrades, on a $\gamma^b = e^b_\mu\gamma^\mu$. Ainsi, il est facile de démontrer que

$$\omega^a{}_{b\mu} = e^\lambda_b D_\mu(\Gamma) e^a_\lambda. \tag{1.2.33}$$

On peut aussi réécrire la relation (1.2.32) sous la forme

$$\omega_{ab\mu}\gamma^b = \gamma_a\Gamma_\mu - \Gamma_\mu\gamma_a$$

En multipliant à gauche par γ^a, on obtient

$$\omega_{ab\mu}\gamma^b\gamma^a = \gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a - \Gamma_\mu\gamma_a\gamma^a \tag{1.2.34}$$

Sachant que $\gamma_a\gamma^a = 4I$, et en remplaçant dans (1.2.34), on aboutit à

$$\omega_{ab\mu}\gamma^b\gamma^a = \gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a - 4\Gamma_\mu\ . \tag{1.2.35}$$

Ainsi,

$$4\Gamma_\mu = \omega_{ba\mu}\gamma^a\gamma^b + \gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a$$

En multipliant les deux cotés par γ_a et γ^a, elle devient

$$4\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a = \omega_{ba\mu}\gamma_c\gamma^a\gamma^b\gamma^c + \gamma_b\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a\gamma^b\ .$$

En développant le terme $\omega_{ba\mu}\gamma_c\gamma^a\gamma^b\gamma^c$, et tenons compte de la relation (1.2.12), nous pouvons démontrer que

$$\omega_{ba\mu}\gamma_c\gamma^a\gamma^b\gamma^c = 0. \tag{1.2.36}$$

Ainsi,

$$\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a = \frac{1}{4}\gamma_b\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a\gamma^b.$$

Si on multiplie cette expression encore une fois par γ_a et γ^a, on trouve

$$\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a = \frac{1}{16}\gamma_c\gamma_b\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a\gamma^b\gamma^c\ .$$

Après K itérations, on obtient

$$\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a = \frac{1}{4^{k+1}}[...\gamma_d\gamma_c\gamma_b\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d...].$$

On conclut, en prenant la limite $k \to \infty$, que

$$\gamma_a\Gamma_\mu\gamma^a = 0 \tag{1.2.37}$$

En remplaçant (1.2.37) dans (1.2.35).on obtient l'expression recharchée pour la connexion de spin

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4}\omega_{ba\mu}\gamma^a\gamma^b = \frac{1}{8}\omega_{ba\mu}S^{ab} \tag{1.2.38}$$

où $S^{ab} = \frac{1}{2}\left[\gamma^a, \gamma^b\right]$ est le tenseur de spin.

En injectant (1.2.10) dans (1.2.38), on aboutit à la formule de la connexion de spin suivante

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{4}g_{\mu\alpha}(\partial_\lambda e^k_\nu e^\alpha_k - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda})S^{\mu\nu}\ . \tag{1.2.39}$$

Finalement,en remplaçant (1.2.39) dans (1.2.23), on conclu que la dérivée covariante spinorielle est donnée par l'expression suivante

$$D_\lambda = \partial_\lambda - \Gamma_\lambda \tag{1.2.40}$$

$$D_\lambda = \partial_\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\alpha}(\partial_\lambda e_\nu^k e_k^\alpha - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha) S^{\mu\nu} \tag{1.2.41}$$

Par conséquence, pour la particule libre de spin $\frac{1}{2}$ et de masse m_0, l'équation covariante de Dirac dans le cas de la relativité générale, est donnée par

$$\{\gamma^\nu (\partial_\nu - \Gamma_\nu) + m_0\} \Psi = 0 \tag{1.2.42}$$

CHAPITRE 2

L'approche de Shishkin pour une classe spéciale de métrique

2.1 L'approche de Shishkin

L'équation covariante de Dirac dans le cas de la relativité générale comporte quelques difficultés mathématiques, qui sont liées au fait que cette dernière est un système à quatre équations différentielles avec des dérivées partielles, où les solutions exactes d'un tel système sont prédéterminées essentiellement par la méthode algébrique de séparation des variables. C'est ce qu'on appelle l'approche de Shishkin.

Considérons l'équation de Dirac dans l'espace temps à symétrie central et isotrope. Nous utilisons le système de coordonnées (r,θ, ϕ, t) pour lequel le carré de la distance élémentaire s'écrit comme suit [10]

$$ds^2 = e^{\lambda(r,t)}\{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\} - e^{\nu(r,t)}dt^2$$

donc la métrique a la forme la plus générale

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(r,t)}r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda(r,t)}r^2\sin\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\nu(r,t)} \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda(r,t)}r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda(r,t)}r^{-2}\sin\theta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\nu(r,t)} \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

Lorsque les fonctions $\lambda(r,t)$ et $\nu(r,t)$ prennent une valeur précise, on obtient un univers bien définie, comme l'univers de De sitter, Milne, Schwarzschild...ect.

Nous pouvous exprimer le ds^2 en coordonnées cartésiennes, où :

$$ds^2 = e^{\lambda(r,t)}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - e^{\nu(r,t)}dt^2 \tag{2.1.3}$$

Le passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques, est donné par

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \\ t = t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & r \in [0, +\infty] \\ \tan\theta = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) & \theta \in [0, \pi] \\ \tan\phi = \left(\frac{y}{x}\right) & \phi \in [0, 2\pi] \\ t = t \end{cases}$$

Pour un déplacement infinitésimal, nous avons

$$\begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ dt &= dt \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Le carré de la distance élémentaire exprimé dans la base des tétrades $\{e^a\}$ s'écrit

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab}e^{\tilde{a}}e^{\tilde{b}} \\ ds^2 &= (e^{\tilde{r}})^2 + (e^{\tilde{\theta}})^2 + (e^{\tilde{\phi}})^2 - (e^{\tilde{t}})^2 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Par identification (2.1.3) et (2.1.5), et en utilisant (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} e^{\tilde{r}} &= e^{\frac{\lambda(r,t)}{2}}dx = e^{\frac{\lambda(r,t)}{2}}\left[\sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi\right] \\ e^{\tilde{\theta}} &= e^{\frac{\lambda(r,t)}{2}}dy = e^{\frac{\lambda(r,t)}{2}}\left[\sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi\right] \\ e^{\tilde{\phi}} &= e^{\frac{\lambda(r,t)}{2}}dz = e^{\frac{\lambda(r,t)}{2}}\left[\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\right] \\ e^{\tilde{t}} &= e^{\frac{\nu(r,t)}{2}}dt = e^{\frac{\nu(r,t)}{2}}dt. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Selon la relation (1.1.11), les quatre covecteurs de la base des cotétrades sont

$$\begin{aligned} e^{\tilde{r}} &= e^{\tilde{r}}_r dr + e^{\tilde{r}}_\theta d\theta + e^{\tilde{r}}_\phi d\phi + e^{\tilde{r}}_t dt \\ e^{\tilde{\theta}} &= e^{\tilde{\theta}}_r dr + e^{\tilde{\theta}}_\theta d\theta + e^{\tilde{\theta}}_\phi d\phi + e^{\tilde{\theta}}_t dt \\ e^{\tilde{\phi}} &= e^{\tilde{\phi}}_r dr + e^{\tilde{\phi}}_\theta d\theta + e^{\tilde{\phi}}_\phi d\phi + e^{\tilde{\phi}}_t dt \\ e^{\tilde{t}} &= e^{\tilde{t}}_r dr + e^{\tilde{t}}_\theta d\theta + e^{\tilde{t}}_\phi d\phi + e^{\tilde{t}}_t dt. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Par analogie, la matrice de changement de base permettant de passer de la base munis d'une métrique $g_{\mu\nu}$ à la base tétrade est donnée par

$$e^a_\mu = \begin{pmatrix} e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\phi & e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\cos\phi & -e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta\sin\phi & 0 \\ e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\sin\phi & e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\sin\phi & e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta\cos\phi & 0 \\ e^{\lambda\backslash 2}\cos\theta & -e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu\backslash 2} \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

où ses dérivées partielles par rapport à r, θ, ϕ et t sont données par

$$\begin{aligned}
\partial_r e^a_\mu &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda'}{2}e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\phi & (\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}\cos\theta\cos\phi & -(\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\sin\phi & 0 \\ \frac{\lambda'}{2}e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\sin\phi & (\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}\cos\theta\sin\phi & (\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\phi & 0 \\ \frac{\lambda'}{2}e^{\lambda\backslash 2}\cos\theta & -(\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu'}{2}e^{\nu\backslash 2} \end{pmatrix} \\
\partial_\theta e^a_\mu &= \begin{pmatrix} e^{\lambda\backslash 2}\cos\theta\cos\phi & -e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta\cos\phi & -e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ e^{\lambda\backslash 2}\cos\theta\sin\phi & -e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta\sin\phi & e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\cos\phi & 0 \\ -e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta & -e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\partial_\phi e^a_\mu &= \begin{pmatrix} -e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\phi & -e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\sin\phi & -e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta\cos\phi & 0 \\ e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\sin\phi & e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\cos\phi & -e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\partial_t e^a_\mu &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\phi & \frac{\lambda}{2}e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\cos\phi & -\frac{\lambda}{2}r\sin\theta\sin\phi e^{\lambda\backslash 2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2}e^{\lambda\backslash 2}\sin\theta\sin\phi & \frac{\lambda}{2}e^{\lambda\backslash 2}r\cos\theta\sin\phi & \frac{\lambda}{2}r\sin\theta\cos\phi e^{\lambda\backslash 2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2}e^{\lambda\backslash 2}\cos\theta & -\frac{\lambda}{2}e^{\lambda\backslash 2}r\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu}{2}e^{\nu\backslash 2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour obtenir la tétrade inverse, on fait remonter et redescendre les indices grecs et les indices latins en utilisant la métrique $g^{\mu\nu}$et η_{ab} respectivement :

$$e^\mu_{\tilde{a}} = e_{\tilde{a}\nu}g^{\mu\nu} = e^{\tilde{b}}_\nu g^{\mu\nu}\eta_{\tilde{a}\tilde{b}}$$

La matrice des tétrades inverse est donnée par

$$e^\mu_a = \begin{pmatrix} e^{-\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\phi & e^{-\lambda\backslash 2}\sin\theta\sin\phi & e^{-\lambda\backslash 2}\cos\theta & 0 \\ e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}\cos\theta\cos\phi & e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}\cos\theta\sin\phi & -e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}\sin\theta & 0 \\ -e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}\sin\theta^{-1}\sin\phi & e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}\sin\theta^{-1}\cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\nu\backslash 2} \end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$

Pour appliquer l'approche de Shishkin à l'équation de Dirac en relativité générale (1.2.42), nous devons calculer d'abord la dérivée covariante spinorielle donné en (1.2.41).

La connexion de spin D'après la relation (1.2.39) , la connexion de spin est définie par

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha}(\partial_\lambda e^k_\nu e^\alpha_k - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}) S^{\mu\nu} \tag{2.1.10}$$

Afin d'effectuer cette opération, il faut passer par des calculs intermédiaires comme les symboles de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}$, le tenseur de spin $S^{\mu\nu}$.

Les symboles de Christoffel Ils sont donnés par

$$\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\lambda g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\beta} - \partial_\beta g_{\nu\lambda}). \tag{2.1.11}$$

Pour α, β et λ prennent des valeurs de 1 jusqu'à 4 et en calculant les dérivées partielles de la métrique $g_{\mu\nu}$ (2.1.1) par rapport à r, θ, ϕ et t, on obtient

$$\partial_r g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \lambda' e^\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda' r + 2) e^\lambda r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda' r + 2) e^\lambda r \sin\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu' e^\nu \end{pmatrix} \tag{2.1.12}$$

$$\partial_\theta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e^\lambda r^2 \cos\theta \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.13}$$

$$\partial_\phi g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.14}$$

$$\partial_t g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dot\lambda e^\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot\lambda e^\lambda r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot\lambda e^\lambda r^2 \sin\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot\nu e^\nu \end{pmatrix} \qquad 53 \tag{2.1.15}$$

Ainsi, en utilisant la métrique inverse (39). on obtient les symboles de Christoffel :

pour $\alpha = r$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{rr} &= \frac{\lambda'}{2} \\
\Gamma^r_{tr} &= \Gamma^r_{rt} = \frac{\lambda^{\cdot}}{2} \\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{\lambda'}{2} r^2 - r \\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{\lambda'}{2} r^2 \sin\theta^2 - r \sin\theta^2 \\
\Gamma^r_{tt} &= \frac{\nu'}{2} e^{-\lambda} e^{\nu}
\end{aligned}
\tag{2.1.16}
$$

pour $\alpha = \theta$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{\theta r} &= \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \\
\Gamma^\theta_{t\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta t} = \frac{\lambda^{\cdot}}{2} \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left[\partial_\phi g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\phi}\right] = -\frac{1}{2} \left(e^{-\lambda} r^{-2}\right) \left(2e^{\lambda} r^2 \sin\theta \cos\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.1.17}
$$

pour $\alpha = \phi$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\phi_{\phi r} &= \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \\
\Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
\Gamma^\phi_{t\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi t} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left[\partial_t g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi t} - \partial_\phi g_{t\phi}\right] = \frac{1}{2} \left(e^{-\lambda} r^2 \sin\theta^{-2}\right) \left(\lambda^{\cdot} e^{\lambda} r^2 \sin\theta^2\right) = \frac{\lambda^{\cdot}}{2}
\end{aligned}
\tag{2.1.18}
$$

pour $\alpha = t$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t_{rr} &= \frac{\lambda^{\cdot}}{2} e^{\lambda} e^{-\nu} \\
\Gamma^t_{tr} &= \frac{\nu'}{2} \\
\Gamma^t_{\theta\theta} &= \frac{\lambda^{\cdot}}{2} r^2 e^{-\nu} e^{\lambda} \\
\Gamma^t_{\phi\phi} &= \frac{\lambda^{\cdot}}{2} r^2 \sin\theta^2 e^{\lambda} e^{-\nu} \\
\Gamma^t_{tt} &= \frac{\nu^{\cdot}}{2}
\end{aligned}
\tag{2.1.19}
$$

Les autres termes sont nuls .

