

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la recherche scientifique

UNIVERSITE Abderrahmane MIRA BEJAIA

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : installations énergétiques et turbomachines

Par :

DAHGANE Nourdine

KACI Mustapha

LAMMARI Rabah

Thème

Etude de la variation de temps d'humidité dans une colonne de milieux poreux

Soutenu le 27/10/2020 devant le jury composé de:

Mr.

Président

Mr.

Rapporteur

Mr.

Examineur

Année Universitaire 2019-2020

Remerciements

On remercie en premier lieu notre Dieu qui nous a donné la puissance pour achever ce modeste travail.

Un grand remerciement à notre encadreur Mr. Abdelhakim BENSLIMANE pour son soutien scientifique. Ses conseils importants durant notre mémoire. Ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans lui, qui a toujours su nous consacrer un peu de temps. Qu'il trouve ici l'expression de nos sincères gratitudee.

On exprime également nos plus sincères remerciements aux membres de jury, qui ont accepté d'évaluer notre travail, nous sommes particulièrement sensibles au grand honneur qu'ils nous ont accordé en acceptant cette tâche.

Enfin, on remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce mémoire.

Dédicaces

On dédie ce travail en premier lieu à nos mères et nos pères.

A nos frères

A nos meilleurs amis

A tous nos enseignants durant notre vie scolaire

Sommaire

| | |
|---|--------|
| Remerciements | i |
| Dédicaces | ii |
| Sommaire | III |
| Liste des figures | vi |
| NOMENCLATURE..... | vii |
| Introduction Générale..... | - 1 - |
| I. Définitions générales et rappel théorique..... | - 3 - |
| I.1. Introduction | - 3 - |
| I.2. Définition des milieux poreux..... | - 3 - |
| I.3. Paramètres physique des milieux poreux | - 4 - |
| I.3.1. Volume | - 4 - |
| I.3.2. Poids | - 5 - |
| I.3.3. Poids volumique des milieux poreux..... | - 5 - |
| I.3.4. Teneur en eau..... | - 6 - |
| I.3.5. Porosité | - 6 - |
| I.3.6. L'indice des vides | - 6 - |
| I.3.7. Degré de saturation | - 6 - |
| I.4. Classification et caractérisation..... | - 7 - |
| I.4.1. Caractérisation | - 7 - |
| I.5. Modes de fixation de l'humidité | - 9 - |
| I.5.1. L'adsorption..... | - 9 - |
| I.5.2. La capillarité : | - 9 - |
| I.5.3. La condensation :..... | - 10 - |
| I.6. Définition des sols | - 11 - |
| I.6.1. La phase solide ou squelette solide..... | - 11 - |

| | | |
|---------|--|--------|
| I.6.2. | La phase liquide..... | - 11 - |
| a. | L'eau interstitielle..... | - 12 - |
| b. | L'eau de constitution : | - 12 - |
| c. | L'eau absorbée..... | - 12 - |
| d. | L'eau capillaire | - 12 - |
| e. | L'eau libre..... | - 13 - |
| I.6.3. | La phase gazeuse | - 13 - |
| I.7. | Définition général..... | - 13 - |
| I.7.1. | Charge hydraulique..... | - 13 - |
| I.7.2. | Vitesse d'écoulement..... | - 14 - |
| I.7.3. | Gradient hydraulique | - 15 - |
| I.7.4. | Perméabilité | - 15 - |
| a. | Définition..... | - 15 - |
| b. | Détermination de la perméabilité | - 15 - |
| i. | Au laboratoire : | - 15 - |
| I.7.5. | Milieux homogène | - 15 - |
| I.7.6. | Milieux isotrope et anisotrope | - 16 - |
| I.7.7. | Trajectoire de la particule | - 16 - |
| I.7.8. | Ligne de courant | - 16 - |
| I.7.9. | Ligne équipotentielle | - 16 - |
| I.7.10. | Ligne équipression | - 16 - |
| I.8. | Conclusion..... | - 16 - |
| II. | Position du problème..... | - 18 - |
| II.1. | Introduction | - 18 - |
| II.2. | Détermination de l'équation de richard : | - 18 - |
| II.2.1. | Loi généralisé de darcy en milieu non saturé | - 18 - |
| II.2.2. | Equation de la continuité | - 19 - |

| | | |
|---------|---|--------|
| II.3. | Formulation du problème | - 20 - |
| II.4. | Mise en équation du problème | - 21 - |
| II.4.1. | Conditions aux limites et initiale | - 21 - |
| II.4.2. | Première partie : régime permanent..... | - 21 - |
| II.4.3. | Deuxième partie : régime non permanent..... | - 22 - |
| II.5. | Discrétisation numérique..... | - 22 - |
| II.5.1. | Première partie : régime permanent..... | - 22 - |
| II.5.2. | Deuxième partie : régime non permanent..... | - 23 - |
| | Les deux schémas aux différences finies | - 23 - |
| | i. Schema implicite: | - 23 - |
| | ii. Schéma Explicite : | - 25 - |
| II.6. | Conclusion..... | - 28 - |
| III. | Résultats et discussions | -29- |
| III.1. | Introduction | -29- |
| III.2. | Partie régime permanent..... | -29- |
| III.3. | Partie régime non permanent..... | -31- |
| III.4. | Influence de coefficient de diffusion | -34- |
| III.5. | Influence de temps sur la diffusion | -36- |
| III.6. | Conclusion..... | -38- |
| | Conclusion générale | - 38 - |
| | Références Bibliographiques..... | - 39 - |
| | Résumé..... | - 40 - |
| | Abstract | - 40 - |

Liste des figures

| | |
|---|--------|
| Figure I.1: produit des volumes dans un sol. | - 5 - |
| Figure I.2: exemple d'une coupe d'un milieu poreux(grès).[4] | - 7 - |
| Figure I.3: les différents états d'eau dans le sol..... | - 11 - |
| Figure I.4: l'eau dans les sols. | - 12 - |
| Figure II.1: illustration d'une colonne de sol horizontale unidimensionnelle..... | - 20 - |
| Figure II.2: discrétisation des axes de temps et de longueur. | - 25 - |
| Figure II.3. discrétisation des axes de temps et de longueur. | - 27 - |
| Figure III.1 : variation de la teneur en humidité par rapport à la longueur $L=0.1,0.5,1[m]$ de la colonne | -30- |
| Figure III.2 : variation de la teneur en humidité par rapport à la longueur $L=0.1,0.5,1[m]$ de la colonne | -32- |
| Figure III.3 : variation de la teneur en humidité par rapport à la longueur L pour des différentes valeurs de coefficient de diffusion | -34- |
| Figure III.4 : variation de la teneur en humidité par rapport à la longueur L Pour des différentes valeurs de temps | -37- |

Liste des tableaux

| | |
|---|--------|
| Tableau III-1 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne en régime permanent..... | - 29 – |
| Tableau III-2 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne en régime non permanent..... | - 31 – |
| Tableau III-3 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne pour des différentes valeurs de D..... | - 34 – |
| Tableau III-4 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne pour des différentes valeurs de T..... | - 35 – |

NOMENCLATURE

| Symboles | Définition | Unité (SI) |
|-------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| d | diamètre des pores | mm |
| D | coefficient de diffusion | m^2 / s |
| L | longueur de la colonne | m |
| P_c | Pression capillaire | N / m^2 |
| g | accélération de la pesanteur | |
| m / s^2 | | |
| v | vitesse d'écoulement de l'eau | m/s |
| x | la distance | m |
| t | le temps | s |
| V | volume | m^3 |

Symboles grecs

| | | |
|-----------------|--------------------------|---------------------------------------|
| ρ : | la masse volumique | kg / m^3 |
| θ : | la teneur en humidité | kg / m^3 |
| γ : | le poids volumique | kg / m^3 |
| ε : | porosité | |
| μ : | viscosité dynamique | $\text{kg} / \text{m} \cdot \text{s}$ |
| ρ_w : | masse volumique de l'eau | kg / m^3 |

Indices

i,j : $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes.

Introduction Générale

Les écoulements dans les milieux poreux sont des phénomènes qui font partie de nombreuses disciplines s'il n'est pas la base.

L'équation de Richards est le modèle le plus utilisé, il a été introduit par Richards en (1931) qui a suggéré que la loi de Darcy conçue à l'origine pour un écoulement saturé dans des milieux poreux est également applicable à un écoulement insaturé dans des milieux poreux. Présence de colonnes de sol horizontales unidimensionnelles, les systèmes les plus simple pour évaluer la validité de l'équation de Richards. [13]

L'équation de Richard est une équation aux dérivées partiels non linéaire non stationnaire dont la résolution est difficile, seul les méthodes d'approximation telles que les méthodes numériques qui peuvent être efficace.

Le but de notre travail est de construire un modèle mathématique d'un problème physique et mécanique qui sert à l'étude et la modélisation de la teneur en humidité dans une colonne de sol horizontale unidimensionnelle en instationnaire, où en utilisant des méthodes numériques pour l'étude et la discrétisation de modèle à construire.

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous allons présenter les définitions les plus essentielles dans la compréhension du phénomène ainsi qu'un rappel théorique sur les écoulements en milieux poreux.

Dans le deuxième chapitre nous allons présenter une démonstration de la discrétisation de l'équation de Richard simplifiée en une dimension en équation algébrique par la méthode des différences finies avec l'approximation de la dérivée première et second en deux régime d'écoulement permanent et non permanent après quoi en déduit les deux schémas aux différences finies explicite et implicite.

Dans le troisième chapitre, on présente les résultats obtenus à partir des simulations faites sur la variation de la teneur en humidité dans une colonne de sol horizontale unidimensionnelle en régime permanent et non permanent de milieux poreux

Ces résultats ont été obtenus avec deux codes Matlab

Le premier code est rédigé à partir de l'équation obtenus on régime permanent, et le deuxième code est rédiger à partir de l'équation de schéma implicite de régime non permanent.

Définitions générales et rappel théorique

I.1. Introduction

L'étude des écoulements dans les massifs de sol fait partie d'un domaine de recherche très vaste, constitué par l'étude des mouvements des fluides dans les milieux poreux.

