

République Algérienne Démocratique
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPECIALITÉ : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

PAR :

LALAOUI YAHIA

OUARET YACINE

Thème

Etude de la torsion des cylindres hyper-élastiques en élastomères : Formulation de la variable torsion

Soutenu le 08/10/2020 devant le jury composé de:

Dr. K.YAYA

Président

Dr. S. BOUZIDI

Rapporteur

Dr. L.HIMED

Examinatrice

REMERCIEMENTS

Dieu merci

*Nous tenons à remercier Madame S. BOUZIDI, de nous avoir proposé ce sujet,
aussi*

*Monsieur K. YAYA, Professeur à l'université de Bejaia, d'avoir accepté de
présider*

le jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma gratitude.

*Nous remercions vivement Madame .HIMED,
pour l'honneur qui m'a fait en acceptant d'examiner nos
travail.*

*Nous remercions vivement Monsieur BRAHIMI, Doctorant à
l'université de Bejaia, qui nous a aidé pour réaliser la simulation numérique.*

*Nous tenons à remercier tous le personnel du département de Génie
Mécanique
et mes collègues.*

*Nous adressons un grand merci à nos familles
et nos amis qui nous ont soutenu en toute circonstance.*

*En fin, que tous ceux et toutes celles qui ont, de près ou de loin, un
rapport avec la réalisation de ce travail, selon le cas, trouvent l'expression de
nos sincères reconnaissances.*

Sommaire

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
-----------------------------	---

Chapitre I: Généralités sur les élastomères

Introduction.....	2
I.1 Généralités sur les élastomères	2
I.2 Classification des élastomères	2
I.2.1 Les élastomères à usage général.....	2
I.2.2 Les élastomères à usages spéciaux.....	3
I.2.3 Les caoutchoucs à usages très spéciaux	3
I.3 Les propriétés des élastomères.....	3
I.3.1 Propriétés chimiques	3
I.3.2 Propriétés physiques.....	4
I.3.3 Propriétés mécanique	4
I.3.3.1 Elasticité non linéaire.....	4
I.3.3.2 Incompressibilité.....	5
I.3.3.3 Viscoélasticité	5
I.3.3.4 Vieillessement	6
I.4 Conclusion	6

Chapitre II: Modélisation du comportement hyper-élastique des élastomères

Introduction.....	7
II.1 Rappels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations	7
II.1.1 Cinématique.....	7
II.1.2 Description du mouvement.....	7
II.1.3 Description des déformations	8
II.1.4 Description des contraintes.....	9
II.2 Equations d'équilibre.....	11
II.2.1 Configuration actuelle	12
II.2.2 Configuration de référence	12
II.3 Modélisation de Comportement hyper élastique	13
II.3.1 Loi de comportement hyper-élastique	13
II.3.2 Les modèles hyper-élastiques	14
II.3.2.1 Modèle de Mooney-Rivlin (1940)	14

II.3.2.2	Modèle d'Ogden (1972).....	14
II.3.2.3	Modèle néo-Hookéen (1943).....	14
II.3.2.4	Modèle du tube étendu (1999).....	15
II.4	Conclusion	15

Chapitre III: Etude de la torsion des cylindres hyper-élastiques

Introduction.....	16
III.1 Etude analytique.....	16
III.1.1 Formulation du problème	16
III.1.2 Loi de comportement d'un milieu incompressible	16
III.1.3 Contrainte équivalente de Von-Mises	20
III.1.4 Calcul de la force axiale et du moment résultant.....	20
III.2 Etude Numérique	21
III.2.1 Hypothèse de quasi-incompressibilité.....	21
III.2.2 Construction du modèle numérique.....	21
III.2.2.1 Choix du modèle de comportement	21
III.2.2.2 Présentation de la géométrie	22
III.2.2.3 Le maillage	22
III.2.2.4 Chargements et conditions aux limites	23
III.2.3 Résultats de la simulation numérique	24
III.2.4 Comparaison des contraintes radiales analytiques et numériques.....	40
III.2.5 Comparaison des contraintes analytiques et numériques	46
Conclusion	52
Conclusion générale.....	53
References bibliographiques	
Résumé.....	

Listes des figures

LISTE DES FIGURES

Figure I.1: Les chaînes macromoléculaires sont liées entre elles par des liaisons covalentes et des ponts soufre	4
Figure I.2: Courbe de traction à rupture d'un élastomère	5
Figure I.3: Essai de relaxation	6
Figure II.1: Configurations initiale et déformée	8
Figure II.2: Conditions aux limites dans les configurations de référence et actuelle	11
Figure III.1: Représentation du cylindre circulaire plein de section constante	16
Figure III.2 : Modèle étudié	22
Figure III.3: Modèle maillé	23
Figure III.4: Chargements et conditions aux limites	24
Figure III.5 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr}	25
Figure III.6 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr} suivant la trajectoire \mathcal{L}	25
Figure III.7 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$	26
Figure III.8 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}	26
Figure III.9 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz}	27
Figure III.10 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz} suivant la trajectoire \mathcal{L}	27
Figure III.11 : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta Z}$	28
Figure III.12 : Distribution des contraintes cisaillement $\sigma_{\theta Z}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}	28
Figure III.13 : Distribution des contraintes de Von Mises	29
Figure III.14 : Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire \mathcal{L}	29
Figure III.15 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr}	30
Figure III.16 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr} suivant la trajectoire \mathcal{L}	30
Figure III.17 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$	31
Figure III.18 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}	31
Figure III.19 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz}	32
Figure III.20 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz} suivant la trajectoire \mathcal{L}	32
Figure III.21 : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta Z}$	33
Figure III.22 : Distribution des contraintes cisaillement $\sigma_{\theta Z}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}	33
Figure III.23 : Distribution des contraintes de Von Mises	34
Figure III.24 : Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire \mathcal{L}	34
Figure III.25 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr}	35
Figure III.26 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr} suivant la trajectoire \mathcal{L}	35
Figure III.27 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$	36
Figure III.28 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}	36
Figure III.29 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz}	37
Figure III.30 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz} suivant la trajectoire \mathcal{L}	37
Figure III.31 : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta Z}$	38
Figure III.32 : Distribution des contraintes cisaillement $\sigma_{\theta Z}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}	38
Figure III.33 : Distribution des contraintes de Von Mises	39

Figure III.57: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$	51
Figure III.58: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=75^\circ$	51

Nomenclatures

Nomenclature :

(C_0) : Configuration initiale ;

(C_t) : Configuration actuelle ;

(Ω_0) : Volume occupé par le solide dans la configuration initiale ;

(Ω) : Volume occupé par le solide dans la configuration actuelle ;

\overrightarrow{dX} : Vecteur élémentaire dans la configuration initiale ;

\overrightarrow{dx} : Transformation de $d l$ dans la Configuration actuelle ;

\mathbf{F} : Opérateur gradient de la transformation

\mathbf{F}^T : Transposé opérateur gradient de la transformation ;

\mathbf{C} : Tenseur des déformations Green-Lagrange droit ;

\mathbf{E} : Tenseur des déformations Green-Lagrange ;

\mathbf{B} : Tenseur des déformations Green-Lagrange gauche;

\mathbf{A} : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi ;

$\boldsymbol{\sigma}$:Tenseur des contraintes de Cauchy ;

π : Premier Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.1) ;

S : Deuxième Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.2) ;

\mathbf{I} : Tenseur d'identité;

W : Potentiel élastique ;

μ_0 : Module de cisaillement du matériau;

D : Module d'incompressibilité de matériau ;

I_1 : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche \mathbf{B} ;

I_2 : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche \mathbf{B} ;

P : Pression hydrostatique;

ν : Coefficient de Poisson;

α : Angle de torsion;

Nomenclature

(Ω) : Volume occupé par le solide dans la configuration actuelle ;

(Ω_0) : Volume occupé par le solide dans la configuration initiale ;

μ_0 : Module de cisaillement du matériau;

(C_0) : Configuration initiale ;

(C_t) : Configuration actuelle (déformé) ;

I_1 : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche B;

I_2 : Premier invariant du tenseur des déformations de Green-Lagrange gauche B;

\overrightarrow{dX} : Vecteur élémentaire dans la configuration initiale ;

\overrightarrow{dx} : Transformation de $d1$ dans la Configuration actuelle ;

\mathbf{A} : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi ;

\mathbf{B} : Tenseur des déformations Green-Lagrange gauche;

\mathbf{C} : Tenseur des déformations Green-Lagrange droit ;

D : Module d'incompressibilité de matériau ;

\mathbf{E} : Tenseur des déformations Green-Lagrange ;

\mathbf{F} : Opérateur gradient de la transformation

\mathbf{F}^T : Transposé opérateur gradient de la transformation ;

\mathbf{I} : Tenseur d'identité;

P : Pression hydrostatique;

W : Potentiel hyper-élastique ;

\mathbf{S} : Deuxième Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.2) ;

α : Angle de torsion;

$\boldsymbol{\pi}$: Premier Tenseur de Poila-Kirchhoff (P.K.1) ;

$\boldsymbol{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Cauchy ;

ν : Coefficient de Poisson;

μ : la densité surfacique

INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les élastomères sont des polymères présentant des propriétés élastiques et sont souvent une alternative aux matériaux métalliques, En effet, ces matériaux supportent des grandes déformations réversibles, et sont dits hyper-élastiques.

L'objectif de ce modeste travail consiste à calculer les distributions des contraintes (radiales, circonférentielles, axiales, cisaillement et de Von Mises) dans un cylindre plein constitué d'un matériau hyper-élastique soumis à la torsion.

Ce mémoire est constitué d'une introduction générale, de trois chapitres et d'une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les élastomères (définition, classifications et propriétés mécaniques les plus connues).

Au deuxième chapitre, on présentera quelques lois de comportement hyper-élastiques des élastomères. En passant par les outils essentiels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations.

Dans le chapitre trois, nous approcherons notre problématique qui s'articule autour de deux parties principales :

- Dans la première partie, nous allons déterminer analytiquement les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, la variable torsion est supposé une fonction quelconque, et le potentiel hyper-élastique dépend des deux premières invariants du tenseur de Cauchy Green.
- La deuxième partie est consacrée à une étude numérique de la distribution des contraintes dans un cylindre en torsion pure. Notons que le modèle hyper-élastique utilisé dans l'étude est le modèle de Mooney-Rivlin. Une comparaison entre les résultats analytiques et numériques du modèle sera développée.

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les élastomères

Introduction

Les matériaux élastomères prennent une part de plus en plus importante dans un grand nombre d'industries comme par exemple l'automobile, l'aéronautique ou encore le génie civil.

Ce chapitre introductif a pour but d'analyser le comportement des matériaux type élastomère d'un point de vue phénoménologique.

I.1 Généralités sur les élastomères [1]

Les élastomères appartiennent à la famille des hauts polymères. Macroscopiquement, ils se présentent sous forme de macromolécules constituées de longues chaînes de polymères, linéaires ou ramifiées, enchevêtrées les unes dans les autres. Compte-tenu de leur structure amorphe et pour des températures supérieures à leur température de transition vitreuse, les élastomères se caractérisent par une grande déformabilité et une haute élasticité caoutchoutique. En effet, l'étude des propriétés physiques des polymères, en fonction de la température, montre l'existence de plusieurs états de la matière :

- **État vitreux** : cet état caractérise généralement les verres organiques qui présentent une très faible déformabilité.
- **État de transition** : à ce stade, on est en présence de polymères linéaires thermoplastiques de type cellulosiques, polyamides, polyesters, polyvinyliques... Il s'agit comme son nom l'indique d'une phase de transition significative de l'état quasi-fragile à un état de grande déformabilité.
- **État caoutchoutique** : les élastomères sont caractéristiques de cet état. Ils possèdent une grande déformabilité et un comportement visqueux.
- **État d'écoulement** : le polymère, bien que encore solide, se comporte comme un fluide non-newtonien quasi-incompressible fortement visqueux.

I.2 Classification des élastomères [2]

Selon leur utilisation les élastomères sont classés en trois catégories :

I.2.1 Les élastomères à usage général

Sont caractérisés par leurs propriétés élastiques, il s'agit essentiellement des caoutchoucs naturels ou synthétiques (NR ou IR), des copolymères de butadiène styrène (SBR) et les polybutadiènes (BR). Ils sont utilisés pour diverses applications dans l'industrie automobile telles que les pneumatiques, supports moteurs, balais d'essuie-glaces ; ou pour le bâtiment

(étanchéité de toitures, câblerie, adhésifs, tuyaux...) ; ou encore pour le grand public telles que gants de ménage et de chirurgie, tétines, préservatifs, tapis de sol...

I.2.2 Les élastomères à usages spéciaux

Qui sont les copolymères ou ter-polymères d'éthylène propylène et diène (EPM et EPDM), les copolymères d'isobutylène isoprène, chlorés ou bromés (IIR, BIIR, CIIR), les copolymères de butadiène acrylonitrile (NBR), et les polychloroprènes (CR), pour des applications requérant des propriétés particulières telles que la résistance aux liquides agressifs (solvants, acides, huiles...), une stabilité vis-à-vis des hautes et basses températures et une bonne tenue au vieillissement. Ils sont utilisés dans divers secteurs d'activités (industrie pharmaceutique, nucléaire, automobile, aéronautique...)

I.2.3 Les caoutchoucs à usages très spéciaux

Qui rassemblent les caoutchoucs de silicone (VMQ, FVMQ), les élastomères fluorés (FKM), les polyéthylènes chlorés et chlorosulfonés (CM, CSM), les polyacrylates (ACM), les copolymères éthylène acétate de vinyle (EVM) et l'éthylène acrylate de méthyle (AEM), les caoutchoucs nitrile hydrogénés (HNBR) et les caoutchoucs d'épichlorhydrines (CO, ECO, GECO), les polyuréthanes malaxables (AU, EU), qui présentent d'excellentes tenues chimiques et thermiques, essentiellement utilisés en industries aéronautiques et spatiales, ainsi que dans l'industrie chimique.

I.3 Les propriétés des élastomères

I.3.1 Propriétés chimiques [3]

Les élastomères sont constitués de chaînes carbonées liées entre elles par des liaisons physiques (enchevêtrements) et chimiques (type liaisons covalentes) appelées aussi points de réticulation.

La cohésion du matériau est assurée par les nœuds de réticulation : c'est ce qu'on appelle l'état caoutchoutique. Les propriétés mécaniques restent stables jusqu'à ce que la Température soit suffisamment importante.

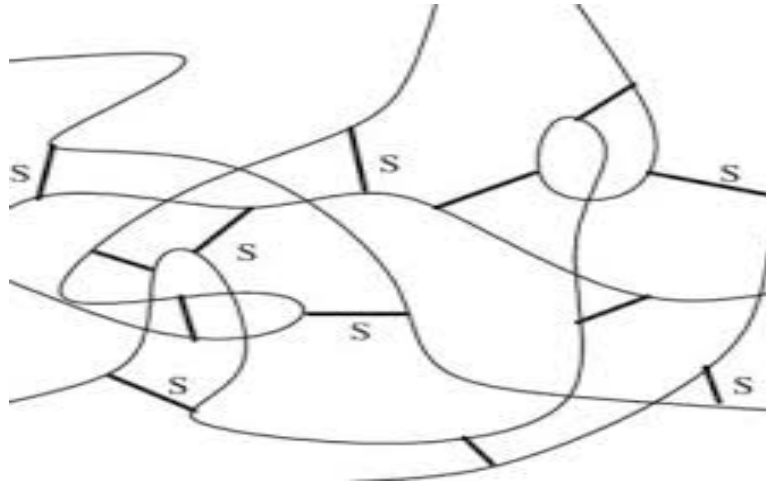


Figure I.1: Les chaînes macromoléculaires sont liées entre elles par des liaisons covalentes et des ponts soufre

I.3.2 Propriétés physiques [3]

Les élastomères appartiennent à la famille des hauts polymères. Macroscopiquement, ils se présentent sous forme de macromolécules constituées de longues chaînes de polymères, linéaires ou ramifiées, enchevêtrées les unes dans les autres. Compte-tenu de leur structure amorphe et pour des températures supérieures à leur température de transition vitreuse, les élastomères se caractérisent par une grande déformabilité et une haute élasticité caoutchoutique.

I.3.3 Propriétés mécanique

I.3.3.1 *Elasticité non linéaire* [4]

Les élastomères sont caractérisés par une capacité à supporter les grandes déformations de façon réversible. La (Figure I.2) représente la courbe de traction à rupture d'un élastomère. Celle-ci est clairement non-linéaire et est composée de trois zones distinctes :

- Les faibles déformations où l'énergie apportée est utilisée pour rompre les liaisons faibles (Van der Waals...) entre les chaînes ; cela se traduit par la courbure initiale de la courbe contrainte-déformation (10 – 25%).
- Les déformations moyennes où l'énergie apportée sert au des enchevêtrements des chaînes macromoléculaires (25 – 400%).

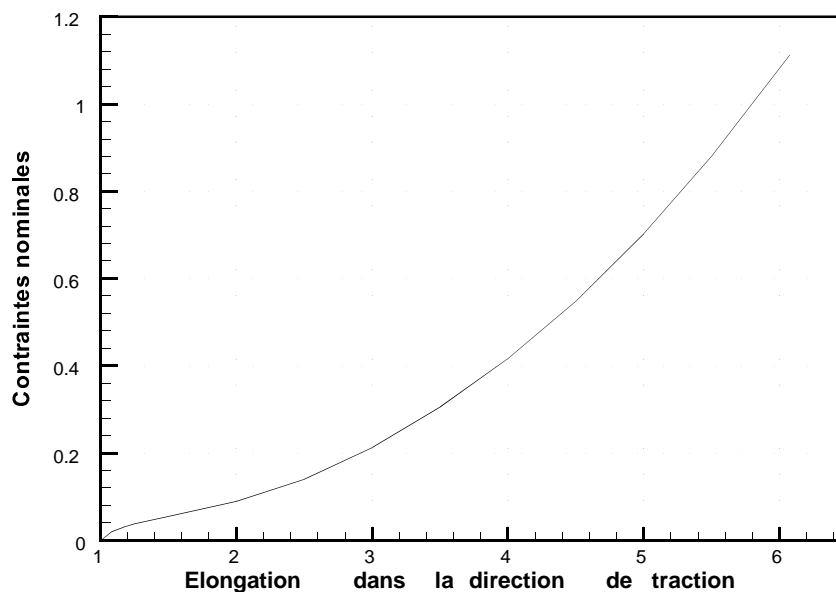


Figure 1.2: Courbe de traction à rupture d'un élastomère

- Les grandes déformations ou une énergie plus importante est nécessaire pour étendre les chaînes qui ont déjà été d'embrouillées, ce qui se traduit par un raidissement du matériau. Celui-ci est d'autant plus important que le matériau cristallise sous contraintes (Magill, 1995), ce qui est le cas des caoutchoucs naturels (> 400%).

1.3.3.2 Incompressibilité [5]

La troisième caractéristique bien connue du comportement des élastomères est l'incompressibilité. Il est convenu de considérer que pour des sollicitations ne faisant pas intervenir de pression hydrostatiques (trop importants), la déformation du matériau se fait sans variation de volume. En fait, cette caractéristique est une idéalisation de la réalité, puis qu'on montre expérimentalement que les élastomères sont compressibles.

1.3.3.3 Viscoélasticité [6]

La deuxième propriété bien connue des matériaux élastomères est leur caractère viscoélastique. classiquement, ce phénomène est mis en évidence par deux essais bien connus :

Les essais de Relaxation et de fluage. Dans le cas de la relaxation, on impose au matériau un Niveau constant de déformation et on observe la relaxation des contraintes (la diminution) au Cours du temps.

Le fluage est le phénomène dual : on impose au matériau un niveau constant de contrainte et on observe l'accroissement de la déformation. Bien évidemment, d'un point de vue

expérimental, il est plus aisé de mettre en place un essai à déplacement imposé (Relaxation) qu'à force imposée (fluage).

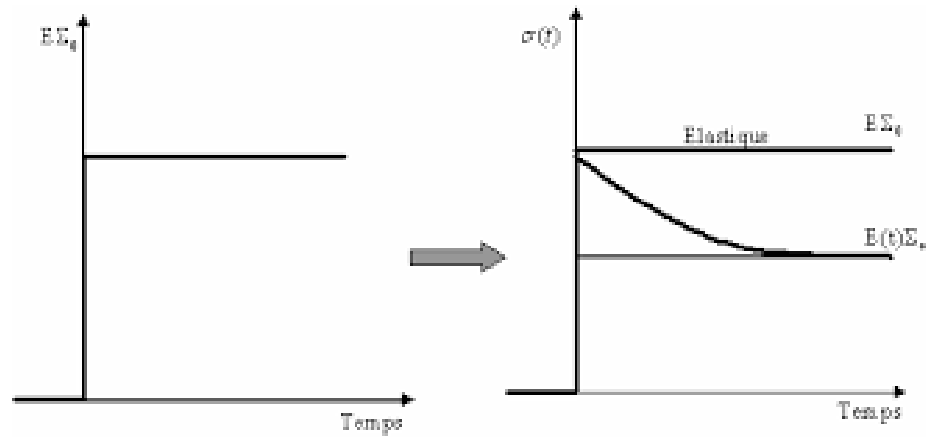


Figure I.3: Essai de relaxation

I.3.3.4 Vieillessement [3]

L'environnement peut être à l'origine des dégradations physico-chimiques de la structure des élastomères. Ceci se répercute sur leur comportement mécanique, entraînant en général une rigidification et une fragilisation du matériau.

I.4 Conclusion

Les élastomères présentent un comportement très complexe avec de nombreux phénomènes tels que la capacité à supporter de grandes déformations, la viscoélasticité avec la dépendance au temps et à la vitesse.

Chapitre II

Modélisation du comportement hyper-élastique des élastomères

Introduction

Ce chapitre fait le point sur les modélisations fréquemment proposées pour rendre compte des aspects de comportement des élastomères décrits dans le chapitre précédent.

Nous donnons un bref rappel sur la mécanique des milieux continus en grandes déformations. Ensuite on présentera quelques modèles théoriques du comportement hyper-élastique des élastomères de la littérature.

II.1 Rappels de la mécanique des milieux continus en grandes déformations

II.1.1 Cinématique [7]

Dans le cadre des transformations finies, il est important de distinguer la configuration initiale et la configuration actuelle (déformée). Le mouvement d'une particule d'un milieu continu peut être décrit soit dans la configuration lagrangienne, soit dans la configuration eulérienne. Les coordonnées lagrangiennes (ou matérielles) sont celles qui définissent la position du point matériel $P(X_1; X_2 \text{ et } X_3)$ du milieu continu (Ω), le repérage se faisant dans la configuration initiale (ou non déformée). Les coordonnées eulériennes (ou spatiales) sont celles qui définissent la position du point matériel $p(x_1; x_2 \text{ et } x_3)$ du milieu continu à l'instant courant, le repérage se faisant dans la configuration actuelle (ou déformée). Notons que dans le cas d'une transformation infinitésimale, les deux configurations sont confondues.

II.1.2 Description du mouvement [8]

Soit un solide déformable S , évoluant dans un repère R . L'ensemble des particules p constituant le solide déformable occupe, à chaque instant, un ensemble de positions dans l'espace voir figure (II.1). C'est la configuration du système à l'instant t . Nous utiliserons le même repère pour la configuration initiale et la configuration déformée.

On note C_0 la configuration initiale (ou le solide S occupe le volume Ω_0), et (C_t) la configuration actuelle à l'instant t (ou déformée), où le solide S occupe le volume ω . le vecteur position de la particule $P \in S$ à l'instant initial est noté \vec{X} . On note \vec{x} le vecteur position de cette particule à l'instant t .