Le tenseur de spin $S^{\mu\nu}$ Par définition, nous avons

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]$$

Pour la calculer nous allons introduire les matrices sphériques de Dirac dans un espace-temps courbe qui sont liées aux matrices ordinaires, par les relations suivantes

$$\gamma_{\mu} = e^{a}_{\mu}\tilde{\gamma}_{a} \quad \text{et} \quad \gamma^{\mu} = e^{\mu}_{a}\widetilde{\gamma}^{a} \tag{2.1.20}$$

pour $\mu = 1, 2, 3{,}4$ on a

$$\gamma^1 = e^{1}_{\tilde{1}}\widetilde{\gamma}^1 + e^{1}_{\tilde{2}}\widetilde{\gamma}^2 + e^{1}_{\tilde{3}}\widetilde{\gamma}^3 + e^{1}_{\tilde{4}}\widetilde{\gamma}^4 = e^{-\lambda\backslash 2}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^3]$$

$$\gamma^2 = e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}[\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1 + \cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2 - \sin\theta\widetilde{\gamma}^3] \tag{2.1.21}$$

$$\gamma^3 = e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}[-\sin\theta^{-1}\sin\phi\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta^{-1}\cos\phi\widetilde{\gamma}^2] \tag{2.1.22}$$

$$\gamma^4 = e^{-\nu\backslash 2}\widetilde{\gamma}^4 \ . \tag{2.1.23}$$

De plus, nous avons

$$\left\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right\} = 2g_{\mu\nu}I \Rightarrow g_{\mu\nu} = (e^{\lambda(r,t)}, e^{\lambda(r,t)}r^2, e^{\lambda(r,t)}r^2\sin\theta^2, -e^{\nu(r,t)}) \tag{2.1.24}$$

$$\{\tilde{\gamma}_a, \tilde{\gamma}_b\} = 2\eta_{ab}I \Rightarrow \eta_{ab} = (1, 1, 1, -1) \tag{2.1.25}$$

avec

$$\tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\gamma}^2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.26}$$

$$\tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\gamma}^4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Les valeurs de $S^{\mu\nu}$ pour $\mu = 1$ sont données par

$$\begin{aligned} S^{11} &= 0 \qquad (2.1.27) \\ S^{12} &= \frac{e^{-\lambda}}{r}[\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^1 + \sin\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2] \\ S^{13} &= \frac{1}{r}e^{-\lambda}[\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\sin\theta^{-1}\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3 + \cos\theta\sin\theta^{-1}\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2] \\ S^{14} &= e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^4 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4] \end{aligned}$$

pour $\mu = 2$

$$\begin{aligned}
S^{21} &= \frac{e^{-\lambda}}{r}[\cos\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3 + \sin\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^3] \\
S^{22} &= 0 \\
S^{23} &= \frac{1}{r^2}e^{-\lambda}[\sin\theta^{-1}\cos\theta\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^2 + \cos\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^3 + \sin\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^1] \\
S^{24} &= \frac{1}{r}e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}[\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3]
\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

pour $\mu = 3$

$$\begin{aligned}
S^{31} &= \frac{1}{r}e^{-\lambda}[\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^1 + \cos\theta\sin\theta^{-1}\sin\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^1 + \cos\theta\sin\theta^{-1}\cos\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^3] \\
S^{32} &= \frac{1}{r^2}e^{-\lambda}[\sin\theta^{-1}\cos\theta\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^1 + \cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2 + \sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3] \\
S^{33} &= 0 \\
S^{34} &= \frac{e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}}{r}[\sin\theta^{-1}\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta^{-1}\cos\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^4]
\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

enfin, pour $\mu = 4$

$$\begin{aligned}
S^{41} &= e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3] \\
S^{42} &= \frac{1}{r}e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}[\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2 + \sin\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4] \\
S^{43} &= \frac{e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}}{r}[\sin\theta^{-1}\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta^{-1}\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2] \\
S^{44} &= 0
\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

En faisant la somme sur $\lambda = 1, 2, 3, 4$, on trouve

$$\Gamma_\lambda = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \tag{2.1.31}$$

Nous allons commencer par Γ_1

$$\begin{aligned}
4\Gamma_\lambda &= g_{\mu\alpha}(\partial_\lambda e^k_\nu e^\alpha_k - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda})s^{\mu\nu} \\
4\Gamma_1 &= g_{\mu\alpha}(\partial_1 e^k_\nu e^\alpha_k - \Gamma^\alpha_{\nu 1})s^{\mu\nu} \\
4\Gamma_1 &= \underbrace{g_{11}(\partial_1 e^k_\nu e^1_k - \Gamma^1_{\nu 1})s^{1\nu}}_{A} + \underbrace{g_{22}(\partial_1 e^k_\nu e^2_k - \Gamma^2_{\nu 1})s^{2\nu}}_{B} + \underbrace{g_{33}(\partial_1 e^k_\nu e^3_k - \Gamma^3_{\nu 1})s^{3\nu}}_{C} + \underbrace{g_{44}(\partial_1 e^k_\nu e^4_k - \Gamma^4_{\nu 1})s^{4\nu}}_{D}
\end{aligned}$$

On calcule la partie A en sommant sur $\nu = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}
A &= g_{11}(\partial_1 e^k_\nu e^1_k - \Gamma^1_{\nu 1})s^{1\nu} \\
A &= \underbrace{g_{11}(\partial_1 e^k_1 e^1_k - \Gamma^1_{11})s^{11}}_{A_1} + \underbrace{g_{11}(\partial_1 e^k_2 e^1_k - \Gamma^1_{21})s^{12}}_{A_2} + \underbrace{g_{11}(\partial_1 e^k_3 e^1_k - \Gamma^1_{31})s^{13}}_{A_3} + \underbrace{g_{11}(\partial_1 e^k_4 e^1_k - \Gamma^1_{41})s^{14}}_{A_4},
\end{aligned}$$

Nous allons calculer aussi A_1, A_2, A_3 et A_4 en sommant sur $k = 1, 2, 3, 4$ et en utilisant (2.1.1),(2.1.9),(2.1.17) et (2.1.27)

$$A_1 = g_{11}(\partial_1 e_1^k e_k^1 - \Gamma_{11}^1)\underbrace{s^{11}}_{0} = 0$$

ainsi, pour A_2

$$\begin{aligned}
A_2 &= g_{11}(\partial_1 e_2^k e_k^1 - \Gamma_{21}^1)s^{12} \\
A_2 &= g_{11}\left[\partial_1 e_2^k e_k^1 + \partial_1 e_2^k e_k^1 + \partial_1 e_2^k e_k^1 + \partial_1 e_2^k e_k^1 - \Gamma_{21}^1\right] s^{12} \\
A_2 &= e^\lambda[(\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}e^{-\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\theta\cos\phi^2 + (\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}e^{-\lambda\backslash 2}\sin\theta\cos\theta\sin\phi^2 \\
&\quad -(\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}e^{-\lambda\backslash 2}\cos\theta\sin\theta]s^{12} \\
A_2 &= e^\lambda\left[(\frac{\lambda'}{2}r+1)\sin\theta\cos\theta\underbrace{\left(\cos\phi^2+\sin\phi^2\right)}_{1} - (\frac{\lambda'}{2}r+1)\cos\theta\sin\theta - \underbrace{\Gamma_{21}^1}_{0}\right] s^{12} = 0
\end{aligned}$$

pour A_3

$$\begin{aligned}
A_3 &= g_{11}(\partial_1 e_3^k e_k^1 - \Gamma_{31}^1)s^{13} \\
A_3 &= g_{11}\left[\partial_1 e^1 e_1^1 + \partial_1 e_3^2 e_2^1 + \partial_1 e_3^3 e_3^1 + \partial_1 e_3^4 e_4^1 - \Gamma_{31}^1\right] s^{13} \\
A_3 &= e^\lambda\left[-(\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}e^{-\lambda\backslash 2}\sin\phi\cos\phi\sin\theta^2 + (\frac{\lambda'}{2}r+1)e^{\lambda\backslash 2}e^{-\lambda\backslash 2}\sin\theta\sin\phi\cos\phi\sin\theta^2 - \underbrace{\Gamma_{31}^1}_{0}\right] s^{13}
\end{aligned}$$

finalement, pour A_4

$$\begin{aligned}
A_4 &= g_{11}(\partial_1 e_4^k e_k^1 - \Gamma_{41}^1)s^{14} \\
A_4 &= g_{11}\left[\partial_1 e_4^1 e_1^1 + \partial_1 e_4^2 e_2^1 + \partial_1 e_4^3 e_3^1 + \partial_1 e_4^4 e_4^1 - \Gamma_{41}^1\right] s^{14} \\
A_4 &= e^\lambda[-\underbrace{\Gamma_{41}^1}_{\frac{\dot\lambda}{2}}]s^{14} \\
A_4 &= e^\lambda e^{-\frac{(\lambda+\nu)}{2}}[-\frac{\dot\lambda}{2}][\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^4 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4] \\
A_4 &= -\frac{\dot\lambda}{2}e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^4 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4].
\end{aligned}$$

On obient donc

$$A = -\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda\backslash 2}e^{-\nu\backslash 2}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^4 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4] \tag{2.1.32}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} B &= g_{22}(\partial_1 e^k_\nu e^2_k - \Gamma^2_{\nu 1})s^{2\nu} \\ &= \underbrace{g_{22}(\partial_1 e^k_1 e^2_k - \Gamma^2_{11})s^{21}}_{B_1} + \underbrace{g_{22}(\partial_1 e^k_2 e^2_k - \Gamma^2_{21})s^{22}}_{B_2} + \underbrace{g_{22}(\partial_1 e^k_3 e^2_k - \Gamma^2_{31})s^{23}}_{B_3} + \underbrace{g_{22}(\partial_1 e^k_4 e^2_k - \Gamma^2_{41})s^{24}}_{B_4} \end{aligned}$$

On trouve

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0 \tag{2.1.33}$$

Pour C, on obtient

$$C = 0, \tag{2.1.34}$$

et finalement pour D

$$D = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda\backslash 2} e^{-\nu\backslash 2}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3] \tag{2.1.35}$$

En injectant (2.1.32),(2.1.33),(2.1.34),(2.1.35) dans Γ_1, on obtient

$$\begin{aligned} 4\Gamma_1 &= A + B + C + D \\ 4\Gamma_1 &= -\frac{\dot{\lambda}}{2}^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2\widetilde{\gamma}^4 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4] \\ &\quad + \frac{\dot{\lambda}}{2}^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3] \\ \Gamma_1 &= \frac{1}{4}\dot{\lambda} e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3] \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

de la même manière, on calcule le Γ_2,Γ_3,Γ_4

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{\dot{\lambda}}{4} r e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2 + \sin\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4] + \\ &\quad \frac{\lambda'}{4} r[\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^1 + \sin\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2] && (2.1.37) \\ \Gamma_3 &= \frac{\lambda'}{4} r[\sin\theta^2\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^2 + \sin\theta\cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3 + \sin\theta\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2] + \\ &\quad \frac{\dot{\lambda}}{4} r e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4 + \sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2] && (2.1.38) \\ \Gamma_4 &= \frac{\nu'}{4} e^{\frac{(\nu-\lambda)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3] && (2.1.39) \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\Gamma_\nu &= \frac{\dot{\lambda}}{4}e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3]+ \\ &\frac{\dot{\lambda}}{4}re^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1+\cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2+\sin\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4]+ \\ &\frac{\lambda'}{4}r[\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^1+\sin\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2]+ \\ &\frac{\lambda'}{4}r[\sin\theta^2\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^2+\sin\theta\cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3+\sin\theta\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2]+ \\ &\frac{\dot{\lambda}}{4}re^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4+\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2]+ \\ &\frac{\nu'}{4}e^{\frac{(\nu-\lambda)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3]\end{aligned} \tag{2.1.40}$$

