

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université A.MIRA-BEJAIA**



**جامعة بجاية**  
**Tasdawit n Bgayet**  
**Université de Béjaïa**

**Faculté de technologie**  
**Département génie électrique**

# **Mémoire de fin d'étude**

**Pour l'obtention du diplôme de master**

**Filière : électromécanique**

**Spécialité : maintenance industrielle**

## **Thème**

**Modélisation de l'efficacité de la maintenance des  
systèmes multi-composants**

**Présenté par :**

**Mr. AMRANI Mohamed**  
**Mr. BOUSSENOUNE Ishak**  
**Mr. BENMIMOUN A.Rahim**

**Encadré par :**

**Mr. AIT MOKHTAR El Hassene**

**Année Universitaire : 2019/2020**

## ***Remerciements***

*Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont aidés pour élaborer ce travail dont :*

*Notre encadreur Mr Ait Mokhtar pour la bonne orientation malgré les circonstances difficiles.*

*Mr Aouzellag pour son aide précieuse.*

*Le directeur du CEM BASE 5 ainsi que son personnel pour leur gentillesse.*

*Nos familles et nos proches pour leur patience et leur soutien tout au long de nos trajets éducatifs*

## Table des matières

### Introduction générale

#### Chapitre I: Généralités

I.1 Introduction .....	1
I.1.1 La définition de la maintenance.....	1
I.1.2 La typologie da la maintenance .....	1
I.1.2.1 La maintenance corrective .....	2
I.1.2.2 La Maintenance préventive systématique .....	2
I.1.2.3 La maintenance préventive conditionnelle.....	2
I.1.3.1 La fiabilité .....	2
I.1.3.2 L'intérêt de la fiabilité en maintenance.....	3
I.2 Les principales fonctions statistiques utilisées en fiabilité .....	3
I.2.1 Les fonctions de répartition et de fiabilité .....	3
I.2.2 La densité de probabilité.....	3
I.2.3 Le taux de défaillance .....	4
I.2.4. Les lois principales de probabilités utilisées en fiabilité .....	4
I.2.5 La loi exponentielle .....	4
I.2.6 La loi de Weibull .....	5
I.2.7 La fiabilité d'un système.....	7
I.2.8 Les différents types de structure d'un système .....	7
I.3 Modélisation d'efficacité de maintenance .....	10
I.3.1 Le modèle de maintenance minimale .....	11
I.3.2 Le modèle de maintenance parfaite .....	12
I.3.3 Les modèles de réduction d'intensité de défaillance .....	13
I.3.4 Le modèle de réduction arithmétique d'intensité de défaillance .....	13
I.3.5 Le modèle de réduction géométrique d'intensité de défaillance .....	14
I.3.6 Les modèles de réduction de l'âge virtuel .....	15
I.3.7 Le modèle de réduction proportionnelle de l'âge virtuel.....	15
I.3.8 Les modèles hybrides.....	16
I.4 Conclusion .....	17
Chapitre II : Ajustement des paramètres de la loi Weibull	
II.1 Introduction .....	18
II.2 La méthode de Vraisemblance .....	18
II.2.1 Le principe de vraisemblance.....	18
II.2.2 La méthode Maximum de vraisemblance : .....	19
II.2.3 L'estimation des paramètres de Weibull :.....	20

II.2.4 Le test de Kolmogrov-Smirnov .....	21
II.2.5 Un exemple d'application.....	22
II.2.5.1 La vérification par le test de Kolmogrov-Smirnov.....	23
II.3 La méthode des moindres carrés (théorie de la régression) .....	24
II.3.1 Définition.....	24
II.3.2 La régression linéaire .....	24
II.3.2.1 L'ajustement par la méthode des moindres carrés.....	25
II.3.2.2 Le calcul des coefficients.....	26
II.3.2.3 La régression linéaire : un algorithme de calcul pratique .....	27
II.3.3 L'estimation des paramètres de Weibull .....	27
II.3.4 Le coefficient de détermination ( $R^2$ ) .....	28
II.3.5 Un exemple d'application.....	29
II.3.5.1 Le test de Kolmogrov-Smirnov .....	31
II.4 La comparaison entre la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance (EMaxV) et la méthode d'estimation par les moindres carrés .....	33
Chapitre III : l'étude de l'efficacité de maintenance sur un système	
III.1 Introduction.....	34
III.2 L'évaluation de l'efficacité de la maintenance .....	34
III.3 L'application .....	37
III.3.1 L'application sur un système série.....	37
III.3.1.1 L'interprétation des simulations .....	38
III.3.1.2 Le choix du modèle .....	41
III.3.2 L'application sur un système parallèle.....	41
III.3.2.1 L'interprétation des simulations .....	41
III.3.2.2 Le choix du modèle .....	43
III.3.3 L'application sur un système mixte .....	43
III.3.3.1 L'interprétation des simulations .....	43
III.3.3.2 Le choix du modèle .....	45
III.4 Conclusion .....	45
Conclusion générale	
Bibliographie	

**Liste des tableaux**

Tableau 1: Les résultats trouvés en appliquant la méthode de vraisemblance.....24  
Tableau 2: Les données du test de Kolmogrov-Smirnov, méthode vraisemblance.....25  
Tableau 3: Les données utilisées en calcul des moindres carrés.....32  
Tableau 4: Les paramètres trouvés par la méthode des moindres carrés.....33  
Tableau 5: Les données du test de Kolmogrov-Smirnov – méthode des moindres carrés.....34  
Tableau 6: Les résultats du calcul des facteurs de réduction pour chaque modèle –série.....40  
Tableau 7: Les résultats du calcul des facteurs de réduction pour chaque modèle –parallèle....44  
Tableau 8: Les résultats du calcul des facteurs de réduction pour chaque modèle – mixte.....45

**Liste des figures**

Figure 1.1 : la fonction de densité de probabilité - Loi exponentielle.....5

Figure 1.2: la variation de l'évolution des taux de défaillance en fonction de  $\beta$ - Loi de Weibull..6

Figure 1.3 : l'influence du paramètre  $\beta$  sur la densité de probabilité et le taux défaillance.....7

Figure 1.4 : des composants en série.....8

Figure 1.5 : des composants en parallèle.....9

Figure 1.6 : le diagramme de fiabilité d'une structure mixte.....10

Figure 1.7 : l'intensité de défaillance dans le cas de maintenance ABAO (selon la loi de Weibull pour  $\beta=3$  et  $\eta=500$ ).....11

Figure 1.8 : l'intensité de défaillance dans le cas de maintenance AGAN (selon la loi de Weibull pour  $\beta=3$  et  $\eta=500$ ).....12

Figure 1.9 : la réduction arithmétique pour  $\beta=3, \eta=500$  et  $\delta=2 \times 10^{-4}$ .....13

Figure 1.10 : la réduction géométrique pour  $\beta=3, \eta=500, \alpha=0.5$ .....14

Figure 1.11 : l'intensité de défaillance dans le modèle de réduction proportionnelle de l'âge....15

Figure 1.12: l'intensité de défaillance dans le modèle hybride (selon la loi de Weibull pour  $\beta=3$  et  $\eta=500$ ).....16

Figure 2.1 : l'ajustement de Max vraisemblance.....22

Figure 2.2 : le nuage des points avec la meilleure droite possible.....25

Figure 2.3 : la linéarisation de la fonction Weibull.....31

Figure 3.1 : Les modèles de réduction.....35

Figure 3.2 : les courbes des fonctions de répartitions des composants et du système série.....37

Figure 3.3 : les courbes des fonctions de répartition des composants et du système après la maintenance.....38

Figure 3.4 : la réduction arithmétique  $\lambda_1(t)=\lambda_0(t)-\delta$ .....39

Figure 3.5 : la réduction géométrique  $\lambda_1(t)=\alpha.\lambda_0(t)$  et  $\alpha=0.645343$ .....40

Figure 3.6 : la réduction d'âge virtuel  $\lambda_1(t)=\lambda_0(t-\rho T)$ .....40

Figure 3.7 : les résultats de l'application sur un système parallèle.....42

Figure 3.8 : les résultats de l'application sur un système mixte.....44

## **Introduction générale**

Au 19<sup>ème</sup> siècle, le monde a connu un développement révolutionnaire dans le domaine industriel, des nouvelles machines et structures sont inventées et améliorées chaque jour afin de remplir tous les besoins de l'humanité. Cela ne reste pas sans faille, tout a une durée de vie et les machines n'échappent pas à cette règle. Après des longues sessions de fonctionnement, les machines défont sous l'impact d'usure et les mauvaises conditions de fonctionnement, la défaillance est alors l'ennemi numéro un de la productivité des industries.

Dans ces conditions, la fonction maintenance a vu le jour, et elle devient une discipline importante pour l'ingénieur dans l'industrie. On considère la maintenance comme la médecine des systèmes industriels, et comme son nom l'indique, la maintenance aide à rétablir un système défaillant à son état de bon fonctionnement, surtout à prévenir les défaillances et bien planifier les actions de maintenance ultérieures.

L'automatisation des processus de fabrication a induit le développement des systèmes de plus en plus complexes, ce qui rend les maintenanciers obligés à inventer et développer des techniques évoluées afin de pouvoir suivre ces systèmes en termes de maintenance.

Les systèmes utilisés en industrie de nos jours sont loin d'être simples. Plusieurs composants en interaction entre eux forment un système plus ou moins complexe, ce qui est appelé un système multi-composant. Comparés aux systèmes simples, la maintenance de ces systèmes est compliquée nécessitant des études plus poussées et approfondies.

La maintenance est un art de prédiction, il faut bien connaître le comportement de ses systèmes pour pouvoir les réparer efficacement. Dans l'industrie, le temps est vraiment de l'argent, plus le temps d'arrêt est réduit, plus le profit est important.

Afin de bien planifier la maintenance efficace des systèmes multi-composants, le maintenancier doit la modéliser. Pour ce faire, il doit chercher un comportement d'un système suivant un modèle d'efficacité de maintenance prédéfini le plus proche à celui de son système réel afin de le suivre dans la planification des actions de maintenance ultérieures.

Pour remplir ces besoins et atteindre cet objectif, notre travail sera organisé comme suit :

Le chapitre 1 sera une partie pour les définitions en général, la présentation des méthodes permettant d'analyser la fiabilité ainsi que quelques modèles d'efficacité de maintenance. Il sera suivi du chapitre 2 qui sera consacré à la présentation des outils d'estimation des paramètres Weibull épaulée de quelques exemples d'application

Ensuite, le chapitre 3 sera dédié à l'application des outils d'estimation présentés. Celle-là se fera sur des systèmes multi- composants suivie d'une simulation afin d'étudier l'efficacité de la maintenance sur ce système.

Enfin une conclusion générale sera récapitulative de toutes les étapes et les déductions



**Chapitre I: état de l'art  
sur les modèles d'efficacité  
de maintenance**

## **I.1 Introduction**

La maintenance des équipements industriels est un enjeu majeur pour la productivité des industries, ainsi que pour la qualité des produits. Cette dernière est basée sur la fiabilité qui est un véritable outil de conception de la maintenance en général. À titre préventif, elle présente un double enjeu qui englobe la disponibilité et le cout global de l'utilisation des installations.

Afin de mieux appréhender la maintenance et le concept de la fiabilité, ce chapitre sera consacré à la définition de ces notions selon la norme AFNOR, ainsi que la typologie de la maintenance.

Une partie de ce chapitre sera dédiée à l'explication des outils et des méthodes utilisés afin d'analyser la fiabilité de la maintenance d'un équipement, et une autre sera consacrée pour les modèles de l'efficacité de maintenance.

**Hypothèse :** on va considérer dans ce travail l'indépendance totale des composants

### **I.1.1 La définition de la maintenance**

La Maintenance, de manière générale, est un ensemble d'actions sur un dispositif ou un système pour but de le tenir ou le remettre en état de marche.

Selon l'Association française de normalisation, abrégée Afnor ou AFNOR, la maintenance est l'ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise [1].

En ce qui concerne les coûts de la maintenance, leur part dans les couts globaux des industries varie d'une industrie à une autre, par exemple, le coût de la maintenance est d'environ 15% en industrie agroalimentaire et de 60% en industrie sidérurgique. Ce qui n'est pas négligeable.

Pour une bonne gestion des coûts, il est nécessaire de maitriser les coûts globaux de la maintenance, afin de parvenir à une maitrise de la maintenance de manière efficiente et efficace, pour cela il faut recourir à des méthodes de modélisation et de classifier ces dernières [2].

### **I.1.2 La typologie da la maintenance**

La Maintenance se subdivise en trois catégories : la Maintenance dite corrective, celle dite préventive systématique et celle dite préventive conditionnelle [1].

### **I.1.2.1 La maintenance corrective**

Comme l'indique son nom, elle est exécutée après la détection d'une panne pour réparer et remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise. En d'autres termes, c'est les différentes manipulations exécutées après repérage d'une panne sur un équipement, qui sont destinées à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise correctement [1].

### **I.1.2.2 La Maintenance préventive systématique**

La maintenance préventive systématique, inclut les actions de maintenance requises par les dispositions légales et/ou réglementaires. Elle inclut au minimum la planification formelle, la description claire et précise du travail à effectuer (lubrification, changement de filtres, remplacement des roulements, etc.) et l'enregistrement du travail accompli.

La maintenance préventive systématique s'applique à des mécanismes de dégradation dont l'évolution est globalement connue. Ceci explique qu'elle n'inclut pas d'observation préalable de l'état du bien [1].

### **I.1.2.3 La maintenance préventive conditionnelle**

La maintenance préventive conditionnelle, quelquefois aussi appelée maintenance prédictive, consiste à mesurer, de manière périodique ou en continu, des paramètres décrivant au mieux l'état de l'équipement afin de déterminer le moment où il faudra effectuer la maintenance. Contrairement à la maintenance préventive systématique, cette décision n'est pas basée sur des données statistiques ou historiques, mais sur les données réelles et actuelles de l'équipement [1].

### **I.1.3.1 La fiabilité**

En tant-que discipline, c'est la science de durée de vie.

C'est l'aptitude d'un équipement à accomplir une fonction bien déterminée, dans des conditions et un temps (t) bien déterminés.

Une maintenance nécessite une bonne perception du matériel, et c'est là qu'interviennent les lois de survie ou de fiabilité les plus réalistes, pour cela, il faut avoir des échantillons de temps de défaillance obtenus par l'analyse des données de retour d'expérience, et avant ça il est nécessaire de définir le type de données de survie ainsi que les effets des opérations de maintenance [3].

### **I.1.3.2 L'intérêt de la fiabilité en maintenance**

Que le système soit simple ou complexe, qu'il s'agisse d'une automobile ou d'une centrale nucléaire, la connaissance des caractéristiques de fiabilité est essentielle : elle conditionne la maintenance, les durées de vie, et un niveau de sécurité acceptable [3].