Le mouvement du milieu continu est défini par la donnée de la fonction vectorielle :

$$X : \begin{cases} C_0 & \rightarrow C_t \\ \vec{X} & \rightarrow \vec{x} = x(\vec{X}; t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

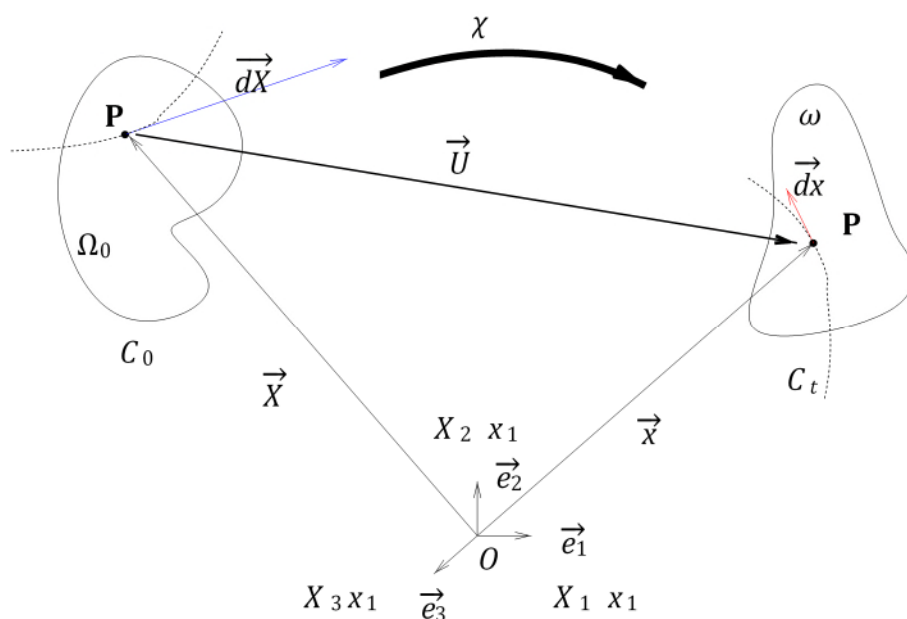


Figure II.1: Configurations initiale et déformée

L'équation II.1 définit la transformation faisant passer de la configuration de référence C_0 à la configuration (C_t). Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, ou tenseur tangent (voir figure (II.1)). Considérons un Vecteur \vec{x} dans la configuration initiale, son transformé dans la configuration actuelle S'obtient par la relation (II.2) :

$$\overrightarrow{dx} = \mathbf{F} \overrightarrow{dX} \quad (\text{II.2})$$

II.1.3 Description des déformations [8]

Pour caractériser les changements de forme entre les configurations C_0 et C_t , il faut caractériser les variations de longueur et les variations d'angle, soit, en fait, les variations de produit scalaire. On forme donc le produit scalaire de deux vecteurs matériels \overrightarrow{dx} et \overrightarrow{dy} et on examine sa variation en fonction des vecteurs initiaux \overrightarrow{dX} et \overrightarrow{dY} . Selon la configuration privilégiée, plusieurs mesures des déformations sont possibles :

Description lagrangienne

En configuration lagrangienne, on introduit le tenseur de Cauchy Green droit $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ symétrique et défini positif, qui caractérise les dilatations. Dans le cas où le milieu ne subit aucune transformation, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

Le tenseur de déformation de Green Lagrange, purement lagrangien, symétrique, relie à \mathbf{C} par

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Description eulérienne

De la même manière dans la configuration actuelle on introduit le tenseur de Cauchy Green gauche $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, symétrique et défini positif. Le tenseur de déformation associé, lié à la différence de produit scalaire, est le tenseur d'Euler-Almansi \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

II.1.4 Description des contraintes [9]

On introduit les tenseurs des contraintes usuels de la théorie des grandes déformations le tenseur des contraintes de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$ (eulérien) est défini par :

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.6})$$

t est le vecteur contrainte (effort mesuré par unité de surface définie instantanément) s'appliquant sur l'élément de surface ds de la configuration initiale de normale extérieure \vec{n} .

On peut lier la force élémentaire $\overline{d\vec{f}}$ de la configuration actuelle à l'élément d'aire ds de la configuration initiale, par la relation suivante :

$$\overline{d\vec{f}} = \vec{T} ds \quad (\text{II.7})$$

Il s'agit alors d'une description mixte. Le vecteur \vec{T} représente le vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff 1 (ou vecteur de Boussinesq). Le tenseur de contrainte associé est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{\pi}$ qui n'est ni lagrangien ni eulérien (tenseur hybride), tel que :

$$\overline{d\vec{f}} = \vec{T} ds = \boldsymbol{\pi} \vec{N} ds \quad (\text{II.8})$$

$\boldsymbol{\pi}$ n'est pas symétrique.

Pour avoir un tenseur complètement défini en fonction des variables lagrangiennes, on transporte la force $\overline{d\vec{f}}$ agissant sur le volume actuel vers la configuration initiale non déformée

$$\overrightarrow{df_0} = \mathbf{F}^{-1} \overrightarrow{df} \quad (\text{II.9})$$

$\overrightarrow{df_0}$ Est une force fictive agissant sur la surface initiale. Le tenseur de Piola Kirchhoff 2 est alors défini par :

$$\overrightarrow{df_0} = S \vec{N}. ds \quad (\text{II.10})$$

S est un être mathématique sans signification physique, mais il présente la particularité d'être symétrique.

Les trois tenseurs des contraintes sont reliés par la relation suivante :

$$J \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\pi}. \mathbf{F}^T = \mathbf{F} S \mathbf{F}^T \quad (\text{II.11})$$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{F} S \quad (\text{II.12})$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad (\text{II.13})$$

J : Jacobien de la transformation présenté.

En conclusion : On a rassemblé les différents tenseurs de contraintes et de déformations dans les deux configurations initiale et actuelle dans le tableau suivant :

Tableau II.1 : Récapitulatif des différents tenseurs de contraintes et de déformations dans les deux configurations initiale et actuelle

	Configuration (C0) initiale (libre de contraintes)	Configuration actuelle (Ct)
Tenseurs des déformations	<p>C : Tenseur des dilatations de Green-Cauchy droit, symétrique.</p> <p>E : Tenseur des Déformations de Green-Lagrange, symétrique.</p>	<p>B : Tenseur des déformations de Green-Cauchy gauche, symétrique.</p> <p>A : Tenseur des déformations d'Euler-Almansi, symétrique.</p>
Tenseurs des contraintes	<p>S : Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2, symétrique.</p>	<p>σ : Tenseur des contraintes de Cauchy, symétrique.</p>

II.2 Equations d'équilibre [10]

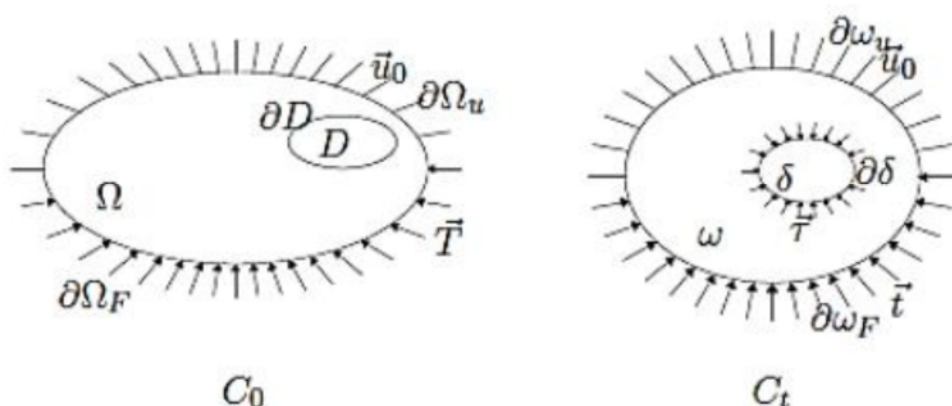


Figure II.2: Conditions aux limites dans les configurations de référence et actuelle

On définit la configuration actuelle C_t :

- ω , le domaine occupé par le solide dans cette configuration ;
- $\partial\omega$, sa surface ;
- $\partial\omega$ et $\partial\omega_f$ respectivement les sous domaines de $\partial\omega$ sur lesquels on applique un déplacement imposé \vec{u}_0 ou une densité surfacique de force par unité de surface déformée ($\partial\omega_u \cup \partial\omega_f = \partial\omega$ et $\partial\omega \cap \partial\omega = \emptyset$)

δ un élément de volume dans la configuration déformée ;

Et les efforts de cohésion exercés à travers l'élément de surface $\partial\delta$.

Dans la configuration de référence Ω , $\partial\Omega$, $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_f$, D et ∂D sont respectivement les transportés de t vers C_0 par l'intermédiaire de, ω , $\partial\omega$, $\partial\omega_u$, δ , et $\partial\delta$.

$\vec{\mu}$ est la densité surfacique de force exprimée dans C_0 .

II.2.1 Configuration actuelle

L'écriture de la conservation de la quantité de mouvement, traduisant la configuration actuelle, l'équilibre du sous domaine $\partial\delta$ s'écrit :

$$\int_{\partial\delta} \vec{t} \, ds + \int_{\delta} \rho \vec{f} \, dv = 0 \quad (\text{II.14})$$

Où ρ est la masse volumique dans la configuration actuelle, la densité massique de force. On obtient dans la configuration actuelle, en utilisant le théorème de la divergence, après avoir injecté l'équation σ dedans :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{\sigma} & \text{sur } \omega \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} & \text{sur } \partial\omega_f \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\omega_u \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

II.2.2 Configuration de référence

L'équilibre peut aussi être exprimé dans la configuration de référence. On note ∂u et ∂F les images respectives de $\partial\omega_u$ et $\partial\omega_f$ par l'application X^{-1} .

$$\begin{cases} \text{div } \vec{\pi} + \rho_0 \vec{f} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \vec{\pi} \cdot \vec{N} = \vec{T} & \text{sur } \partial\omega_f \\ \vec{u} = \vec{u}_0 & \text{sur } \partial\omega_u \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

II.3 Modélisation de Comportement hyper élastique [8]

Un matériau est élastique si le tenseur des contraintes de Cauchy à l'instant t dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant, ainsi la contrainte ne dépend pas du chemin suivi par la déformation, mais par contre le travail fourni par cette contrainte dépend généralement du chemin suivi. Un matériau élastique est dit hyper élastique si le tenseur des contraintes dérive d'une fonction d'énergie du matériau. Ceci implique que le travail mis en jeu pour aller d'un état de déformation à un autre ne dépend pas du chemin suivi. Pour écrire une loi de comportement hyper élastique, on postule ainsi l'existence d'une énergie libre w définie par unité de volume dans la configuration de référence.

II.3.1 Loi de comportement hyper-élastique [11]

Dans l'approche phénoménologique, le matériau est considéré comme un solide continu. Le comportement du matériau est régi par une relation non linéaire liant les contraintes et les déformations. Ces contraintes sont obtenues par dérivation d'un potentiel de déformation, noté W .

La contrainte dérive de la densité d'énergie de déformation est donnée la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{II.17})$$

Où P est la pression hydrostatique. Les densités d'énergie de Déformation W sont alors écrites en fonction des élongations principales $\lambda_1 ; \lambda_2$ et λ_3 (valeurs propres du tenseur \mathbf{C}) ou très souvent à partir des invariants $I_1 ; I_2$ et I_3 du tenseur des Dilatations de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} (ou \mathbf{C}). Les invariants s'expriment alors de la manière Suivante :

$$\begin{cases} I_1 = \text{Trace } \mathbf{B} \\ I_2 = \frac{1}{2} [\text{Trace } \mathbf{B}^2 - (\text{Trace } \mathbf{B})^2] \\ I_3 = \det \mathbf{B} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

On suppose l'existence du potentiel élastique W , qui est défini comme l'énergie volumique de déformation rapportée au volume initial.

Pour un matériau isotrope, l'énergie volumique de déformation W ne dépend que des trois Invariants : $I_1(\mathbf{C})$, $I_2(\mathbf{C})$ et $I_3(\mathbf{C})$ du tenseur de Green Cauchy droite \mathbf{C} , soit :

$W = W(I_1 ; I_2 ; I_3)$.

Il existe bon nombre de modèles hyper-élastique, dans la littérature, nous allons présenter les modèles fréquemment implémentés dans les codes de calculs par éléments finis.

II.3.2 Les modèles hyper-élastiques

II.3.2.1 Modèle de Mooney-Rivlin (1940) [12]

Mooney-Rivlin fut le premier à proposer un modèle hyper-élastique pour les élastomères. Après avoir étudié les réponses en traction et en cisaillement des élastomères, il propose la forme phénoménologique suivante pour l'énergie de déformation :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{II.19})$$

Ce modèle reste de loin le plus utilisé pour sa simplicité et sa capacité à refléter convenablement le comportement des élastomères pour des niveaux de déformation allant jusqu'à 100%.

II.3.2.2 Modèle d'Ogden (1972) [11]

C'est l'un des modèles le plus utilisé pour les très grandes déformations. Sa formulation consiste à remplacer les exposants entiers du développement de Rivlin par une série de puissances réelles des extensions principale, ces exposants réels deviennent alors des paramètres matériels à identifier. A la différence des formulations précédentes en invariants, le modèle d'Ogden s'écrit donc en termes d'extensions principales :

$$W = \sum_{n=1}^n \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n}) \quad (\text{II.20})$$

Où les constantes $(\mu_n ; \alpha_n)_{i=1 \dots n}$ sont les paramètres matériels. $\lambda_1 ; \lambda_2$ et λ_3 sont les valeurs propres du tenseur de dilatation de Green-Cauchy.

II.3.2.3 Modèle néo-Hookéen (1943) [11]

Le modèle hyper-élastique isotrope et incompressible le plus simple est le modèle Néo-Hookéen, ce modèle admet un unique paramètre matériel C_{10} . Il permet d'avoir une bonne corrélation pour des niveaux de déformation modères (jusqu'à 50%)

$$W = C_{10}(I_1 - 3)$$

II.3.2.4 Modèle du tube étendu (1999) [11]

Le dernier modèle présenté ici est proposé par Kaliske et Heinrich. Sa formulation repose sur la physique des réseaux polymères, et notamment sur les modèles dits « tubes » qui permettent de décrire le mouvement des chaînes polymères dans un réseau réticulé. Le modèle du tube étendu intègre assez simplement des résultats issus de la physique des polymères dans le cadre hyper-élastique. Ainsi, les auteurs proposent une densité d'énergie de déformation, alliant une fonction du premier invariant I_1 et une fonction de type Ogden, qui entre parfaitement dans le cadre mécanique tridimensionnel :

$$W = \frac{G_c}{2} \left[\frac{(1-\delta^2)(I_1-3)}{1-\delta^2(I_1-3)} + \ln[1 - \delta^2(I_1 - 3)] \right] + 2 \frac{G_e}{\beta^2} (\lambda_1^{-\beta} \lambda_2^{-\beta} - 3) \quad (\text{II.21})$$

Où les constantes, δ , β et G_e sont des paramètres matériaux.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement les résultats essentiels du formalisme de grandes déformations puis nous avons cité quelques modèles de comportement hyper-élastique des élastomères.

Chapitre III

Etude de la torsion des cylindres hyper-élastiques

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier théoriquement et numériquement la distribution des contraintes dans un cylindre plein en élastomère soumis à une sollicitation de torsion. Le modèle de Mooney-Rivlin a été considéré dans l'étude. Une comparaison des résultats de l'étude théorique et numérique a été effectuée à la fin du chapitre.

III.1 Etude analytique

III.1.1 Formulation du problème

On considère un cylindre de longueur initial L_0 , et de rayon initial R_0 , tel qu'il est montré sur la figure (III.1).

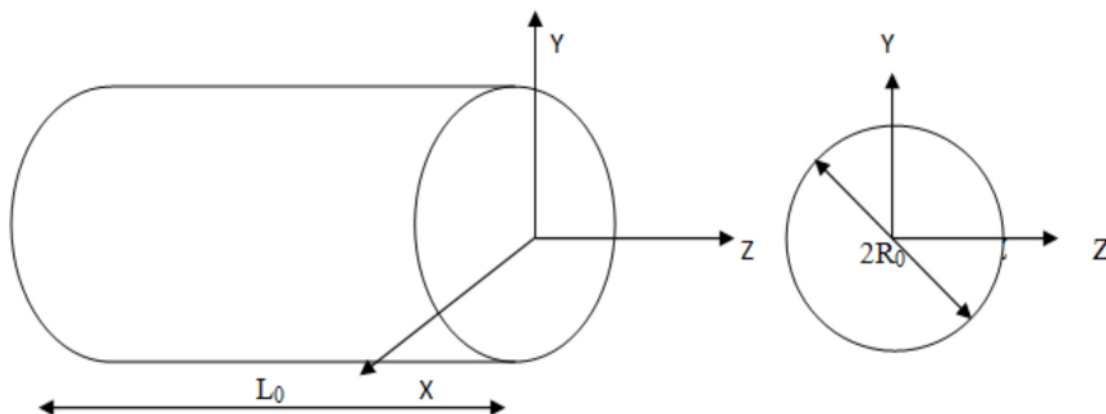


Figure III.1: Représentation du cylindre circulaire plein de section constante

Les coordonnées cylindriques seront utilisées à cause de la symétrie du problème. Ainsi, soit un point $M(R, \Theta, Z)$ de la configuration de référence (non déformée) qui se déplace sous l'effet des sollicitations imposées occupe la position, $m(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_z)$ dans la configuration actuelle (ou déformée), on peut écrire la relation cinématique suivante [13].

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta + g(Z) \\ z = Z \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Ici, le variable torsion est supposé une fonction quelconque de Z .

III.1.2 Loi de comportement d'un milieu incompressible

On suppose que le potentiel hyper-élastique dépend des invariants I_1, I_2 , c'est-à-dire :

$$W = W(I_1, I_2)$$

Le milieu est supposé incompressible, $I_3=1$.

Le tenseur de contrainte de Cauchy est exprimé par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1}$$

$$\text{On pose : } \frac{\partial W}{\partial I_1} = w_1 \text{ et } \frac{\partial W}{\partial I_2} = w_2$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2w_1 \mathbf{B} - 2w_2 \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{III.2})$$

En coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient de la transformation \mathbf{F} s'exprime :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & \frac{r}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

De l'équation (III.1) le gradient de la transformation \mathbf{F} est donné par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Rg'(Z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

De l'équation (III.4) on obtient :

$$\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & Rg'(Z) & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Pour cette transformation, le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} est égal à :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Rg'(Z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & Rg'(Z) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + [Rg'(z)]^2 & Rg'(z) \\ 0 & Rg'(Z) & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Et le tenseur \mathbf{B}^{-1} est exprimé par :

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Rg'(Z) \\ 0 & -Rg'(z) & 1 + [Rg'(Z)]^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Les invariants de contraintes de cauchy Green-droit (ou gauche) sont :

$$I_1 = \text{trace } \mathbf{B} = 3 + [Rg'(z)]^2 \quad (\text{III.8})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{trace } \mathbf{B})^2 - \text{trace } \mathbf{B}^2) = 3 + [Rg'(z)]^2 \quad (\text{III.9})$$

On constate que : $I_1 = I_2$.

A partir de l'équation (III.2), les composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy sont les suivantes :

$$\sigma_{rr} = 2(w_1 - w_2) - p \quad (\text{III.9a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2(w_1 - w_2) + 2w_1[Rg'(z)]^2 - P \quad (\text{III.9b})$$

$$\sigma_{zz} = 2(w_1 - w_2) - 2w_2[Rg'(z)]^2 - P \quad (\text{III.9c})$$

$$\sigma_{\theta z} = 2(w_1 + w_2)[Rg'(z)] \quad (\text{III.9d})$$

En coordonnées cylindriques, l'expression de l'équation d'équilibre est :

$$\begin{aligned} \text{div } \boldsymbol{\sigma} = & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} \right) \vec{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \right) \vec{e}_z = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{III.10.a})$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.10.b})$$

$$\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.10.c})$$

On remplace les équations (III.9) dans les équations (III.10), on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -2w_1 R [g'(z)]^2 \quad (\text{III.11.a})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 2(w_1 + w_2) R^2 g''(z) \quad (\text{III.11.b})$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -4w_2 R^2 g'(z) \cdot g''(z) \quad (\text{III.11.c})$$

On a : $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ ce qui implique que $g''(z) = 0$ et par conséquent $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$.

La pression hydrostatique ne dépend que de r , c'est-à-dire $P=P(r)$.

De l'équation (III.10.a) ; on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \int_r^a d\sigma_{rr} &= \int_r^a 2w_1 [g'(z)]^2 dr \\ \sigma_{rr}(r) - \sigma_{rr}(r=a) &= w_1 [g'(z)]^2 (r^2 - a^2) \\ \sigma_{rr}(r) &= w_1 [g'(z)]^2 (R^2 - A^2) + f(\theta; z) \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Avec : $f(\theta; z) = \sigma_{rr} \Big|_{R=A}^{r=a}$ ou

De l'équation (III.9.a), on en déduit l'expression de la pression hydrostatique P :

$$P(r) = 2(w_1 - w_2) - w_1 (R^2 - A^2) [g'(z)]^2 - f(\theta, z)$$

$$\text{Mais } \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Alors $f(\theta, z) = \text{constante} = -\sigma_0$

La pression hydrostatique et les composants du tenseur des contraintes de Cauchy sont données par :

$$P(r) = 2(w_1 - w_2) - w_1 (R^2 - A^2) [g'(z)]^2 + \sigma_0 \quad (\text{III.13})$$

$$\sigma_{rr} = w_1 [g'(z)]^2 (R^2 - A^2) - \sigma_0 \quad (\text{III.14a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = w_1 (3R^2 - A^2) [g'(z)]^2 - \sigma_0 \quad (\text{III.14b})$$

$$\sigma_{zz} = \{w_1 (R^2 - A^2) - 2w_2 R^2\} [g'(z)]^2 - \sigma_0 \quad (\text{III.14c})$$

$$\sigma_{\theta z} = 2(w_1 + w_2) R [g'(z)] \quad (\text{III.14d})$$

Si on suppose que : $g(z) = \tau Z$, alors :

$$\sigma_{rr} = w_1 [\tau]^2 (R^2 - A^2) - \sigma_0 \quad (\text{III.15a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = w_1 (3R^2 - A^2) [\tau]^2 - \sigma_0 \quad (\text{III.15b})$$

$$\sigma_{zz} = \{w_1(R^2 - A^2) - 2w_2R^2\}[\tau]^2 - \sigma_0 \quad (\text{III.15c})$$

$$\sigma_{\theta z} = 2(w_1 + w_2)R[\tau] \quad (\text{III.15d})$$

Si le potentiel hyper-élastique est exprimé en fonction des invariants I_1, I_2 et que la dérivée de W par rapport à I_i , ($i=1, 2$) sont des constantes c'est-à-dire $\frac{\partial W}{\partial I_i} = w_i = \text{cst}$, alors la seule possibilité de la transformation est lorsque $g''(z) = 0$, en d'autre terme $g'(z) = \text{cst}$, ou bien $g(z) = \tau z$ où $\tau = \text{cst}$. Dans ce cas, la contrainte radiale sur la surface extérieure peut être soit nulle ou bien constante.

III.1.3 Contrainte équivalente de Von-Mises

L'expression de la contrainte équivalente de Von-Mises est donnée par la relation suivante :

$$\langle \sigma_E \rangle = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_D : \sigma_D} \quad (\text{III.16})$$

Où σ_D est le déviateur du tenseur des contraintes donné par la relation suivante :

$$\sigma_D = \sigma - \frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) \mathbf{I} \quad (\text{III.17})$$

Dans le cas étudié, la contrainte équivalente de Von-Mises se réduit à l'expression suivante :

$$\langle \sigma_E \rangle = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 6(\sigma_{\theta z})^2]} \quad (\text{III.18})$$

Il est clair que la contrainte de Von Mises ne dépend pas de σ_0 .

III.1.4 Calcul de la force axiale et du moment résultant

La force axiale et le moment appliqué sont exprimés par les relations suivantes :

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_{zz} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^A (\{w_1(R^2 - A^2) - 2w_2R^2\}[\tau]^2 - \sigma_0) R dR d\theta \quad (\text{III.19})$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_{\theta z} r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^A (2(w_1 + w_2)[\tau]) R^3 dR d\theta \quad (\text{III.20})$$

A partir de l'équation (III.19), on déduit l'expression de la force résultante :

$$F_z = \pi A^2 [\tau^2 A^2 \left(\frac{w_1}{2} + w_2\right) + \sigma_0] \quad (\text{III.21})$$

L'équation du moment appliqué est déterminée à partir de l'équation (III.20):

$$M = \pi (w_1 + w_2) \tau A^4 \quad (\text{III.22})$$

III.2 Etude Numérique

III.2.1 Hypothèse de quasi-incompressibilité

La plupart des codes éléments finis donne le potentiel hyper-élastique(W) de la manière suivante :

$$W = W(I_1; I_2) + \frac{1}{D} (j - 1)^2 \quad (\text{III.23})$$

où I_1 et I_2 sont les invariants modifiés du tenseur de Green-Cauchy droit (ou gauche).

On a:

$$I_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1 \quad (\text{III.24})$$

$$I_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2 \quad (\text{III.25})$$

$$\text{Et } D = \frac{2}{K_0} = \frac{3(1-2\nu)}{\mu(\nu+1)} \quad (\text{III.26})$$

Où K_0 est le module de compressibilité.

Dans toute notre étude, nous avons supposé que le matériau est incompressible $I_3 = 1$ et afin de comparer entre les résultats analytiques et les résultats numériques, nous avons supposé que le coefficient de Poisson $\nu_0 = 0.4998$.

Alors $D = 0.0015 \text{MPa}^{-1}$.

III.2.2 Construction du modèle numérique

III.2.2.1 Choix du modèle de comportement

Nous avons choisi le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres implémenté dans le code de calcul éléments finies dont le potentiel hyper-élastique est défini par :

$$W = W(I_1; I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{D} (J - 2)^2 \quad (\text{III.27})$$

W est l'énergie de déformation par unité de volume, C_{10} et C_{01} sont les paramètres du matériau.

On pose : $w_1 = C_{10}$ et $w_2 = C_{01}$

Où $\mu = 2(c_{10} + c_{01})$ est le module de cisaillement.

III.2.2.2 Présentation de la géométrie

Afin de construire un modèle éléments finis, nous allons nous servir de la solution analytique pour valider le modèle numérique, pour cela on doit définir la structure à étudier.

le cylindre est de rayon initial A et de longueur L , les dimensions sont exprimées en millimètres dans la figure.