Dans le cas d'une application à la mécanique des sols et des roches, le milieu poreux étudié est un massif de sol naturel (diffusion de polluants, infiltration, écoulement et rabattement de nappe, etc.). L'étude des mouvements d'eau dans les milieux poreux est donc un problème important pour le géotechnicien et l'hydraulicien, car ces mouvements peuvent modifier au cours du temps la distribution des pressions interstitielles exercées dans les massifs de sol, tant de point de vue mécanique (modification du poids des massifs et soulèvement hydrostatique dus aux remontées ou descentes de la surface libre de la nappe) que de point de vue hydraulique (évolution des forces hydrauliques). La détermination du champ de pressions interstitielles dans les massifs au cours du temps, ainsi la détermination du réseau d'écoulement (lignes équipotentiels et lignes de courant) et par conséquent le débit d'exhaure, est donc une donnée dont il faut tenir compte dans le calcul.

Le mouvement de l'eau à travers ces milieux poreux est régi par une équation différentielle de second ordre (équation de Laplace), dont la résolution analytique est une tâche rarement possible. Les équations aux dérivées partielles de la physique ne permettent d'obtenir des solutions exactes que dans quelques cas particuliers, c'est pourquoi des méthodes de calculs numériques ont été développées.

Dans le but d'aboutir à l'étude de l'écoulement à travers un milieu poreux, il convient tout d'abord de présenter les différents paramètres caractérisant ces milieux. C'est pourquoi nous rappellerons ici brièvement les lois et relations qui décrivent les écoulements permanents de l'eau dans le sol saturé.

I.2. Définition des milieux poreux

Un milieu poreux est un solide de forme compliquée contenant des vides appelés pores qui peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides susceptibles de s'écouler et éventuellement d'échanger entre elles et/ou avec le solide de la matière et/ou de l'énergie. On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être

poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple).[1]

D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- 1) Le matériau doit contenir de petits espaces vides, appelés pores, délimités par une matrice solide.
- 2) Le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide). [2]

Ces deux critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux : la porosité - la fraction de vide - et la perméabilité - qui indique l'aptitude d'un milieu poreux à être traversé par un écoulement. Ces deux quantités sont des variables macroscopiques, c'est à dire estimées sur un volume contenant de nombreuses entités microscopiques composant le matériau [3]: les pores.

Un matériau poreux peut comprendre trois phases :

- Une phase solide qui est liée à la structure du matériau.
- Une phase liquide, c'est-à-dire l'eau contenue dans le matériau.
- Une phase gazeuse qu'est l'air humide. [4]

I.3. Paramètres physique des milieux poreux

Afin de pouvoir bien initialiser à l'étude des milieux poreux, il est nécessaire d'enseigner leurs paramètres d'état.

I.3.1. Volume

Il est clair que le volume des milieux est occupé essentiellement pas la matrice solide qui possède de pore ou vide, ce volume de vide aussi est rempli par un seul ou plusieurs fluides généralement on rencontre l'eau et l'air.[5]

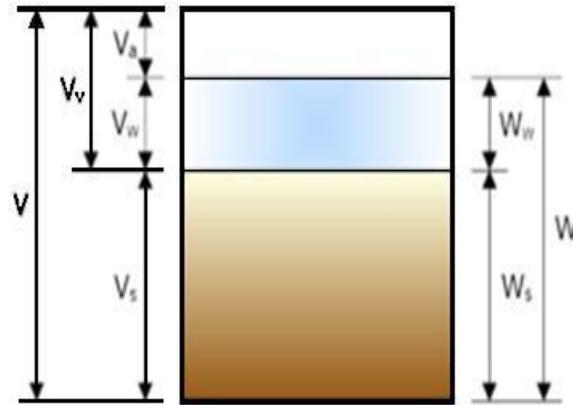


Figure I.1: produit des volumes dans un sol.

V_s : Volume des grains solide.

V_a : Volume de l'aire.

V_w : Volume de l'eau.

I.3.2. Poids

C'est le poids des constituants du milieu avec :

W_s : Poids des grains solides.

W_w : Poids du liquide.

I.3.3. Poids volumique des milieux poreux

Concernant le calcul du poids volumique des milieux poreux, on a différentes définitions.

- **Poids volumique totale ou apparent** : c'est le poids de l'ensemble par unité de volume totale et on a deux cas [5] :
- **Poids volumique humide** : quand l'eau existe est leur poids sera incluse.

$$\gamma_h = \frac{W_w + W_s}{V_a + V_w + V_s} \quad (\text{I.1})$$

- **Poids volumique sec** : le sol est sec le poids mesuré que pour les grains solides puisque l'air est plus lège.

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_a + V_w + V_s} \quad (\text{I.2})$$

Cette propriété ce n'est pas un caractère intrinsèque puisqu'elle dépend du réarrangement des grains.

- **Poids volumique absolu ou des grains** : il définit réellement le poids de la matière constitutive des grains solides. Cette propriété est un caractère intrinsèque des sols.

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s} \quad [kg / m^3] \quad (I.3)$$

I.3.4. Teneur en eau

C'est un rapport entre le poids de l'eau et le poids des grains solides. [5]

$$\omega = \frac{W_w}{W_s} \quad [kg / m^3] \quad (I.4)$$

I.3.5. Porosité

C'est un rapport entre le volume des vides et le volume total, désigné par le nombre (n). [5]

$$n = \frac{V_v}{V_T} \quad (I.5)$$

I.3.6. L'indice des vides

C'est un rapport entre le volume des vides et des grains, désigné par le nombre (e). [5]

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (I.6)$$

I.3.7. Degré de saturation

Une grandeur qui exprime la quantité d'eau par rapport aux vides : [5]

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} \quad (I.7)$$

Si : $S_r = 1 \rightarrow$ Le sol est dit saturé.

Si : $S_r = 0 \rightarrow$ Le sol est dit sec

Si : $0 < S_r < 1 \rightarrow$ Le sol est partiellement saturé.

I.4. Classification et caractérisation

La matrice solide d'un milieu poreux, peut être non consolidée, c'est-à-dire la phase solide est formée de grains ou films solides non soudés entre eux (gravier, sable, bille de verre), ou consolidée, c'est-à-dire la matrice solide ne peut pas se diviser en grains ou films (roches, calcaires, argile, bois,). [4]

I.4.1. Caractérisation

L'eau des précipitations peut ruisseler en surface, et participer à la formation des cours d'eau aérien, ou s'infiltrer en profondeur et donner naissance à des nappes d'eau souterraines. La proportion d'eau qui ruisselle et qui s'infiltrer dépend de la perméabilité et de la porosité du sol et des roches du sous-sol



Figure I.2: exemple d'une coupe d'un milieu poreux (grès). [4]

-La porosité : c'est le paramètre principal décrivant le milieu poreux, elle varie entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide), se définit comme le rapport du volume des vides au volume apparent du milieu poreux. [4]

On distingue :

***La porosité totale**

$$\varepsilon_t = \frac{1 - m_{va}}{m_{vm}} \quad (I.8)$$

m_{va} : masse volumique apparente de l'échantillon

m_{vm} : masse volumique du matériau constitutif

***La porosité accessible**

$$\varepsilon = \frac{v_{pa}}{v_e} \quad (\text{I.9})$$

v_{pa} : volume des pores accessibles

v_e : volume de l'échantillon

-La surface spécifique : c'est le rapport de l'aire de la surface totale des interfaces solides, au volume de l'échantillon.

La porosité et l'aire spécifique sont des propriétés macroscopiques pour le matériau poreux. Mais d'autres paramètres peuvent être importants au niveau microscopique, en particulier quand un fluide circule dans l'espace des pores. On peut citer la connectivité, qui caractérise le nombre de voisins pour un pore, présence de bras mort (pores bouchés), ou en encore la topologie du volume des pores. Le désordre géométrique est un caractère essentiel des milieux poreux. Cela empêche toute trajectoire en ligne droite incluse dans le volume des pores. On peut alors définir une tortuosité, qui représente le caractère non rectiligne des trajectoires. [4]

-La tortuosité : définie par la relation :

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L} \right)^2 \quad (\text{I.10})$$

L_e : Longueur moyenne de courant du fluide traversant l'échantillon, La longueur de celui-ci

-La perméabilité : La perméabilité d'un matériau à la vapeur est analogue à sa conductivité pour la chaleur. Elle correspond à la quantité d'eau en grammes sous forme de vapeur, traversant par heure un mètre d'épaisseur de matériau sur un mètre carré de surface, pour une différence de pression de 1mm de mercure entre les deux ambiances. Elle dépend fortement de l'humidité relative du milieu auquel le matériau est soumis.

On considère aussi : [3]

- La saturation S , la fraction du volume des vides occupés par le liquide
- La teneur volumique en liquide θ_l , la fraction du milieu poreux occupée par le liquide (teneur en eau volumique).
- La teneur pondérale en liquide (teneur en eau massique) w_l , la masse de liquide contenue dans l'unité de masse de la matrice solide constituant le milieu poreux.

Ces trois grandeurs sont reliées entre elles :

$$\varepsilon S = \theta_1 = \frac{\rho_0}{\rho_l} w_l \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$$\rho_0 = \rho_l(1 - \varepsilon)$$

ε : La porosité accessible

ρ_0 : Masse volumique apparente du milieu poreux sec.

ρ_l : Masse volumique du matériau en masse constituant la matrice poreuse.

I.5. Modes de fixation de l'humidité

La plupart des matériaux utilisés dans le bâtiment sont des matériaux poreux dans lesquels la majorité des pores sont interconnectés, ce qui leur donne aptitude à fixer l'humidité et à modifier les caractéristiques physiques du matériau. La fixation de l'humidité résulte de trois mécanismes physiques fondamentaux [1] :

I.5.1. L'adsorption

C'est la fixation de films moléculaires sur les surfaces internes des pores on parle dans ce cas de :

- Absorption mono moléculaire : fixation d'une seule couche de molécules
- Absorption pluri moléculaire : fixation de plusieurs couches de molécules d'eau sur la première couche
- Condensation capillaire : quand les diamètres des pores sont suffisamment petit pour que l'eau soit présente à l'état liquide.

