

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Bejaïa
Faculté des Science exactes
Département de Physique

Réf :



Mémoire de Fin de Cycle
En vue de l'obtention du diplôme
MASTER

Option : Dynamique des fluides et énergétique

Thème

**Analyse des solutions et stabilité de la convection dans
une couche fluide verticale chauffée par le bas**

Présenté par : **BENGHERIEB Amir**

Soutenu le 10/07/ 2019 à 14 heures devant le jury d'examen :

MOHAMED MEZIANI	Abdelkader	MCA	Président
ALLOUCHE	MOUSSA	MCB	Examineur
ADNANI	Massinissa	Docteur	Invité
MEZIANI	Bachir	Professeur	Directeur du Mémoire

Promotion : juillet 2019

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste

Travail a :

-mes très chers parents

-tous mes amis de près ou loin.

-tous la promotion dynamique des fluides et énergétique

TABLE DES MATIÈRES

Remerciement.....	1
Dédicaces.....	2
Table des matières.....	3
Liste des figures	6
Liste des abréviations et symboles.....	8
Introduction Générale.....	10
Chapitre I : Généralités sur les transferts thermiques	
I.1 Introduction.....	12
I.2 Transfert thermique.....	12
I.2.1 Champ de température	12
I.3 Modèle de transfert thermique	12
I.3.1 La conduction thermique	12
I.3.2 Le rayonnement.....	13
I.3.3 Transfert de chaleur par convection.....	14
I.3.3.1 Convection forcée.....	16
I.3.3.2 Convection naturelle	16
I.3.3.3 La convection mixte	16
I.4 Instabilités thermo-hydrodynamiques.....	16
I.4.1 Introduction	17
I.4.2 Exemples sur l'instabilité	17
I.4.2.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz	17
I.4.2.1 Instabilité de Rayleigh Taylor	18
I.5 Conclusion	19
Chapitre II : Instabilité de Rayleigh-Bénard dans un milieu Non Confiné	

II.1 Introduction	20
II.2 Convection de Rayleigh-Bénard	20
II.3 Modèle Mathématique	22
II.3.1 Equation de conservation de la masse	22
II.3.2 Equation de conservation des quantités du mouvement.....	22
II.3.3 Equation de conservation de l'énergie	22
II.4 Equations du Modèle.....	22
II.4.1 Equation de continuité	23
II.4.2 Equation Navier Stokes	23
II.4.3 Equation d'énergie	23
II.5 Adimensionalisation des équations	23
II.6 Perturbation des Equations	24
II.7 Problème d'Ostroumov.....	25
II.7.1 Introduction.....	25
II.7.2 Formulation.....	26
II.7.3 Position du Problème d'Ostroumov.....	27
II.7.4 Equations réduites et solutions stationnaires.....	28
II.8. Conclusion.....	37
 Chapitre III : Evolution de la fonction du courant, température et nombre de Rayleigh en fonction de Prandtl	
III.1-Introduction	
III.2 Evolution de la fonction du Courant	38
III.3 Evolution de la Température	41
III.4 Evolution de la Rayleigh en fonction de Prandtl.....	43
III.5 Conclusion	45
Conclusion Générale.....	46
Références.....	47

Liste des figures :

Figure I.1 : Principe de transfert de chaleur par conduction.....	12
Figure I.2 : Principe de rayonnement.....	13
Figure I.3 : Action de fluide en mouvement dans la convection.....	14
Figure I.4 : Vagues générées par le vent lors d'une tempête	17
Figure I.5 : Deux couches des fluides avec des vitesses différentes.....	17
Figure I.6 : Instabilité de Rayleigh-Taylor.....	18
Figure II.1 : Convection thermique entre deux plaques horizontales de températures T1 et T2.....	20
Figure II.2 : Rouleaux de convection.....	20
Figure II.3 : Le Profil de température T(z).....	24
Figure II.4 : Couche fluide entre deux plaques verticales chauffée par le bas.....	25
Figure III.1 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour Pr=0.7 et $\varepsilon=0.1$	37
Figure III.2 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour Pr=0.7 et $\varepsilon=0.3$	37
Figure III.3 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour Pr=0.7 et $\varepsilon=0.5$	38
Figure III.4 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour Pr=1.0 et $\varepsilon=0.1$	38
Figure III.5 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour Pr=1.0 et $\varepsilon=0$	39
Figure III.6 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour Pr=1.0 et $\varepsilon=0.5$	39
Figure III.7 : Evolution de la température en fonction de x pour Pr=0.7 et $\varepsilon=0.1$	40
Figure III.8 : Evolution de la température en fonction de x pour Pr=0.7 et $\varepsilon=0.3$	40
Figure III.9 : Evolution de la température en fonction de x pour Pr=0.7 et $\varepsilon=0.5$	41
Figure III.10 : Evolution de la température en fonction de x pour Pr=1.0 et $\varepsilon=0.1$	41
Figure III.11 : Evolution de la température en fonction de x pour Pr=1.0 et $\varepsilon=0.5$	42

Figure III.12 : Evolution de la température en fonction de x pour $Pr=1.0$ et $\varepsilon=0.5$	42
Figure III.13 : Evolution de Rayleigh en fonction de Prandtl $\varepsilon=0.1$	43
Figure III.14 : Evolution de Rayleigh en fonction de Prandtl $\varepsilon=0.3$	43
Figure III.15 : Evolution de Rayleigh en fonction de Prandtl $\varepsilon=0.5$	43

Tableau du symbole et abréviation :

dQ	Flux de chaleur transmis par conduction (W)
λ	Conductivité thermique du milieu ($W . m^{-1} . ^\circ c^{-1}$)
s	Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)
$\frac{dT}{dx}$	Gradient de température en X en ($K . m^{-1}$)
Φ	flux de chaleur qui circule en x (W)
σ	Constante de Stefan ($5,67.10^{-8}W . m^{-2} . K^{-4}$)
ε_f	Facteur d'émission de la surface
T_s	Température de la surface (K)
T_a	Température du milieu environnant la surface (K)
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection ($W . m^{-1} . ^\circ c^{-1}$)
T_s	Température de surface du solide ($^\circ c$)
T_a	Température du fluide loin de la surface du solide ($^\circ c$)
T	Température de référence ($^\circ c$)
α	coefficient de dilatation thermique ($^\circ c^{-1}$)
ν	La viscosité cinématique du fluide ($m^2 . s^{-1}$)
k	La diffusivité thermique du fluide ($m^2 . s^{-1}$)
d	La séparation horizontale entre les murs (m)
θ	La température total. ($^\circ c$)
T	Perturbation la température ($^\circ c$)
P	La pression total (pa)

p	Perturbation de pression (pa)
T_1	Température de la paroi à $z=0$ ($^{\circ}c$)
T_2	Température de la paroi à $z=1$ ($^{\circ}c$)
Ra	Nombre de Rayleigh
Ra_c	Nombre de Rayleigh critique
Nu	Nombre de Nusselt
Re	Nombre de Reynolds
Pr	Nombre de Prandtl
Ri	Le nombre de Richardson
Gr	nombre de Grashof
\vec{U}	Vecteur vitesse ($m.s^{-1}$).
\bar{S}	Tenseur des contraintes
E	Energie interne (J)
h_j	Flux thermique (W)
q	Terme source
g_r	La gravite ($m.s^{-2}$)
Ψ	fonction de courant
H	L'échelle de l'espace
ρ	la masse volumique du fluide ($kg.m^{-3}$)
ε	Paramètre de perturbation
f	Fonction qui dépend de la fonction de courant
g	Fonction qui dépend de la fonction de température

Introduction Générale

Le transfert thermique est un domaine très important dans notre vie, car il est au centre de plusieurs applications dans la nature et l'industrie, il est défini comme le transport et l'interaction d'énergie due aux différentes températures dans un système ou entre systèmes, surtout l'application liée à la dynamique des fluides, alors de nombreux scientifiques étudient plusieurs problèmes dans ce domaine, soit expérimentaux ou théoriques.

Dans le premier chapitre nous donnerons une généralité sur les transferts thermiques où on va définir le transfert thermique, avec les différents modèles, la conduction, la convection et le rayonnement, ainsi qu'on distingue trois types de convection (convection naturelle, forcée et mixte). La convection naturelle est le mode étudié dans ce mémoire, ce dernier résulte de la variation de la masse volumique du fluide avec la température. Nous avons défini, par la suite, l'instabilité d'un système et nous donnerons quelques exemples sur l'instabilité thermo-hydrodynamique, les plus connues (instabilité de Kelvin-Helmholtz, Instabilité de Rayleigh Taylor).

Dans le deuxième chapitre, nous allons étudier la convection de Rayleigh – Bénard dans un milieu non confiné. Au début on va définir l'instabilité de Rayleigh-Bénard puis nous donnerons le système d'équations qui régit le mouvement dans une couche fluide horizontale soumise à un gradient thermique en imposant les températures aux frontières. À partir des équations de Navier-Stokes et l'approximation de Boussinesq, l'équation de continuité et l'équation de conservation de l'énergie, nous introduisons les variables sans dimension pour simplifier les calculs, nous allons ensuite présenter les équations de la stabilité du problème en perturbant le profil de base de la vitesse et de la température. Enfin nous présenterons notre problème qui est le problème d'Ostroumov où un fluide incompressible vérifiant l'approximation de Boussinesq contenu dans une région entre deux plaques verticales infinies. Les Plaques séparé d'une distance H sont rigides, conductrices parfaites et maintenues à un gradient thermique constant. Nous étudierons la stabilité linéaire et utilisant les développements asymptotiques pour trouver les solutions faiblement non linéaires stables au régime super critique.

Dans le chapitre trois nous allons analyser quelques résultats issus de la théorie asymptotique développée afin de reconstruire les solutions du problème posé lorsqu'une couche fluide est soumise à un gradient thermique.

Chapitre I

Généralité sur les transferts thermique

I.1 Introduction :

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps), l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. Le transfert de chaleur est omniprésent dans de nombreuses applications de la nature et de l'industrie

Dans ce chapitre on a défini les grondons basiques du transfert thermique comme les différentes modèle puis on voir des exemples sur les instabilités thermo hydrodynamique.

I.2 Transfert thermique :

Il est défini comme le transport et l'interaction de l'énergie thermique due à la différence de température dans un corps ou entre plusieurs corps. Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid, le flux de chaleur dont la densité locale est notée est une grandeur vectorielle ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et a l'unité d'une densité surfacique de puissance (w / m^2)

1.2.1 Champ de température :

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$ La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température.

Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

I.3 Les modèle de transfert thermique :

Il existe trios modes de transfert de chaleur : **la conduction, le rayonnement et la convection.**

I.3.1 La conduction thermique :

La conduction thermique est un transfert thermique ayant lieu au cœur d'un matériau. C'est-à-dire à l'échelle microscopique elle résulte de l'élévation ou de la baisse de la Température dans certaine région d'un corps. Ceci provoque une différence de Température dans l'intégrité du corps ainsi la région la plus froide du corps s'échauffe au contact de la région la plus chaude. Ce transfert thermique a lieu sans transfert de matière mais avec transfert d'énergie. En effet, on peut considérer la conduction thermique au sein d'un solide comme la transmission de proche en proche de l'énergie microscopique de vibration du réseau

Cristallin car le fait que le corps soit chaud se traduit par une agitation microscopique des atomes cristallins. Ce transfert de chaleur obéit à la loi de Fourier, Equation (I.1), établie

Mathématiquement par Jean-Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1822. La densité de flux est proportionnelle au gradient de température donne par la relation suivante :

$$dQ = -\lambda.s.\frac{dT}{dx}.dt \quad (I.3)$$

dQ : Flux de chaleur transmis par conduction w

λ : Conductivité thermique du milieu ($W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$)

s : Aire de la section de passage du flux de chaleur m^2

$\frac{dT}{dx}$: Gradient de température en X en $k.m^{-1}$

Le flux de chaleur Φ en watt qui circule en X :

$$\Phi = -\lambda.s.\frac{dT}{dx} \quad (I.4)$$

Ainsi que la densité de chaleur φ en ($W.m^{-2}$) :

$$\varphi = -\lambda.\frac{dT}{dx} \quad (I.5)$$

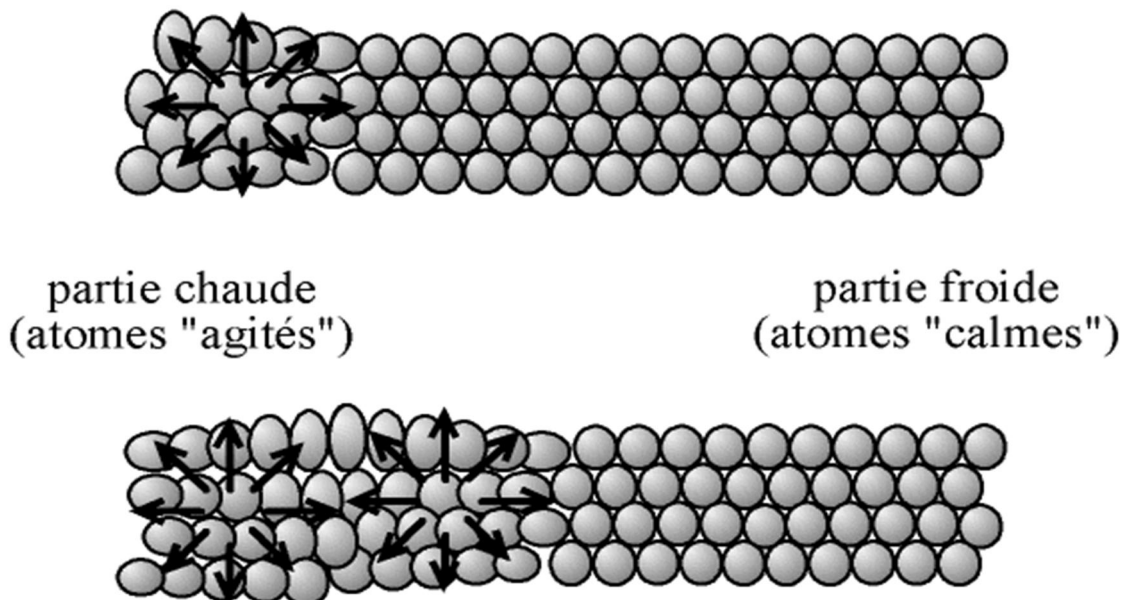


Figure (1) : principe de transfert de chaleur par conduction

I.3.2- Le rayonnement :

Le rayonnement est un transfert thermique ne nécessite pas de milieu matériel par opposition aux deux autres. En effet, ce type de transfert thermique résulte de l'émission des rayons électromagnétiques transporte l'énergie. Ils sont émis par un corps chaud, tel que le soleil, et échauffent le corps qui les reçoit, dans ce cas nous avons la relation suivante :

$$\Phi(w) = \varepsilon_f . \sigma . S (T_s^4 - T_a^4) \quad (I.6)$$

Avec :

Φ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (W)

σ : Constante de Stefan ($5,67.10^8 W . m^{-2} . K^{-4}$)

ε_f : Facteur d'émission de la surface

T_s : Température de la surface K

T_a : Température du milieu environnant la surface K

S : Aire de la surface (m^2)

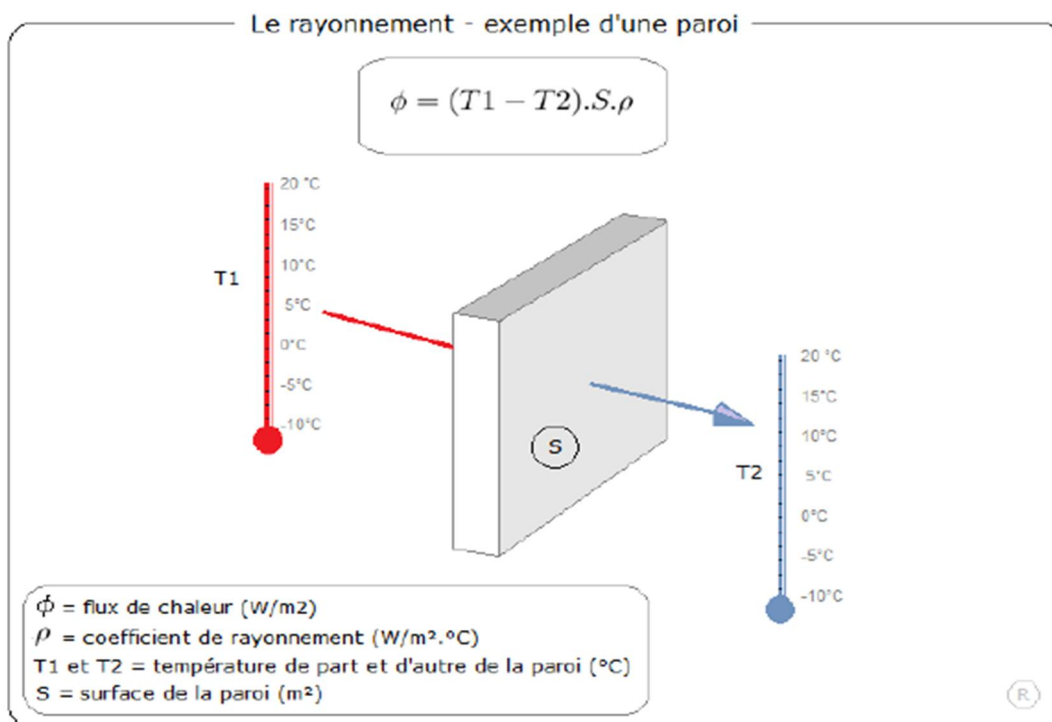


Figure (2) : Principe de rayonnement.