## **I.2 Les principales fonctions statistiques utilisées en fiabilité**

Chaque système a ses propres caractéristiques, telle que l'apparition de la défaillance qui est imprévisible et aléatoire, donc c'est une variable qui a une probabilité qui lui correspond, et cela induit une loi de probabilité [3].

### **I.2.1 Les fonctions de répartition et de fiabilité**

F(t) dite fonction de répartition, c'est la probabilité d'avoir au moins une défaillance avant le temps t, quant à la fonction de fiabilité R(t) aussi appelée fonction de survie, elle représente la probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant la période [0, t], tel que t est une valeur de T (la durée de vie) [3].

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t) \quad (1.1)$$

### **I.2.2 La densité de probabilité**

Il s'agit de la probabilité d'avoir une défaillance à un instant précis t, elle est notée f(t), et c'est la fonction dérivée de la fonction F(t) [3].

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \quad (1.2)$$

### **I.2.3 Le taux de défaillance**

Le taux de défaillance instantané  $\lambda(t)$  mesure la probabilité qu'une défaillance d'un dispositif se produise dans l'intervalle de temps  $[t, t+dt]$  sachant que ce dispositif a bien fonctionné jusqu'à l'instant  $t$  [3].

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{R(t)} \quad (1.3)$$

Avoir  $\lambda(t)$  permet de connaître  $R(t)$  ou  $F(t)$ . En effet,  $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$

### **I.2.4. Les lois principales de probabilités utilisées en fiabilité**

La fiabilité dispose d'un grand nombre de lois, les plus utilisées sont : la loi exponentielle, la loi de Weibull, la loi normale et la loi Gamma.

Cependant dans nos travaux, nous allons nous concentrer sur la loi exponentielle et Weibull [3].

### **I.2.5 La loi exponentielle**

La maintenance est un domaine qui utilise généralement la fiabilité et plus précisément la loi exponentielle en électronique. Car la loi exponentielle est utilisable que lorsque  $\lambda(t) = \lambda$  où le taux de défaillance est constant et les défaillances sont aléatoires [3].

Les caractéristiques d'une variable aléatoire  $T$  distribuée suivant une loi exponentielle sont :

- fonction de répartition :  $F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \quad (1.4)$

- densité de probabilité :  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \quad (1.5)$

Comme représenté dans la **Figure 1.1** :

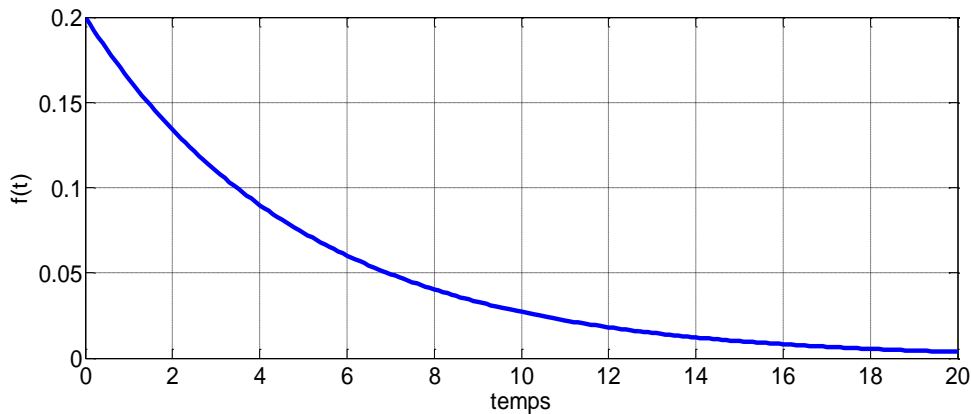


Figure 1.1 : la fonction de densité de probabilité - Loi exponentielle

### I.2.6 La loi de Weibull

La loi de Weibull est utilisée pour évaluer les différentes fonctions de fiabilité dans les trois phases de vie d'un dispositif (jeunesse, utile, vieillesse), elle recouvre toute une famille de lois, certaines d'entre elles apparaissant comme conséquences de certaines hypothèses. C'est en particulier, le cas de la loi exponentielle ( $\beta = 1$ ) [3].

Les caractéristiques d'une variable aléatoire T distribuée suivant une loi de Weibull sont :

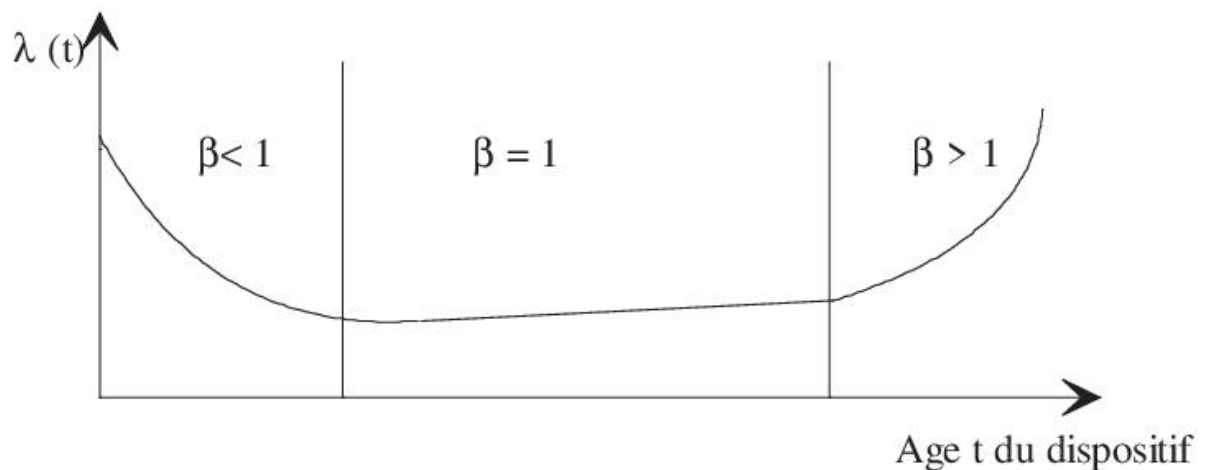
- fonction de fiabilité : 
$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right] \quad \forall t \geq \gamma \quad (1.6)$$

- densité de probabilité : 
$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} * \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right] \quad \forall t \geq \gamma \quad (1.7)$$

- taux instantané de défaillance : 
$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (1.8)$$

$\beta$ ,  $\eta$  et  $\gamma$  sont les paramètres de la loi de Weibull.

-  $\beta$  est le paramètre de forme. Très important, car il modifie la variation du taux de défaillance, la densité de probabilité (représenté dans la **Figure 1.3**) et permet ainsi de modéliser alternativement les trois phases de la courbe en baignoire (**Figure 1.2**).



**Figure 1.2 :** l'évolution selon  $\beta$  des taux de défaillance en fonction de  $t$ - Loi de Weibull

Comme le montre la **figure 1.2** :

- si  $\beta < 1$ , le taux de défaillance décroît ;
- si  $\beta = 1$ , le taux de défaillance est constant, on retrouve la loi exponentielle ;
- si  $\beta > 1$ , le taux de défaillance croît ;
- si  $\beta \approx 3.6$ , la loi de Weibull a une allure voisine mais distincte de la normale ;
- $\eta$  est un simple paramètre d'échelle de temps appelé aussi durée de vie caractéristique

Lorsque  $t = \eta$ , alors  $F(t) = 63\%$  ;

-  $\gamma$  est le paramètre de localisation. Il est dans la même unité que le temps ; très souvent, on choisit  $\gamma = 0$  et la loi de Weibull est ramenée à deux paramètres ;

- Si  $\gamma < 0$ , on peut dire que le matériel a subi une dégradation avant sa mise en service industrielle (usure lors des essais, du rodage ou problème de montage) ;

- Si  $\gamma > 0$ , on peut dire que le matériel n'a commencé à se dégrader qu'à la date  $t = \gamma$  ;

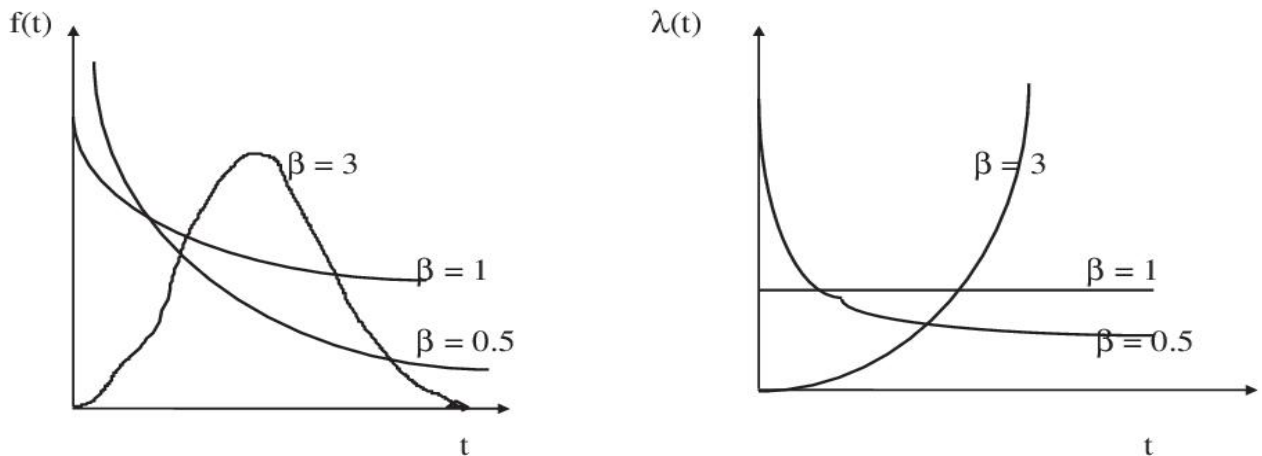


Figure 1.3 : l'influence du paramètre  $\beta$  sur la densité de probabilité et le taux défaillance

### I.2.7 La fiabilité d'un système

Nous pouvons calculer la fiabilité d'un système par le biais de sa structure (ou architecture). Le principe est de considérer qu'un système est constitué de composants élémentaires, et que sa fiabilité dépend à la fois de la fiabilité de ses composants et de la façon dont le bon fonctionnement ou la panne de chaque composant influe sur le bon fonctionnement ou la panne du système tout entier [4].

### I.2.8 Les différents types de structure d'un système

Dans un système à  $n$  composants, nous allons supposer que l'état du système et l'état de ses composants sont binaires (état marche, panne).

Dans notre cas, nous allons présenter les structures basiques (série, parallèle et mixte).

Pour chaque structure, le diagramme de fiabilité et la fonction structure correspondants sont étudiés. Cette dernière est une représentation mathématique du diagramme de fiabilité :

soit  $x_i$  une variable binaire désignant l'état du composant  $i$ ,

$i = 1, 2, \dots, n$ .  $x_i = 1 \implies$  état de marche.

$x_i = 0 \implies$  état de panne.

Le système est donc dans l'état :  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ .

Notons  $\varphi$  l'application de  $\{0, 1\}^n$  dans  $\{0, 1\}$  déterminée par :

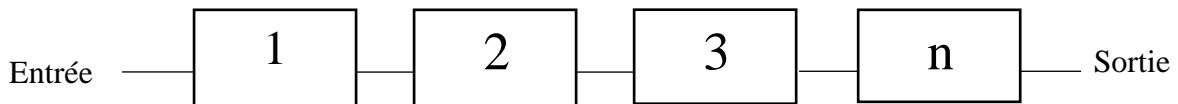
$\varphi(x) = 1 \implies$  l'état  $x$  est un état de marche du système .



$\varphi(x) = 0 \implies$  l'état  $x$  est un état de panne.

La fonction  $\varphi$  s'appelle la fonction de structure du système [4].

(a) **Structure série** : Pour une telle configuration, la panne de l'un des  $n$  éléments placés en série entraîne la panne de tout le système (représenté dans la **figure 1.4**) [4].



**Figure 1.4** : diagramme de fiabilité d'un système série.

La fonction de structure correspondante est :

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \min(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.9)$$

(b) **Structure parallèle** : Le système reste en état de fonctionnement si au moins un de ses  $n$  composants placés en parallèle fonctionne (présenté dans la **Figure 1.5**) [4].

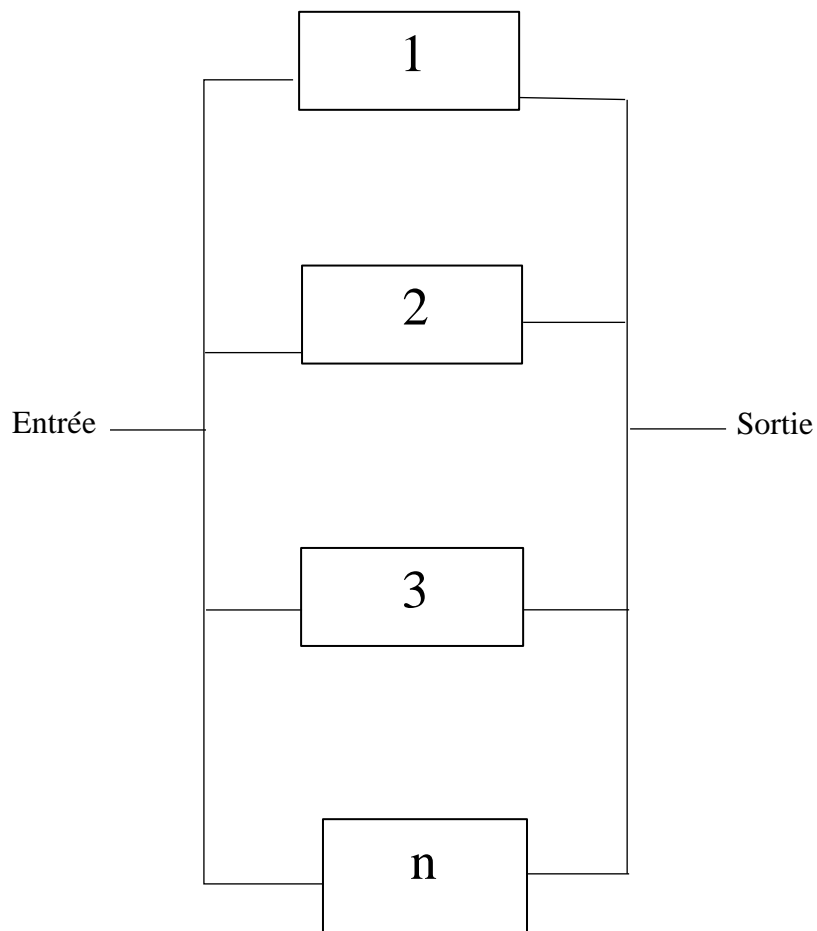


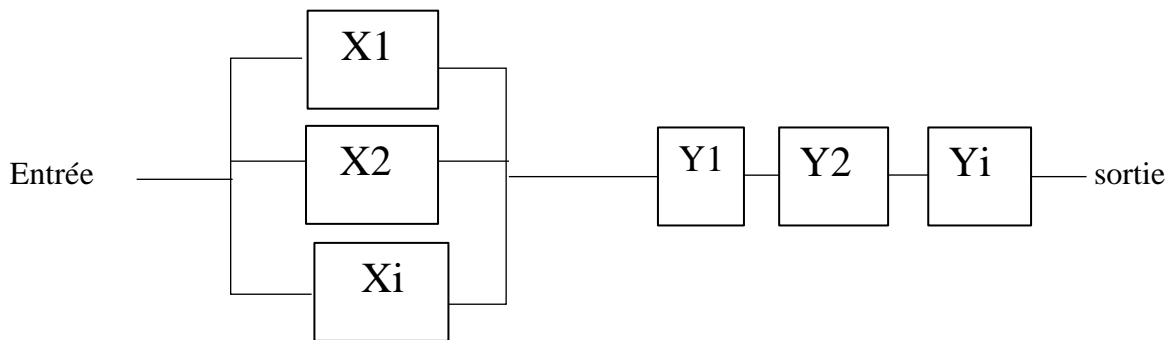
Figure 1.5 : diagramme de fiabilité d'un système parallèle.

