

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Par :

HADDAD Aghilasse

CHAOUCH Oualid

Thème

**Ecoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une
plaque verticale avec un flux surfacique imposé**

Soutenu le 08/10/2020 devant le jury composé de :

M^{lle}. N. ADJOUADI

Président

Mr. H. ALI AGHA

Rapporteur

Mr. M. HAMDI

Examineur

Année Universitaire 2019-2020

Remerciements

Avant tout, nous remercions Dieu le tout puissant, de nous avoir donné la force et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Notre profonde gratitude et nos remerciements les plus chaleureux vont particulièrement à notre promoteur Mr H. ALI AGHA de nous avoir suivi et dirigé tout au long de la réalisation de ce travail. Aussi, on le remercie pour sa disponibilité, pour son orientation efficace et ses conseils avisés qui ont servi à enrichir ce travail.

Nos vifs remerciements vont également au membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

Tous les mots restent faibles et insuffisants pour exprimer notre gratitude envers nos parents, et nos familles qui ont été d'un soutien exemplaire durant nos parcours et nos moments les plus difficiles.

Enfin, nos remerciements vont également à tous nos amis, nos collègues et à tous ceux et celles qui de près ou de loin nous ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Dédicaces

Je dédie ce travail

*A mon très cher père et à ma très chère mère, qui m'ont éclairé le chemin en me
donnant la main tout au long de mes années d'étude*

« Que dieu me les gardes ».

A mon frère.

A ma sœur.

A la mémoire de mon oncle Mouloud.

A mon oncle Achour.

A mon oncle Khier.

A tous mes amis sans exception.

A tous mes maîtres.

A tous ceux qui me sont chers.

Aghilasse Lev Haddad

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

*Aux personnes les plus importantes de ma vie ; mon cher père et ma chère mère
qui ont été présents pour moi pendant tous mon cursus et ma vie, mais surtout
qui ont toujours su trouver les mots qui m'encourageaient et qui me poussaient
à aller de l'avant.*

A ma grand-mère et à la mémoire de mon grand-père.

A mes chères sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

A tous ceux auxquels je tiens et que je n'ai pas mentionné.

Oualid

Sommaire

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Sommaire	iv
Liste des figures	vi
Nomenclature.....	vii
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Théorie et contexte scientifique	3
I.1. Introduction	3
I.2. Notion générale sur les nanofluides	3
I.2.1. Introduction	3
I.2.2. Nanoparticules et fluides porteurs.....	4
I.2.3. Types de nanoparticules	5
I.2.4. Fabrication et préparation des nanofluides.....	5
I.3. Propriétés thermophysiques des nanofluides	8
I.3.1. Masse volumique effective.....	9
I.3.2. Chaleur spécifique effective	10
I.3.3. Coefficient d'expansion thermique effective	10
I.3.4. Conductivité thermique effective des nanofluides	11
I.3.5. Viscosité dynamique effective	13
I.4. Domaines d'applications des nanofluides	15
I.5. Notion sur la convection	17
I.5.1. Différents types de convection	17
I.5.2. Convection naturelle	18

I.5.3.	Notion de couche limite thermique et hydrodynamique	20
I.6.	Etat de l'art	22
I.7.	Conclusion.....	24
Chapitre II : Problématique et modélisation mathématique		26
II.1.	Introduction	26
II.2.	Problème physique	26
II.3.	Equations mathématiques.....	27
II.3.1.	Equations dimensionnelle	27
II.3.2.	Equations différentielles ordinaire	29
II.3.3.	Conditions aux limites ordinaires.....	31
II.3.4.	Caractérisation du nombre de Nusselt et Sherwood.....	31
II.4.	Méthode numérique.....	32
II.5.	Conclusion.....	32
Chapitre III : Résultats et discussion		33
III.1.	Introduction	33
III.2.	Validation du code de calcul	33
III.3.	Profils de vitesse adimensionnelle	34
III.4.	Profils de température adimensionnelle	36
III.5.	Profils de concentration adimensionnelle.....	37
III.6.	Variation du nombre Nusselt local Nu_x	39
III.7.	Variation du nombre de Sherwood local Sh_x	41
III.8.	Conclusion.....	43
Conclusion générale		45
Références bibliographiques.....		48
Annexe		51
Résumé		57
Abstract		57

Liste des figures

Figure I.1 : Nanoparticules sphériques ; Nanotubes de carbone (Bang et Chang [3]).	5
Figure I.2 : Procédé de synthèse de nanofluide en une seule étape (Ribeiro et Gruss [4]).	6
Figure I.3 : Procédure de synthèse de nanofluide en deux-étapes [5].	7
Figure I.4 : Mécanisme de répulsion : répulsion stérique (a) et répulsion électrostatique (b) [6].	7
Figure I.5 : Propriétés thermophysiques du nanofluide.	9
Figure I.6 : Développement de la couche limite sur une plaque verticale chauffée.	20
Figure II.1 : Modèle physique et le système des coordonnées utilisé pour modéliser le transfert convectif devant une plaque verticale dans un milieu saturé d'un nanofluide.	27
Figure III.1 : Variation du nombre de Nusselt avec Pr, Nb, Nt et Nr.	33
Figure III.2 : Effet de Nr, de Nb et de Nt sur le nombre de Nusselt réduit [29].	34
Figure III.3 : Variation des profils de vitesse avec Pr et Nr (Nt = Nb = 0.5, Le = 1.0).	35
Figure III.4 : Variation des profils de vitesse avec Nt et Nb (Nr = 0.2, Le = 1.0).	35
Figure III.5 : Variation des profils de température avec Pr, Nb et Nt (Nr=0.3, Le=1.0).	36
Figure III.6 : Variation des profils de température avec Pr et Nr (Nb=Nt=0.5, Le=1.0).	37
Figure III.7 : Variation des profils de concentration avec Nb, Nt et Le (Nr=0.2, Pr=2.0).	38
Figure III.8 : Variation des profils de concentration avec Pr, Nb et Nt (Nr=0.5, Le=2.0).	39
Figure III.9 : Variation du nombre de Nusselt avec Pr et Nr (Nt=Nb=0.5, Le=2).	40
Figure III.10 : Variation du nombre de Nusselt avec Pr et Nt (Nb=0.5, Nr=1, Le=2).	40
Figure III.11 : Variation du nombre Nusselt avec Pr et Nb (Nt=0.5, Nr=0.1, Le=2).	41
Figure III.12 : Variation du nombre Sherwood avec Pr et Nr (Nt=Nb=0.5, Le=2).	42
Figure III.13 : Variation du Nombre Sherwood avec Pr, Nt et Nb (Nr=0.1, Le=2).	42
Figure III.14 : Variation du Nombre de Sherwood avec Pr et Le (Nr=0.1, Nt=Nb=0.6).	43

Nomenclature

Symboles	Définition	Unité (SI)
C	: Concentration massique	kg m^{-3}
C_p	: Capacité thermique massique à pression constante	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
C_v	: Capacité thermique massique à volume constant	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
D_B	: Coefficient de diffusion Brownienne	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
D_T	: Coefficient de diffusion thermophorétique	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
f	: Coefficient de frottement	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
g	: Accélération de la pesanteur	m s^{-2}
H	: Enthalpie massique	J kg^{-1}
j	: Densité de flux convectif	W m^{-2}
k	: Conductivité thermique	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
k_H	: Coefficient de Huggins	ml/mg
k_f	: Conductivité thermique du fluide de base	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
k_{nf}	: Conductivité thermique du nanofluide	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
k_s	: Conductivité thermique des nanoparticules	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
Le	: Nombre de Lewis	-
Nb	: Paramètre d'un mouvement Brownien	-
Nr	: Taux de flottabilité des nanoparticules	-
Nt	: Paramètre de mouvement thermophorétique	-
Nu	: Nombre de Nusselt	-
p	: Pression	Pa
Pr	: Nombre de Prandtl, $\text{Pr} = \nu / \alpha$	-
Q	: Flux de chaleur	W
q''_m	: Flux massique de la paroi	W m^{-1}
q''_w	: Flux thermique de la paroi	W m^{-1}
Ra_x	: Nombre de Rayleigh local	-
Sh_x	: Nombre de Sherwood local	-
T	: Température	K

T_w	: Température à la paroi	K
T_∞	: Température de fluide à l'infini	K
U	: Energie interne massique	$J\ kg^{-1}$
u, v	: Composantes du vecteur vitesse	$m\ s^{-1}$
V_f	: Volume de fluide de base	m^3
V_s	: Volume des nanoparticules	m^3
x, y	: Cordonnées cartésiennes	-

Symboles grecs

α	: Diffusivité thermique	$m^2\ s^{-1}$
β_T	: Coefficient d'expansion thermique	K^{-1}
β_f	: Coefficient d'expansion thermique de fluide de base	K^{-1}
β_{nf}	: Coefficient d'expansion thermique du nanofluide	K^{-1}
β_s	: Coefficient d'expansion thermique des nanoparticules	K^{-1}
∂	: dérivée	-
η	: Variable de similitude	-
θ	: Température adimensionnelle	-
μ	: Viscosité dynamique	$kg\ m^{-1}s^{-1}$
μ_f	: Viscosité dynamique de fluide de base	Pa s
μ_{nf}	: Viscosité dynamique d'un nanofluide	Pa s
ν	: Viscosité cinématique	$m^2\ s^{-1}$
ρ	: Masse volumique	$kg\ m^{-3}$
ρ_f	: Masse volumique de fluide de base	$kg\ m^{-3}$
ρ_{nf}	: Masse volumique du nanofluide	$kg\ m^{-3}$
τ	: rapport entre la capacité thermique effective du matériau nanoparticulaire et la capacité thermique du fluide	-
$\bar{\tau}$: Tenseur des contraintes visqueuses	Pa
φ	: Fraction volumique des nanoparticules	-
ψ	: Fonction du courant	-

Indices

eff	: Effective.
f	: Fluide.

nf	: Nanofluide.
s	: Nanoparticule solide.
w	: Paroi.
∞	: Infini.

Abréviations

NTC	: Nanotubes du Carbone.
CVD	: Dépôt chimique en phase vapeur.
PVD	: Dépôt physique en phase vapeur.
PECVD	: Dépôts chimiques en phase vapeur assistés par plasma.
EG	: Ethylène glycol.

Introduction générale

Introduction générale

Les industriels sont pris en étau entre, d'une part, des contraintes environnementales strictes et d'autre part, l'inflation et la raréfaction des matières premières (fossiles, combustibles et nucléaires). Pour maintenir une croissance économique et une compétitivité acceptable, les industriels doivent innover en modifiant ou en imaginant des technologies moins énergivores tout en étant plus performantes, un échange thermique ultra-performant est l'un des besoins les plus vitaux pour ces nombreuses technologies industrielles. Cependant, une conductivité thermique intrinsèquement faible est une limitation principale dans le développement des fluides caloporteurs ecoénergétiques qui sont nécessaires pour un transfert de chaleur ultra-performant.

La nanotechnologie moderne peut produire des particules métalliques ou non métalliques de dimensions nanométriques. Les nanomatériaux ont des propriétés mécaniques, optiques, électriques, magnétiques et thermiques uniques. Les nanofluides sont conçus en suspendant des nanoparticules de taille moyenne inférieure à 100 nm dans des fluides caloporteurs traditionnels tels que l'eau, l'huile et l'éthylène glycol. Une très petite quantité de nanoparticules invitées, lorsqu'elles sont dispersées uniformément et suspendues de manière stable dans les fluides hôtes, peut apporter des améliorations spectaculaires dans les propriétés thermiques des fluides hôtes. Nanofluides (suspensions fluides de nanoparticules) est le terme inventé par Choi (1995) [1] pour décrire cette nouvelle classe de fluides caloporteurs basés sur la nanotechnologie qui présentent des propriétés thermiques supérieures à celles de leurs fluides hôtes ou des suspensions fluides à particules conventionnelles. La technologie des nanofluides, un nouveau domaine interdisciplinaire de grande importance où la nanoscience, la nanotechnologie et l'ingénierie thermique se rencontrent, s'est largement développée au cours de la dernière décennie. Le but des nanofluides est d'obtenir les propriétés thermiques les plus élevées possibles aux plus petites concentrations possibles (de préférence <1% en volume) par une dispersion uniforme et une suspension stable de nanoparticules (de préférence <10 nm) dans les fluides hôtes. Pour atteindre cet objectif, il est essentiel de comprendre comment les nanoparticules améliorent le transport d'énergie dans les liquides.

Depuis que Choi a conçu le nouveau concept des nanofluides au printemps 1993, des talentueux et studieux scientifiques et ingénieurs thermiques dans la croissante communauté des nanofluides ont fait une percée scientifique non seulement en découvrant les propriétés

thermiques inattendues des nanofluides, mais aussi en proposant de nouveaux mécanismes derrière l'amélioration des propriétés thermiques des nanofluides, développer des modèles non conventionnels des nanofluides et identifier des opportunités inhabituelles pour développer des réfrigérants de nouvelle génération tels que des réfrigérants intelligents pour les ordinateurs et des réfrigérants sûrs pour les réacteurs nucléaires. En conséquence, le sujet de recherche sur les nanofluides a reçu une attention accrue dans le monde entier. La croissance récente des travaux dans ce domaine en rapide évolution des nanofluides est plus évidente à cause du nombre exponentiellement croissant de publications.

Nous avons entrepris une étude numérique d'un flux convectif naturel d'un nanofluide sur une plaque verticale soumise à un flux de chaleur surfacique constant, à la suite d'une analyse de similitude des équations de transport. Le modèle de transport utilisé inclut l'effet du mouvement brownien et de la thermophorèse.

Le présent travail est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre est divisé en trois parties dont la première est consacrée pour les nanofluides, leurs principales définitions, leurs fabrications, les propriétés essentielles liées à leurs utilisations ainsi que leurs applications dans divers domaines d'industrie. La deuxième partie est consacrée à l'étude théorique de la convection dans un milieu fluide et la troisième partie est consacrée à la synthèse bibliographique.

Dans le deuxième chapitre nous introduisons à la problématique ainsi la partie mathématique du problème étudié, ce chapitre sera consacré à la description du problème physique, la géométrie du problème, le système de coordonnées ainsi les équations dynamiques et thermiques qui gouvernent la zone de couche limite pour un nanofluide.

Le troisième chapitre est consacré pour la méthode numérique utilisé pour étudier le problème physique, nous avons choisi la méthode des différences finies. La programmation sera sous Matlab.

Dans ce dernier, nous discutons les résultats obtenus. Ensuite, nous examinons l'influence des paramètres de contrôle du problème sur la vitesse, la température et la concentration des nanoparticules.

Enfin, la conclusion où nous dégagerons les points forts et les résultats de notre étude et les perspectives qu'elle offre.

Chapitre I : Théorie et contexte scientifique

I. Théorie et contexte scientifique

I.1. Introduction

Le développement des nanotechnologies constitue un challenge pour les années à venir, les nanosciences étudient la structure de la matière au niveau moléculaire donc à l'échelle nanométrique dans le but d'innover dans de nombreux domaines tels que : l'environnement, la production et le stockage de l'énergie, le refroidissement des composants électroniques, la biologie, le diagnostic médical, le traitement d'eau, etc... En ce qui concerne les applications dans le domaine du transfert de chaleur, des études menées depuis une dizaine d'années ont montré que dans certaines conditions, l'ajout de particules nanométriques dans un fluide (appelé alors nanofluide) comme par exemple des particules d'Oxyde d'Aluminium (Al_2O_3), d'Oxyde de Cuivre (CuO), le cuivre (Cu) ou des nanotubes de carbone dans l'eau pouvaient augmenter le transfert de chaleur par rapport au cas du corps pur (eau), en modifiant de manière significative la conductivité thermique du fluide porteur. Différents modèles ont été élaborés en vue d'expliquer cette remarquable amélioration des transferts convectifs. Dans ce présent chapitre on parlera sur les nanofluides d'une façon générale, leur fabrication et leurs propriétés physiques et thermiques. On parlera aussi de différentes notions de la convection ainsi l'état de l'art en ce qui concerne les études antérieures faites sur le domaine de la convection en présence des nanofluides. On terminera notre chapitre avec une conclusion résumant le contexte du chapitre.

I.2. Notion générale sur les nanofluides

I.2.1. Introduction

Le transfert de chaleur est l'un des processus les plus importants dans nombreux produits industriels et de consommation. La conductivité thermique intrinsèquement médiocre des fluides conventionnels impose une limite fondamentale au transfert de chaleur. Par conséquent, pour plus d'un siècle depuis Maxwell (1873) [2], les scientifiques et les ingénieurs ont fait de grands efforts pour briser cette limite fondamentale en dispersant les particules de taille millimétrique ou micrométrique dans les liquides. Cependant, le problème majeur de l'utilisation de ces grosses particules est la sédimentation rapide de ces particules dans les fluides. Étant donné que la technologie des surfaces étendues a déjà été adaptée à ses limites dans la conception des systèmes de gestion thermique, les technologies susceptibles d'améliorer les propriétés thermiques d'un fluide sont de nouveau très intéressantes. Le

concept et l'émergence des nanofluides sont directement liés aux tendances de la miniaturisation et de la nanotechnologie. Le concept de Maxwell est ancien, mais ce qui est nouveau et innovant dans le concept des nanofluides, c'est l'idée que la taille des particules est d'une importance primordiale dans le développement des nanofluides stables et hautement conducteurs.

I.2.2. Nanoparticules et fluides porteurs

Une nanoparticule est un assemblage de quelques centaines à quelques milliers d'atomes, conduisant à un objet dont au moins l'une des dimensions est de taille nanométrique (1 à 100 nm). Les nanoparticules se situent à la frontière entre l'échelle microscopique et l'échelle atomique ou moléculaire. Elles ont un intérêt à la fois fondamental et appliqué et sont très étudiées de nos jours. De nombreux physiciens et chimistes les synthétisent, d'autres physiciens les étudient afin de comprendre la physique de ces objets nanométriques et des biologistes les utilisent comme marqueurs cellulaires.

Les liquides de base généralement utilisés dans la préparation des nanofluides sont ceux d'usage commun dans les applications de transfert de chaleur tels que l'eau, l'éthylène glycol, l'huile de moteur...etc. ; les nanoparticules peuvent être à base de métaux, d'oxydes, de carbures, de nitrures ou de carbone.

Les nanoparticules les plus utilisées pour obtenir des nanofluides sont :

- L'oxyde d'aluminium, (Al_2O_3).
- L'aluminium, (Al).
- Le cuivre, (Cu).
- L'oxyde de cuivre, (CuO).
- L'or, (Au).
- L'argent, (Ag).
- Les nanotubes de carbone.
- La silicone, (Si).
- Le dioxyde de titane, (TiO_2).

Les liquides de base les plus utilisés sont :

- L'eau.
- L'éthylène-glycol, (EG).
- Les huiles.
- Le Toluène.