I.3.3-Transfert de chaleur par convection :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et de mouvement de milieu, elle est considérée comme le mécanisme le plus important de transport de l'énergie entre une surface solide et un

liquide ou gaz. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacent. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la Température est l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte simultanément, le fluide et l'énergie. L'énergie est à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

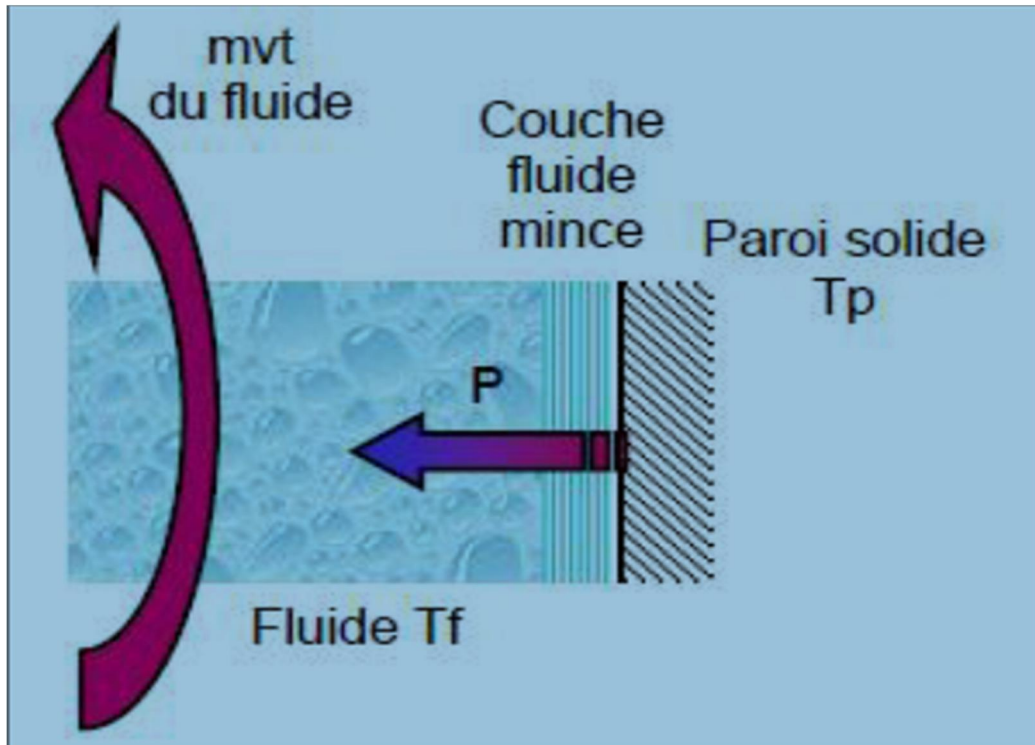


Figure (3) : Action de fluide en mouvement dans la convection

La puissance transférée par convection est donnée par la relation :

$$\Phi = h.s.(T_s - T_a) \quad (I.7)$$

Avec :

Φ : Flux de chaleur transmis par convection (W)

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($W .m^{-1} .^{\circ}C^{-1}$)

T_s : Température de surface du solide $^{\circ}C$

T_a : Température du fluide loin de la surface du solide $^{\circ}C$

s : Aire de la surface de contact solide/fluide m^2

La transmission de chaleur par convection est désignée selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre (naturelle), convection forcée et convection mixte.

I.3.3.1-Convection forcée :

La convection forcée dans laquelle le mouvement est provoquée par un procédé mécanique indépendant des phénomènes thermiques ; c'est donc un gradient de pression extérieur qui provoque les déplacements des particules du fluide. L'étude de la transmission de chaleur par convection est donc étroitement liée à celle de l'écoulement des fluides.

La convection est dite forcée quand il existe une cause du mouvement autre que les variations de températures du fluide, cette cause étant la seule à prendre en compte en raison de son importance relative. La relation générale pour la convection forcée est $Nu = f(Re, Pr)$.

I.3.3.2-Convection naturelle :

C'est celle dans laquelle le mouvement du fluide est créé par des différences de densité, celles -mêmes dues à des différences de température existant dans le fluide. La convection naturelle dans laquelle le mouvement résulte de la variation de la masse volumique du fluide avec la température ; cette variation crée un champ de forces gravitationnelles qui conditionne les déplacements des particules fluide. La convection naturelle est due au contact du fluide avec une paroi plus chaude ou plus froide et qui crée des différences de masse volumique, génératrice du mouvement au sein du fluide. On retrouve dans plusieurs applications industrielles ce mode de transfert de chaleur, Par exemple, dans les échangeurs de chaleur où deux fluides en mouvement, séparés par une paroi solide s'échange de l'énergie.

I.3.3.3-La convection mixte : se produit s'il y a une cause externe au mouvement du fluide mais insuffisante pour que la poussée d'Archimède puisse être négligée (frontière entre la convection libre et la convection forcée) c'est le cas des transferts de chaleur dans un habitacle d'automobile : L'air est soufflé dans l'habitacle par un ventilateur, mais la poussée d'Archimède n'est pas négligeable, surtout lorsqu'on se place loin des entrées d'air.

❖ Le groupe adimensionnel qui détermine laquelle de ces convections est dominante est Le nombre de Richardson Ri qui est le rapport du nombre de **Grashof** sur le carré du nombre de Reynolds ;

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (I.7)$$

Si : $\frac{Gr}{Re^2} < 0.1$ C'est la convection forcée qui domine.

$\frac{Gr}{Re^2} > 10$ C'est la convection naturelle qui domine.

$0.1 < \frac{Gr}{Re^2} < 10$ C'est le domaine de la convection mixte (naturelle et forcée).

1.4-Les instabilités thermo-hydrodynamiques

1.4.1-Introduction :

. L'étude des instabilités des écoulements est très importante pour la compréhension physique de la mécanique des fluides, pour comprendre la réalité physique d'instabilité du fluide on a représenté par un système d'équations mathématiques. Il peut s'agir des relations algébriques, d'équations différentielles ordinaires ou encore d'équations aux dérivées partielles. Les valeurs des variables de ces équations représentent alors l'état du système. Le modèle ainsi construit dépend de paramètres fixes, appelés paramètres de contrôle. C'est, par exemple, l'intensité du forçage, l'importance du frottement, la capacité à conduire la chaleur... Le système d'équations constituant le modèle représente une évolution temporelle en fonction du choix des conditions initiales ou des paramètres de contrôle, le système peut converger vers un équilibre ou parcourir indéfiniment des états successifs. Les suites d'états successifs évoluant dans le temps constituent ce que l'on appelle une trajectoire. On peut aussi calculer l'existence d'équilibres impossibles à observer physiquement dans la mesure où une petite perturbation d'un tel équilibre conduit à une trajectoire qui s'en écarte. On dit alors que l'équilibre est instable. La stabilité d'un équilibre et l'organisation des trajectoires dépend des paramètres de contrôle, Ensuit on 'explorer les outils mathématiques simples qui permettent de déterminer si un équilibre est stable ou instable. La technique consiste à considérer l'évolution de petites perturbations de l'équilibre. On peut tirer parti de cette hypothèse de petit paramètre pour négliger les termes d'ordre deux dans les équations. On obtient alors un système d'équations linéaires, plus facile à résoudre que le système initial. La croissance ou la décroissance de ces petites perturbations permet de déterminer si l'équilibre considéré est stable ou instable.

1.4.2-Exemples sur l'instabilité :

Il y a plusieurs modèles d'instabilités. On donne quelques exemples :

1.4.2.1-Instabilité de Kelvin-Helmholtz :

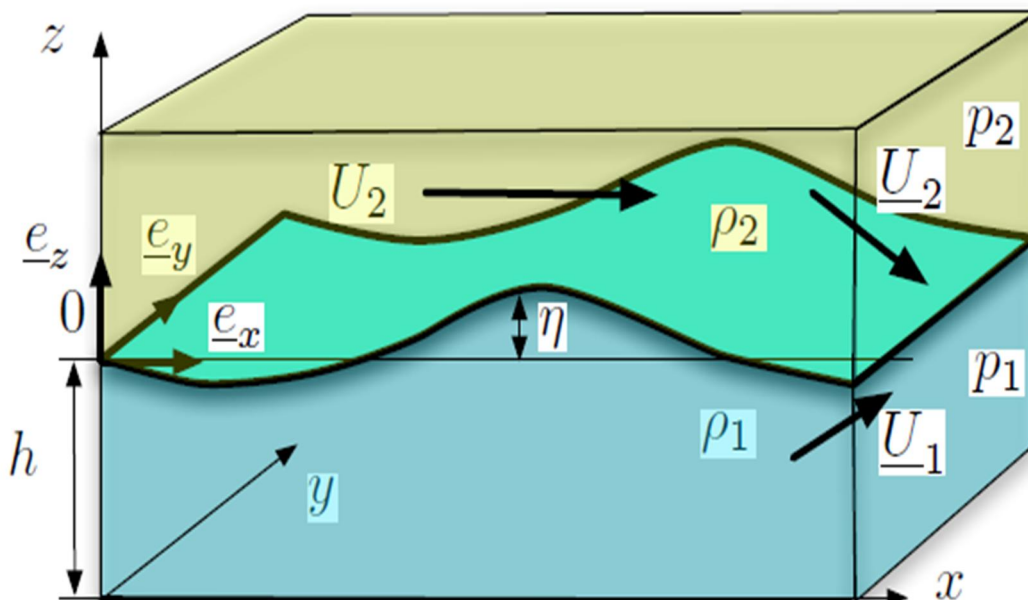
L'instabilité de Kelvin-Helmholtz est un mouvement ondulatoire en dynamique des fluides qui se forme lorsque deux fluides thermiquement stables sont superposés et se déplacent à des vitesses différentes à leur surface de contact. L'effet a été étudié au XIXe siècle par les physiciens Lord Kelvin et Hermann Ludwig von Helmholtz qui ont montré que la différence de vitesse va engendrer un flot turbulent transversal à la frontière. La théorie peut être appliquée de la même façon à l'intérieur d'un fluide de densité uniforme mais ayant des couches se déplaçant à des vitesses différentes ou des fluides de densités différentes superposés.

Cette instabilité joue un rôle important dans de nombreuses situations géophysiques : dans la dynamique de l'atmosphère et des océans, dans le comportement des plasmas, etc. Les structures tourbillonnaires, onde ou lame de Kelvin-Helmholtz, résultant de l'instabilité contribuent de façon significative au transport de quantité de mouvement, de température et de polluants. La compréhension de la génération de ces instabilités permet de mieux les représenter dans les modèles dont la résolution n'est pas suffisante pour permettre de les résoudre explicitement



Figure(4) : vagues générées par le vent lors d'une tempête

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l'océan, on observe la croissance vague. Cette instabilité, due au cisaillement du champ de vitesse, est appelée "instabilité de Kelvin-Helmholtz".



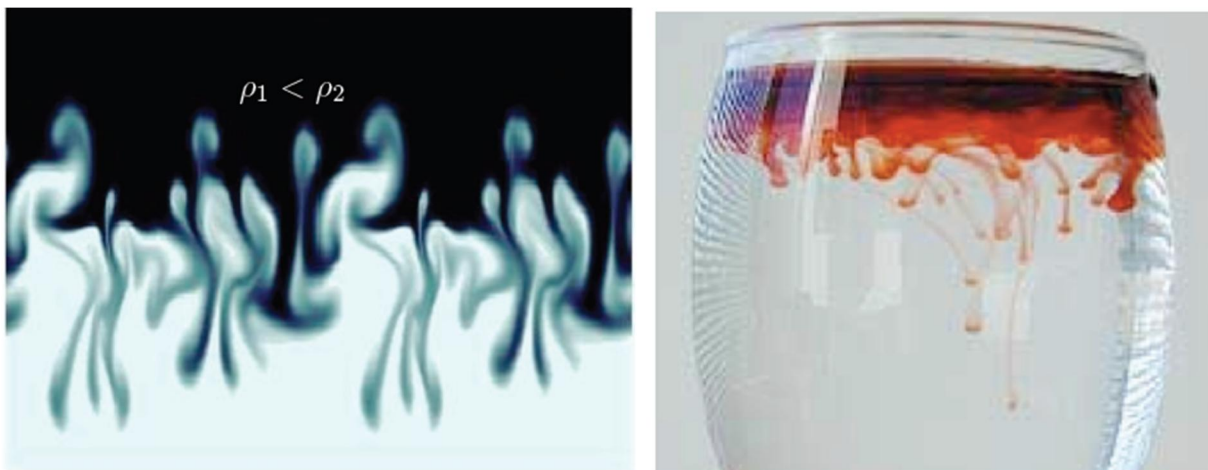
Figure(5) : deux couches des fluides avec des vitesses différentes

1.4.2.1-Instabilité de Rayleigh Taylor :

L'instabilité de **Rayleigh–Taylor**, nommée en hommage aux physiciens britanniques Lord **Rayleigh** et **G. I. Taylor**, est une instabilité de l'interface séparant deux fluides de densités différentes, qui résulte de la poussée du fluide le plus lourd sur le fluide le plus léger. Ce phénomène est produit par exemple par l'onde de choc à l'origine des nuages interstellaires. Dans ce cas particulier où le choc est à l'origine de la mise en vitesse du système, on parlera d'instabilité de **Richtmyer-Meshkov**. Il se produit une situation analogue lorsque la gravité

affecte deux fluides de densités différentes (le fluide le plus dense se trouvant au-dessus du fluide le moins dense) comme de l'huile minérale à la surface de l'eau.