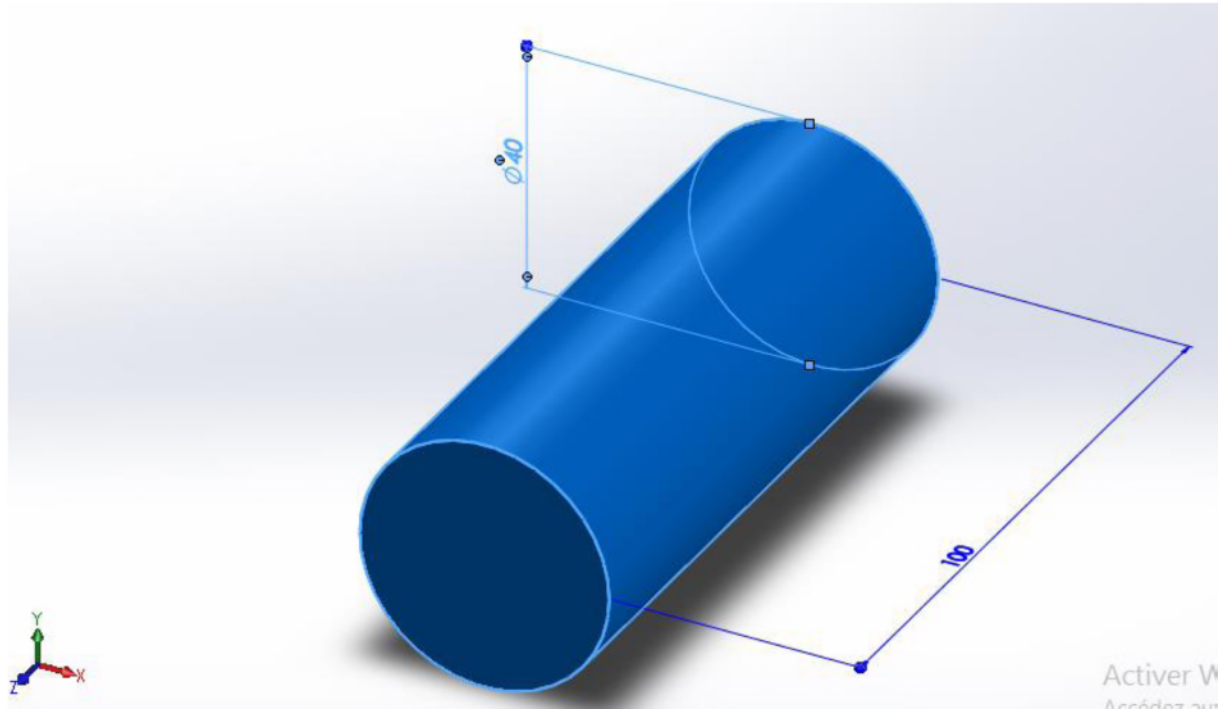


Figure III.2 : Modèle étudié

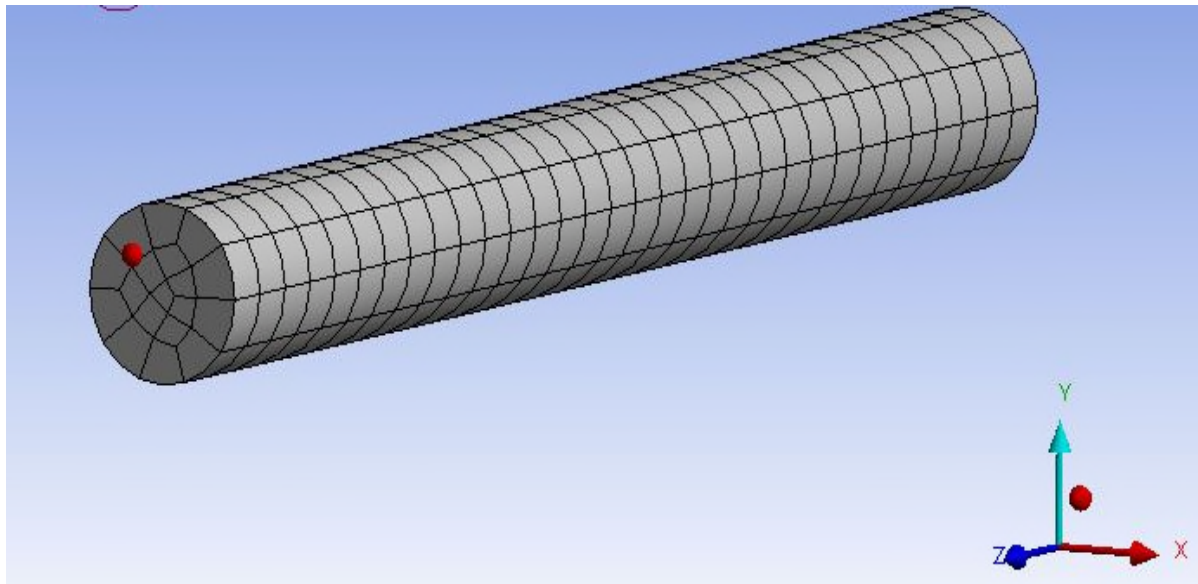
III.2.2.3 Le maillage

La résolution par la méthode des éléments finis d'un problème physique formulé en termes d'équations aux dérivées partielles s'appuie sur une discrétisation spatiale, ou maillage, du domaine étudié. Nous avons considéré une modélisation 3D avec un maillage de type linéaire et une taille d'élément de 3 mm.

Tableau III.1: Données utilisées pour la simulation numérique

Géométrie de cylindre		Eléments de maillage		
Longueur L	Rayon A	Taille d'élément	Nombre d'éléments	Nombre des nœuds
100mm	5mm	3mm	576	2913

Le maillage appliqué sur le corps du cylindre est montré sur la figure ci-dessous.

**Figure III.3:** Modèle maillé

III.2.2.4 Chargements et conditions aux limites

Pour simuler l'essai de la torsion, nous avons bloqué tous les nœuds du modèle situés dans le plan $z=0$ par l'application d'un encastrement au niveau d'extrémité $z=0$. Puis nous avons appliqué un chargement imposé sous forme d'une rotation d'angle α qui varie suivant l'axe e_θ . La figure ci-dessous représente le chargement appliqué et les conditions aux limites du problème.

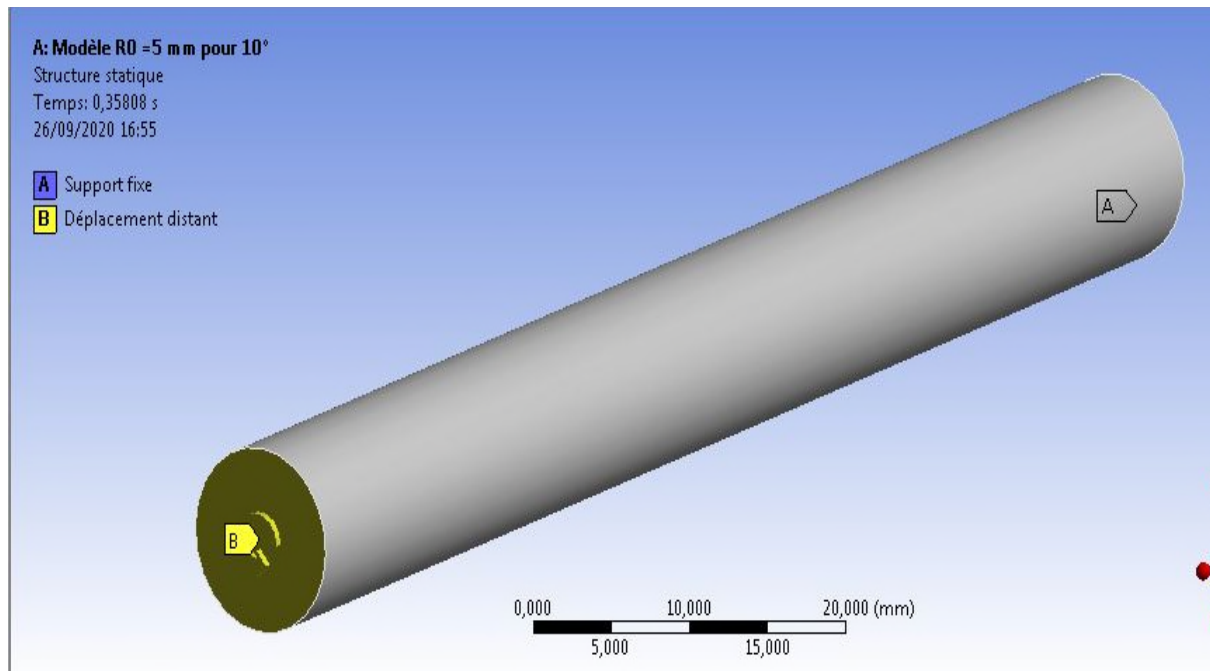


Figure III.4: Chargements et conditions aux limites

III.2.3 Résultats de la simulation numérique

Pour cette simulation, nous avons utilisé les paramètres identifiés à partir de l'essai de traction sur le Latex, ces paramètres sont donnés dans la publication de Marckmann [3] soit :

$$c_{10} = 0.162\text{MPa} \text{ et } c_{01} = 0.0059\text{MPa}.$$

Nous allons déterminer numériquement la distribution des contraintes sur une surface circulaire du cylindre située à une extrémité $Z = L$ et $Z=L/2$.

Ensuite, nous allons examiner la distribution des contraintes suivant une trajectoire quelconque \mathcal{L} (R varie de 0 à A).

Les résultats obtenus pour les différentes valeurs d'angles α et de rayon R sont donnés sur les figures (Figure III.5) jusqu'à (Figure III.34).

Pour $\alpha=10^\circ$ et $R=5$ mm :

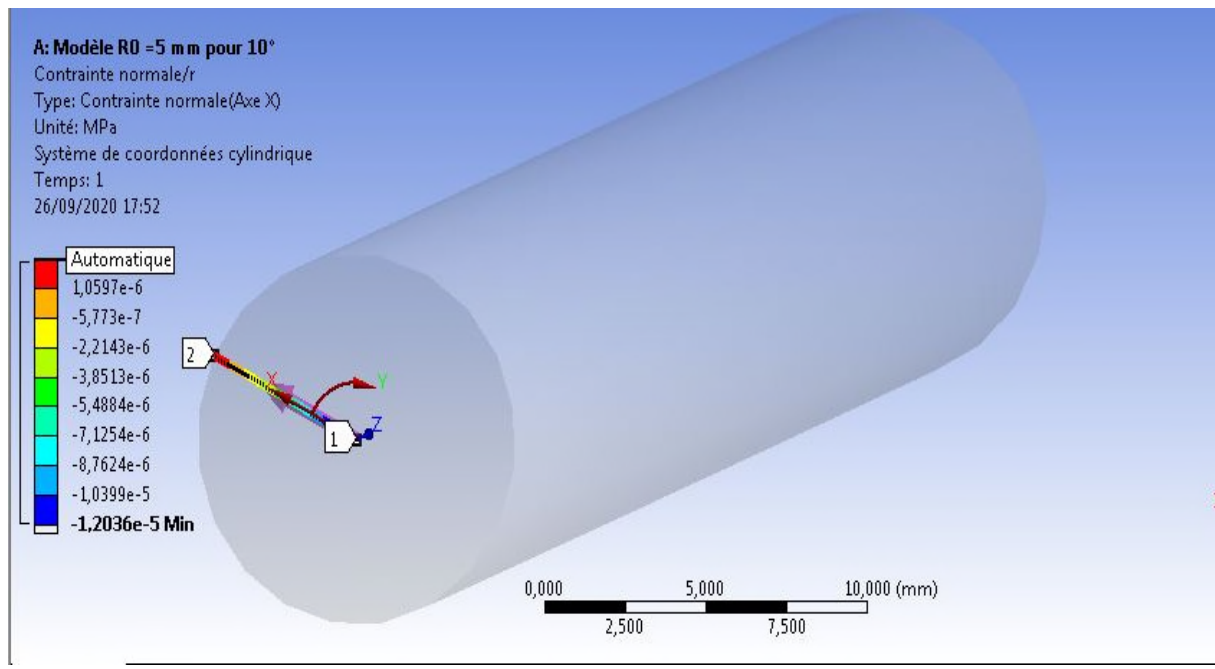


Figure III.5 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr}

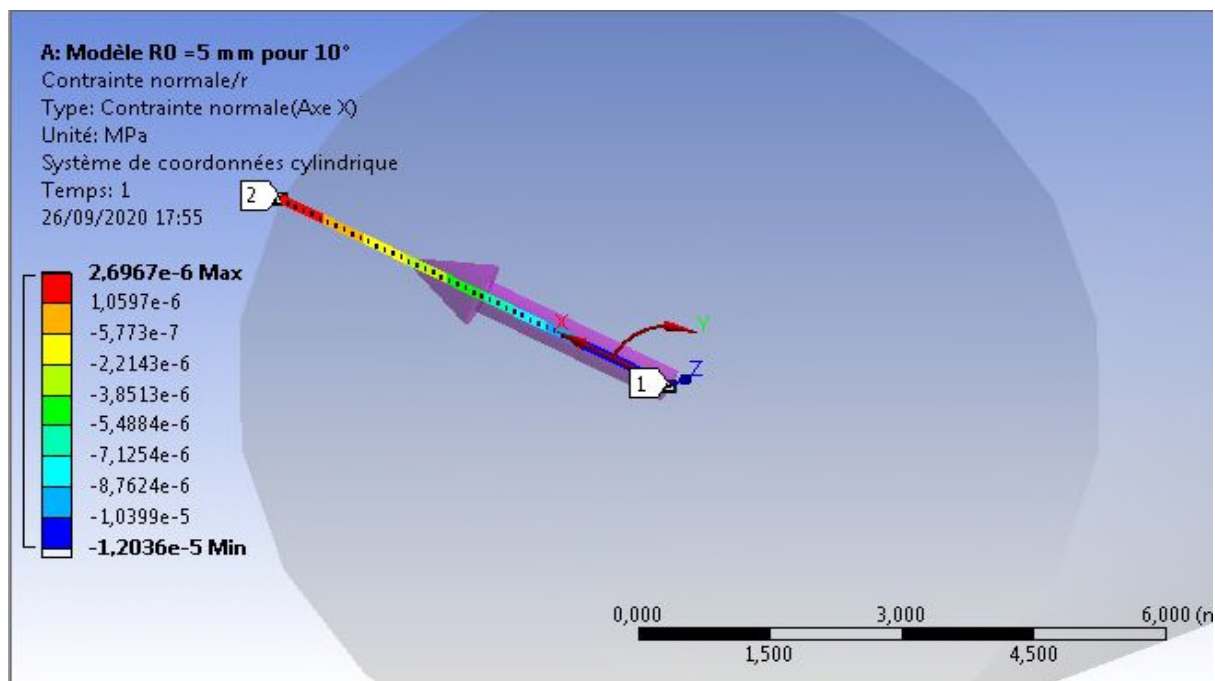


Figure III.6 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr} suivant la trajectoire \mathcal{L}

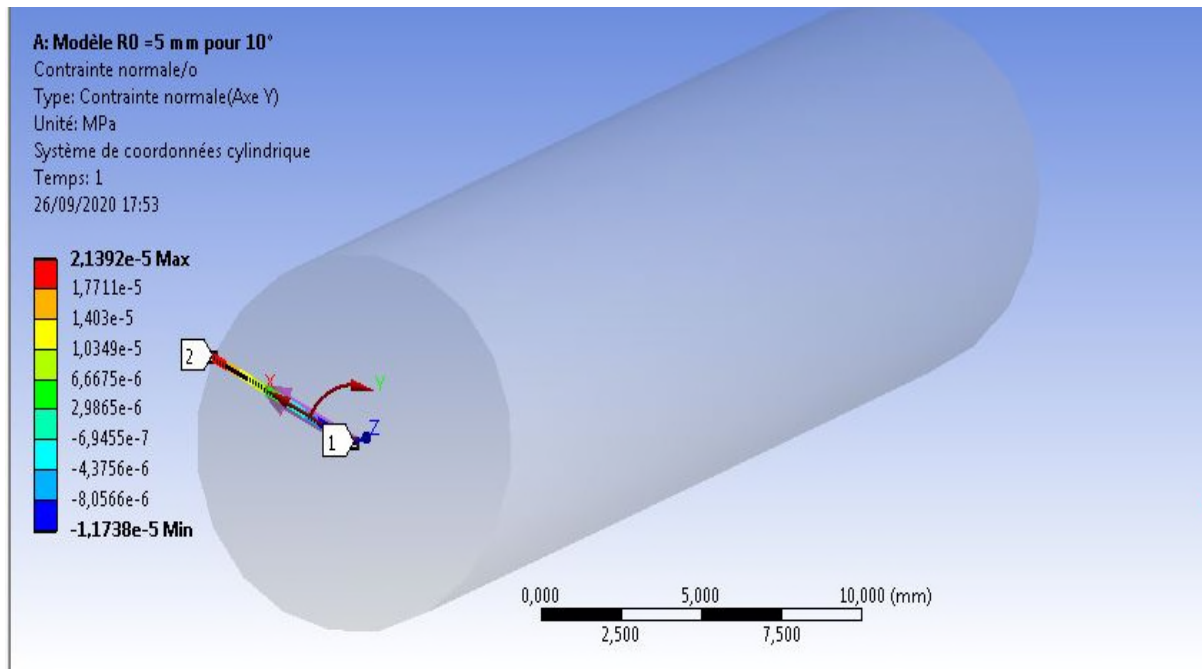


Figure III.7 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

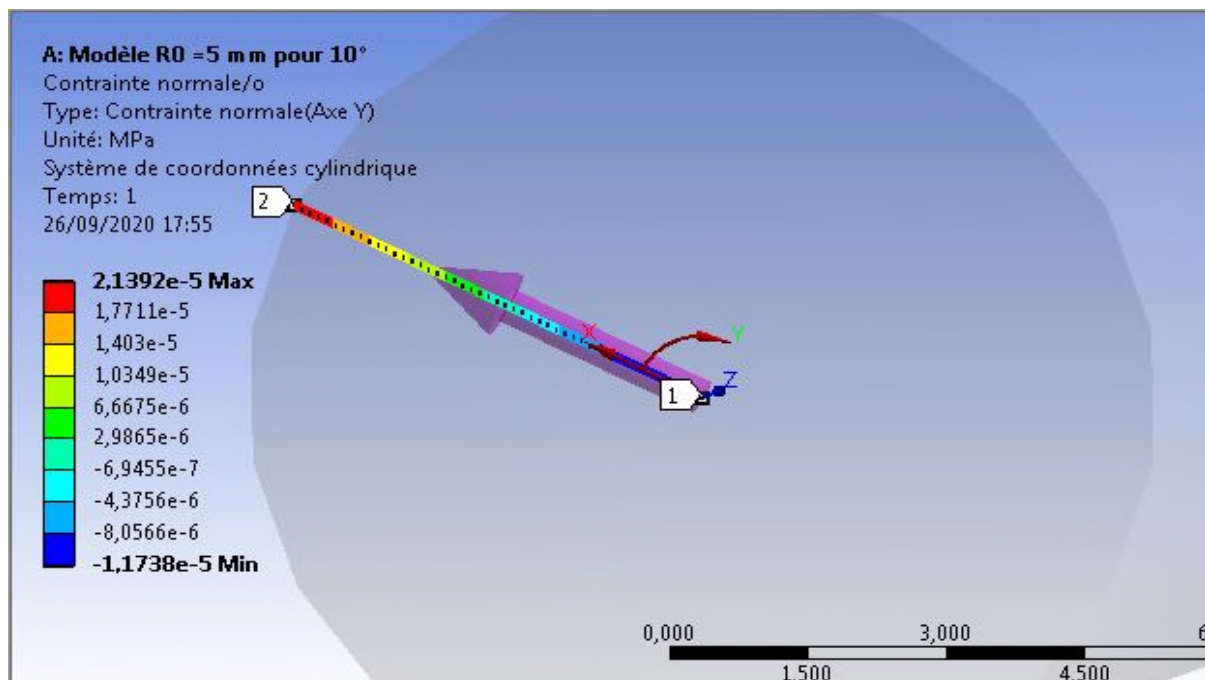


Figure III.8 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}

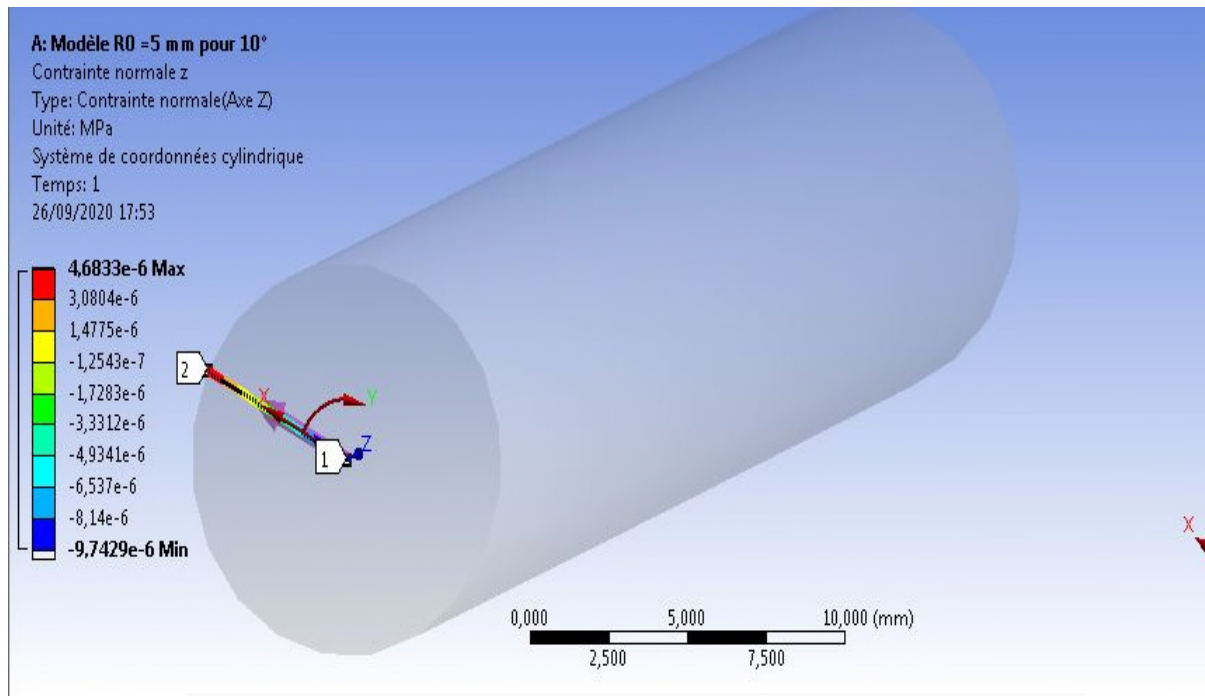


Figure III.9 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz}

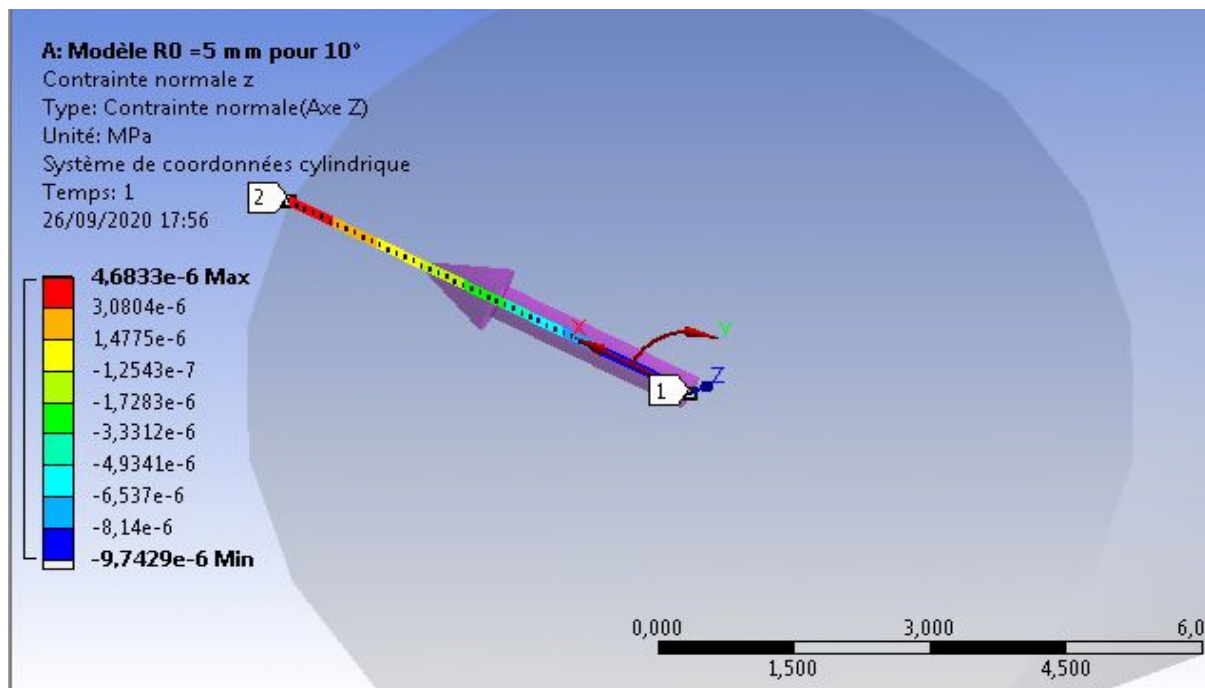


Figure III.10 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz} suivant la trajectoire \mathcal{L}