Ainsi, la dérivée covariante spinorielle est donnée par

$$\begin{aligned}D_\nu &= \partial_\nu-\frac{\dot{\lambda}}{4}e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3]+ \\ &\frac{\dot{\lambda}}{4}re^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1+\cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2+\sin\theta\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^4]+ \\ &\frac{\lambda'}{4}r[\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^1+\sin\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2]+ \\ &\frac{\lambda'}{4}r[\sin\theta^2\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^2+\sin\theta\cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3+\sin\theta\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^3\widetilde{\gamma}^2]+ \\ &\frac{\dot{\lambda}}{4}re^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}}[\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^4+\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2]+ \\ &\frac{\nu'}{4}e^{\frac{(\nu-\lambda)}{2}}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^3]\end{aligned}$$

L'équation de Dirac en relativité générale est donnée par :

$$\left\{\underbrace{\gamma^\nu\partial_\nu}_{\bar{B}}-\underbrace{\gamma^\nu\Gamma_\upsilon}_{\bar{A}}+m\right\}\Psi(x)=0. \tag{2.1.41}$$

Pour calculer $\bar{A}$, on va utiliser l'expression de la connexion de spin (2.1.40) en tenant compte de (2.1.36),(2.1.37),(2.1.38),(2.1.39) :

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \gamma^\nu\Gamma_\upsilon \\ \bar{A} &= \gamma^1\Gamma_1+\gamma^2\Gamma_2+\gamma^3\Gamma_3+\gamma^4\Gamma_4\end{aligned} \tag{2.1.42}$$

On commence par $\gamma^1\Gamma_1$:

$$\begin{aligned}\gamma^1\Gamma_1 &= \frac{1}{4}\dot{\lambda}e^{\lambda\backslash 2}e^{-\nu\backslash 2}e^{-\lambda\backslash 2}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta\widetilde{\gamma}^3][\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^4\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta \\ &= \frac{\dot{\lambda}}{4}e^{-\nu\backslash 2}[-\sin\theta^2\cos\phi^2\widetilde{\gamma}^4-\sin\theta^2\sin\phi^2\widetilde{\gamma}^4-\cos\theta^2\widetilde{\gamma}^4]=-\frac{\dot{\lambda}}{4}e^{-\nu\backslash 2}\widetilde{\gamma}^4 \qquad (2.\end{aligned}$$

De la même manière

$$\gamma^2\Gamma_2=\frac{\lambda'}{4}e^{-\lambda\backslash 2}(-\cos\theta\widetilde{\gamma}^3-\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1-\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2)-\frac{\dot{\lambda}}{4}e^{-\nu\backslash 2}\widetilde{\gamma}^4 \tag{2.1.44}$$

et

$$\gamma^3\Gamma_3=\frac{\lambda'}{4}e^{-\lambda\backslash 2}(-\cos\theta\widetilde{\gamma}^3-\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1-\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2) \tag{2.1.45}$$

Finalement

$$\gamma^4\Gamma_4=-\frac{\nu'}{4}e^{-\lambda\backslash 2}[\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta\widetilde{\gamma}^3] \tag{2.1.46}$$

En remplaçant (2.1.43),(2.1.44),(2.1.45) et (2.1.46) dans (2.1.42) , on obtient

$$\bar{A}=-\frac{3\dot{\lambda}}{4}e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4-e^{-\lambda\backslash 2}\bar{\gamma}^1[\frac{\nu'}{4}+\frac{\lambda'}{4}] \tag{2.1.47}$$

Pour calculer $\bar{B}$ on utilise la définition de la dérivée partielle et en tenant compte de (2.1.36),(2.1.37),(2.1.38),(2.1.39), on retrouve

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \gamma^\nu\partial_\nu=\vec{\gamma}\vec{\nabla}+\gamma^4\frac{\partial}{\partial t} \\ \bar{B} &= \left[\gamma^1\vec{e}_r+\gamma^2\vec{e}_\theta+\gamma^3\vec{e}_\phi\right][\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\phi]+\gamma^4\frac{\partial}{\partial t} \\ \bar{B} &= \underbrace{\gamma^1\frac{\partial}{\partial r}}_{\bar{B}_1}+\underbrace{\gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta}}_{\bar{B}_2}+\underbrace{\gamma^3\frac{\partial}{\partial\phi}}_{\bar{B}_3}+\underbrace{\gamma^4\frac{\partial}{\partial t}}_{\bar{B}_4}\end{aligned} \tag{2.1.48}$$

pour $\bar{B}_1$

$$\bar{B}_1=\gamma^1\frac{\partial}{\partial r}=e^{-\lambda\backslash 2}\underbrace{\left(\sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1+\sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2+\cos\theta\widetilde{\gamma}^3\right)}_{\bar{\gamma}^1}\frac{\partial}{\partial r}=e^{-\lambda\backslash 2}\bar{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.1.49}$$

pour $\bar{B}_2$

$$\bar{B}_2=\gamma^2\frac{\partial}{\partial\theta}=e^{-\lambda\backslash 2}r^{-1}\underbrace{\left(\cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1+\cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2-\sin\theta\widetilde{\gamma}^3\right)}_{\bar{\gamma}^2}\frac{\partial}{\partial\theta}=e^{-\lambda\backslash 2}\frac{\bar{\gamma}^2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{2.1.50}$$

pour $\bar{B}_3$

$$\begin{aligned}\bar{B}_3 &= \gamma^3 \frac{\partial}{\partial\phi} = e^{-\lambda\backslash 2} r^{-1}[-\sin\theta^{-1}\sin\phi\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta^{-1}\cos\phi\widetilde{\gamma}^2]\frac{\sin\theta^2}{\sin\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &= e^{-\lambda\backslash 2}\underbrace{\left(\sin\theta(-\sin\phi\widetilde{\gamma}^1 + \cos\phi\widetilde{\gamma}^2)\right)}_{\bar{\gamma}_3}\frac{1}{r\sin\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi} = e^{-\lambda\backslash 2}\frac{\bar{\gamma}_3}{r\sin\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (2.1.51)\end{aligned}$$

enfin, pour $\bar{B}_4$

$$\bar{B}_4 = \gamma^4 \frac{\partial}{\partial t} = e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4\frac{\partial}{\partial t} \qquad (2.1.52)$$

Définissons les matrices $\bar{\gamma}$ qui satisfont les relations

$$\{\bar{\gamma}_m, \bar{\gamma}_n\} = 2\bar{\eta}_{mn} I \quad \text{avec} \quad \bar{\eta}_{mn} = diag(1, 1, \sin\theta^2, -1) \qquad (2.1.53)$$

par

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1 &= \sin\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1 + \sin\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2 + \cos\theta\widetilde{\gamma}^3 = \bar{\gamma}^1 \\ \bar{\gamma}_2 &= \cos\theta\cos\phi\widetilde{\gamma}^1 + \cos\theta\sin\phi\widetilde{\gamma}^2 - \sin\theta\widetilde{\gamma}^3 = \bar{\gamma}^2 \\ \bar{\gamma}_3 &= \sin\theta(-\sin\phi\widetilde{\gamma}^1 + \cos\phi\widetilde{\gamma}^2) = \sin\theta^2\bar{\gamma}^3 \\ \bar{\gamma}^4 &= \widetilde{\gamma}^4 = -\widetilde{\gamma}_4 = -\bar{\gamma}_4\end{aligned}$$

En injectant (2.1.49),(2.1.50),(2.1.51), et (2.1.52) dans (2.1.48), on obtient

$$\begin{aligned}\bar{B} &= e^{-\lambda\backslash 2}\bar{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial r} + e^{-\lambda\backslash 2}\frac{\bar{\gamma}^2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + e^{-\lambda\backslash 2}\frac{\bar{\gamma}_3}{r\sin\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4\frac{\partial}{\partial t} \\ &= e^{-\lambda\backslash 2}\left[\bar{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\gamma}^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\bar{\gamma}_3}{r\sin\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] + e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4\frac{\partial}{\partial t}, \qquad (2.1.54)\end{aligned}$$

en remplaçant (2.1.47) et (2.1.54) dans (2.1.41), on trouve

$$\left\{e^{-\lambda\backslash 2}\left[\bar{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\gamma}^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\bar{\gamma}_3}{r\sin\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] + e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4\frac{\partial}{\partial t} - \left[-\frac{3\dot{\lambda}}{4}e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4 - e^{-\lambda\backslash 2}\bar{\gamma}^1\left(\frac{\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{4}\right)\right] + m_0\right\}\Psi(x)$$

$$\left\{e^{-\lambda\backslash 2}\left[\bar{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial r} + \bar{\gamma}^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\bar{\gamma}_3}{r\sin\theta^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] + e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3\dot{\lambda}}{4}e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4 + e^{-\lambda\backslash 2}\bar{\gamma}^1\left(\frac{\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{4}\right) + m_0\right\}\Psi(x) = 0,$$

en ajoutant les deux termes : $\frac{\bar{\gamma}^1}{r}e^{-\lambda\backslash 2}$ et $-\frac{\bar{\gamma}^1}{r}e^{-\lambda\backslash 2}$, on obtient finalement

$$\left\{e^{-\lambda\backslash 2}\bar{\gamma}^1\left[\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{2}\right] + e^{-\lambda\backslash 2}\left[\bar{\gamma}^2\partial_\theta + \frac{\bar{\gamma}_3}{\sin\theta^2}\partial_\phi - \bar{\gamma}^1\right]\frac{1}{r} + e^{-\nu\backslash 2}\bar{\gamma}^4\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3\dot{\lambda}}{4}\right] + m_0\right\}\Psi(x) = 0. \qquad (2.1.55)$$

Dans ce qui suit, nous allons trouver un moyen pour séparer les variables pour qu'on puisse résoudre cette équation.

En multipliant par $\frac{\bar{\gamma}^4}{i}$ et en utilisant (2.1.52), on obtient l'expression de l'équation de Dirac dans le cas de la relativité générale par l'approche de Shishkin sous la forme

$$\left\{e^{-\lambda\backslash 2}\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i}\left[\partial_r+\frac{1}{r}+\frac{\nu'}{4}+\frac{\lambda'}{2}\right]+e^{-\lambda\backslash 2}\frac{\bar{\gamma}^1}{r}\hat{K}-\frac{e^{-\nu\backslash 2}}{i}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3\dot{\lambda}}{4}\right]-im_0\bar{\gamma}^4\right\}\Psi(x)=0 \tag{2.1.56}$$

où $\hat{K}$ est l'opérateur de moment angulaire

$$\hat{K}=\frac{\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^2}{i}\partial_\theta+\frac{\bar{\gamma}^1\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^3}{i}\partial_\phi-\bar{\gamma}^4 i \tag{2.1.57}$$

qui vérifie les relations de commutation suivantes

$$\left[\hat{K},\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1\right]=0,\quad \left[\hat{K},\bar{\gamma}^1\right]=0,\ \left[\hat{K},\bar{\gamma}^4\right]=0,\ \left[\hat{K},f(r)\right]=0.$$

2.2 Solution de l'équation de Dirac libre dans l'espace de Milne par l'approche de Shishkin

La métrique de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker est donnée sous cette forme

$$ds^2=\frac{R(t)}{(1+\varkappa r^2)^2}\{dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2\}-dt^2 \tag{2.2.1}$$

c'est à dire que les fonctions $\lambda(r,t)$ et $\nu(r,t)$ sont définie selon cette relation

$$\begin{array}{lllll} e^{\lambda(r,t)} & = & \dfrac{R(t)}{(1+\varkappa r^2)^2} & \Longrightarrow & \lambda(r,t)=\ln\left(R(t)\right)-2\ln\left(1+\varkappa r^2\right) \\ e^{\nu(r,t)} & = & 1 & \Longrightarrow & \nu(r,t)=0. \end{array}$$

Les dérivées partielles de ces fonctions par rapport à r et t sont données par

$$\begin{array}{lllll} \lambda'(r,t) & = & -4\dfrac{\varkappa r}{(1+\varkappa r^2)} & ; & \dot{\lambda}(r,t)=\dfrac{\dot{R}}{R} \\ \nu'(r,t) & = & 0 & ; & \dot{\nu}(r,t)=0. \end{array}$$

L'espace-temps de Milne est un espace-temps vide de toute matière, de rayonnement, et sans constante cosmologique, définie par la métrique pécédente avec $R(t)=t$, donc

$$ds^2=\frac{t}{(1+\varkappa r^2)^2}\{dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2\}-dt^2 \tag{2.2.2}$$

tel que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{t}{(1+\varkappa r^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{(1+\varkappa r^2)^2} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t}{(1+\varkappa r^2)^2} r^2 \sin\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On suppose que le bispineur de Dirac s'écrit sous la forme

$$\Psi\left(r,\theta,\phi,t\right) = e^{-3\Lambda t\backslash 2} \begin{bmatrix} U_k^1(r,t)\Omega_1(\theta,\phi) \\ U_k^2(r,t)\Omega_2(\theta,\phi) \\ V_k^1(r,t)\Omega_3(\theta,\phi) \\ V_k^2(r,t)\Omega_4(\theta,\phi) \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

En utilisant une nouvelle fonction inconnue ω en accord avec

$$\Psi = \left(1+\varkappa r^2\right) r^{-1} t^{-3/2} \omega \tag{2.2.4}$$

A partir de la tétrade déja exprimé en (2.1.8), la relation (2.1.55) , en tenant compte de cette métrique, on trouve que l'équation de Dirac s'exprime dans l'espace de Milne sous la forme suivante :

$$\left[\tilde{\gamma}^4\bar{\gamma}^1\left(1+\varkappa r^2\right)\partial_r + r^-\left(1+\varkappa r^2\right) i\bar{\gamma}^1\hat{K} + t\left(-\partial_r + \bar{\gamma}^3 m_0\right)\right]\omega = 0 \tag{2.2.5}$$

Les matrices $\bar{\gamma}$ dans ce cas sont définies par

$$\begin{cases} \bar{\gamma}^1 = \tilde{\gamma}^1 \frac{t}{(1+\varkappa r^2)} \\ \bar{\gamma}^2 = \tilde{\gamma}^2 \frac{rt}{(1+\varkappa r^2)} \\ \bar{\gamma}^3 = \tilde{\gamma}^3 \frac{rt\sin\theta}{(1+\varkappa r^2)} \end{cases}$$

où $\hat{K}$ est l'opérateur de moment angulaire défini en (2.1.57).