Considérons deux couches de fluides immiscibles superposées dans deux plans parallèles, la plus lourde surplombant la plus légère et toutes deux soumises à la pesanteur terrestre. L'équilibre est instable à la moindre perturbation : toute perturbation va s'amplifier et libérer de l'énergie potentielle, le fluide le plus lourd gagnant progressivement la moitié inférieure sous l'effet du champ de gravitation, et le fluide léger passe au-dessus. C'est cette configuration qu'a étudiée Lord Rayleigh. La découverte importante de G. I. Taylor a consisté à montrer que cette situation est équivalente à celle qui se produit lorsque les fluides (hors de toute gravité) sont accélérés, le fluide léger étant propulsé à l'intérieur du fluide le plus lourd. Cela se produit notamment lorsque l'on projette un verre à terre avec une accélération supérieure à la pesanteur terrestre.



Figure(6) : instabilité de Rayleigh-Taylor

1.5-Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini le transfert thermique et les différents modes existants qui permettent d'effectuer ce transfert (conduction, convection et rayonnement). Nous avons détaillé le transfert thermique par convection quel est le plus important dans notre travail et nous avons explicité les différents types de convection (la convection libre, forcée et mixte). Nous avons, enfin, défini les instabilités thermo-hydrodynamique et nous avons donné quelques exemples sur les instabilités les plus connues (instabilités de **Kelvin-Helmholtz**, **Rayleigh-Taylor**).

Chapitre II

Instabilité de Rayleigh-Bénard dans un milieu Non Confiné

II.1-Introduction :

La plupart des applications dans le domaine de la mécanique des fluides et de la thermique se produisent lorsque le processus de diffusion convection thermique se développe dans des conteneurs fermés, Mais il y a des situations où la convection se produit dans des géométries non bornées comme dans les écoulements astrophysiques et géophysique.

Dans ces situations et en raison de la difficulté d'analyser ou calculer la solution dans un domaine illimité, On considère une couche fluide comme un modèle pour étudier. Un des modèles les plus populaires est la convection de Rayleigh-bénard (Convection RB).

Dans ce chapitre on va étudier le problème d'ostroumov dans la convection naturel (Convection RB) ,où nous utilisons le modèle mathématique qui régissant le mouvement d'un fluide a partir les équations pour la conservation de la masse, la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie ,Ensuite nous avons utilisée l'approximation de boussinesq dans l'équation de Navier Stokes et les techniques qui permet a simplicité les calcule (l'état de perturbation et l'état adimensionnel),Enfin on va étudier les solution exactes et stables au problème d'ostroumov , d'une autre coté nous avons utilisé le développement asymptotique pour trouve les solutions faiblement non linéaires stables au régime super critique .

II.2-Convection de Rayleigh-Bénard :

Un des modèles les plus populaire qui est utilisé pour étudier la convection naturelle. Ses configurations permettent une expérimentation facile, une modélisation mathématique et son utilisation au cours du siècle dernier a conduit à de nombreuses découvertes théoriques confirmées expérimentalement. RB convection concerne une couche fluide horizontale infinie chauffée par le bas, ou au moins de très grand ratio d'aspect défini ici comme épaisseur sur longueur. La densité de haut et les régions inférieures sont différentes en raison de la température différente dans le fluide. Ainsi, le fluide chaud dans le fond se dilate alors que le fluide froid dans le haut se contracte. Résultant la force de flottabilité provient du fluide chaud (fluide léger) qui se trouve au-dessus du fluide froid (fluide lourd). Lorsque la différence de température entre le haut et le bas du fluide est petite, le transfert de chaleur à travers la couche de fluide se fait par conduction. Quand la différence en température devient supérieure à une valeur critique, la force de flottabilité négative est assez grande pour forcer le fluide à se renverser conduisant l'apparition de la convection.

- Lord Rayleigh [1] a développé un modèle mathématique et isolé un paramètre sans dimension qui représente le rapport entre les effets déstabilisateurs de la flottabilité et l'effet stabilisant de la diffusion thermique et de la quantité de mouvement. Ce paramètre, qui est connu par nombre de Rayleigh

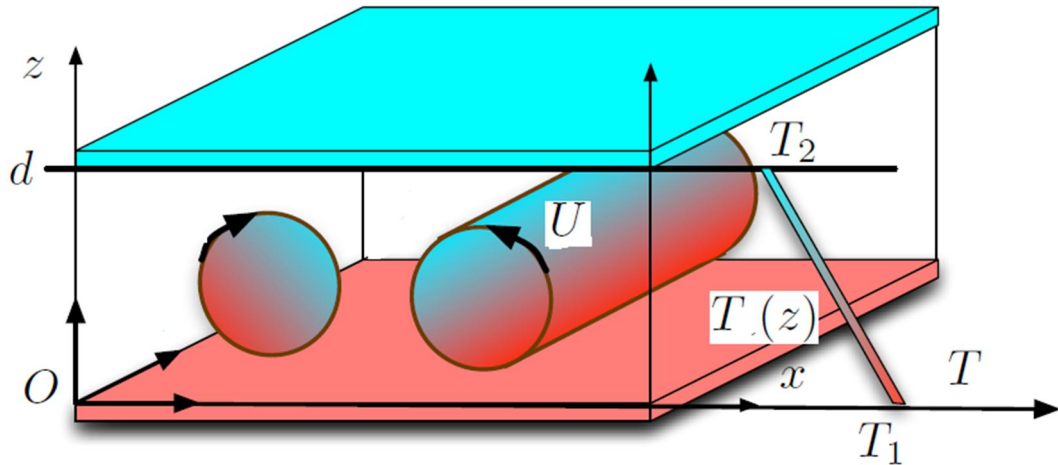


Figure II.1 : Convection thermique entre deux plaques horizontales de températures T_1 et T_2

- La convection de **Rayleigh-Bénard (RB)** est un exemple classique de convection thermique d'instabilité [2]. L'instabilité de convection thermique a été observée expérimentalement en 1900 par **Henri Bénard** qui a observé un mouvement fluide organisé ayant un espace régulier, modèle qui est devenu connu sous le nom de cellules de **Bénard**. En 1916, l'expérience de Bénard Complété avec succès [3] qui a développé un modèle mathématique. Il a remarqué que le fluide résolu dans de nombreuses cellules qui montent au milieu des celles-ci est descendant aux limites. En 1958, **Pearson** [4] a montré analytiquement que les cellules de Bénard étaient influencées par la variation de la tension superficielle avec la température, alors que **Block** [5] a confirmé ce fait expérimentalement.

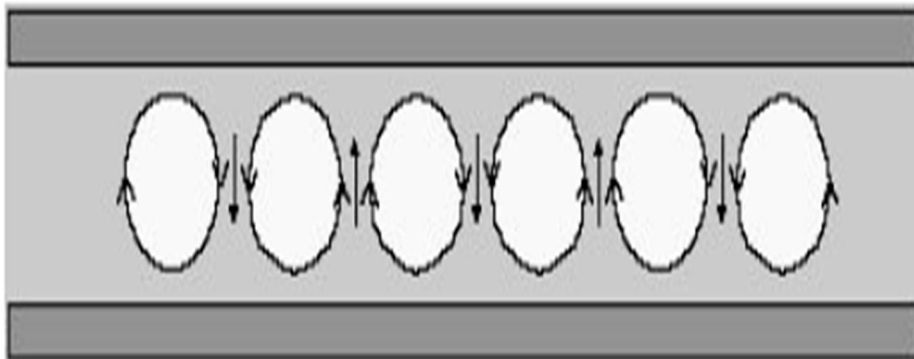


Figure II.2 : Rouleaux de convection

II.3-Modèle Mathématique :

Dans ce qui suit, nous présentons le système d'équation régissant qui décrit le mouvement d'un fluide dans un domaine tridimensionnel. Il Consiste les équations pour la conservation de la masse, la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie.

II.3.1 Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \partial \left(\frac{\rho U_j}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (\text{II.1})$$

II.3.2 Equation de conservation des quantités du mouvement:

$$\frac{\partial (\rho U_i)}{\partial t} + \left[\sum_{j=1}^3 \partial \left(\frac{\rho U_j U_i}{\partial x_j} \right) \right] U_i = \rho g_{r_i} + \sum_{j=1}^3 \partial \frac{\bar{S}_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1; 2; 3 \dots \dots \dots (\text{II.2})$$

II.3.3 Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (\rho U_j E)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \bar{S}_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho q - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \quad i=1;2;3 \dots \dots \dots (\text{II.3})$$

Où :

U : Vecteur vitesse.

\bar{S} : Tenseur des contraintes.

E : Energie interne.

h_j : Flux thermique

q : Terme source.

g_r : Terme gravitationnelle.

- Le tenseur de stress peut être écrit comme suite :

$$\bar{S}_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (\text{II.4})$$

Où : P est la pression et : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

- Pour un fluide incompressible le Tenseur des contraintes écrit :

$$\bar{S}_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.5})$$

- Pour un fluide Newtonien :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II.6})$$

II-4-Equations du Modèle :

Le modèle classiquement utilisé pour décrire la convection thermique dans une couche fluide horizontale forcée par un gradient thermique vertical en imposant les températures aux frontières. A partir des équations de Navier-Stokes incompressibles dans l'approximation de Boussinesq qui permet une formulation incompressible des équations de Navier-Stokes en prenant en compte des forces de flottabilité (poussée d'Archimède) dues à la dilatation du fluide et induite par une variation de la température.

Il est donné comme suit :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (\text{II.7})$$

Où :

T : Température

T_0 : Température de référence

α : Coefficient de dilatation thermique

Les équations de ce modèle s'écrivent :

II.4.1 Equation de continuité :

On considère un fluide incompressible donc : $\rho = cst$

L'équation (II.1) devient :

$$\nabla \vec{U} = 0 \quad (\text{II.8})$$

II.4.2 Equation Navier Stokes :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\nabla \vec{U}) \vec{U} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) \vec{g}_r \quad (\text{II.9})$$

Où :

$$\vec{g}_r = -g_r \vec{K}$$

Donc l'équation devient :

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\nabla \vec{U}) \vec{U} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{U} + \alpha(T - T_0) g_r \vec{K} - g_r \vec{K} \quad (\text{II.10})$$

II.4.3 Equation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) T = k \nabla^2 T \quad (\text{II.11})$$

II.5-Adimensionalisation des équations :

Nous supposons que d est la distance entre deux murs de délimitation qui sont soit Horizontaux (problème de Rayleigh-Bénard) ou vertical (problème d'Ostroumov), et utilisons d comme échelle de longueur pour obtenir les équations sans dimension.

Nous introduisons les variables sans dimension suivantes :

$$x = \frac{x}{d}, \quad t = \frac{kt}{d^2}, \quad T = \frac{T}{\beta d}, \quad P = \frac{d^2 P}{\rho_0 k^2}, \quad U = \frac{dU}{k} \quad (\text{II.12})$$

Les équations adimensionnées s'écrivent :

➤ **L'équation de continuité :**

$$\nabla \vec{U} = 0 \quad (\text{II.13})$$

➤ **L'équation de Navier Stokes :**

$$\text{Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right] = -\nabla P + \nabla^2 \vec{U} + Ra \theta \vec{K} \quad (\text{II.14})$$

➤ **L'équation d'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T \quad (\text{II.15})$$

Où :

$$Ra = \frac{g \alpha \beta d^4}{k \nu} = \frac{\alpha (T_1 - T_2) d^3 g_r}{k \nu}$$

ν : La viscosité cinématique du fluide

k : La diffusivité thermique du fluide

g : La constante gravitationnelle

α : Le coefficient de dilatation thermique

d : La séparation horizontale entre les murs

$$\beta = \frac{(T_1 - T_2)}{d} : \text{Le champ du gradient thermique vertical à travers la couche de fluide}$$

où T_1 et T_2 sont la température aux limites supérieure et inférieure, respectivement.

Pour que le profil de densité soit instable, il faut que $T_1 > T_2$. Rayleigh soit véhiculé selon la théorie de la convective d'instabilité [11]. Le début du mouvement convectif se produit à

$Ra = Ra_c$ dont la valeur dépend de plusieurs facteurs tels que le type de conditions aux limites, le type de fluide et toute autre condition imposée de l'extérieur.

$\text{Pr} = \frac{\nu}{k}$: Il représente le rapport de la diffusivité de la quantité de mouvement à la diffusivité thermique. Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermique et des phénomènes hydrodynamique dans un fluide. un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. un nombre de Prandtl faible (exemple : métaux liquide) indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température. La valeur du nombre de Prandtl varie de très petite à très grande. Par exemple $\text{Pr} = 0,015$ pour le mercure, $0,71$ pour l'air, $7,56$ pour l'eau.

II.6 Perturbation des Equations :

Pour le problème de Rayleigh-Bénard, le fluide est verticalement limité par deux frontières à $Z=0$ et $Z=1$ avec une longueur infinie.

Rayleigh a examiné la stabilité du problème en perturbant le profil de base de la vitesse et de température comme suit :

$$\vec{U} = \vec{U} \quad P = P_b + p \quad \theta = T_b + T \quad (\text{II.16})$$

Où : T est une perturbation de la température

T_b : La température de base.

θ : La température totale

P : La pression totale

P_b : La pression de base

p : La perturbation de la pression.

Les équations à l'état de perturbation s'écrivent :

L'équation de continuité :

$$\nabla \vec{U} = 0 \quad (\text{II.17})$$

L'équation de Navier Stokes :

$$\text{Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right] = -\nabla P + \nabla^2 \vec{U} + Ra T \vec{k} \quad (\text{II.18})$$

L'équation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T - \vec{U} \cdot \nabla T_b \quad (\text{II.19})$$

Dans ce cas le profil de base de la température (T_b) est un profil linéaire de Z avec une pente négative, définie par :

$$T_b = \frac{T_1 - T_2}{d} z + T_1 \quad (\text{II.20})$$

Où : $T_1 > T_2$ le profil est déstabilisé.

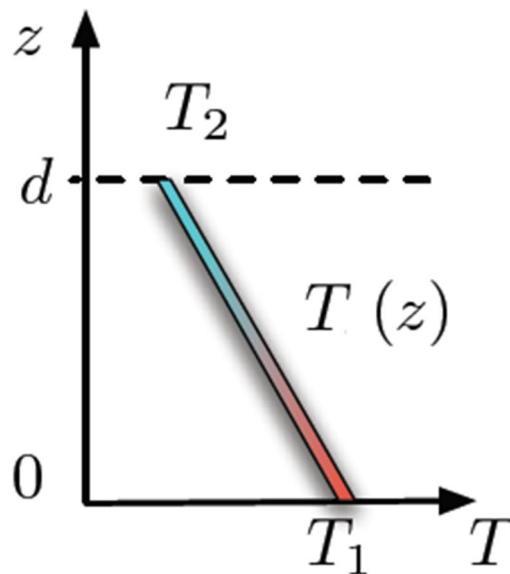


Figure II.3 : Le profil de température T(z)

Ainsi

T_1 : Température de la paroi à $z=0$

T_2 : Température de la paroi à $z=1$

II.7-Problème d'Ostroumov :

II.7.1-Introduction :

En 1947, **Ostroumov** [6] avait mené une étude théorique sur l'instabilité due à la flottabilité dans une cavité verticale non limitée chauffée par le dessous. Le problème est devenu connu sous le nom de problème **d'Ostroumov** [7]. **Ostroumov** a obtenu avec succès les seuils d'instabilité linéaire. Cependant, son analyse super-critique de petite amplitude a échoué et semble montrer que les solutions super-critiques non linéaires n'existent pas. La raison de l'échec est attribuée au fait que les termes non linéaires issus de l'interaction des modes linéaires disparaissent à l'identique. Ce problème n'a pas été résolu jusqu'en 1984.

En 1984, **Normand** [8] a mis au point une approche pour trouver une théorie de la stabilité faiblement non linéaire du problème **d'Ostroumov** de manière asymptotique.