La fonction de structure est :

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 1 - (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdots (1 - x_n) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(1.10)

(c) **Structure mixte** : Ce système est une combinaison des deux structures précédentes, cela engendre la soumission du système mixte à la combinaison des conditions de fonctionnement des deux structures précédemment citées, c'est-à-dire , si au moins un composant  $X_i$  fonctionne et les composants  $Y_i$  sont tous fonctionnels, le système sera toujours fonctionnel (condition du système parallèle), mais si au moins un composant  $Y_i$  tombe en panne, tout le système sera dysfonctionnel (condition du système série) comme présenté dans la **Figure 1.6** [4].



**Figure 1.6** : le diagramme de fiabilité d'une structure mixte.

La fonction de structure correspondante est :

$$\varphi(x) = [1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i)] \cdot \prod_{i=1}^n Y_i \quad (1.11)$$

### I.3 Modélisation d'efficacité de maintenance

Tout au long de leur vie opérationnelle, les systèmes industriels complexes sont soumis à des opérations de maintenance préventive et corrective afin de les conserver en état de marche, tout en justifiant d'un certain nombre de contraintes de sûreté de fonctionnement.

La sûreté de fonctionnement de ces systèmes dépend naturellement et étroitement de l'efficacité de ces opérations de maintenance. Classiquement, on suppose soit que la maintenance est inefficace, soit qu'elle remet les matériels à neuf. La première hypothèse est certainement trop pessimiste. La deuxième hypothèse est valide pour les composants défectueux remplacés par des neufs, mais ce n'est plus le cas pour les systèmes constitués de plusieurs

composants. Le remplacement d'un composant entraîne un rajeunissement du système global mais pas une remise à neuf.

Une gestion efficace des politiques de maintenance nécessite une modélisation réaliste de leurs effets. Il est donc important de construire des modèles des effets des maintenances des systèmes réparables complexes et de développer des méthodes permettant d'évaluer leur efficacité [5].

### **I.3.1 Le modèle de maintenance minimale**

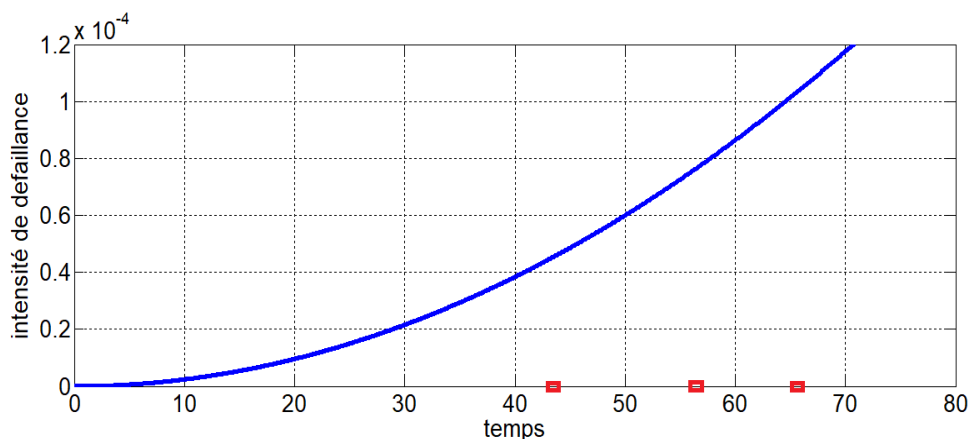
L'hypothèse dans ce modèle c'est que l'action de la maintenance est inefficace, où le taux de défaillance du système n'est pas influencé par les actions de la maintenance (absence de la dégradation et d'amélioration du système), le système après l'action est aussi mauvais que vieux (ABAO As Bad As Old) [5].

Dans le cas de ABAO la fonction d'intensité de défaillance ne dépend que du temps et elle est donnée par :

$$\lambda(t) = \lambda_0(t) \tag{1.12}$$

La courbe de l'équation (1.12) est représentée dans la **figure 1.7**

La fonction d'intensité de défaillance initiale juste avant l'action de maintenance est représentée par  $\lambda_0$ .



**Figure 1.7 :** l'intensité de défaillance dans le cas de maintenance ABAO (selon la loi de Weibull pour  $\beta=3$  et  $\eta=500$ )

### I.3.2 Le modèle de maintenance parfaite

Dans ce modèle, l'efficacité de la maintenance est maximale. Après chaque maintenance, le taux de défaillance s'annule, cela voudrait dire que le système revient à son état neuf après chaque maintenance effectuée.

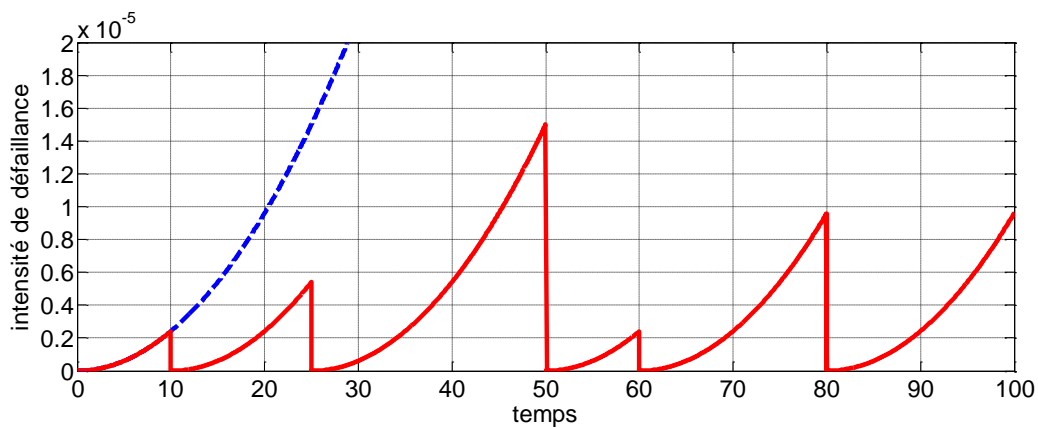
Le système est appelé aussi bon que neuf après une intervention de maintenance (AGAN As Good As New en anglais) [5]

Supposons que le système reçoit des actions de maintenance à des instants successifs notés  $T_i$  tel que  $i= 1,2,3, \dots, I_m$ , donc, a un instant  $t \in ]i, i + 1[$

L'expression de la fonction d'intensité de défaillance dans le cas d'une maintenance AGAN est :

$$\lambda(t) = \lambda_0(t - T_i) \quad (1.13)$$

Représentée dans la **figure 1.8** :



**Figure 1.8** : l'intensité de défaillance dans le cas de maintenance AGAN (selon la loi de Weibull pour  $\beta=3$  et  $\eta=500$ )

### I.3.3 Les modèles de réduction d'intensité de défaillance

L'effet de la maintenance sur le système est de réduire l'intensité de défaillance d'une façon qu'elle soit comprise entre l'effet d'une maintenance ABAO et une maintenance AGAN.

Pour cela on va présenter deux modèles qui le permettent.

### I.3.4 Le modèle de réduction arithmétique d'intensité de défaillance

Après la maintenance, le système est remis à un état meilleur que celui d'avant en réduisant l'intensité de défaillance d'une quantité qui correspond à l'effet de cette maintenance, toutefois sans influencer sur l'allure de la courbe, comme le montre la **figure 1.9** :

Son expression mathématique s'écrit :

$$\lambda_i(t) = \lambda_{i-1}(t) - \delta_i \quad (1.14)$$

La fonction d'intensité de défaillance s'écrit donc :

$$\lambda_n(t) = \lambda_0(t) - \sum_{i=1}^n \delta_i \quad (1.15)$$

Tel que n est le nombre d'actions de maintenances [6].

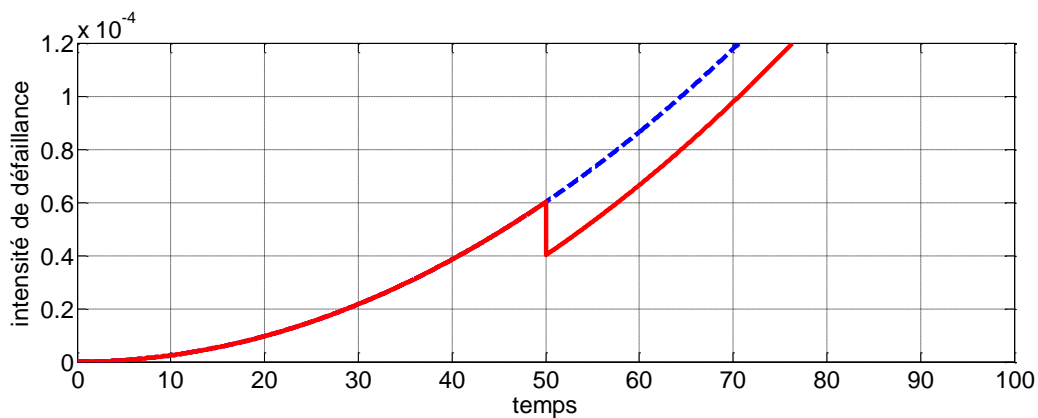


Figure 1.9 : la réduction arithmétique pour  $\beta=3$ ,  $\eta=500$  et  $\delta=2 \times 10^{-4}$

### I.3.5 Le modèle de réduction géométrique d'intensité de défaillance

Ce modèle provient directement du processus géométrique appelé aussi processus de quasi-renouvellement, où  $\alpha$  est le facteur de réduction d'intensité de défaillance. Il est supposé que le produit (entre la fonction d'intensité de défaillance et  $\alpha$ ) soit la résultante d'une maintenance imparfaite du système, tel que :  $0 < \alpha < 1$ . Après la première action de maintenance imparfaite, la fonction d'intensité de défaillance devient :

$$\lambda(t) = \alpha \lambda_0(t) \quad (1.16)$$

Après la deuxième action de maintenance imparfaite, la fonction d'intensité de défaillance devient :

$$\lambda(t) = \alpha^2 \lambda_0(t) \quad (1.17)$$

La fonction d'intensité de défaillance de ce modèle est représentée dans la **figure 1.10** et elle s'écrit :

$$\lambda(t) = \alpha^{Im} \lambda_0(t) \quad (1.18)$$

Le modèle de réduction géométrique d'intensité de défaillance agit après une maintenance imparfaite sur la courbe d'intensité de défaillance, car elle reprend à partir d'un point inférieur à celui juste avant l'intervention avec effet immédiat, il agit aussi à long terme sur le taux de dégradation du système, car il change par rapport à celui d'avant l'intervention [5].

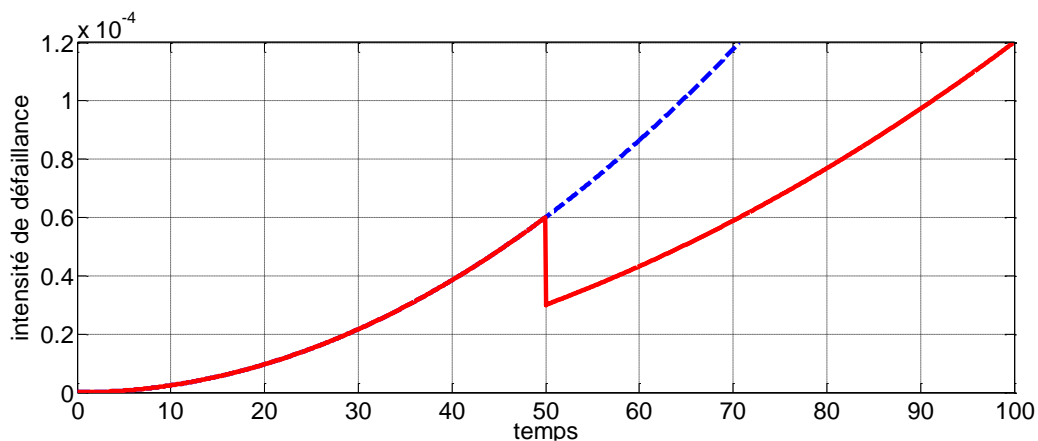


Figure 1.10 : la réduction géométrique pour  $\beta=3, \eta=500, \alpha=0.5$

### I.3.6 Les modèles de réduction de l'âge virtuel

Le concept de ce modèle est que l'âge du système qui était égal à  $t$  avant l'intervention, est réduit à  $t/\Delta$ , où  $\Delta$  est le facteur de réduction de l'âge.

Après la  $i^{\text{ème}}$  action de maintenance imparfaite, le système se comporte comme un système neuf qui aurait fonctionné une durée  $A_i$  sans tomber en panne,  $A_i$  est considéré comme étant l'âge virtuel du système après la  $i^{\text{ème}}$  action de maintenance [5].

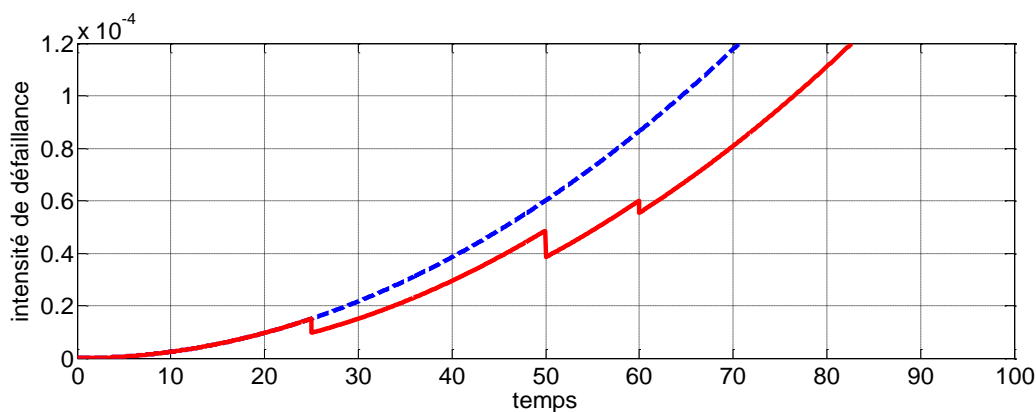
### I.3.7 Le modèle de réduction proportionnelle de l'âge virtuel

Ce modèle est caractérisé par une efficacité de la maintenance déterministe et constante (*i.e.*  $\forall i \geq 1, Zi = \rho$ ),  $\rho$  est le paramètre de réduction d'âge virtuel ou le facteur d'amélioration [5].