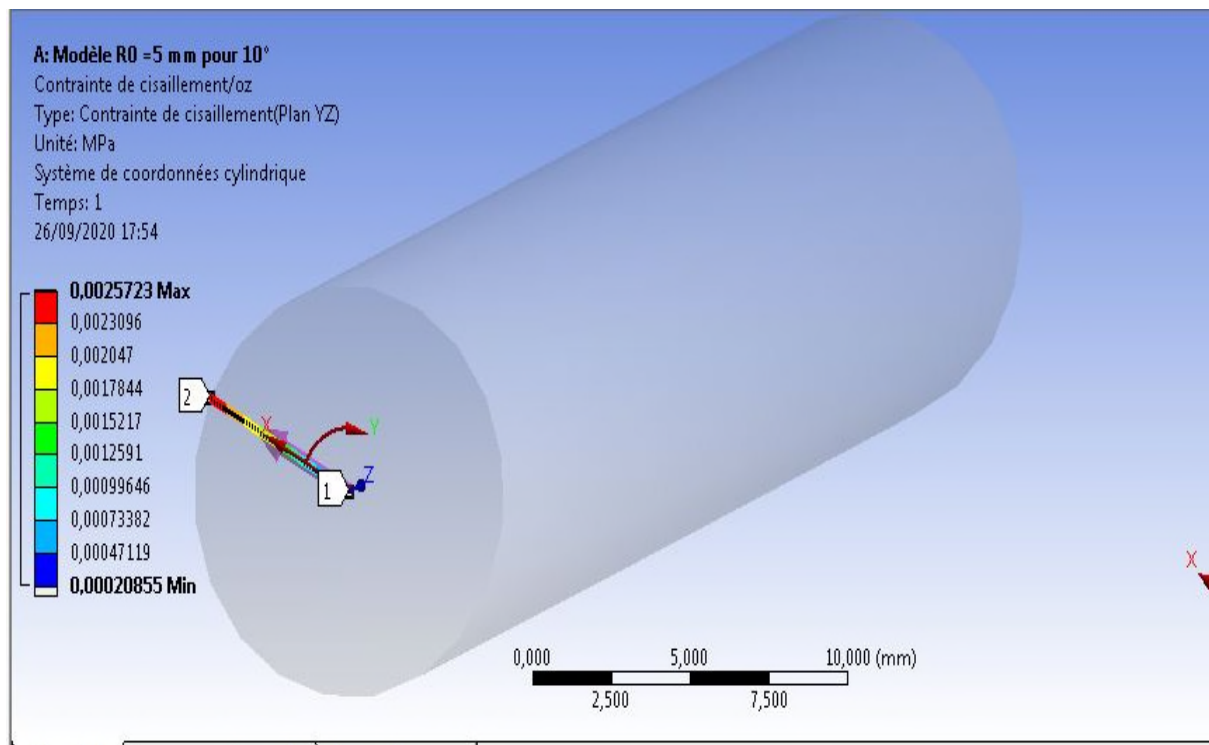


Figure III.11 : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta Z}$

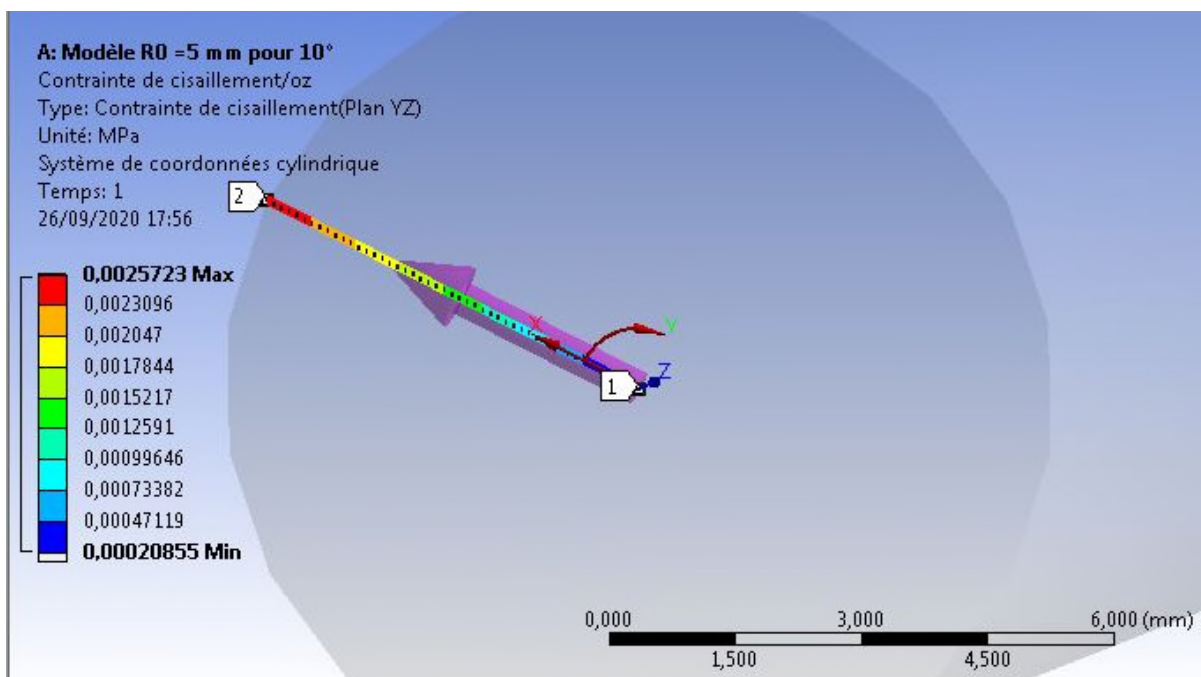


Figure III.12 : Distribution des contraintes cisaillement $\sigma_{\theta Z}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}

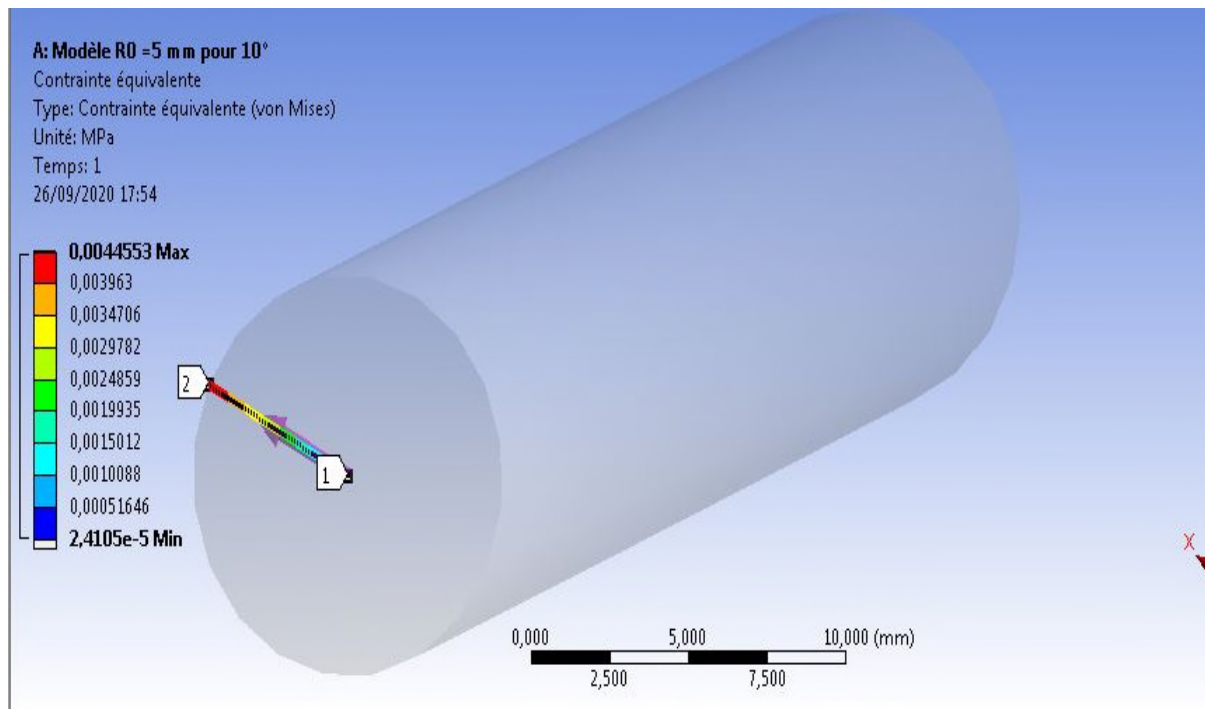


Figure III.13 : Distribution des contraintes de Von Mises

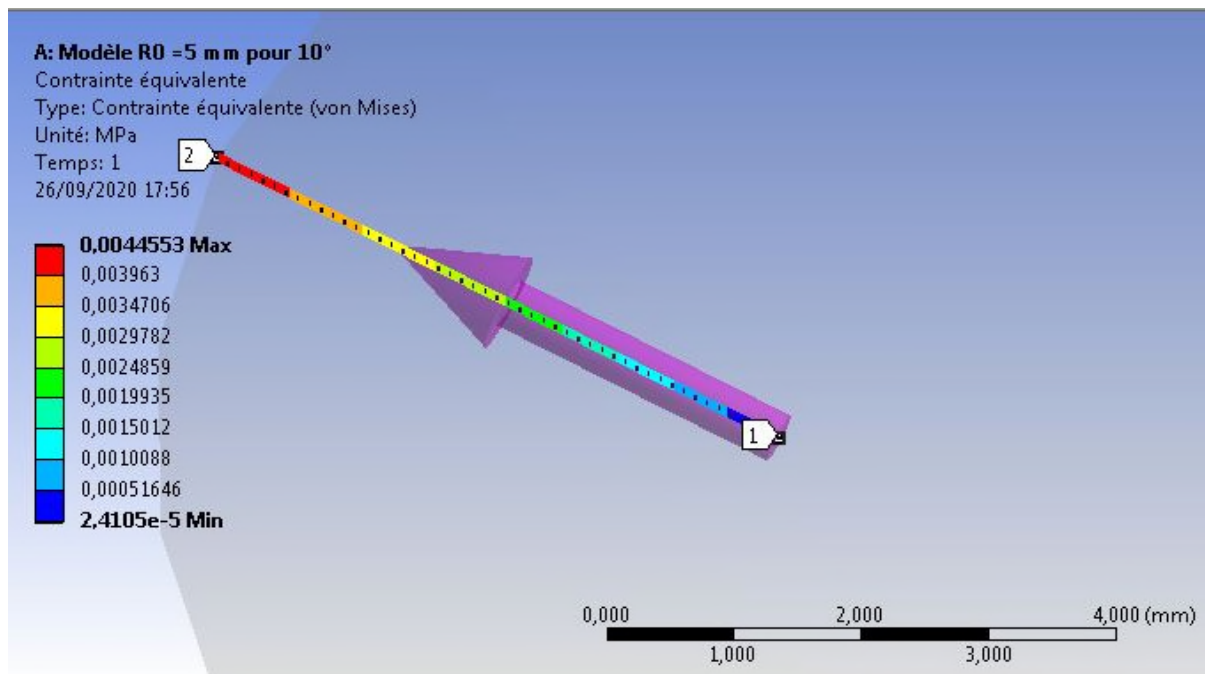


Figure III.14 : Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire \mathcal{L}

Pour $\alpha=45^\circ$ et $R=5$ mm :

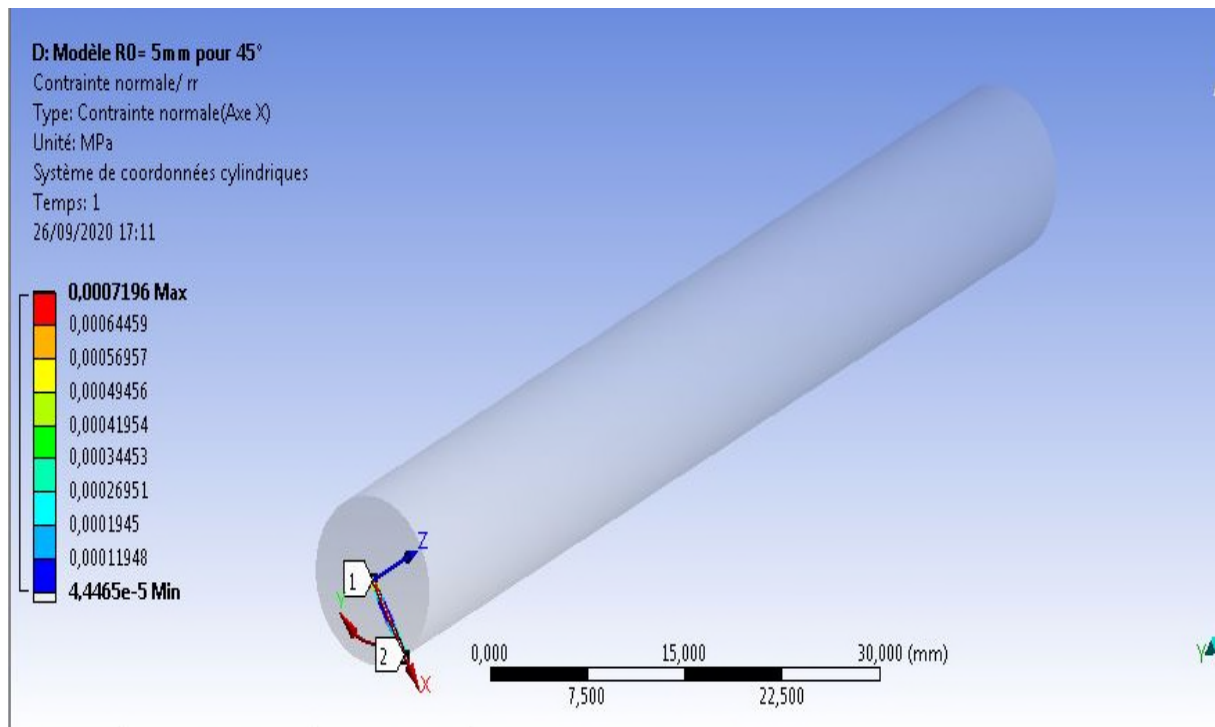


Figure III.15 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr}

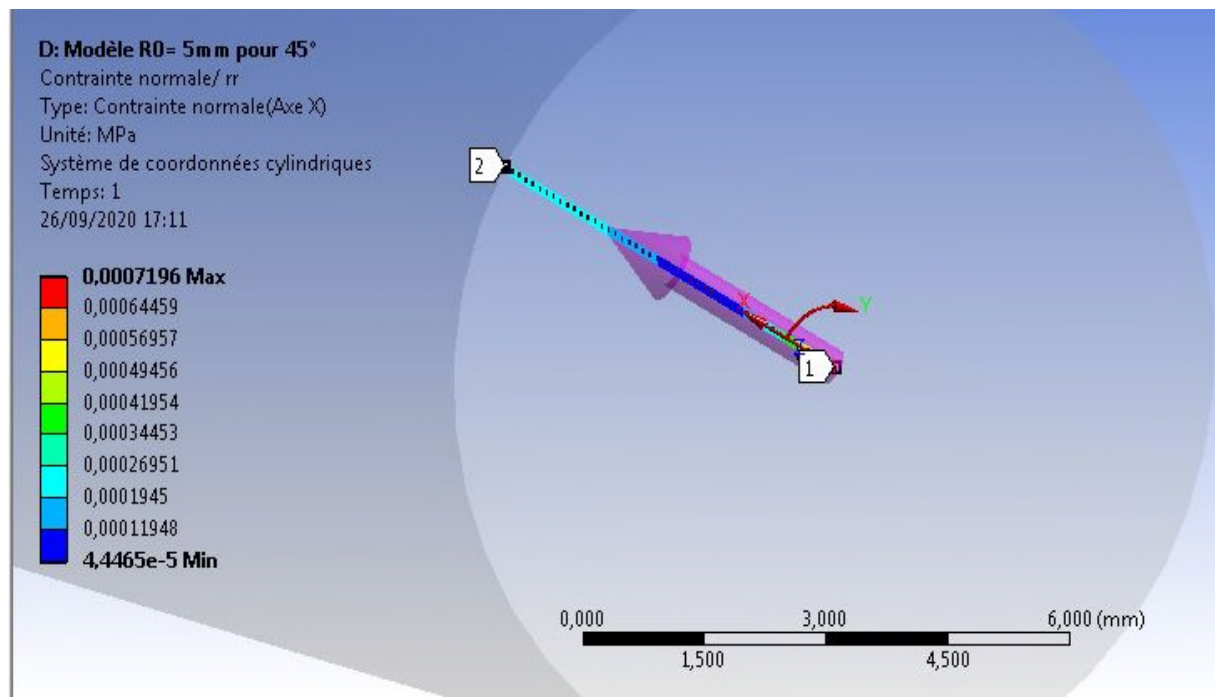


Figure III.16 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr} suivant la trajectoire \mathcal{L}

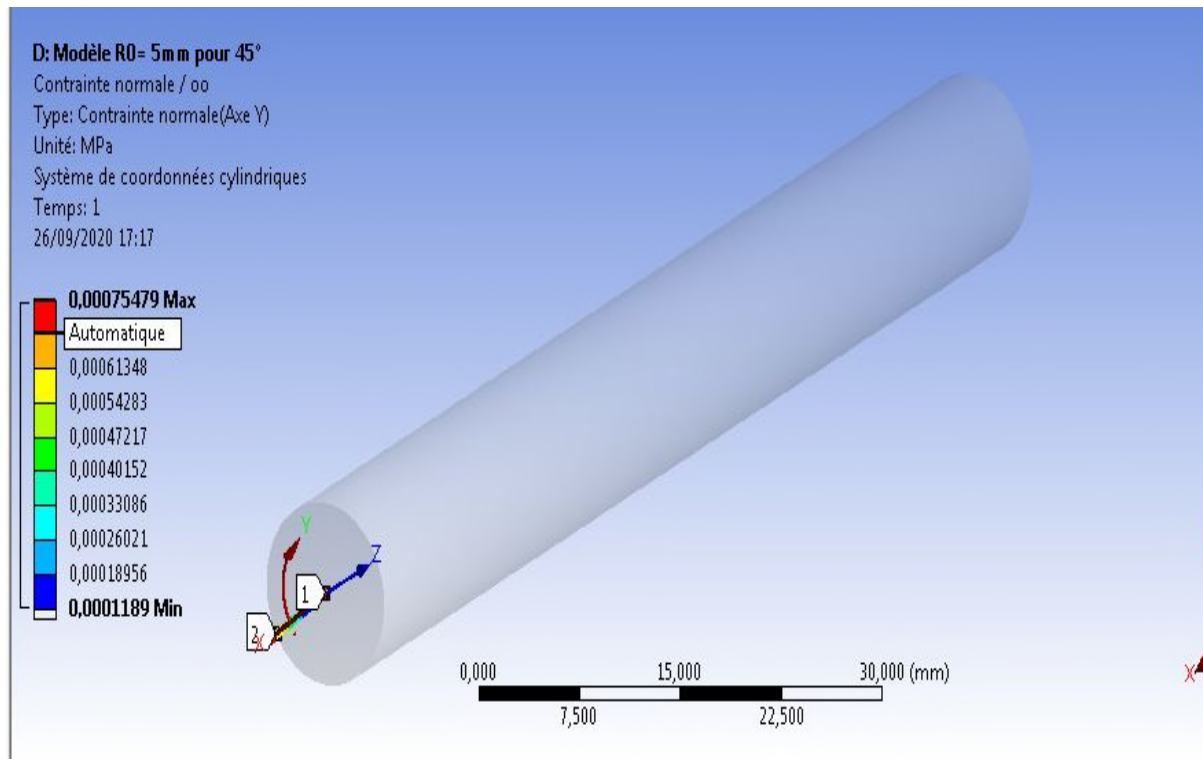


Figure III.17 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

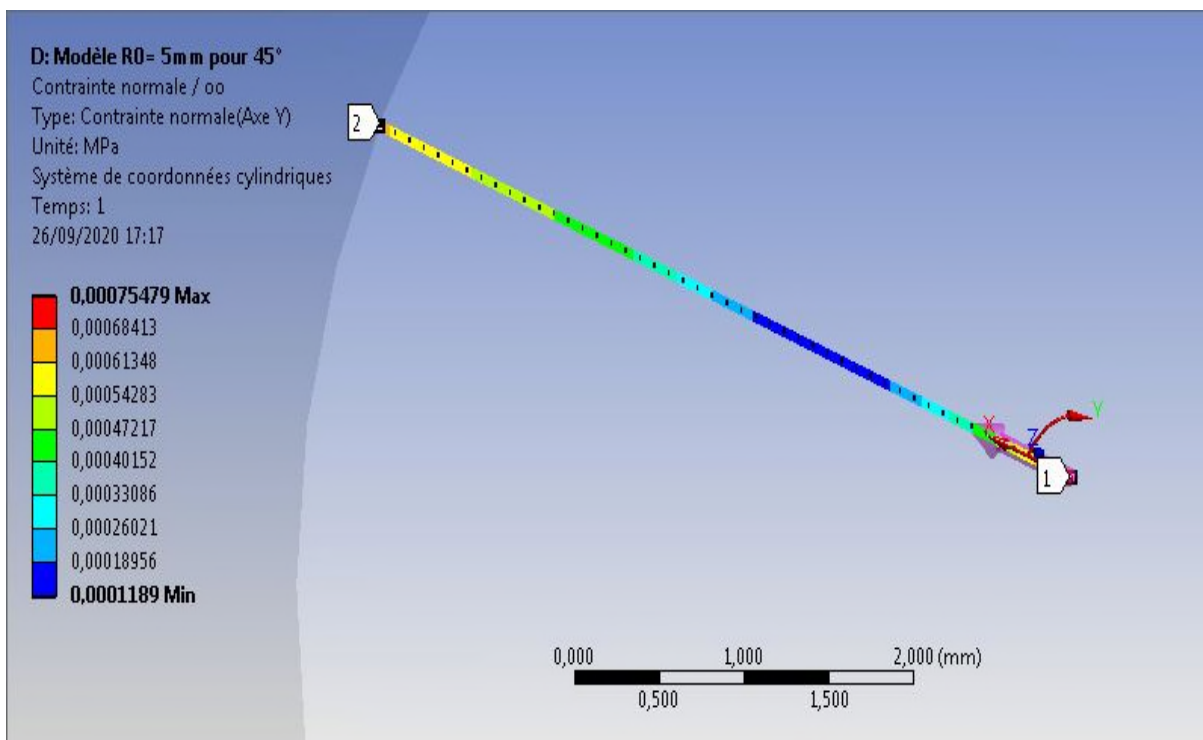


Figure III.18 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}

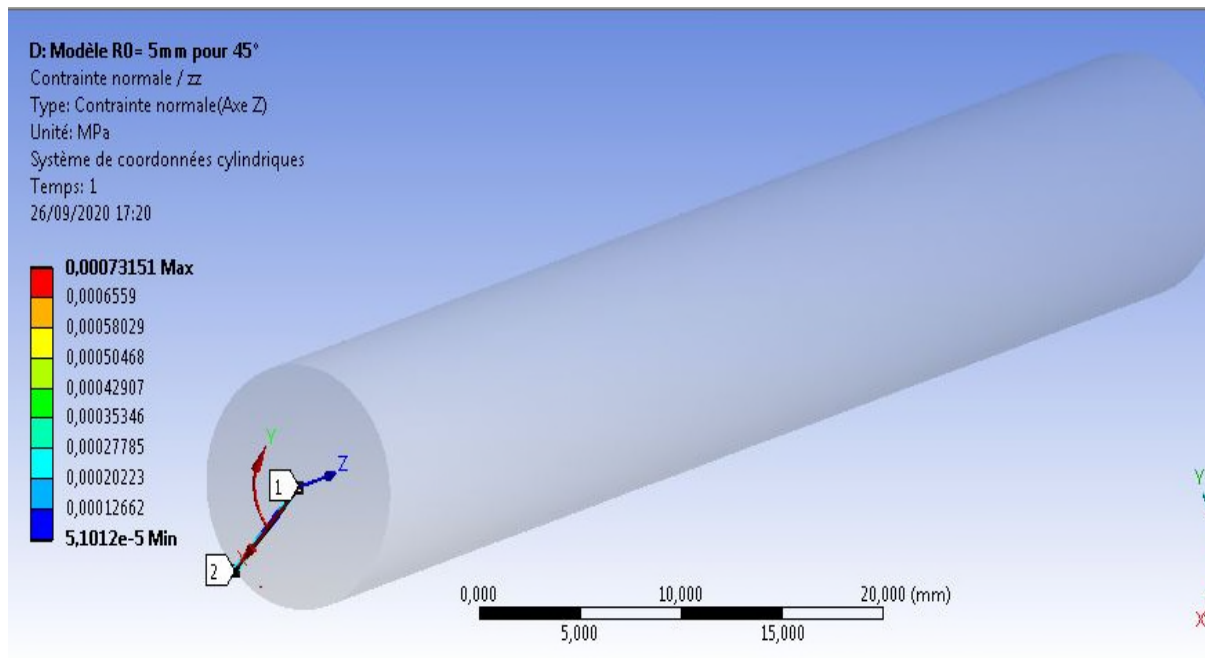


Figure III.19 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz}

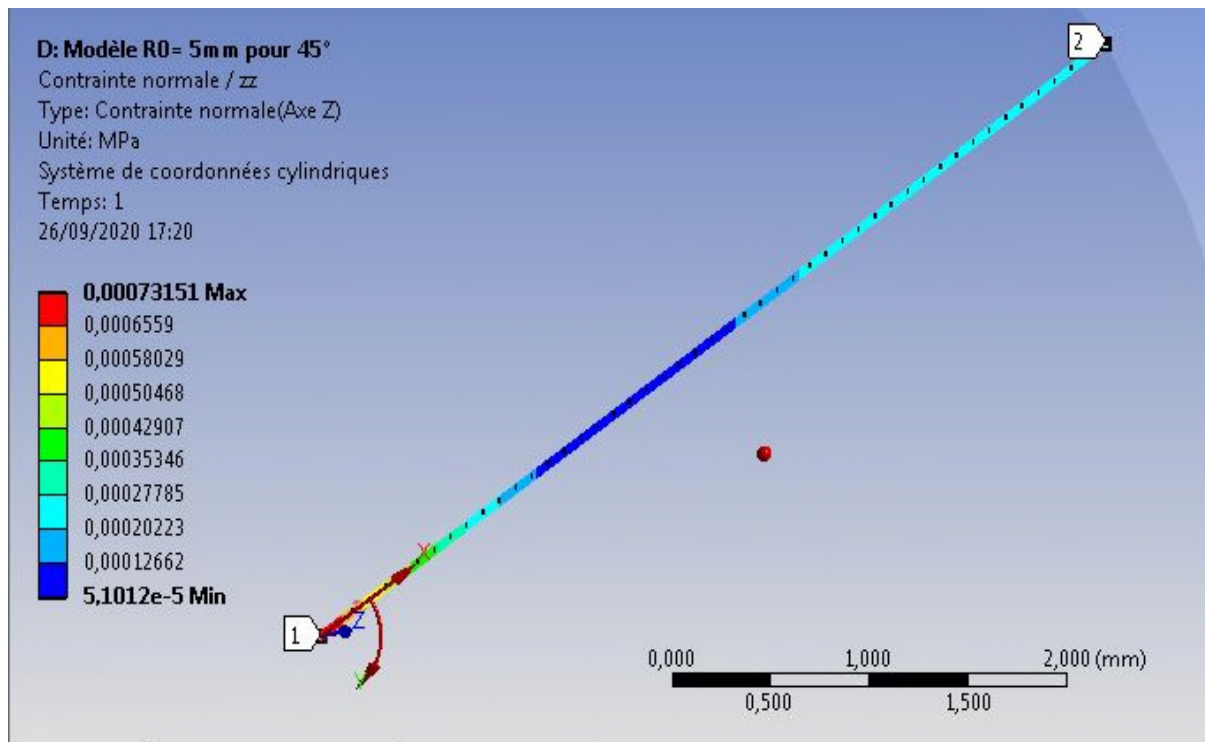


Figure III.20 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz} suivant la trajectoire \mathcal{L}