En tenant compte de l'expression de bispineur et (2.1.26), les fonctions U(t,r) et V(r,t) doivent satisfaire les équations suivantes

$$\hat{F}U(r,t) = \left[t^2\partial_t\partial_t + t\partial_t - im_0 t + m_0^2 t^2 + \hat{A}^2\right] U(r,t) = 0 \tag{2.2.6}$$

$$\hat{G}V(r,t) = \left[t^2\partial_t\partial_t + t\partial_t + im_0 t + m_0^2 t^2 + \hat{B}^2\right] V(r,t) = 0 \tag{2.2.7}$$

où

$$\begin{aligned} U^1(r,t) &= C_1 U^2(r,t) \\ V^1(r,t) &= C_2 V^2(r,t) \end{aligned}$$

avec C_1, C_2 des constantes.

Les opérateur $\hat{A}^2$ et $\hat{B}^2$ qui représentent la partie radiale de cette équation, ont la forme suivante

$$\hat{A}^2 = -\left(1+\varkappa r^2\right)\partial_r\partial_r - 2\varkappa r\left(1+\varkappa r^2\right)\partial_r + \left(1+\varkappa r^2\right)^2 r^{-2}\kappa(\kappa-1) + 2\varkappa\kappa\left(1+\varkappa r^2\right) \tag{2.2.8}$$

$$\hat{B}^2 = -\left(1+\varkappa r^2\right)\partial_r\partial_r - 2\varkappa r\left(1+\varkappa r^2\right)\partial_r + \left(1+\varkappa r^2\right)^2 r^{-2}\kappa(\kappa+1) - 2\varkappa\kappa\left(1+\varkappa r^2\right) \tag{2.2.9}$$

Nous pouvons démontrer que $\hat{A}^2$ et $\hat{B}^2$ sont hermitiens, c'est à dire que leurs valeurs propres a et b sont réelles

$$a^2 = \left(a^2\right)^* \qquad \text{et} \qquad b^2 = \left(b^2\right)^*$$

avec

$$\hat{A}^2 U(r,t) = a^2 U(r,t) \tag{2.2.10}$$

$$\hat{B}^2 V(r,t) = b^2 V(r,t) \tag{2.2.11}$$

Nous pouvons voir aussi

$$\left[\hat{A}^2, \hat{F}\right]_- = \left[\hat{B}^2, \hat{G}\right]_- = 0 \tag{2.2.12}$$

donc

$$U(r,t) = f_u(r)q_u(t), \qquad V(r,t) = f_v(r)q_v(t) \tag{2.2.13}$$

Où, les fonctions $f_u(r)$ et $f_v(r)$ sont les solutions des deux équations suivante, respectivement :

$$\left(\hat{A}^2 - a^2\right) f_u(r) = 0 \tag{2.2.14}$$

$$\left(\hat{B}^2 - b^2\right) f_v(r) = 0 \tag{2.2.15}$$

dans le cas où $\varkappa = 0$, l'espace-temps est plat,donc c'est trés de supposer que $\varkappa \neq 0$, aprés substitution

$$x = -\varkappa r^2 \qquad \bar{a}^2 = a^2/4\varkappa \qquad \bar{b}^2 = b^2/4\varkappa \tag{2.2.16}$$

$$f_u = x^{\kappa/2}(x-1)^{\bar{a}}\bar{f}_u(x) \qquad f_v = x^{\frac{1}{2}(1+\kappa)}(x-1)^{\bar{b}}\bar{f}_v(x) \tag{2.2.17}$$

selon (2.2.14) et (2.2.15) et les fonction de f en (2.2.17), on obtient des équations hypergéométriques de Gauss :

$$\left\{x\left(x-1\right)d_x d_x + \left[\left(2\bar{a}+\kappa+\frac{3}{2}\right)x-)\frac{1}{2}(1+2\kappa)\right]d_x + \bar{a}^2 + \kappa\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{a}\right\}\bar{f}_u = 0 \tag{2.2.18}$$

$$\left\{x\left(x-1\right)d_x d_x + \left[\left(2\bar{b}+\kappa+\frac{5}{2}\right)x-\frac{1}{2}(3+2\kappa)\right]d_x + \bar{b}^2 + \frac{3}{2}\bar{b} + \kappa\bar{b} + \kappa + \frac{1}{2}\right\}\bar{f}_v = 0 \tag{2.2.19}$$

Si nous devons tenir compte de la limitation de la fonction d'onde pour x$\longrightarrow 0$, donc

$$\bar{f}_u = {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \xi; x) \qquad \bar{f}_v = {}_2F_1(\alpha_2+1, \beta_2; \xi+1; x) \tag{2.2.20}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \bar{a} & \alpha_2 &= \bar{b} \\ \beta_1 &= \bar{a} + \kappa + \frac{1}{2} & \beta_2 &= \bar{b} + \kappa + \frac{1}{2} \\ \xi &= \kappa + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

La série hypergéométrique a une région de convergence $|\varkappa r^2| < 1$.

Afin de trouver les solutions pour la région $|\varkappa r^2| < 1$, nous allons tenir compte de la substitution suivante dans les équation (2.2.14) et (2.2.15)

$$y = -(\varkappa r^2)^{-1}$$

$$f_u = y^{\frac{1}{2}(1+\kappa)} \, (y-1)^{\bar{a}} \, \tilde{f}_u(y) \qquad\qquad f_v = y^{\frac{\kappa}{2}} \, (y-1)^{\bar{b}} \, \tilde{f}_v(y) \tag{2.2.22}$$

nous avons

$$\left\{ y\,(y-1)\, d_y d_y + \left[\left(2\bar{a} + \kappa + \frac{5}{2} \right) y - \frac{1}{2}(3+2\kappa) \right] d_y + \bar{a}^2 + \frac{1}{2}\bar{a} + \kappa\bar{a} + \frac{1}{2} \right\} \tilde{f}_u = 0 \tag{2.2.23}$$

$$\left\{ y\,(y-1)\, d_y d_y + \left[\left(2\bar{b} + \kappa + \frac{3}{2} \right) y - \frac{1}{2}(1+2\kappa) \right] d_y + \bar{b}^2 + \frac{1}{2}\bar{b} + \kappa\bar{b} + \right\} \tilde{f}_v = 0 \tag{2.2.24}$$

les fonctions $\tilde{f}_u$ et $\tilde{f}_v$ limitées au point y=0 (r$\rightarrow \infty$), elles s'écrivent sous la forme :

$$\tilde{f}_u = {}_2F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1; \xi + 1; y) \qquad\qquad \tilde{f}_v = {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \xi; y) \tag{2.2.25}$$

selon la dépendance temporelle de la fonction d'onde, aprés transformation :

$$q_u = \tau^{ia} \bar{q}_u(\tau) \qquad\qquad q_v = \tau^{ib} \bar{q}_v(\tau) \tag{2.2.26}$$

au lieu de (2.2.6)et (2.2.7) , nous avons :

$$\{\tau d_\tau d_\tau + (1+2ia)\, d_\tau - \tau - 1\}\, \bar{q}_u = 0 \tag{2.2.27}$$

$$\{\tau d_\tau d_\tau + (1+2ib)\, d_\tau - \tau + 1\}\, \bar{q}_v = 0 \tag{2.2.28}$$

dans cette expression et dans (2.2.6) et (2.2.7) , on a considéré que R(t)=t.

Les deux équations exprimée en (2.2.27)(2.2.28), sont celles bien connues de Whittaker. Leurs solutions peuvent etre écrites en termes de fonctions hypergéométrique dégénérées convergentes pour tous les τ

$$\bar{q}_u = A_1 \, {}_1F_1 \, (1+ia; 1+2ia, 2\tau) \, e^{-\tau} + B_1 \tau^{-2ia} \; {}_1F_1(1-ia; 1-2ia, 2\tau) e^{-\tau} \tag{2.2.29}$$

$$\bar{q}_v = A_2 \, {}_1F_1 \, (ib; 1+2ib, 2\tau) \, e^{-\tau} + B_2 \tau^{-2ib} \; {}_1F_1(-ib; 1-2ib, 2\tau) e^{-\tau} \tag{2.2.30}$$

où A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des constants.

En tenant compte de (2.2.14)(2.2.15) , (2.2.20) (2.2.21) (2.2.25) (2.2.29) (2.2.28) (2.2.29) et (2.2.4) on obtient le bispineur de Dirac dans l'espace-temps de Milne pour $|\varkappa r^2| < 1$,

$$\begin{aligned} {}_a\Psi_\pm &= {}_aN \frac{(1+\varkappa r^2)}{rt^{3/2}} \left(-\varkappa r^2\right)^{\kappa/2} \left(-\varkappa r^2 - 1\right)^{\bar{a}} (im_0 t)^{\pm ia} e^{-im_0 t} \\ &\times \left\{ \begin{array}{c} B_a \bar{f}_u(-\varkappa r^2)_1 F_1 \left(1 \pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_1 \\ B_a \bar{f}_u(-\varkappa r^2)_1 F_1 \left(1 \pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_2 \\ \mp a\sqrt{-\varkappa r^2} \bar{f}_v(-\varkappa r^2)_1 F_1 \left(\pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_3 \\ \mp a\sqrt{-\varkappa r^2} \bar{f}_v(-\varkappa r^2)_1 F_1 \left(\pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_4 \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

pour $|\varkappa r^2| > 1$,

$$\begin{aligned} {}_b\Psi_\pm &= {}_bN \frac{(1+\varkappa r^2)}{rt^{3/2}} \left(\frac{-1}{\varkappa r^2}\right)^{\kappa/2} \left(\frac{1+\varkappa r^2}{-\varkappa r^2}\right)^{\bar{a}} (im_0 t)^{\pm ia} e^{-im_0 t} \\ &\times \left\{ \begin{array}{c} \left(-\varkappa r^2\right)^{-1/2} \tilde{f}_u \left(\left(-\varkappa r^2\right)^{-1}\right)_1 F_1 \left(1 \pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_1 \\ \left(-\varkappa r^2\right)^{-1/2} \tilde{f}_u \left(\left(-\varkappa r^2\right)^{-1}\right)_1 F_1 \left(1 \pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_2 \\ \mp B_b \tilde{f}_v \left(\left(-\varkappa r^2\right)^{-1}\right)_1 F_1 \left(\pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_3 \\ \mp B_b \tilde{f}_v \left(\left(-\varkappa r^2\right)^{-1}\right)_1 F_1 \left(\pm ia; 1 \pm 2ia; 2im_0 t\right) \Omega_4 \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

comme le cas de l'espace de de Sitter, il est admis que a=b. ${}_a$N et ${}_b$N sont les facteurs normaux

$$\begin{aligned} B_a &= -\left(1+2\kappa\right)\sqrt{-\varkappa} \qquad\qquad B_b (2\bar{a})^2 \sqrt{-\varkappa} = -a\left(1+2\kappa\right) \\ \alpha &= \pm\sqrt{a} \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Les séries hypergéométrique ${}_2F_1$ dans 26 sont convergentes dans la région $|\varkappa r^2| < 1$, et les séries hypergéométrique ${}_2F_1$ dans (2.2.32) sont convergentes dans la région $|\varkappa r^2| > 1$. Examinons leur comportement au point $|\varkappa r^2| = 1$