I.2.3. Types de nanoparticules

La production de nouveaux nanomatériaux (nanoparticules) constitue un champ de recherche en pleine expansion, aussi, seules les nanoparticules les plus couramment utilisées dans les applications liées aux transferts thermiques sont ici brièvement mentionnées.

D'une manière générale, les nanoparticules peuvent être classées selon leur forme en deux grandes catégories :

- Les nanoparticules sphériques pour lesquelles plusieurs types de matériaux peuvent être utilisés pour leur fabrication. Ces nanoparticules sphériques peuvent ainsi être à base de métaux (l'aluminium (Al), cuivre (Cu), fer (Fe), or (Au), argent (Ag)...) ou d'oxydes (oxyde d'aluminium (Al_2O_3), oxyde de cuivre (CuO), oxyde de titane (TiO_2)...).
- Les nanotubes (les nanotubes de carbone (NTC), les nanotubes de titane (TiO_2), Nanotube de silicium...).

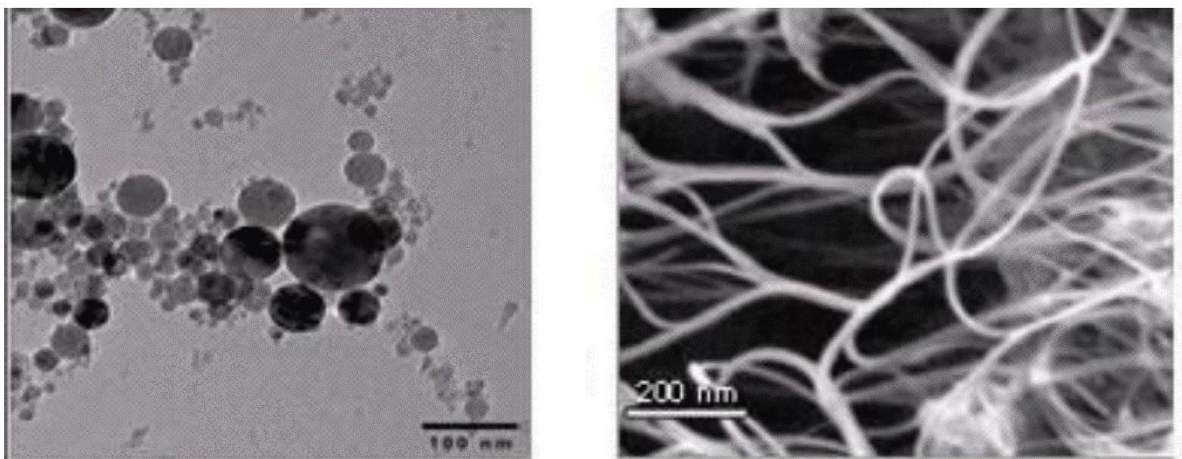


Figure I.1 : Nanoparticules sphériques ; Nanotubes de carbone (Bang et Chang, [3]).

I.2.4. Fabrication et préparation des nanofluides

Le point sensible est la fabrication de si petits morceaux de matière plus ou moins bien calibrés. Inutile d'essayer d'en faire chez soi en ponçant un bout de cuivre pour en faire de la poussière par exemple. Ça ne fera que des particules de taille micrométrique au mieux, qui encrasseront le circuit. Les procédés de fabrication de nanoparticules sont nombreux. Ils peuvent être classés en deux catégories :

- Les procédés physiques, comme le broyage mécanique.

— Les procédés chimiques, comme la pyrolyse laser ou la précipitation chimique.

En général, les nanoparticules utilisées pour la synthèse de nanofluides sont à base d'oxydes, de nitrures, de carbures, de métaux purs ou d'alliages, de nanotubes de carbone (NTC). On trouve également des particules composites pouvant utiliser des polymères.

Il y a deux méthodes principales pour obtenir un nanofluide :

- **La méthode en une seule étape** : consiste à produire les nanoparticules dans le fluide de base. Moins industrielle, elle n'est utilisable que pour certains nanofluides mais permet d'éviter l'agglomération et l'oxydation des nanoparticules. Un exemple de procédé consiste à condenser sous forme de nanoparticules une vapeur métallique dans un réacteur sur un film de liquide à basse tension de vapeur.

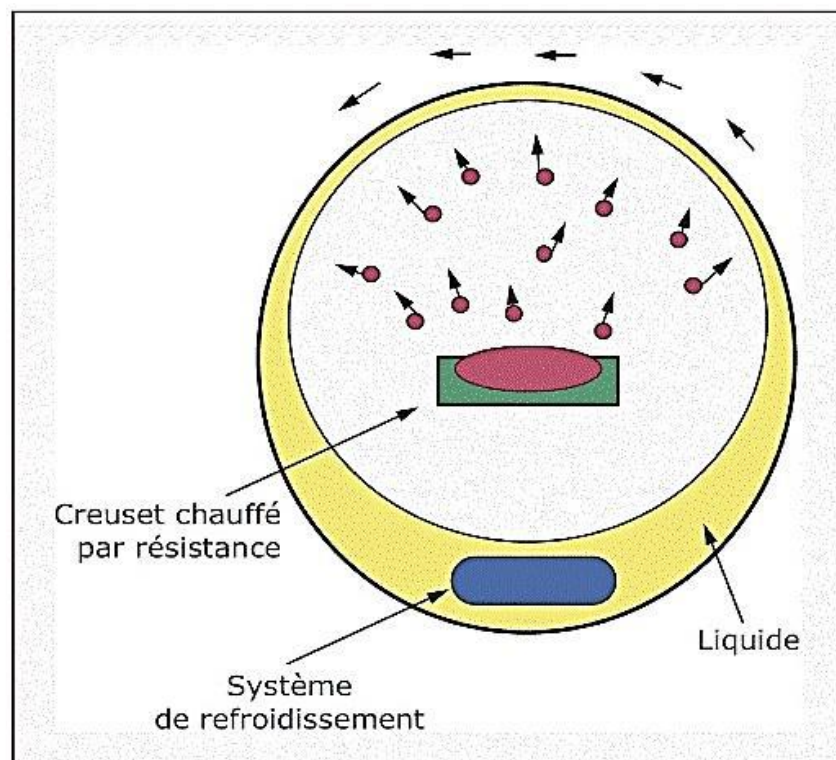


Figure I.2 : Procédé de synthèse de nanofluide en une seule étape (Ribeiro et Gruss [4]).

- **La méthode en deux étapes** : consiste à produire dans un premier temps les nanoparticules, puis à les disperser dans le fluide de base. Pour permettre une bonne dispersion, une forte action mécanique à l'aide d'un agitateur rotatif ou d'ultrasons est souvent nécessaire afin de briser les agglomérats. En outre, pour éviter l'agglomération due aux forces d'attraction entre les particules, on utilise des forces de répulsion électrostatique en chargeant la surface des particules en adaptant le pH. On

peut également utiliser les forces de répulsion stériques à l'aide de molécules adsorbées ou greffées sur la surface.

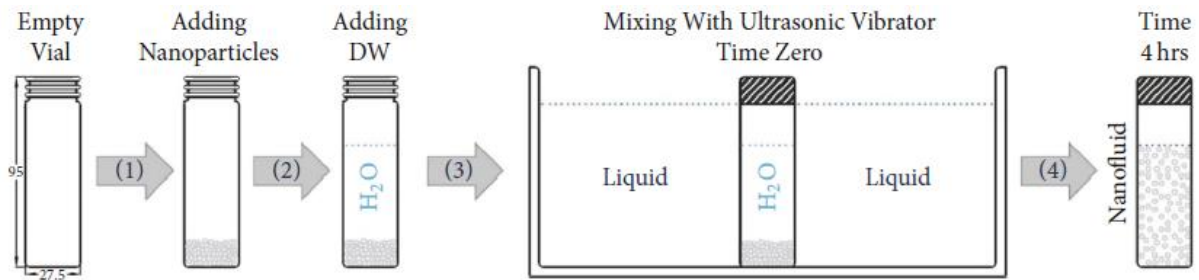


Figure I.3 : Procédure de synthèse de nanofluide en deux-étapes [5].

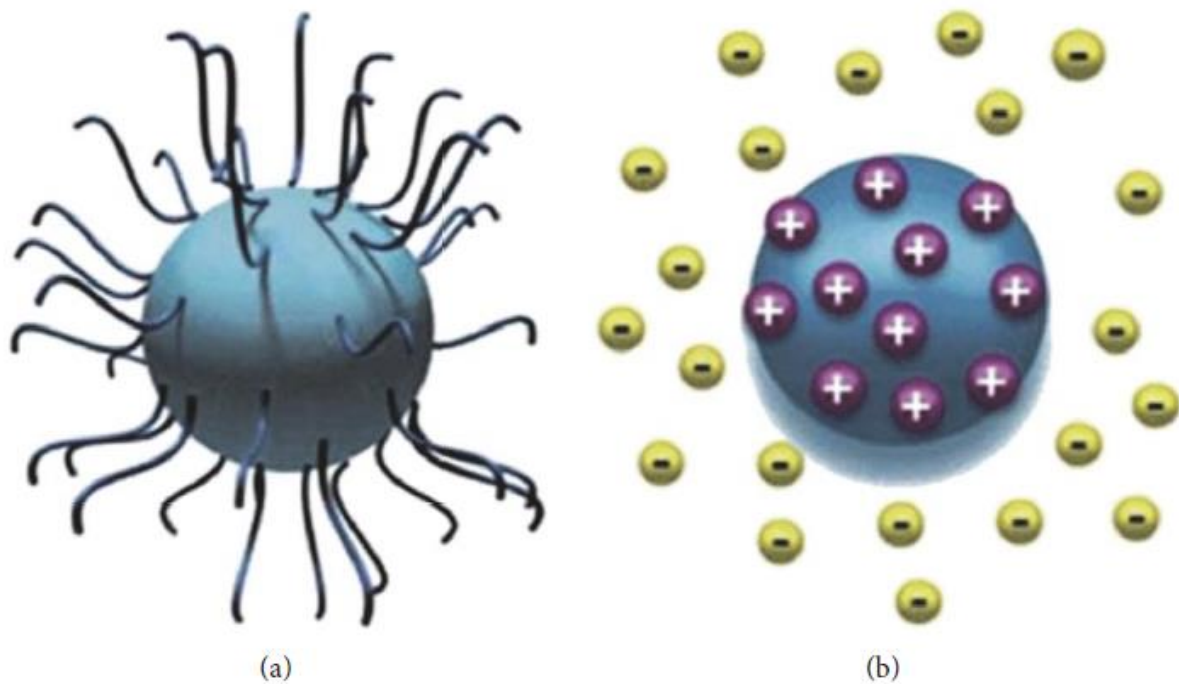


Figure I.4 : Mécanisme de répulsion : répulsion stérique (a) et répulsion électrostatique (b) [6].

Les procédés de fabrication sont de nature physique ou chimique. Ils font l'objet de beaucoup de recherches pour améliorer le coût de production qui reste parfois élevé vu les difficultés de mise en œuvre et pour obtenir des particules de taille voulue. Chaque méthode a ses inconvénients et certains ne sont pas aptes à produire de grandes quantités de

nanoparticules pour une production de masse vu les contraintes inhérentes au procédé. Les principaux moyens peuvent être :

- ✓ La mécano-synthèse (broyage à haute énergie).
- ✓ La précipitation chimique (réduction de sels métalliques par exemple).
- ✓ Les dépôts chimiques ou physiques en phase vapeur (CVD ou PVD).
- ✓ Les dépôts chimiques en phase vapeur assistés par plasma (PECVD).
- ✓ La condensation de vapeurs par détente brutale dans des tuyères supersoniques.
- ✓ La pulvérisation cathodique radiofréquence.
- ✓ La sublimation par ablation laser (vaporisation d'un échantillon par impulsion laser).
- ✓ La pyrolyse laser (interaction entre un faisceau laser continu et un flux de réactifs).
- ✓ La désintégration d'électrodes submergées par passage d'étincelles (comme pour un usinage par électroérosion).

I.3. Propriétés thermophysiques des nanofluides

Les nanofluides sont considérés comme supérieurs à leur fluide de base, car un nouveau type de fluide a été formé avec des propriétés thermophysiques complètement différentes telles que la densité, la capacité thermique spécifique, la conductivité thermique, le transfert de chaleur convectif, la diffusivité thermique et la viscosité. Le mot « efficace » est couramment utilisé pour décrire les propriétés thermophysiques des nanofluides (par exemple, viscosité effective et densité effective). Ceci est fait pour différencier entre les propriétés thermophysiques du fluide de base et du nanofluide fabriqué. La figure ci-dessous montre les propriétés thermophysiques des nanofluides qui sont discutées plus en détail ci-dessous.

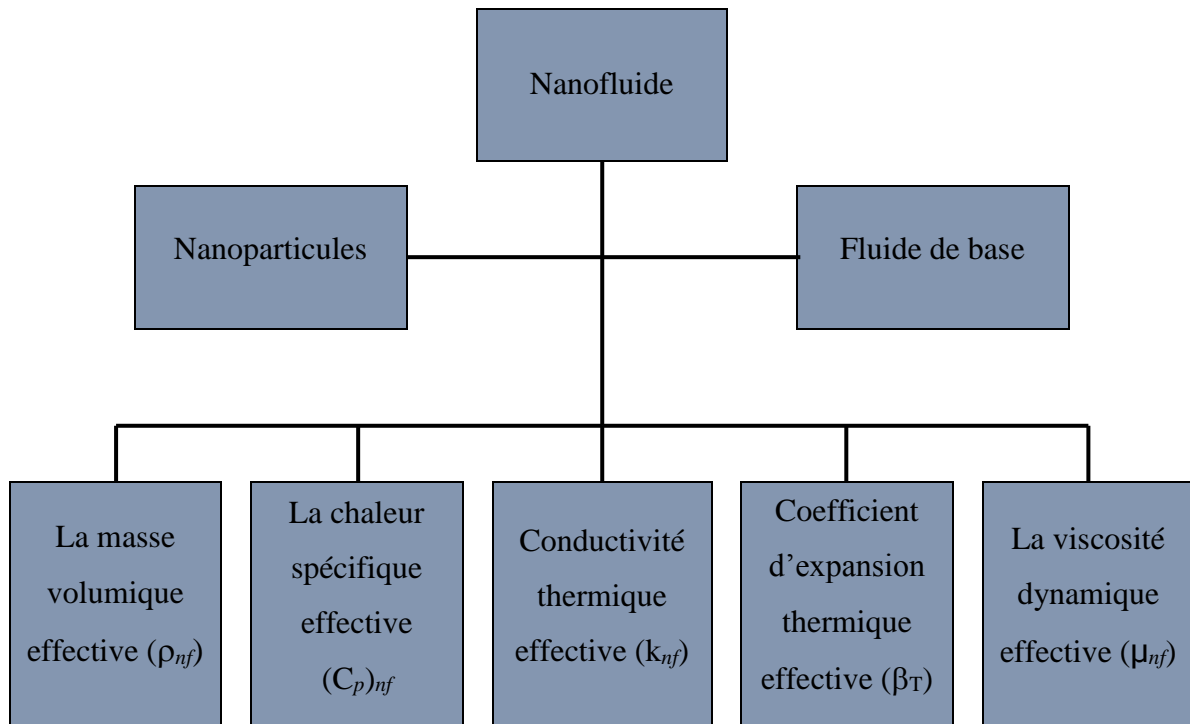


Figure I.5 : Propriétés thermophysiques du nanofluide.

I.3.1. Masse volumique effective

Pour calculer la masse volumique d'un nanofluide que nous supposons parfaitement homogène (bonne dispersion des nanoparticules dans le fluide) en fonction de la fraction volumique φ à une température T donnée, nous revenons à la définition de la masse volumique de ce mélange.

$$\rho_{nf} = \left(\frac{m}{V}\right)_{nf} = \frac{m_f + m_s}{V_f + V_s} = \frac{\rho_f V_f + \rho_s V_s}{V_f + V_s} \quad (\text{I.1})$$

La fraction volumique des nanoparticules, notée φ désigne le rapport du volume des nanoparticules sur le volume total (fluide + solide).

$$\varphi = \frac{\text{Volume solide}}{\text{Volume total du nanofluide}} = \frac{V_s}{V_s + V_f} \quad (\text{I.2})$$

On en déduit alors la masse volumique du nanofluide :

$$\rho_{nf} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_s \quad (\text{I.3})$$

Où ρ_{nf} : La masse volumique du nanofluide.

ρ_f : La masse volumique du fluide de base.

ρ_s : La masse volumique des nanoparticules solides.

I.3.2. Chaleur spécifique effective

La chaleur spécifique est la capacité calorifique par unité de masse d'une substance ou d'un système homogène ($C_p = dQ / mdT$). La chaleur spécifique correspond à l'apport de chaleur nécessaire pour élever la température de l'unité de substance de 1 K lors de la transformation considérée. Pour la détermination de la chaleur spécifique d'un nanofluide, on a retrouvé suivant les auteurs l'une ou l'autre des deux relations suivantes :

De nombreux auteurs dont **Pak et Cho [7]** ont utilisé :

$$(C_P)_{nf} = (1 - \varphi)(C_P)_f + \varphi(C_P)_s \quad (I.4)$$

Certains d'autres tels que **Xuan et Roetzel [8]** ont utilisé :

$$(\rho C_P)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_P)_f + \varphi(\rho C_P)_s \quad (I.5)$$

$(C_P)_{nf}$, $(C_P)_f$, $(C_P)_s$ désignent respectivement les chaleurs spécifiques du nanofluide, du fluide de base et des nanoparticules.

I.3.3. Coefficient d'expansion thermique effective

Nous nous intéressons dans le cadre de notre étude aux seuls fluides porteurs incompressibles (masse volumique indépendante de la pression) mais dilatables. Cette variation de masse volumique sous l'action de la température est caractérisée par le coefficient d'expansion thermique $\left(\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P\right)$, appelé également coefficient de dilatabilité.

Pour calculer la valeur de ce coefficient pour les nanofluides de très nombreux auteurs ont utilisé à la suite des premiers travaux sur les nanofluides, par analogie avec la relation (I.3), ont déduit l'expression suivante :

$$\beta_{nf} = (1 - \varphi)\beta_f + \varphi\beta_s \quad (\text{I.6})$$

Où β_f et β_s désignent respectivement les coefficients de dilatibilité du fluide porteur et celle des nanoparticules.