I.5.2. La capillarité :

Intervient lorsque la structure poreuse est mise en contact avec la phase liquide, une approche théorique se base sur le fait qu'il existe un écart entre la pression de l'air humide et la pression de l'eau dans les pores permettant de considérer les forces de tension superficielle et la formation d'interfaces courbe entre le fluide mouillant liquide et le fluide ne mouillant gazeux, d'où l'existence d'une pression entre les phases, c'est la pression capillaire.

$$p_c = p_g - p_l > 0 \quad (\text{I.12})$$

$$p_c = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \quad (\text{I.13})$$

p_c : Pression capillaire

p_l, p_g : sont respectivement les pressions de la phase gazeuse et la phase liquide.

Lorsque la capillarité et le mécanisme dominant de fixation du fluide dans le matériau, ce dernier est dit capillairo-poreux, (diamètre des pores $d > 10^{-7} m$).

Et lorsque le mécanisme dominant l'adsorption, le matériau est dit hygroscopique (diamètre des pores $d \leq 10^{-7} m$). [2]

I.5.3. La condensation :

La présence d'eau en masse sur la structure du bâtiment est due soit à des effets de pluie, diffusée à l'intérieur du milieu par capillarité ou évaporés en surface, soit à des phénomènes de condensation liée au changement de phase de l'eau, passant de l'état vapeur à l'état liquide sous l'influence de variation de température.

Si, dans une paroi de bâtiment, la vapeur d'eau initialement à l'état (p, v, t) est refroidie à une température inférieure à la température de saturation, du fait des variations des conditions atmosphériques, un phénomène de condensation se développe dans le milieu poreux. Cette condensation dans la masse est représentée par un modèle théorique proposé par Glaser et complété par Krischer ultérieurement.

L'importance de rôle de chacun de ces mécanismes dépend :

- Des propriétés structurales du matériau (porosité,).
- Des conditions thermodynamique (pression, température)

Le transport d'humidité, dans les milieux poreux saturés, a été décrit la première fois par Darcy en 1858.

Les premiers modèles théoriques d'étude se fondaient uniquement, sur l'apparition des phénomènes de condensation liés au mécanisme de diffusion de la vapeur au sein du matériau, ils ont été modifiés par Krischer qui prend en compte l'influence des effets capillaires sur la phase fluide condensée.

En faisant intervenir les effets de couplage entre transfert de masse et de chaleur, Philippe De Vries et Luikov établissent la forme actuelle de cette modélisation. Le modèle de DeVries a été justifié par Whitaker en 1977, puis par Bennet récemment. [6]

I.6. Définition des sols

C'est la couche superficielle, meuble, de la couche terrestre d'épaisseur variable, qui résulte de l'altération des roches sous-jacentes (roche-mère) et de la dégradation des matières organiques, sous l'influence d'agents biologique (végétation, faune du sol), chimique et physique (précipitation, variation de température).

Le sol autant qu'un milieu poreux, c'est un matériau à trois phases : agrégats de particules minérales dont les vides peuvent être remplis de fluide. On distingue globalement :

- La phase solide ou squelette solide
- la phase liquide
- la phase gazeuse

I.6.1. La phase solide ou squelette solide

Constituée par les particules qu'ils sont le résidu de l'altération de différents types de substrats, et ce sont des corps formés de particules solides non cimentées, de composition minéralogique très varié dépend directement de celle de roche mère, s'ils ne sont pas subis à des altérations qui peuvent toucher leur composition chimique. Ces particules sont souvent classées en quatre catégories suivant leur composition, mode de formation et cause de formation en : minéraux primaires, minéraux secondaires, sels et matières organiques. [7]

I.6.2. La phase liquide

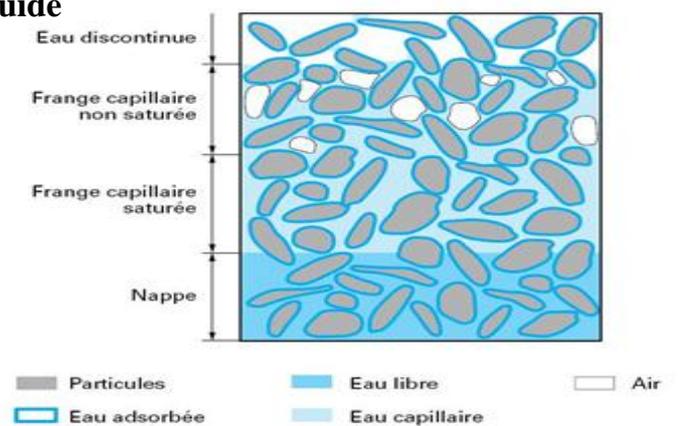


Figure I.3: les différents états d'eau dans le sol.[7]

La phase liquide est constituée par l'eau qui occupe les vides de l'agrégat. Si tous les vides sont remplis d'eau, le sol est saturé ; sinon, il est non saturé ou partiellement saturé ; les interstices du squelette solide sont occupés en partie ou en totalité par de l'eau. Cette eau n'est en

général pas pure : elle contient des électrolytes dissociés en cations et anions (son Ph est alors acide ou basique), des matières organiques en suspension et, dans certains cas, des gaz dissous.

L'eau a un effet considérable sur le comportement des sols, et le schéma (figure I.5) ci-dessous montre les diverses formes de l'eau présente dans le sol.

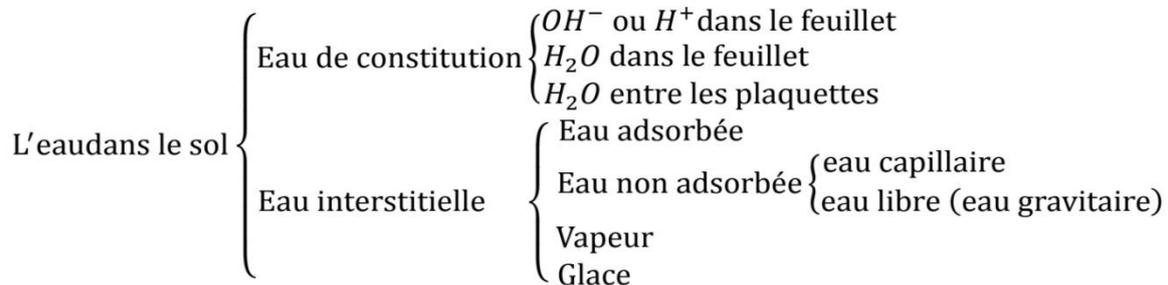


Figure I.4: l'eau dans les sols.[7]

a. L'eau interstitielle

L'eau interstitielle est de l'eau présente dans les pores du sol. Son état, ses caractéristiques physico-chimiques, ses interactions avec les autres phases du sol, etc..., influencent fortement

Les propriétés mécaniques de résistance, l'état de plasticité, la résistance au frottement, la consistance.

b. L'eau de constitution :

L'eau de constitution se trouve dans la structure du minéral à une position fixe, soit sous forme d'ions OH⁻ et H⁺, soit sous forme de molécules H₂O. Elle fait partie de la composition chimique du minéral. En général, ce type d'eau influence peu le comportement du sol, sauf lorsqu'il est soumis à une température très élevée : Si la température est supérieure à 400°C.

c. L'eau absorbée

À la surface des grains (surtout dans les particules fins) qui orienté par les forces électrostatiques et les forces d'attraction moléculaire, elle une viscosité élevée et ne transmet pas les pressions.

d. L'eau capillaire

Que l'on rencontre dans les sols non saturés et que se maintient au contact des particules solides dans les canaux les plus fins du sol, sous l'action des tensions superficielles qui prennent naissance à l'interface eau-air, cette eau malgré la pesanteur ne peut s'écouler librement.

e. L'eau libre

Ou l'eau non adsorbée est susceptible de s'écouler. L'eau libre ou l'eau gravifique obéit à la loi de darcy.

Le principal effet de l'eau libre sur le comportement du sol se manifeste par la pression hydraulique exercée sur le sol. En outre, lorsque l'eau s'écoule, un effet hydrodynamique se traduit en un effort physique sur les particules : certaines particules extrêmement fines peuvent être emportées par le courant d'eau. Enfin, l'eau peut dissoudre certains sels et modifier la composition chimique des minéraux. Ces effets physiques et chimiques peuvent être la cause de certaines instabilités du terrain. Du point de vue de l'interaction hydromécanique, la pression d'eau est un facteur capital pour les relations contraintes déformations d'un sol.

Lorsqu'un sol est soumis à des températures inférieures à 0°C, l'eau non adsorbée est susceptible de geler. La glace ainsi formée peut fournir une cimentation temporaire et, en conséquence, améliorer certains aspects du comportement du sol, par exemple, augmenter sa résistance, diminuer sa perméabilité, etc. Par contre, elle peut détériorer son comportement au dégel.

I.6.3. La phase gazeuse

Dans un sol non saturé, une partie des vides de l'agrégat est remplie par du gaz, essentiellement de l'air. Dans les sols non saturés, la phase gazeuse est présente dans tout ou partie des pores sous forme d'un mélange d'air, de vapeur d'eau, de gaz carbonique et d'autres gaz. Les sols saturés peuvent aussi contenir du gaz, mais sous forme de bulles ou en dissolution dans l'eau.