Sa fonction de l'intensité de défaillance est :

$$\lambda(t) = \lambda_0(t - \rho T_{im}) \tag{1.19}$$

Représenté dans la **figure 1.11** :



**Figure 1.11** : l'intensité de défaillance dans le modèle de réduction proportionnelle de l'âge virtuel (selon loi de Weibull pour  $\beta=3, \eta=500, \rho=0.2$ )

Après des déductions, on distingue quatre cas :

Maintenance parfaite (AGAN) :  $\rho = 1$

Maintenance imparfaite (efficace) :  $\rho \in ]0,1[$

Maintenance minimale (ABAO) :  $\rho = 0$

Maintenance nuisible :  $\rho < 0$ .



### I.3.8 Les modèles hybrides

Le modèle hybride est une combinaison entre les deux classes de réduction d'intensité de défaillance. Malgré leurs différentes hypothèses concernant la réduction d'intensité de défaillance, ce modèle les regroupe et améliore le concept de la réduction de l'âge virtuel.

La dégradation du système évolue malgré l'effet positif d'une action de maintenance imparfaite appliquée sur ce dernier [5].

Après la  $i^{\text{ème}}$  action de maintenance imparfaite, l'équation mathématique de l'intensité de défaillance est :

$$\lambda(t) = \alpha\lambda(0)(t - bT_i) \quad (1.20)$$

Tel que :  $T_i < t < T_{i+1}, 0 < b < 1$  et  $\alpha > 1$

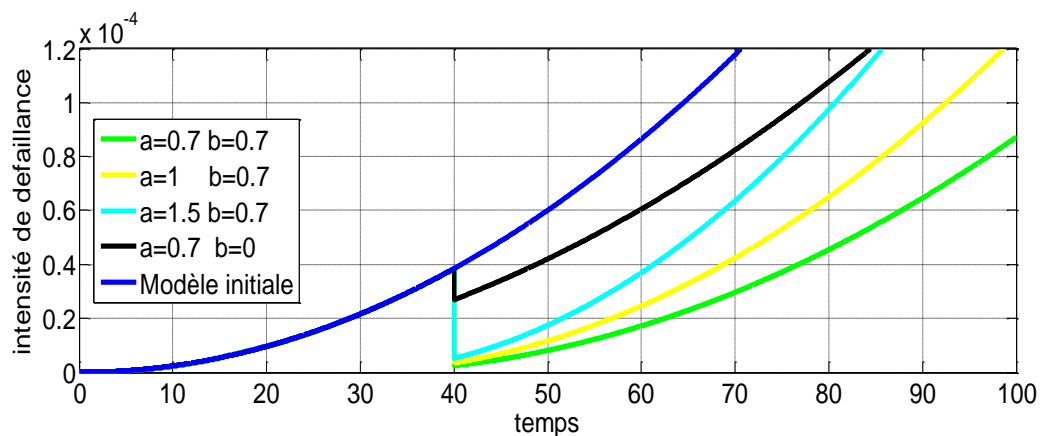
La valeur de  $\alpha$  détermine les effets de l'action de maintenance effectuée sur le système, on distingue quatre cas qui sont montrés dans la **figure 1.12** :

\* $\alpha > 1$  et  $0 < b < 1$  : modèle hybride avec réduction de l'âge virtuel et une augmentation de la dégradation

\* $0 < \alpha < 1$  et  $0 < b < 1$  : l'effet est doublé (modèle hybride avec réduction de l'âge virtuel et réduction d'intensité de défaillance).

\* $0 < \alpha < 1$  et  $b = 0$  : modèle de réduction géométrique d'intensité de défaillance

\* $\alpha = 1$  et  $0 < b < 1$  : modèle de réduction proportionnelle de l'âge virtuel



**Figure 1.12:** l'intensité de défaillance dans le modèle hybride (selon la loi de Weibull pour  $\beta=3$  et  $\eta=500$ )

#### **I.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons défini la maintenance et la fiabilité ainsi que leurs lois, nous avons cité les différentes structures des systèmes.

Nous avons conclu (par rapport à notre formation universitaire) que la loi exponentielle est un cas particulier de la loi Weibull, mais il reste à dire que la loi Weibull est plus généralisée que la loi exponentielle, en d'autre terme, on peut utiliser la loi Weibull dans les trois phases de vie d'un système.

La loi Weibull est aussi utilisée dans le domaine mécanique or que la loi exponentielle est utilisée dans le domaine électronique et elle ne peut être utilisée que pendant la vie utile où le taux de défaillance est constant.

Nous avons passé en revue quelques modèles de maintenance avec leurs fonctionnements et leurs simulations.

Chaque modèle de réduction d'intensité de défaillance a une hypothèse différente, ce qui nous donne plusieurs choix dans l'étude de l'efficacité de maintenance.

Si les modèles présentés dans ce chapitre seront combinés de bonne manière avec des méthodes mathématiques adéquates, l'étude d'efficacité de maintenance sur un système sera possible. Dans le chapitre 2, nous allons voir deux méthodes (mathématiques) d'ajustement des paramètres de la loi Weibull permettant l'étude.

# **Chapitre II : Ajustement des paramètres de la loi Weibull**

## **II.1 Introduction**

Dans ce chapitre, deux méthodes d'évaluations des paramètres les plus connues basées sur l'analyse des données de vie seront décrites. Des explications seront données sur leurs applications (l'estimation des paramètres Weibull). Pour mieux comprendre les méthodes, des exemples d'application qu'on vérifiera avec le test de Kolmogorov-Smirnov seront présentés.

## **II.2 La méthode de Vraisemblance**

Vraisemblance est une des méthodes d'estimation des paramètres d'un modèle de régression qui aide à trouver la valeur la plus vraisemblable du paramètre d'une population ou d'un échantillon donné. Le mathématicien allemand C.F.Gauss est le 1<sup>er</sup> à appliquer cette méthode en 1821. La méthode était attribuée au statisticien Anglais R.A.Fisher, après avoir noté l'idée sur un papier en 1921 [7].

Dans les lignes qui suivent, nous nous contenterons de donner une brève présentation de la méthode et nous montrerons comment estimer les paramètres d'un modèle de régression linéaire simple, autant pour un modèle de régression multiple, par la méthode de maximum vraisemblance.

### **II.2.1 Le principe de vraisemblance**

Pour fixer l'idée, soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  désigne  $n$  variables aléatoires indépendantes, distribuées de manière identique avec densité (fonction de fréquence alternative)  $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ , ou  $f$  est de forme connu et  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  appartient à un sous-ensemble d'espace  $m$  dimensionnel, mais autrement est inconnu.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  Peut, par exemple, représenter les durées de vie de  $n$  unités identiques d'un certain type.

Dans le cas de la non censure, la densité conjointe (fonction de fréquence)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est donnée par  $\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ .

Cette expression est prise comme une fonction de  $\theta$  pour fixer  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , et notée comme suit :  $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\theta; x)$

Alors  $L(\theta; x)$  est appelé la fonction de vraisemblance. Si  $X$  a une distribution discrète,  $L(\theta; x)$  exprime directement la probabilité d'observer les valeurs  $X_1, X_2, \dots, X_n$  pour une donnée

$\theta$  et indique donc quelle est la probabilité d'obtenir l'observation  $X_1, X_2, \dots, X_n$  pour chaque  $\theta$  donnée. Un argument similaire s'applique dans le cas où  $X$  a une distribution continue [7].

### **II.2.2 La méthode Maximum de vraisemblance :**

L'estimation du maximum de vraisemblance permet d'estimer les paramètres d'une fonction ou d'une distribution de probabilités d'un échantillon donné.

Le principe de la méthode est d'obtenir les paramètres d'une distribution donnée qui représentent le mieux les données disponibles.

Si  $X$  est une variable aléatoire continue de densité  $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i)$ , avec  $i$  paramètres inconnus ( $\theta_i$ ) et  $n$  observations ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ), la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L = L(\theta_1, \dots, \theta_i; x_1 \dots x_n) = \prod_{j=1}^n f(x_j; \theta_1, \dots, \theta_i).$$

Pour obtenir le maximum de vraisemblance entre l'échantillon des données et la distribution considérée, il suffit de maximiser la fonction de vraisemblance.

La fonction de vraisemblance est définie comme un produit et la maximisation d'un produit est généralement plus difficile que la maximisation d'une somme.

Le log-vraisemblance est défini par :

$$\ln L = \sum_{j=1}^n \ln f(x_j; \theta_1, \dots, \theta_i) \quad (2.1)$$

Puisque la fonction logarithmique est monotone croissante, la fonction de vraisemblance et le Log-vraisemblance atteindront donc leurs valeurs maximales pour les mêmes valeurs de paramètres ( $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$ ) qui sont appelées les estimations de maximum de vraisemblance (the maximum likelihood estimates en anglais (MLE)) [3,8].

L'identification des extrema est obtenue en résolvant l'équation :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_p} = 0, p = 1, 2, \dots, i \quad (2.2)$$

Après que les solutions de l'équation auront été trouvées, l'identification des maximas sera obtenue en choisissant les solutions qui vérifient :

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_p^2} < 0, p = 1, 2, \dots, i \quad (2.3)$$

### II.2.3 L'estimation des paramètres de Weibull :

La fonction de densité de probabilité de la loi de Weibull est généralement présentée sous la forme :

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} * \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right] \quad , t > 0 \quad (2.4)$$

Mettant en évidence les trois paramètres :

$\beta$  : paramètre de forme,  $\beta > 0$

$\eta$  : paramètre d'échelle,  $\eta > 0$

$\gamma$  : Paramètre de localisation,  $\gamma = 0$

Pour simplifier l'estimation des paramètres de Weibull on pose  $\lambda = \frac{1}{\eta^\beta}$ , la loi de Weibull s'écrit :

$$f(t) = \lambda \beta t^{\beta-1} \exp(-\lambda t^\beta) \quad (2.5)$$

Si  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  sont les  $n$  durées de vies observées, la méthode de maximum vraisemblance donne :

$$L = \ln(L) = n \ln(\lambda) + n \ln(\beta) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \lambda \sum_{i=1}^n t_i^\beta \quad (2.6)$$

D'où les équations :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \lambda \sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln(t_i) = 0 \quad (2.8)$$

Où

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} \quad , \quad \hat{\eta}^\beta = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta}{n} \quad (2.9)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\lambda \sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln t_i - \sum_{i=1}^n \ln t_i} \quad (2.10)$$

En remplaçant (2.9) dans (2.10) :

$$\hat{\beta} = [(\sum_1^n t_1^\beta \ln t_1)(\sum_1^n t_1^\beta)^{-1} - \frac{1}{n} \sum_1^n \ln t_1]^{-1} \quad (2.11)$$

La résolution de ce système implique de lourds calculs. Cependant si on dispose d'une bonne estimation préalable de  $\beta$  (par exemple, obtenue à l'aide du graphique de Weibull, on pourra le résoudre par itération en calculant  $\hat{\lambda}$  à partir de cette valeur utilisée dans l'équation (2.9) et en recalculant une nouvelle valeur de  $\hat{\beta}$  l'aide de l'équation (2.10) valeur utilisée à nouveau dans l'équation (2.9).

D'après Luc Perrault et Bernard Bobée, comme l'équation (2.10) ne dépend que du paramètre  $\beta$ , elle peut être résolue par une méthode classique, celle de Newton-Raphson, afin de trouver  $\hat{\beta}$  et ensuite de remplacer  $\beta$  dans l'équation (2.9) par cette valeur pour obtenir  $\hat{\eta}$ .

Dans les deux cas, les calculs sont lourds, mais ils peuvent être facilement programmés sur calculateur [9].

#### **II.2.4 Le test de Kolmogrov-Smirnov**

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'ajustement, qui part sur le principe de comparer l'écart maximal entre la fonction de répartition théorique et empirique (en valeur absolue), avec la valeur critique tirée de la table de Kolmogorov-Smirnov (fonction de  $n$  et de niveau de signification). Si l'écart maximal est inférieur à la valeur critique on accepte le modèle théorique, dans le cas contraire il est rejeté [3].

Fonction de répartition théorique :

$$F_{th}(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t-\gamma}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.12)$$

Fonction de répartition empirique :

$$F_i(t) = \frac{i}{n+1} \quad (2.13)$$

Ecart entre les deux fonctions (théorique, empirique) :

$$D_n = \max D_{ni} = | F_{th}(t) - F_i(t) | \quad (2.14)$$

### II.2.5 Un exemple d'application

Dans cet exemple nous allons faire une démonstration de la méthode de maximum de vraisemblance pour déterminer les paramètres de Weibull  $\beta$  (paramètre de forme) et  $\eta$  (paramètre d'échelle) pour  $\gamma = 0$ , le fichier historique (TBF en heure d'un système) avec l'échantillon suivant :70-100-140-170-200-230-270-300-330-370-400-430-460-500-550-600-650-720-780-880-1070

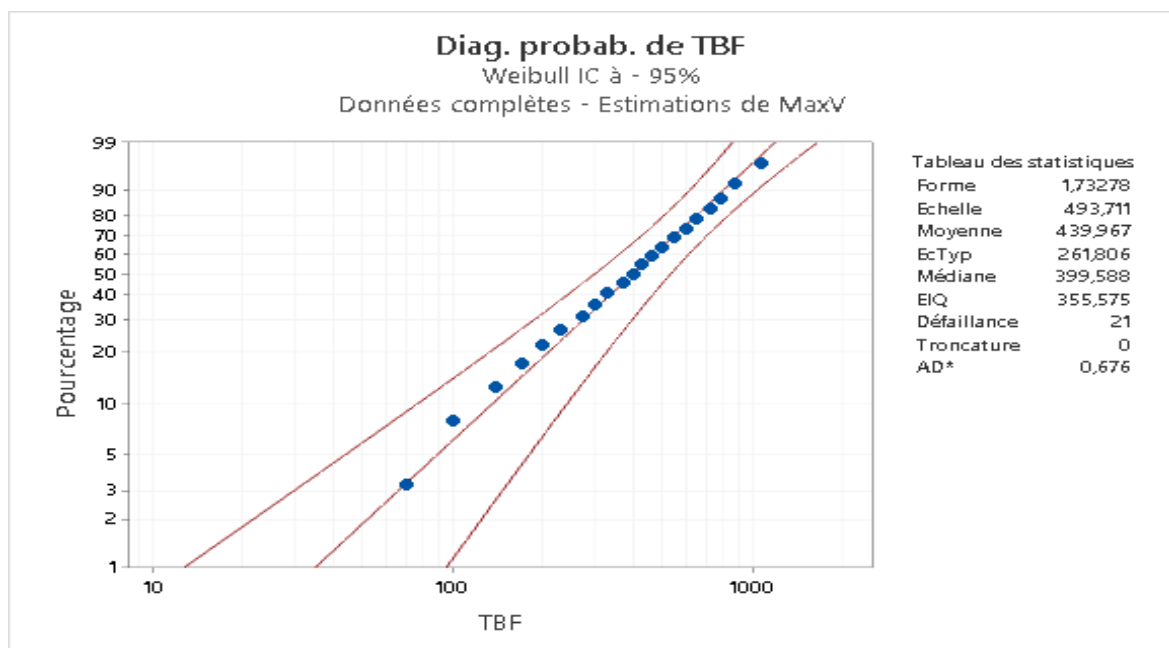
Avec l'aide du logiciel MINITAB et après avoir consigné les variables TBF comme le montre la **figure 2.1**, on procède à une analyse de répartition en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance dans la loi Weibull, afin d'estimer ses paramètres de forme et d'échèle, les résultats trouvés sont mentionnés dans le **tableau 1** ci-dessous.