Kim et al. [9] ont supposé que le coefficient d'expansion thermique du fluide β_f est largement plus grand que celui des nanoparticules solides β_s . Il ramène l'équation (I.6) à la forme simplifiée suivante :

$$\beta_{nf} = (1 - \varphi)\beta_f \quad (\text{I.7})$$

I.3.4. Conductivité thermique effective des nanofluides

Etant donné que les nanoparticules à haute conductivité thermique en suspension dans le fluide de base qui a une faible conductivité thermique, augmentent remarquablement la conductivité thermique des nanofluides. Les chercheurs ont développé plusieurs modèles pour prédire l'estimation de la conductivité du nanofluide et de nombreuses expériences ont été menées pour comparer les données expérimentales avec ces modèles analytiques, constitués par des éléments très réguliers tels que les nanoparticules sphériques. Les modèles décrits dans la littérature sont des outils de prédictions développés, afin d'appréhender les mécanismes de transfert thermique au sein des nanofluides. Nous présenterons dans cette partie les modèles les plus utilisés dans le cas des nanofluides.

a. Modèle de Maxwell

Maxwell [10] fait partie des chercheurs qui se sont intéressés au calcul de la conductivité thermique d'un fluide contenant des particules sphériques en suspension. Pour aboutir à l'estimation de cette dernière, il a supposé que le fluide renferme plusieurs particules sphériques de même diamètre D_p .

La formule de Maxwell est donnée par :

$$k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2\varphi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \varphi(k_f + k_s)} k_f \quad (\text{I.8})$$

Où k_{nf} , k_f , k_s désignent respectivement les conductivités thermiques du nanofluide, du fluide de base et des particules solides.

Le modèle de Maxwell est satisfaisant pour les suspensions contenant des particules sphériques de concentrations volumiques relativement faibles mais ne tient pas compte de l'effet de la taille ni de la forme des particules. Il est à noter aussi que l'effet des interactions inter-particules est négligé dans ce modèle.

b. Modèle de Hamilton-Crosser

Le modèle de Hamilton et Crosser [11] a été établi pour résoudre la limite du modèle de Maxwell. Puisque ce dernier n'est valable que dans le cas des particules sphériques, une chose qui rend le modèle non efficace pour la description du phénomène étudié, pour cela le modèle de Hamilton et Crosser a été développé pour rendre plus efficace le calcul de la conductivité thermique du nanofluide quel que soit la forme de la nanoparticule, et ça en introduisant la notion du facteur géométrique appelé la sphéricité (ψ). Ce facteur est défini comme étant le rapport de la surface de la sphère ayant le même volume que les nanoparticules sur la surface d'une nanoparticule. La conductivité thermique apparente du milieu est donnée par l'expression suivante :

$$k_{nf} = \frac{k_s + (n - 1)k_f - (n - 1)(k_f - k_s)\varphi}{k_s + (n - 1)k_f + (k_f - k_s)\varphi} k_f \quad (I.9)$$

Où n est un facteur de forme empirique donné par : $n = \frac{3}{\psi}$

On note $n = 3$ pour les particules sphériques et $n = 6$ pour les particules cylindriques.

Pour $\psi = 1$ (particules sphériques), le modèle de Hamilton-Crosser est identique au modèle de Maxwell, ce qui signifie que le modèle du Maxwell est un cas spécial du modèle Hamilton-Crosser.

c. Modèle de Yu et Choi

Une autre expression pour calculer la conductivité thermique a été introduite par Yu et Choi [12]. Ils ont proposé de modéliser les nanofluides comme un liquide de base et des particules solides séparés par une couche nanométrique, cette couche agit comme un pont thermique entre le fluide et les nanoparticules. De plus, ils ont supposé que la conductivité thermique de la couche nanométrique soit plus grande que la conductivité thermique de liquide :

$$k_{nf} = \frac{k_s + 2k_f + 2(k_s - k_f)(1 + \beta)^3 \varphi}{k_s + 2k_f - (k_s - k_f)(1 + \beta)^3 \varphi} k_f \quad (\text{I.10})$$

Où β est le rapport de l'épaisseur de la couche nanométrique au rayon de particule d'origine.

d. Modèle de Bruggeman

Le modèle proposé par Bruggeman [13] semble mieux approximer certains résultats expérimentaux comparés aux autres modèles pour le cas des nanoparticules sphériques avec aucune limitation concernant les concentrations des nanoparticules.

$$k_{nf} = \frac{1}{4} [(3\varphi - 1)k_s + (2 - 3\varphi)k_f] + \frac{k_f}{4} \sqrt{\Delta} \quad (\text{I.11})$$

$$\text{Avec } \Delta = \left[(3\varphi - 1)^2 \left(\frac{k_s}{k_f} \right)^2 + (2 - 3\varphi)^2 + 2(2 + 9\varphi - 9\varphi^2) \left(\frac{k_s}{k_f} \right) \right]$$

I.3.5. Viscosité dynamique effective

La viscosité caractérise l'aptitude d'un fluide à s'écouler. Sa connaissance est fondamentale pour toutes les applications impliquant le transport de fluides. L'ajout des nanoparticules permet d'augmenter et d'améliorer la conductivité thermique du nanofluide mais cela peut aussi conduire à une augmentation défavorable de la viscosité dynamique. Ainsi, ces deux propriétés sont étroitement corrélées, et doivent être maîtrisées en vue d'une exploitation de ce type de fluides dans des échangeurs.

De nombreuses études théoriques et expérimentales ont été menées afin d'estimer ou de mesurer la viscosité dynamique des nanofluides et de quantifier l'importance des principaux paramètres qui l'influencent. Plusieurs modèles théoriques ont été développés pour prédire l'évolution de la viscosité dynamique des suspensions sous certaines conditions. Dans cette partie, nous nous intéresserons aux modèles les plus utilisés dans le cas des nanofluides.

a. Modèle d'Einstein

Basé sur l'hypothèse que l'énergie a une dépendance linéaire avec la viscosité, Einstein [14] a déterminé l'énergie dissipée autour d'une seule particule dans un fluide en associant son énergie au travail réalisé pour la faire avancer relativement au fluide. A partir de ce résultat, il a déterminé l'expression décrivant une dépendance linéaire de la viscosité des suspensions dans un fluide avec la concentration :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 2.5\varphi) \quad (\text{I.12})$$

μ_{nf}, μ_f désignent respectivement les viscosités dynamiques du nanofluide, du fluide de base et φ la fraction volumique des nanoparticules. La formule d'Einstein a depuis été vérifiée expérimentalement et est considérée satisfaisante pour des suspensions très diluées de particules sphériques (browniennes ou non browniennes), typiquement pour des concentrations volumiques inférieures à 1%. Il est à noter que ce modèle ne tient pas compte des effets de la taille des particules et des interactions inter-particules.

b. Modèle de Brinkman

La formule de Brinkman [15] complète le modèle d'Einstein jusqu'à une concentration volumique inférieure à 4% :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad (\text{I.13})$$

Cette relation décrit une évolution non linéaire de la viscosité dynamique avec la concentration volumique mais ne tient pas compte de la collision entre les particules.

c. Modèle de Batchelor

L'écoulement autour de chaque particule est influencé par la présence éventuelle d'autres particules à proximité et par les collisions entre particules. Ainsi, cela se traduit par la prise en compte d'un terme φ^2 dans le modèle de Batchelor [16] :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + \eta\varphi + k_H\varphi^2) \quad (\text{I.14})$$

Où η est la viscosité intrinsèque et k_H est le coefficient de Huggins. La valeur de η et k_H est de 2.5 et 6.5 respectivement pour des particules sphériques. Cette équation permet le calcul de la viscosité de suspension de nanoparticules avec $\varphi > 10\%$.

d. Modèle Maiga et al

D'autres relations ont été proposées dans la littérature limitée à des applications bien précises. **Maiga et al.** [17] à partir de résultats de mesures ont proposé la corrélation :

$$\mu_{nf} = \mu_f(123\varphi^2 + 7.3\varphi + 1) \quad (\text{I.15})$$

En comparant cette corrélation aux modèles **d'Einstein** et de **Brinkman**, on trouve que ces deux dernières approches sous-estiment les valeurs expérimentales de la viscosité des nanofluides.

e. Modèle Pack et Cho

Pack et Cho [18] ont proposé, quant à eux une corrélation pour les nanoparticules Al_2O_3 dispersées dans l'eau donnée par :

$$\mu_{nf} = \mu_f(533.9\varphi^2 + 39.11\varphi + 1) \quad (\text{I.16})$$

En utilisant des nanoparticules d' Al_2O_3 de différents diamètres (27, 40 et 50 nm) et pour plusieurs valeurs de la fraction volumique φ (0.5%, 2% et 3%), **Prasher et al. [19]** n'ont pas relevé d'influence de l'effet de taille des nanoparticules sur la mesure de la viscosité des nanofluides expérimentes.

I.4. Domaines d'applications des nanofluides

Les nanofluides peuvent être employés pour améliorer le transfert de chaleur et l'efficacité énergétique dans plusieurs systèmes thermiques. Dans cette section, quelques exemples d'applications seront présentés tel que le transport, la micro-électronique, la défense, le nucléaire, l'espace, et la biomédicale.

I.4.1. Refroidissement des systèmes thermiques

Le mélange d'éthylène-glycol et l'eau, sont utilisés comme liquide de refroidissement dans les moteurs des véhicules. L'addition des nanoparticules dans ces liquides améliore le taux de refroidissement. Ce point est étudié par plusieurs groupes de chercheurs, Tzeng et al. [20] ont dispersé les nanoparticules de CuO et Al_2O_3 dans l'huile de refroidissement du moteur de transmission. Dans une autre application, Zhang et al. [21] ont rapporté une étude pour réduire l'usure (lubrification) à l'aide des nanoparticules, et améliorer les propriétés tribologiques, et la résistance à l'usure avec la réduction du frottement entre les éléments mécaniques mobiles.

I.4.2. Refroidissement des systèmes électroniques

Dans les circuits intégrés, les nanofluides ont été considérés comme fluides de refroidissement. Pour cela plusieurs études ont été effectuées. Tsai et al. [22] ont employé un nanofluide à base d'eau pour refroidir une unité centrale de traitement dans un

microordinateur. De leur côté, Ma et al. [23] ont étudié l'effet du nanofluide sur les possibilités de transport de la chaleur d'un caloduc d'oscillation, ils ont prouvé qu'à la puissance d'entrée de 80 W, et seulement pour une concentration volumique de $\varphi=1\%$, la différence de température entre le vaporisateur et le condensateur est de 16.6°C.

I.4.3. Refroidissement des systèmes militaires

Les exemples des applications militaires incluent le refroidissement de l'électronique de puissance et les armes d'énergie dirigée. Ces derniers impliquent des flux thermiques très élevés ($q > 500$ à 1000 W/cm^2), où les nanofluides ont montrés leur efficacité pour refroidir ces systèmes, et aussi les autres systèmes militaires, y compris les véhicules militaires, les sous-marins, et les diodes lasers à haute puissance.

I.4.4. Refroidissement des systèmes spatiaux

Pour les applications dans l'espace, You et al. [24] et Vassallo et al. [25] ont effectué des études pour montrer que la présence des nanoparticules dans le fluide de refroidissement en électronique générale joue un rôle très important dans les applications de l'espace où la densité de puissance est très élevée.

I.4.5. Refroidissement des systèmes nucléaires

L'institut de technologie de Massachusetts a réservé un centre interdisciplinaire uniquement pour la nouvelle nanotechnologie (nanofluide) dans l'industrie de l'énergie nucléaire. Actuellement, ils évaluent l'impact potentiel de l'utilisation des nanofluides sur la sûreté neutronique, et de la performance économique des systèmes nucléaires.

I.4.6. Biomédecine

Les nanofluides et les nanoparticules ont beaucoup d'applications en biomédicale. Par exemple, pour éviter quelques effets secondaires des méthodes traditionnelles de traitement du cancer, les nanoparticules à base de fer ont été employées comme transporteur des drogues. Aussi pour une chirurgie plus sûre en produisant le refroidissement efficace autour de la région chirurgicale, Jordan et al. [26] ont effectué une étude où les nanofluides pourraient être employés pour produire une température plus élevée autour des tumeurs pour tuer les cellules cancéreuses sans affecter les cellules saines voisines.

I.4.7. Autres applications

Il y a des situations nombreuses où l'augmentation de l'efficacité du transfert thermique peut être liée à la qualité, la quantité, et au coût d'un produit d'un processus. Par exemple, dans l'industrie de l'énergie renouvelable, les nanofluides sont utilisés pour augmenter le transfert de chaleur à partir des capteurs solaires aux réservoirs de stockage et pour augmenter la densité d'énergie. Les liquides réfrigérants de nanofluide ont une application potentielle dans la majorité des industries de transformation, telles que les matériaux, la production chimique, la nourriture, la boisson, le pétrole et le gaz.

I.5. Notion sur la convection

La convection est un mode de transfert d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. Elle est considérée comme le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transport d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite, les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte, simultanément, le fluide et l'énergie. L'énergie est à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée et convection mixte.

I.5.1. Différents types de convection

a. Convection forcée

Le phénomène de convection forcée apparaît quand le mouvement du fluide est imposé par une cause mécanique extérieure (pompe, ventilateur...) au système.

b. Convection naturelle

Le phénomène de convection naturelle thermique apparaît spontanément, sous le seul effet des différences de masse volumique résultantes des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravifique,...)

c. Convection mixte

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convection naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convection sont considérées séparément, du même ordre de grandeur.

I.5.2. Convection naturelle

La convection libre ou naturelle est la forme d'échange convectif la plus couramment observée : au contact d'un corps chaud, la température de l'air augmente, donc sa masse volumique diminue, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, la masse d'air chaud soulevée en enlevant de la chaleur au corps est remplacée par une masse d'air froid qui, au contact du corps, s'échauffe et ainsi de suite.

Le même phénomène peut s'observer pour des corps froids, le mouvement se faisant alors en sens inverse.

a. Equations générales de la convection naturelle

i. Equations de conservation

La convection naturelle est régie par trois équations : l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de l'énergie. Ces équations s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} + \rho \vec{g} \quad (\text{I.18})$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho U \vec{u} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \bar{\tau} : \vec{\nabla} \vec{u} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (\text{I.19})$$

U : énergie interne massique [J kg^{-1}], u : vitesse du fluide [m s^{-1}].

j : densité du flux convectif [Wm^{-2}], $\bar{\tau}$: tenseur des contraintes visqueuses [Pa].

g : accélération de pesanteur [m s^{-2}], p : pression [Pa].

ii. Equations d'état et de transfert, hypothèses simplificatrices

- **Approximation de Boussinesq**: L'approximation de Boussinesq consiste à supposer que la masse volumique est constante sauf dans le terme généralisé de la convection naturelle soit le terme $\rho \vec{g}$ de l'équation de Navier Stocks. Ainsi :

$$\rho = cte \quad (I.20)$$

Sauf pour :

$$\rho \vec{g} = \rho_{\infty} (1 - \beta(T - T_{\infty})) \vec{g} \quad (I.21)$$

Cette approximation linéaire est valable pour : $(T - T_{\infty}) \ll T_{\infty}$.

Pour un gaz parfait $\beta = 1/T_{\infty}$; où T_{∞} est la température de référence [K] ;

T_{∞} est prise à l'infini en convection externe autour d'un objet et elle est prise comme une valeur moyenne loin des parois en convection interne.

- On considère l'air comme un gaz parfait ($U = C_v T + cte$, $H = C_p T + cte$) ; C_v : capacité thermique massique à volume constant [$J \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$] ;
 C_p : capacité thermique massique à pression constante [$J \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$] ;
 H : enthalpie massique [$J \text{ kg}^{-1}$].
- On néglige l'apport de l'énergie interne dû à la dissipation visqueuse

$$\bar{\tau} : \vec{\nabla} \vec{u} \ll |\vec{\nabla} \cdot \vec{j}| \quad (I.22)$$

- On suppose que le fluide est newtonien de viscosité constante et incompressible

$$\bar{\tau} = \rho \nu (\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^t) \quad (I.23)$$

- On suppose que la conductivité thermique est constante

$$\vec{j} = -k \vec{\nabla} T \quad (I.24)$$

En appliquant ces approximations, les équations (I.17), (I.18) et (I.19) deviennent respectivement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (I.25)$$

$$\frac{\partial \rho_{\infty} \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho_{\infty} \vec{u} \vec{u} = -\vec{\nabla} (p + \rho_{\infty} g z) + \rho_{\infty} \nu \nabla^2 \vec{u} - \rho_{\infty} \beta (T - T_{\infty}) \vec{g} \quad (I.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot T \vec{u} = \alpha \nabla^2 T \quad (I.27)$$

Avec $\alpha = k/(\rho C_p)$; $\nu = \mu/\rho$

α : diffusion thermique du fluide [m^2s^{-1}],

ν : viscosité cinématique du fluide [m^2s^{-1}].

Par la suite on note abusivement p au lieu de $(p + \rho_\infty g z)$ et ρ au lieu de ρ_∞ .

I.5.3. Notion de couche limite thermique et hydrodynamique

a. Développement de la couche limite laminaire sur une plaque verticale

Un exemple classique de convection naturelle externe est celui du développement de la couche limite sur une plaque verticale chauffée (Figure I.6). Ce cas de figure est proche de celui rencontré près des parois latérales internes d'un réfrigérateur (autre que la paroi de l'évaporateur). La plaque est immergée dans un fluide étendu et immobile avec $T_s > T_\infty$. Les forces de flottabilité induisent une couche limite dynamique dans laquelle le fluide chauffé s'élève verticalement, entraînant le fluide de la région immobile. Une couche limite se développe également si $T_s < T_\infty$. Dans ce cas, le mouvement du fluide est descendant (cas de la paroi de l'évaporateur dans les réfrigérateurs ménager à froid statique).

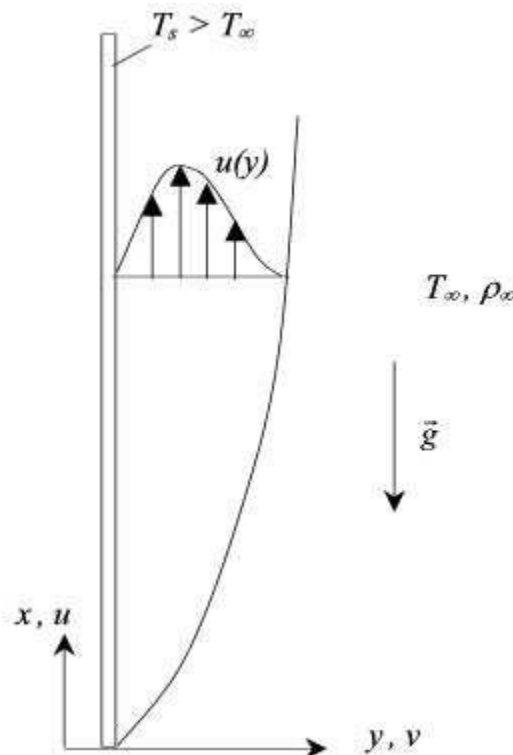


Figure I.6 : Développement de la couche limite sur une plaque verticale chauffée.