I.7. Définition général

I.7.1. Charge hydraulique

Considérons un point situé dans un massif saturé siège d'un écoulement permanent. Soit (u) la pression de l'eau en ce point et (z) sa coté par rapport à un repère quelconque. La charge hydraulique (H) en ce point, est par définition :

$$H = \frac{u}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} + z \quad (\text{I.2})$$

Avec :

u : pression de l'eau [Pa]

ρ_w : masse volumique de l'eau [kg / m^3]

g : accélération de la pesanteur [m / s^2]

v : vitesse d'écoulement de l'eau [m / s]

z : cote (altitude) de point considéré comptée positivement vers le haut à partir d'un niveau de référence donnée (convention de l'hydraulique) [m]

γ_w : Poids volumique de l'eau [kg / m^3]

Or les vitesses dans les sols sont toujours faibles rendant négligeable le terme en :

$$\frac{v^2}{2g} \simeq 0 \quad (\text{I.3})$$

Donc on obtient :

$$H = \frac{u}{\gamma_w} + z \quad (\text{I.4})$$

I.7.2. Vitesse d'écoulement

Soit Q le débit d'eau à travers une canalisation de section S . La vitesse apparente v de l'eau est par définition :

$$v = \frac{Q}{S} [m / s] \quad (\text{I.5})$$

Cette définition bien que la plus utilisée, donne une vitesse fictive car en réalité l'eau ne circule que dans les pores de surface ($n \cdot S$) (n étant la porosité du sol) d'une part et d'autre part, les trajectoires sont vraisemblablement tortueuses. On définit la vitesse moyenne v' par le rapport [5] :

$$v' = \frac{Q}{n \cdot S} \quad (\text{I.6})$$

I.7.3. Gradient hydraulique

Dans un écoulement uniforme et unidirectionnel, le gradient i est par définition le rapport de la différence de charge h à la longueur L du trajet de l'eau dans le sol [5].

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L} \quad (I.7)$$

I.7.4. Perméabilité

a. Définition

C'est une propriété caractéristique du milieu poreux elle désigne la capacité à laisser passer un fluide à s'écouler. Ces écoulements se font par des chemins complexes et tortueuse à travers les pores interconnectés et de différent taille et de forme, cette perméabilité elle est influencé par de nombreux facteurs, principalement sont : [8]

- Forme des pores (la taille et la distribution de ces pores)
- La température influe sur la viscosité par conséquence le comportement de fluide change.

b. Détermination de la perméabilité

La mesure de la perméabilité se fait par deux types d'essai.

❖ Au laboratoire :

C'est l'application d'un écoulement sur un échantillon du sol et on mesure le débit qui travers le sol saturé à des charges connues et on déduire la perméabilité et à cette occasion on a 2 types d'essai :

- **Essai à charge constante** : pour les sols de perméabilité grand environ de ($K > 10^{-5} \text{m/s}$) en générale les sols grossis.
- **Essai à charge variable** : pour les sols de perméabilité petit environ de ($K < 10^{-5} \text{m/s}$) en générale les sols fins.

I.7.5. Milieux homogène

Un milieu dit homogène quand il représente les mêmes propriétés physiques et mécaniques dans n'importe quel point dans une seule direction donnée.

I.7.6. Milieux isotrope et anisotrope

Un milieu isotrope il représente les mêmes propriétés mécaniques et physique dans toutes les directions, dans le cas contraire le milieu est considérée comme anisotrope. Concernant la perméabilité elle n'est pas là même dans les différentes directions et par conséquence les fluides ne s'écoulent pas avec les mêmes vitesses dans n'importe quel sens.

I.7.7. Trajectoire de la particule

C'est les positions successives aux différent instants prise par la particule au cours d'écoulement.

I.7.8. Ligne de courant

On appelle ligne de courant une couche tangente en chacun de ces points au vecteur de la vitesse. C'est une ligne qu'aucun débit ne peut traverser perpendiculairement. Les lignes de courant permettent de voir où l'eau circule réellement dans le domaine en question.

I.7.9. Ligne équipotentielle

Ligne équipotentielle c'est une courbe relie les points du milieu qu'ils ont la même valeur de la charge hydraulique.

I.7.10. Ligne équipression

C'est une courbe où les pressions prennent une valeur constante.

I.8. Conclusion

Le milieu poreux est identifié par ses caractéristiques et la genèse de ses vides, et pores. Les deux principaux paramètres caractérisant un milieu poreux sont : la perméabilité et la porosité. La granulométrie, technique de l'étude des roches, accède à la morphologie des vides par deux paramètres des grains, le diamètre efficace et le coefficient d'uniformité, la connaissance de ces caractéristiques est nécessaire pour accéder à l'étude des écoulements traversant des milieux poreux. Un cas particulier d'un milieu poreux est le massif de sol protégé par des écrans étanches.

L'écoulement de l'eau à travers un milieu poreux est déterminé par trois groupes de paramètres hydrodynamiques : coefficient de perméabilité, gradient hydraulique, débit et vitesse de l'écoulement.

Toutes ces définitions et caractéristiques nous serviront à l'étude des écoulements plans et tridimensionnels, dont la résolution est obtenue par les différentes méthodes qui seront présentées dans le chapitre II.

Position du problème

II.1. Introduction

Les équations différentielles constituent l'un des chapitres les plus importants de l'analyse, plusieurs problèmes pratiques sont modélisés par des équations différentielles.

Ces dernières sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques et mécaniques...etc. par conséquent, elles représentent un vaste champ d'étude.

Dans ce chapitre on les utilise pour construire un modèle mathématique d'un problème physique et mécanique qui sert à l'étude et la modélisation de la teneur en humidité dans une colonne de sol horizontale unidimensionnelle en instationnaire, où en utilisant des méthodes numériques pour l'étude et la discrétisation de modèle à construire.

On va étudier sur la modélisation de profile spatial et temporel de la teneur en humidité dans une colonne de sol, où on va exposer l'équation de richard simplifiée en 1-D et la discrétisée par méthode des différences finies avec l'approximation de la dérivée première et second en deux régimes permanent et non permanent où en utilisant les deux schémas au différences finies explicite et implicite.

A l'aide de MATLAB nous introduisons un programme algorithmique qui définit le problème et sert à l'exécuter.

II.2. Détermination de l'équation de Richard :

II.2.1. Loi généralisé de darcy en milieu non saturé

En milieu non saturé, la conductivité hydraulique (k) diminue avec la baisse de la teneur en eau car la section d'écoulement rétrécie et la tortuosité augmente. Ainsi, la conductivité hydraulique est une fonction de la teneur en eau (θ) ou de la succion (h) et la loi généralisée de darcy s'écrit : [9 ,10 ,11,12]

$$q(x) = -k(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{II.1})$$

$$q(x) = -k(h) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

II.2.2. Equation de la continuité

L'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (q_y) + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) \right] \tag{II.2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-k(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \tag{II.3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \tag{II.4}$$

Cette dernière équation est difficile à solutionner car θ et φ sont deux inconnues. Par contre la courbe caractéristique de la teneur en eau est une fonction de la succion (h).

$$\theta = f(h) \tag{II.2}$$

La loi des potentiels permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi &= h + z \\ z &= \text{potentiel gravitationnel} \end{aligned} \tag{II.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial h}{\partial z} + 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \tag{II.4}$$

Nous pouvons aussi réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \tag{II.5}$$

L'équation de la continuité devient alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + k_z(\theta) \right) \tag{II.6}$$

En définissant la diffusivité de l'eau $D(\theta)$:

$$D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{II.7})$$

Donc l'équation de la continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k(\theta) \quad (\text{II.8})$$

Pour un écoulement vertical suivant (z) l'équation de continuité est connue sous le nom de l'équation de richard :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k(\theta) \quad (\text{II.9})$$

II.3. Formulation du problème

L'objectif de travail est la simulation numérique de la teneur en eau θ dans une colonne de sol horizontale.

Initialement, la colonne de sol est supposée avoir une teneur en humidité uniforme θ_1 à $t=0$, la tête de la colonne ($x=0$) est supposée à une humidité θ_0 . La teneur en humidité est maintenue à θ_0 a $x=0$ pour toute la simulation à l'autre extrémité de la colonne ($x=L$), la teneur en humidité est maintenue à θ_1 pendant toute la durée de la simulation .

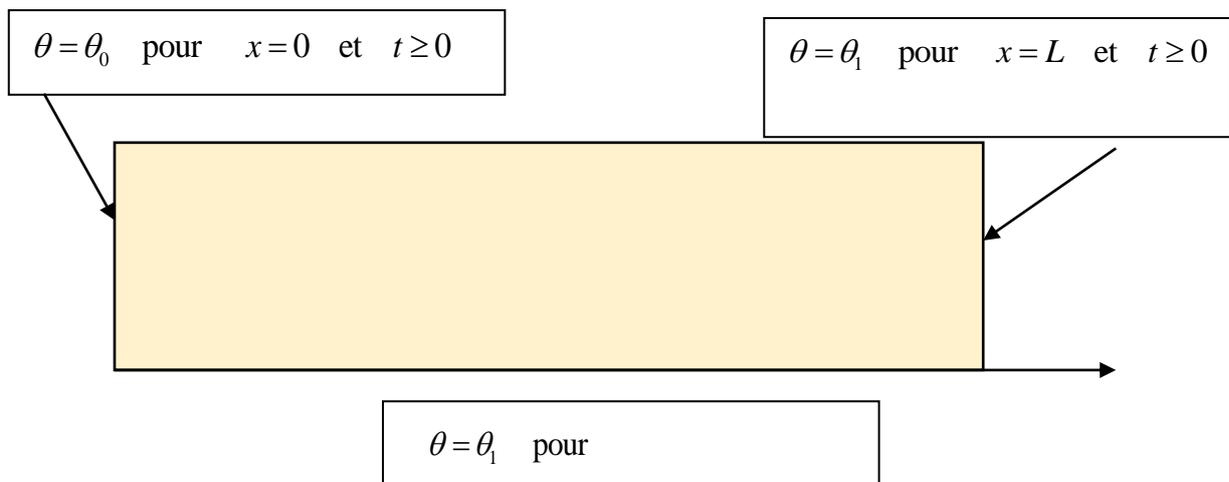


Figure II.1: illustration d'une colonne de sol horizontale unidimensionnelle

II.4. Mise en équation du problème

Un écoulement non saturé dans une colonne verticale est régi par l'équation de Richard donnée par :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k(\theta) \quad (\text{II.10})$$

Dans le cas d'un écoulement en colonne horizontale en l'absence des forces de gravité l'équation se simplifie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (\text{II.11})$$

En assumant la diffusivité D constante dans la colonne l'équation s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

II.4.1. Conditions aux limites et initiale

Condition initiale :

$$\theta = \theta_1 \quad \text{pour}$$

Conditions aux limites :

$$\theta = \theta_0 \quad \text{pour} \quad x=0 \quad \text{et} \quad t \geq 0$$

$$\theta = \theta_1 \quad \text{pour}$$

II.4.2. Première partie : régime permanent

$$\text{En régime permanent : } \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

L'équation précédente s'écrit :

$$D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{II.13})$$

On a la diffusivité de sol D est constante :

$$D = cte \neq 0$$

L'équation se simplifiée à :

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{II.14})$$

II.4.3. Deuxième partie : régime non permanent

L'équation régissant un écoulement dans une colonne horizontale en régime non permanent est donnée par :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

II.5. Discrétisation numérique

II.5.1. Première partie : régime permanent

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'approximation de la dérivée seconde par la méthode de différences finies est donnée par :

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = \frac{(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}))}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{II.17})$$

$o(\Delta x^2)$ = erreur de troncature (Et)

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = \frac{(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}))}{\Delta x^2} = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$\Delta x^2 \neq 0 \Rightarrow \theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1} = 0 \quad (\text{II.19})$$

En écrivant le système d'équation en chaque point nous obtenons :

$$\begin{aligned} \theta_2 - 2\theta_1 + \theta_0 &= 0 \\ \theta_3 - 2\theta_2 + \theta_1 &= 0 \\ \theta_4 - 2\theta_3 + \theta_2 &= 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \theta_N - 2\theta_{N-1} + \theta_{N-2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Le système d'équation

$$[A] [\theta] = [B]$$

Sera résolu par la méthode de Gauss-Jordan.