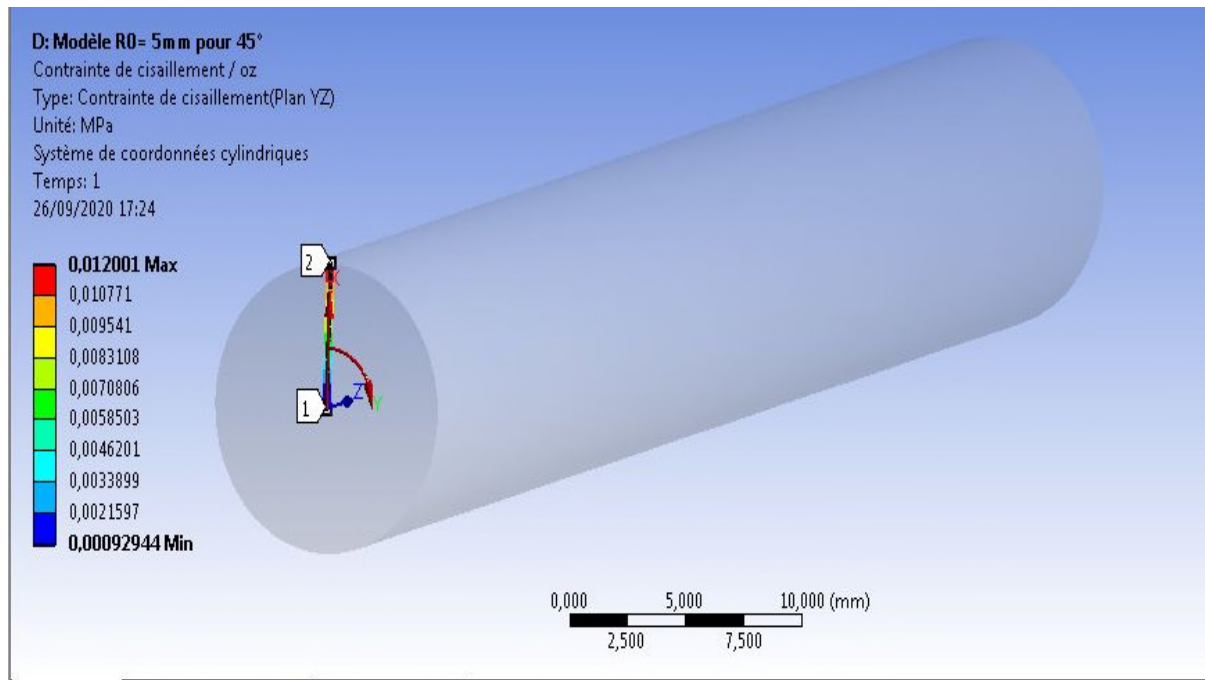


Figure III.21 : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$

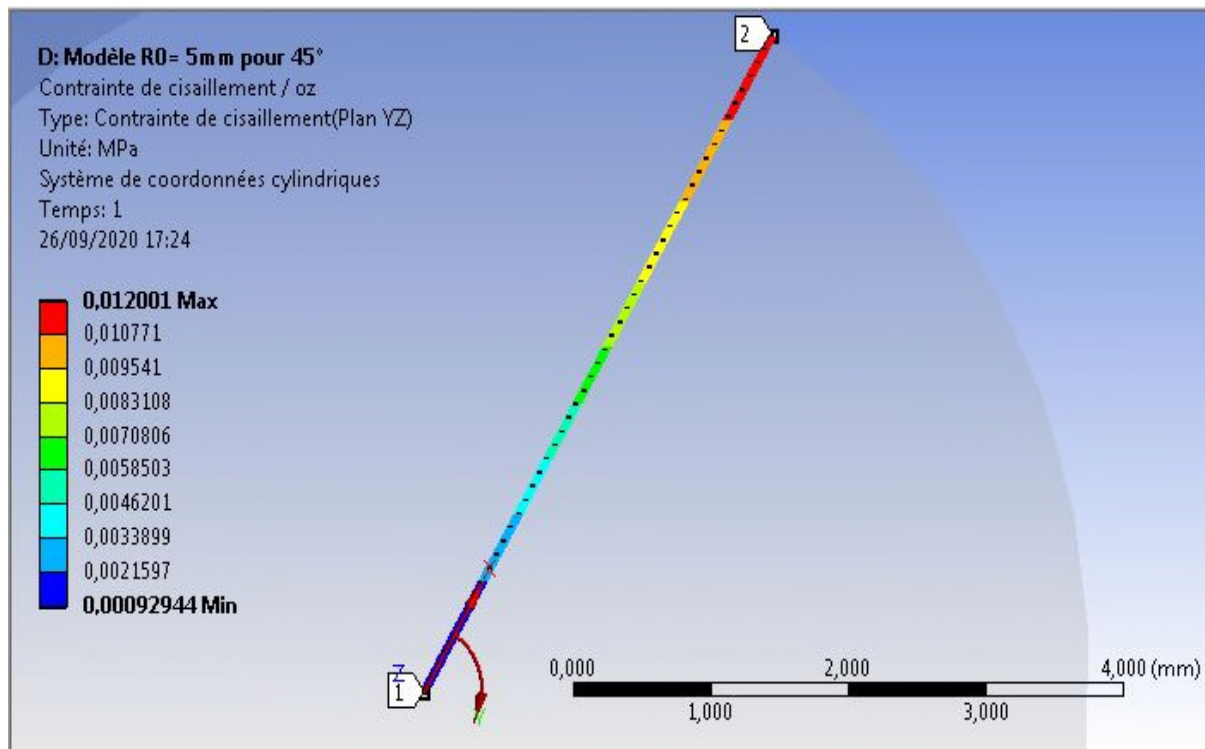


Figure III.22 : Distribution des contraintes cisaillement $\sigma_{\theta z}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}

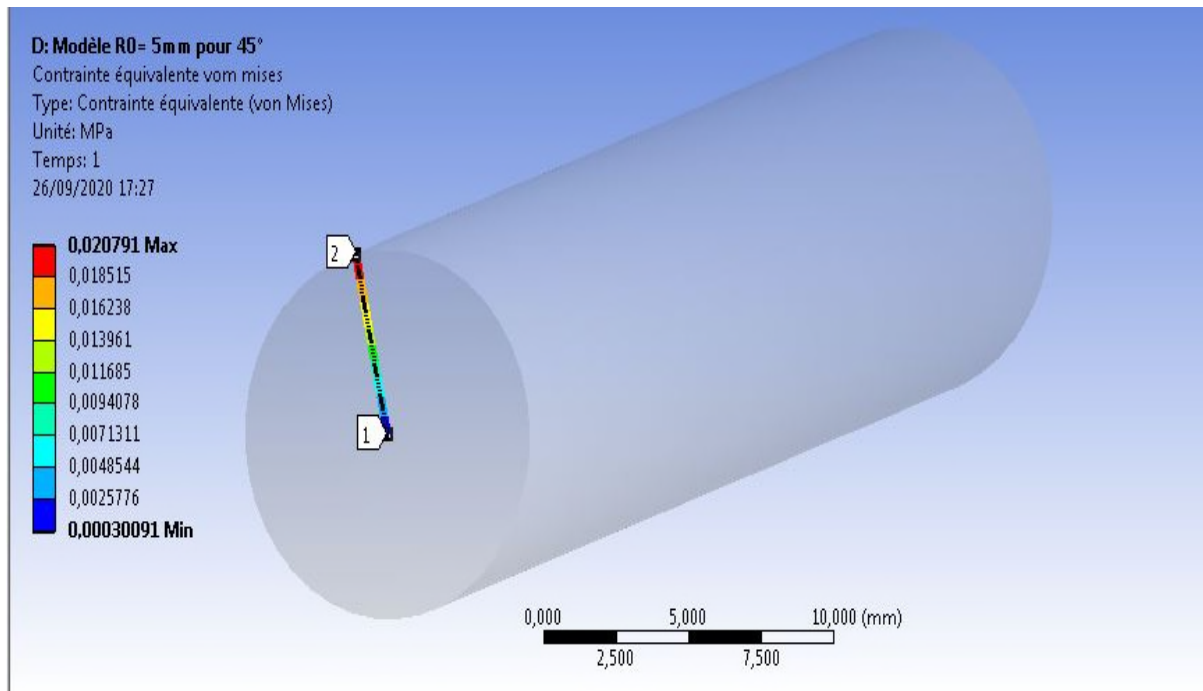


Figure III.23 : Distribution des contraintes de Von Mises

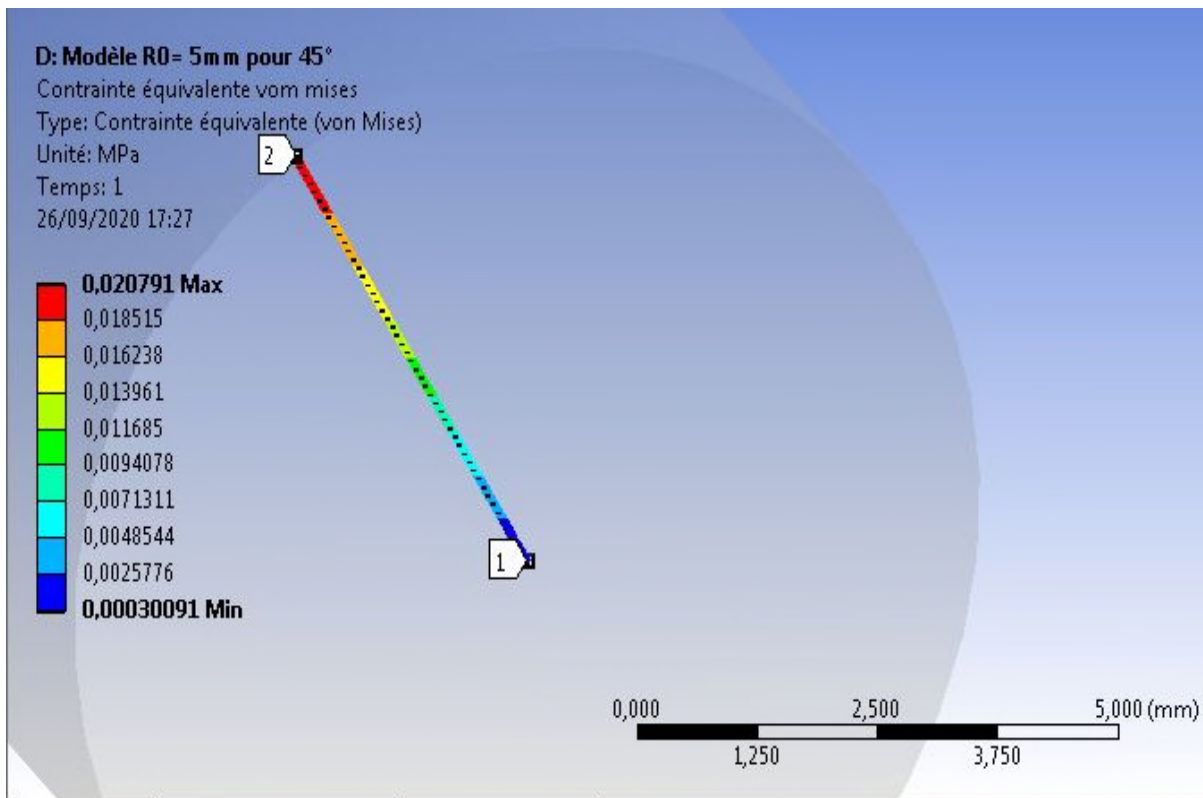


Figure III.24 : Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire \mathcal{L}

Pour $\alpha=75^\circ$ et $R=5$ mm :

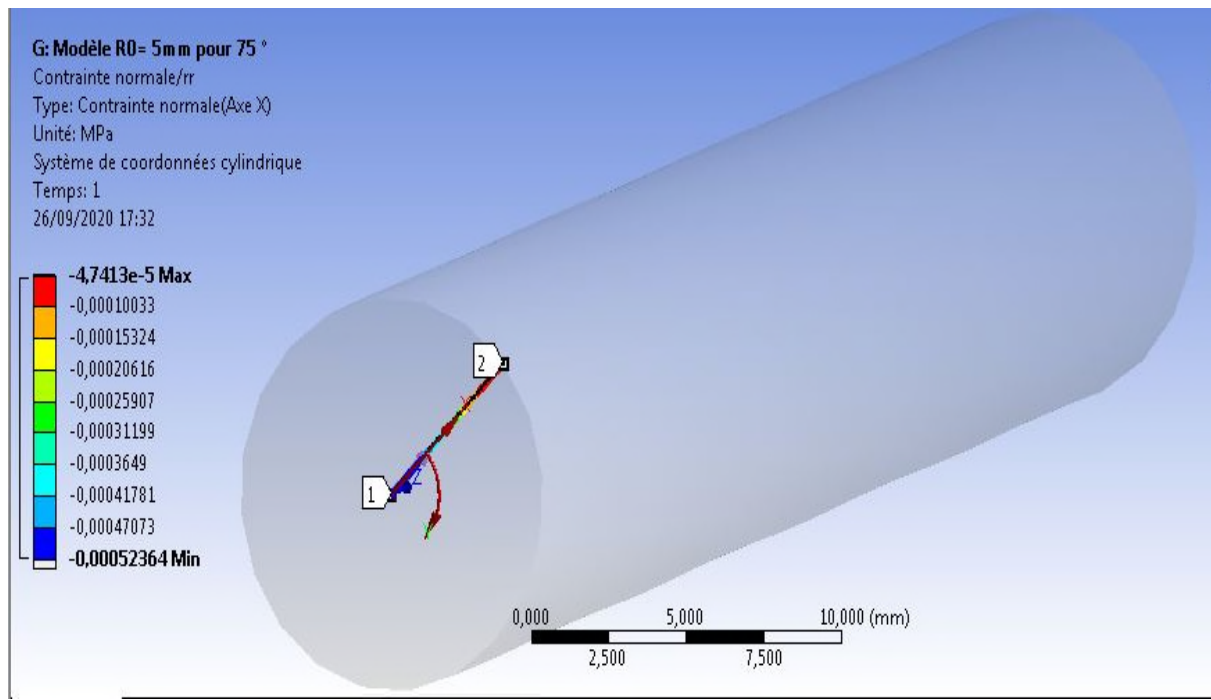


Figure III.25 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr}

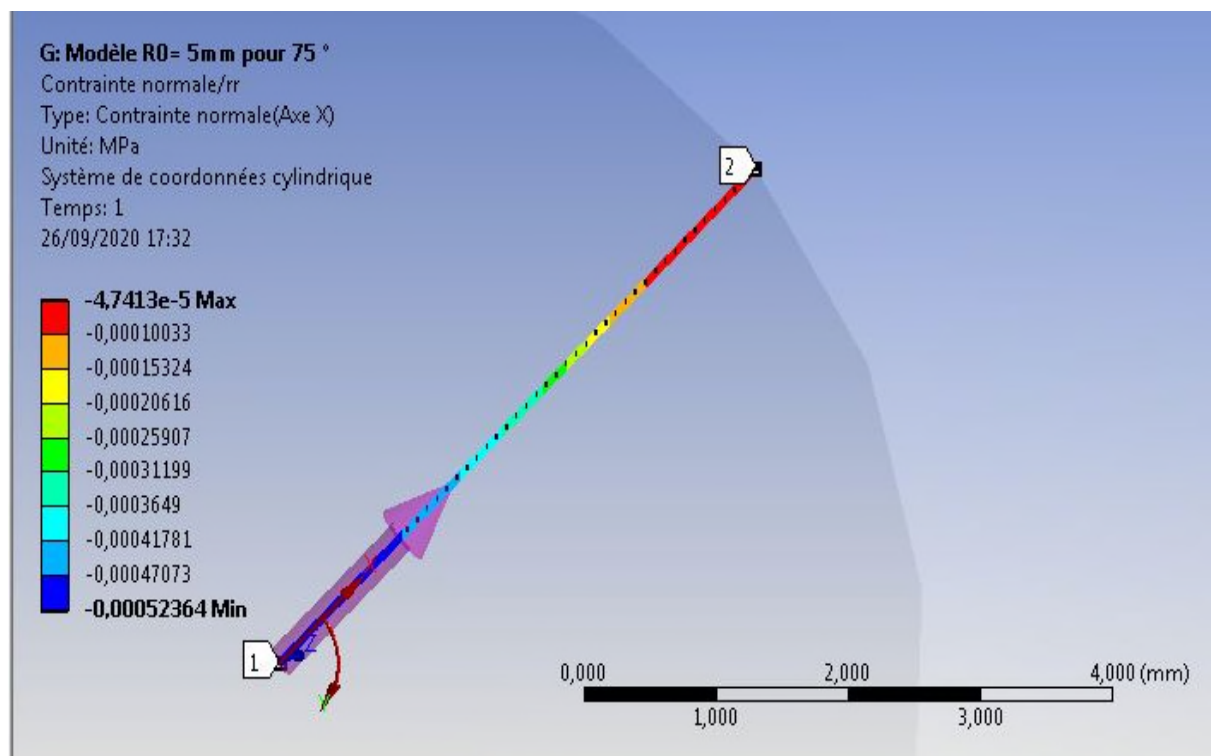


Figure III.26 : Distribution des contraintes radiales σ_{rr} suivant la trajectoire \mathcal{L}

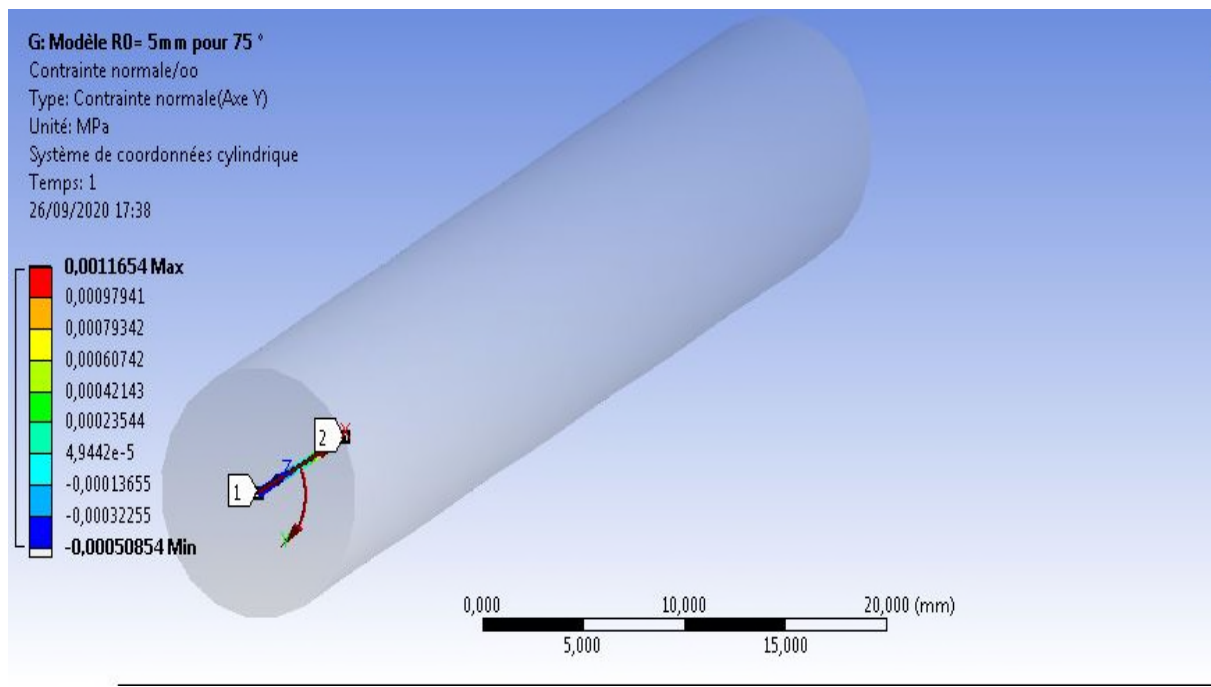


Figure III.27 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

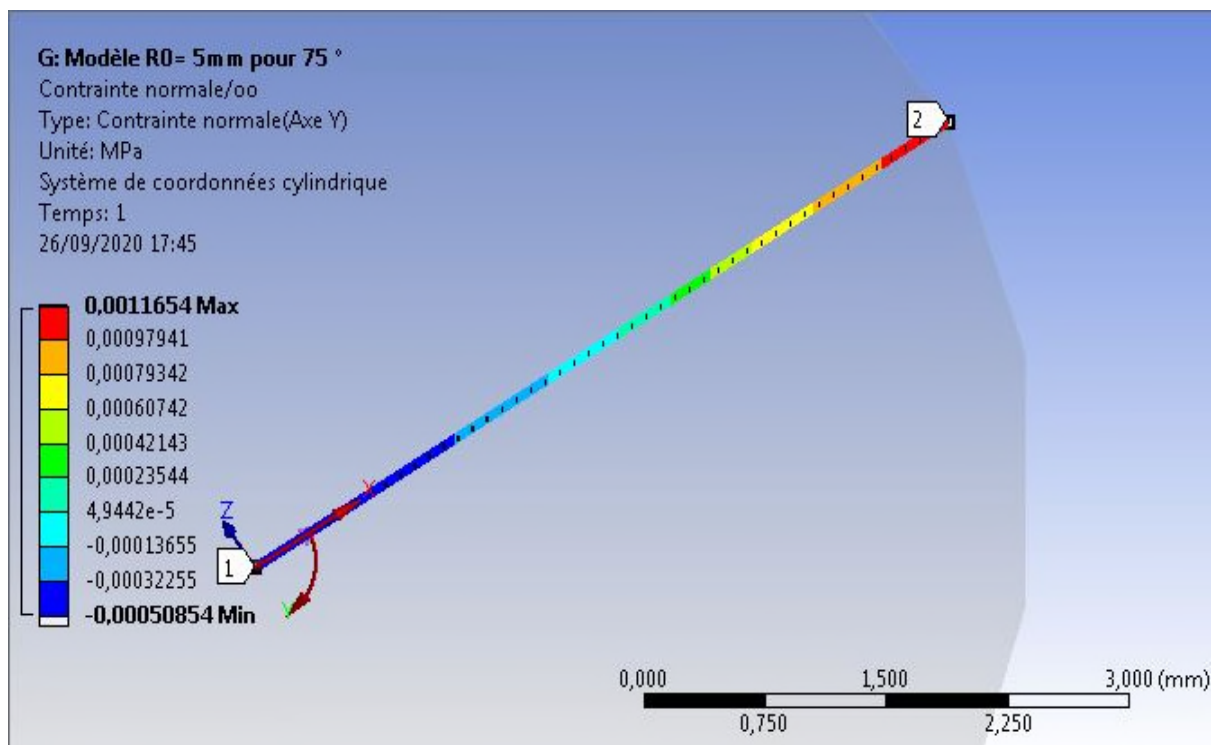


Figure III.28 : Distribution des contraintes tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}