Considérons maintenant un écoulement laminaire de couche limite en régime permanent (Figure I.6). La gravité est dirigée vers le bas (direction $-x$). Nous supposons que le problème est bidimensionnel et on utilise l'approximation de Boussinesq.

L'équation de mouvement suivant la direction x s'écrit alors (en négligeant le terme $(\partial^2 u / \partial x^2)$) :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.28})$$

Notons qu'il n'y a aucune force de gravité dans la direction y (dans l'équation du mouvement suivant y), d'où, $\partial p / \partial y = 0$. Par conséquent le gradient de pression suivant x à un point quelconque dans la couche limite est égal au gradient de pression dans la région hors de la couche limite. Dans cette région $u=0$, et l'équation (I.26) se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_{\infty} g \quad (\text{I.29})$$

En substituant l'équation (I.29) dans (I.28), nous obtenons l'expression suivante :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{\rho} (\rho_{\infty} - \rho) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.30})$$

L'équation (I.30) s'applique à chaque point de la couche limite.

Le premier terme dans le second membre de l'équation (I.30) désigne la poussée d'Archimède qui peut être explicitée en utilisant le coefficient volumétrique de dilatation thermique (β), l'ensemble des équations régissant le problème est alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.31})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_{\infty}) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I.32})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{I.33})$$

avec les conditions aux limites suivantes :

pour $y = 0$; $u = v = 0$ et $T = T_s$

pour $y \rightarrow \infty$; $u \rightarrow 0$ et $T \rightarrow T_{\infty}$

I.6. Etat de l'art

Le transfert de chaleur par convection dans les nanofluides est un sujet d'intérêt contemporain majeur tant en sciences qu'en ingénierie, maintes recherches et ingénieurs ont menés des études théoriques et expérimentales portant sur le transfert convectif dans les nanofluides depuis leur découverte jusqu'à nos jours. Nous présentons ici une synthèse bibliographique qui illustre quelques études antérieures sur la convection thermique dans les nanofluides.

D.A. Nield, A.V. Kuznetsov [27] : ont examiné l'influence des nanoparticules sur l'écoulement de la couche limite de convection naturelle au-delà d'une plaque verticale, en utilisant un modèle dans lequel le mouvement brownien et la thermophorèse sont pris en compte. Les auteurs ont supposé les conditions aux limites les plus simples possibles, à savoir celles dans lesquelles la température et la fraction de nanoparticules sont constantes le long de la paroi.

D.A. Nield, A.V. Kuznetsov [28] : ont présenté une analyse mathématique pour un écoulement en double diffusion thermique et massique en convection naturelle devant une plaque verticale semi infini, immergée dans un milieu poreux Darcéen. Le modèle usagé pour le nanofluide incorpore les effets du mouvement Brownien et la thermophorèse.

Khan et Aziz [29] : ont étudié la convection naturelle des nanofluides sur une plaque plate verticale avec un flux de chaleur surfacique uniforme. Ils ont constaté que pour un nombre de Lewis fixe, le nombre de Nusselt réduit est une fonction décroissante du paramètre de mouvement brownien, du paramètre de thermophorèse et du paramètre de rapport de flottabilité.

Aziz et Khan [30] : ont étudié le flux convectif naturel d'un nanofluide sur une plaque verticale chauffée par convection dans un espace clair et non poreux. Ils ont constaté qu'une augmentation du paramètre de chauffage par convection augmentait les profils de température et de vitesse sans dimension. Ils ont signalé qu'une augmentation des paramètres de mouvement brownien et de thermophorèse augmente les profils de température sans dimension mais diminue les profils de concentration.

A.M. Rashad et al. [31] : ont étudié l'effet de la vitesse de filtration uniforme sur la convection libre dans la couche limite d'un fluide non-newtonien sur un cône vertical perméable immergé dans un milieu poreux saturé d'un nanofluide. Le modèle utilisé pour le nanofluide comporte les effets du mouvement Brownien et thermophorèse. Les équations aux dérivées partielles régissant sont transformées en un ensemble d'équations non similaires et

résolues numériquement par une méthode itérative, méthode des différences finies implicite. Les comparaisons avec les travaux déjà publiés sont effectuées et un excellent accord est obtenu. Une étude paramétrique des paramètres physiques est effectuée et un ensemble représentatif des résultats numériques pour la vitesse, la température et les profils de fraction de volume, ainsi que les nombres de Nusselt et de Sherwood locales est illustrée graphiquement pour montrer des caractéristiques intéressantes des solutions.

Khan et Pop [32] : ont étudié numériquement le problème de l'écoulement laminaire des fluides qui résulte de l'étirement d'une surface plane dans un nanofluide. Il s'agit du premier article sur la feuille étirable dans les nanofluides. Le modèle utilisé pour le nanofluide intègre les effets du mouvement brownien et de la thermophorèse. Une solution similaire est présentée qui dépend des nombres adimensionnels. Il a été constaté que le nombre de Nusselt réduit est une fonction décroissante de chaque nombre adimensionnel, tandis que le nombre de Sherwood réduit est une fonction croissante de Prandtl plus élevé et une fonction décroissante de nombre de Prandtl inférieur pour chaque nombre Lewis, nombre du mouvement brownien et nombre de thermophorèse.

Hamad et al. [33] : ont discuté des réductions de similarité pour les problèmes d'effets de champ magnétique sur le flux de convection libre d'un nanofluide devant une plaque plate verticale semi-infinie. L'application d'un groupe à un paramètre réduit le nombre de variables indépendantes de 1, et par conséquent l'équation différentielle partielle régissant avec les conditions auxiliaires à une équation différentielle ordinaire avec les conditions correspondantes appropriées. Les équations différentielles obtenues sont résolues numériquement et les effets des paramètres régissant le problème sont discutés. Différents types de nanoparticules ont été testés.

Wubshet Ibrahim et al [34] : ont analysé l'effet du champ magnétique sur l'écoulement du point de stagnation et le transfert de chaleur dû au nanofluide vers une feuille étirante. Les équations de transport utilisées dans l'analyse incluent l'effet du mouvement brownien et de la thermophorèse. Ces équations ont été résolues numériquement en utilisant la méthode du quatrième ordre Runge – Kutta avec technique de tir. Des résultats numériques sont obtenus pour la distribution de la vitesse, de la température et de la concentration, ainsi que pour le coefficient de frottement cutané, le nombre de Nusselt local et le nombre de Sherwood. Les résultats indiquent que le coefficient de frottement cutané C_f et le nombre de Nusselt local augmentent avec une augmentation du paramètre de rapport de vitesse A . De même, le nombre de Sherwood local augmente avec une augmentation à la fois du rapport de vitesse A et du nombre de Lewis Le . En outre, ils ont constaté que le taux de transfert de chaleur à la

surface augmente avec le paramètre magnétique lorsque la vitesse du courant libre dépasse la vitesse d'étirement.

P. Keblinski et al [35] : explorent quatre explications possibles de l'augmentation anormale de la conductivité thermique avec la diminution de la taille des grains : le mouvement brownien des nanoparticules, la stratification au niveau moléculaire du liquide au niveau de l'interface liquide / particule, la nature du transport de chaleur dans les nanoparticules et les effets du regroupement des nanoparticules. Ils ont montré que les facteurs clés pour comprendre les propriétés thermiques des nanofluides sont la nature balistique, plutôt que diffusive, du transport de chaleur dans les nanoparticules, combinée à des effets de regroupement directs ou à médiation fluide qui fournissent des voies pour un transport rapide de la chaleur.

R.S.R. Gorla et Ali Chamkha [36] : ont présenté une analyse de couche limite pour la convection naturelle au-delà d'une plaque verticale non isotherme dans un milieu poreux saturé d'un nanofluide. Les résultats numériques pour le facteur de frottement, le taux de transfert de chaleur surfacique et le taux de transfert de masse sont présentés pour les variations paramétriques du paramètre de rapport de flottabilité, N_r ; Paramètre de mouvement brownien, N_b ; paramètre de thermophorèse, N_t ; Numéro de Lewis, Le ; et l'exposant de la loi de puissance, λ . La dépendance du facteur de frottement, du taux de transfert de chaleur de surface (nombre de Nusselt) et du taux de transfert de masse sur ces paramètres est discutée.

H.A. Pakravan, M. Yaghoubi [37] : ont étudié théoriquement en comparant avec diverses études expérimentales et théoriques les effets du mouvement brownien, de la thermophorèse et du Dufour pour le transfert de chaleur par convection naturelle. Leur travail est pour but d'étudier les phénomènes diffusifs et leur influence sur le taux de comportement de transfert thermique des nanofluides.

I.7. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre introductif les différents nanofluides utilisés lors des études antérieures, leurs propriétés thermophysiques et leurs applications dans de nombreux problèmes. Le but de ces travaux est d'obtenir un accroissement du transfert de chaleur véhiculé par le nanofluide comparé à celui qui serait véhiculé par le fluide porteur seulement. Pour cela, il fallait d'abord pouvoir mesurer un paramètre important pour le transfert thermique qui est la conductivité thermique de ces nanofluides. Il est difficile de comparer les différentes études expérimentales sur les nanofluides car chacune a été menée pour des nanoparticules de tailles différentes et des préparations d'échantillons différentes. Or

la taille des particules et la préparation des échantillons sont des facteurs déterminants qui influent fortement sur les résultats obtenus.

Chapitre II : Problématique et modélisation mathématique

II. Problématique et modélisation mathématique

II.1. Introduction

Dans cette partie du travail, nous présentons le modèle physique. Nous établissons les équations gouvernantes de couches limites hydrodynamique, thermique et massique, qui peuvent être écrites sous la forme dimensionnelle sous réserve de conditions aux limites, et les écrire sous forme des équations différentielles ordinaire, Ensuite nous posons les conditions aux limites.

II.2. Problème physique

Considérons un écoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale. Le modèle physique, avec la direction du champ de pesanteur et le système de coordonnées est montré dans la figure II.1. Bien qu'une seule couche limite soit représentée sur cette figure pour éviter la congestion, il existe trois couches limites distinctes sur la plaque, à savoir une couche limite hydrodynamique (vitesse), une couche limite thermique (température) et une couche limite de concentration (fraction volumique des nanoparticules). Nous supposons que la fraction volumique des nanoparticules φ_w à la surface de la paroi ($y = 0$) prend la valeur constante de φ_w et une valeur φ_∞ aux grandes valeurs de y ($y \rightarrow \infty$), la température T quand y tend vers l'infini est noté par T_∞ . L'approximation Oberbeck-Boussinesq est utilisée et les approximations standard de la couche limite sont appliquées. Comme mentionné précédemment, il y'a uniquement l'effet du mouvement Brownien et la thermophorèse qui interviennent dans cette configuration. Nous négligeons le transfert thermique par rayonnement. Sous ces hypothèses, les équations gouvernantes de couches limites hydrodynamique, thermique et massique peuvent être écrites sous la forme dimensionnelle.

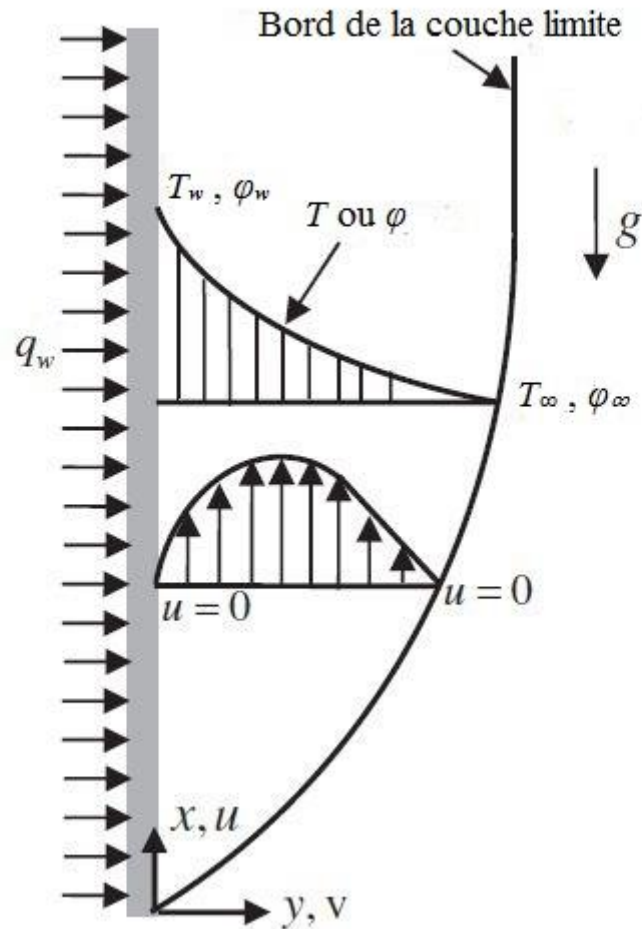


Figure II.1 : Modèle physique et le système des coordonnées utilisé pour modéliser le transfert convectif devant une plaque verticale dans un milieu saturé d'un nanofluide.

II.3. Equations mathématiques

II.3.1. Equations dimensionnelle

Compte tenu des hypothèses formulées précédemment, les équations de continuité, de mouvement et d'énergie s'écrivent :

a. Equation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{II.1}$$

b. Equation de mouvement

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + [\varphi \rho_p + (1 - \varphi) \{ \rho_f (1 - \beta (T - T_\infty)) \}] \vec{g} \tag{II.2}$$

c. Equation d'énergie

$$(\rho C_P)_f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + (\rho C_P)_P [D_B \nabla \varphi \cdot \nabla T + (D_T/T_\infty) \nabla T \cdot \nabla T] \quad (\text{II.3})$$

d. Equation de fraction volumique

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi = D_B \nabla^2 \varphi + (D_T/T_\infty) \nabla^2 T \quad (\text{II.4})$$

On écrit $v = (u, v)$

Ici ρ_f, μ, k et β sont respectivement la masse volumique, la viscosité, la conductivité thermique et le coefficient d'expansion thermique de fluide de base, ρ_s est la masse volumique des nanoparticules solides. L'accélération de la pesanteur est notée par (g) . Les coefficients qui apparaissent dans les équations (II.3) et (II.4) sont Le coefficient de diffusion Brownienne D_B et le coefficient de diffusion thermophorétique D_T .

Les conditions aux limites pour le cas d'un flux de chaleur surfacique constant q_w'' peuvent s'écrire :

$$y = 0 : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \varphi = \varphi_w, \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} = q_w'' \quad (\text{II.5})$$

$$y \rightarrow \infty : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \varphi = \varphi_\infty, \quad T = T_\infty \quad (\text{II.6})$$

Nous considérons un flux en régime permanent.

Conformément à l'approximation Oberbeck – Boussinesq et à l'hypothèse que la concentration de nanoparticules est diluée, et avec un choix approprié pour la pression de référence, nous pouvons linéariser l'équation de quantité de mouvement et écrire l'équation (II.2) comme :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + [(\rho_P - \rho_{f\infty})(\varphi - \varphi_\infty) + (1 - \varphi_\infty)\rho_{f\infty}\beta(T - T_\infty)] \vec{g} \quad (\text{II.7})$$

Nous faisons maintenant l'approximation standard de la couche limite, basée sur une analyse d'échelle, et écrivons les équations gouvernantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho_f \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + \left[(1 - \varphi_\infty) \rho_{f\infty} \beta g (T - T_\infty) - (\rho_P - \rho_{f\infty}) g (\varphi - \varphi_\infty) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \nabla^2 T + \tau \left[D_B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{D_T}{T_\infty} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II.11})$$

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = D_B \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{D_T}{T_\infty} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

$$\text{Où } \alpha = \frac{k}{(\rho C)_P}, \quad \tau = \frac{(\rho C)_P}{(\rho C)_f}$$

II.3.2. Equations différentielles ordinaire

Nous pouvons éliminer les (p) des équations. (II.9) et (II.10) en contre- différenciation.

Dans le même temps, nous pouvons introduire une fonction de courant défini par ψ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.13})$$

de sorte que l'équation (II.8) est satisfaite de manière identique.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - v \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = (1 - \varphi_\infty) \rho_{f\infty} \beta g (T - T_\infty) \\ - (\rho_P - \rho_{f\infty}) g \varphi \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \nabla^2 T + \tau \left[D_B \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{D_T}{T_\infty} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = D_B \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{D_T}{T_\infty} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.16})$$

En dérivant l'équation (II.14) une introduction par rapport à (y) a été réalisée, et nous avons utilisé les conditions aux limites à l'infini. Ici $\vartheta = \mu/\rho_{f\infty}$:

Nous introduisons le nombre de Rayleigh Ra_x qui est défini par :

$$Ra_x = \frac{(1 - \varphi_\infty)g\beta(q_w''x/k)x^3}{\nu\alpha} \quad (\text{II.17})$$

et la variable de similarité :

$$\eta = \frac{y}{x} Ra_x^{1/4} \quad (\text{II.18})$$

Nous présentons également les variables adimensionnelles ψ , θ et ϕ défini par :

$$\psi = \alpha Ra_x^{1/4} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{(q_w''x/k)}, \quad \phi(\eta) = \frac{\varphi - \varphi_\infty}{\varphi_w - \varphi_\infty} \quad (\text{II.19})$$

Puis, sur la substitution dans les équations (II.14) – (II.16), nous obtenons les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$f'''' + \frac{1}{Pr} (ff'' - f'^2) + \theta - Nr\phi = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\theta'' + Nt\theta'^2 + Nb\phi'\theta' + f\theta' - f'\theta = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\phi'' + \frac{Nt}{Nb}\theta'' + Le f\phi' = 0 \quad (\text{II.22})$$

Nous avons cinq paramètres définis par :

Nb : paramètre d'un mouvement Brownien :

$$Nb = \frac{\tau D_B (\varphi_w - \varphi_\infty)}{\alpha} \quad (\text{II.23})$$

Nt : paramètre de thermophorèse :

$$Nt = \frac{\tau D_T (q_w''x/k)}{\alpha T_\infty} \quad (\text{II.24})$$

Le : nombre de Lewis :

$$Le = \frac{\alpha}{D_B} \quad (\text{II.25})$$

Nr : représentent un taux de flottabilité :

$$Nr = \frac{(\rho_P - \rho_f)(\varphi_w - \varphi_\infty)}{\rho_f \beta (1 - \varphi_w)(q_w''x/k)} \quad (\text{II.26})$$

Pr : nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\vartheta}{\alpha} \quad (\text{II.27})$$

II.3.3. Conditions aux limites ordinaires

Les conditions aux limites en termes de nouvelles variables deviennent :

$$\eta = 0, f(0) = 0, f'(0) = 0, \theta'(0) = -1, \phi(0) = 1 \quad (\text{II.28})$$

$$\eta \rightarrow \infty, f'(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0, \phi(\infty) = 0 \quad (\text{II.29})$$

II.3.4. Caractérisation du nombre de Nusselt et Sherwood

Nous avons le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser le transfert thermique entre un fluide et une paroi « transfert convectif », défini par :

$$Nu_x = \frac{xq''_w}{k(T_w - T_\infty)} \quad (\text{II.30})$$

Où q''_w est le flux thermique de la paroi.