II.5.2. Deuxième partie : régime non permanent

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.22})$$

L'approximation de la dérivée seconde par la méthode des différences finies est donnée par :

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = \frac{(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (\text{II.23})$$

L'approximation de la première dérivée par la méthode des différences finies est donnée par :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_i^j = \frac{(\theta_i^{j+1} - \theta_i^j)}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (\text{II.24})$$

$o(\Delta x^2)$ = erreur de troncature (Et)

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_i^j = \frac{(\theta_i^{j+1} - \theta_i^j)}{\Delta t} \quad (\text{II.25})$$

Les deux schémas aux différences finies

i. Schema implicit:

-Utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération courante (n+1)

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_i^{j+1} = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_i^{j+1} \quad (\text{II.26})$$

- Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace.

$$\frac{(\theta_i^{j+1} - \theta_i^j)}{\Delta t} = D \frac{(\theta_{i+1}^{j+1} - 2\theta_i^{j+1} + \theta_{i-1}^{j+1})}{\Delta x^2} \quad (\text{II.27})$$

En posant :

$$\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (\text{II.28})$$

La teneur (θ) à l'itération $j+1$ donnée par :

$$\theta_i^j = \theta_i^{j+1} - \lambda(\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i-1}^{j+1}) + 2\lambda\theta_i^{j+1} \quad (\text{II.29})$$

Simplifiée à :

$$\theta_i^j = (1 - 2\lambda)\theta_i^{j+1} - \lambda(\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_{i-1}^{j+1}) \quad (\text{II.30})$$

(j variant de 1 à $j+1$)

On constate que les inconnues à l'itération $n + 1$ sont reliées entre elle par une relation implicite.

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \lambda & 1+2\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{j-2} \\ \theta_{j-1} \end{bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{j-2} \\ \theta_{j-1} \end{bmatrix}^j + \lambda \begin{bmatrix} \theta_0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

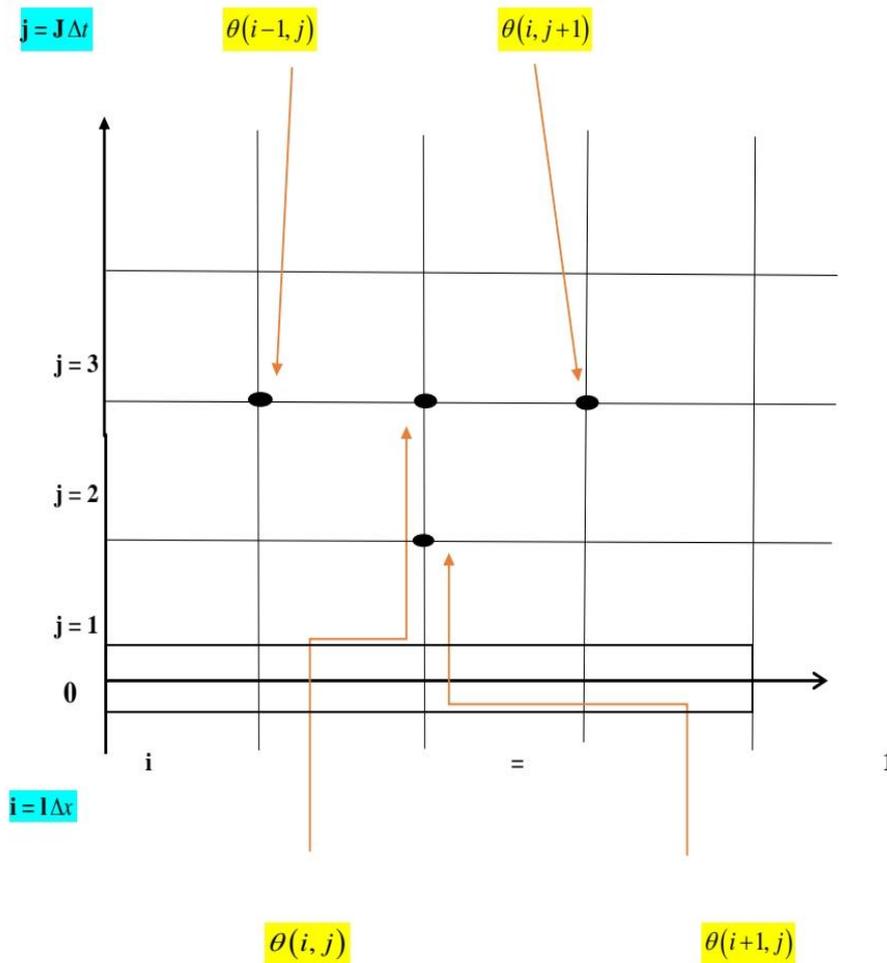


Figure II.2: discrétisation des axes de temps et de longueur.

-On obtient θ_i à l'instant (j) comme combinaison linéaire des $\theta_{i-1}; \theta_i; \theta_{i+1}$ inconnues à l'instant (j+1).

L'équation obtenue peut s'appliquer en chaque point aux temps (j+1). On obtient ainsi un système d'équations linéaires dont la résolution nous donne les valeurs de θ au temps (j+1).

-On procède de la même manière pour avoir les valeurs de θ au temps (j+2) ; (j+3).....

Un avantage essentiel de cette méthode est qu'elle est universellement stable.

ii. Schéma Explicite :

- utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération courante (n)

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_i^j = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_i^j \quad (\text{II.32})$$

-Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace.

$$\frac{(\theta_i^{j+1} - \theta_i^j)}{\Delta t} = D \frac{(\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j)}{\Delta x^2} \quad (\text{II.33})$$

En posant :

$$\lambda = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (\text{II.34})$$

La teneur (θ) à l'itération $j+1$ donnée par :

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^j + \lambda(\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j) \quad (\text{II.35})$$

Simplifiée à :

$$\theta_i^{j+1} = \lambda\theta_{i-1}^j + (1-2\lambda)\theta_i^j + \lambda\theta_{i+1}^j \quad (\text{II.36})$$

(i variant de 1 à $n-1$)

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{j-2} \\ \theta_{j-1} \end{bmatrix}^{j+1} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{j-2} \\ \theta_{j-1} \end{bmatrix}^j + \lambda \begin{bmatrix} \theta_0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

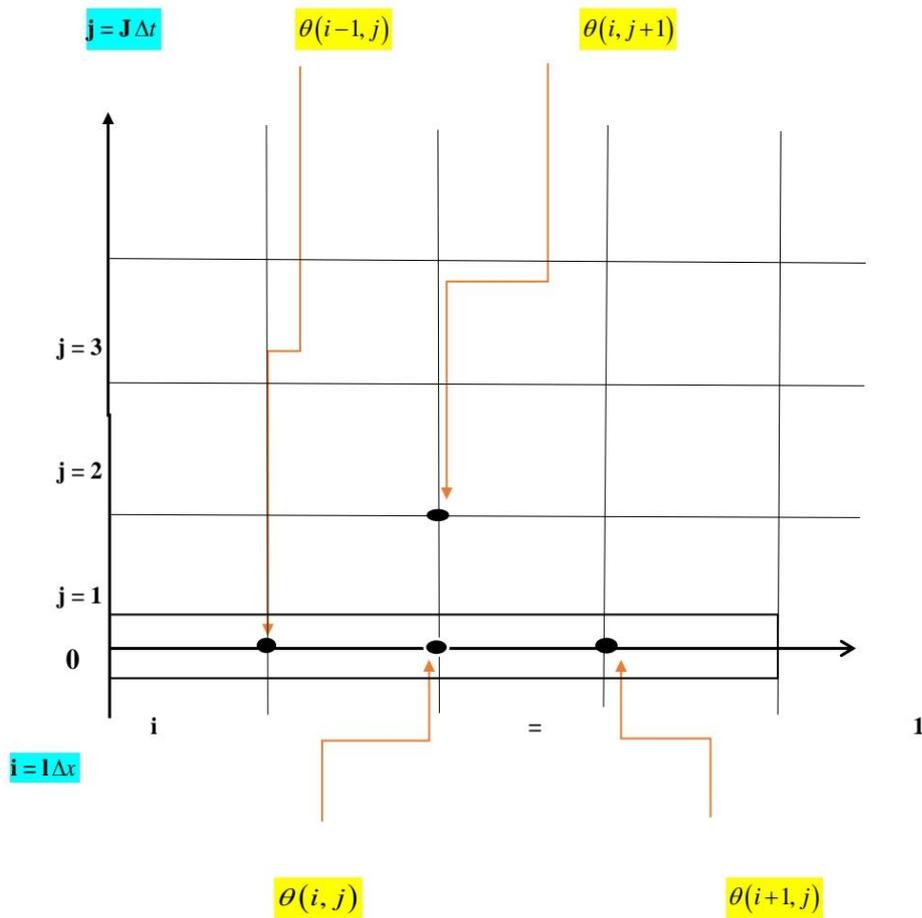


Figure II.3. discrétisation des axes de temps et de longueur.

on obtient θ_i à l'instant $(j+1)$ comme combinaison de $\theta_{i-1}; \theta_i; \theta_{i+1}$ à l'instant (j) on continue ainsi jusqu'à $t = j\Delta t$.