**Tableau 1** : les résultats trouvés en appliquant la méthode de vraisemblance

Paramètre	Estimation
Forme	1,73278
Echelle	493,711

Avec :

Log de vraisemblance = -144,811



**Figure 2.1** : l'ajustement de Max vraisemblance



**II.2.5.1 La vérification par le test de Kolmogrov-Smirnov**

Dans le but de faire un test d'ajustement sur notre exemple d'application estimé par la méthode de vraisemblance avec  $\beta = 1.73$  ,  $\eta = 493.71$  .

On commence tout d'abord par le calcul de la fonction de répartition empirique et celui de la fonction de répartition théorique pour ainsi trouver l'écart entre les deux fonctions (théorique, empirique). Les résultats sont inscrits dans le **tableau 2**.

**Tableau 2** : les données du test de Kolmogrov-Smirnov, méthode vraisemblance

n	TBF	$F_i(t)$	$F_{th}(t)$	$D_{ni}$
1	70	0,045455	0,033492	0,0119625
2	100	0,090909	0,061186	0,0297231
3	140	0,136364	0,106853	0,0295106
4	170	0,181818	0,146248	0,0355702
5	200	0,227273	0,188968	0,0383047
6	230	0,272727	0,234125	0,0386023
7	270	0,318182	0,296726	0,0214558
8	300	0,363636	0,344521	0,0191154
9	330	0,409091	0,392320	0,0167709
10	370	0,454545	0,455088	0,0005425
11	400	0,500000	0,500824	0,0008240
12	430	0,545455	0,544973	0,0004815
13	460	0,590909	0,587220	0,0036891
14	500	0,636364	0,640177	0,0038134
15	550	0,681818	0,700419	0,0186008
16	600	0,727273	0,753695	0,0264223
17	650	0,772727	0,799970	0,0272427
18	720	0,818182	0,853508	0,0353262
19	780	0,863636	0,889866	0,0262296
20	880	0,909091	0,933993	0,0249021
21	1070	0,954545	0,977891	0,0233455

L'écart le plus élevé trouvé pour  $n=6$  où  $\text{Max}D_{ni} = 0.0386023$  ; à l'aide de la table de Kolmogrov-Smirnov pour  $n=21$  au seuil  $\alpha = 0.05$ , on trouve que la valeur critique est 0.290. Après la comparaison des deux valeurs trouvées  $0.0386023 < 0.290$ , on valide les résultats obtenus par la méthode de maximum de vraisemblance.

### **II.3 La méthode des moindres carrés (théorie de la régression)**

#### **II.3.1 Définition**

La méthode des moindres carrés est une notion mathématique permettant d'apporter un ajustement à un nombre d'éléments susceptibles de comporter des erreurs afin d'obtenir des données proches de la réalité [6,10].

La méthode des moindres carrés sert à comparer des données expérimentales généralement entachées d'erreurs de mesure à un modèle mathématique censé décrire ces données. Cette méthode consiste à analyser les données déjà enregistrées, en vue de déterminer une droite d'ajustement, qui permet de calculer l'équation de la droite du modèle initial. Cette droite d'ajustement minimise les écarts types à la moyenne.

Ce modèle peut prendre diverses formes. Il s'agit en général de lois de conservation que les quantités mesurées doivent respecter. La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales et évaluer les valeurs plus probables des paramètres de la loi recherchée, ainsi « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure [6,10].

#### **II.3.2 La régression linéaire**

Une régression linéaire est l'ajustement d'une loi linéaire du type :  $y = \alpha x + \beta$  sur des mesures indépendantes, fonction d'un paramètre connu  $x$ .

Ce type de situation se rencontre par exemple lorsque l'on veut calibrer un appareil de mesure simple dont le fonctionnement est linéaire.

$Y$  est alors la mesure instrumentale et  $x$  la grandeur physique qu'est censée être mesurée par l'appareil, généralement mieux connu, si l'on utilise une source de calibration fiable.

La méthode des moindres carrés permet alors de mesurer la loi de calibration de l'appareil, d'estimer l'adéquation de cette loi aux mesures de calibration et de propager les erreurs de calibration aux futures mesures effectuées avec l'appareil calibré [6,10].

### II.3.2.1 L'ajustement par la méthode des moindres carrés

Pour un ajustement d'un modèle de type  $y = a \cdot x + b$

Les données suivent la loi figurée en pointillés et sont affectées d'erreurs gaussiennes.

L'ajustement déterminé (courbe rouge) est le meilleur estimateur de la pente et de l'ordonnée à l'origine compte tenu de la quantité d'information contenu dans les points de mesure (représenté dans la **figure 2.2**) [10].

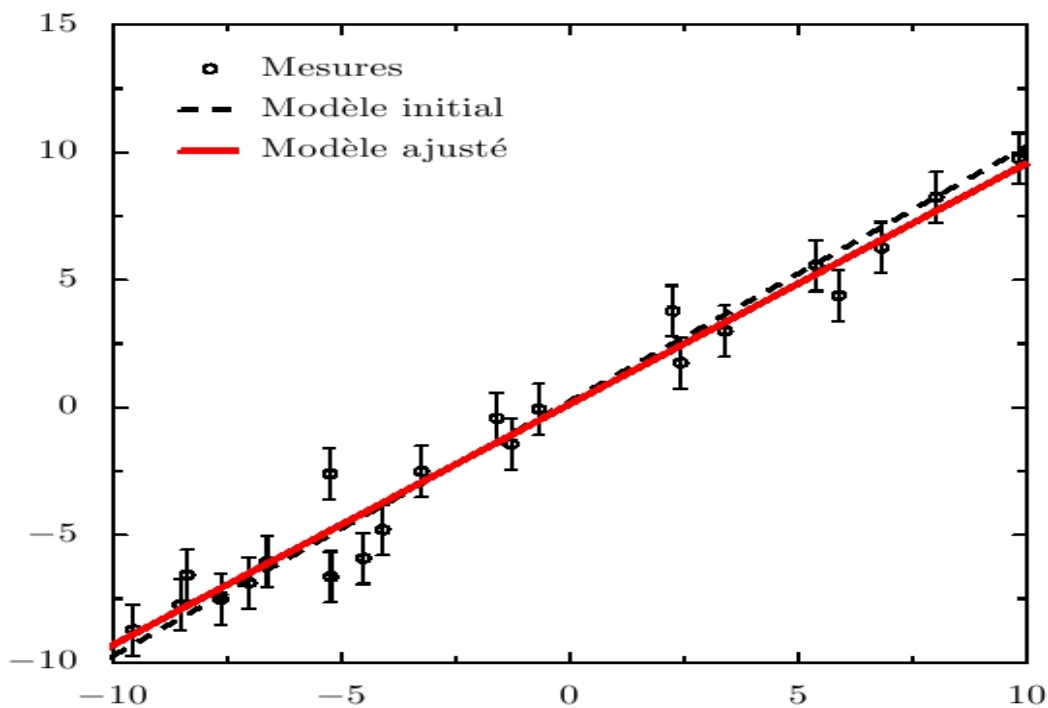


Figure 2.2 : le nuage des points avec la meilleure droite possible

### II.3.2.2 Le calcul des coefficients

La prescription des moindres carrés s'écrit pour ce type de modèle comme suite :

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; \theta))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (2.15)$$

Le minimum de cette expression est trouvé quand les deux dérivées partielles  $\partial S/\partial a$  et  $\partial S/\partial b$  sont égales à zéro :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(x_i) = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \quad (2.17)$$

Ce qui donne le système d'équations suivant :

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.18)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b = \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.19)$$

Ce système d'équation peut être écrit en forme matricielle ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Ce qui donne la solution suivante :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \quad (2.21) [11].$$

### II.3.2.3 La régression linéaire : un algorithme de calcul pratique

Si on définit les sommes suivantes :

$$S_x = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (2.22)$$

$$S_y = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad (2.23)$$

$$S_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (2.24)$$

$$S_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \quad (2.25)$$

Les coefficients  $a$  et  $\beta$  sont ensuite calculés par :

$$a = \frac{nS_{xy} - S_xS_y}{nS_{xx} - S_x^2} \quad (2.26)$$

$$b = \frac{S_y - aS_x}{n} \quad (2.27)$$

### II.3.3 L'estimation des paramètres de Weibull

La fonction de répartition de la loi de Weibull est généralement présentée sous la forme :

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right] \quad , t > 0 \quad (2.28)$$

Mettant en évidence les trois paramètres :

$\beta$  : paramètre de forme,  $\beta > 0$

$\eta$  : paramètre d'échelle,  $\eta > 0$

$\gamma$  : Paramètre de localisation,  $\gamma = 0$

Pour pouvoir appliquer les moindres carrés il faut linéariser la fonction de répartition de la loi Weibull :

$$\begin{aligned} F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right] &\Rightarrow \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right] = 1 - F(t) \\ \Rightarrow \ln(1 - F(t)) &= -\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta \\ \Rightarrow \ln(-\ln(1 - F(t))) &= \beta \ln(t) - \beta \ln(\eta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sous forme d'équation :  $y = ax + b$

Avec :  $y = \ln(-\ln(1 - F(t)))$

$x = \ln(t) \quad ; \quad a = \beta$

$b = -\beta \ln(\eta) \Rightarrow \eta = e^{\frac{b}{\beta}}$

Si  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  sont les n durées de vies observées :

$$a = \beta = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i} \quad (2.30)$$

$$b = -\beta \ln(\eta) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \beta \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.31) [12].$$

### II.3.4 Le coefficient de détermination ( $R^2$ )

Lors de l'établissement d'une équation de régression, le coefficient de détermination ( $R^2$ ) détermine à quel point l'équation de régression est adaptée pour décrire la distribution des points.

Si le  $R^2 = 0$ , cela signifie que l'équation de la droite de régression détermine 0% de la distribution des points. Cela signifie que le modèle mathématique utilisé n'explique absolument pas la distribution des points.

Si le  $R^2 = 1$ , cela signifie que l'équation de la droite de régression est capable de déterminer à 100% la distribution des points. Cela signifie que le modèle mathématique utilisé, ainsi que les paramètres a et b calculés sont ceux qui déterminent la distribution des points.

Cela se traduit de manière graphique selon la relation suivante: plus le coefficient de détermination se rapproche de 0, plus le nuage des points est diffus autour de la droite de régression. Au contraire, plus le  $R^2$  tend vers 1, plus le nuage de points se rapproche de la droite de régression. Quand les points sont exactement alignés sur la droite de régression,  $R^2=1$  [13].

Donc:  $0 \leq R^2 \leq 1$ , le  $R^2$  est calculé selon la formule:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.32)$$

Où  $n$  est le nombre de mesures,  $y_i$  la valeur de la mesure n<sup>o</sup> $i$ ,  $\hat{y}_i$  la valeur prédite correspondante et  $\bar{y}$  la moyenne des mesures [13].

Dans le cas d'une régression linéaire uni-variée (une seule variable prédictive), on montre que la variance (totale) SST est la somme de la variance expliquée par la régression SSE et de la moyenne des carrés des résidus SSR, de sorte que:

$$\frac{SSE}{SST} = \frac{SST - SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = R^2 \quad (2.33)$$

**NOTE:** le  $R^2$  n'est le carré du  $r$  que dans le cas particulier de la régression linéaire. Dans les autres régressions (logarithmique, exponentielle, puissance, etc.) ce n'est pas le cas. C'est pour éviter cette confusion facile qu'on note habituellement le  $r$  du coefficient de corrélation en minuscule, et celui du coefficient de détermination en majuscule [13].

### II.3.5 Un exemple d'application

Dans cet exemple nous allons faire une démonstration de la méthode des moindres carrés pour déterminer les paramètres de Weibull bêta (paramètre de forme), éta (paramètre d'échelle) pour  $\gamma = 0$  (paramètre de localisation).

Le fichier historique (TBF en heures d'un système) est le suivant :100 – 600 – 400 – 70 – 1070 – 460 – 500 – 140 – 650 – 170 – 200 – 230 – 780 – 270 – 300 – 370–550 –720 – 330 – 880 – 430.

Cette fois Après avoir consigné les variables TBF et en utilisant la méthode des moindres carrés et à l'aide de L'EXCEL, on obtient les résultats cités dans les **tableaux 3 et 4** qui sont aussi représentés sur la **Figure 2.3**.