Le nombre de Sherwood est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser le transfert de masse, il est défini par :

$$Sh_x = \frac{xq''_m}{D_B(\phi_w - \phi_\infty)} \quad (\text{II.31})$$

Où q''_m est le flux massique de la paroi.

Dans le contexte actuel le nombre de Nusselt local réduit Nur et le nombre de Sherwood local réduit Shr peuvent être introduits et représentés dans l'ordre respectif suivant :

$$Nur = Ra_x^{1/4} Nu_x = \frac{1}{\theta(0)} \quad (\text{II.32})$$

$$Shr = Ra_x^{1/4} Sh_x = -\phi'(0) \quad (\text{II.33})$$

II.4. Méthode numérique

Le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses est celui de la résolution des équations différentielle. Cela vient du fait que toute modélisation mathématique d'un, ou de plusieurs phénomènes physiques, est décrite par une, ou un système d'équations différentielle. Vu que la majorité, pour ne pas dire la totalité des phénomènes physiques ne sont pas linéaires, il n'existe pas de solutions analytiques pour ces problèmes. Nous sommes obligés de chercher des solutions approchées de la solution exacte (analytique). La, où les solutions de ces équations sont déduites par une approche numérique adéquate.

Dans notre étude nous utilisons la méthode des différences finis qui fait partie des outils de mathématiques appliquées. Un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation différentielle ordinaire (EDO) sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact.

L'ensemble des équations différentielles ordinaires couplées (II.20) à (II.22) est fortement non linéaire et ne peut être résolu analytiquement, avec les conditions aux limites, ils forment un problème aux limites à deux points qui peut être résolu pour certaines valeurs des paramètres régissant. La méthode des différences finies qui implémente la formule de Lobatto de troisième degré, fournit une solution continue de manière uniforme dans l'intervalle d'intégration.

Le solveur `bvp4c` créé sous MATLAB détermine une solution numérique en résolvant un système d'équations algébriques résultant avec les conditions aux limites, l'utilisateur doit fournir les points de maillage initial ainsi qu'une approximation initiale de la solution, les régions de l'écoulement sont contrôlées par des paramètres, à savoir Pr , Nr , Nt , Nb et Le . (Pour la description de la méthode voir l'annexe A)

II.5. Conclusion

Nous sommes arrivés à travers des manipulations mathématiques (méthode de similitude) à un système d'équations qui représente avec adéquation notre problème physique, et ce dernier nous a aidés à mieux comprendre le modèle physique étudié.

Dans le chapitre qui suit, nous essayerons de résoudre numériquement les équations mathématiques en utilisant le logiciel Matlab avec la méthode des différences finis.

Chapitre III : Résultats et discussion

III. Résultats et discussion

III.1. Introduction

Les équations (II.20)-(II.22) sujets aux conditions limites (II.28)-(II.29) ont été résolues numériquement en utilisant Matlab.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux résultats numériques obtenus de l'évolution de transfert convectif sur une plaque verticale en présence d'un nanofluide. Les résultats numériques obtenus sont affichés à l'aide d'illustrations graphiques, ces dernières montrent l'effet des différents paramètres (paramètre de la flottabilité Nr , paramètre de thermophorèse Nt et le paramètre du mouvement Brownien Nb) ainsi le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Lewis Le sur les profils de vitesse, de température et de concentration des nanoparticules ainsi le nombre de Nusselt local Nu_x et le nombre de Sherwood local Sh_x .

III.2. Validation du code de calcul

Afin d'obtenir l'exactitude de nos résultats, la validation préalable de notre code de calcul est nécessaire, car elle permet de lui donner plus de crédibilité. Le code numérique a été validé avec les résultats numériques de Khan, W. A., et Aziz, A [29] (figure III.2), il s'agit du cas d'un écoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux thermique surfacique uniforme.

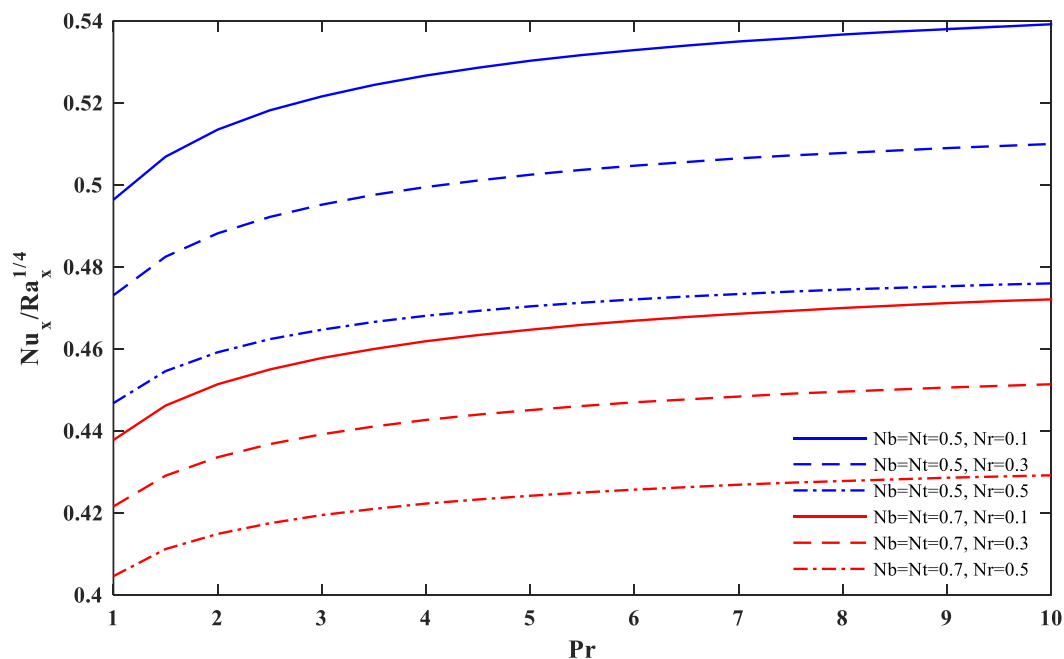


Figure III.1 : Variation du nombre de Nusselt avec Pr , Nb , Nt et Nr ($Le=1$).

Une comparaison (figure III.1 - figure III.2) a été faite entre les profils du nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Prandtl avec la variation des paramètres du mouvement Brownien Nb , de la thermophorèse Nt et du rapport de flottabilité Nr .

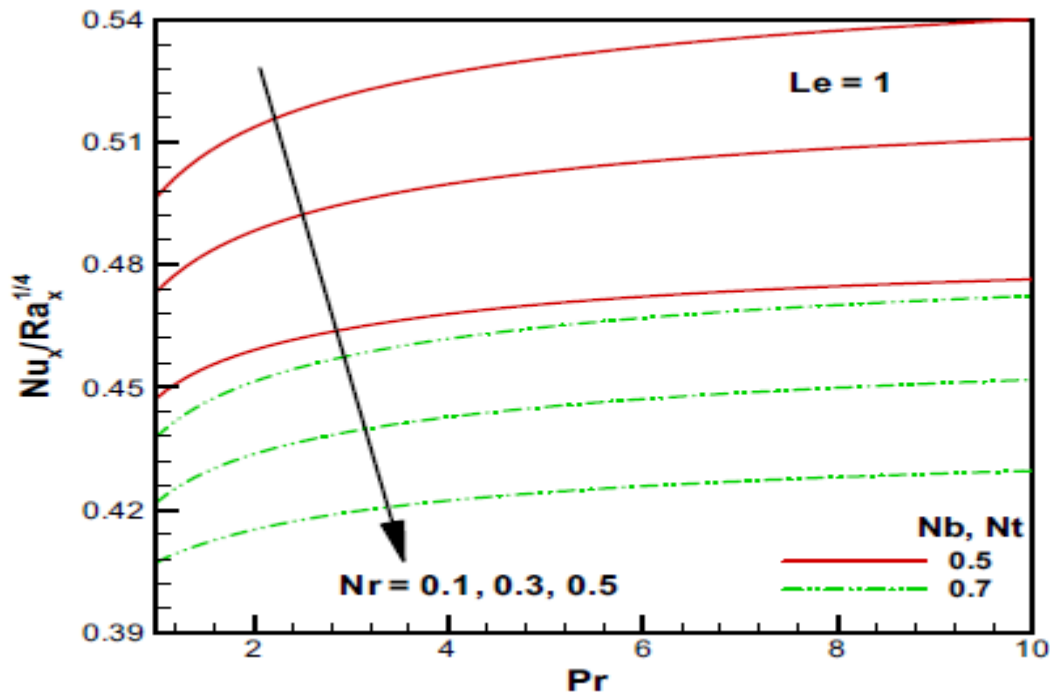


Figure III.2 : Effet de Nr , de Nb et de Nt sur le nombre de Nusselt réduit [29].

On constate qu'il y a un bon accord entre les résultats obtenus dans le présent travail et ceux de Khan, W. A., et Aziz, A [29], ce qui nous réconforte dans la fiabilité de notre code de calcul.

III.3. Profils de vitesse adimensionnelle

Les profils de vitesse adimensionnelle le long de la plaque verticale sont représentés sur la figure III.3 et la figure III.4. Dans les figures la composante verticale de la vitesse augmente initialement, atteint un maximum puis diminue asymptotiquement jusqu'à zéro au bord de la couche limite hydrodynamique.

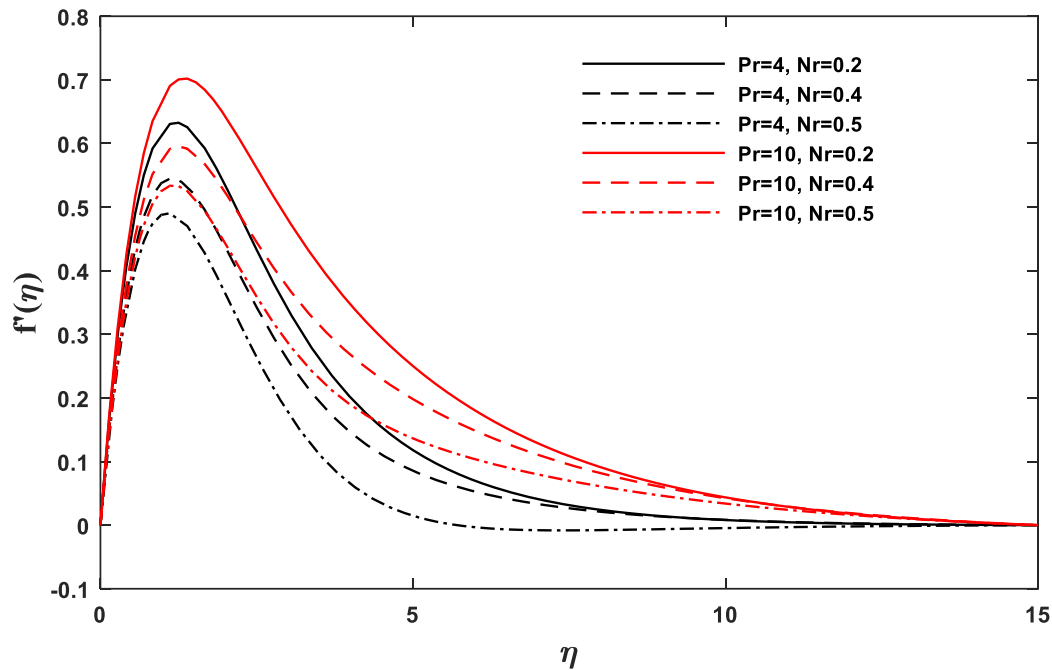


Figure III.3 : Variation des profils de vitesse avec Pr et Nr ($Nt = Nb = 0.5, Le = 1.0$).

Nous remarquons en regardant dans la figure III.3 que la vitesse locale adimensionnelle diminue en augmentant le paramètre du rapport de flottabilité Nr, l'effet étant plus prononcé à $Pr = 10$ qu'à $Pr = 1$. Lorsque le nombre de Prandtl augmente, l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique augmente et par conséquent, la vitesse locale augmente également.

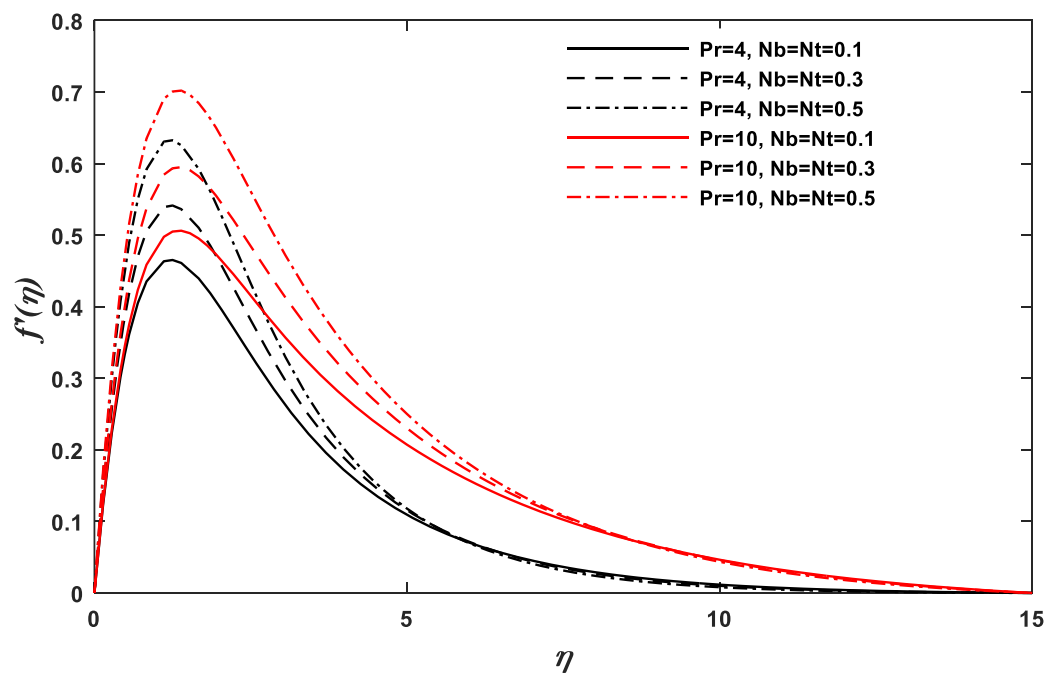


Figure III.4 : Variation des profils de vitesse avec Pr, Nt et Nb ($Nr = 0.2, Le = 1.0$).

Dans la figure III.4 nous remarquons que la vitesse locale adimensionnelle augmente avec l'augmentation des paramètres Nb et Nt qui représentent respectivement le paramètre du mouvement brownien et le paramètre de la thermophorèse, l'effet étant plus prononcé à $Pr=10$ qu'à $Pr=4$.

III.4. Profils de température adimensionnelle

La variation de la distribution de la température en fonction de la variable de similarité η est représentée graphiquement sur les figures III.5 et III.6 pour différentes valeurs de Pr , Nt , Nr , Nb et Le .

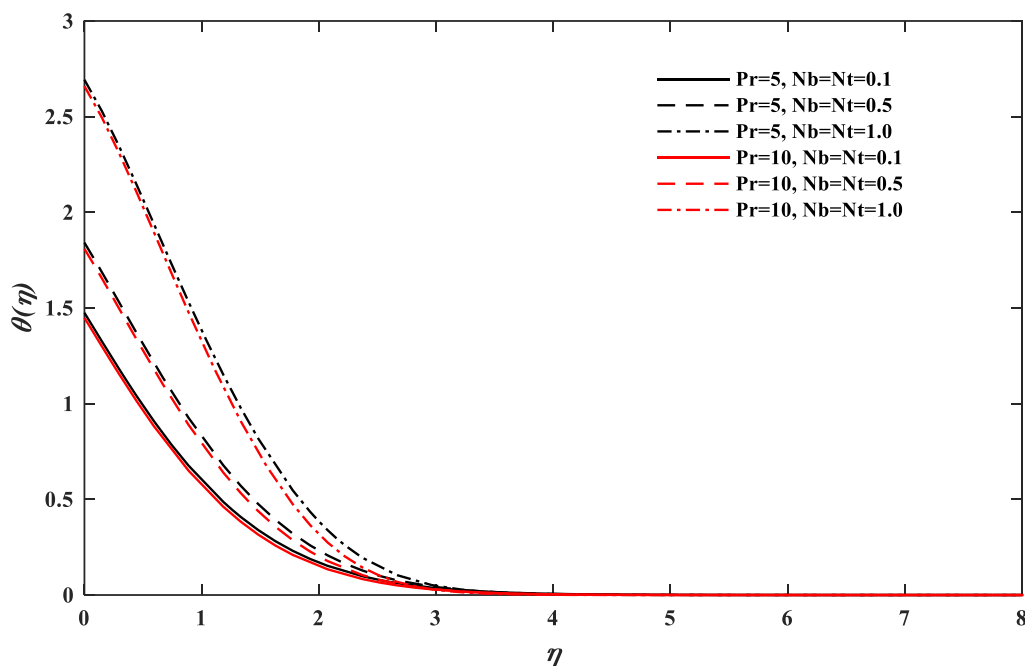


Figure III.5 : Variation des profils de température avec Pr , Nb et Nt ($Nr=0.3$, $Le=1.0$).

Les effets du paramètre de mouvement Brownien Nb et du paramètre de thermophorèse Nt sur les profils de température adimensionnelle sont représentés sur la figure III.5 pour différentes valeurs du nombre de Prandtl. Dans ce cas, le paramètre de rapport de flottabilité Nr et le nombre de Lewis Le sont maintenus fixes. Contrairement à la couche limite hydrodynamique, l'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation du nombre de Prandtl. Cela montre que l'effet du nombre de Prandtl sur une couche limite thermique de nanofluide est similaire à son effet sur une couche limite thermique fluide régulière. On constate que la température locale augmente avec l'augmentation des paramètres du mouvement Brownien et de thermophorèse.