Les séries hypergéométrique ${}_2F_1(\alpha, \beta; \xi; z)$ sont aussi convergentes dans le cas où z=1 si

$$\mathrm{Re}\left(\xi - \alpha - \beta\right) > 0 \tag{2.2.34}$$

selon (2.2.33) cette condition est valable si

$$\mathrm{Re}\left(a\right) < 0 \tag{2.2.35}$$

en tenant compte (2.2.33), on trouve que

$$\alpha = \pm\sqrt{a^2} \tag{2.2.36}$$

ou a^2 sont les valeurs propres de l'opérateur précédement cité en (2.2.6), nous en conséquence :

i) Si $\varkappa = \frac{1}{4}$ la convergence au point $|\varkappa r^2| = 1$ est valable lorsque

$$a^2 > 1 \tag{2.2.37}$$

il faut prendre

$$\alpha = -|a| \tag{2.2.38}$$

ii) Quant $\varkappa = -\frac{1}{4}$ la convergence de la série hypergéométrique a lieu pour les valeurs propres négatives des opérateurs (2.2.6) (2.2.7), c'est à dire

$$a^2 < 1 \tag{2.2.39}$$

il faut prendre

$$\alpha = -\left|\sqrt{-a^2}\right| \tag{2.2.40}$$

si les valeurs propres a^2 pour $\varkappa = \frac{1}{4}, \varkappa = -\frac{1}{4}$ ne satisfront pas les conditions (2.2.37) et (2.2.39)34. En conséquence, nous pouvons pas tirer aucune conclusion sur la convergence des solutions (2.2.32) et (2.2.33) au point $|\varkappa r^2| = 1$

Lorsque les conditions (2.2.37) et (2.2.39)34 sont valables et en tenant compte de

$$_a\Psi\Big|_{|\varkappa r^2|=1} =_b \Psi\Big|_{|\varkappa r^2|=1} \tag{2.2.41}$$

nous avons

$$\begin{aligned} {}_aN &= {}_bN\left(1+2\varkappa\right)\left\{-{}_2F_1^*\left(\alpha,\beta;\xi;\mp 1\right)_2 F_1\left(\alpha+1,\beta;\xi+1;\mp 1\right)\right. \\ &\quad \left.\mp{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\xi;\mp 1\right)_2 F_1^*\left(\alpha+1,\beta;\xi+1;\mp 1\right)\right\} \\ &\quad \times\left\{\frac{\left(1+2\kappa\right)^2}{2}\left|{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\xi;\mp 1\right)\right|^2 + 2a^2\left|{}_2F_1\left(\alpha+1,\beta;\xi;\mp 1\right)\right|^2\right\} \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

Où le signe supérieur est appliqué dans le cas $\varkappa = \frac{1}{4}$, $a^2 > 0$ et le signe inférieur est appliqué dans le cas $\varkappa = -\frac{1}{4}$, $a^2 < 0$.

CHAPITRE 3

L'équation de Dirac dans l'espace-temps de de Sitter

3.1 L'espace de de Sitter

En 1917, l'astronome Willem de Sitter a reconnu qu'il pouvait obtenir le modéle cosmologique "univers de de Sitter " statique dans lequel la seule contribution à la densité d'énergie provient de la constante cosmologique Λ positive. Correspondant à un univers homogène, isotrope et vide de matiére et de rayonnement, nous permet d'étudier un futur probable ou une phase inflationnaire de l'univers. Ce modèle diffère de celui d'Einstein simplement en enlevant tout les termes qui décrivent la matiére $T_{\mu\nu} = 0$ [12].

L'univers de de Sitter est la solution exacte des équations d'Einstien de la relativité générale quand la constante cosmologique Λ est positive, tel que

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

où $G_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

Les $R_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur de Ricci et R est la courbure scalaire. Dans le cas de l'espace de de Sitter, on a

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 4\Lambda = \frac{12}{\rho^2}$$

où ρ est le rayon de l'espace de de Sitter

$$\rho = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$$

Λ représente la constante cosmologique, qui est un paramétre qu'Einstein a ajouté à sa propre équation en 1917, décrivant comment la matière et l'énergie se comportent dans un espace-temps. Le probléme étant qu'Einstein partit du principe que l'univers était statique, autrement dit, ni en expension ni en contraction, or il a été démontré plus tard que l'univers décrit par ces équations était trop instable pour exister. Einstein a reconnu son erreur, et l'a qualifiée comme étant sa plus grande erreur scientifique. Néanmoins, elle est devenu une parfaite condidate dans les équations décrivant un univers en expension accélérée.

L'espace de de Sitter est un espace-temps courbe qui a été le plus étudié par les théoriciens des champs quantiques, car ce dernier est le seul espace-temps à courbure positive de constante R avec une symétrie maximale et une dimension d. Il possède un groupe d'isométries à $d(d+1)/2$ paramètres. De plus, il est représenté par une hyperbole 4-dimentionelle plongée dans un espace de Minkowski 5-dimentionelle muni de sa métrique lorentzienne $\eta_{AB} = [1, -1, -1, -1, -1]$, $A, B = 0, ..., 4$ [5].

3.2 L'équation de Dirac dans l'espace de de Sitter

En 1935, Dirac a montré qu'il était possible de construire une équation d'onde pour des particules de spin demi-entier dans des espaces courbes particuliers comme l'espace de de Sitter à symétrie maximale avec une constante cosmologique positive.

La métrique de de Sitter s'écrit sous la forme suivante

$$ds^2 = e^{2\Lambda t}\{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\} - dt^2,$$

Dans ce cas

$$\lambda(r,t) = 2\Lambda t\ ,\ \nu(r,t) = 0 \tag{3.2.1}$$

Les dérivées partielles de $\lambda(r,t)$ et $\nu(r,t)$ par rapport à r et t sont données par

$$\begin{aligned} \lambda'(r,t) &= 0 \text{ et } \dot{\lambda}(r,t) = 2\Lambda \\ \nu'(r,t) &= 0 \text{ et } \dot{\nu}(r,t) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant l'approche de Shishkin, nous pouvons exprimer facilement l'équation de Dirac dans l'espace de de sitter. Il suffit d'injecter (3.2.1) dans (2.1.56) et on obtient

$$\begin{aligned} \left\{e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i}(\partial_r + \frac{1}{r}) + e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^1}{r}\hat{K} - \frac{1}{i}(\partial_t + \frac{3\lambda}{2}) - im_0\bar{\gamma}^4\right\}\Psi(x) &= 0 \\ \left\{e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i}(\partial_r + \frac{1}{r}) + e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^1}{r}\hat{K} + i(\partial_t + \frac{3\lambda}{2}) - im_0\bar{\gamma}^4\right\}\Psi(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

3.3 La solution de l'équation de Dirac dans l'espace de de sitter

Considérons l'ansatz suivant pour la solution de l'équation de Dirac Ψ dans l'univers de de Sitter

$$\Psi\left(r,\theta,\phi,t\right)=e^{-3\Lambda t\backslash 2}\begin{bmatrix} U(r,t)\Omega_{jlm}(\theta,\phi) \\ V(r,t)\Omega_{jl'm}(\theta,\phi) \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

1)La solution angulaire $\Omega_{jlm}(\theta,\phi)$ et $\Omega_{jl'm}(\theta,\phi)$

Les $\Omega_{jlm}(\theta,\phi)$ et $\Omega_{jl'm}(\theta,\phi)$ sont les spineurs harmoniques sphériques qui représentent la solution de la partie angulaire donnée par l'oprérateur moment angulaire $\hat{K}$. On les définis pour deux valeurs de moment cinétique totale $J=l\pm\frac{1}{2}$ [13] par l'expression suivante

$$\Omega_{l+\frac{1}{2},l,m}\left(\theta,\phi\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

$$\Omega_{l-\frac{1}{2},l,m}\left(\theta,\phi\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

où l est le moment orbital et m est le moment magnétique, les $Y_l^m(\theta,\phi)$ sont les fonctions décrivant une particule de moment orbital l, appelées " les harmoniques sphériques" [11]

$$Y_l^m(\theta,\phi)=(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\,i^l\sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-|m|)!}{4\pi\,(l+|m|)!}}P_l^{|m|}\left(\cos\theta\right)e^{im\phi}.$$

Nous pouvons définir un nouveau opérateur moment angulaire par

$$K^2=J^2+\frac{\hbar^2}{4} \tag{3.3.4}$$

où J est l'opérateur de moment cinétique total et $\hbar$ est la constante de Planck.

Si on applique cet opérateur au spineur Ψ , on obtient

$$\begin{aligned} K^2\Psi &= \left(J^2+\frac{\hbar^2}{4}\right)\Psi \\ K^2\Psi &= \left(j(j+1)\hbar^2+\frac{\hbar^2}{4}\right)\Psi \\ K^2\Psi &= \hbar^2\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\Psi \end{aligned}$$

$$\hat{K}\Psi=\pm\hbar\left(j+\frac{1}{2}\right)\Psi=-\hbar\kappa\Psi \tag{3.3.5}$$

où j est la valeur propre de l'opérateur J et κ est la valeur propre de $\hat{K}$, autrement dit un nouveau nombre quantique relié à l par

$$\kappa = \mp\hbar\left(j+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -(l+1) & \text{pour } j = l+\frac{1}{2} \\ l & \text{pour } j = l+\frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Par définition, l'opérateur du moment cinétique total J s'exprime comme suit

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}, \tag{3.3.7}$$

ainsi, l'opérateur du moment cinétique de spin est définie par

$$\hat{S} = \frac{\hbar\vec{\sigma}}{2} \tag{3.3.8}$$

En remplaçant (3.3.7) dans (3.3.6) et en tenant compte de (3.3.8), on obtient

$$\begin{aligned} K^2 &= \left(\hat{L} + \frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{4} \\ K^2 &= \hat{L}^2 + \hbar\hat{L}\cdot\vec{\sigma} + \frac{3\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned}$$

puisque les composantes de l'opérateur $\hat{L}$ ne commutent pas, donc

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}\cdot\hat{L})^2 &= (\vec{\sigma}\cdot\hat{L})(\vec{\sigma}\cdot\hat{L}) \\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{L})^2 &= \hat{L}^2 + i\vec{\sigma}\underbrace{(\hat{L}\times\hat{L})}_{i\hbar\hat{L}} \\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{L})^2 &= \hat{L}^2 - \hbar\vec{\sigma}\hat{L}, \end{aligned}$$

dans ce cas, l'expression de K^2 devient

$$\begin{aligned} K^2 &= (\vec{\sigma}\cdot\hat{L})^2 + 2\hbar\hat{L}\cdot\vec{\sigma} + \hbar^2 \\ K^2 &= \left(\hat{L}\cdot\vec{\sigma} + \hbar\right)^2 \end{aligned}$$

$$\hat{K} = \hat{L}\cdot\vec{\sigma} + \hbar \tag{3.3.9}$$

En utilisant, cette relation pour un système à symétrie sphérique, on obtient

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{L}\right)\Psi = \left(\hat{K} - \hbar\right)\Psi,$$

en injectant (3.3.5) dans l'expression, on trouve

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\hat{L}\right)\Psi = -\hbar\left(\kappa+1\right)\Psi$$

où le nombre quantique de spin-orbite prend des valeurs entières $\kappa = \pm\left(j + \frac{1}{2}\right) = \pm 1, \pm 2, ...$

Alors l'action de $\hat{K}$ sur les spineurs sphériques est donnée par [15]

$$\begin{aligned}\hat{K}\Omega_{jlm}(\theta,\phi) &= -\hbar\kappa\Omega_{jlm}(\theta,\phi) \qquad (3.3.10)\\ \hat{K}\Omega_{jl'm}(\theta,\phi) &= \hbar\kappa\Omega_{jl'm}(\theta,\phi) \qquad (3.3.11)\end{aligned}$$

En tenant compte de la dépendance angulaire, il ne reste qu'à déterminer la partie radiale de la solution.