**Tableau 3** : les données utilisées en calcul des moindres carrés

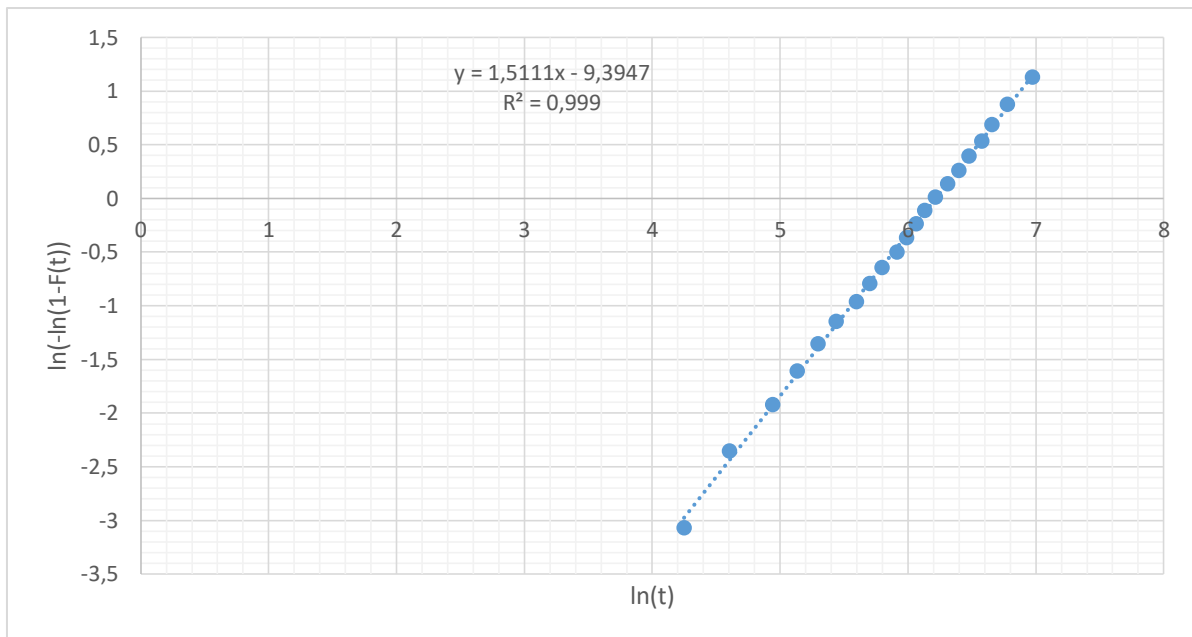
n	TBF	F(i)	$x_i = \ln(t)$	$y_i = \ln(-\ln(1-F(t)))$
1	70	0,04545455	4,24849524	-3,06787262
2	100	0,09090909	4,60517019	-2,35061866
3	140	0,13636364	4,94164242	-1,92002379
4	170	0,18181818	5,13579844	-1,60609005
5	200	0,22727273	5,29831737	-1,35545828
6	230	0,27272727	5,43807931	-1,14427809
7	270	0,31818182	5,59842196	-0,95974052
8	300	0,36363636	5,70378247	-0,79410601
9	330	0,40909091	5,79909265	-0,64227709
10	370	0,45454545	5,91350301	-0,50065122
11	400	0,5	5,99146455	-0,36651292
12	430	0,54545455	6,06378521	-0,23767695
13	460	0,59090909	6,13122649	-0,11225324
14	500	0,63636364	6,2146081	0,01153414
15	550	0,68181818	6,30991828	0,13552018
16	600	0,72727273	6,39692966	0,26181256
17	650	0,77272727	6,47697236	0,39312565
18	720	0,81818182	6,57925121	0,53341735
19	780	0,86363636	6,65929392	0,68935508
20	880	0,90909091	6,77992191	0,87459138
21	1070	0,95454545	6,97541393	1,1285084
$\sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n y_i$	
-48,8634372	733,996751	123,261089	-11,0296947	



Après avoir calculé la valeur des abscisses  $\ln(t)$  et des ordonnées  $\ln(-\ln(1-F(t)))$  on a procédé à divers calculs de sommes ( $S_x; S_y; S_{xx}; S_{xy}$ ) indispensables pour le calcul des paramètres de forme et d'échelle, les valeurs trouvées sont indiquées dans le **Tableau 4**.

**Tableau 4** : les paramètres trouvés par la méthode des moindres carrés

$\beta$	b	$\eta$
1,51108748	-9,39466582	501,275324



**Figure 2.3** : la linéarisation de la fonction Weibull

### II.3.5.1 Le test de Kolmogrov-Smirnov

Dans ce cas aussi nous allons faire un test d'ajustement sur notre exemple d'application estimé par la méthode des moindres carrés avec  $\beta = 1.511$ ,  $\eta = 501.27$ .

On commence tous d'abord par le calcul de la fonction de répartition empirique puis la fonction de répartition théorique pour parvenir à trouver l'écart entre les deux fonctions (théorique, empirique), les résultats sont inscrits dans le **Tableau 5**

**Tableau 5** : les données du test de Kolmogrov-Smirnov – méthode des moindres carrés

n	TBF	$F_i(t)$	$F_{th}(t)$	$D_{ni}$
1	70	0,045455	0,049775	0,004320
2	100	0,090909	0,083802	0,007107
3	140	0,136364	0,135431	0,000933
4	170	0,181818	0,177283	0,004535
5	200	0,227273	0,220782	0,006491
6	230	0,272727	0,265177	0,007550
7	270	0,318182	0,324704	0,006522
8	300	0,363636	0,368945	0,005309
9	330	0,409091	0,412381	0,003290
10	370	0,454545	0,468483	0,013938
11	400	0,500000	0,508867	0,008867
12	430	0,545455	0,547583	0,002128
13	460	0,590909	0,584488	0,006421
14	500	0,636364	0,630710	0,005654
15	550	0,681818	0,683519	0,001701
16	600	0,727273	0,730761	0,003488
17	650	0,772727	0,772559	0,000168
18	720	0,818182	0,822426	0,004244
19	780	0,863636	0,857810	0,005826
20	880	0,909091	0,903731	0,005360
21	1070	0,954545	0,956934	0,002389

L'écart le plus grand trouvé est à  $n=10$  ou  $MaxD_{ni} = 0.013938$ , à l'aide de la table de Kolmogrov-Smirnov pour  $n=21$  au seuil  $\alpha = 0.05$ , on trouve que la valeur critique est 0.290. Après comparaison des deux valeurs trouvées  $0.013938 < 0.290$ , on valide les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés.

#### **II.4 La comparaison entre la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance (EMaxV) et la méthode d'estimation par les moindres carrés**

D'après nos applications, l'estimation par les moindres carrés et la méthode EMaxV (la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance) fournissent des résultats cohérents.

L'estimation par les moindres carrés est plus facile à calculer manuellement et à programmer.

Cette méthode est également traditionnellement associée à l'utilisation des diagrammes de probabilité pour l'évaluation de l'adéquation et de l'ajustement.

Il existe des exemples où les points d'une parcelle de probabilité de Weibull qui utilise l'estimation par les moindres carrés tombent le long d'une ligne lorsque le modèle de Weibull est réellement inapproprié [14].

#### **II.5 Conclusion**

L'ajustement des paramètres de Weibull est nécessaire pour le calcul de fiabilité d'un système. Pour y'arriver, on utilise plusieurs méthodes, parmi elles, la méthode graphique, mais elle n'est pas précise par rapport à la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode des moindres carrés utilisées dans ce chapitre. La validation par le test de Kolomogrov- Smirnov, démontre l'efficacité de ces deux méthodes, la méthode des moindres carrés reste la plus facile à programmer et aussi à calculer.

L'estimation des paramètres Weibull par ces méthodes est utilisée pour le choix d'un modèle d'efficacité de maintenance. Nous allons montrer comment combiner les modèles d'efficacité de maintenance avec une des méthodes d'ajustement des paramètres de la loi Weibull pour étudier l'efficacité de la maintenance sur un système.

**Chapitre III : l'évaluation de  
l'efficacité de maintenance  
d'un système  
multi- composant**

### **III.1 Introduction**

Une chaîne de production est un ensemble des équipements utilisée en industrie pour remplir des fonctions précises permettant une productivité, cette dernière doit être ininterrompue pour permettre un meilleur profit. Pour cela la planification des maintenances et l'étude de leurs efficacités vont permettre respectivement de réduire le temps d'arrêt et améliorer le temps du bon fonctionnement. L'ingénieur se trouve donc face à un problème qui doit être résolu par des connaissances dans le domaine mathématique et celui de la modélisation, et pour résoudre ce problème nous allons utiliser nos acquis pour le faire.

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'étude de l'impact et de l'efficacité de la maintenance sur des systèmes à différentes structures pour pouvoir élaborer ultérieurement un plan de maintenance plus convenable et plus efficace que son prédécesseur.

### **III.2 L'évaluation de l'efficacité de la maintenance**

Pour qu'un maintenancier puisse mener une planification de maintenance efficace, il est nécessaire de prédire le comportement de son système. Ce comportement dépend du comportement des composants constituant ce système, et d'action de maintenance parfaite appliquée sur un de ses composants. Cette maintenance permet à ce composant de se comporter en tant que composant neuf, mais elle ne permet pas de dire que le système se comporte comme un système neuf. Pour le faire, tous les composants du système doivent être renouvelés, donc on se retrouve dans le cas d'une maintenance imparfaite vis à vis du système. L'évaluation de l'efficacité de cette maintenance sur le système est indispensable afin de prédire son comportement, pour cela, on suit les étapes suivantes :

1. Estimation des paramètres initiaux de fiabilité du système  $(\beta_0, \eta_0)$  :

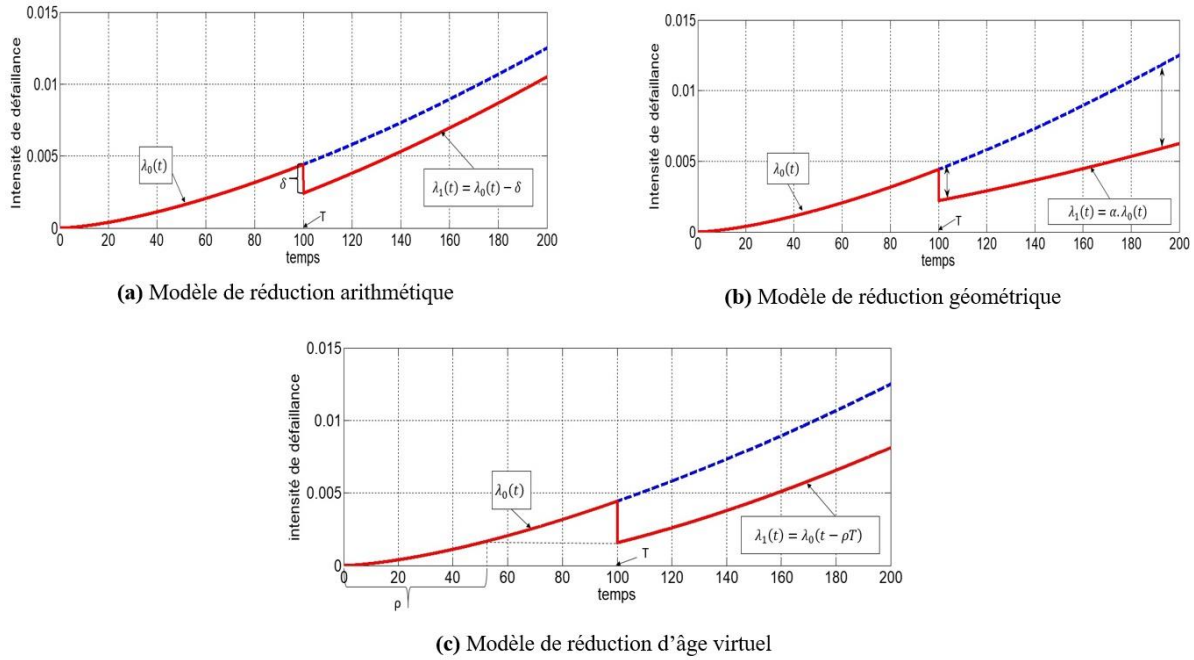
Cette étape consiste à estimer les paramètres initiaux de fiabilité du système, par la méthode des moindres carrés, et selon le modèle de Weibull à partir des paramètres de fiabilité de ses composants, et de sa configuration.

2. Estimation des paramètres de fiabilité du système après maintenance  $(\beta_1, \eta_1)$  :

Après avoir appliqué la maintenance sur le système, on suit les mêmes démarches que l'étape précédente pour déterminer les paramètres de fiabilité du système après maintenance.

3. Estimation des facteurs d'efficacité de maintenance selon le modèle de réduction arithmétique, réduction géométrique et réduction d'âge virtuel :

Depuis les fonctions d'intensité de défaillance  $\lambda_0(t)$  et  $\lambda_1(t)$  calculées avec  $\beta_0, \eta_0$  et  $\beta_1, \eta_1$  respectivement, on tire les facteurs d'efficacité de maintenance de chaque modèle représentés sur la **figure 3.1**.



**Figure 3.1 : Les modèles de réduction**

- **Réduction arithmétique figure 3.1 (a) :**

$$\lambda_1(t) = \lambda_0(t) - \delta \quad (3.1)$$

On calcule la quantité de réduction à l'instant T qui correspond au moment de l'action de maintenance :

$$\delta = \lambda_0(T) - \lambda_1(T) \quad (3.2)$$

Donc :

$$\delta = \left(\frac{\beta_0}{\eta_0}\right) \left(\frac{t}{\eta_0}\right)^{\beta_0-1} - \left(\frac{\beta_1}{\eta_1}\right) \left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta_1-1} \quad (3.3)$$

- **Réduction géométrique figure 3.2 (b) :**

$$\lambda_1(t) = \alpha \cdot \lambda_0(t) \quad (3.4)$$

D'où :

$$\int_T^{2T} \lambda_1(t) = \int_T^{2T} \alpha \cdot \lambda_0(t) \quad (3.5)$$

Implique que :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{2T}{\eta_1}\right)^{\beta_1} - \left(\frac{T}{\eta_1}\right)^{\beta_1}}{\left(\frac{2T}{\eta_0}\right)^{\beta_0} - \left(\frac{T}{\eta_0}\right)^{\beta_0}} \quad (3.6)$$

- **Réduction d'âge virtuel figure 3.1 (c) :**

$$\lambda_1(t) = \lambda_0(t - \rho T) \quad (3.7)$$

Donc :

$$\left(\frac{\beta_1}{\eta_1}\right) \cdot \left(\frac{T}{\eta_1}\right)^{(\beta_1-1)} = \frac{\beta_0}{\eta_0} \cdot \left(\frac{T-\rho T}{\eta_0}\right)^{\beta_0-1} \quad (3.8)$$

Ce qui implique :

$$\frac{\text{Ln}\left(\left(\frac{\beta_1}{\eta_1}\right) \cdot \left(\frac{T}{\eta_1}\right)^{\beta_1-1} \cdot \left(\frac{\eta_0}{\beta_0}\right)\right)}{(\beta_0-1)} + \text{Ln}(\eta_0) = \text{Ln}(T - \rho T) \quad (3.9)$$

Ce qui donne :

$$\rho = \frac{T - e^w}{T} \quad (3.10)$$

$$\text{Avec : } w = \frac{\text{Ln}\left(\left(\frac{\beta_1}{\eta_1}\right) \cdot \left(\frac{T}{\eta_1}\right)^{\beta_1-1} \cdot \frac{\eta_0}{\beta_0}\right)}{(\beta_0-1)} + \text{Ln}(\eta_0)$$