Dans ce chapitre on va étudier les solutions exactes et stables au problème **d'Ostroumov**. Ces solutions sont caractérisées par les mêmes conditions critiques pour l'instabilité linéaire que les solutions **d'Ostroumov**

Le deuxième aspect de ce travail est d'utiliser une analyse de faible amplitude pour étendre l'analyse au régime super critique et obtenir les solutions non linéaires stables.

II.7.2-Formulation :

On considère un fluide incompressible vérifiant l'approximation de **Boussinesq** contenu dans une région entre deux plaques verticales infinies. Les Plaques séparé d'une distance H sont rigide, conductrice parfaite et maintenue à Température égales un gradient thermique vertical est appliqué au fluide tell que : $\frac{\partial T}{\partial z} = -G$

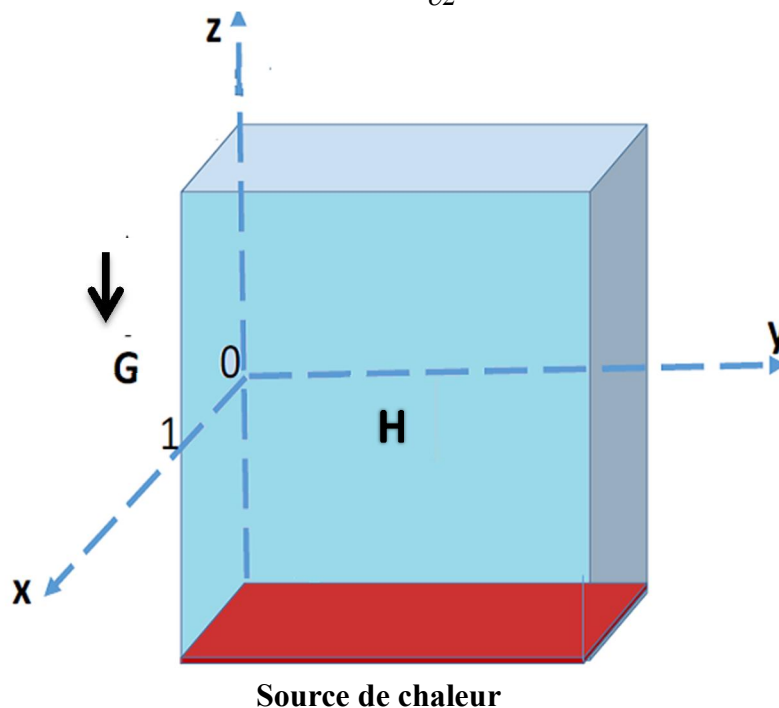


Figure II.4 : couche fluide entre deux plaques verticale chauffé par le bas

En utilisant l'échelle H pour l'espace, $\frac{H^2}{k}$ Pour le temps, $\frac{k}{H}$ Pour les vitesses, GH Pour la température et $\frac{\rho_0 \nu k}{H^2}$ pour la pression.

A partir les équations du mouvement président (II.17), (II.18) et(II.19) On trouve le système d'équation suivant :

$$\nabla \bar{U} = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{U} \right) = -\nabla P + \nabla^2 \bar{U} + \text{Ra} T \bar{k} \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (\text{II.23})$$

$$\text{Avec : } U = T = 0 \text{ Pour } x = 0,1 \quad (\text{II.24})$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{k} \quad \text{Et} \quad \text{Ra} = \frac{\alpha_t g_r G H^4}{k \nu}$$

Le système (II.21) -(II.24) admet un état stationnaire de mouvement donnée par :

$$U = 0, \quad T_b(z) = -z \quad P_b(z) = -R \frac{z^2}{2} + cte \quad (\text{II.25})$$

on introduisant la solution de base, on applique deux fois l'opérateur rotationnel et Introduisant la fonction de courant Ψ définie par :

$$U = \Psi_z(x, z, t), \quad W = -\Psi_x(x, z, t) \quad (\text{II.26})$$

Et on élimine la pression et l'équation de continuité, le système (II.22), (II.23) Et(II.24) devient :

$$\text{Pr}^{-1} \left(\nabla^2 \Psi_t + \Psi_z \nabla^2 \Psi_x - \Psi_x \nabla^2 \Psi_z \right) = \nabla^4 \Psi - \text{Ra} T_x \quad (\text{II.27})$$

$$T_t + \Psi_z T_x - \Psi_x T_z + \Psi_x = \nabla^2 T \quad (\text{II.28})$$

$$\text{Avec : } \Psi = \Psi_x = T = 0 \quad \text{à } x = 0,1 \quad (\text{II.29})$$

II.7.3-Position du Problème d'Ostroumov :

Le problème (II.27) et (II.29) est traité par **Ostroumov** [9]. Il a déterminé le seuil d'instabilité en étudiant la stabilité linéaire, où dans le cas stable, les ondes dynamiques de part et d'autre des ondes cinématique, permettant ainsi à l'écoulement d'ajuster sa vitesse relativement à la variation de profondeur via l'équation de conservation de la masse. Dans le cas contraire, le fluide a du mal à ajuster sa vitesse, et l'amplitude de l'onde cinématique croit jusqu'à faire basculer l'écoulement dans un régime instable. Cette étude n'est pas valable dans le cadre du régime faiblement non-linéaire.

Considérons les développements suivants pour :

$$\Psi, T \quad \text{Et} \quad \text{Ra} \quad \text{où} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

$$\langle \Psi, T \rangle = \varepsilon \langle \Psi^{(1)}, T^{(1)} \rangle + \varepsilon^2 \langle \Psi^{(2)}, T^{(2)} \rangle + \dots \quad (\text{II.30})$$

$$Ra = Ra_0 + \varepsilon Ra_1 + \varepsilon^2 Ra_2 \quad (\text{II.31})$$

Le problème d'ordre 0 est :

$$\nabla^4 \Psi^{(1)} - Ra_0 T_x^{(1)} = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$\Psi_x^{(1)} = \nabla^2 T^{(1)} \quad (\text{II.33})$$

Qui se réduit aux E.D.O suivant pour des modes normaux selon Z.

Où :

$$\langle \Psi^{(1)}, T^{(1)} \rangle = e^{ikz} \langle \hat{\Psi}^{(1)}, \hat{T}^{(1)} \rangle \quad (\text{II.33})$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right)^3 \hat{\Psi}^{(1)} = Ra_0 \frac{d^2 \hat{\Psi}^{(1)}}{dx^2} \quad (\text{II.34})$$

$$\hat{\Psi}^{(1)} = \frac{d\hat{\Psi}^{(1)}}{dx} = \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right)^2 \frac{d\hat{\Psi}^{(1)}}{dx} = 0 \quad x = 0,1$$

Le problème aux valeurs propres admet comme nombre d'onde critique $\tilde{k}_c = 0$.

Dans le problème d'ordre deux $O(\varepsilon^2)$, les termes non-linéaires qui apparaissent à droite disparaissent tant que $\Psi^{(1)}$ et $T^{(1)}$ ne dépendent pas de z . Toute analyse non linéaire ne marche pas.

Dans la section suivante, on écrit le système d'équations réduit pour lequel la Solution non linéaire est obtenue en utilisant faiblement non linéaire.

II.7.4- Equations réduits et solutions stationnaires.

On considère les solutions similaires données par **Berman** [10] dans le cas d'un problème d'écoulement à deux dimensions dans une conduite et on l'étend pour inclure le processus de correction.

$$\text{On a : } \begin{cases} \Psi(x, z, t) = zf(x, t) \\ T(x, z, t) = zg(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Avec (II.27) (II.28) et (II.29) on obtient :

$$f_{xxt} + f f_{xxx} - f_x f_{xx} = \text{Pr} \left(f_{xxxx} - Ra g_x \right) \quad (\text{II.36})$$

$$g_t + f g_x - f_x g = g_{xx} - f_x \quad (\text{II.37})$$

$$f = f_x = g = 0 \quad x = 0,1 \quad (\text{II.38})$$

On montre que la forme linéaire de (II.36), (II.37) et (II.38) à un taux de croissance réel. Alors, on donne les solutions stationnaires pour un développement de faible amplitude pour le

Système d'E.D.O.

$$f f''' - f' f'' = \text{Pr} \left(f^{(4)} - Ra g' \right) \quad (\text{II.39})$$

$$f g' - f' g = g'' - f' \quad (\text{II.40})$$

$$f = f' = g = 0 \quad x = 0, 1 \quad (\text{II.41})$$

On utilise les développements asymptotiques suivants pour ε faible.

$$f = \varepsilon f_0 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^3 f_2 + \dots \quad (\text{II.42})$$

$$g = \varepsilon g_0 + \varepsilon^2 g_1 + \varepsilon^3 g_2 + \dots \quad (\text{II.43})$$

$$Ra = Ra_0 + \varepsilon Ra_1 + \varepsilon^2 Ra_2 + \dots \quad (\text{II.44})$$

Pour l'ordre (1), on a :

$$f_0^{(4)} - Ra_0 g_0' = 0 \quad (\text{II.45})$$

$$g_0'' - f_0' = 0 \quad (\text{II.46})$$

$$f_0 = f_0' = g_0 = 0 \quad x = 0, 1 \quad (\text{II.47})$$

Dont la solution est :

$$f_0(x) = C(-1 + \cos(2\pi x)) \quad (\text{II.48})$$

$$g_0(x) = \frac{C}{2\pi} \sin(2\pi x) \quad (\text{II.49})$$

$$Ra_0 = (2\pi)^4 \quad (\text{II.50})$$

Qui correspond au mode minimal.

Après normalisation, on trouve $C = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Le problème d'ordre (2) est :

$$f_1^{(4)} - Ra_0 g_1' = Ra_1 g_0' + \text{Pr}^{-1} (f_0 f_0''' - f_0' f_0'') \quad (\text{II.51})$$

$$g_1'' - f_1' = f_0 g_0' - f_0' g_0 \quad (\text{II.52})$$

$$f_1 = f_1' = g_1 = 0 \quad x = 0, 1 \quad (\text{II.53})$$

Lorsqu'on introduit les solutions (II.48) et (II.49) dans le d'E.D. O. (II.52) on obtient :

$$\frac{d^2 g_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + f_0 \frac{dg_0}{dx} - g_0 \frac{df_0}{dx} \quad (\text{II.54})$$

$$\text{D'où } \frac{d^2 g_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + c^2 (1 - \cos(2\pi x)) \quad (\text{II.55})$$

Après une première intégration par rapport à x , on a :

$$\frac{dg_1}{dx} = f_1 + c^2 \left(x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \right) + C_1 \quad (\text{II.56})$$

La première E.D.O du (II.51) s'écrit alors, en remplaçant $\frac{dg_1}{dx}$ par son expression :

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} - Ra_0 f_1 - Ra_0 C_1 - Ra_0 c^2 \left(x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} \right) = Ra_0 \frac{dg_0}{dx} + Pr^{-1} \left(f_0 \frac{d^3 f_0}{dx^3} - \frac{df_0}{dx} \frac{d^2 f_0}{dx^2} \right) \quad (\text{II.57})$$

En remplaçant dans cette E.D.O, f_0 et g_0 par leurs expressions données en (II.48) et (II.49), on trouve :

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} - Ra_0 f_1 = Ra_0 C_1 + Ra_0 c^2 x + Ra_0 c \cos(2\pi x) - \left(\frac{Ra_0 c^2}{2\pi} + \frac{8c^2 \pi^3}{Pr} \right) \sin(2\pi x) \quad (\text{II.58})$$

$$\text{Avec } f_1 = \frac{df_1}{dx} = 0 \quad \text{à } x = 0 \quad \text{et } x = 1 \quad (\text{II.59})$$

La solution homogène de cette E.D.O correspond à la solution de :

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} - Ra_0 f_1 = 0 \quad (\text{II.60})$$

$$\text{Avec } f_1 = \frac{df_1}{dx} = 0 \quad \text{à } x = 0 \quad \text{et } x = 1 \quad (\text{II.61})$$

Dont la solution homogène est :

$$f_{1,h}(x) = A_1 \sin(2\pi x) + A_2 \cos(2\pi x) + A_3 sh(2\pi x) + A_4 ch(2\pi x) \quad (\text{II.62})$$

Et la solution particulière est :

$$f_{1,p}(x) = B_1 + B_2 x + B_3 x \cos(2\pi x) + B_4 x \sin(2\pi x) \quad (\text{II.63})$$

Après calcul, on trouve :

$$B_1 = -C_1 \quad B_2 = -c^2 \quad B_3 = -\frac{1}{4}c^2 \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \quad B_4 = -\frac{Ra_0 c}{32\pi^3}$$

Finalemment :

$$f_1(x) = -C_1 + c^2 x - \frac{1}{4}c^2 \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right)x \cos(2\pi x) - \frac{Ra_1 c}{32\pi^3} x \sin(2\pi x) + A_1 \sin(2\pi x) + A_2 \cos(2\pi x) + A_3 \sinh(2\pi x) + A_4 \cosh(2\pi x) \quad (\text{II.64})$$

Et :

$$\frac{dg_1}{dx} = -c^2 x - \frac{1}{4}c^2 \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right)x \cos(2\pi x) - \frac{Ra_1 c}{32\pi^3} x \sin(2\pi x) + A_1 \sin(2\pi x) + A_2 \cos(2\pi x) + A_3 \sinh(2\pi x) + A_4 \cosh(2\pi x) + c^2 \left(x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\right) \quad (\text{II.65})$$

Lorsqu'on introduit les conditions aux limites :

$$f_1(0) = f_1(1) = f_1'(0) = f_1'(1) = 0 \quad (\text{II.66})$$

On obtient :

$$A_2 + A_4 = C_1 \quad (\text{II.67})$$

$$A_2 + A_3 \sinh(2\pi) + A_4 \cosh(2\pi) = C_1 - c^2 + \frac{1}{4}c^2 \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \quad (\text{II.68})$$

$$2\pi A_1 + 2\pi A_3 = -c^2 + \frac{1}{4}c^2 \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \quad (\text{II.69})$$

$$2\pi A_1 + 2\pi A_3 = -c^2 + \frac{1}{4}c^2 \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) + \frac{Ra_1 c}{16\pi^2} - 2\pi A_4 \sinh(2\pi) \quad (\text{II.70})$$

Ce système algébrique linéaire à comme solution :

$$A_1 = -\frac{5}{8} c \frac{\left\{ -c \left[\left(\text{Pr} + \frac{1}{5} \right) \pi^2 - \frac{1}{40} Ra_1 \text{Pr} \right] \cosh(2\pi) + c \pi^3 \left(\text{Pr} + \frac{1}{5} \right) \sinh(2\pi) + c \left(\text{Pr} + \frac{1}{5} \right) \pi^2 + \frac{1}{40} Ra_1 \text{Pr} \right\}}{\pi^3 (-1 + \cosh(2\pi)) \text{Pr}} \quad (\text{II.71})$$

$$A_2 = \frac{1}{64} \frac{-40 \left[\left(c^2 + \frac{8}{5} C_1 \right) \text{Pr} + \frac{1}{5} c^2 \right] \pi^3}{\pi^3 (-1 + \cosh(2\pi)) \text{Pr}} \quad (\text{II.72})$$

$$A_3 = \frac{1}{32} \frac{c \left\{ -\cosh(2\pi) Ra_1 Pr + Ra_1 Pr + 40\pi^3 c Pr \sinh(2\pi) + 8\pi^3 c \cdot \sinh(2\pi) \right\}}{\pi^3 Pr \left[-(\cosh(2\pi))^2 + 2 \cosh(2\pi) - 1 + (\sinh(2\pi))^2 \right]} \quad (\text{II.73})$$

$$A_4 = -\frac{1}{32} \frac{c \left\{ 40c\pi^3 \cosh(2\pi) Pr + 8c\pi^3 \cosh(2\pi) - 40c\pi^3 Pr - 8c\pi^3 - Ra_1 Pr \sinh(2\pi) \right\}}{\pi^3 Pr \left[-(\cosh(2\pi))^2 + 2 \cosh(2\pi) - 1 + (\sinh(2\pi))^2 \right]} \quad (\text{II.74})$$