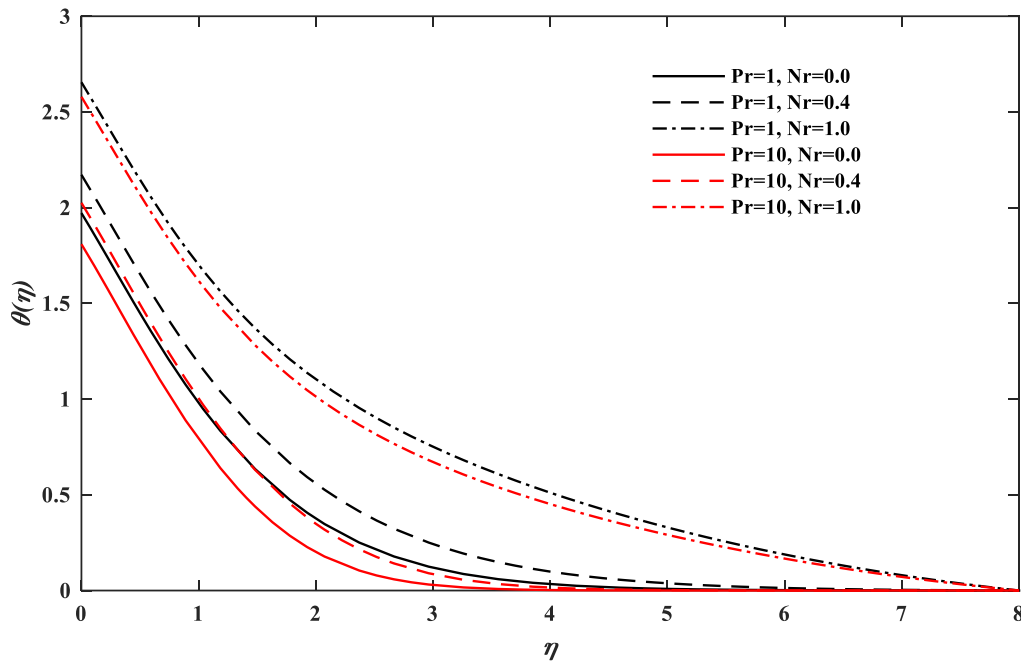


Figure III.6 : Variation des profils de température avec Pr et Nr ($Nb=Nt=0.5$, $Le=1.0$).

La figure III.6 montre la variation des profils de température en réponse à une variation des valeurs du paramètre de rapport de flottabilité Nr. Nous constatons que lorsque le paramètre Nr augmente, l'épaisseur de la couche limite thermique diminue. De plus, le gradient de température à la surface augmente à mesure que Nr augmente. La figure III.6 montre aussi que la température diminue lorsque les valeurs du nombre Prandtl Pr augmentent. Cela est dû au fait qu'un fluide à nombre de Prandtl plus élevé a une conductivité thermique relativement faible, ce qui réduit la conduction et donc l'épaisseur de la couche limite thermique ; et par conséquent, la température diminue. Augmenter Pr revient à augmenter le taux de transfert de chaleur à la surface car le gradient de température à la surface augmente. L'influence de Prandtl sur les fluides newtoniens est similaire à ce que nous avons observé dans le nanofluide. Par conséquent, ces propriétés sont également héritées par les nanofluides.

III.5. Profils de concentration adimensionnelle

La variation de la concentration adimensionnelle en fonction de la variable de similarité η est représentée graphiquement sur les figures III.7 et III.8 pour différentes valeurs de Pr, Nt, Nb, Nr et Le.

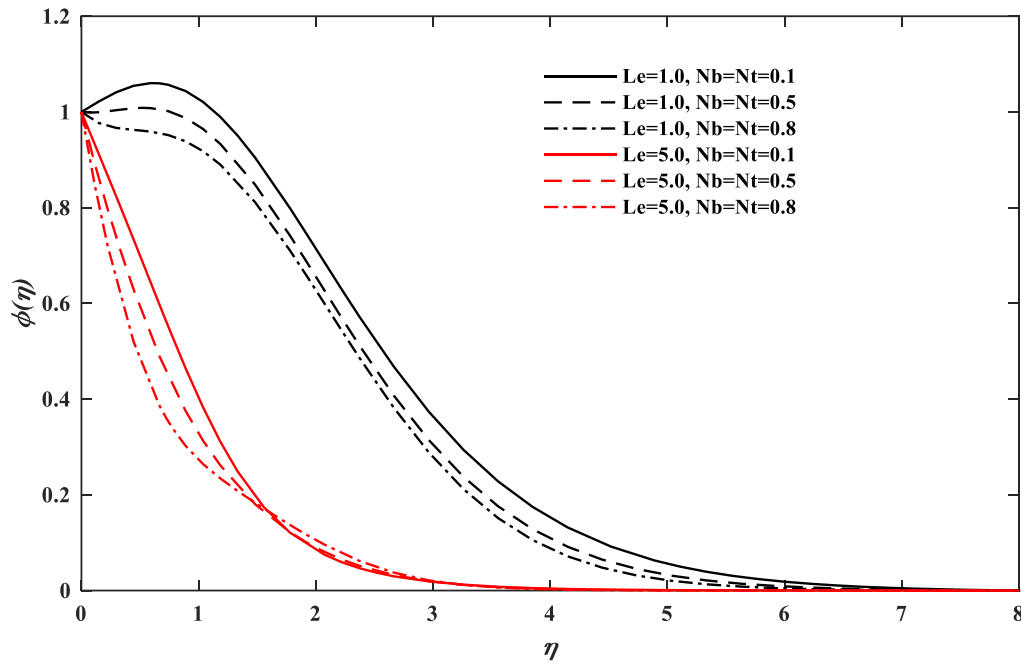


Figure III.7 : Variation des profils de concentration avec Nb , Nt et Le ($Nr=0.2$, $Pr=2.0$).

La figure III.7 illustre les effets du mouvement brownien et de la thermophorèse sur les profils de concentration de nanoparticules. Lors de la préparation de cette figure, le nombre de Prandtl Pr et le paramètre de flottabilité Nr ont été fixés respectivement à 2,0 et 0,2. Deux ensembles de courbes sont représentés, l'un pour $Le = 1$ et l'autre pour $Le = 5$. Les trois courbes pour $Le = 1$ présentent chacune un pic de concentration où la concentration dépasse la concentration spécifiée au niveau de la paroi. Cependant, aucun pic de ce type n'apparaît dans les courbes correspondant à $Le = 5$. Cela est dû au fait qu'avec une augmentation du nombre de Lewis, la diffusion brownienne diminue ce qui oblige la concentration à diminuer. Pour les deux nombres de Lewis, la concentration locale diminue légèrement à mesure que les paramètres de mouvement brownien et de thermophorèse augmentent.

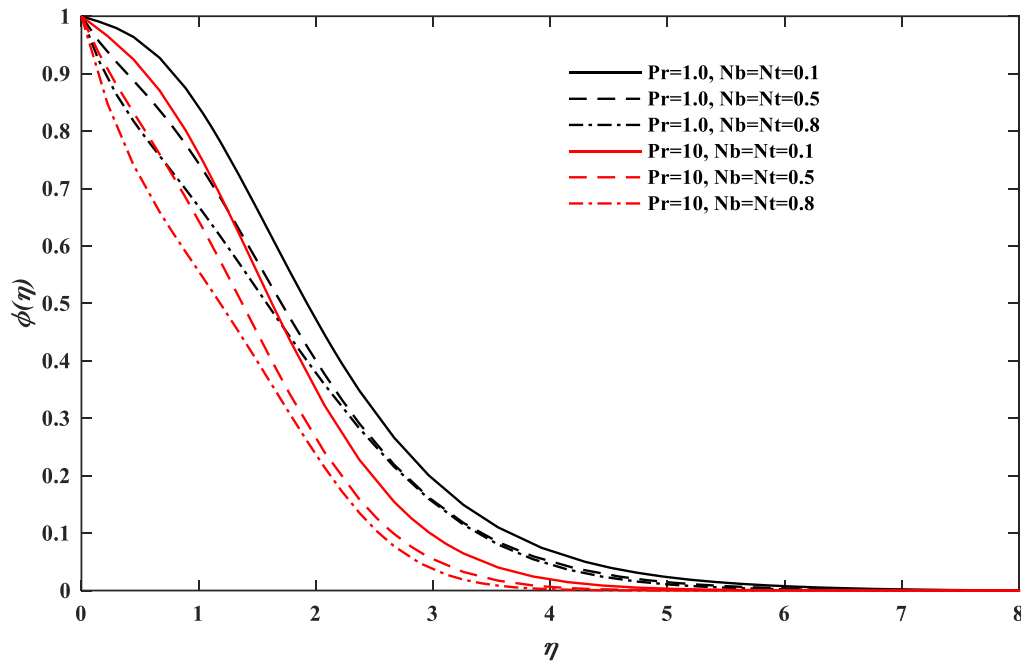


Figure III.8 : Variation des profils de concentration avec Pr, Nb et Nt ($Nr=0.5$, $Le=2.0$).

Un autre ensemble de résultats illustrant les effets du mouvement brownien et de la thermophorèse sur les profils de concentration de nanoparticules est fourni sur la figure III.8. Lors de la préparation de cette figure, le nombre de Lewis Le et le paramètre de flottabilité Nr ont été fixés à 2,0 et 0,5, respectivement. Deux ensembles de courbes sont affichés, l'un pour $Pr = 1$ et l'autre pour $Pr = 10$. Pour les deux nombres de Prandtl, la concentration locale diminue nettement à mesure que le paramètre de mouvement brownien et le paramètre de thermophorèse augmentent. Une comparaison des figures III.7 et III.8 révèle que, comparé au nombre de Lewis, le nombre de Prandtl a un effet plus prononcé sur les profils de concentration.

III.6. Variation du nombre Nusselt local Nu_x

Le nombre de Nusselt local est tracé en fonction du nombre de Prandtl ainsi pour différentes valeurs du nombre de Lewis, du paramètre de flottabilité Nr , de thermophorèse Nt et du paramètre de mouvement Brownien Nb . Les résultats sont illustrés dans les figures III.9, III.10 et III.11.

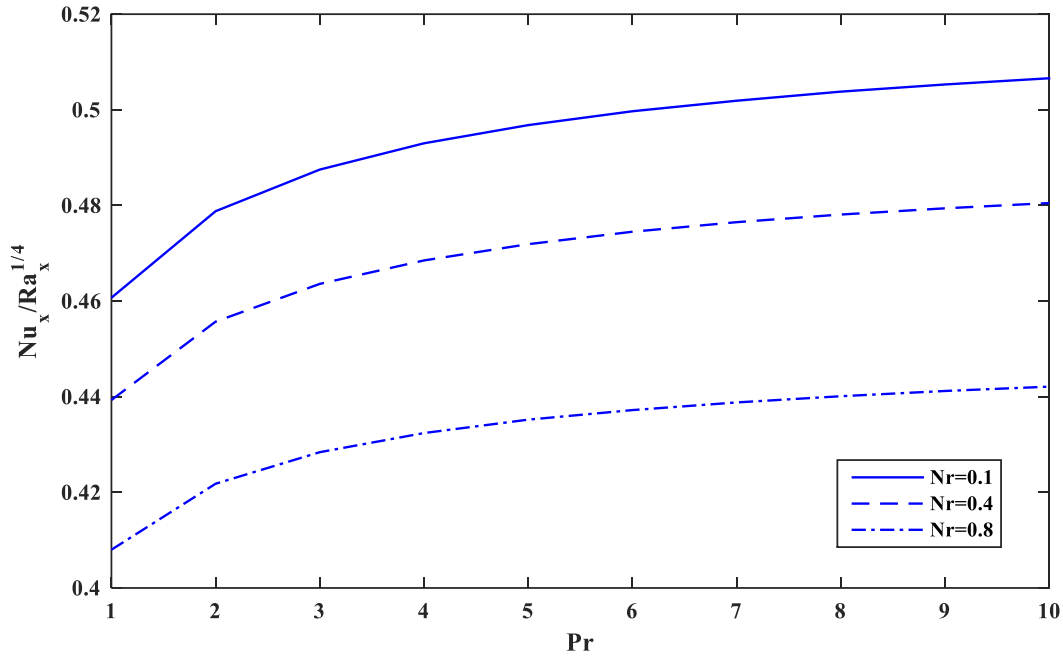


Figure III.9 : Variation du nombre de Nusselt avec Pr et Nr ($Nt=Nb=0.5$, $Le=2$).

La figure III.9 montre l'effet du nombre Prandtl Pr et du paramètre de flottabilité Nr sur la variation du nombre de Nusselt local. Comme nous pouvons le voir sur la figure, le nombre de Nusselt local augmente à mesure que le nombre de Prandtl augmente. Contrairement au nombre de Prandtl, l'augmentation du paramètre de flottabilité Nr conduit à une diminution de la valeur du nombre de Nusselt local.

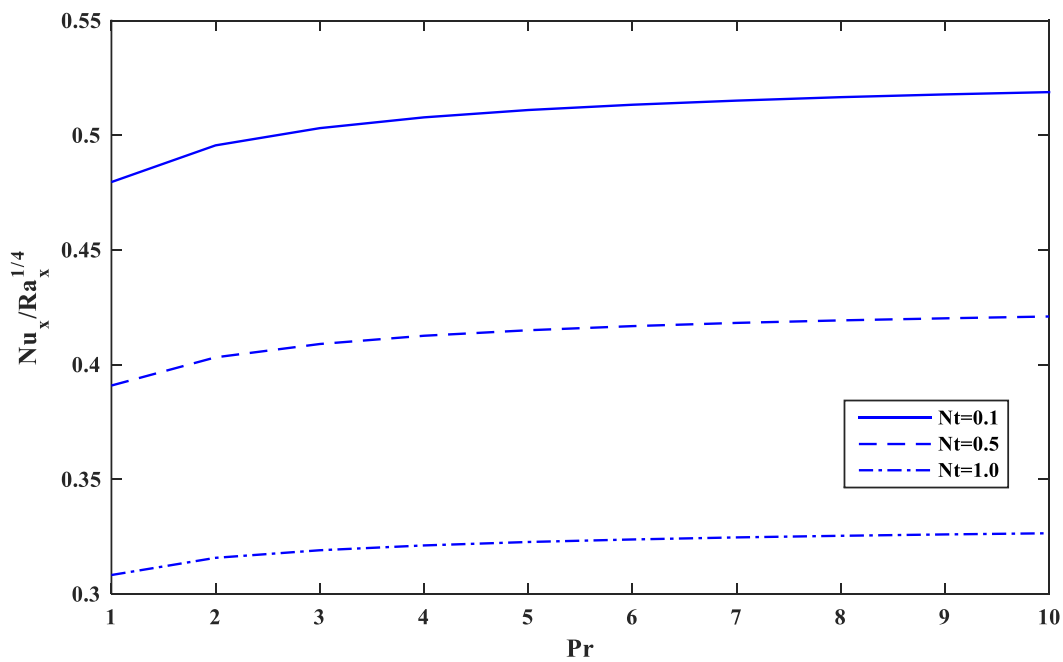


Figure III.10 : Variation du nombre de Nusselt avec Pr et Nt ($Nb=0.5$, $Nr=1$, $Le=2$).

La figure III.10 montre l'effet du nombre de Prandtl Pr et la thermophorèse Nt sur la variation de nombre Nusselt local. Il est clair que le nombre de Nusselt local augmente avec l'augmentation des valeurs de nombre de Prandtl. Cependant, une augmentation de la thermophorèse conduit à une diminution des valeurs du nombre de Nusselt local.

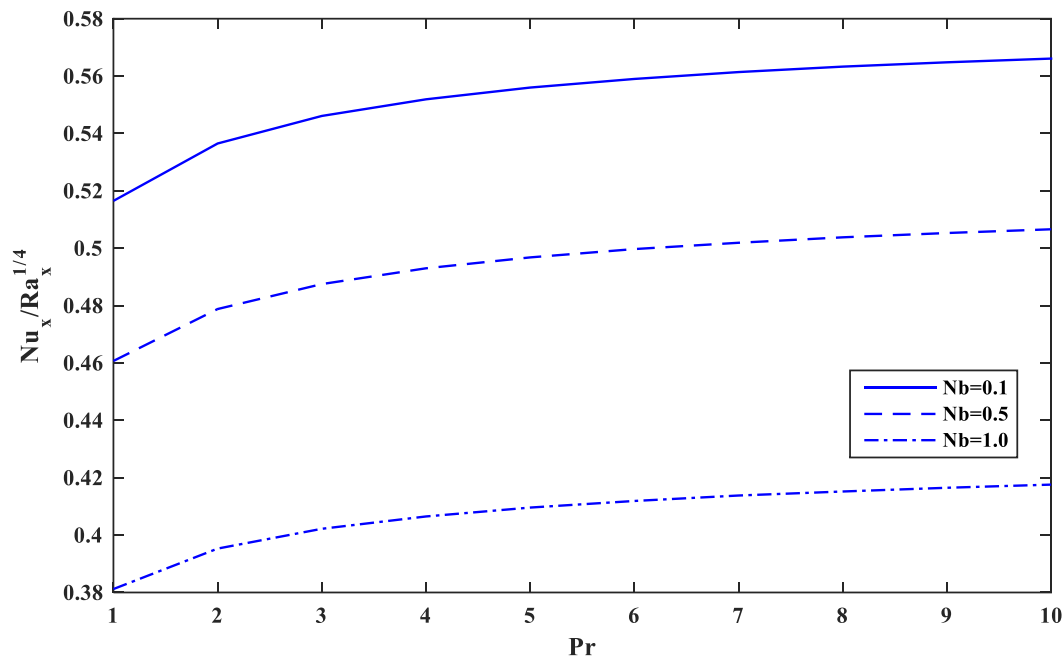


Figure III.11 : Variation du nombre Nusselt avec Pr et Nb ($Nt=0.5$, $Nr=0.1$, $Le=2$).

La figure III.11 représente la variation du nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Prandtl Pr et pour différentes valeurs du paramètre de mouvement Brownien Nb . En observant la figure, nous constatons que l'augmentation du nombre de Prandtl mène à l'augmentation du nombre de Nusselt local. Inversement, l'augmentation du paramètre de mouvement Brownien Nb est rencontrée par une diminution du taux de transfert de chaleur (le Nusselt local).

III.7. Variation du nombre de Sherwood local Sh_x

Le nombre de Sherwood local est tracé en fonction du nombre de Prandtl et ainsi pour différentes valeurs du nombre de Lewis, du paramètre de flottabilité Nr , de la thermophorèse Nt et du paramètre de mouvement Brownien Nb . Les résultats sont illustrés dans les figures III.12, III.13 et III.14.