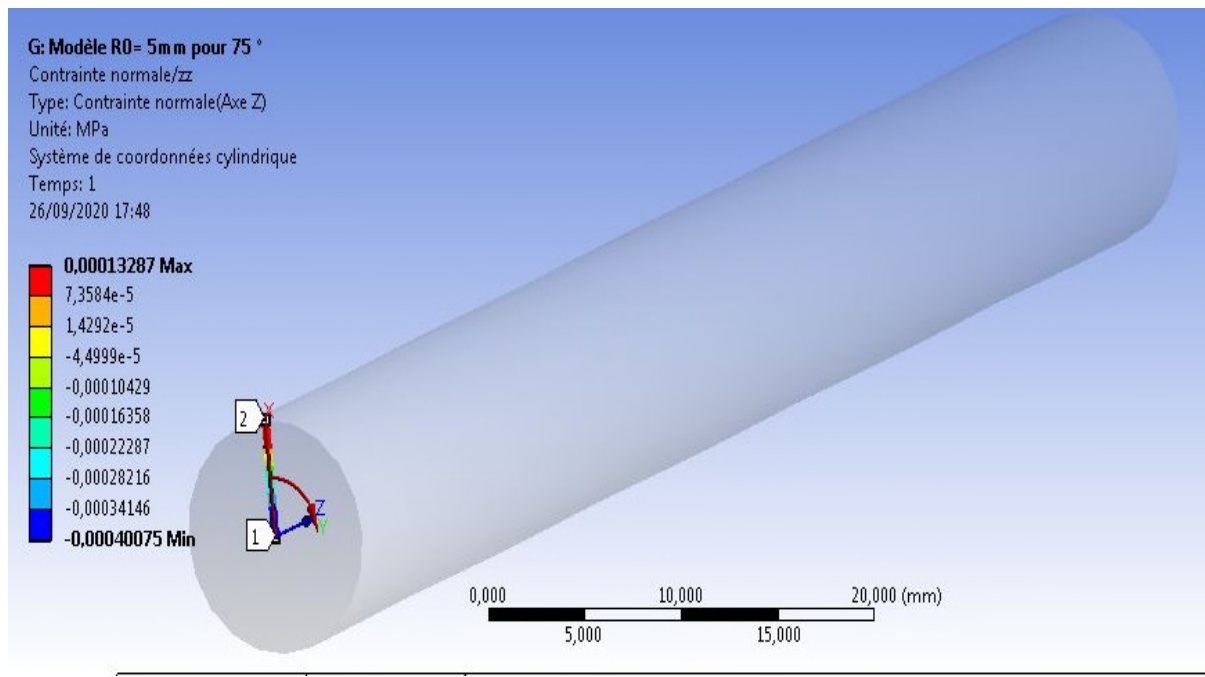


Figure III.29 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz}

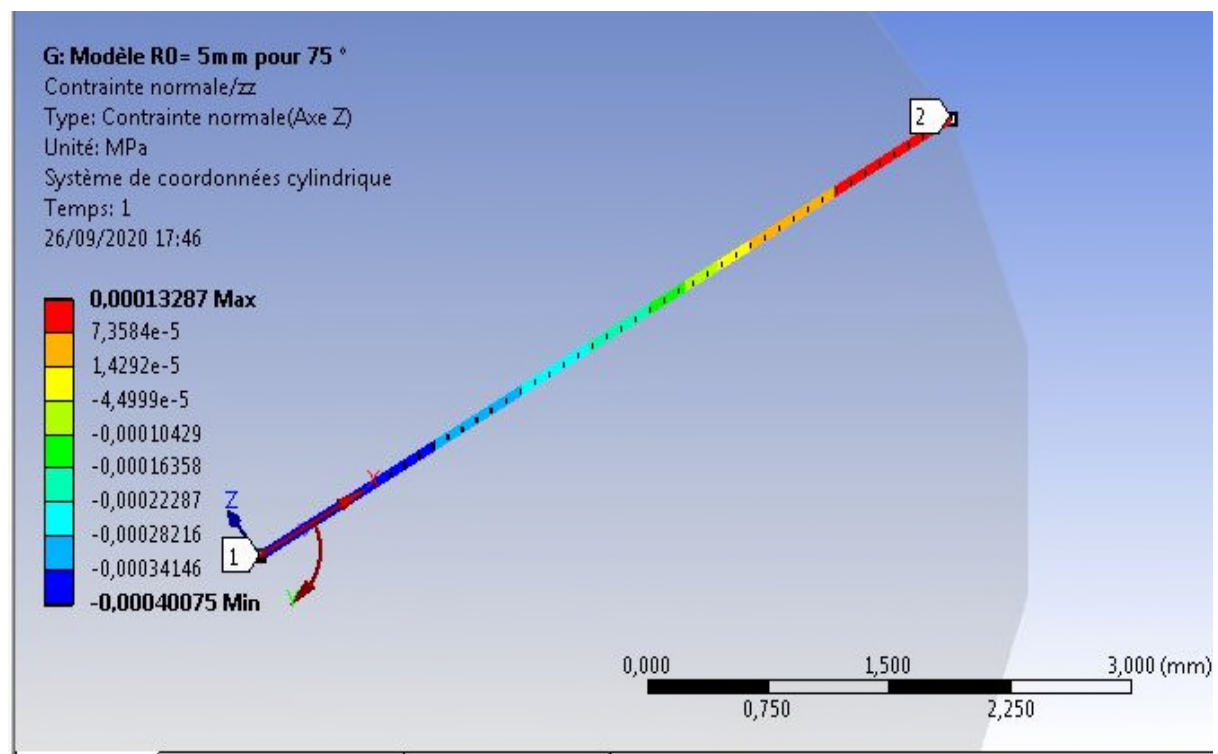


Figure III.30 : Distribution des contraintes axiales σ_{zz} suivant la trajectoire \mathcal{L}

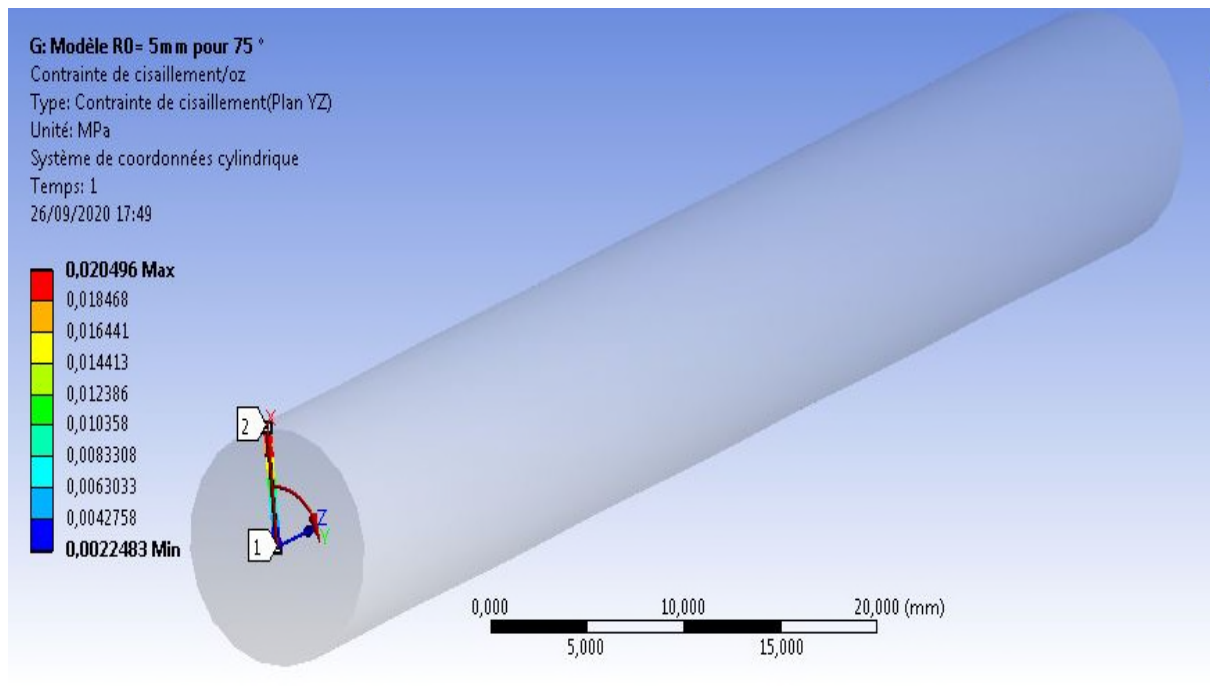


Figure III.31 : Distribution des contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta Z}$

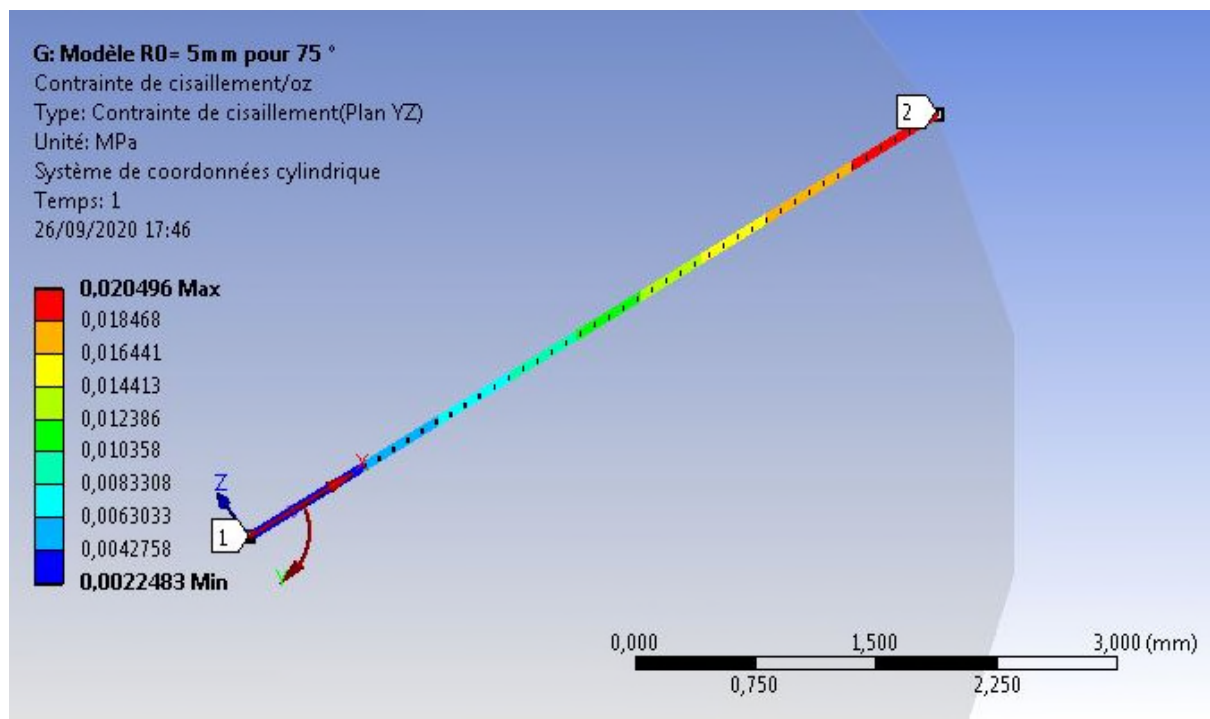


Figure III.32 : Distribution des contraintes cisaillement $\sigma_{\theta Z}$ suivant la trajectoire \mathcal{L}

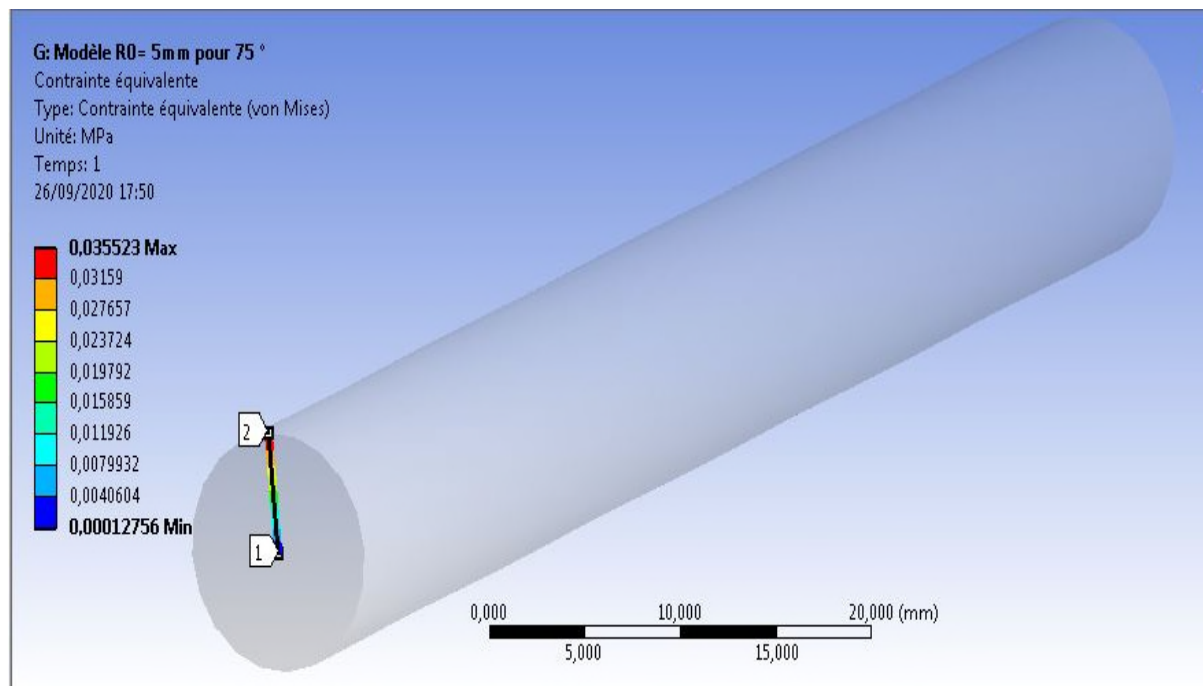


Figure III.33 : Distribution des contraintes de Von Mises

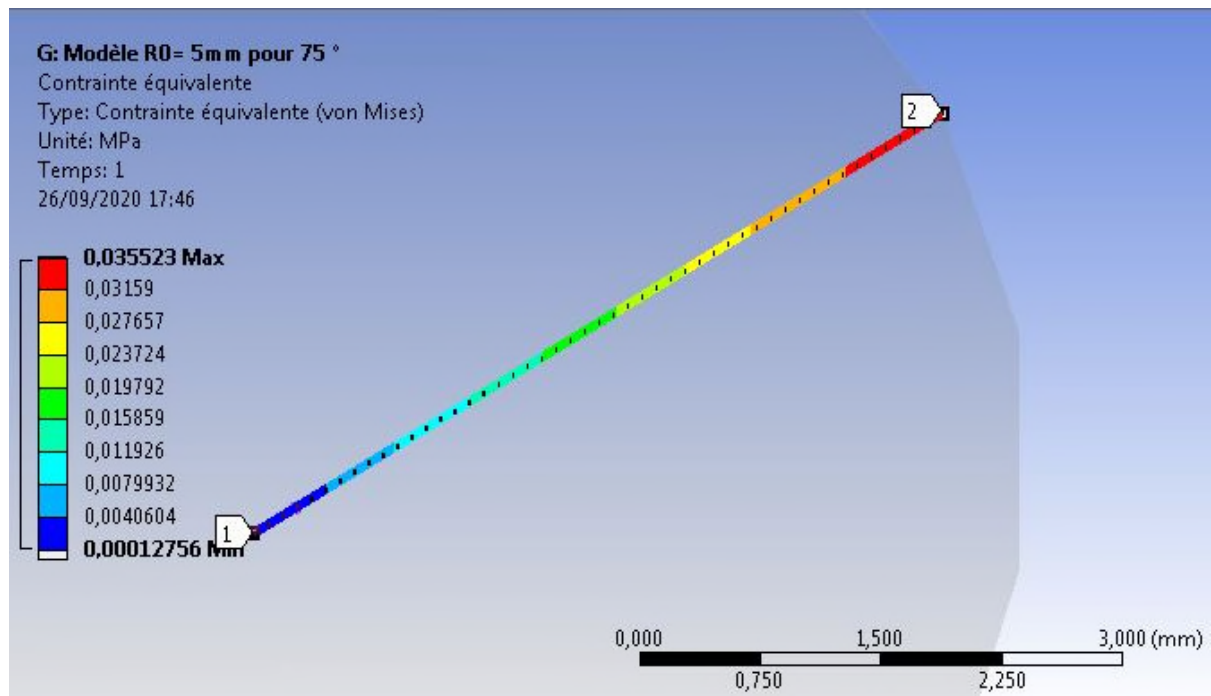


Figure III.34 : Distribution des contraintes Von Mises suivant la trajectoire \mathcal{L}

III.2.4 Comparaison des contraintes radiales analytiques et numériques

Dans cette partie, nous allons comparer les contraintes radiales obtenues analytiquement avec celles obtenues par un calcul éléments finis dans le cadre de modèle de Mooney-Rivlin.

Pour R=5mm et L=100mm :

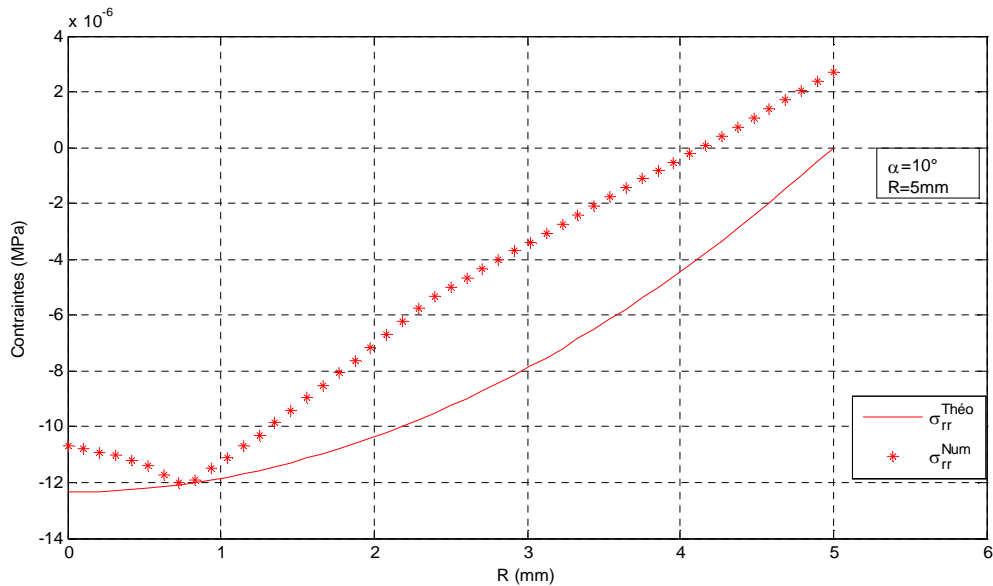


Figure III.35 : Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques. Pour $\alpha=10^\circ$

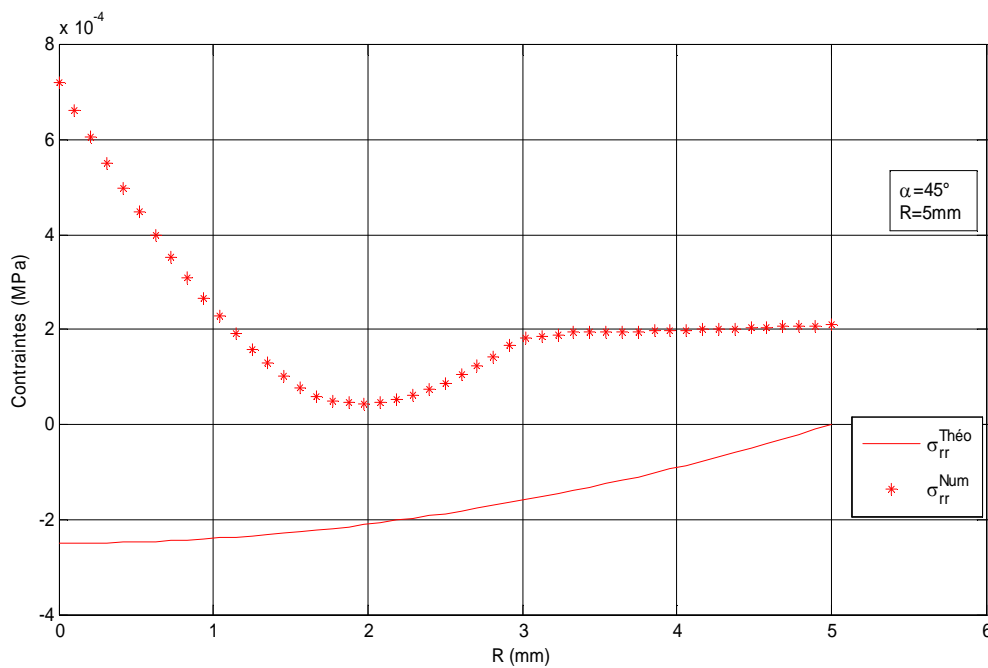


Figure III.36 : Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$

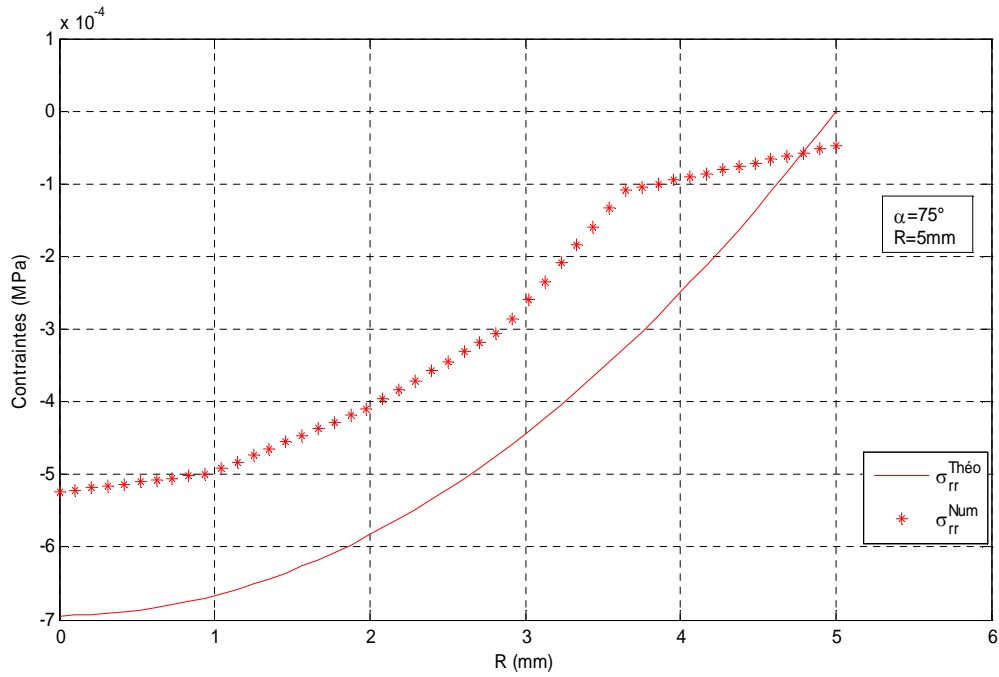


Figure III.37: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=75^\circ$

Pour $R=10\text{mm}$ et $L=100\text{mm}$:

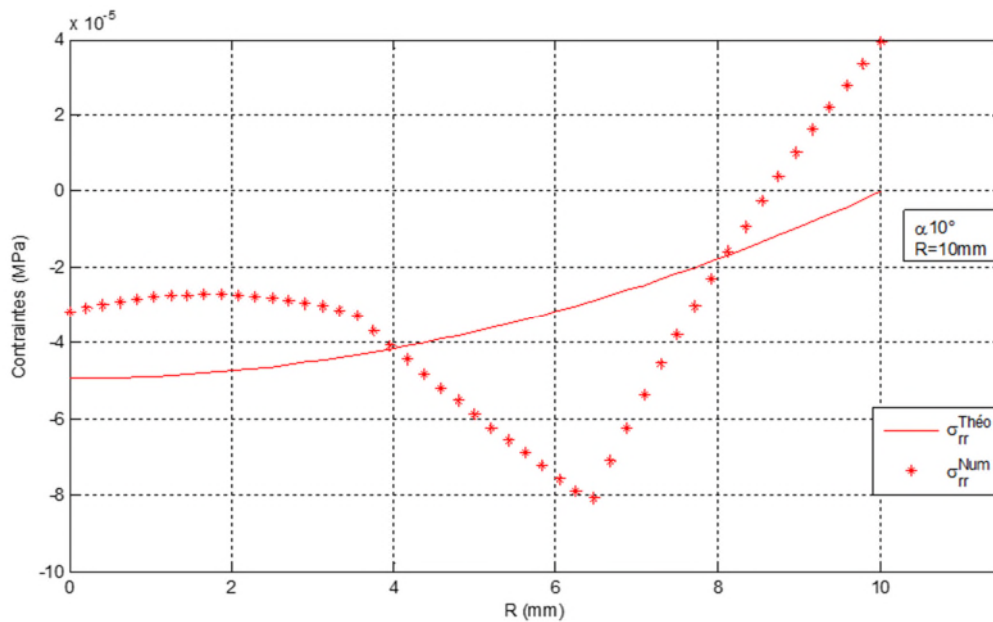


Figure III.38: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques. Pour $\alpha=10^\circ$