Donc :

$$\begin{aligned} g_1(x) = & C_2 - \frac{1}{2\pi} A_1 \cos(2\pi x) + \frac{1}{2\pi} A_2 \sin(2\pi x) + \frac{1}{2\pi} A_3 \cosh(2\pi x) + \frac{1}{2\pi} A_4 \sinh(2\pi x) - \frac{1}{2} c^2 x^2 \\ & - \frac{1}{16\pi^2} c^2 \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \left[\cos(2\pi x) + 2\pi x \sin(2\pi x) \right] - \frac{1}{128\pi^5} Ra_1 c \left[\sin(2\pi x) - 2\pi x \cdot \cos(2\pi x) \right] \\ & + c^2 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4\pi^2} \cos(2\pi x) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

$$\text{Pour déterminer la constante } C_2, \text{ on utilise : } g_1(0) = g_1(1) = 0 \quad (\text{II.76})$$

$$C_2 = -\frac{5}{8} \frac{c \left\{ \left[-\frac{1}{5} c \pi^2 (Pr+1) - \frac{1}{40} Ra_1 Pr \right] \cosh(2\pi) + \left(Pr + \frac{1}{5} \right) \pi^3 c \cdot \sinh(2\pi) + \frac{1}{5} c \pi^2 (Pr+1) + \frac{1}{40} Ra_1 Pr \right\}}{\pi^4 Pr (-1 + \cosh(2\pi))} \quad (\text{II.77})$$

Et

$$C_2 = -\frac{5}{8} \frac{c \left\{ \left[-\frac{1}{5} c \pi^2 (Pr+1) + \frac{1}{40} Ra_1 Pr \right] \cosh(2\pi) + \left(Pr + \frac{1}{5} \right) \pi^3 c \cdot \sinh(2\pi) + \frac{1}{5} c \pi^2 (Pr+1) - \frac{1}{40} Ra_1 Pr \right\}}{\pi^4 Pr (-1 + \cosh(2\pi))} \quad (\text{II.78})$$

Ces deux équations sont identiques, si et seulement si :

$$-\frac{1}{32} \frac{Ra_1 c}{\pi^4} = 0 \quad (\text{II.79})$$

$$\text{Qui implique } Ra_1 = 0 \quad (\text{II.80})$$

$$\text{En assumant l'orthogonalité de } f_0 \text{ et } f_1, \text{ on trouve : } C_1 = -\frac{c^2}{2} \quad (\text{II.81})$$

Sachant que $Ra_1 = 0$ alors $f_1(x)$ et $g_1(x)$ sont réécrites comme :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{c^2}{2} + c^2 x - \frac{1}{4} c^2 \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) x \cdot \cos(2\pi x) \\
&+ \frac{5}{8} \frac{c \left\{ -c \left[\left(\text{Pr} + \frac{1}{5} \right) \pi^2 \right] \cosh(2\pi) + c \pi^3 \left(\text{Pr} + \frac{1}{5} \right) \sinh(2\pi) + c \left(\text{Pr} + \frac{1}{5} \right) \pi^2 \right\}}{\pi^3 (-1 + \cosh(2\pi)) \text{Pr}} \sin(2\pi x) \\
&+ \frac{1}{64} \frac{-40 \left[\left(c^2 - \frac{8c^2}{10} \right) \text{Pr} + \frac{1}{5} c^2 \right] \pi^3}{\pi^3 (-1 + \cosh(2\pi)) \text{Pr}} \cos(2\pi x) \\
&+ \frac{1}{32} \frac{c \left\{ 40\pi^3 c \text{Pr} \sinh(2\pi) + 8\pi^3 c \sinh(2\pi) \right\}}{\pi^3 \text{Pr} \left[-(\cosh(2\pi))^2 + 2 \cosh(2\pi) - 1 + (\sinh(2\pi))^2 \right]} \sinh(2\pi x) \\
&+ \frac{1}{32} \frac{c \left\{ 40c \pi^3 \cosh(2\pi) \text{Pr} + 8c \pi^3 \cosh(2\pi) - 40c \pi^3 \text{Pr} - 8c \pi^3 \right\}}{\pi^3 \text{Pr} \left[-(\cosh(2\pi))^2 + 2 \cosh(2\pi) - 1 + (\sinh(2\pi))^2 \right]} \cosh(2\pi x)
\end{aligned} \tag{II.82}$$

$f_1(x)$ S'écrit sous la forme :

$$f_1(x) = A_1 \sin(2\pi x) + A_2 \cos(2\pi x) + A_3 \sinh(2\pi x) + A_4 \cosh(2\pi x) + A_5 x \cos(2\pi x) + A_6 x + A_7$$

Où A_i , $i = 1, \dots, 7$ sont donnés par :

$$A_1 = \frac{c^2 (5 \text{Pr} + 1) (1 - \cosh(2\pi) + \pi \sinh(2\pi))}{8\pi \text{Pr} (1 - \cosh(2\pi))} \tag{II.83}$$

$$A_2 = c^2 \frac{(\text{Pr} + 1)}{8 \text{Pr}} \tag{II.84}$$

$$A_3 = \frac{c^2 (5 \text{Pr} + 1) \sinh(2\pi)}{8 \text{Pr} (-1 + \cosh(2\pi))} \tag{II.85}$$

$$A_4 = -\frac{c^2 (5 \text{Pr} + 1)}{8 \text{Pr}} \tag{II.86}$$

$$A_5 = -c^2 \frac{(1 + \text{Pr})}{4 \text{Pr}} \tag{II.87}$$

$$A_6 = -c^2 \tag{II.88}$$

$$A_7 = \frac{c^2}{2} \tag{II.89}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{c^2(5Pr+1)(1-\cosh(2\pi)+\pi\sinh(2\pi))}{8\pi Pr(1-\cos(2\pi))} \sin(2\pi x) + c^2 \frac{(Pr+1)}{8Pr} \cos(2\pi x) \\
&+ \frac{c^2(5Pr+1)\sinh(2\pi)}{8Pr(-1+\cosh(2\pi))} \sinh(2\pi x) - \frac{c^2(5Pr+1)}{8Pr} \cosh(2\pi x) - c^2 \frac{(1+Pr)}{4Pr} x \cos(2\pi x) - c^2 x + \frac{c^2}{2}
\end{aligned} \tag{II.89}$$

Ensuite en remplaçons la valeur de C_2 et A_1, A_2, A_3, A_4 (II.75) on trouve :

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= -\frac{5}{8} c \left\{ \left[-\frac{1}{5} c \pi^2 (Pr+1) \right] \cosh(2\pi) + \left(Pr + \frac{1}{5} \right) \pi^3 c \cdot \sinh(2\pi) + \frac{1}{5} c \pi^2 (Pr+1) \right\} \\
&\quad \frac{1}{\pi^4 Pr(-1+\cosh(2\pi))} + \\
&\quad \frac{5}{16\pi} c \left\{ -c \left[\left(Pr + \frac{1}{5} \right) \pi^2 \right] \cosh(2\pi) + c \pi^3 \left(Pr + \frac{1}{5} \right) \sinh(2\pi) + c \left(pr + \frac{1}{5} \right) \pi^2 \right\} \\
&\quad \frac{1}{\pi^3 (-1+\cosh(2\pi)) Pr} \cos(2\pi x) \\
&+ \frac{1}{128\pi} \frac{-40 \left[\left(c^2 - \frac{8}{10} c^2 \right) Pr + \frac{1}{5} c^2 \right] \pi^3}{\pi^3 (-1+\cosh(2\pi)) Pr} \sin(2\pi x) + \frac{1}{64\pi} \\
&\quad \frac{c \left\{ 40\pi^3 c Pr \sinh(2\pi) + 8\pi^3 c \cdot \sinh(2\pi) \right\}}{\pi^3 Pr \left[-(\cosh(2\pi))^2 + 2\cosh(2\pi) - 1 + (\sinh(2\pi))^2 \right]} \cosh(2\pi x) - \frac{1}{64\pi} \\
&\quad \frac{c \left\{ 40c \pi^3 \cosh(2\pi) Pr + 8c \pi^3 \cosh(2\pi) - 40c \pi^3 Pr - 8c \pi^3 \right\}}{\pi^3 Pr \left[-(\cosh(2\pi))^2 + 2\cosh(2\pi) - 1 + (\sinh(2\pi))^2 \right]} \sinh(2\pi x) - \frac{1}{2} c^2 x^2 \\
&- \frac{1}{16\pi^2} c^2 \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \left[\cos(2\pi x) + 2\pi x \cdot \sin(2\pi x) \right] + c^2 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4\pi^2} \cos(2\pi x) \right]
\end{aligned} \tag{II.90}$$

$g_1(x)$ S'écrit sous forme :

$$g_1(x) = B_1(-1+2\pi x) \sin(2\pi x) + B_2 \cos(2\pi x) + B_3 \sinh(2\pi x) + B_4 \cosh(2\pi x) + B_5 \tag{II.91}$$

Où B_j , $j = 1, \dots, 5$

Sont donnés par :

$$B_1 = -\frac{c^2(Pr+1)}{16\pi Pr} \tag{II.92}$$

$$B_2 = -\frac{c^2 \left[2(Pr+1)(\cos(2\pi)-1) - \pi \sinh(2\pi)(5Pr+1) \right]}{16Pr \pi^2 [\cosh(2\pi)-1]} \tag{II.93}$$

$$B_3 = -c^2 \frac{(5Pr+1)}{16Pr\pi} \quad (\text{II.94})$$

$$B_4 = \frac{c^2}{16Pr\pi} \frac{(5Pr+1)\sinh(2\pi)}{(-1+\cosh(2\pi))} \quad (\text{II.95})$$

$$B_5 = c^2 \frac{[(Pr+1)(\cosh(2\pi)-1) - \pi \sinh(2\pi)(5Pr+1)]}{8Pr\pi^2(-1+\cosh(2\pi))} \quad (\text{II.96})$$

Finalemment :

$$\begin{aligned} g_1(x) = & -\frac{c^2(Pr+1)}{16\pi Pr}(-1+2x)\sin(2\pi x) - \frac{c^2[2(Pr+1)(\cos(2\pi)-1) - \pi \sinh(2\pi)(5Pr+1)]}{16Pr\pi^2[\cosh(2\pi)-1]}\cos(2\pi x) \\ & -c^2 \frac{(5Pr+1)}{16Pr\pi} \sinh(2\pi x) + \frac{c^2}{16Pr\pi} \frac{(5Pr+1)\sinh(2\pi)}{(-1+\cosh(2\pi))} \cosh(2\pi x) \\ & +c^2 \frac{[(Pr+1)(\cosh(2\pi)-1) - \pi \sinh(2\pi)(5Pr+1)]}{8Pr\pi^2(-1+\cosh(2\pi))} \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

Enfin, le problème d'ordre (3) $o(\varepsilon^3)$ est donné par :

$$f_2^{(4)} - Ra_0 g_2' = Ra_2 g_0 + Pr^{-1} (f_0 f_1''' + f_1 f_0''' - f_0' f_1'' - f_1' f_0'') \quad (\text{II.98})$$

$$g_2'' - f_2' = f_0 g_1' + f_1 g_0' - f_0' g_1 - f_1' g_0 \quad (\text{II.99})$$

$$f_2 = f_2' = g_2 = 0 \quad x = 0,1 \quad (\text{II.100})$$

Avec :

$$f_2(0) = f_2(1) = 0$$

$$g_2(0) = g_2(1) = 0$$

$$f_2'(0) = f_2'(1) = 0$$

La résolution du système nous donne :

$$f_2(x) = \frac{1}{4} \left(\begin{aligned} & - \left[\sinh(2\pi)(Pr+2)\pi \left(Pr+\frac{1}{5}\right) \cosh(2\pi x) - (Pr+2)\pi(-1+\cosh(2\pi)) \right] \left[Pr+\frac{1}{5}\right] \sinh(2\pi x) \\ & + \frac{3}{2}(Pr+1) \left(\left[\left[\left(x^2+\frac{4}{9}-x\right)Pr+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x^2 \right] \pi^2 - \frac{4}{3}Pr-\frac{4}{3} \right] \cosh(2\pi) + \frac{1}{2}(Pr+1)\pi \sinh(2\pi) \right) \\ & + \left(\left[\left(-x^2+\frac{11}{9}+x\right)Pr-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3} \right] \pi^2 + \frac{4}{3}+\frac{4}{3}Pr \right) \left[-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cosh(4\pi)+\cosh(2\pi) \right] \\ & \cos(2\pi x) + \left(Pr+2\right) \left(Pr+\frac{1}{5}\right) \left[-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cosh(4\pi)+\cosh(2\pi) \right] \sin(2\pi x) + \frac{5}{2}\pi(Pr+1) \left(-\frac{1}{2}+x\right) \\ & \left(Pr+\frac{1}{5}\right) \cosh(2\pi) - \frac{5}{8}x(Pr+1) \cosh(4\pi) \pi \left(Pr+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{23}{40}+\frac{7}{8}Pr^2+\frac{37}{20}Pr\right) \sinh(2\pi) \\ & + \left(-\frac{23}{80}-\frac{7}{16}Pr^2-\frac{37}{40}Pr\right) \sinh(4\pi) - \frac{15}{8}(Pr+1)\pi \left(Pr+\frac{1}{5}\right) \left(x-\frac{2}{3}\right) \pi(-1+\cosh(2\pi)) \\ & \cosh(2\pi x) - \left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cosh(4\pi)+\cosh(2\pi)\right) \left(\begin{aligned} & \left(\sinh(2\pi)(Pr+2) \left(Pr+\frac{1}{5}\right) \sinh(2\pi x) \right) \\ & - \frac{1}{2}(-1+\cosh(2\pi)) \left(-\frac{7}{5}\right) + Pr^2 \\ & + \frac{14}{5}Pr \left(-\frac{1}{2}+x\right) \end{aligned} \right) \\ & \pi \sin(2\pi x) + \frac{5}{2} \left(\begin{aligned} & \left(\left(\frac{23}{50}+\frac{37}{25}Pr+\frac{7}{10}Pr^2\right) \cosh(2\pi) + x(Pr+1)\pi \left(Pr+\frac{1}{5}\right) \sinh(2\pi) - \frac{7}{10}Pr^2 \right) \\ & - \frac{23}{50} - \frac{37}{25}Pr \end{aligned} \right) \\ & \pi \sinh(2\pi x) - 4(Pr+1)(-1+\cosh(2\pi)) \left(\left(-x+x^2+\frac{1}{6}\right)Pr\pi^2 - \frac{1}{2}Pr - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right) c^3 \\
\hline
\left(\pi^2(-1+\cosh(2\pi))Pr^2(-3-\cosh(4\pi)+4\cosh(2\pi)) \right)$$