#### 4. Choix du modèle :

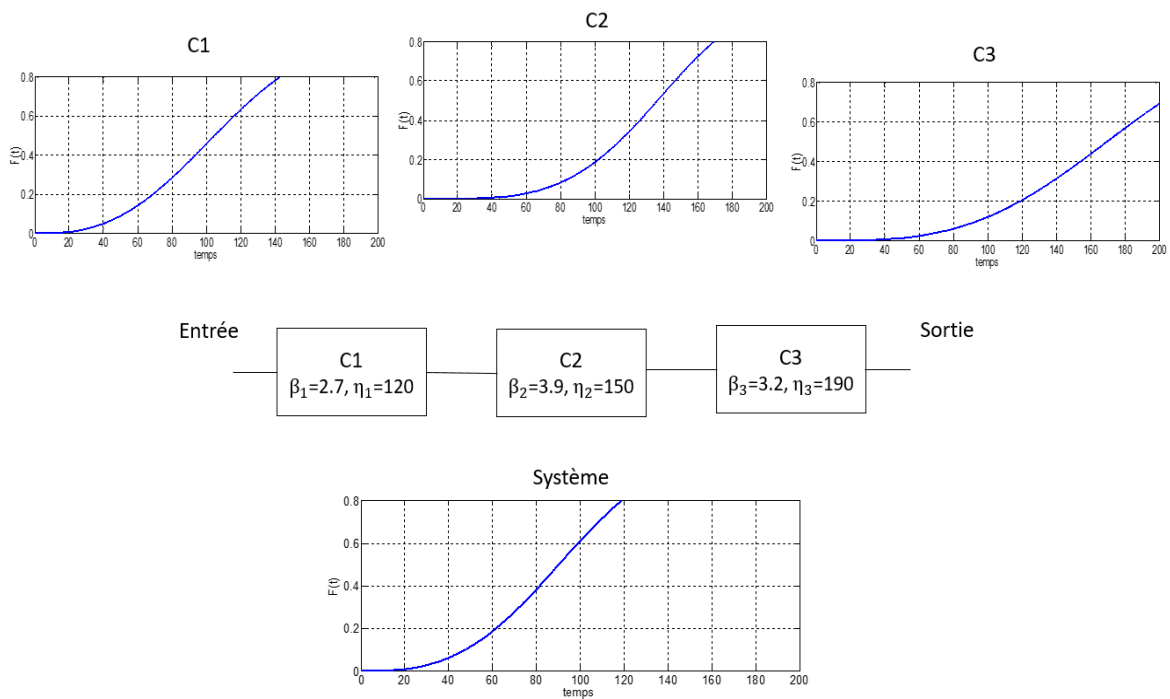
Enfin nous allons juger la convenabilité d'un modèle pour un système, cela en comparant les allures de chaque modèle avec celles d'intensité de défaillance du système après maintenance, et en validant le modèle ayant le coefficient de détermination ( $R^2$ ) le plus proche de 1.

### III.3 L'application

Dans cette partie nous allons supposer un système multi-composant constitué de trois composants différents (C1, C2 et C3) de fiabilité de type Weibull. Ensuite, évaluer l'efficacité de la maintenance selon trois configurations différentes (série, parallèle et mixte).

#### III.3.1 L'application sur un système série

Dans ce type de structure, le système sera dysfonctionnel si au moins un de ses composants est défaillant. Pour distinguer le modèle adéquat pour notre système de celui qui ne l'est pas, les fonctions de répartition des composants ainsi que celle du système global sont simulées sur MATLAB (Matrix Laboratory) et représentées dans la **figure 3.2** :



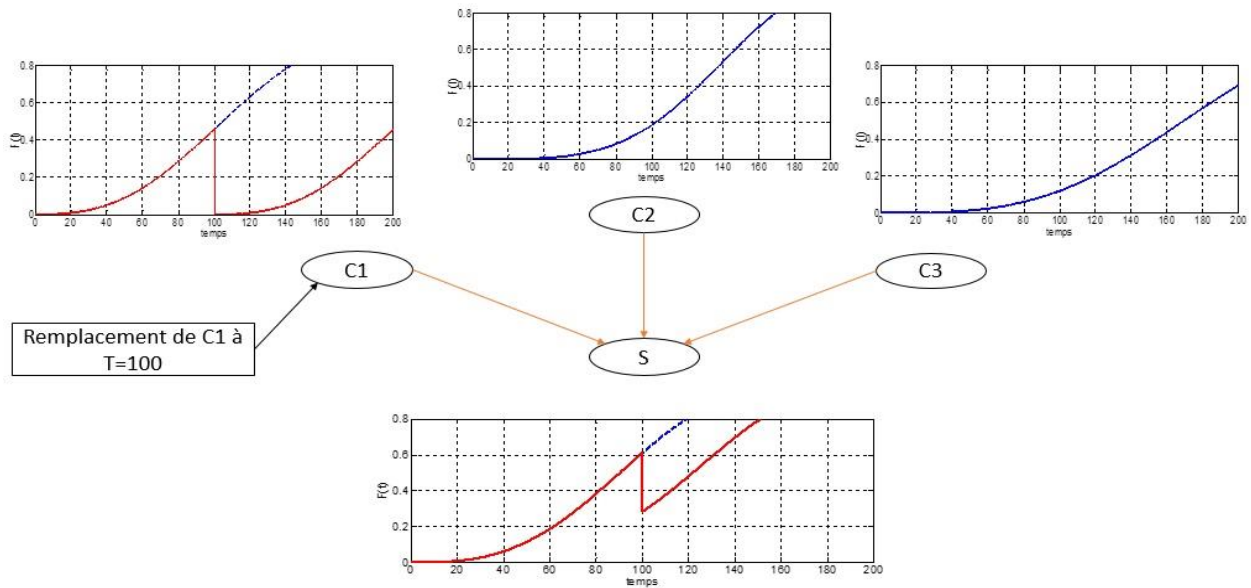
**Figure 3.2** : les courbes des fonctions de répartition des composants et du système série

Avec :

$$F_s(t) = 1 - \left( \exp \left[ - \left( \frac{t}{120} \right)^{2.7} \right] \right) \cdot \left( \exp \left[ - \left( \frac{t}{150} \right)^{3.9} \right] \right) \cdot \left( \exp \left[ - \left( \frac{t}{190} \right)^{3.2} \right] \right) \quad (3.11)$$



En remplaçant le composant le moins fiable (C1) à T=100h, on obtient les résultats qui sont présentés sur la **figure 3.3** :



**Figure 3.3** : les courbes des fonctions de répartition des composants et du système après la maintenance

Avec :

$$F_s(t) = 1 - \left( \exp \left[ - \left( \frac{t-100}{120} \right)^{2.7} \right] \right) \cdot \left( \exp \left[ - \left( \frac{t}{150} \right)^{3.9} \right] \right) \cdot \left( \exp \left[ - \left( \frac{t}{190} \right)^{3.2} \right] \right) \quad (3.12)$$

### III.3.1.1 L'interprétation des simulations

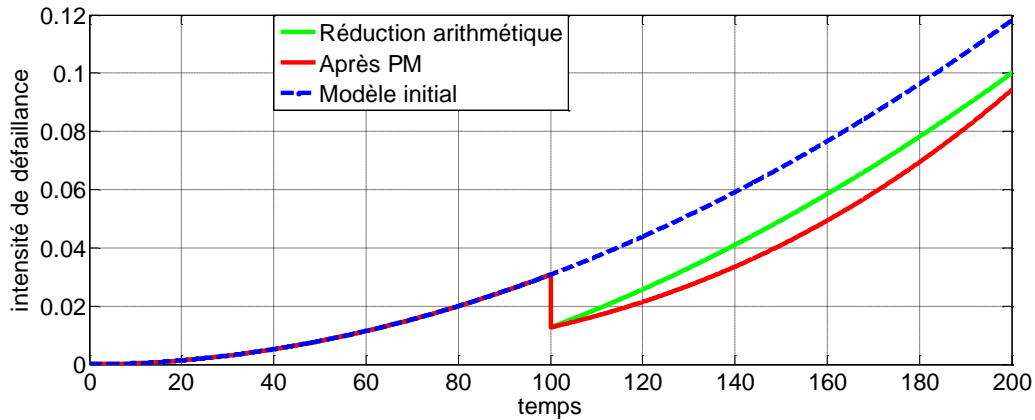
Une comparaison entre les figures obtenues à l'aide des résultats du tableau 6 va nous permettre de choisir le modèle adéquat pour notre système.

**Tableau 6** : les résultats du calcul des facteurs de réduction pour chaque modèle –série

Modèle	Réduction arithmétique	Réduction géométrique	Réduction d'âge virtuel
Facteurs	$\delta$	$\alpha$	$\rho$
Valeurs	0.018129	0.645343	0.36778
R <sup>2</sup>	0.9874	0.8576	0.9205

- *Modèle de réduction arithmétique*

La **figure 3.4** montre l'évolution dans le temps du taux de défaillance du système (avant et après la maintenance) comparée à celle d'un modèle de réduction arithmétique.



**Figure 3.4 :** la réduction arithmétique  $\lambda_1(t) = \lambda_0(t) - \delta$  et  $\delta = 0.018129$

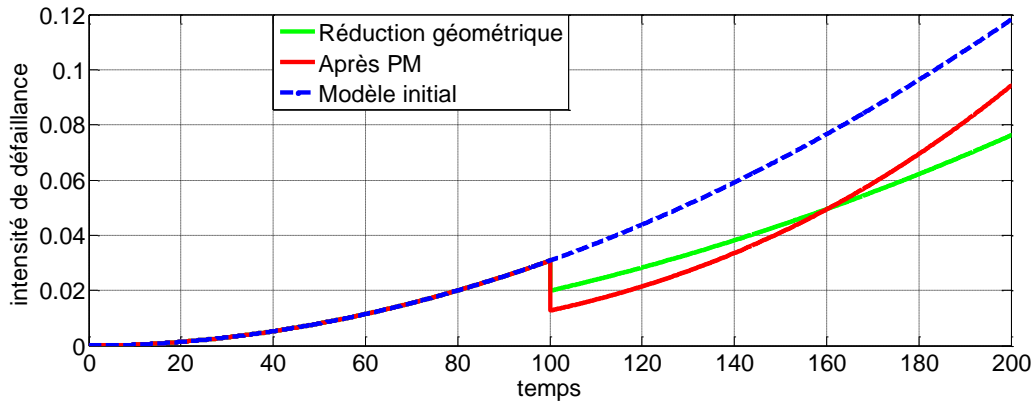
Après une maintenance, la courbe de l'intensité de défaillance du système (rouge), repart d'un point inférieur à celui juste avant l'intervention.

Les quantités de réduction d'intensité de défaillance sont égales. (La réduction d'intensité de défaillance du système après maintenance est égale à celle du modèle).

Après l'analyse de la **figure 3.4**, on remarque un rapprochement des valeurs des taux de défaillance des deux courbes (la courbe d'intensité de défaillance après maintenance (rouge) et du modèle de réduction arithmétique (verte)), le coefficient de détermination prouve cette approximation avec une valeur de :  $R^2=0.9874$ .

- *Modèle de réduction géométrique*

La **figure 3.5** montre l'évolution dans le temps du taux de défaillance du système (avant et après la maintenance) comparée à celle d'un modèle de réduction géométrique.



**Figure 3.5 :** la réduction géométrique  $\lambda_1(t) = \alpha \cdot \lambda_0(t)$  et  $\alpha = 0.645343$

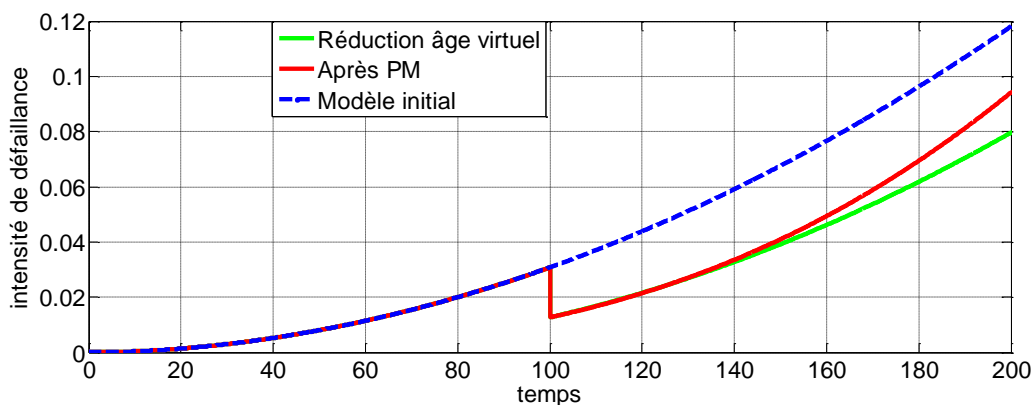
Après une maintenance, la courbe de l'intensité de défaillance du système (rouge), repart d'un point inférieur à celui juste avant.

Les quantités de réduction d'intensité de défaillance sont différentes. (La réduction d'intensité du système après maintenance est différente de celle du modèle)

Après l'analyse de la **figure 3.5**, on voit que la courbe d'intensité de défaillance après maintenance (rouge) et celle du modèle de réduction arithmétique (verte) se croisent approximativement à l'instant  $T=160h$ . Après cette intersection, l'écart entre les deux allures va s'étendre avec le temps pour mener à une imprécision plus importante. Le coefficient de détermination prouve cette inexactitude avec une valeur de :  $R^2=0.8576$ .

- **Modèle de réduction d'âge virtuel**

La **figure 3.6** montre l'évolution dans le temps du taux de défaillance du système (avant et après la maintenance) comparée à celle d'un modèle de réduction d'âge virtuel



**Figure 3.6 :** la réduction d'âge virtuel  $\lambda_1(t) = \lambda_0(t - \rho T)$

$$\rho = 0.36778$$

Après une maintenance, la courbe de l'intensité de défaillance du système (rouge), repart d'un point inférieur à celui juste avant l'intervention.

Les quantités de réduction d'intensité de défaillance sont égales. (La réduction d'intensité de défaillance du système après maintenance est égale à celle du modèle)

Après l'analyse de la **figure 3.6**, on remarque une superposition des deux courbes (la courbe d'intensité de défaillance après maintenance (rouge) et du modèle de réduction arithmétique (verte)) approximativement jusqu'à l'instant  $T=150h$ . Après l'instant  $T=150h$ , les deux allures se séparent progressivement, et cela va entraîner une imprécision avec le temps. Le coefficient de détermination prouve l'inexactitude de ce modèle avec une valeur de :  $R^2=0.9205$ .

#### **III.3.1.2 Le choix du modèle**

Après les analyses menées, nous avons constaté que le modèle le plus adéquat et précis à utiliser dans le système à structure en série est le modèle de réduction arithmétique d'intensité de défaillance, qui a le coefficient de détermination le plus proche de 1.