2) La solution radiale-temporelle

En remplaçant (3.3.1) dans (3.2.2) on obtient l'équation

$$\left\{e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i}(\partial_r + \frac{1}{r}) + e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^1}{r}\hat{K} + i(\partial_t + \frac{3\Lambda}{2}) - im_0\bar{\gamma}^4\right\} e^{-3\Lambda t\backslash 2}\begin{bmatrix} U(r,t)\Omega_l(\theta,\phi) \\ V(r,t)\Omega_{l'}(\theta,\phi)\end{bmatrix} = 0$$

$$\left\{e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i}(\partial_r + \frac{1}{r}) + e^{-\Lambda t}\frac{\bar{\gamma}^1}{r}\hat{K} + i\partial_t - im_0\bar{\gamma}^4\right\}\begin{bmatrix} U(r,t)\Omega_l(\theta,\phi) \\ V(r,t)\Omega_{l'}(\theta,\phi)\end{bmatrix} \qquad (3.3.12)$$

en multipliant (3.3.12) par $e^{\Lambda t}$,on obtient

$$\left\{\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i}(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\bar{\gamma}^1}{r}\hat{K} + ie^{\Lambda t}\partial_t - im_0e^{\Lambda t}\bar{\gamma}^4\right\}\begin{bmatrix} U(r,t)\Omega_l(\theta,\phi) \\ V(r,t)\Omega_{l'}(\theta,\phi)\end{bmatrix} = 0 \qquad (3.3.13)$$

Choisissons la représentation suivante des matrices de Dirac

$$\bar{\gamma}^i = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}^i \\ \bar{\sigma}^i & 0\end{bmatrix}, \ i = 1,2,3, \text{ et } \bar{\gamma}^4 = i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

où les $\bar{\sigma}^i$ sont les matrices de Pauli. Il s'en suit que

$$\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}^1 \\ -\bar{\sigma}^1 & 0\end{bmatrix} \qquad (3.3.14)$$

En remplaçant les termes $\frac{\bar{\gamma}^4\bar{\gamma}^1}{i}, \bar{\gamma}^4$ et $\bar{\gamma}^1$ par leur expressions matricielles, on obtient

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}^1 \\ -\bar{\sigma}^1 & 0\end{bmatrix}(\partial_r + \frac{1}{r}) + \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}^1 \\ \bar{\sigma}^1 & 0\end{bmatrix}\frac{\hat{K}}{r} + ie^{\Lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\partial_t + m_0e^{\Lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} U(r,t)\Omega_l(\theta,\phi) \\ V(r,t)\Omega_{l'}(\theta,\phi)\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0) & \bar{\sigma}^1[(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\hat{K}}{r}] \\ \bar{\sigma}^1[-(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\hat{K}}{r}] & e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(r,t)\Omega_l(\theta,\phi) \\ V(r,t)\Omega_{l'}(\theta,\phi)\end{bmatrix} =$$

On aboutit au système suivant

$$\begin{cases} e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)U\Omega_l + \bar{\sigma}^1[(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\hat{K}}{r}]V\Omega_{l'} = 0 \\ \bar{\sigma}^1[-(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\hat{K}}{r}]U\Omega_l + e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)V\Omega_{l'} = 0\end{cases}$$

Selon les deux relations précédement citées, deux autre équations en fonction de U et V naissent

a) Equation qui défine la solution radiale temporelle U(r,t)

En utiliant la deuxième relation du système précédent, on a

$$e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)V\Omega_{l'} = \bar{\sigma}^1[(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\hat{K}}{r}]U\Omega_l \tag{3.3.15}$$

pour obtenir le résultat souhaité, il faut multiplier l'équation (15) par le terme $e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)$, ce qui donne

$$e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)\left\{\bar{\sigma}^1[(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\hat{K}}{r}]V\Omega_{l'} + e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)U\Omega_l\right\} = 0,$$

en injectant (3.3.15) dans cette expression, et en appliquant l'opérateur $\hat{K}$ sur sa fonction d'onde selon la relation (3.3.10) et (3.3.11), on obtient

$$\underbrace{[(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\kappa}{r}][(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\kappa}{r}]U\Omega_l}_{A_u} + \underbrace{\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)\right]\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)U\Omega_l\right]}_{B_u} = 0 \tag{3.3.16}$$

Maintenant, nous allons calculer les deux termes A_u et B_u afin d'obtenir l'équation qui définie la solution radiale et temporelle U(r,t)

$$A_u = [(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\kappa}{r}][(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\kappa}{r}]U\Omega_l \tag{3.3.17}$$

$$A_u = \left\{(\partial_r + \frac{1}{r})(\partial_r + \frac{1}{r}) - (\partial_r + \frac{1}{r})\frac{\kappa}{r} + \frac{\kappa}{r}(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\kappa^2}{r^2}\right\}U\Omega_l$$

$$A_u = \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - (-\frac{\kappa}{r^2} + \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa}{r^2}) + \frac{\kappa}{r}\partial_r + \frac{\kappa}{r^2} - \frac{\kappa^2}{r^2}\right\}U\Omega_l$$

$$A_u = \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa(1-\kappa)}{r^2}\right\}U\Omega_l \tag{3.3.18}$$

$$\begin{aligned}
B_u &= \left[e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)\right]\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)U\Omega_l\right] \\
B_u &= \left\{e^{\Lambda t} i\partial_t\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)\right] - m_0 e^{\Lambda t}\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)\right]\right\}U\Omega_l \\
B_u &= \left\{e^{\Lambda t} i\partial_t(e^{\Lambda t})(i\partial_t + m_0) + ie^{2\Lambda t}\partial_t(i\partial_t + m_0) - m_0 ie^{2\Lambda t}\partial_t - m_0^2 e^{2\Lambda t}\right\}U\Omega_l \\
B_u &= \left\{i\Lambda e^{2\Lambda t}(i\partial_t + m_0) - e^{2\Lambda t}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + m_0 ie^{2\Lambda t}\frac{\partial}{\partial t} + e^{2\Lambda t} i\frac{\partial}{\partial t}m_0 - m_0 ie^{2\Lambda t}\frac{\partial}{\partial t} - m_0^2 e^{2\Lambda t}\right\}U\Omega_l \\
B_u &= \left\{-e^{2\Lambda t}\Lambda\frac{\partial}{\partial t} + e^{2\Lambda t} i\Lambda m_0 - e^{2\Lambda t}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_0^2 e^{2\Lambda t}\right\}U\Omega_l \\
B_u &= \left\{-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Lambda\frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda m_0 - m_0^2\right\}e^{2\Lambda t}U\Omega_l
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

en remplaçant (3.3.22) et (3.3.23) dans (3.3.19) on obtient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa(1-\kappa)}{r^2}\right]U\Omega_l + \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Lambda\frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda m_0 - m_0^2\right]e^{2\Lambda t}U\Omega_l = 0.$$

Le fait que le spineur sphérique Ω_l soit complétement indépendant de la variable radiale r, l'expression précédente devient

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa(1-\kappa)}{r^2}\right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Lambda\frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda m_0 - m_0^2\right)e^{2\Lambda t}\right]U(r,t) = 0,$$

on multiplie par $-e^{-2\lambda t}$, pour retrouver

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Lambda\frac{\partial}{\partial t} - i\Lambda m_0 + m_0^2\right) + e^{-2\Lambda t}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right)\right]U(r,t) = 0.$$

Dans ce qui suit nous allons séparer la partie radiale de la partie temporelle de la solution $U(r,t)$

$$U(r,t) = \tilde{U}(r)\check{U}(t)$$

$$\hat{A}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}$$

c'est l'opérateur qui représente la partie radiale de cette équation, si on l'applique à la fonction $\tilde{U}(r)$, on obtient

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right]\tilde{U}(r) = a^2\tilde{U}(r) \tag{3.3.20}$$

où a est la valeur propre de l'opérateur radial $\hat{A}$

En effet, la solution radiale $\tilde{U}(r)$ est définiée par une équation différentielle homogéne, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2\tilde{U}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\tilde{U}(r)}{\partial r} + \left(a^2 - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right)\tilde{U}(r) = 0 \tag{3.3.21}$$

en tenant compte de (3.3.20), on constate que l'opérateur qui définit la partie temporelle est

$$\hat{F}^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Lambda\frac{\partial}{\partial t} - i\Lambda m_0 + m_0^2 + e^{-2\Lambda t}\hat{A}^2$$

tel que

$$\left[\hat{A}^2, \hat{F}^2\right] = 0$$

Par conséquence, la solution temporelle $\check{U}(t)$ est définie par une équation différentielle homogène s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{\partial^2\check{U}(t)}{\partial t^2} + \Lambda\frac{\partial\check{U}(t)}{\partial t} + \left(m_0^2 - i\Lambda m_0 + a^2e^{-2\Lambda t}\right)\check{U}(t) = 0 \tag{3.3.22}$$

b) L'équation qui définit la solution radiale V(r,t)

De la même manière, on remarque que

$$e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)U\Omega_l = \bar{\sigma}^1[-(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\hat{K}}{r}]V\Omega_{l'}0 \tag{3.3.23}$$

Ainsi,

$$e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)\left\{\bar{\sigma}^1[-(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\hat{K}}{r}]U\Omega_l + e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)V\Omega_{l'}\right\} = 0.$$

On remplace (3.3.27) dans la relation précédante, et en tenant compte de (3.3.10) et (3.3.11) , on obtient

$$\underbrace{[-(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\kappa}{r}][-(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\kappa}{r}]V\Omega_{l'}}_{A_v} + \underbrace{\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)\right]\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)V\Omega_{l'}\right]}_{B_v} = 0 \tag{3.3.24}$$

Maintenant, nous allons calculer les deux termes A_v et B_v afin d'obtenir l'équation qui définie la solution V(r,t)

$$\begin{aligned}
A_v &= [-(\partial_r + \frac{1}{r}) + \frac{\kappa}{r}][-(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\kappa}{r}]V\Omega_{l'} \\
&= \left\{(\partial_r + \frac{1}{r})(\partial_r + \frac{1}{r}) + (\partial_r + \frac{1}{r})\frac{\kappa}{r} - \frac{\kappa}{r}(\partial_r + \frac{1}{r}) - \frac{\kappa^2}{r^2}\right\}V\Omega_{l'} \\
&= \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + (-\frac{\kappa}{r^2} + \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\kappa}{r^2}) - \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\kappa}{r^2} - \frac{\kappa^2}{r^2}\right\}V\Omega_{l'} \\
&= \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\kappa}{r^2} - \frac{\kappa^2}{r^2}\right\}V\Omega_{l'} \\
&= \left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}\right\}V\Omega_{l'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_v &= e^{\Lambda t}(i\partial_t + m_0)\left[e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)\right] V\Omega_{l'} \\
&= \left\{e^{\Lambda t} i\partial_t \left[e^{\Lambda t}(i\partial_t - m_0)\right] + e^{2\Lambda t} m_0(i\partial_t - m_0)\right\} V\Omega_{l'} \\
&= \left\{e^{2\Lambda t} i\Lambda(i\partial_t - m_0) + e^{2\Lambda t} i\partial_t(i\partial_t - m_0) + e^{2\Lambda t} m_0(i\partial_t - m_0)\right\} V\Omega_{l'} \\
&= \left\{-\Lambda\frac{\partial}{\partial t} - i\Lambda m_0 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - i\frac{\partial}{\partial t} m_0 - m_0 i\frac{\partial}{\partial t} + m_0 i\frac{\partial}{\partial t} - m_0^2\right\} e^{2\Lambda t} V\Omega_{l'} \\
&= \left\{-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Lambda\frac{\partial}{\partial t} - i\Lambda m_0 - m_0^2\right\} e^{2\Lambda t} V\Omega_{l'},
\end{aligned}$$

en injectant A_v et B_v dans (3.3.24) , on obtient

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k(k+1)}{r^2}\right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Lambda\frac{\partial}{\partial t} - i\Lambda m_0 - m_0^2\right) e^{2\Lambda t}\right] V\Omega_{l'} = 0,$$

le fait que le spineur sphérique Ω_l est complétement indépendant de la variable radiale r,t, l'expression précédente devient

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k(k+1)}{r^2}\right) + e^{2\Lambda t}\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Lambda\frac{\partial}{\partial t} - i\Lambda m_0 - m_0^2\right)\right] V = 0,$$

on multiplie par $-e^{-2\Lambda t}$, on trouve

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Lambda\frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda m_0 + m_0^2\right) + e^{-2\Lambda t}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k(k+1)}{r^2}\right)\right] V = 0$$

Dans ce cas nous allons séparer la partie radiale et la partie temporelle de la solution V(r,t)

$$V(r,t) = \tilde{V}(r)\check{V}(t)$$

$$\hat{B}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k(k+1)}{r^2}$$

c'est l'opérateur qui représente la partie radiale de cette équation si on l'applique à la fonction radiale V(r,t), on obtient

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k(k+1)}{r^2}\right]\tilde{V}(r) = b^2\tilde{V}(r) \tag{3.3.25}$$

b : la valeur propre de l'opérateur radial $\hat{B}^2$

Ainsi, la solution radiale v(r) est définie par une équation différentielle homogène, qui s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{\partial^2\tilde{V}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\tilde{V}(r)}{\partial r} + \left(b^2 - \frac{k(k+1)}{r^2}\right)\tilde{V}(r) = 0 \tag{3.3.26}$$

En tenant compte de (3.3.26), on constate que l'opérateur qui défini la partie temporelle est donné par

$$\hat{G}^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Lambda \frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda m_0 + m_0^2 + e^{-2\Lambda t}\hat{B}^2$$

tel que

$$\left[\hat{B}^2, \hat{G}^2\right] = 0$$

par conséquence, la solution temporelle $\check{V}(t)$ est définie aussi par une équation différentielle homogène, qui s'écrit comme suit

$$\frac{\partial^2 \check{V}(t)}{\partial t^2} + \Lambda \frac{\partial \check{V}(t)}{\partial t} + \left(m_0^2 + i\Lambda m_0 + e^{-2\Lambda t} b^2\right) \check{V}(t) = 0 \tag{3.3.27}$$

c) La résolution des deux équations temporelle $\check{U}(t)$ et $\check{V}(t)$

Dans le but de résoudre les deux équation radiale de $\check{U}(t)$ et de $\check{V}(t)$ précédement citée en (3.3.22) et (3.3.27) respectivement, nous allons faire un changement de variable pour avoir des équations similaires à l'équation de Bessel généralisée qui s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + \frac{(1-2\alpha)}{z}\frac{\partial Y}{\partial z} + \left[\frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{z^2} + \left(\beta\gamma z^{\gamma-1}\right)^2\right] Y = 0 \tag{3.3.28}$$