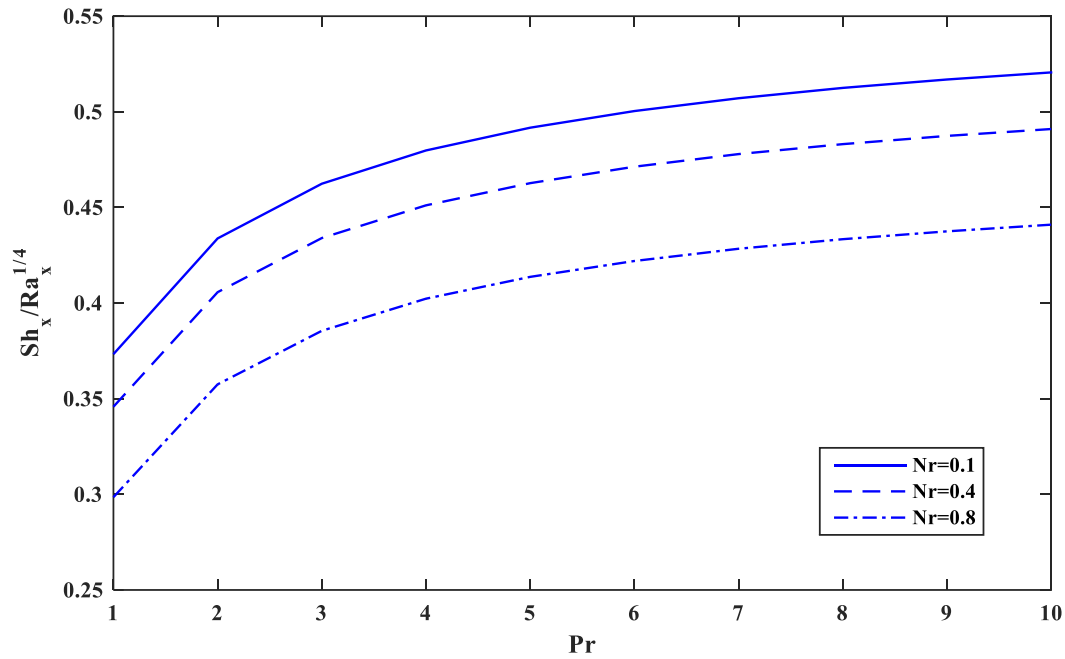


Figure III.12 : Variation du nombre Sherwood avec Pr et Nr ($Nt=Nb=0.5$, $Le=2$).

La figure III.12 illustre l'effet du nombre de Prandtl Pr et le paramètre de flottabilité Nr sur la variation du nombre de Sherwood local Sh_x . D'après la figure, le taux de transfert (nombre de Sherwood local) augmente considérablement avec l'augmentation du nombre de Prandtl Pr . D'autre part, l'augmentation du paramètre de flottabilité Nr diminue le nombre de Sherwood local.

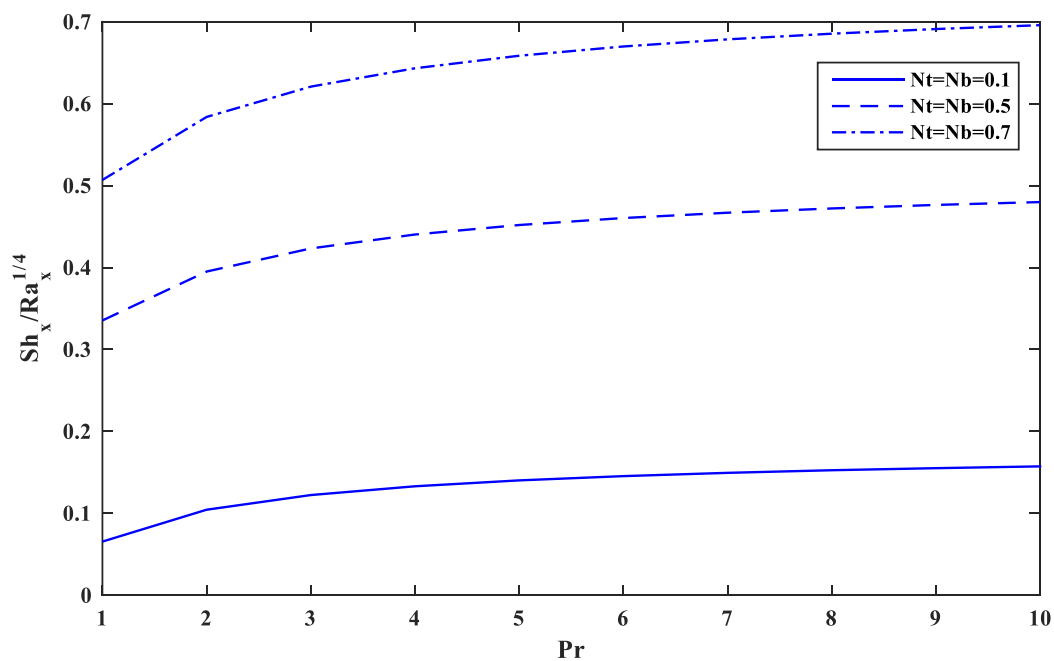


Figure III.13 : Variation du Nombre Sherwood avec Pr , Nt et Nb ($Nr=0.1$, $Le=2$).

La figure III.13 montre la variation du nombre de Sherwood local en fonction du nombre de Prandtl et pour différentes valeurs du paramètre de thermophorèse Nt et du paramètre de mouvement Brownien Nb . En regardant la figure nous constatons que l'augmentation dans le nombre de Prandtl est rencontrée par une augmentation dans le nombre de Sherwood local. Il est évident aussi que les valeurs du nombre de Sherwood augmentent en augmentant les valeurs des deux paramètres Nt et Nb .

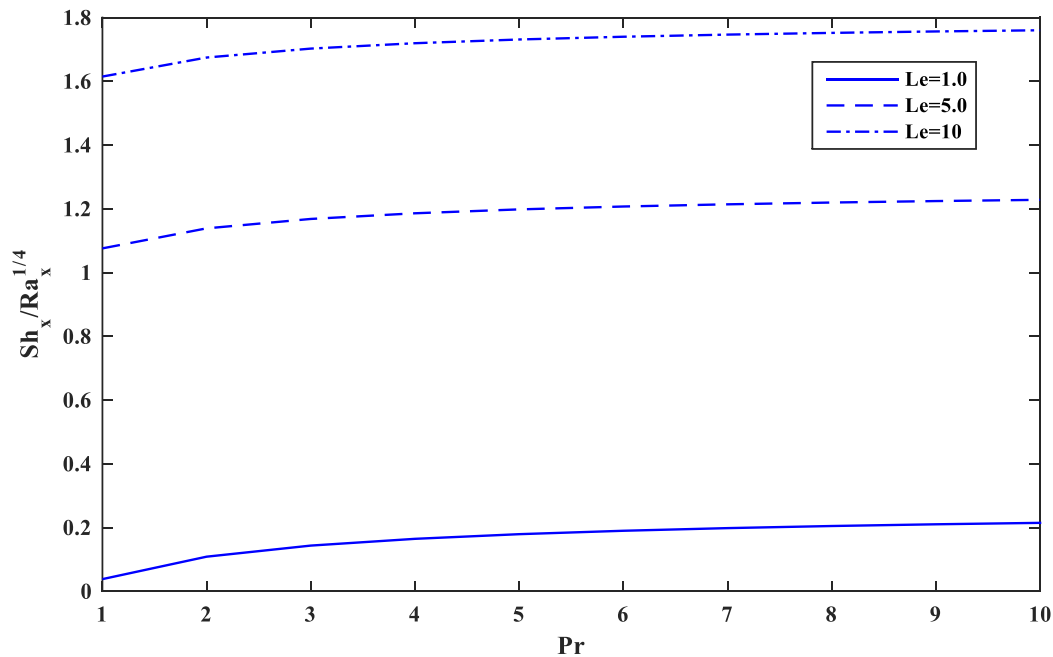


Figure III.14 : Variation du Nombre de Sherwood avec Pr et Le ($Nr=0.1$, $Nt=Nb=0.6$).

La figure III.14 montre la variation du nombre de Sherwood local Sh_x en fonction du nombre de Prandtl Pr et pour différentes valeurs du Nombre de Lewis Le . En observant la figure, nous constatons que l'augmentation du nombre de Prandtl conduit à l'augmentation du nombre de Sherwood local. De même façon, nous remarquons que l'augmentation du nombre de Lewis Le provoque une augmentation drastique du nombre de Sherwood local.

III.8. Conclusion

L'écoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux surfacique imposé est étudié numériquement dans ce chapitre en utilisant la méthode des différences finies. Les équations différentielles représentant le problème physique ont été transformées en données numériques en utilisant une méthode adéquate, les résultats numériques sont affichés par des illustrations graphiques.

L'analyse montre que les profils de vitesse, de température et de concentration volumique des nanoparticules dans les couches limites respectives dépendent de cinq paramètres adimensionnels, à savoir le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Lewis Le , le paramètre de mouvement brownien Nb , le paramètre de thermophorèse Nt , le paramètre du rapport de flottabilité Nr .

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail a été consacré pour l'étude théorique et numérique d'un écoulement de couche limite convective naturelle d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux de chaleur surfacique imposé.

Un modèle mathématique adéquat a été mis en place décrivant le phénomène étudié. Les équations de mouvement régissant l'écoulement sont réduites à un système d'équations différentielles ordinaires qui se présente sous forme d'un problème aux valeurs limites BVP (Boundary Value Problem), ces équations sont résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finis. Cette approche nous a permis de cerner les effets de différents paramètres de contrôles sur la structure des couches limites et de les distinguer en rapport aux effets combinés sollicités.

Une approche combinée de similitude numérique est utilisée dans notre étude. Les équations de transport convectif incluent les effets du mouvement brownien et de la thermophorèse. L'analyse montre que les profils de vitesse, de température et de fraction volumique des nanoparticules dans les couches limites respectives (hydrodynamique, thermique et massique) dépendent de cinq paramètres adimensionnels, à savoir le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Lewis Le , le paramètre du mouvement brownien Nb , le paramètre de thermophorèse Nt , le paramètre de rapport de flottabilité Nr . Outre les présentations graphiques des études paramétriques, Nous avons également exploré la manière dont le flux thermique de la paroi, avec le flux massique représentés respectivement par le nombre de Nusselt Nu et le nombre de Sherwood Sh dépend des cinq paramètres mentionnés ci-dessus.

Les conclusions tirées de cette étude sont comme suite :

Les graphes représentant les profils de vitesse adimensionnelle en fonction de la variable η montrent :

- La vitesse locale adimensionnelle diminue en augmentant le paramètre du rapport de flottabilité Nr .

- L'augmentation de l'un de ces paramètres suivants : nombre de Prandtl Pr , paramètre de thermophorèse Nt et le paramètre du mouvement Brownien est rencontrée par l'augmentation de la vitesse adimensionnelle.

Les graphes représentant les profils de température adimensionnelle en fonction de la variable η montrent :

- La température locale augmente avec l'augmentation du paramètre de mouvement Brownien Nb , du paramètre de flottabilité et du paramètre de la thermophorèse Nt .
- L'épaisseur de la couche limite thermique diminue avec l'augmentation du nombre de Prandtl Pr , ce qui implique la diminution de la température adimensionnelle.

Les graphes représentant les profils de concentration adimensionnelle en fonction de la variable η montrent :

- L'augmentation de l'un de ces paramètres suivants : nombre de Lewis, nombre de Prandtl, paramètre du mouvement Brownien Nb et le paramètre de la thermophorèse Nt provoque une diminution des profils de concentration adimensionnelle.
- Le nombre de Prandtl comparé au nombre de Lewis, a un effet plus prononcé sur les profils de concentration.

Les graphes du nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Prandtl montrent :

- Pour un nombre de Lewis fixe, le nombre de Nusselt local augmente à mesure que le nombre de Prandtl augmente, mais diminue lorsque le paramètre du mouvement brownien, le paramètre de thermophorèse et le paramètre du rapport de flottabilité augmentent.

Les graphes du nombre de Sherwood local en fonction du nombre de Prandtl montrent :

- Pour les valeurs fixes du nombre de Lewis et du paramètre de mouvement brownien, le nombre de Sherwood local diminue à mesure que le nombre Prandtl et le paramètre de flottabilité augmentent.
- Pour des valeurs fixes du nombre de Lewis et du rapport de flottabilité, l'augmentation du nombre de Prandtl, du paramètre de thermophorèse et du paramètre de mouvement Brownien provoquent l'augmentation du nombre de Sherwood local.

- Pour les valeurs fixes de tous les autres paramètres, à mesure que nous augmentons le nombre de Lewis, les valeurs du nombre de Sherwood local augmentent de manière considérable.

Finalement, on peut conclure que les paramètres de contrôle du problème ainsi les propriétés thermophysiques du fluide ont un effet considérable sur le transfert de chaleur et de masse. La présence des nanoparticules dans le fluide de base joue un rôle majeur sur l'évolution de transfert thermique.

Le modèle numérique développé dans le cadre de la présente étude ouvre la voie à d'autres études du phénomène de transfert de chaleur à l'aide des nanofluides dans lesquelles les effets suivants pourraient être considérés :

- ✓ Effet de la tension superficielle
- ✓ Effet de la forme et la dimension des nanoparticules
- ✓ Effet des forces électromagnétiques
- ✓ Effet de la nature du fluide de base
- ✓ Effet de la température du nanofluide
- ✓ Effet de la configuration géométrique

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Choi, S. I. (1995). Enhancing conductivity of fluids with nanoparticles, *ASME Fluid Eng. Division*, 231, 99-105.
- [2] Maxwell, J. C. (1873). *A treatise on electricity and magnetism* (Vol. 1). Clarendon press.
- [3] Bang, I. C., & Chang, S. H. (2005). Boiling heat transfer performance and phenomena of Al₂O₃-water nano-fluids from a plain surface in a pool. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48(12), 2407-2419.
- [4] Gruss, J. A., & Ribeiro, J. P. Nanofluides pour les applications thermiques. *Techniques de l'Ingénieur*, nm5115.-2009.
- [5] Ali, N., Teixeira, J. A., & Addali, A. (2018). A review on nanofluids: fabrication, stability, and thermophysical properties. *Journal of Nanomaterials*, 2018.
- [6] Yu, W., & Xie, H. (2012). A review on nanofluids: preparation, stability mechanisms, and applications. *Journal of nanomaterials*, 2012.
- [7] Pak, B. C., & Cho, Y. I. (1998). Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles. *Experimental Heat Transfer an International Journal*, 11(2), 151-170.
- [8] Xuan, Y., & Roetzel, W. (2000). Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids. *International Journal of heat and Mass transfer*, 43(19), 3701-3707.
- [9] Kim, J., Kang, Y. T., & Choi, C. K. (2004). Analysis of convective instability and heat transfer characteristics of nanofluids. *Physics of fluids*, 16(7), 2395-2401.
- [10] J.C. Maxwell. *A Treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, U.K., 1891.
- [11] Hamilton, R. L., & Crosser, O. K. (1962). Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems. *Industrial & Engineering chemistry fundamentals*, 1(3), 187-191.
- [12] Yu, W., & Choi, S. U. S. (2003). The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: a renovated Maxwell model. *Journal of nanoparticle research*, 5(1-2), 167-171.
- [13] D.A.G. Bruggeman. *Ann. Physics (Leipzig)*, 24, 636, 1935.
- [14] Einstein, A. (1906). On the theory of the Brownian movement. *Ann. Phys*, 19(4), 371-381.
- [15] Brinkman, H. C. (1952). The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *The Journal of Chemical Physics*, 20(4), 571-571.

- [16] Batchelor, G. (1976). Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 74(1), 1-29.
- [17] Maiga, S. E. B., Palm, S. J., Nguyen, C. T., Roy, G., & Galanis, N. (2005). Heat transfer enhancement by using nanofluids in forced convection flows. *International journal of heat and fluid flow*, 26(4), 530-546.
- [18] Pack, S. P., Cho, K. M., Kang, H. S., & Yoo, Y. J. (1998). Development of cellobiose-utilizing recombinant yeast for ethanol production from cellulose hydrolyzate. *Journal of microbiology and biotechnology*, 8, 441-448.
- [19] Prasher, R., Song, D., Wang, J., & Phelan, P. (2006). Measurements of nanofluid viscosity and its implications for thermal applications. *Applied physics letters*, 89(13), 133108.
- [20] Tzeng, S. C., Lin, C. W., & Huang, K. D. (2005). Heat transfer enhancement of nanofluids in rotary blade coupling of four-wheel-drive vehicles. *Acta Mechanica*, 179(1-2), 11-23.
- [21] Zhang, Z. Z., Xue, Q. J., Liu, W. M., & Shen, W. C. (1997). Friction and wear properties of metal powder filled PTFE composites under oil lubricated conditions. *Wear*, 210(1-2), 151-156.
- [22] Tsai, C. Y., Chien, H. T., Ding, P. P., Chan, B., Luh, T. Y., & Chen, P. H. (2004). Effect of structural character of gold nanoparticles in nanofluid on heat pipe thermal performance. *Materials Letters*, 58(9), 1461-1465.
- [23] Ma, H. B., Wilson, C., Borgmeyer, B., Park, K., Yu, Q., Choi, S. U. S., & Tirumala, M. (2006). Effect of nanofluid on the heat transport capability in an oscillating heat pipe. *Applied Physics Letters*, 88(14), 143116.
- [24] You, S. M., Kim, J. H., & Kim, K. H. (2003). Effect of nanoparticles on critical heat flux of water in pool boiling heat transfer. *Applied physics letters*, 83(16), 3374-3376.
- [25] Vassallo, P., Kumar, R., & D'Amico, S. (2004). Pool boiling heat transfer experiments in silica-water nano-fluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(2), 407-411.
- [26] Jordan, A., Scholz, R., Wust, P., Föhling, H., & Felix, R. (1999). Magnetic fluid hyperthermia (MFH): Cancer treatment with AC magnetic field induced excitation of biocompatible superparamagnetic nanoparticles. *Journal of Magnetism and Magnetic materials*, 201(1-3), 413-419.
- [27] Kuznetsov, A. V., & Nield, D. A. (2010). Natural convective boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(2), 243-247.

- [28] Nield, D. A., & Kuznetsov, A. V. (2011). The Cheng–Minkowycz problem for the double-diffusive natural convective boundary layer flow in a porous medium saturated by a nanofluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(1-3), 374-378.
- [29] Khan, W. A., & Aziz, A. (2011). Natural convection flow of a nanofluid over a vertical plate with uniform surface heat flux. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(7), 1207-1214.
- [30] Aziz, A., & Khan, W. A. (2012). Natural convective boundary layer flow of a nanofluid past a convectively heated vertical plate. *International Journal of Thermal Sciences*, 52, 83-90.
- [31] Rashad, A. M., El-Hakiem, M. A., & Abdou, M. M. M. (2011). Natural convection boundary layer of a non-Newtonian fluid about a permeable vertical cone embedded in a porous medium saturated with a nanofluid. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(8), 3140-3151.
- [32] Khan, W. A., & Pop, I. (2010). Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet. *International journal of heat and mass transfer*, 53(11-12), 2477-2483.
- [33] Hamad, M. A. A., Pop, I., & Ismail, A. M. (2011). Magnetic field effects on free convection flow of a nanofluid past a vertical semi-infinite flat plate. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(3), 1338-1346.
- [34] Ibrahim, W., Shankar, B., & Nandeppanavar, M. M. (2013). MHD stagnation point flow and heat transfer due to nanofluid towards a stretching sheet. *International journal of heat and mass transfer*, 56(1-2), 1-9.
- [35] Keblinski, P., Phillpot, S. R., Choi, S. U. S., & Eastman, J. A. (2002). Mechanisms of heat flow in suspensions of nano-sized particles (nanofluids). *International journal of heat and mass transfer*, 45(4), 855-863.
- [36] Gorla, R. S. R., & Chamkha, A. (2011). Natural convective boundary layer flow over a nonisothermal vertical plate embedded in a porous medium saturated with a nanofluid. *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*, 15(2), 81-94.
- [37] Pakravan, H. A., & Yaghoubi, M. (2011). Combined thermophoresis, Brownian motion and Dufour effects on natural convection of nanofluids. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(3), 394-402.