L'inconvénient principal de la méthode explicite est qu'elle nécessite de choisir Δt suffisamment petit, si non la solution de l'équation (2) devient instable.

La solution est dite stable (convergente) si :

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ et } \Delta t \rightarrow 0$$

À partir du schéma explicite dépend de la valeur de lambda, pour $0 \leq \lambda \leq 0.5$ la solution est stable et pour les valeurs hors de cette plage la stabilité n'est pas garantie.

Pour la suite du travail le schéma explicite a été retenu.

II.6. Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié sur la modélisation de profile spatial et temporel de la teneur en humidité dans une colonne de sol, où on a exposé l'équation de richard simplifiée en 1-D et la discrétisée par méthode des différences finies avec l'approximation de la dérivée première et second en deux régimes permanent et non permanent où on a utilisé les deux schémas au différences finies explicite et implicite.

Résultats et discussions

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, on présente les résultats obtenus à partir des simulations faites sur la variation de la teneur en humidité dans une colonne de sol horizontale unidimensionnelle en régime permanent et non permanent de milieux poreux

Ces résultats ont été obtenus avec deux codes Matlab

Le premier code est rédigé à partir de l'équation obtenus en régime permanent, et le deuxième code est rédigé à partir de l'équation de schéma explicite de régime non permanent.

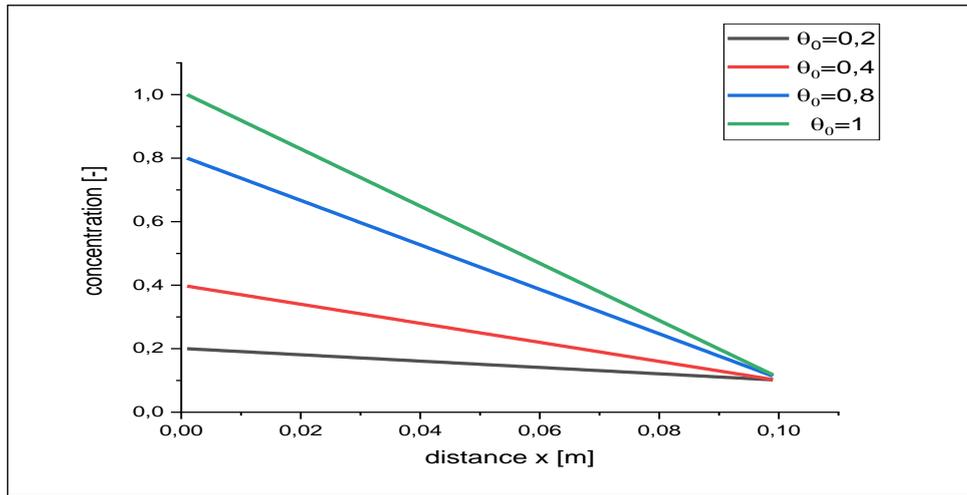
Dans les deux régimes nous avons changé les différents paramètres dans notre équation

III.2. Partie régime permanent

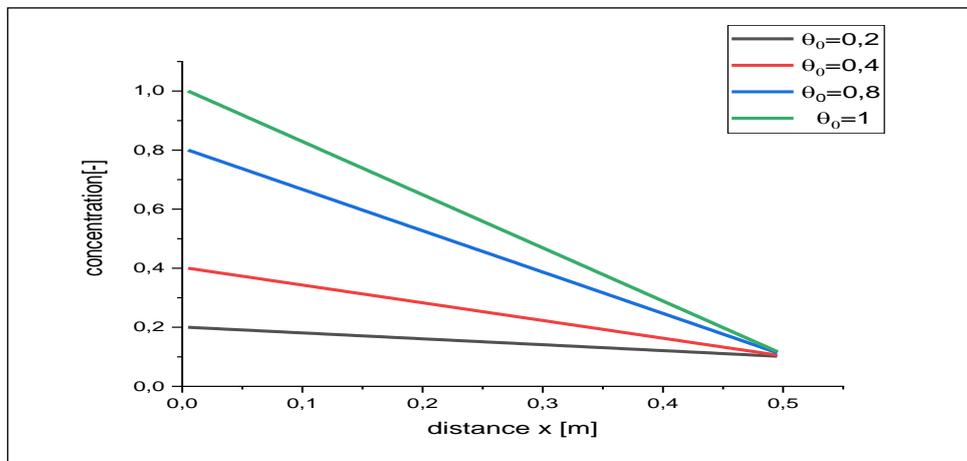
Pour étudier l'influence de la longueur de la colonne sur la teneur en humidité en régime permanent nous avons fait plusieurs simulations en variant les différentes valeurs de la teneur en humidité, et les valeurs prises sont présentés dans le tableau ci-dessus.

Tableau III-1 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne en régime permanent.

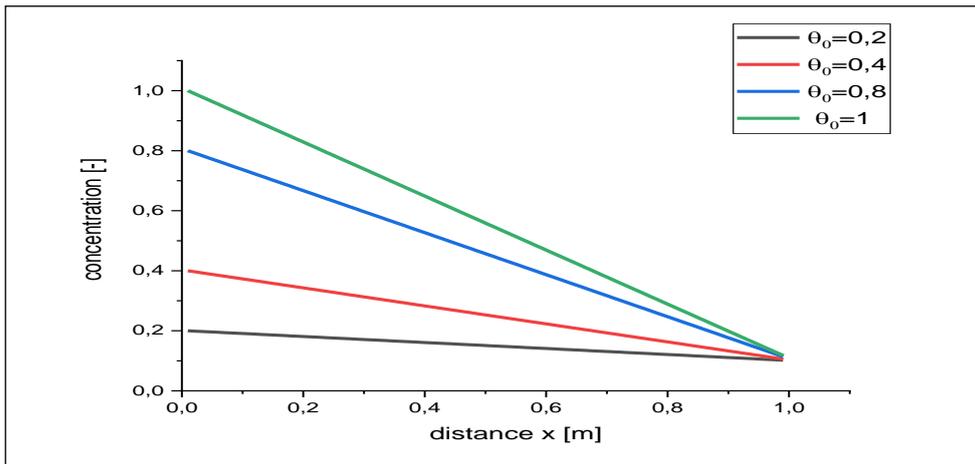
| La teneur en humidité θ [kg / m ³] | La longueur de la colonne L [m] | | |
|---|------------------------------------|-----|---|
| 1 | 0.1 | 0.5 | 1 |
| 0.8 | | | |
| 0.4 | | | |
| 0.2 | | | |



(a)



(b)



(c)

Figure III.1 : variation de la teneur en humidité par rapport a la longueur L=0.1,0.5,1[m] de la colonne

a – b – c

Ces graphes représentent la variation de la teneur en humidité θ en fonction de la longueur L en régime permanent, Les courbes sont en forme des lignes droites. En changeant les conditions initiales de θ_0 (0.2,0.4,0.8,1) pour L=0.

On remarque d’après le premier graphe pour une longueur L=0.1, une diminution de la teneur en humidité θ_0 jusqu’à θ_{ma} pour L=0.1 m comme on observe que les valeurs des teneurs en humidités initiale θ_0 (0.2 0.4 0.8 1) tend vers la même valeur de la teneur en humidité maximale θ_{max} (L=0.1m).

D’après les courbes de deuxième et troisième graphe pour les longueur L=0.5 m et 1 m. on observe que la façon de la diminution de la teneur en humidité reste la même sauf que la valeur de θ_{max} change à ($\theta_{max} = \theta(L=0.5m)$), et à ($\theta_{max} = \theta(L=1m)$).

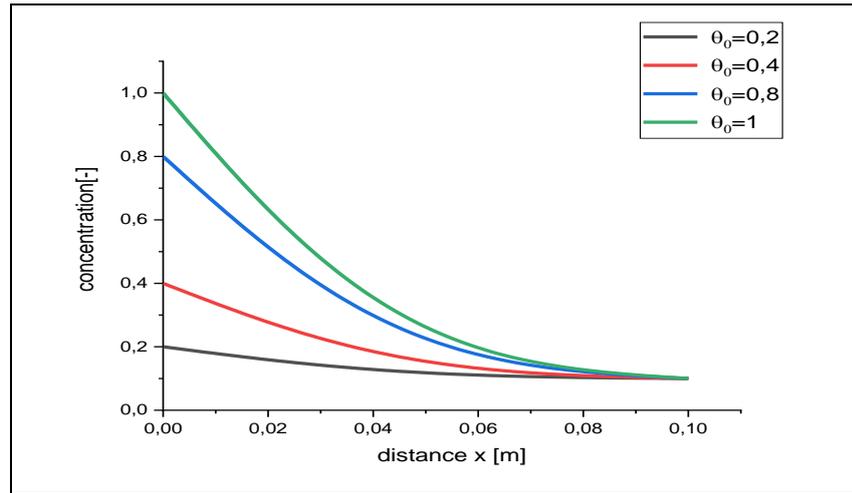
Dans cette partie on a donné trois valeurs à L (0.1,0.5,1) m et on remarque que les courbes de teneur en humidité dépendent uniquement de la longueur de la colonne L.