La solution de cette équation est connue, c'est la fonction de Bessel définie par

$$Y = z^\alpha J_\nu(\beta z^\gamma) \tag{3.3.29}$$

Le changement de variable est le suivant

$$t = -\ln \tau \qquad \Rightarrow \qquad \tau = e^{-t} \tag{3.3.30}$$

par définition, la différntielle de t est donnée par

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \qquad \Rightarrow \qquad d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} dt \tag{3.3.31}$$

$$dt = -\frac{d\tau}{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad d\tau = -\tau dt \tag{3.3.32}$$

Cela, nous permet à réecrire$\frac{dU}{dt}$ en fonction de τ sous la forme

$$\frac{d\check{U}(\tau)}{dt} = -\tau \frac{d\check{U}(\tau)}{d\tau}.$$

Ainsi, la deuxième dérivée de U

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\check{U}(\tau)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left[-\tau\frac{d\check{U}(\tau)}{d\tau}\right] \\
\frac{d^2\check{U}(\tau)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left[-\tau\right]\frac{d\check{U}(\tau)}{d\tau} - \tau\frac{d}{dt}\left[\frac{d\check{U}(\tau)}{d\tau}\right] \\
\frac{d^2\check{U}(\tau)}{dt^2} &= \tau\frac{d\check{U}(\tau)}{d\tau} + \tau^2\frac{d^2\check{U}(\tau)}{d\tau^2}.
\end{aligned}$$

Nous allons aussi avoir besoin du terme $e^{-2\Lambda t}$

$$e^{-2\Lambda t} = e^{2\Lambda \ln\tau} = [e^{\ln\tau}]^{2\Lambda} = \tau^{2\Lambda},$$

par conséquence, les équations (3.3.22) et (3.3.27) deviennent

$$\begin{aligned}
\tau^2\frac{\partial^2\check{U}(\tau)}{\partial\tau^2} + \tau(1-\Lambda)\frac{\partial\check{U}(\tau)}{\partial\tau} + (m_0^2 - i\Lambda m_0 + a^2\tau^{2\Lambda})\check{U}(\tau) &= 0 \\
\tau^2\frac{\partial^2\check{V}(\tau)}{\partial\tau^2} + \tau(1-\Lambda)\frac{\partial\check{V}(\tau)}{\partial\tau} + (m_0^2 + i\Lambda m_0 + b^2\tau^{2\Lambda})\check{V}(\tau) &= 0
\end{aligned}$$

on divise par τ^2

$$\frac{\partial^2\check{U}(\tau)}{\partial\tau^2} + \frac{(1-\Lambda)}{\tau}\frac{\partial\check{U}(\tau)}{\partial\tau} + (\frac{m_0^2 - i\Lambda m_0}{\tau^2} + a^2\tau^{2\Lambda-2})\check{U}(\tau) = 0 \qquad (3.3.33)$$

$$\frac{\partial^2\check{V}(\tau)}{\partial\tau^2} + \frac{(1-\Lambda)}{\tau}\frac{\partial\check{V}(\tau)}{\partial\tau} + (\frac{m_0^2 + i\Lambda m_0}{\tau^2} + b^2\tau^{2\Lambda-2})\check{V}(\tau) = 0. \qquad (3.3.34)$$

On remarque que les deux équations (3.3.33) et (3.3.34) précédentes sont des équations de type Bessel, leurs solutions est donnée par la fonction de Bessel, par identification avec (3.3.28) on retrouve les valeurs de α, γ, β et ν

$$1 - 2\alpha = 1 - \Lambda \qquad (3.3.35)$$

$$2\gamma - 2 = 2\Lambda - 2 \qquad (3.3.36)$$

$$(\beta\gamma)^2 = a^2 \qquad (3.3.37)$$

$$\alpha^2 - \nu^2\gamma^2 = m_0^2 - i\Lambda m_0 \qquad (3.3.38)$$

$$Y = U \qquad (3.3.39)$$

$$z = \tau \qquad (3.3.40)$$

à partir de (3.3.35) et (3.3.36), on tire l'expression de α et γ

$$\alpha = \frac{\Lambda}{2} \qquad (3.3.41)$$

$$\gamma = \Lambda, \tag{3.3.42}$$

en injectant (3.3.42) dans (3.3.37), on obtient

$$\beta = \frac{a}{\Lambda}, \tag{3.3.43}$$

et en remplaçant (3.3.42) et (3.3.41) dans (3.3.38), on trouve l'expression de ν

$$\nu = \pm\left(\frac{1}{2} + i\frac{m}{2}\right) \tag{3.3.44}$$

Par le remplacement direct de (3.3.39),(3.3.40),(3.3.41),(3.3.42),(3.3.43) et (3.3.44) dans (3.3.29), on obtient

$$\check{U}(t) = \tau^{\frac{\Lambda}{2}} J_{\pm\left(\frac{1}{2}+i\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{a}{\Lambda}\tau^{\Lambda}\right).$$

Selon le changement de variable effectué en (3.3.30), on trouve deux solutions

$$\check{U}(t) = e^{-\frac{\Lambda t}{2}} J_{+\left(\frac{1}{2}+i\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{a}{\Lambda}e^{-t\Lambda}\right) \tag{3.3.45}$$

$$\check{U}(t) = e^{-\frac{\Lambda t}{2}} J_{-\left(\frac{1}{2}+i\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{a}{\Lambda}e^{-t\Lambda}\right), \tag{3.3.46}$$

De la même maniére on obtient la solution $\check{V}(t)$ définie par de l'équation (3.3.34)

$$\check{V}(t) = C_1 e^{-\frac{\Lambda t}{2}} J_{+\left(\frac{1}{2}-i\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{b}{\Lambda}e^{-t\Lambda}\right) \tag{3.3.47}$$

$$\check{V}(t) = C_2 e^{-\frac{\Lambda t}{2}} J_{-\left(\frac{1}{2}-i\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{b}{\Lambda}e^{-t\Lambda}\right) \tag{3.3.48}$$

d) La résolution des deux équation radiale $\tilde{U}(r)$ et $\tilde{V}(r)$

Les deux équations radiales (3.3.21) et (3.3.26) sont des équations de type Bessel précédement cité en (3.3.28) Affin de déterminer leurs solutions, il suffit de faire une identification pour trouver les valeurs de α, β, γ et ν

$$1 - 2\alpha = 2 \tag{3.3.49}$$

$$2\gamma - 2 = 0 \tag{3.3.50}$$

$$(\beta\gamma)^2 = a^2 \tag{3.3.51}$$

$$\alpha^2 - \nu^2\gamma^2 = -k(k-1) \tag{3.3.52}$$

$$z = r\ ,$$

selon (3.3.49) et (3.3.50), on trouve la valeur de α et γ

$$\alpha = -\frac{1}{2} \tag{3.3.53}$$

$$\gamma = 1 \tag{3.3.54}$$

on remplace $\gamma = 1$ dans (3.3.51), pour aboutir à

$$\beta = a, \tag{3.3.55}$$

Pour obtenir la valeur de ν, on injecte α et γ dans (3.3.52)

$$\nu = \pm \left| k - \frac{1}{2} \right| \tag{3.3.56}$$

en injectant les relations (3.3.53), (3.3.54), (3.3.55), et (3.3.56) dans (3.3.29), on détermine la solution radiale $\tilde{U}(r)$

$$\tilde{U}(r) = (ar)^{-\frac{1}{2}} J_{+\left|k-\frac{1}{2}\right|}(ar) \tag{3.3.57}$$

$$\tilde{U}(r) = (ar)^{-\frac{1}{2}} J_{-\left|k-\frac{1}{2}\right|}(ar) \tag{3.3.58}$$

De la même manière on obtient la solution radiale $\tilde{V}(r)$:

$$\tilde{V}(r) = (ar)^{-\frac{1}{2}} J_{+\left|k-\frac{1}{2}\right|}(ar) \tag{3.3.59}$$

$$\tilde{V}(r) = (ar)^{-\frac{1}{2}} J_{-\left|k-\frac{1}{2}\right|}(ar). \tag{3.3.60}$$

En tenant compte des spineurs sphériques (3.3.2) (3.3.3), et des solutions (3.3.45), (3.3.46), (3.3.47), (3.3.48), (3.3.57), (3.3.58), (3.3.59), et (3.3.60), on obtient la solution de l'équation de Dirac dans l'espace de de Sitter sous la forme

$$\Psi_{\pm} = \frac{N_{\pm}}{\sqrt{ar}} \left\{ \begin{array}{c} J_{\pm\nu_1}(\frac{a}{\Lambda}e^{-t\Lambda}) J_{\left|k-\frac{1}{2}\right|}(ar)\sqrt{\kappa+m}Y_{\kappa-1,m}(\theta,\phi) \\ J_{\pm\nu_1}(\frac{a}{\Lambda}e^{-t\Lambda}) J_{\left|k-\frac{1}{2}\right|}(ar)\sqrt{\kappa-m-1}Y_{\kappa-1,m+1}(\theta,\phi) \\ \pm i J_{\mp\nu_2}(\frac{a}{\Lambda}e^{-t\Lambda}) J_{\left|k+\frac{1}{2}\right|}(ar)\sqrt{\kappa-m}Y_{\kappa,m}(\theta,\phi) \\ \mp i J_{\mp\nu_2}(\frac{a}{\Lambda}e^{-t\Lambda}) J_{\left|k+\frac{1}{2}\right|}(ar)\sqrt{\kappa+m+1}Y_{\kappa,m+1}(\theta,\phi) \end{array} \right\} e^{-2\Lambda t}$$

où $N_{\pm}$ est une constante de normalisation.

Cette solution peut être traitée comme une onde sphérique pour le sipn $\frac{1}{2}$ avec une modulation d'amplitude temporelle. A limite $\lambda \to 0$, nous pouvons démontrer, en utilisant le comportement des fonctions de Bessel à l'origine et à l'infini, que cette soplution se réduit à la solution de l'équation de Dirac libre, en coordonnées sphériques, dans l'espace de Minkowski.

Conclusion générale

La théorie de relativité générale a introduit la notion de courbure de l'espace-temps, ce qui a changé notre compréhension de la gravitation. Le succès de cette théorie est basé sur son pouvoir d'expliquer plusieurs phénomènes physiques, ceux ont été toujours mystérieux pour les physiciens. Notre intentions en choisissant ce sujet est de trouver des réponses scientifique fiables à de multiples problèmes. A titre d'exemple nous citons la construction d'une version de l'équation de Dirac dans un espace-temps courbe, en choisissant comme espace de test l'espace-temps de Sitter.

Dans le premier chapitre, nous avons construit l'équation de Dirac qui définie les particules fondamentales de la matière sous la forme la plus générale dans le cas de relativité générale. Pour le faire, nous nous sommes appuyés sur le formalisme des tétrades. Celui-ci fait le passage entre la base naturelle, muni d'une métrique rimanienne et une base locale muni d'une métrique Minkiwskienne. Aprés nous avons définie la dérivée covariante spinorelle qui contient la partie déterminante de l'interaction entre le champ de gravitation et le spin de la particules. Par la suite nous avons étudié l'équation de Dirac par l'approche de Schishkin en s'intérissant uniquement à un univers homogéne et isotrope décrit par la métrique de Friedman-Lamaitre-Roberson-Walker.

Dans le deuxiéme chapitre nous avons donnée d'abord un aperçu sur l'espace de de Sitter, comme étant un espace d'une symétrie maximale. Puis nous avons étudié le comportement de la particule de Dirac qui est donné par l'équation de Dirac dans cet espace, nous avons calculé les solutions exactes de cette équation. Nous pouvons dire que l'équation de Dirac s'accorde parfaitement avec les concepts de la relativité générale.

Annexe A

Annexe A

A.1 Les fonctions de Bessel

On appelle équation de Bessel, l'équation differentielle linéaire d'ordre deux à coefficients non constants [14], donnée par l'expression suivante

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0 \tag{1.1.1}$$

où α est un paramétre réel donné.

La méthode de Frobinius permet d'obtenir des solutions particuliéres de l'équation (1.1.1) qui sont appelées "*fonction de Bessel*" sous forme d'un développement en série de la forme

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{p+n} \tag{1.1.2}$$

où $a_0 \neq 0$ avec p est un paramétre à déterminer.