(II.100)

$$\begin{aligned}
g_2(x) = \frac{1}{2} c^3 & \left(\left(\left(\left(\left(\left(\Pr - \frac{1}{2} \right) (-1 + \cosh(2\pi)) \pi \left(\Pr + \frac{1}{5} \right) \sinh(2\pi x) + \left(\Pr - \frac{1}{2} \right) \pi \left(\Pr + \frac{1}{5} \right) \sinh(2\pi) \cosh(2\pi x) \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& + \left(-\frac{3}{8} (\Pr + 1) \left(\left(x^2 + \frac{4}{9} - x \right) \Pr + \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} x^2 \right) \pi^2 + \frac{7}{20} + \frac{31}{20} \Pr - 2 \Pr^2 \right) \cosh(2\pi) \right. \\
& + \frac{17}{16} \left(-\frac{3}{17} + \Pr^2 - \frac{2}{17} \Pr \right) \pi \sinh(2\pi) + \frac{3}{8} \left(\left(-x - \frac{11}{9} + x^2 \right) \Pr - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} \right) (\Pr + 1) \pi^2 \\
& \left. \left. \left. \left. \left. - \frac{31}{20} \Pr + 2 \Pr^2 - \frac{7}{20} \right) \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cosh(4\pi) + \cosh(2\pi) \right) \sin(2\pi x) - \frac{5}{8} \pi \right. \right. \right. \\
& \left. \left(\left(-(\Pr + 1) \pi \left(-\frac{1}{2} + x \right) \right) \left(\Pr + \frac{1}{5} \right) \cosh(2\pi)^2 + \frac{1}{4} x (\Pr + 1) \cosh(4\pi) \pi \left(\Pr + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{23}{20} \Pr^2 - \frac{47}{50} \Pr - \frac{33}{100} \right) \right) \right) \\
& \sinh(2\pi) + \left(\frac{7}{40} \Pr^2 + \frac{23}{200} + \frac{37}{100} \Pr \right) \sinh(4\pi) + \frac{7}{4} (\Pr + 1) \pi \left(x - \frac{4}{7} \right) \left(\Pr + \frac{1}{5} \right) \cosh(2\pi) - \frac{1}{4} \\
& \left(\left(\frac{3}{2} \Pr - \frac{1}{2} \right) \sinh(2\pi) + x (\Pr + 1) \pi \right) \left(\Pr + \frac{1}{5} \right) \cosh(4\pi) + \left(\frac{89}{100} \Pr + \frac{61}{200} - \frac{31}{40} \Pr^2 \right) \sinh(2\pi) \right) \sinh(2\pi x) \\
& \left. \left. \left. \left. \left. + \left(-\frac{23}{200} - \frac{37}{100} \Pr - \frac{7}{40} \Pr^2 \right) \sinh(4\pi) - \frac{3}{4} (\Pr + 1) \pi \left(x - \frac{2}{3} \right) \right) \right. \right. \right. \\
& + \left(\left(\left(\frac{42}{25} \Pr - \frac{4}{5} \Pr^2 + \frac{14}{25} \right) \cosh(2\pi) + x (\Pr + 1) \pi \left(\Pr + \frac{1}{5} \right) \sinh(2\pi) + \frac{4}{5} \Pr^2 - \frac{14}{25} - \frac{42}{25} \Pr \right) \cosh(2\pi x) \right) \\
& \left. \left. \left. \left. \left. - \frac{8}{5} (-1 + \cosh(2\pi)) \left(\left(\frac{3}{10} + \Pr^2 - \frac{11}{10} \Pr \right) \cosh(2\pi x) - \Pr - 1 \right) \left(-\frac{1}{2} + x \right) \right) \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cosh(4\pi) + \cosh(2\pi) \right) \right) \right) \right) \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left(\pi^3 \Pr^2 (-1 + \cosh(2\pi)) (-3 - \cosh(4\pi) + 4 \cosh(2\pi)) \right) \right) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

(II.101)

$$Ra_2 = -\frac{5c^2 \pi^2}{\Pr^2} \left[\frac{\pi (5\Pr + 1) (\Pr - 1) \sinh(2\pi)}{5(\cosh(2\pi) - 1)} - \left(\frac{23}{10} \Pr^2 + \frac{11}{25} \Pr + \frac{19}{50} \right) \right] \quad (II.102)$$

II.8.conclusion :

dans ce chapitre nous avons étudié un problème dans la convection naturel (modèle d'instabilité de Rayleigh-bénard) c'est le problème d'ostroumov ,au début nous avons défini ce modèle et nous représente par un système d'équation mathématique qui traduire cette expérience a partir l'équation de conservation de masse ,la conservation de la quantité de mouvement et d'énergie ,puis nous avons utilisé les technique qui permettent a simplicité ces équations comme l'approximation de boussinesq et l'état adimensionnel et l'état de perturbation . Ensuit ostroumov trouve les solutions exactes et stables, et le seuil d'instabilité avec succès, le dernier parti de travail est d'utilisée l'approximation de la fonction de courant et la température avec les développements asymptotique d'une petite perturbation pour trouver les solutions faiblement non linéaire stable au régime super critique.

Chapitre III

Evolution de la fonction du courant, Température et nombre de Rayleigh en fonction de Prandtl

III.1-Introduction : Dans ce chapitre, nous allons discuter les résultats obtenues en utilisant un développement asymptotique jusqu'à l'ordre trois. Nous allons commenter les lignes du courant ainsi que les températures et nous terminerons notre analyse par l'évolution du nombre de Rayleigh en fonction du nombre de Prandtl.

III.2-Evolution de la fonction du Courant

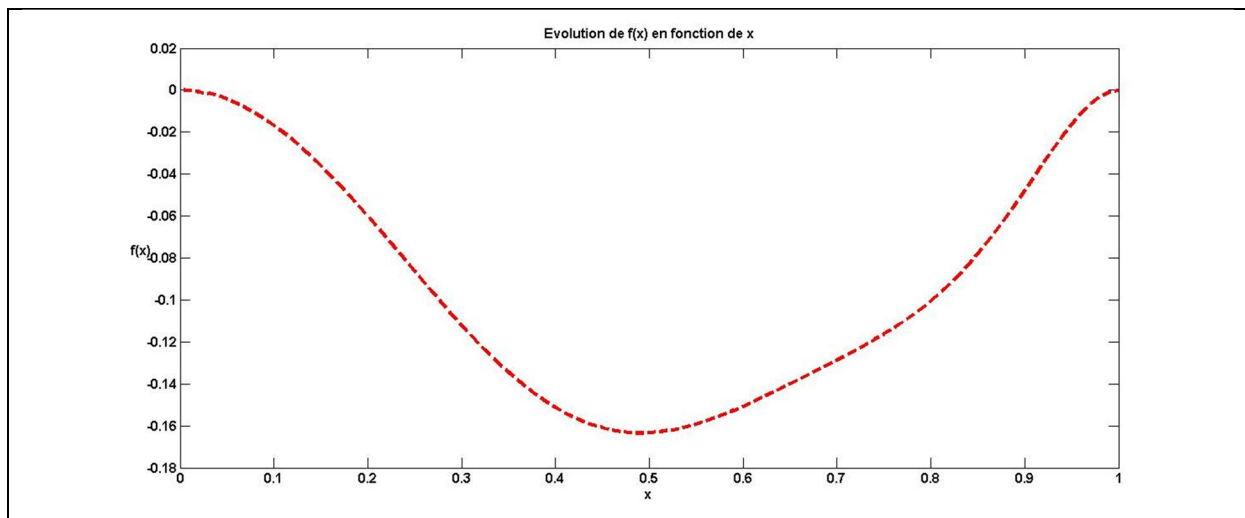


Figure III.1 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour $Pr=0.7$ et $\epsilon=0.1$

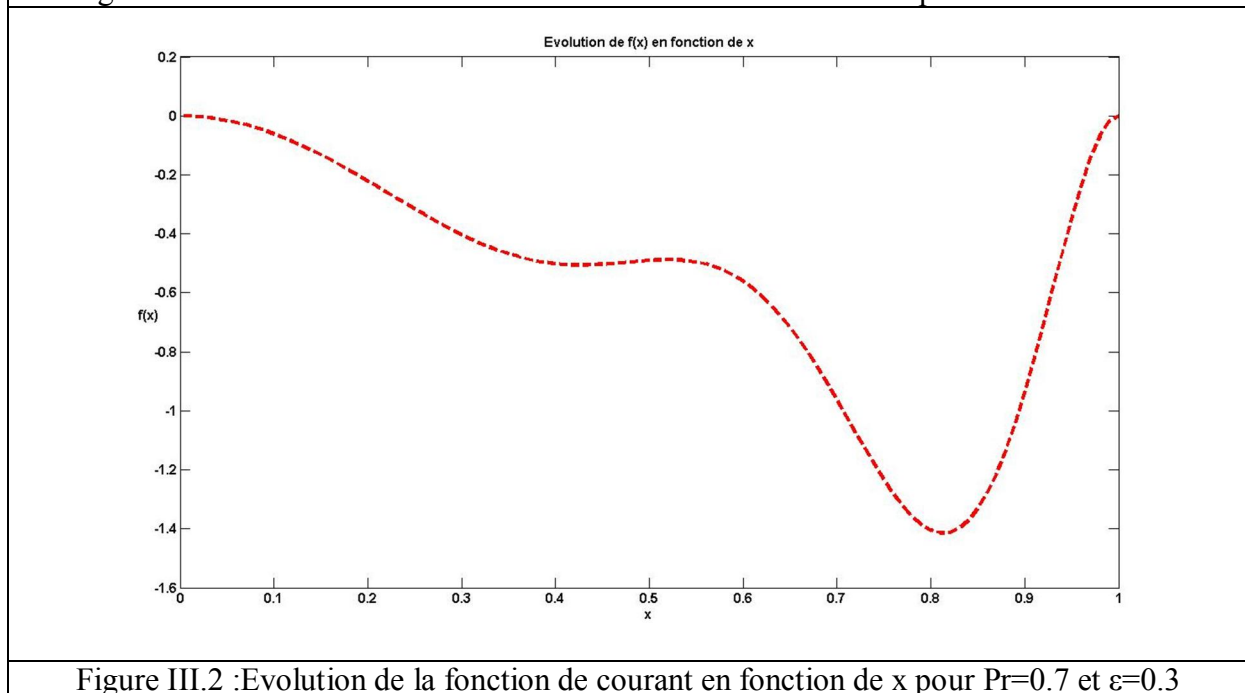


Figure III.2 : Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour $Pr=0.7$ et $\epsilon=0.3$

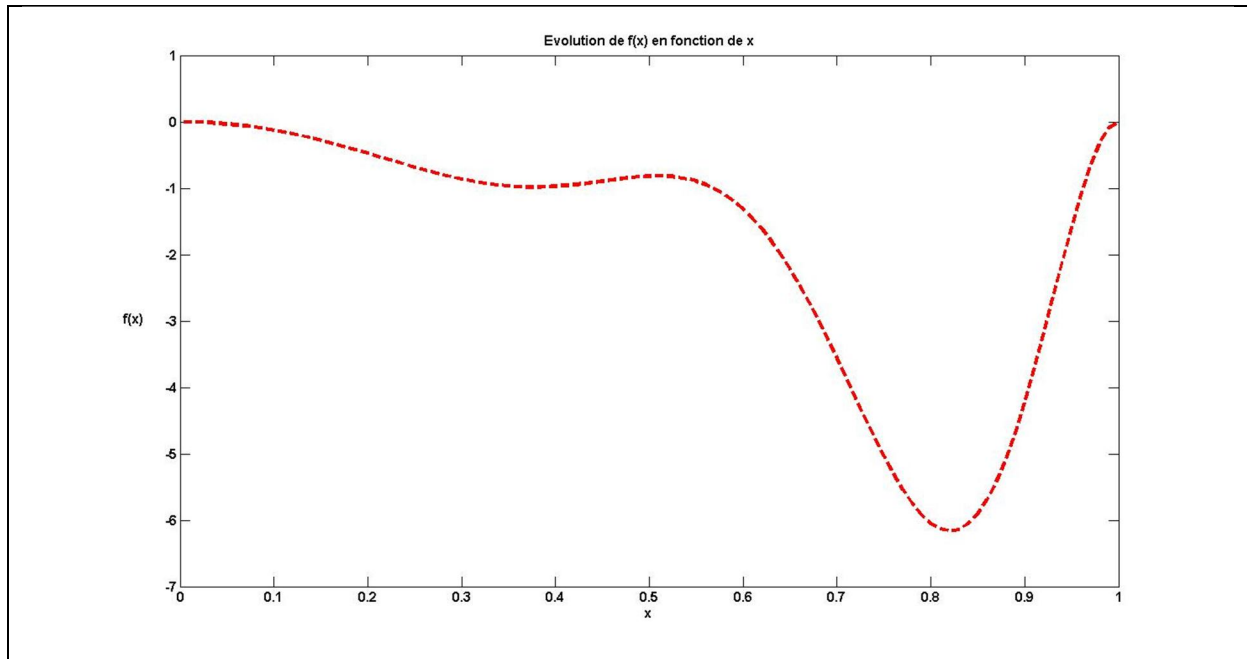


Figure III.3 :Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour $Pr=0.7$ et $\epsilon=0.5$

Lorsqu'on a un fluide de faible nombre de Prandtl et pour une petite perturbation (Figure II.1) la fonction de courant décroît jusqu'au niveau de la partie gauche de la cellule et croît dans la partie droite, ceci indique que la vitesse longitudinale décroît et s'annule au milieu de la cellule et le fluide repart après avec une vitesse positive. Lorsque le paramètre de perturbation augmente, le point de stagnation se décale vers la droite de la cellule (Figure III.2 et III.3).

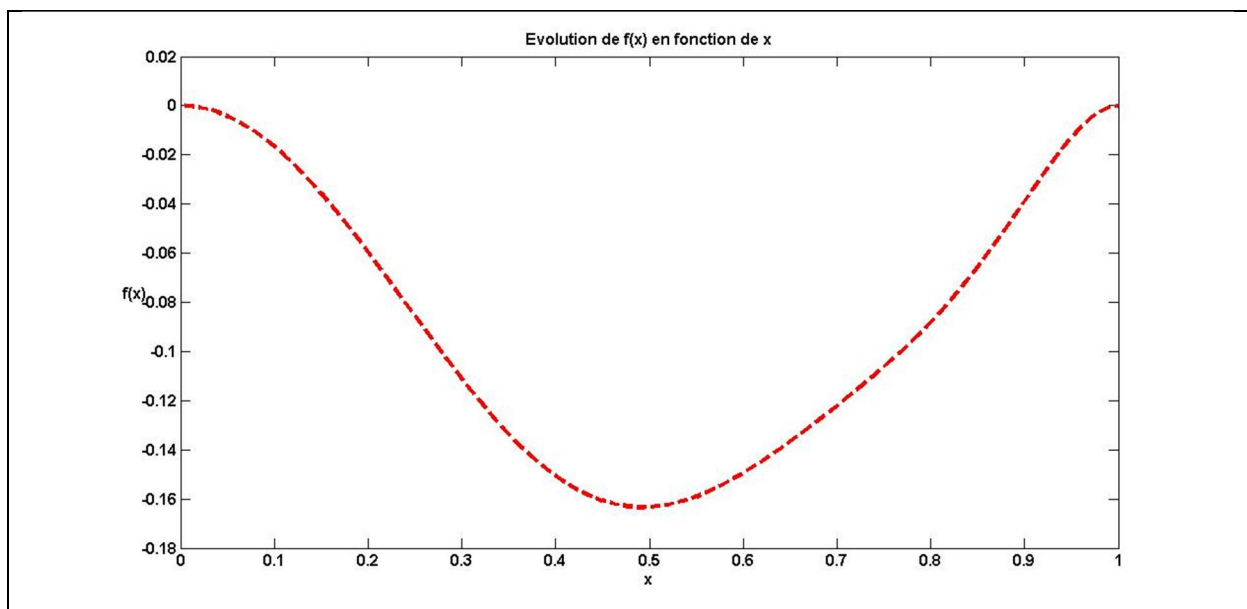


Figure III.4 :Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour $Pr=1.0$ et $\epsilon=0.1$