III.3. Partie régime non permanent

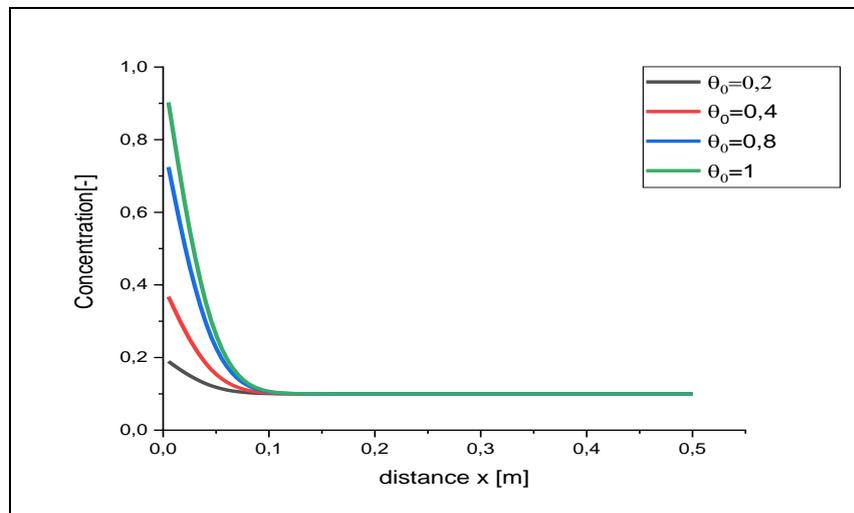
Pour étudier l’influence de la longueur de la colonne sur le phénomène de la diffusion en régime non permanent nous avons fait plusieurs simulations en variant les différentes valeurs de la teneur en humidité toute en gardant les autres paramètres fixes, le tableau suivant nous montre les valeurs qui ont été prise lors de notre simulation.

Tableau III-2 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne en régime non permanent.

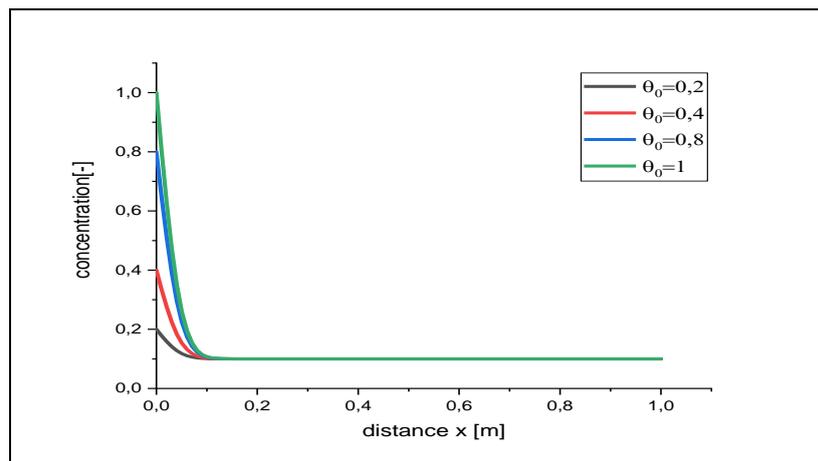
| Le coefficient de diffusion $D [m^2 / s]$ | Le temps $T [s]$ | La teneur en humidité $\theta [kg / m^3]$ | La longueur de la colonne L [m] | | |
|--|---------------------|--|------------------------------------|-----|---|
| 7.9e-9 | 86400 | 1 | 0.1 | 0.5 | 1 |
| | | 0.8 | | | |
| | | 0.4 | | | |
| | | 0.2 | | | |



(a)



(b)



(c)

Figure III.2 : variation de la teneur en humidité par rapport à la longueur $L= 0.1,0.5,1[m]$ de la colonne

(a) – (b) – (c)

Ces graphes représentent la variation de la teneur en humidité θ en fonction de la longueur L en régime non permanent. En changeant les conditions initiales de θ_0 (0.2,0.4,0.8,1) pour L=0 et un coefficient de diffusion D constant égale à $(7.9 \cdot 10^{-9})$ et un temps T égale un jour. et ces valeurs prise assure la condition de stabilité où λ appartient à l'intervalle $[0 ; 0.5]$.

D'après les courbes de premier graphe on observe une diminution de la teneur en humidité de θ_0 (0.2,0.4,0.8,1) Pour L=0 à $(\theta_{max} = \theta(L=0.1m)=0.1m)$, comme on remarque que la teneur en humidité maximale ne change pas par rapport aux différentes valeurs de θ_0 .

Dans le deuxième et troisième graphe on a changé la longueur de la colonne pour L=0.5m et 1m, on observe que la façon de la diminution de la teneur en humidité reste la même sauf que la valeur de θ_{max} ne change pas ($\theta_{max} = \theta(L=0.1m)=0.1m$) puis la teneur en humidité reste constante jusqu'à la fin de la longueur de la colonne L=0.5m et L=1m

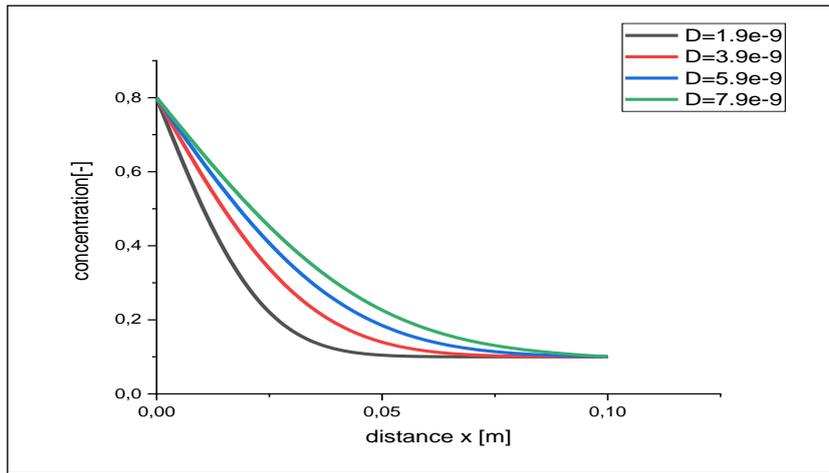
Dans cette partie on a donné trois valeurs à L (0.1,0.5,1) m et on remarque que les courbes de teneur en humidité en fonction de longueur diminuent de la même façon. Et que la teneur en humidité maximale θ_{max} variée en fonction de la longueur L jusqu'à la valeur de L=0.1m puis elle reste constante jusqu'à la valeur de la longueur L prise, en raison de perméabilité et cette dernière est une propriété caractéristique du milieu poreux elle désigne la capacité à laisser passer un fluide à s'écouler.

III.4. Influence de coefficient de diffusion

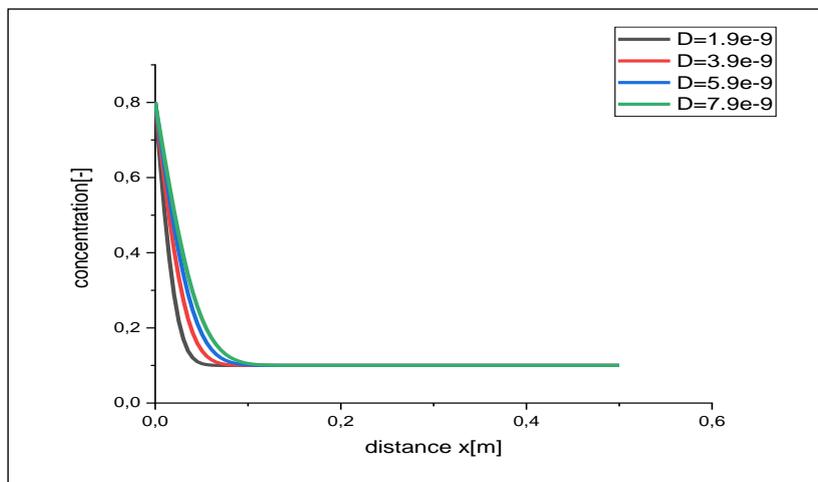
Pour étudier l'influence de coefficient de diffusion sur le phénomène de la diffusion en régime non permanent nous avons fait plusieurs simulations en variant les différentes valeurs de coefficient de diffusion tout en gardant les autres paramètres fixes, le tableau suivant nous montre les valeurs qui ont été prise lors de notre simulation.

Tableau III-3 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne pour des différentes valeurs de D.

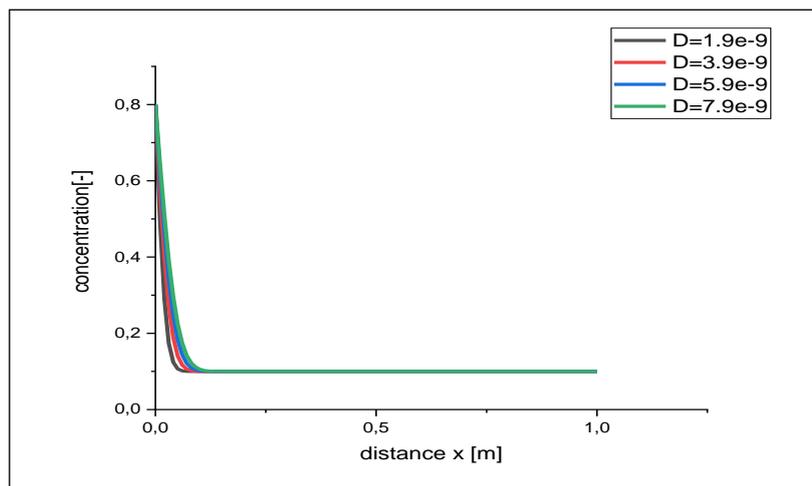
| La teneur en humidité θ [kg / m ³] | Le temps T [s] | Coefficient de diffusion D [m ² / s] | La longueur de la colonne L [m] | | |
|---|----------------|---|---------------------------------|-----|---|
| 0.8 | 86400 | 7.9e-9 | 0.1 | 0.5 | 1 |
| | | 5.9e-9 | | | |
| | | 3.9e-9 | | | |
| | | 1.9e-9 | | | |



(a)



(b)



(c)

Figure III.3 : variation de la teneur en humidité par rapport à la longueur L pour des différentes valeurs de coefficient de diffusion (a) – (b) – (c)