En calculant la première et la deuxième dérivée de (1.1.2), on trouve

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n\geq 0} (p+n)\, a_n x^{p+n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n\geq 0} (p+n-1)\,(p+n)\, a_n x^{p+n-2} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

En remplaçant (1.1.3) dans (1.1.1), on obient

$$\begin{aligned} x^2 \left[\sum_{n\geq 0} (p+n-1)\,(p+n)\, a_n x^{p+n-2}\right] + x \left[\sum_{n\geq 0} (p+n)\, a_n x^{p+n-1}\right] + (x^2-\alpha^2) \left[\sum_{n\geq 0} a_n x^{p+n}\right] &= 0 \\ \sum_{n\geq 0} (p+n-1)\,(p+n)\, a_n x^{p+n} + \sum_{n\geq 0} (p+n)\, a_n x^{p+n} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{p+n+2} - \alpha^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^{p+n} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

On calcule les deux premiers termes de $n(n = 0, 1)$, la relation précédente devient pour

$$k = n + 2 \quad \Rightarrow \quad n = k - 2$$

$$a_0 x^p \left[p^2 - \alpha^2\right] + a_1 x^{p+1} \left[(p+1)^2 - \alpha^2\right] + \sum_{n\geq 2} a_n x^{p+n} \left[(p+n)^2 - \alpha^2\right] + \sum_{k\geq 2} a_{k-2} x^{p+k} = 0,$$

par un changement de notation $k = n$, on trouve

$$a_0 x^p \left(p^2 - \alpha^2\right) + a_1 x^{p+1} \left[(p+1)^2 - \alpha^2\right] + \sum x^{p+n} \left\{a_n \left[(p+n)^2 - \alpha^2\right] + a_{n-2}\right\} = 0$$

cela signifie que

$$\begin{aligned} a_0 \left(p^2 - \alpha^2\right) &= 0 && (1.1.5) \\ a_1 \left[(p+1)^2 - \alpha^2\right] &= 0 && (1.1.6) \\ \left\{a_n \left[(p+n)^2 - \alpha^2\right] + a_{n-2}\right\} &= 0, && (1.1.7) \end{aligned}$$

A l'aide de la relation (1.1.5) et la condition initiale $a_0 \neq 0$, nous pouvons déterminer la valeur de p, tel que

$$\begin{aligned} p^2 - \alpha^2 &= 0 \\ p &= \pm\alpha. \end{aligned}$$

Nous allons calculer le coefficient a_1, en utilisant la relation (1.1.6)

$$\begin{cases} a_1 \left[(\alpha+1)^2 - \alpha^2\right] = 0 & \text{si} \quad p = \alpha \\ a_1 \left[(-\alpha+1)^2 - \alpha^2\right] = 0 & \text{si} \quad p = -\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 [1 + 2\alpha] = 0 & \text{si} \quad p = \alpha \\ a_1 [1 - 2\alpha] = 0 & \text{si} \quad p = -\alpha \end{cases}$$

Dans ce cas, le coefficient a_1 est nul pour les deux valeurs de p

$$a_1 = 0 \tag{1.1.8}$$

Afin de calculer les coefficients a_n, on remplace p par ses deux valeurs α et $-\alpha$ dans (1.1.7), on obtient

$$\begin{cases} a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n^2+2\alpha n)} & \text{si} \begin{cases} p = \alpha \\ n^2 + 2\alpha n \neq 0 \end{cases} \\ a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n^2-2\alpha n)} & \text{si} \begin{cases} p = -\alpha \\ n^2 - 2\alpha n \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Pour les valeurs impaires de n, $n = 2k + 1$,$\forall k \geq 1$ la relation précédente devient

$$\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{-a_{(2k+1)-2}}{(2k+1)(2\alpha+2k+1)} & \text{si} \begin{cases} p = \alpha \\ \alpha \neq \frac{-(2k+1)}{2} \end{cases} \\ a_{2k+1} = \frac{-a_{(2k+1)-2}}{(2k+1)(-2\alpha+2k+1)} & \text{si} \begin{cases} p = -\alpha \\ \alpha \neq \frac{-(2k+1)}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Le fait que le coefficient a_1 est nul, on trouve que

$$a_{2k+1} = 0 \qquad \text{pour } p = \pm\alpha. \tag{1.1.9}$$

Pour les valeurs paires de n, $n = 2k \quad \forall k \geq 1$, on a

$$\begin{cases} a_{2k} = \frac{-a_{2(k-1)}}{4k(k+\alpha)} & \text{si} \begin{cases} p = \alpha \\ \alpha \neq -k \end{cases} \\ a_{2k} = \frac{-a_{2(k-1)}}{4k(k-\alpha)} & \text{si} \begin{cases} p = -\alpha \\ \alpha \neq -k \end{cases} \end{cases} \tag{1.1.10}$$

On trouve

$$\begin{cases} a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{4^k k!(1+\alpha)(2+\alpha)...(k+\alpha)} & \text{si} \begin{cases} p = \alpha \\ \alpha \neq -1, -2, .. -k \end{cases} \\ a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{4^k k!(1-\alpha)(2-\alpha)...(k-\alpha)} & \text{si} \begin{cases} p = \alpha \\ \alpha \neq 1, 2...k \end{cases} \end{cases} \tag{1.1.11}$$

En tenant compte de(1.1.9) et (1.1.10), la solution particuliére $y_1(x)$ de l'équation (1.1.1) associée à p=α

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^{\alpha+n} \\ y_1(x) &= a_0 x^\alpha + \sum_{k\geq 1} a_{2k} x^{\alpha+2k} \\ y_1(x) &= a_0 x^\alpha \left[1 + \sum_{k\geq 1} \frac{a_{2k}}{a_0} x^{2k} \right] \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

En remplaçant (1.1.11) dans (1.1.12) , on obtient

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 x^\alpha \left[1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1+\alpha)(2+\alpha)...(k+\alpha)} x^{2k} \right] \\ y_1(x) &= a_0 x^\alpha \left[1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!(1+\alpha)(2+\alpha)...(k+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] \quad \alpha \neq -1, -2, .. -k \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

De la même manière, on obtient la solution particuliére de (1.1.1) associée à p =-α qui s'écrit sous la forme

$$y_2(x) = a_0 x^{-\alpha} \left[1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!(1-\alpha)(2-\alpha)...(k-\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] \text{ " } \alpha \neq 1, 2, ...k \tag{1.1.14}$$

Par définition, la fonction de Bessel de premiére espèce d'ordre (p), notée J_P est donnée par l'expression suivante

$$J_P(x) = a_0 x^p \left[1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!(1+p)(2+p)...(k+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] \tag{1.1.15}$$

où l'expression de a_0 est donnée par :

$$a_0 = \frac{1}{2^P \Gamma(p+1)}$$

$\Gamma(p+1)$ est la fonction Gamma.

En remplaçant l'expression de a_0 , on trouve

$$J_P(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^P \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(P+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Par définition la fonction de Bessel de premiére espèce d'ordre $(-p)$, notée $J_{-P}(x)$ est donnée par l'expression suivante

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{1.1.16}$$

en comparant les relation (1.1.13) et (1.1.14) avec (1.1.15) et (1.1.16), on constate que

$$si \begin{cases} p = \alpha & \Longrightarrow \quad y_1(x) = J_P(x) \\ p = -\alpha & \Longrightarrow \quad y_1(x) = J_P(x) \end{cases}$$

Alors la solution générale de l'équation de Bessel est égale à

$$y(x) = AJ_p(x) + BJ_{-p}(x)$$

A, B sont des constantes

Les propriétés de la fonction de Bessel

Relations de récurrence :

a) pour $p = 0$

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ J_0(0) &= 1 \end{aligned}$$

b) $\forall p \neq 0 : J_P(0) = 0$

c) $J_{n+1}(x) = \frac{nJ_\alpha(x)}{x} - J'_n(x)$

d) $J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J'_n(x)$

e) $J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2J'_n(x)$

f) $J_1(x) = -J'_0(x)$

g) $\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n - J_{n-1}(x)$

A.2 Les spineurs sphériques

Les spineurs sphériques sont des fonctions d'onde totale d'un système physique défini par une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\phi)$ qui sont les fonctions propres du moment orbital l et les spineurs $(\chi(\frac{1}{2})\ ,\chi(-\frac{1}{2}))$.

Les harmoniques sphériques Ils sont les fonctions propres communes aux opérateurs moment cinitéque orbital L^2 et L_z notées $Y_l^m(\theta,\phi)$ et leur représentation est donnée en coordonnées sphériques par

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\, i^l \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-|m|)!}{4\pi\,(l+|m|)!}} P_l^{|m|}\,(\cos\theta)\, e^{im\phi} \tag{1.2.1}$$

$P_l^{|m|}\,(\cos\theta)$:est le polynome de Legendre

$$P_l^{|m|}\,(\cos\theta) = \begin{cases} (-1)^{l+m}\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\dfrac{\left(1-\cos\theta^2\right)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!}\left(\dfrac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m}\left(1-\cos\theta^2\right)^l & \text{pour } m \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L^2 Y_l^m(\theta,\phi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\theta,\phi) \\ L_z Y_l^m(\theta,\phi) &= m\hbar Y_l^m(\theta,\phi) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} L^2 &= -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

Elles sont utiles pour résoudre des problèmes invariants par rotation, et peuvent étre vues comme un équivalent de la transformation de Fourrier discrète (pour ce qui correspond à la partie angulaire) lorsque l'on a l'invariance par rotation, car la dépendance en angles sont naturellement périodique, avec $m \in \{-l, -l+1, ..., l-1, l\}$ le moment magnétique et $l = 0, 1, 2...$ le moment orbital.

La relation d'orthonormalisation est donnée par

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} Y_l^m(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

La relation de fermeture au sens de Dirac

$$\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta,\phi)Y_l^m(\theta',\phi') = \frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

Les spineurs Les spineurs ($\chi(\frac{1}{2})$,$\chi(-\frac{1}{2})$) décrivent une particule dans les états de spin $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ respectivement. Ce sont des vecteurs propres des matrices de Pauli , qui sont reliées au spin de la particule par

$$\vec{S} = \hbar\frac{\vec{\sigma}}{2}$$

avec

$$\begin{aligned} \chi(+\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \chi(-\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Si on considère que l'interaction entre le spin de la particule et son moment orbital l est négligeable, donc le moment cinétique total est $j = l + \frac{1}{2}$, dans ce cas les spineurs sphérique sont donnés par

$$\begin{aligned} \Omega_{l+\frac{1}{2},l,m}(\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\chi(\frac{1}{2})Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\chi(-\frac{1}{2})Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \\ \Omega_{l-\frac{1}{2},l,m}(\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\chi(\frac{1}{2})Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\chi(-\frac{1}{2})Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant les (1.2.1) et (1.2.2) on trouve les spineurs sphériques pour les deux valeurs de moment cinitéque total $j = l \pm \frac{1}{2}$ tel que

$$\begin{aligned} \Omega_{\underbrace{l+\frac{1}{2}}_{j},l,m}(\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \\ \Omega_{\underbrace{l-\frac{1}{2}}_{j},l,m}(\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ces spineurs sphériques sont normalisés par la condition [15]

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \Omega^*_{jlm}\Omega_{j'l'm'}d\phi = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Bibliographie

[1] C. Sayrin, thèse de doctorat, Préparation et stabilisation d'un champ non classique en cavité par rétroaction quantique, UPMC, Septembre 2011.

[2] A.Messiah, Mécanique quantique, Tome II, Dunod (1960).

[3] Gravitational effects on Dirac particles.

[4] M.Saoussen, Mémoire en vue de l'obtention du grade de maitre des sciences, Les bulles de masse négative dans un espace de de sitter, Décembre 2013

[5] J.Queva, Sur quelques problèmes de quantification : en espace-temps de de sitter et par états cohérents, Paris 7, Juillet 2010

[6] N.Poplawski, Covariant differentiation of spinors for a general affine connection, Novembre 2007

[7] D.Tant, thèse de doctorat, Nouvelles solutions et classification du superpotentiel et du potentiel de Kahler compatible avec une brisure de la supersymétrie à basse énergie induite par la gravitation, Université de Strasbourg, Décembre 2016

[8] J.Yepez, Einstein's vierbein field theory of curved space, Air force research laboratory, Hanscome Air force Base, MA 01731, Janvier 2008.

[9] W.O.Straub, The spin connection in weyl space, California

[10] G.V. Shishkin, Some exact solutions of the Dirac equation in gravitational fields, Department of theoretical physics, Byelorussian state university, 220080 Minsk, USSr

[11] Q.Zhang, Master's thesis, Calculations of atomic multiplets across the periodic table, Septembre 2014

[12] T.Foughali, thèse de doctorat, Sur les différentes extensions de la relativité générale, université de Béjaia

[13] A.Belabbas, thèse de doctorat, Les potentiels non gravitationnels et structure de l'espace temps, université de Bejaia, 2009

[14] Les fonctions de Bessel, PDF

[15] S.Zehouani, thèse de master, Solutions exactes de l'équations de Dirac pour des potentiels particuliers, Université de Béjaia, 2016