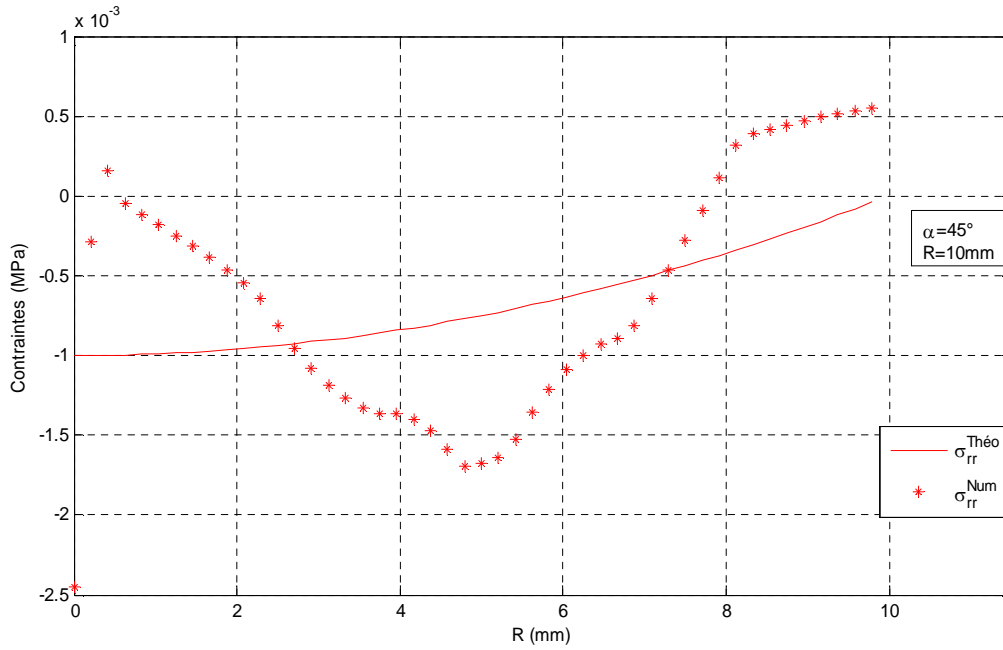


Figure III.39 : Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$

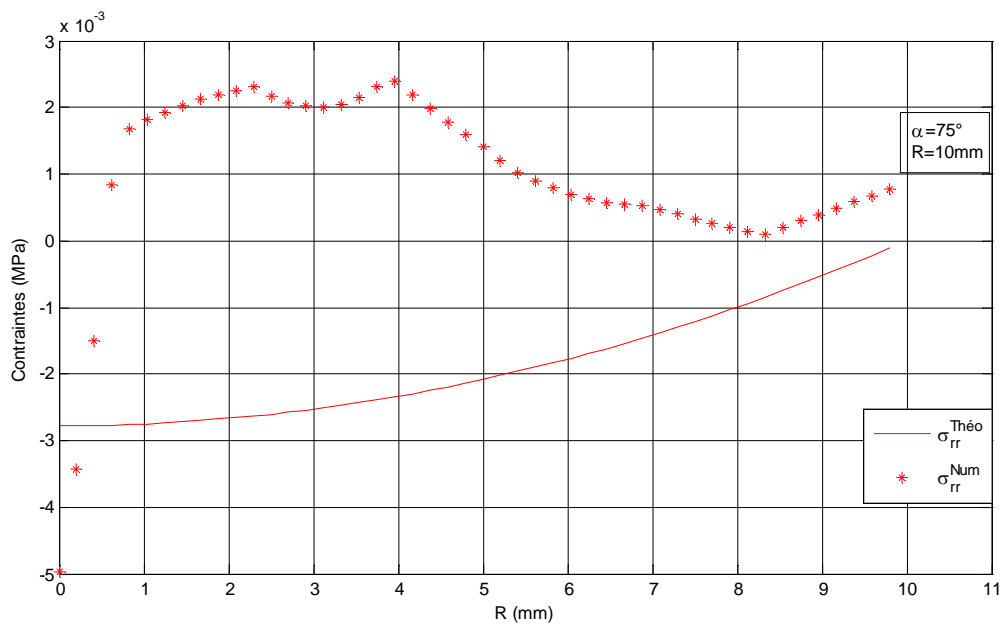


Figure III.40 : Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=75^\circ$

Pour R=20mm et L=100mm

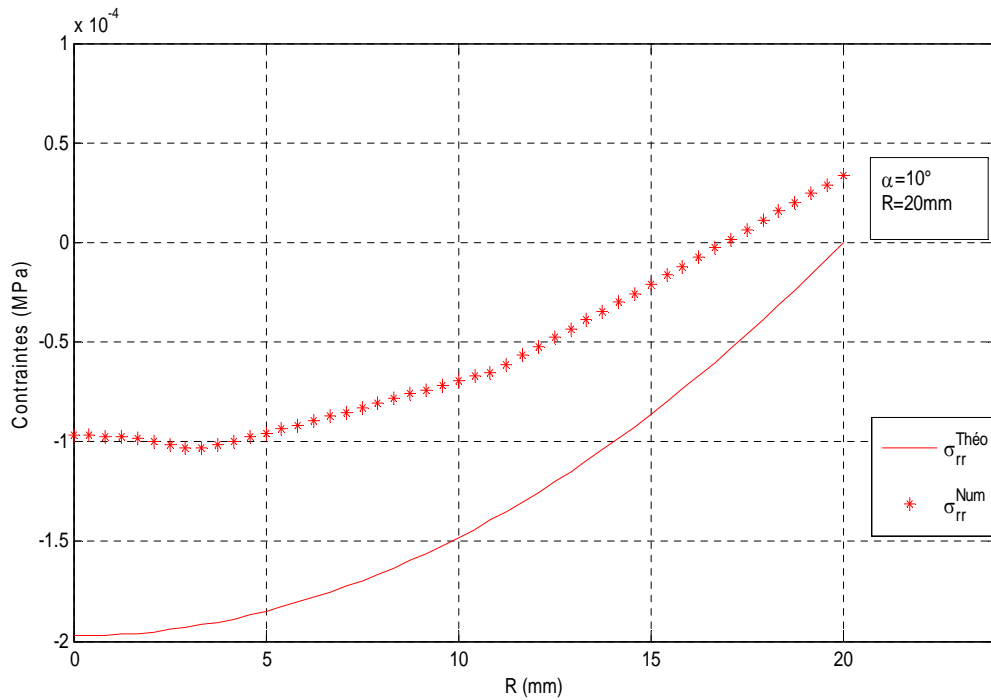


Figure III.41: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=10^\circ$

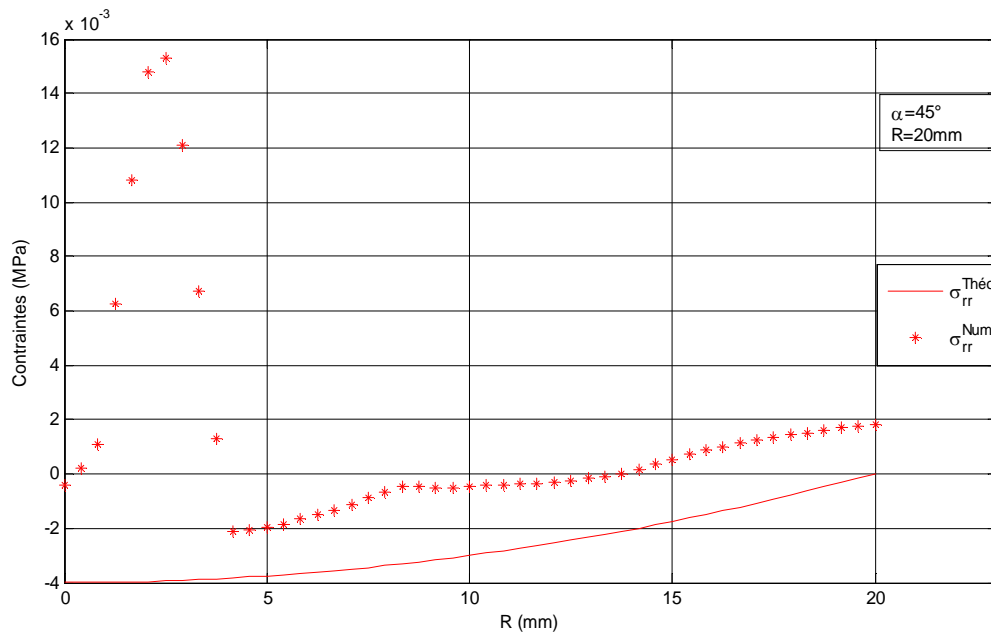


Figure III.42: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$

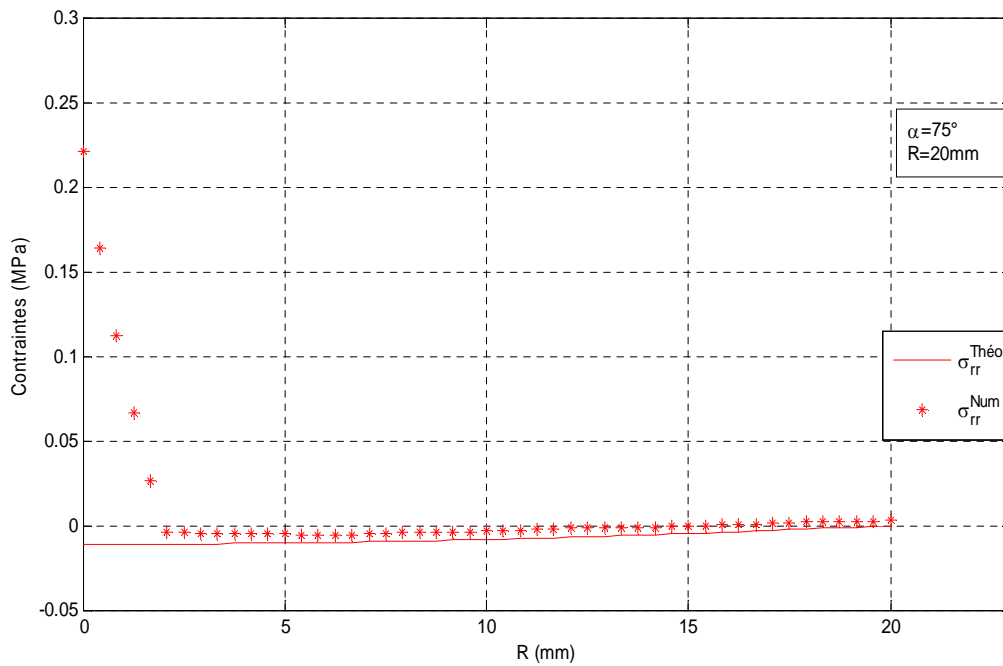


Figure III.43: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=75^\circ$

Pour R=20mm et L=50mm :

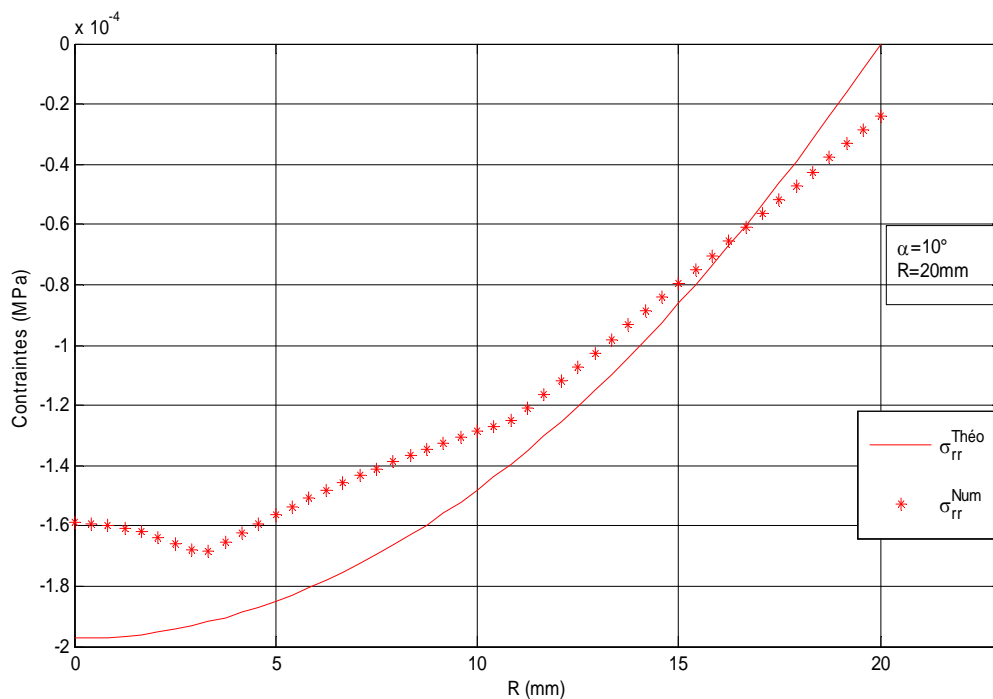


Figure III.44: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=10^\circ$

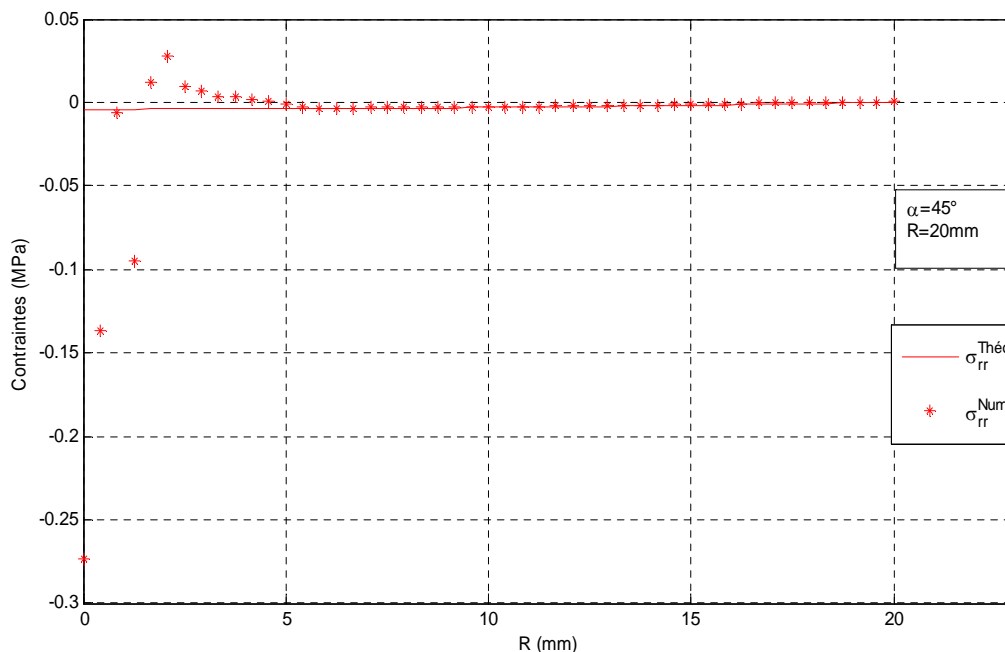


Figure III.45: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$.

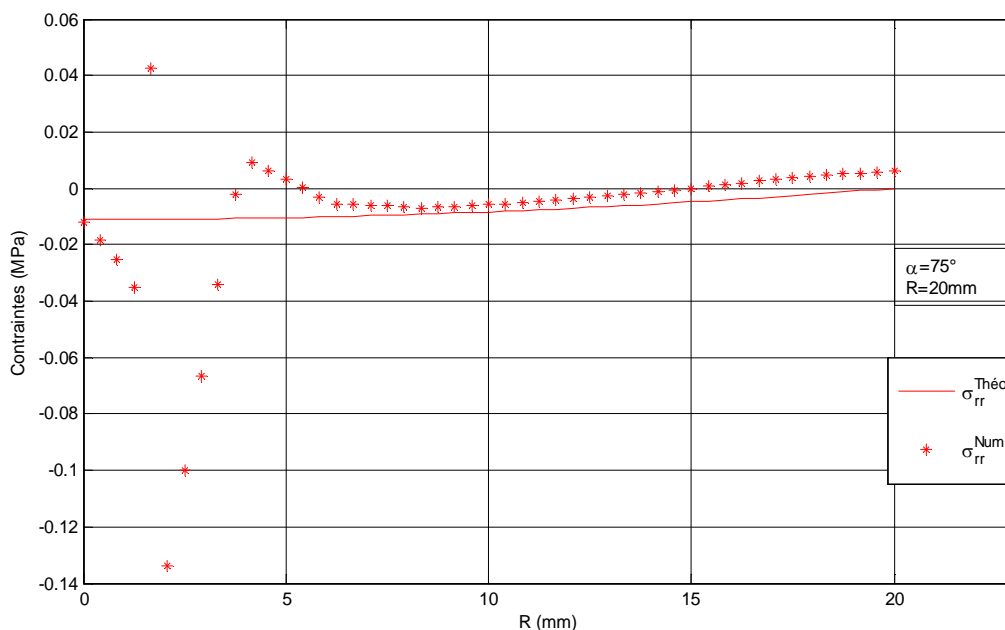


Figure III.46: Evolution des contraintes radiales en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=75^\circ$.

On constate que la contrainte radiale au centre déterminé numériquement est différente avec celle calculée analytiquement et ce pour les deux valeurs de de $Z=L/2$ et $Z=L$, ceci est peut être dû au glissement de l'axe du cylindre. Cette différence est remarquable surtout pour les angles de torsion de 45° et 75° .

III.2.5 Comparaison des contraintes analytiques et numériques

Dans cette partie, nous allons comparer les contraintes (σ_{rr} ; $\sigma_{\theta\theta}$; σ_{zz} ; $\sigma_{\theta z}$; σ_{vm}) obtenues analytiquement avec celles obtenues par un calcul éléments finis dans le cadre du modèle de Mooney-Rivlin.

Pour R=5mm et L=100mm :

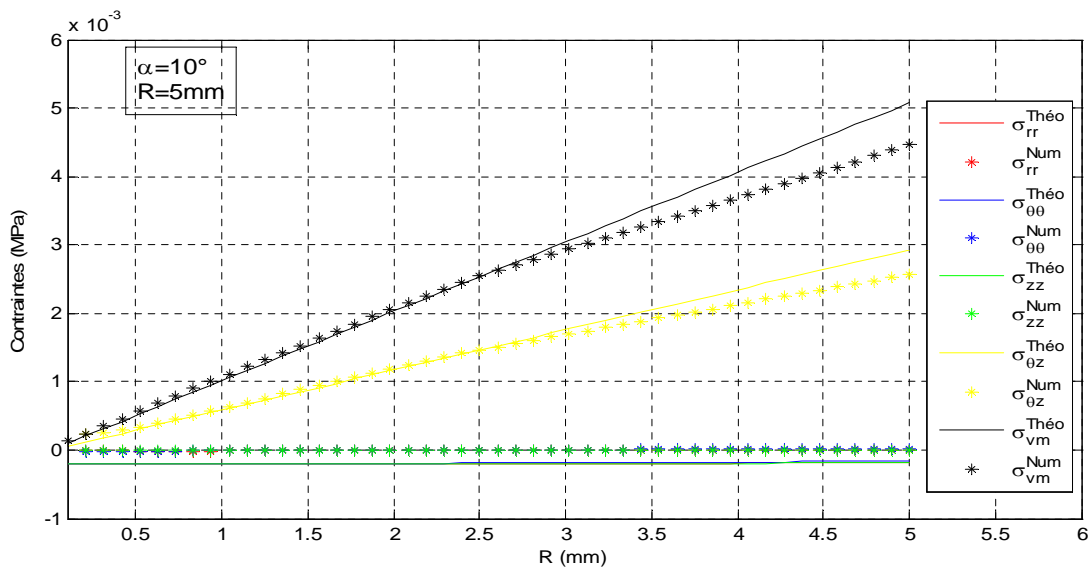


Figure III.47: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=10^\circ$

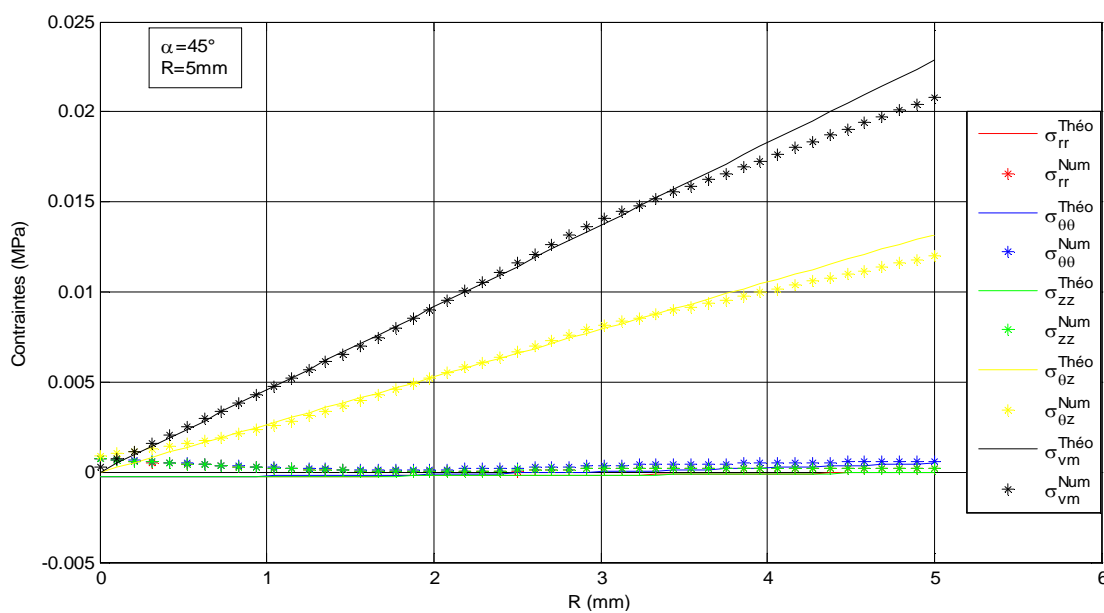


Figure III.48: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$

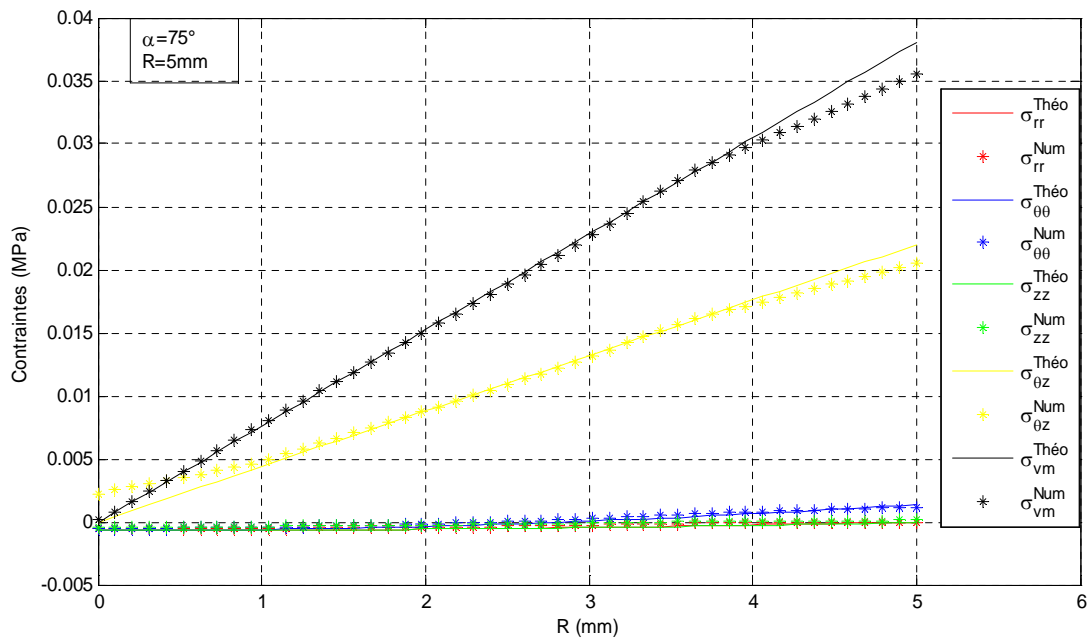


Figure III.49: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=75^\circ$

Pour R=10mm et L=100mm :