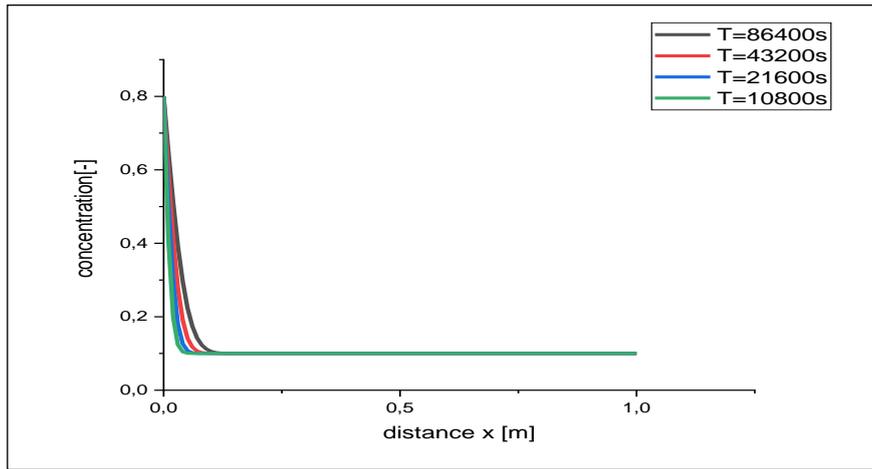
Les graphes de la figure (III. 3) montre l'évolution de la teneur en humidité en fonction de la longueur L, en varie la teneur en humidité pour des différentes valeurs de coefficient de diffusion et un temps T fixe, on constate que la teneur en humidité diminue en fonction de coefficient de diffusion et on observe que lorsque le coefficient de diffusion est grand la diffusion atteint sa valeur maximale plus rapide que les valeurs de coefficient de diffusion inférieur comme on constate que la distance maximale de la diffusion θ_{max} est constante pour les différentes valeurs de la longueur L.

III.5. Influence de temps sur la diffusion

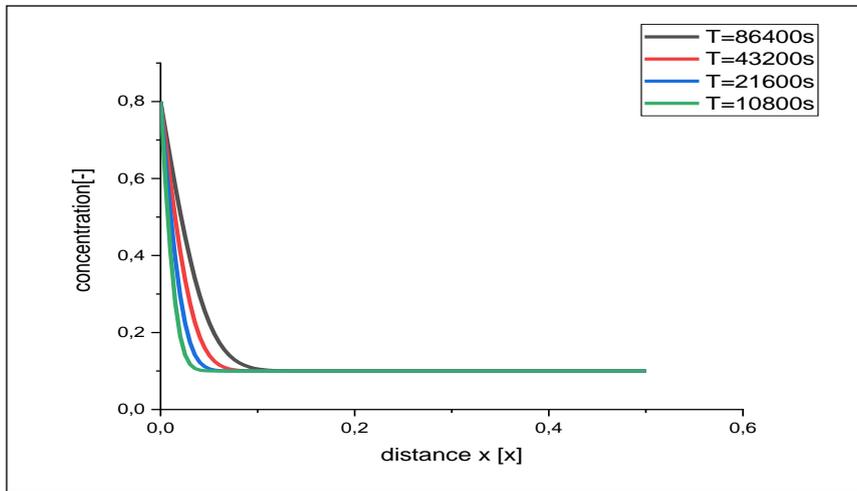
Pour étudier l'influence du temps sur le phénomène de la diffusion en régime non permanent nous avons fait plusieurs simulations en variant les différentes valeurs de temps toute en gardant les autres paramètres fixes, le tableau suivant nous montre les valeurs qui ont été prise lors de notre simulation.

Tableau III-4 : valeurs des paramètres utilisées pour la simulation de teneur en humidité par rapport à la longueur de la colonne pour des différentes valeurs de T

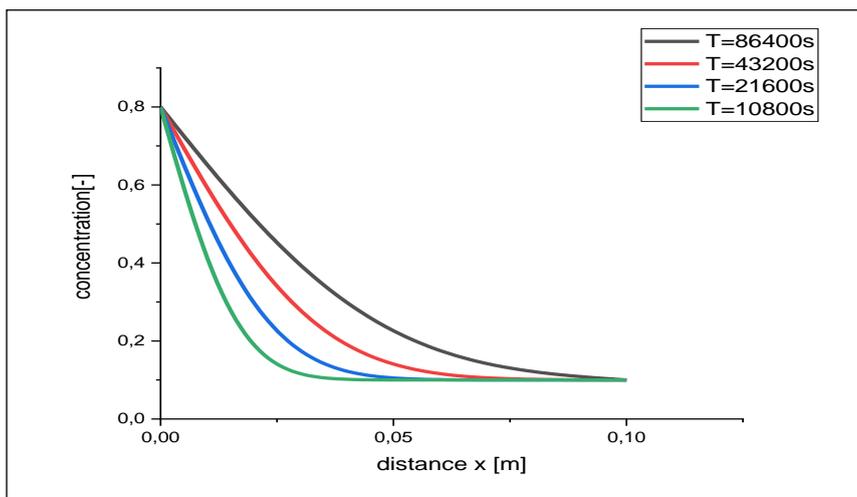
| La teneur en humidité θ [kg / m ³] | Coefficient de diffusion D [m ² / s] | Le temps T [s] | La longueur de la colonne L [m] | | |
|--|---|----------------|---------------------------------|-----|---|
| 0.8 | 7.9e-9 | 86400 | 0.1 | 0.5 | 1 |
| | | 43200 | | | |
| | | 21600 | | | |
| | | 10800 | | | |



(a)



(b)



(c)

Figure III.4 : variation de la teneur en humidite par rapport a la longueur L pour des differente valeure de temps (a) – (b) – (c)

Les graphes de la figure (III .4) montre l'évolution de la teneur en humidité en fonction de la longueur L , en varie la teneur en humidité pour des différentes valeurs de temps avec un coefficient de diffusion fixe, on constate que la teneur en humidité diminue en fonction de temps et on observe que les courbes dont le temps est grand sont supérieures aux courbes dont le temps est petit.

III.6. Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent que la teneur en humidité diminue en fonction de la longueur de la colonne et la cause de cette diminution revient aux différentes caractéristiques du milieu poreux et le paramètre principal est la perméabilité qui désigne la capacité à laisser passer le fluide à s'écouler.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a mené une étude sur la variation de la teneur en humidité dans une colonne de milieu poreux, Notre travail consiste à résoudre l'équation de diffusion en instationnaire en utilisant un code MATLAB, qui se base sur la méthode des différences finies.

D'abord, nous avons présenté la démonstration de l'équation de richard simplifiées en une dimension dans la colonne horizontale. ensuite, nous avons discrétisé l'équation par la méthode des différences finies dans les deux régimes , en régime permanent puis en régime non permanent ou on a présenté les deux schémas au différences finis, explicite (la solution est stable pour $0 \leq \lambda \leq 0.5$ et pour les valeurs hors de cette plage la stabilité n'est pas garantie), et implicite (la solution est universellement stable). Après quoi on a abouti aux formes matricielles pour chaque schéma.

Par la suite, nous avons rédigés deux codes Matlab, Le premier code est rédigé à partir de l'équation obtenus on régime permanent, et le deuxième code est rédiger à partir de l'équation de schéma explicite du régime non permanent. Que nous avons utilisé pour simuler la variation de la teneur en humidité en fonction de la longueur.

Les résultats obtenus montrent que la teneur en humidité diminue en fonction de la longueur et la cause de la diminution revient au caractéristiques de milieu poreux où la perméabilité est considérée le paramètre principal.

Références Bibliographiques

- [1] BEN NASRALLAH SASSI: « Contribution à l'étude des transferts couplés de chaleur et de masse. Application aux phénomènes d'évaporation par convection naturelle et du séchage convectif de milieux poreux » Thèse de doctorat d'état es en sciences physiques. Université de Poitiers, (1987) ;
- [2] Yves COUASNET : « Contribution à l'étude du transfert de vapeur d'eau en régime non permanent et non stationnaire dans les matériaux poreux et hygroscopiques ». Cahier du centre scientifique et technique du bâtiment. Septembre 1989, cahier 2349.
- [3] TECHNIQUE DE L'INGENIEUR, traité génie énergétique B8 250
- [4] M. NICOLAS, Ecoulements dans les milieux poreux. DEA mécanique énergétique
- [5] Jean COSTET, Guy SANGLERAS, (1975), Cours pratiques de mécanique des sols, Tome 1, Ed. Dunod, Paris, France.
- [6] S. BORIS « transfert de chaleur et de masse dans les matériaux. Analyse critique des différents modèles mathématiques utilisés ». L'humidité dans le bâtiment, séminaire de
- [7] R. Holtz, W. Kovacs, (1992), Introduction à la géotechnique, Ed. L'école polytechnique de Montréal, Montréal, Canada.
- [8] « les écoulements dans les milieux poreux partiellement saturé » mémoire pour l'obtention du diplôme master génie civil » 03 octobre 2013, université de Tlemcen
- [9] Lesaffre, B. 1989. Fonctionnement hydologique et hydraulique du drainage souterrain des Sols temporairement engorgés. Étude du CEMAGREF, Série Hydraulique agricole, 4, 1--334.
- [10] Musy A. et M. Soutter. 1991. Physique des sols. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [11] Meerschaert, M.M., Benson, D., Scheffler, H.-P., Baeumer, B., 2002. Fractional time derivatives induce subordination by an inverse Lévy process. Phys. Rev. E. 65, 041103.
- [12] Metzler, R., Klafter, J., 2000. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Phys.Rep. 339 (ERI), 1–77.
- [13] Generalized Richards 'equation to simulate water transport in unsaturated soils, article in journal of hydrology. Marsh 2003

Résumé

Dans cette étude on a présenté un modèle mathématique d'un problème physique et mécanique qui sert à l'étude de la variation de la teneur en humidité dans une colonne de sol horizontale unidimensionnelle en instationnaire dans un milieu poreux, les équations gouvernantes sont résolues par la méthode des différences finis, en utilisant le code de calcul « MATLAB ».

Mots clés : teneur en humidité, instationnaire, milieu poreux.

Abstract

In this study, we presented a mathematical model of a physical and mechanical problem, which is used to study the variation of the moisture content in a one-dimensional horizontal column of soil in unsteady state in a porous environment; the governing equations are solved by the finite difference method, using the "MATLAB" compute code.

Key word: moisture content, porous media.