Annexe

Annexe A : Résolution du problème des valeurs aux limites pour les équations différentielles ordinaires dans Matlab avec bvp4c

A.1. Introduction

Les équations différentielles ordinaires décrivent des phénomènes qui changent en permanence. Ils se posent en modèles à travers les mathématiques, les sciences et l'ingénierie.

En soi, un système d'équations différentielle sa de nombreuses solutions, communément une solution d'intérêt est déterminée en spécifiant les valeurs de tous ses composants en un seul point $x=a$, c'est un problème de valeur initiale (IVP). Cependant, dans de nombreuses applications d'une solution est déterminée d'une manière plus complexe. Un problème de valeur limite (BVP) spécifie les valeurs ou des équations pour les composants de la solution à plus d'un x . Contrairement de IVP, un problème de valeur limite ne peut avoir une solution, ou peut avoir un nombre fini, ou une infinité. De ce fait, les programmes de résolution de BVP, les utilisateurs doivent fournir une estimation de la solution souhaitée. Souvent, il existe des paramètres qui doivent être déterminés de telle sorte que le BVP a une solution. Encore une fois il pourrait y avoir plus d'une possibilité, afin que les programmes nécessitent une estimation pour les paramètres souhaités. Les singularités dans les coefficients et les problèmes posés sur des intervalles infinis ne sont pas inhabituelles.

Cette annexe montre comment formuler, résoudre et tracer la solution d'un BVP avec le programme bvp4c Matlab. Il vise à rendre la résolution d'un problème de type BVP aussi facile que possible. BVPs sont beaucoup plus difficiles à résoudre que IVP et tout solveur peut échouer, même avec de bonnes estimations pour la solution et des paramètres inconnus.

Bvp4c est un solveur efficace, mais la méthode sous-jacente et l'environnement de calcul ne sont pas appropriés pour de grandes précisions, ni pour des problèmes avec très brusques changements de leurs solutions.

A.2. Problème de valeur aux limites

Si la fonction f est lisse sur $[a, b]$ la valeur initiale du problème $y' = f(x, y)$, $y(a)$ donné, a une solution unique. Les Problèmes de valeur aux limites à deux points sont illustrés par l'équation :

$$y'' + y = 0 \tag{A.1}$$

avec des conditions aux limites $y(a) = A$, $y(b) = B$. Le moyen important d'analyser ces problèmes est de considérer une famille de solutions de IVP. Soit $y(x, s)$ la solution de

l'équation (A.1) avec les valeurs initiales $y(a) = A$, $y'(a) = s$, chaque $y(x, s)$ s'étend à $x = b$ et nous demandons, pour quelles valeurs de S , $y(b, s) = B$?

S'il existe une solution de cette équation algébrique, $y(x, s)$ correspondant constitue une solution de l'équation différentielle qui satisfait les deux conditions aux limites. En utilisant la linéarité, nous pouvons trier les possibilités facilement.

Soit $u(x)$ la solution définie par $y(a) = A$, $y'(a) = 0$ et $v(x)$ la solution définie par $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. La linéarité implique que $y(x, s) = u(x) + sv(x)$, et la condition à la limite $B = y(b, s) = u(b) + sv(b)$ s'élève à une équation algébrique linéaire pour la pente initiale inconnue s . Les faits familiers de l'existence et l'unicité des solutions d'équations algébriques linéaires nous disent alors qu'il y'a soit une solution exactement à la BVP, ou il y'a des valeurs limites B pour lesquels il n'existe aucune solution et d'autres pour lesquels il existe une infinité de solutions.

A.3. Méthodes numériques

L'approche théorique de la BVP du deuxième paragraphe est basée sur la solution des IVP pour ODE et la solution des équations algébriques non linéaires. Parce qu'il y'a des programmes efficaces pour les deux tâches, il est naturel de les combiner dans un programme pour la solution du BVP. L'approche est appelée une méthode de tir (shooting method). Parce qu'il apparaît avant si droit d'utiliser des outils numériques de qualité pour la solution du BVP par des techniques de tirs, il est peut-être surprenant que `bvp4c` n'est pas un code de technique de tirs. La difficulté de base avec cette méthode est qu'une parfaitement agréable BVP peut nécessiter l'intégration des IVP qui sont instables. C'est, la solution d'un BVP peut être insensible aux changements de valeurs limites, mais les solutions de l'IVP de méthode de tir sont sensibles aux changements dans les valeurs initiales. L'exemple simple :

$$y'' - 100y = 0 \tag{A.2}$$

Avec $y(0) = 1$, $y(1) = B$ fait le point. Le tire implique la solution $y(x, s) = \cos 10x + 0.1s \sinh 10x$ de l'IVP avec valeurs initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = s$. De toute évidence, ce qui peut être aussi grand $0.1 \sinh 10 \approx 1101$. Un petit calcul montre que la pente qui conduit à la satisfaction de la condition à la limite à $x = 1$ est $s = 10 (B - \cosh 10) / \sinh 10$ puisque, pour la solution de la BVP, $|\partial y / \partial B| = |\sinh 10x / \sinh 10| \leq 1$. Evidemment, les solutions de l'IVP sont beaucoup plus sensibles aux variations de la pente initiale de la solution s , alors que la solution du BVP est à des changements dans la valeur limite B . si les IVP ne sont pas trop instable, le tir peut être très efficace. IVP instables peuvent causer un code de tirs à l'échec parce que l'intégration "explose" avant d'atteindre la fin de l'intervalle. Plus souvent, cependant, l'IVP atteint le

solveur à la fin, mais est incapable de calculer un résultat précis là-bas et de ce fait, le solveur de l'équation non linéaire est incapable de trouver des valeurs initiales précises. Une variété de techniques sont utilisées pour améliorer la prise de vue, mais quand l'IVP sont très instables, prise de vue n'est tout simplement pas une approche naturelle pour résoudre BVP.

Bvp4c met en œuvre une méthode de collocation pour la solution du BVP de la forme :

$$y' = f(x, y, p), a \leq x \leq b \quad (\text{A.3})$$

avec de non-linéarité générale, deux points conditions aux limites

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Ici p est un vecteur de paramètres inconnus. Pour plus de simplicité, il est supprimé dans les expressions qui suivent. La solution d'approximations $s(x)$ est une fonction continue qu'est un polynôme cubique sur chaque sous-intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ d'une maille $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Il satisfait les conditions aux limites :

$$g(s(a), s(b)) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Et qu'il satisfait aux équations différentielles (des collocations) aux deux extrémités et le point médian de chaque sous-intervalle

$$s'(x_n) = f(x_n, s(x_n)) \quad (\text{A.6})$$

$$s'((x_n + x_{n+1})/2) = f((x_n + x_{n+1})/2, s((x_n + x_{n+1})/2)) \quad (\text{A.7})$$

$$s'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, s(x_{n+1})) \quad (\text{A.8})$$

Ces conditions conduisent à un système d'équations algébriques non linéaires pour les coefficients définissant $s(x)$. A la différence de la technique de tir, la solution $y(x)$ est évaluée sur tout l'intervalle $[a, b]$ et les conditions aux limites sont pris en compte à tous les moments.

Les équations algébriques non linéaires sont résolues de manière itérative par linéarisation, si cette approche s'appuie sur les solveurs d'équations linéaires de Matlab plutôt que ses codes IVP. La méthode de base de bvp4c, que l'on appelle la méthode de Simpson, est bien connue et se trouve dans un certain nombre de codes. Il peut être démontré que les hypothèses modestes, $s(x)$ est une approximation de quatrième ordre à une solution isolée $y(x)$, c'est à dire $\|y(x) - s(x)\| \leq Ch^4$. Ici, h est la valeur maximale de la taille de pas $h_n = x_{n+1} - x_n$ et (C) est une constante. Parce que ce n'est pas vrai de certaines méthodes de collocation populaires, nous insistons sur le fait important que cette borne est vraie pour tout x dans $[a, b]$. Après $s(x)$ est calculé sur un maillage avec bvp4c, il peut être évalué à peu de frais à tout x , ou un ensemble de x , dans $[a, b]$ avec la fonction bvpval. Parce que BVPs

peuvent avoir plus d'une solution, les codes de BVP obligent les utilisateurs à fournir une estimation pour la solution souhaitée. L'estimation comprend une estimation d'un maillage initial révèle le comportement de la solution souhaitée. Les codes ensuite adaptent le maillage de manière à obtenir une solution numérique exacte avec un nombre réduit de points de maillage. Venir suffisamment avec une bonne supposition est souvent la partie la plus difficile de résoudre un BVP. `bvp4c` adopte une approche inhabituelle pour le contrôle d'erreur qui lui permet de traiter avec suppositions pauvres. La continuité de $s(x)$ sur $[a, b]$ et collocation aux extrémités de chaque sous-intervalle implique que $s(x)$ a également une dérivée continue sur $[a, b]$. Pour une telle approximation, le résidu $r(x)$ dans l'équation différentielle est définie par :

$$r(x) = s'(x) - f(x, s(x)) \quad (\text{A.9})$$

Autrement dit, cela dit que $s(x)$ est la solution exacte d'ODEs perturbés.

$$s'(x) = f(x, s(x)) + r(x) \quad (\text{A.10})$$

De même, le résidu dans les conditions aux limites sont $g(s(a), s(b))$.

`Bvp4c` contrôle les tailles de ces résidus. Si les résidus sont uniformément petits, $s(x)$ est une bonne solution dans le sens que c'est la solution exacte d'un problème proche de celui fourni au solveur. En outre, pour un problème relativement bien conditionné, les petits résidus impliquent que $s(x)$ est proche de $y(x)$, même quand h n'est pas assez petit pour que le quatrième ordre de convergence est évident. Les codes de techniques de tir peuvent également être décrites comme contrôlant la taille de ces résidus : à chaque étape, un code d'IVP contrôle l'erreur locale, ce qui équivaut à contrôler la taille du résidu d'un prolongement continu approprié de formule utilisé, et le solveur d'équations non linéaires est utilisé pour trouver des valeurs initiales pour lesquelles le résiduel dans les conditions aux limites est faible. Suppression résiduelle a des vertus importantes : résidus sont bien définis, peu importe à quel point la solution approchée, et les résidus peuvent être évalués importe où simplement en évaluation $f(x, s(x))$ ou $g(s(a), s(b))$. `Bvp4c` est basée sur des algorithmes qui sont plausibles, même lorsque le maillage initial est très faible, mais fournir des résultats corrects que h tends vers 0. Ils exploitent des propriétés très intéressantes de la méthode de Simpson. BVPs se posent dans les formes les plus diverses. À peu près tout BVP peuvent être formulées pour une solution avec `bvp4c`. La première étape consiste à écrire l'ODE comme un système de premières équations différentielles d'ordre.

C'est une tâche familière, car elle doit également être faite pour IVP solveur de Matlab. L'idée de base est d'introduire de nouvelles variables, une pour chaque variable dans le

problème d'origine et l'autre pour chacun de ses dérivées à un de moins que la dérivée la plus élevée apparaisse. Le procédé est illustré dedans. C'est tout ce qui est nécessaire pour résoudre un IVP, mais BVP peut être beaucoup plus compliqué, comme nous l'avons déjà vu, contrairement IVP, les problèmes aux limites n'ont pas nécessairement une solution, et quand ils le font, la solution n'est pas nécessairement unique.

En effet, BVP implique généralement des valeurs de paramètres pour lesquels le problème a une solution. En outre, les singularités de toutes sortes ne sont pas du tout inhabituelles.

A.4. Syntaxe de `bvp4c` sur Matlab

`Bvp4c` résout des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires.

La syntaxe de cette méthode est :

$$sol = bvp4c(@odefun,@bcfun,solinit,options)$$

avec les arguments suivants:

<i>odefun</i>	Une fonction qui évalue la BVP sous la forme d'un système équivalent des premières équations différentielles commandées. Il peut avoir la forme : <i>function dydx = odefun(x,y),</i> où x est un scalaire, et $dydx$ et y sont des vecteurs de colonne.
<i>bcfun</i>	Une fonction qui calcule le résiduel dans les conditions aux limites. <code>Bcfun</code> peut avoir la forme <i>function res = bcfun(ya,yb)</i> où ya et yb sont des vecteurs colonnes correspondant à la solution numérique au $x = a$ et $x = b$, respectivement. <ul style="list-style-type: none"> • Les premiers éléments $ya(1)$ et $yb(1)$ sont les valeurs de y à $x = a$ et $x = b$. • Les éléments seconds $ya(2)$ et $yb(2)$ sont les valeurs de dy/dx en $x = a$ et $x = b$. • les paramètres de sortie est un vecteur colonne avec les valeurs de résidus.
<i>solinit</i>	Une structure contenant la proposition initiale d'une solution. <i>Solinit</i> peuvent être créés en utilisant la fonction <code>bvpinit</code> . <i>solinit = bvpinit(x,yinit);</i> où x est un vecteur estimation des points de maillage initial que le procédé en solution dans <code>bvp4c</code> devrait d'abord utiliser. <ul style="list-style-type: none"> • Pour un BVP avec un domaine $[a, b]$, le premier élément de x est a, et le dernier élément est b.

	<ul style="list-style-type: none"> •Maillage initial peut être choisi en utilisant $x = \text{linspace}(a,b,N); \text{or } x = [a:\text{increment}:b];$ • Le vecteur <i>yinit</i> est l'estimation initiale de la solution, il peut être constant ou fonction de <i>x</i>.
<i>sol</i>	<p><i>sol</i> est une structure contenant la solution. Il est renvoyé par <i>bvp4c</i>. Il a les champs suivants :</p> <p><i>sol.x</i> : Maillage sélectionné par <i>bvp4c</i>. Le nombre final de points de maillage est déterminée par le solveur BVP4c pendant le processus de solution.</p> <p><i>sol.y</i> : Champ de solution dans les points de maillage de <i>sol.x</i></p> <p>La structure de <i>sol</i> peut avoir n'importe quel nom. Il est commode d'utiliser des sous-fonctions de placer toutes les fonctions requises par <i>bvp4c</i> dans un seul fichier M-file</p>
<i>Options</i>	<p>Le solveur cherche à contrôler l'erreur dans la solution par les résidus dans les conditions aux limites, à la fois pour chaque sous-intervalle et les limites du système. Des dispositions sont prises pour la spécification de l'erreur absolue dans les solutions et l'erreur relative autorisée à se propager entre itérations.</p> <p><i>options = bvpset('RelTol',10⁻⁶, 'Abstol',10⁻⁶, 'Nmax',5000,'Stats','off','Vectorized','on');</i></p>

Résumé

Écoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux surfacique imposé

L'écoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux de chaleur surfacique imposé est étudié numériquement, après une analyse de similarité des équations de transport. Le modèle de transport utilisé inclut l'effet du mouvement Brownien et de la thermophorèse. L'analyse montre que les profils de vitesse, de température et de concentration dans les couches limites respectives dépendent, outre les nombres de Prandtl et de Lewis, de trois paramètres adimensionnels supplémentaires, à savoir un paramètre de mouvement Brownien N_b , un paramètre de thermophorèse N_t , un paramètre de rapport de flottabilité N_r . En plus de l'étude de ces paramètres sur les caractéristiques d'écoulement de la couche limite (vitesse, température, concentration de nanoparticules et transfert de chaleur), des corrélations pour les nombres de Nusselt et Sherwood ont été développées sur la base d'une analyse de régression des données.

Mots clés : convection naturelle, nanofluide, plaque verticale, flux de chaleur imposé.

Abstract

Natural convection flow of a nanofluid over a vertical plate with imposed surface heat flux

Natural convective flow of a nanofluid over a vertical plate with a constant surface heat flux is investigated numerically, following a similarity analysis of the transport equations. The transport model employed includes the effect of Brownian motion and thermophoresis. The analysis shows that velocity, temperature and concentration profiles in the respective boundary layers depend, besides the Prandtl and Lewis numbers, on three additional dimensionless parameters, namely a Brownian motion parameter N_b , a thermophoresis parameter N_t , a buoyancy ratio parameter N_r . In addition to the study of these parameters on the boundary layer flow characteristics (velocity, temperature, nanoparticle concentration and heat transfer), correlations for the Nusselt and Sherwood numbers have been developed based on a regression analysis of the data.

Keywords: natural convection, nanofluid, vertical plate, imposed heat flux.

Résumé

Écoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux surfacique imposé

L'écoulement convectif naturel d'un nanofluide devant une plaque verticale avec un flux de chaleur surfacique imposé est étudié numériquement, après une analyse de similarité des équations de transport. Le modèle de transport utilisé inclut l'effet du mouvement Brownien et de la thermophorèse. L'analyse montre que les profils de vitesse, de température et de concentration dans les couches limites respectives dépendent, outre les nombres de Prandtl et de Lewis, de trois paramètres adimensionnels supplémentaires, à savoir un paramètre de mouvement Brownien N_b , un paramètre de thermophorèse N_t , un paramètre de rapport de flottabilité N_r . En plus de l'étude de ces paramètres sur les caractéristiques d'écoulement de la couche limite (vitesse, température, concentration de nanoparticules et transfert de chaleur), des corrélations pour les nombres de Nusselt et Sherwood ont été développées sur la base d'une analyse de régression des données.

Mots clés : convection naturelle, nanofluide, plaque verticale, flux de chaleur imposé.

Abstract

Natural convection flow of a nanofluid over a vertical plate with imposed surface heat flux

Natural convective flow of a nanofluid over a vertical plate with a constant surface heat flux is investigated numerically, following a similarity analysis of the transport equations. The transport model employed includes the effect of Brownian motion and thermophoresis. The analysis shows that velocity, temperature and concentration profiles in the respective boundary layers depend, besides the Prandtl and Lewis numbers, on three additional dimensionless parameters, namely a Brownian motion parameter N_b , a thermophoresis parameter N_t , a buoyancy ratio parameter N_r . In addition to the study of these parameters on the boundary layer flow characteristics (velocity, temperature, nanoparticle concentration and heat transfer), correlations for the Nusselt and Sherwood numbers have been developed based on a regression analysis of the data.

Keywords: natural convection, nanofluid, vertical plate, imposed heat flux.