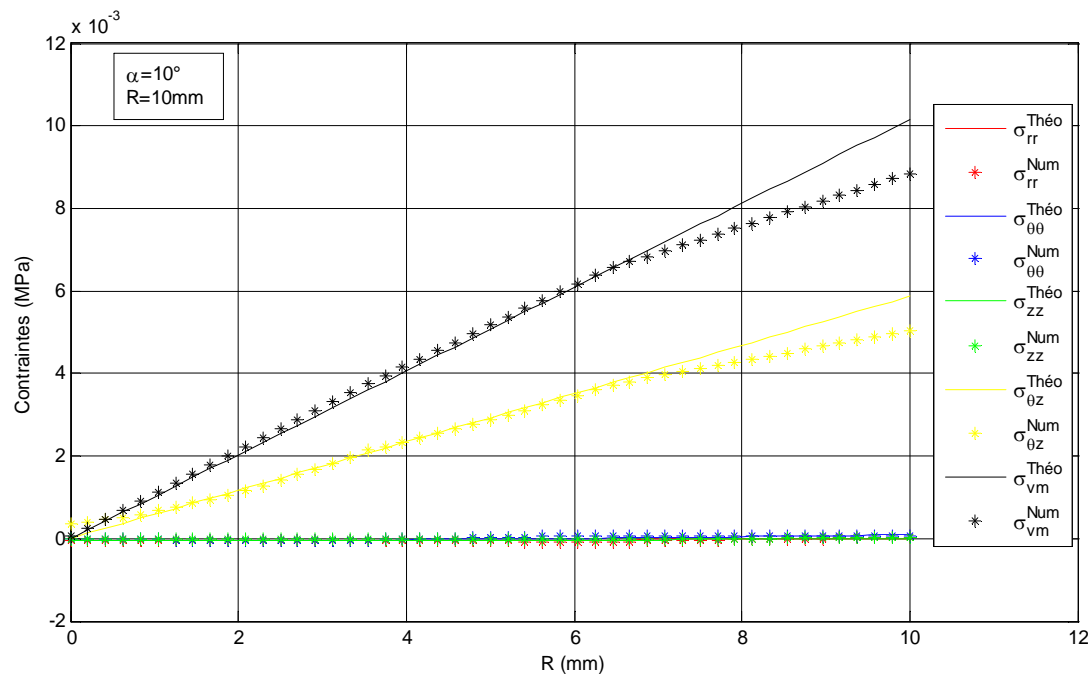


Figure III.50: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=10^\circ$

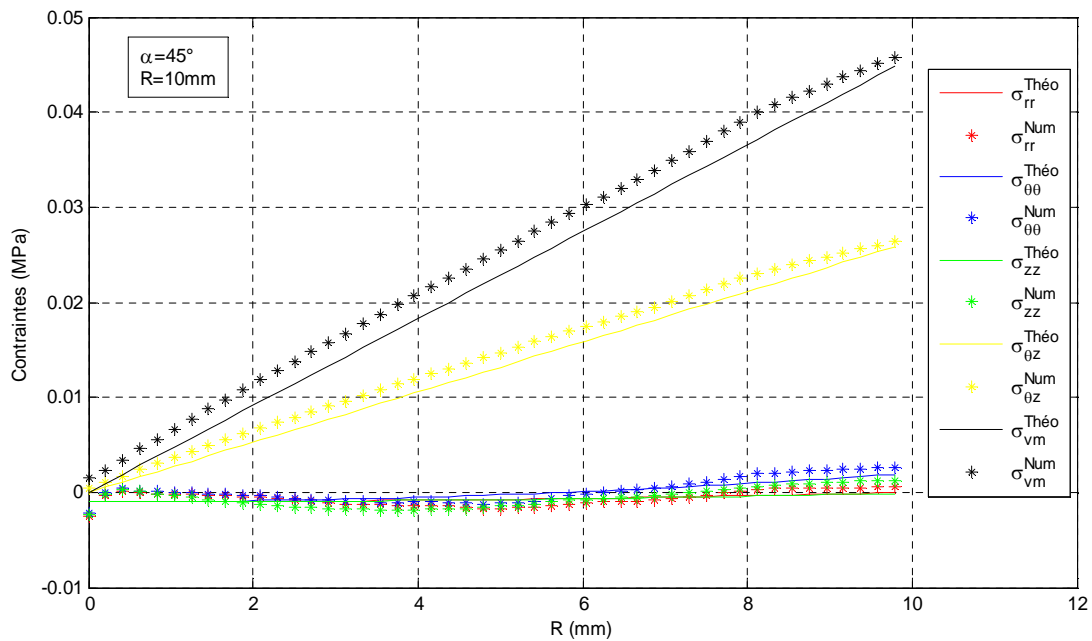


Figure III.51 Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha = 45^\circ$

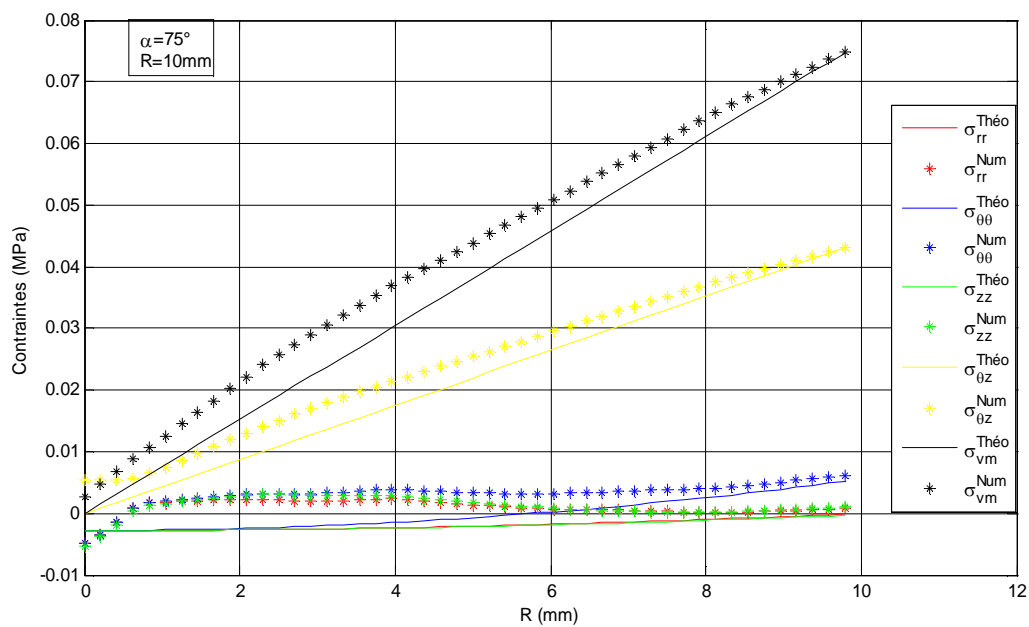


Figure III.52: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha = 75^\circ$.

Pour $R=20\text{mm}$ et $L=100\text{mm}$:

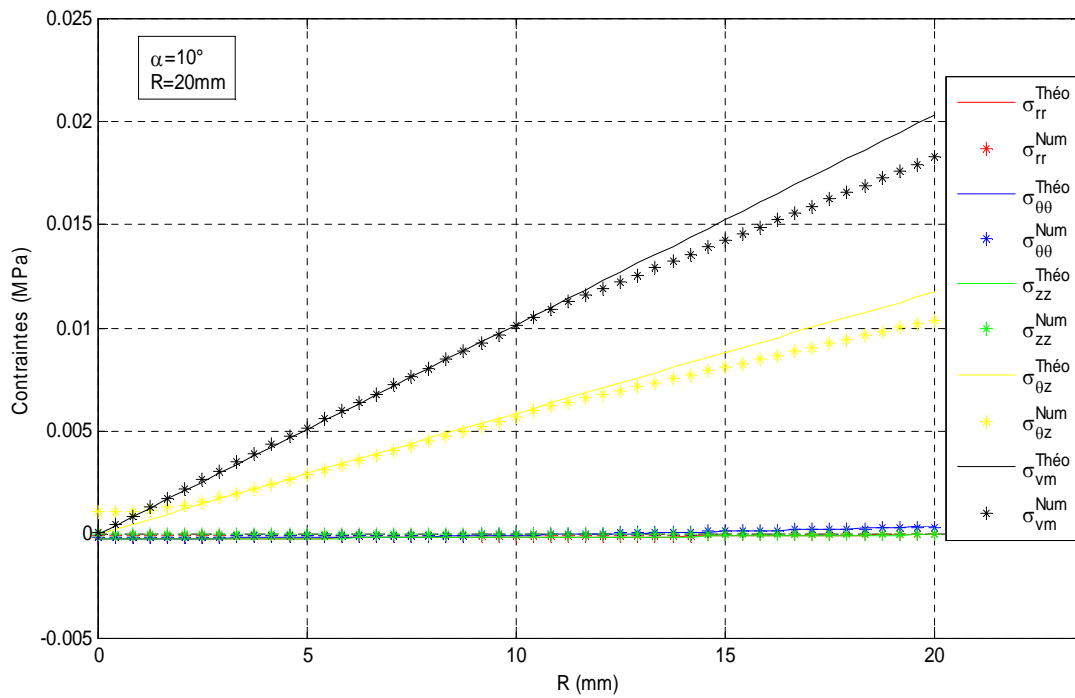


Figure III.53: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=10^\circ$.

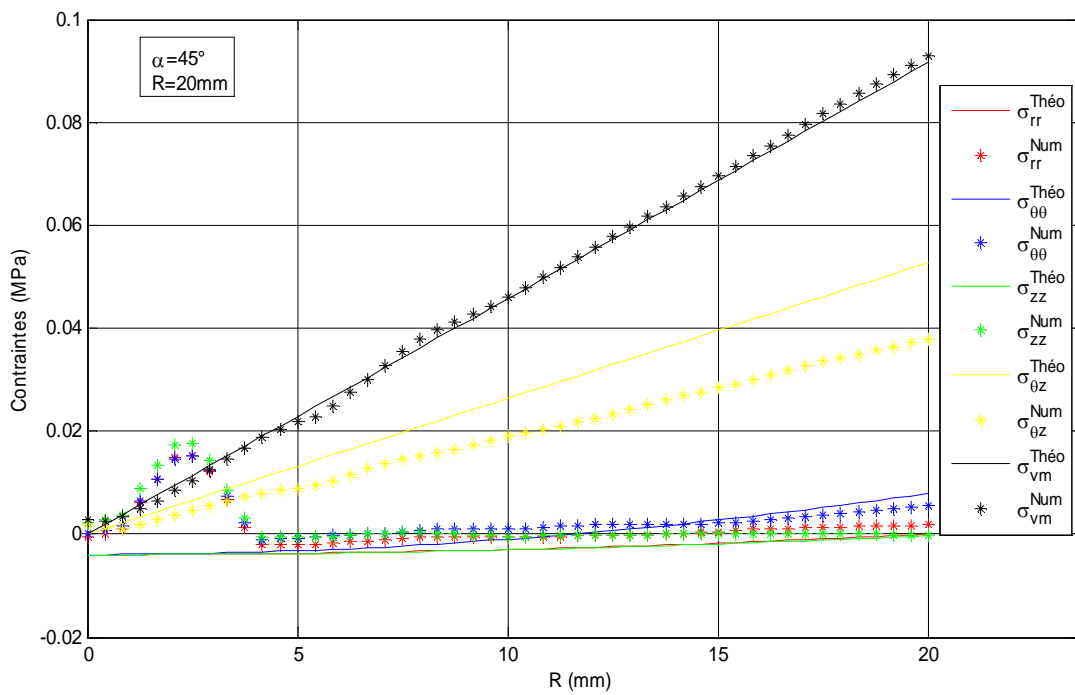


Figure III.54: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$.

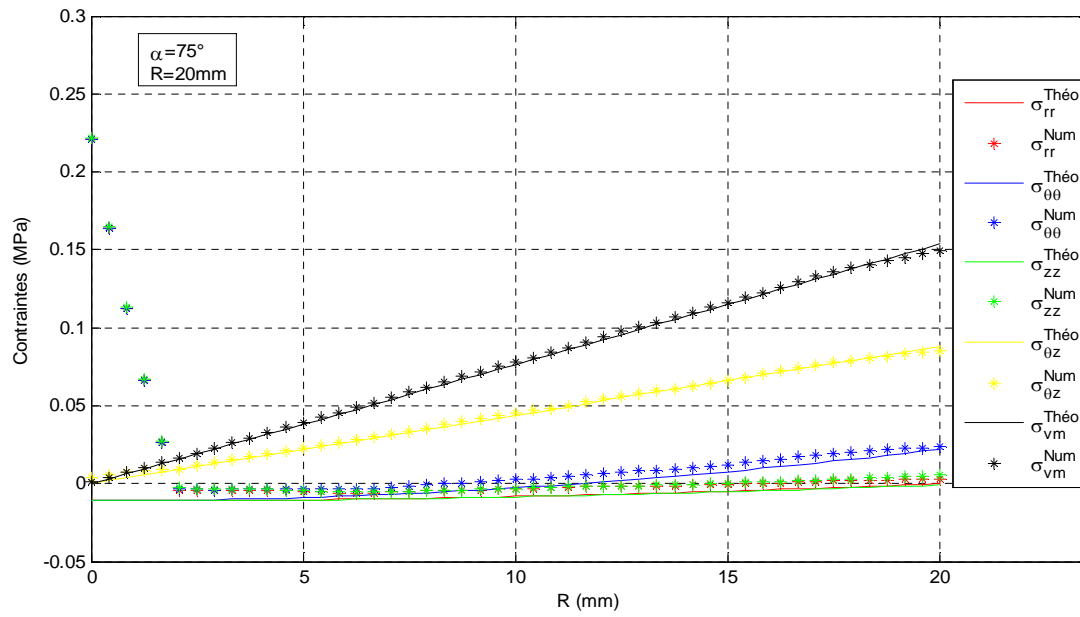


Figure III.55: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha = 75^\circ$.

Pour R=20mm et L=50mm :

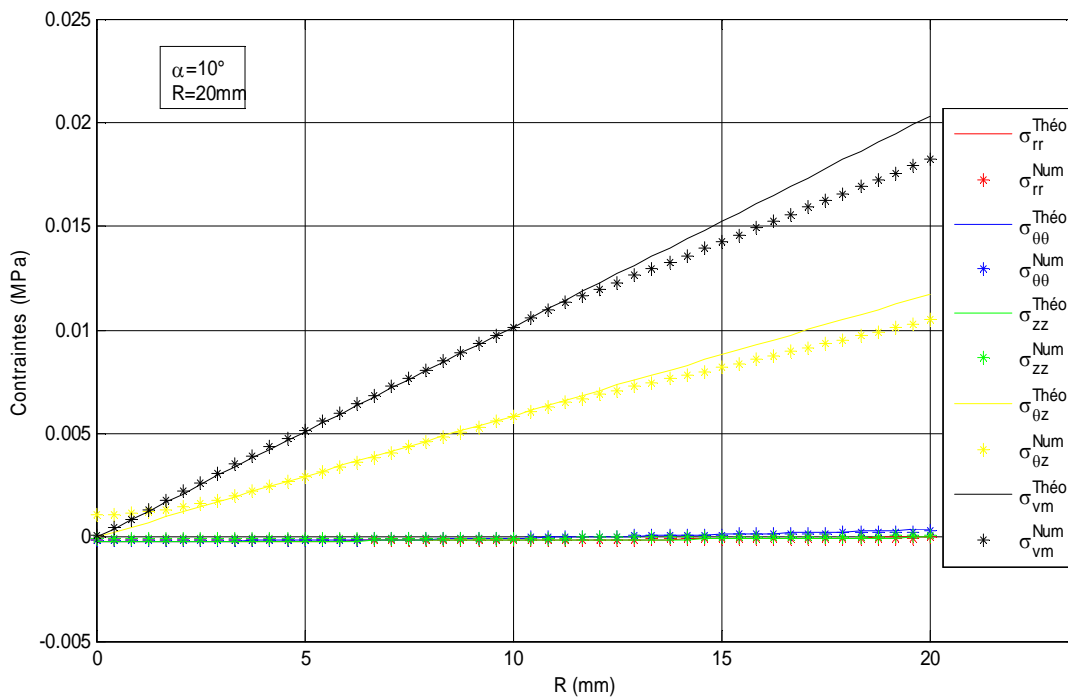


Figure III.56: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha = 10^\circ$.

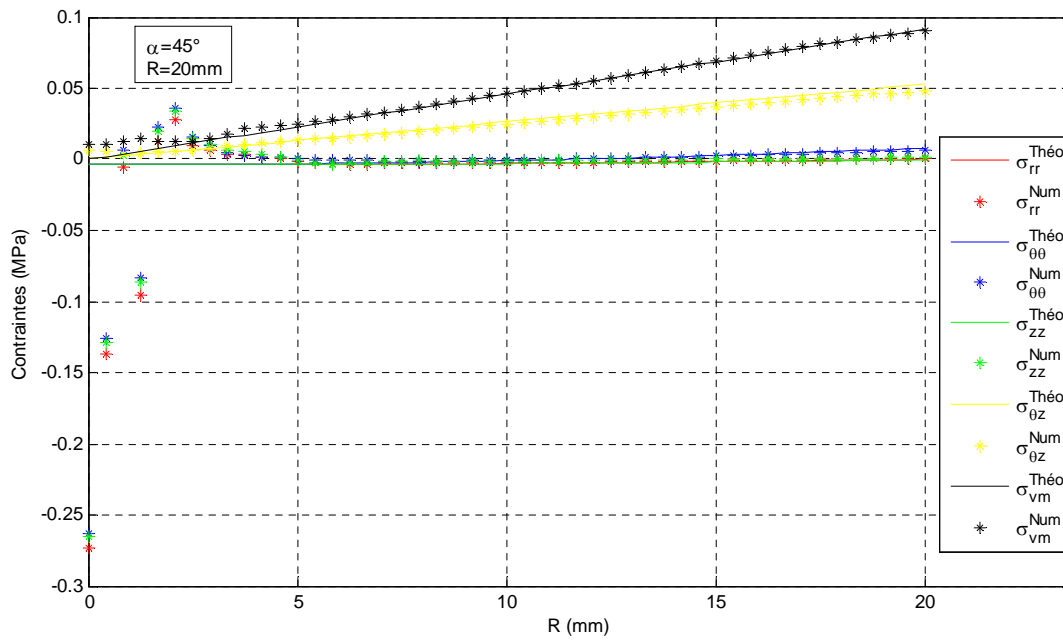


Figure III.57: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=45^\circ$.

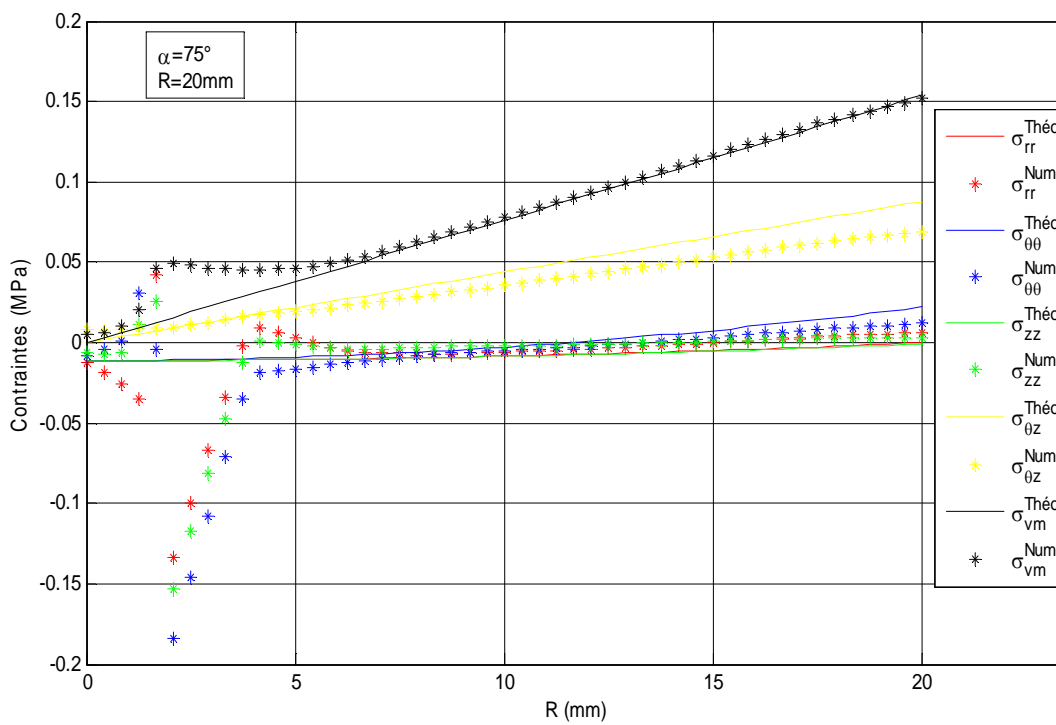


Figure III.58: Evolution des contraintes en fonction du rayon (R) : comparaison des résultats numériques aux résultats théoriques pour $\alpha=75^\circ$.

D'après nos résultats, on constate que les contraintes de Von Mises sont presque nulles au centre et elles sont maximales sur la surface extérieure du cylindre.

La distribution des contraintes de Von Mises sont uniforme pour un rayon R fixé compris entre la valeur minimale ($R=0$) et la valeur maximale ($R=A$).

Les courbes (III.47) à (III.58) montrent que les contraintes radiales σ_{rr} , les contraintes circonférentielles $\sigma_{\theta\theta}$ et les contraintes axiales σ_{zz} sont très faibles par rapport aux contraintes de cisaillement $\sigma_{\theta z}$.

D'après les courbes obtenues pour $R=20\text{mm}$, $Z=100\text{mm}$ et $Z=50\text{mm}$ (courbes III.53 à III.58), on constate que les contraintes ne dépendent pas de Z . La variable torsion est supposé une fonction linéaire de Z , c'est-à-dire $g(Z)=\tau Z$ où τ est constant.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la torsion des cylindres hyper-élastique en supposant que la variable torsion est une fonction quelconque.

Nous avons trouvé que la fonction $g(Z)$ doit être une fonction linéaire de Z , et dans ce cas les sollicitations appliquées sont le moment de torsion, la force de compression est une pression extérieure.

La comparaison entre les résultats analytiques et numériques est développée dans le cadre du modèle de Mooney-Rivlin avec l'hypothèse d'un angle de torsion constant.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE

La torsion des cylindres hyper-élastiques constitue un mode de déformation non homogène. Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude analytique et numérique de la torsion d'un cylindre hyper-élastique.

Dans la première partie, nous avons démontré que dans le cas où le potentiel hyper-élastique W dépend des deux premiers invariants du tenseur de Cauchy Green, et si $\frac{\partial w}{\partial I_1} = cst$, la variable torsion doit être une fonction linéaire de Z , c'est-à-dire $g(Z) = \tau Z$.

Les sollicitations appliquées sont le moment de torsion M , la force de compression F_z est une pression extérieure appliquée sur la surface latérale du cylindre, cette dernière peut être soit constante ou nulle.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié analytiquement et numériquement la distribution des contraintes dans le cadre du modèle de Mooney-Rivlin. La variable torsion est supposé constante. Les résultats obtenus montrent que les contraintes déterminées numériquement et analytiquement sont presque les mêmes.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERNCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Adnane Boukamel. Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères (2006). Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Université de la méditerranée (Aix-Marseille II).
- [2] Christian Huetz de lamps, Françoise Katzanevas, élastomères ou caoutchoucs. Encyclopedia universalis.
- [3] Nichel Fontanille, Yves Gnanou .Chimie et physico-chimie des polymeres.Master école d'ingénieur.
- [4] Gregory chagnon, thèse doctorat modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères. Ecole centrale de Nantes. Dunod.
- [5] Youcef Iabbassen, thèse de magistère (2008).Analyse critique des différentes approches de L'effet Mullins : Tentative de prise en compte de l'effet visqueux'. Université de Bejaia.
- [6] Erwan Verron. Modélisation du comportement des structures et des matériaux Élastomères, (2003), Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. L' Ecole Centrale de Nantes.
- [7] Safia Bouzidi., Modélisation micro-mecanique du comportement hyper-élastique des Élastomères composite, (2006). Thèse magister, université de Bejaia
- [8] Patricia Saad, modélisation et identification du comportement non linéaire cales en caoutchouc thèse doctorat l'école central de Lyon.
- [9] Jean Coirier, « Mécanique des milieux continus», Dunod, 2001.
- [10] Stéphane Meo, modélisation numérique du comportement mécanique de structures en Élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-Hyper-élasticité, Thèse de doctorat, université de La méditerranée Aix Marseille 2.
- [11] Ogden R.W. Large deformation et isotropic elasticity in the correlation of theory and Experiment for incompressible rubber-like solids .Proc. R. London, ser .A 326,565-584. (1972).
- [12] Gilles Marckmann. Contribution à l'étude des élastomères et des membranes soufflées Mécanique. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, thèse de doctorat, 2004.
- [13] D.A.Warne. P.G.Warne.Torsion in nonlinearly elastic incompressible circular cylinders. International journal of Non-linear Mechanics.

Résumé

Les élastomères, souvent appelés caoutchoucs dans le langage commun, sont largement utilisés dans l'industrie pour des applications antivibratoires. Le travail concerne l'étude de la torsion pure d'un cylindre en élastomère. Le modèle hyper-élastique choisi est le modèle de Mooney-Rivlin.

Nous avons démontré que dans le cas où le potentiel hyper-élastique W dépend des deux invariants du tenseur de Cauchy Green, la variable torsion doit être une fonction linéaire.

Summary

Elastomers, often referred to as rubbers in common parlance, are widely used in industry for anti-vibration applications. The work concerns the study of the pure torsion of an elastomer. The hyper-elastic model chosen is the Mooney-Rivlin model.

We have demonstrated that the hyper-elastic potential W depends on the two invariants of the Cauchy tensor Green, the variable torsion must be a linear function.