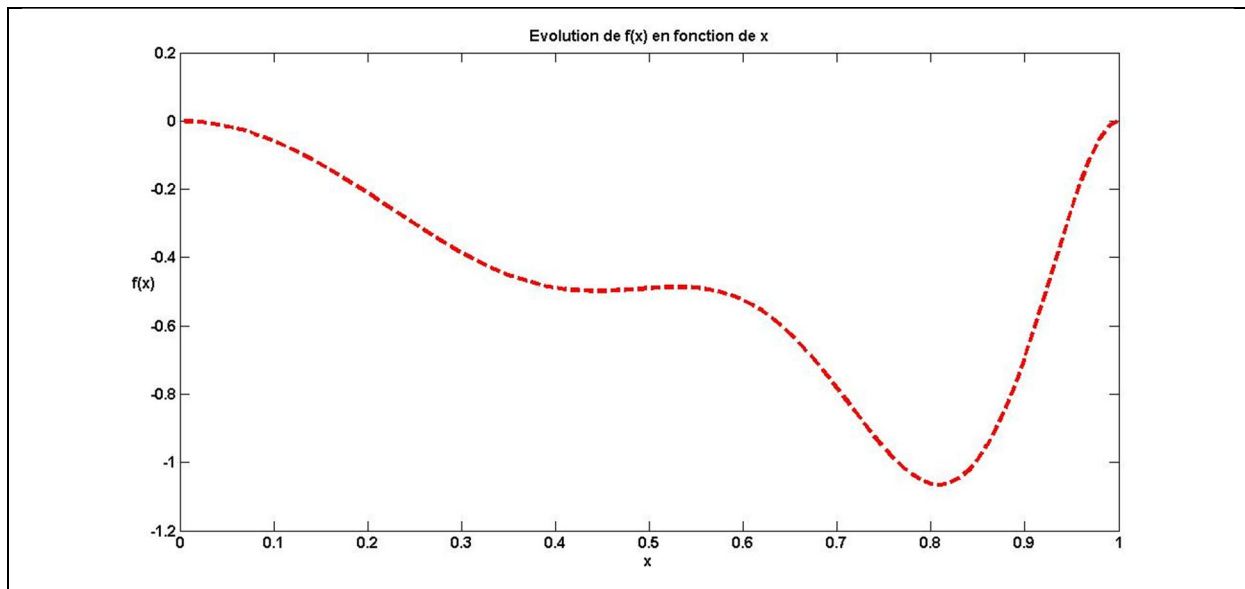


Figure III.5 :Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour $Pr=1.0$ et $\varepsilon=0$.

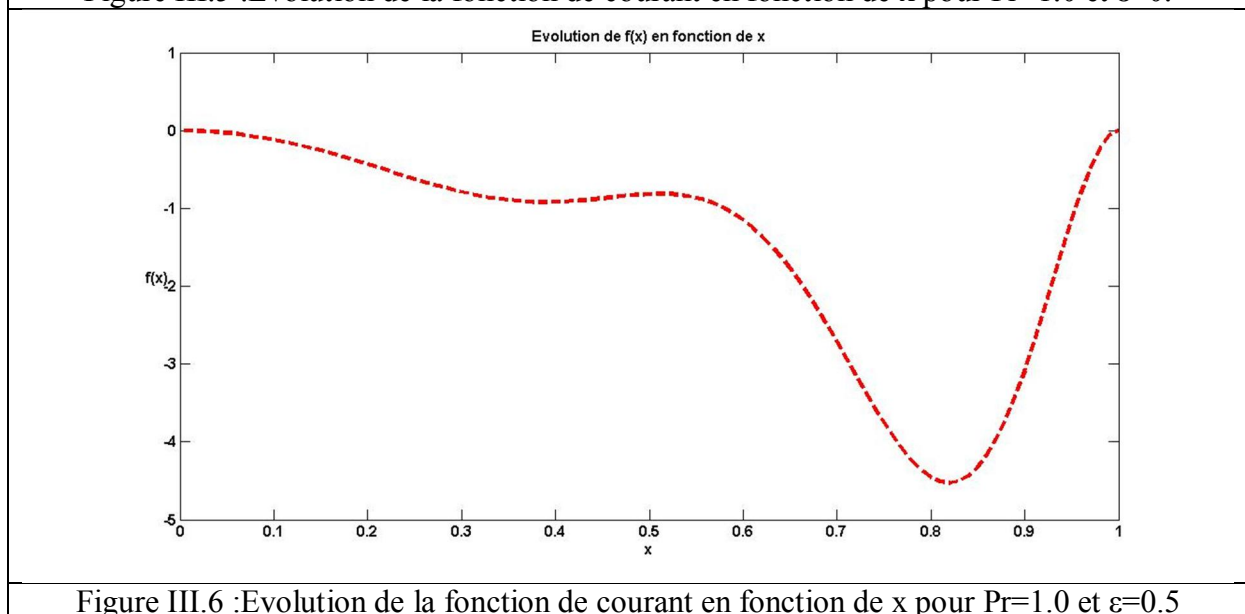


Figure III.6 :Evolution de la fonction de courant en fonction de x pour $Pr=1.0$ et $\varepsilon=0.5$

Lorsqu'on augmente le nombre de Prandtl, on remarque la même configuration pour les faibles perturbations (Figure III.4) et pour les perturbations assez importantes (Figure III.5) et (Figure III.6)

Ces résultats montrent que le nombre de Prandtl n'a pas un effet significatif sur l'évolutions des vitesses longitudinales du fluide.

III.3-Evolution de la Température

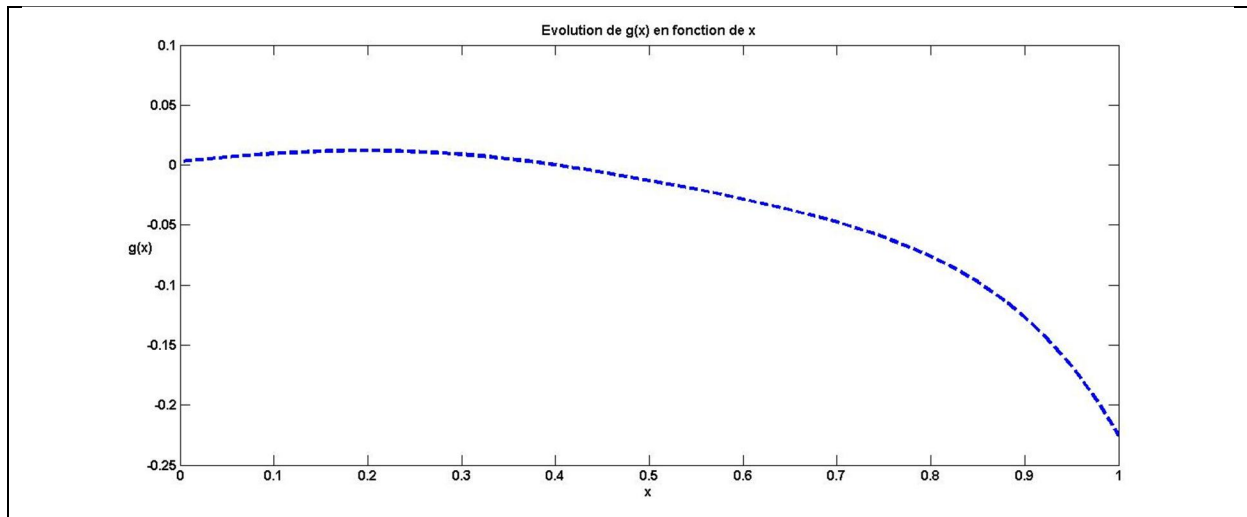


Figure III.7 : Evolution de la température en fonction de x pour $Pr=0.7$ et $\epsilon=0.1$

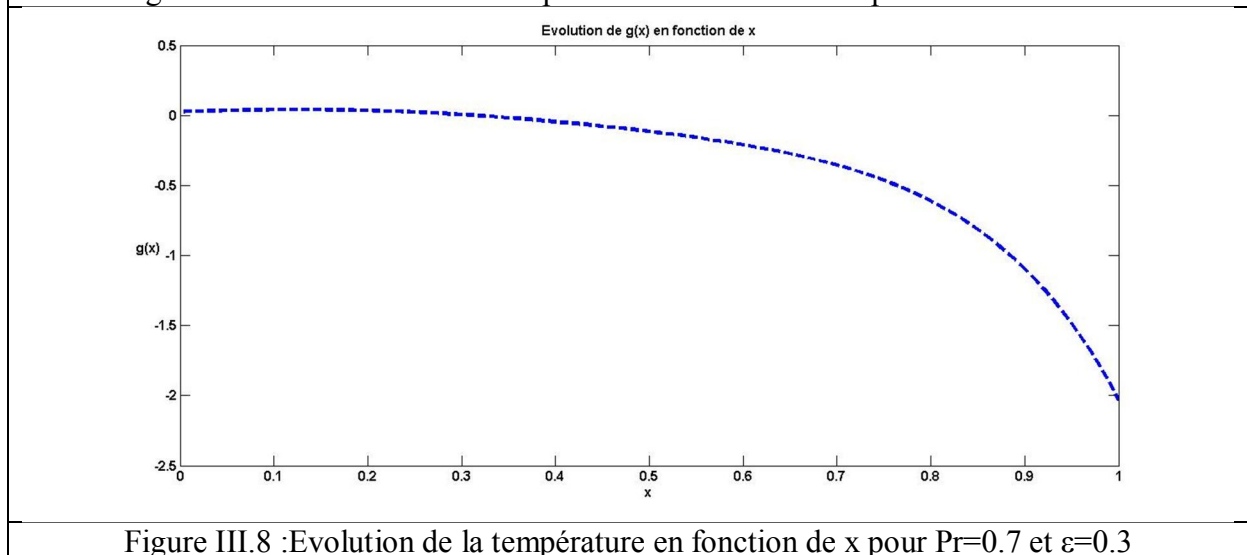


Figure III.8 : Evolution de la température en fonction de x pour $Pr=0.7$ et $\epsilon=0.3$

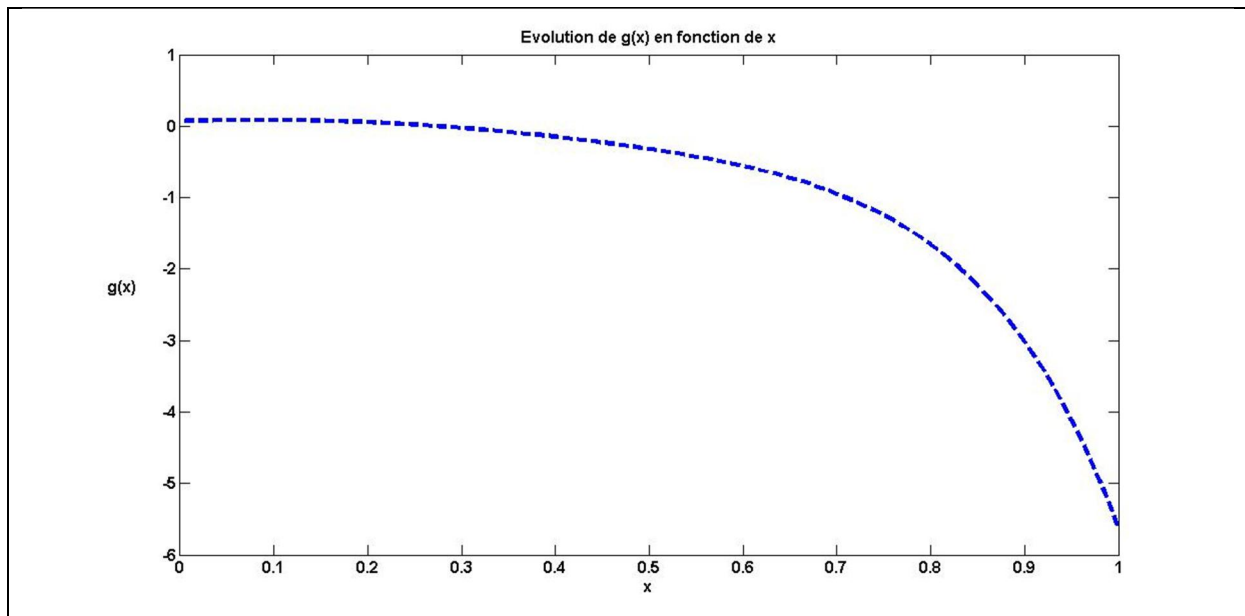


Figure III.9 :Evolution de la température en fonction de x pour $Pr=0.7$ et $\varepsilon=0.5$

L'évolution de la température en fonction de la coordonnée longitudinale montre que ce dernier décroît lentement à l'entrée de la couche et cette décroissance s'accélère à la sortie de la couche. Cette évolution n'est pas influencée par la variation du paramètre de perturbation

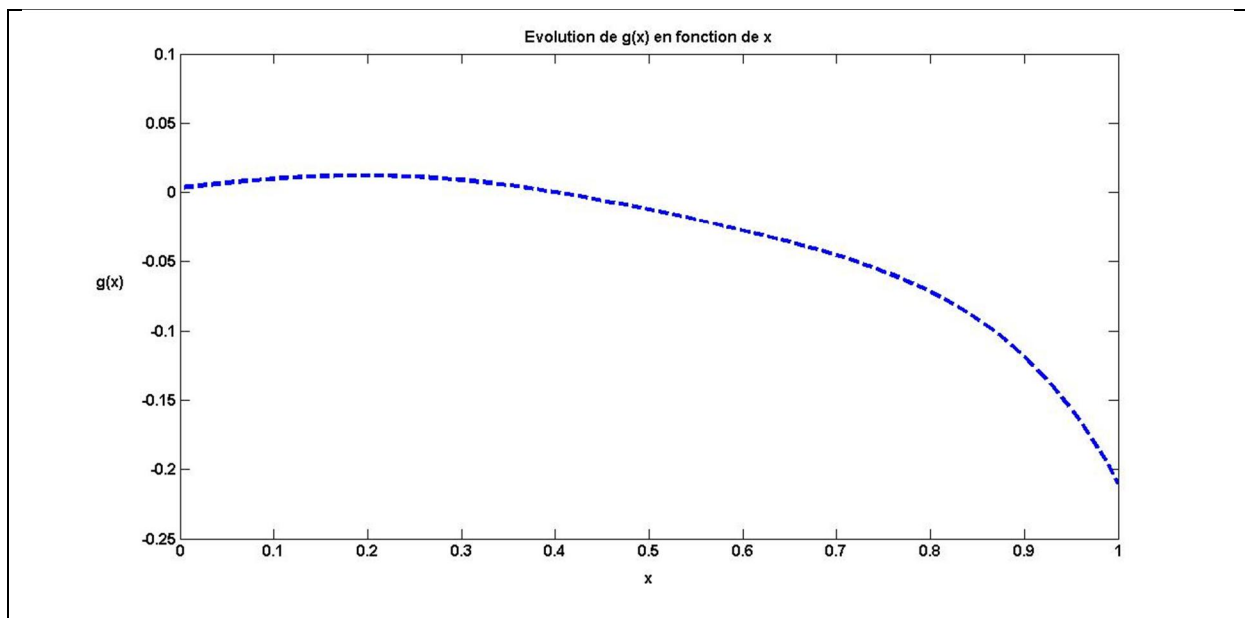


Figure III.10 :Evolution de la température en fonction de x pour $Pr=1.0$ et $\varepsilon=0.1$