#### **III.3.2 L'application sur un système parallèle**

Dans ce type de structure, le système sera fonctionnel si au moins un de ses composants est fonctionnel. Pour mener une bonne comparaison, la fonction de répartition du système avant et après la maintenance ainsi que celles des modèles de réduction d'intensité de défaillance, sont toutes simulées sur MATLAB et représentées dans la **figure 3.7**. Les résultats trouvés pendant cette simulation sont classifiés dans le **tableau 7** :

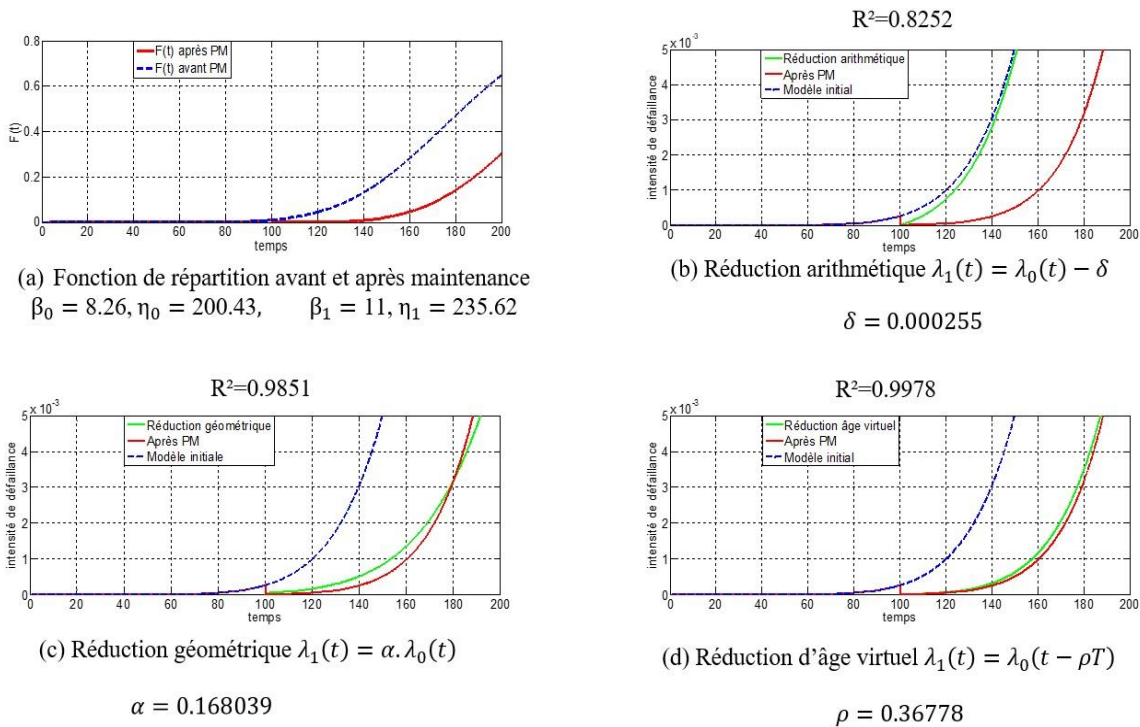
##### **III.3.2.1 L'interprétation des simulations**

Une comparaison entre les figures obtenues à l'aide des résultats du tableau 7 va nous permettre de choisir le modèle adéquat pour notre système.

**Tableau 7:** les résultats du calcul des facteurs de réduction pour chaque modèle –parallèle

Modèle	Réduction arithmétique	Réduction géométrique	Réduction d'âge virtuel
Facteurs	$\delta$	$\alpha$	$\rho$
Valeurs	0.000255	0.168039	0.37389
$R^2$	0.8252	0.9851	0.9978

La figure 3.7 montre l'évolution dans le temps des taux de défaillance du système comparée à celle des modèles de réduction



**Figure 3.7 :** les résultats de l'application sur un système parallèle

On remarque un écart énorme entre l'allure du modèle de réduction d'intensité de défaillance arithmétique (verte) et celle du système après maintenance (rouge). Le coefficient de détermination prouve cette inexactitude avec une valeur de :  $R^2 = 0.8252$

Dans le cas du modèle de réduction d'intensité de défaillance géométrique on remarque un rapprochement entre les deux courbes (la courbe du modèle de réduction d'intensité de défaillance géométrique (verte), et celle du système après maintenance

(rouge). Approximativement à l'instant  $T=180h$ , on remarque une intersection entre les deux courbes qui va entraîner une imprécision avec le temps (après  $T=180h$ ). Le coefficient de détermination prouve cette inexactitude avec une valeur de :  $R^2 = 0.9851$

On voit une similarité qui tend à être une superposition entre la courbe de réduction d'âge virtuel et celle du système après maintenance. Cette précision élevée est prouvée par le coefficient de détermination avec une valeur de :  $R^2=0.9978$

### **III.3.2.2 Le choix du modèle**

Après les analyses menées, nous avons constaté que le modèle le plus adéquat et précis à utiliser dans le système à structure en parallèle est le modèle de réduction d'âge virtuel, qui a le coefficient de détermination le plus proche de 1.

### **III.3.3 L'application sur un système mixte**

Ce type de structure regroupe les caractéristiques des deux structures précédentes (série et parallèle). Afin de bien distinguer le modèle convenable pour notre système de celui qui ne l'est pas, on a simulé sur MATLAB la fonction de répartition du système et celles des modèles de réduction d'intensité de défaillance qui sont représentées dans la **figure 3.8**.

Les résultats du calcul des facteurs de réduction de chaque modèle sont motionnés sur le **tableau 8** :

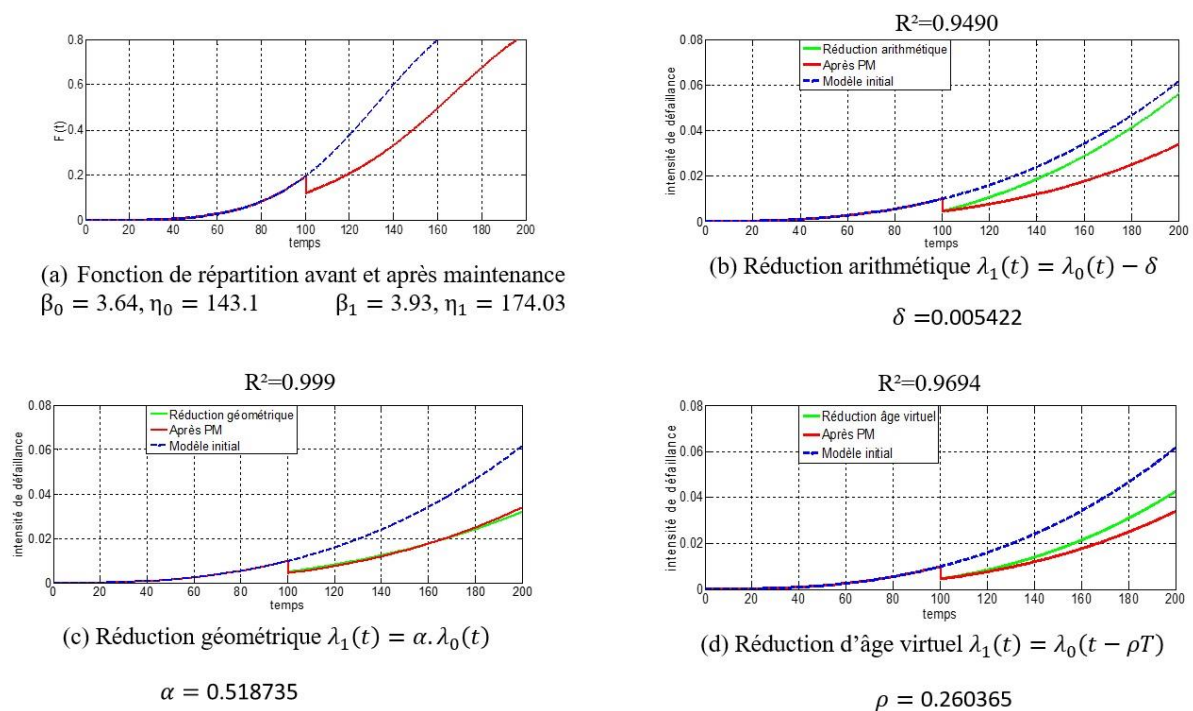
**Tableau 8:** les résultats du calcul des facteurs de réduction pour chaque modèle –hybride

Modèle	Réduction arithmétique	Réduction géométrique	Réduction d'âge virtuel
Facteurs	$\delta$	$\alpha$	$\rho$
Valeurs	0.005422	0.518735	0.260365
$R^2$	0.9490	0.999	0.9694

### III.3.3.1 L'interprétation des simulations

Une comparaison entre les figures obtenues à l'aide des résultats du **tableau 8** va nous permettre de choisir le modèle adéquat pour notre système.

La **figure 3.8** montre l'évolution dans le temps des taux de défaillance du système comparée à celle des modèles de réduction



**Figure 3.8** : les résultats de l'application sur un système mixte

On remarque un écart énorme entre l'allure du modèle de réduction d'intensité de défaillance arithmétique (verte) et celle du système après maintenance (rouge). Le coefficient de détermination prouve cette inexactitude avec une valeur de :  $R^2 = 0.9490$

On remarque un écart entre l'allure du modèle de réduction d'âge virtuel (verte) et celle du système après maintenance (rouge) moins important que celui du modèle précédant. Le coefficient de détermination prouve cette imprécision avec une valeur de :  $R^2 = 0.9694$

On voit clairement une superposition entre la courbe de réduction d'intensité de défaillance géométrique et celle du système après maintenance. Cette précision importante est prouvée par le coefficient de détermination avec une valeur de :  $R^2=0.999$

### **III.3.3.2 Le choix du modèle**

Après les analyses menées, nous avons constaté que le modèle le plus adéquat et précis à utiliser dans le système à structure mixte est le modèle de réduction d'intensité de défaillance géométrique, qui a le coefficient de détermination le plus proche de 1.

### **III.4 Conclusion**

Malgré la similarité des caractéristiques des composants, chaque système a une allure de répartition différente. Le système parallèle a une meilleure allure, c'est-à-dire, c'est le système le plus fiable parmi les deux autres systèmes.

L'application d'une maintenance parfaite sur le 1<sup>er</sup> composant induit une amélioration imparfaite sur le système en série et mixte, par contre sur le système en parallèle, nous nous sommes retrouvés avec une allure d'intensité de défaillance comparable à celle d'un modèle de maintenance parfaite.

La modélisation de maintenance diffère d'une configuration à une autre pour le même type de maintenance.

Le coefficient de détermination  $R^2$  est le facteur décisif pour juger la convenabilité d'un modèle pour un système. Plus sa valeur est proche de 1, plus la prédiction sera précise.

Les modèles qui ont un coefficient de détermination moyennement précis, peuvent être utilisés si le temps entre les maintenances n'est pas important au point où l'imprécision sera beaucoup élevée.



## Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire est de modéliser l'efficacité de maintenance sur des systèmes multi-composants, pour cela. Nous avons défini la maintenance et sa typologie. Nous avons vu la fiabilité, ses lois ainsi que son intérêt dans l'étude des comportements des systèmes. Nous avons aussi décrit quelques modèles d'efficacité de maintenance en citant leurs hypothèses.

Pour arriver à estimer les paramètres Weibull, il est nécessaire de chercher des méthodes de calcul adéquates. Nous avons présenté la méthode d'estimation par les moindres carrés et celle par le maximum de vraisemblance, nous avons vérifié les résultats de ces deux méthodes par le test de Kolmogorov-Smirnov. Ils ont été validés, ce qui nous a donné la liberté de choisir une d'entre elles.

Après avoir tout préparé, nous avons commencé l'étude de l'efficacité de maintenance sur un système multi-composant, pour cela, trois configurations de système sont proposées (série, parallèle et mixte), nous avons suivis les démarches nécessaires qui consistent à estimer les paramètres de fiabilité du système initiaux et ceux du système après avoir effectué une maintenance, ensuite, évaluer les facteurs d'efficacité de la maintenance et enfin le choix du modèle. Ce choix est basé sur une comparaison entre les courbes d'intensité de défaillance du système et celles des modèles d'efficacité de maintenance et cela en choisissant le modèle ayant le coefficient de détermination le plus adéquat dans chaque système.

Nous avons trouvé que pour le système configuré en série, le modèle de réduction arithmétique d'intensité de défaillance est le plus précis. Pour le système structuré en parallèle, le modèle de réduction d'âge virtuel est le plus adéquat. Pour le système ayant une configuration mixte, le modèle de réduction géométrique d'intensité de défaillance est le plus convenable.

Les modèles moyennement précis peuvent aussi être utilisés dans la modélisation d'efficacité de maintenance si seulement le temps entre les maintenances est réduit

## Bibliographie

- [1] AFNOR, FDX60-000, *maintenance industrielle , fonction maintenance*, 2002.
- [2] R.K.Molbey, AN Introduction to Predictive Maintenance, Yan Nostrand Reinhold, 1990.
- [3] R.LAGGOUNE, Cours de fiabilité des systèmes, Université A.Mira de Bejaïa, 2018/2019.
- [4] V. Canh Hai, strategies de regroupement pour la maintenance des systemes à composants multiples avec structure complexe, Thèse doctorat, 2015.
- [5] E.AIT MOKHTAR, Cours modélisation de l'efficacité de la maintenance, Université A.Mira de Bejaïa, 2019/2020.
- [6] J.-L. Chabert, «Gauss et la méthode des moindres carrés,» chez *Revue d'histoire des sciences, tome 42*, 1989, pp. 5-26.
- [7] I. Gertsbakh, Reliability Theory: With Applications to Preventive Maintenance, 2000.
- [8] M. Rausand et A. Høyland, System Reliability Theory : Models, Statistical Methods and Applications, Second Edition, 2003.
- [9] L. Perreault et B. Bobée, «Loi weibull à deux paramètres , Propriétés mathématiques et statistiques, Estimation des paramètres et des quantiles  $X_r$  de periode de retour T,» Université du Québec, mars 1992.
- [10] F.Diener et M. Diener, Cours de Mathématiques Appliquées à la Biologie (MAB) en Licence SV1, Université de Nice, 2007/2008.
- [11] D. URBANI, Méthodes statistiques de sélection d'architectures neuronales : application à la conception de modèles de processus dynamiques, Thèse Doctorat, Université de Pierre et Marie Curie, 16 novembre 1995.
- [12] W.P.L.Fernando et D.U.J.Sonnadara, Modelling wind speed distributions in selected weather stations, Department of physics, University of Colombo, Sri Lanka, 2007.
- [13] P.Baily et C.Carriere, «Statistiques Descriptives : Theorie et Applications,» chez *Libres cours économie*, 2015, pp. 165-167.
- [14] U. Genshel et W. Q. Meeker, «A Comparison of Maximum Likelihood and Median-Rank Regression for Weibull Estimation,» chez *Quality Engineering* , 2010, pp. 236-255.