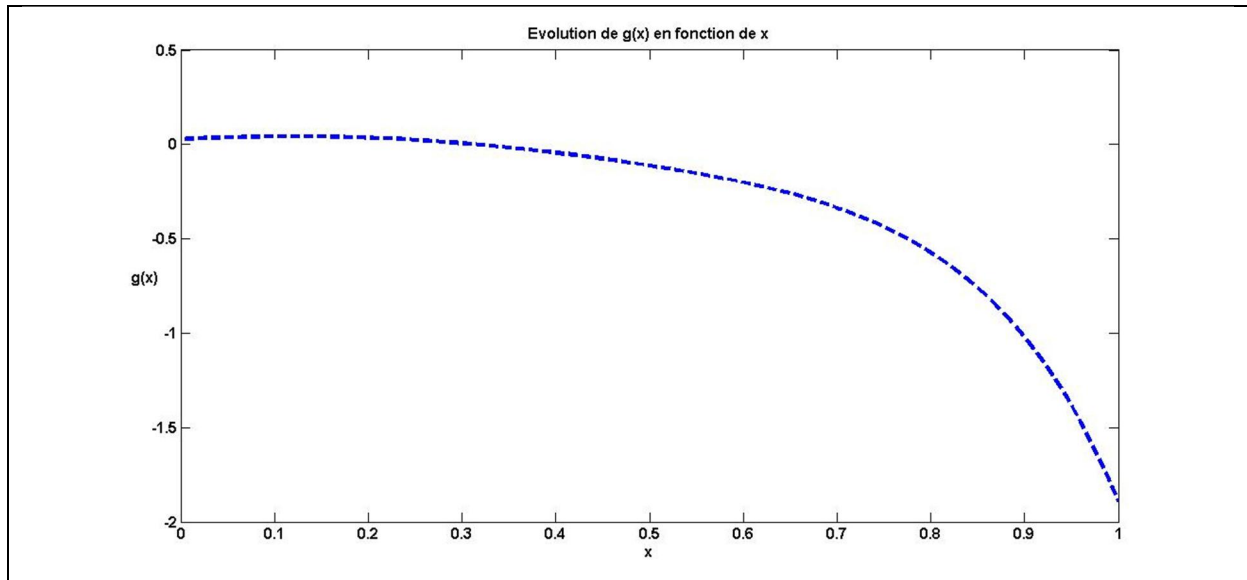


Figure III.11 :Evolution de la température en fonction de x pour Pr=1.0 et $\epsilon=0.5$

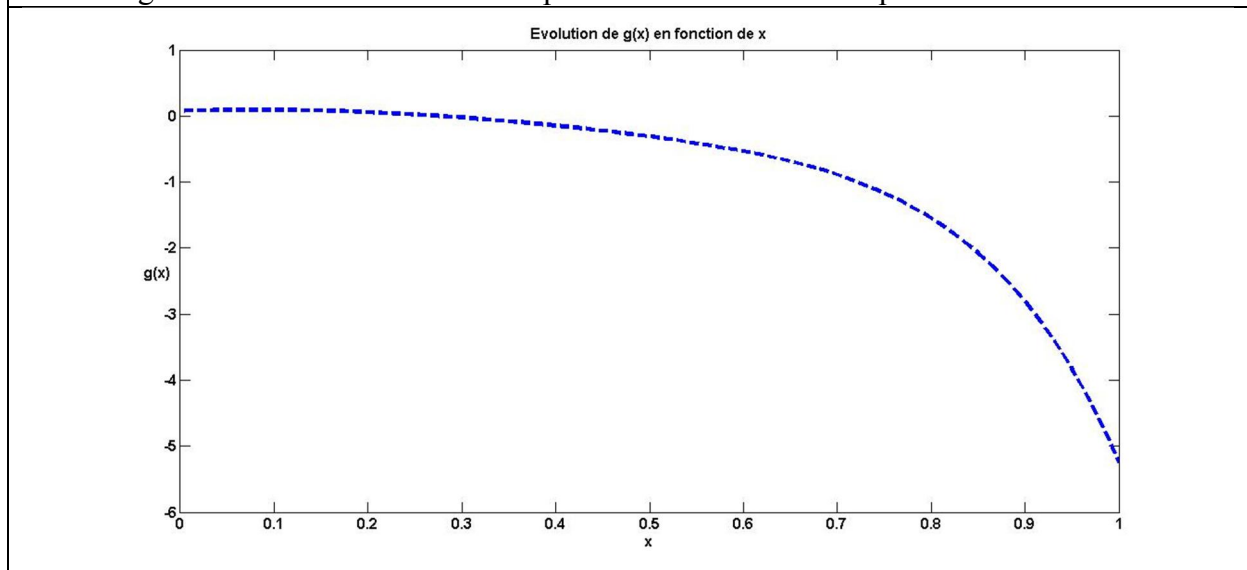


Figure III.12 :Evolution de la température en fonction de x pour Pr=1.0 et $\epsilon=0.5$

III.4-Evolution de la Rayleigh en fonction de Prandtl

Dans ce troisième paragraphe, nous avons étudié l'évolution du nombre de Rayleigh lorsque le nombre de Prandtl varie, les figures (III.13) – (III.15) montrent que le nombre de Rayleigh décroît rapidement lorsque le nombre de Prandtl augmente et il se stabilise aux grands nombres de Prandtl. La décroissance est de plus en plus abrupte lorsque le paramètre de perturbation augmente.

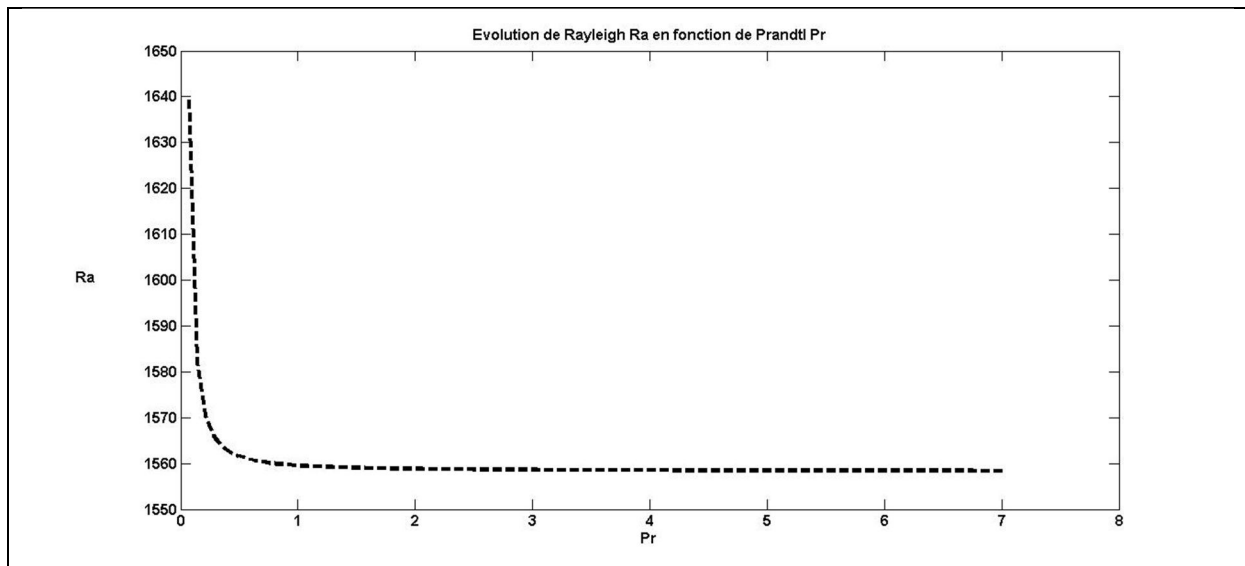


Figure III.13 : Evolution de Rayleigh en fonction de Prandtl $\epsilon=0.1$

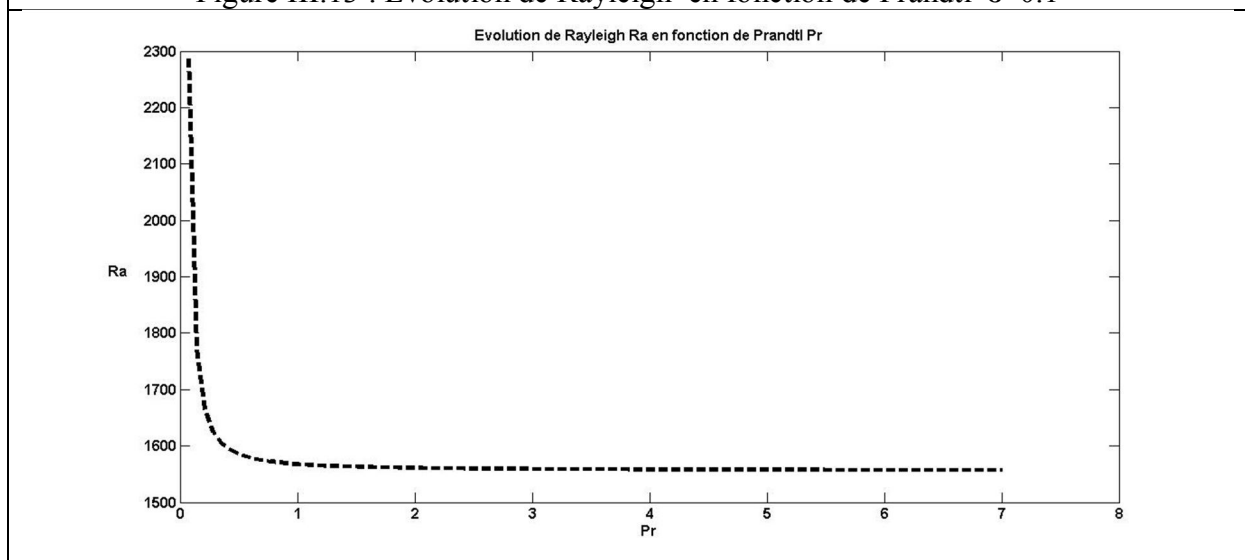


Figure III.14 : Evolution de Rayleigh en fonction de Prandtl $\epsilon=0.3$

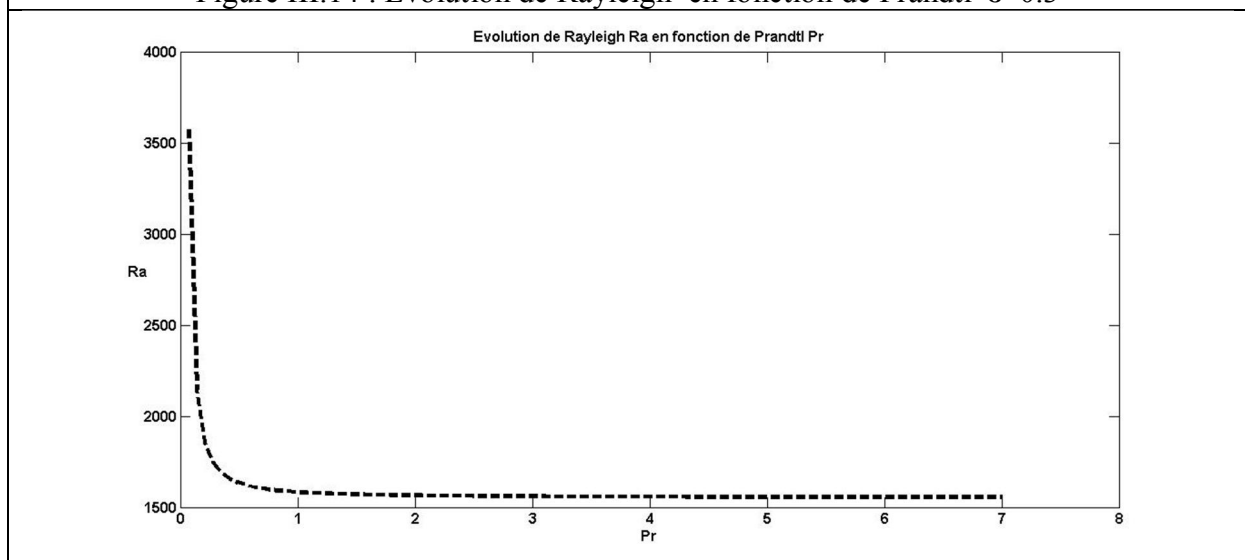


Figure III.15 : Evolution de Rayleigh en fonction de Prandtl $\epsilon=0.5$

III.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons analysé quelques résultats issus de la théorie asymptotique développée afin de reconstruire les solutions du problème posé lorsqu'une couche fluide est soumise à un gradient thermique horizontal. Les résultats montrent que les vitesses longitudinales dépendent du paramètre de perturbation, ce qui implique que les termes d'ordre supérieur ont une influence sur le point de stagnation des particules fluides. Pour ce qui est de la température, son évolution reste quasi-indépendante du paramètre de perturbation. Enfin, le Nombre de Rayleigh qui dépend du nombre de Prandtl, décroît rapidement lorsque le dernier augmente et se stabilise pour les grands nombres de Prandtl

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a mené une étude théorique et numérique pour analyser les solutions et étudier la stabilité de la convection dans une couche fluide verticale (problème d'Ostroumov), lorsque la couche de fluide est soumise à un gradient de température,

Le mouvement d'un fluide dépend de plusieurs paramètres de contrôle (nombre de Rayleigh, nombre de Prandtl...) et des conditions aux limites. Ces systèmes sont gouvernés par trois équations : l'équation de conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement, et l'équation d'énergie.

Pour un fluide de faible nombre de Prandtl et pour une petite perturbation, la fonction de courant dépend fortement du paramètre de perturbation alors que le nombre de Prandtl n'a pas un effet significatif sur l'évolution des vitesses

L'évolution de la température évolution n'est pas influencée par la variation du paramètre de perturbation.

Le nombre de Rayleigh décroît rapidement lorsque le nombre de Prandtl augmente Et il se stabilise aux grands nombres de Prandtl. La décroissance est de plus en plus abrupte lorsque le paramètre de perturbation augmente.

References

- [1] R. R. Long Relation between Nusselt number and Rayleigh number in turbulent thermal convection, *J. Fluid Mech*, 73(3), pp 445-45, 1976.
- [2] C. S. Yih, Thermal instability of viscous fluids. *Quart. Appl. Math* 17, No. (1959).
- [3] J. W. S. Rayleigh, LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside. **Phil. Mag.** (32) (1916), pp 529-546.
- [4] J. R. A. Pearson, On convection cells induced by surface tension. **J. Fluid Mech.** (1958).
- [5] M. J. Block, Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film. **Nature** 178 (1956), pp 650-651.
- [6] G. A. Ostroumov, Natural convective heat transfer in closed vertical tube. **Izv. ESTATSV. Nauch. Inot. Perm. Univ.**, 12 (1947), pp 113.
- [7] V. S. Sorokin, Stationary motions in a fluid heated from below. **Prikl. Mat. Mekh** 8.2 (1954), pp 197-204.
- [8] C. Normand, Nonlinear convection in high vertical channels. *J. Fluid Mech.*, 143 (1984): pp. 223-242.
- [9] V. S. Sorokin, Variational Method in the theory of convection. *Prikl. Math. Mekh.* 17 (1953), pp 39-48.
- [10] A. B. Berman, Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.* 24, (1953), pp 1232-1235.
- [11] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Second ed. Cambridge University Press, 2004.
- Figure (4).**O.Thual**, instabilities hydrodynamiques, 6 mars 2018. P6
- Figure (5).**O.Thual**, instabilities hydrodynamiques, 6 mars 2018. P7
- Figure (6).**O.Thual**, instabilities hydrodynamiques, 6 mars 2018. P12
- Figure II.1 .**O.Thual**, instabilities hydrodynamiques, 6 mars 2018. P19
- FigureII.2.**O.Thual**, instabilities hydrodynamiques, 6 mars 2018. P18