

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/MIRA de Bejaia  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques  
Laboratoire de Mathématiques Appliquées

## MÉMOIRE

Présenté par :

Amrane Soufiane  
Slamani Abdelhafid

Pour l'obtention du diplôme de

## MASTER

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

## Thème Systèmes dynamiques discrets

Soutenu le 23/11/ 2020, devant le jury composé de :

Président	A.MOUSSAOUI	Professeur	Univ. A.Mira de Bejaia
Rapporteur	H.GHAROUT	MCB	Univ. A.Mira de Bejaia
Examineur	Y.YAHIAOUI	MCB	Univ. A.Mira de Bejaia

Année universitaire : 2019-2020.

# Table des matières

Table des matières	1
Table des figures	2
Principales notations utilisées	5
Introduction	6
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques Discrets</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction	9
1.2 Singularités	10
1.2.1 Points fixes et cycles d'ordre $k$ de la transformation $T$	10
1.2.2 Natures des singularités	10
1.3 Courbes invariantes	13
1.3.1 Variété instable	14
1.3.2 Variété stable	14
1.4 Attracteurs, attracteurs chaotiques et bassin d'attraction	15
1.4.1 Définitions	15
1.4.2 Attracteurs réguliers	16
1.4.3 Attracteurs chaotiques	16
1.4.4 Bassin d'attraction	17
1.5 Bifurcations	17
1.5.1 Bifurcation noeud-col (Fold)	17
1.5.2 Bifurcation doublement de période (Flip)	18
1.5.3 Bifurcation de Neïmark-Sacker	18
1.5.4 Détermination des courbes de bifurcation dans un plan des paramètres	19
1.5.5 Points de co-dimension deux	20

<b>2 Exemples de récurrences de dimension 2</b>	<b>22</b>
2.1 Attracteur de Hénon . . . . .	22
2.1.1 Existence de points fixes . . . . .	23
2.1.2 Stabilité des points fixes . . . . .	23
2.1.3 Etude du plan des paramètres . . . . .	24
2.1.4 Bassin de l'attracteur de Hénon obtenu pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ . . .	26
2.2 Attracteur de Lozi . . . . .	26
2.2.1 Propriétés de l'application de Lozi . . . . .	26
2.2.2 Stabilité : . . . . .	27
<b>3 Cas d'une transformation ponctuelle non linéaire et non inversible de dimension trois</b>	<b>32</b>
3.1 Etude des premiers cycles et bifurcations de $T$ . . . . .	32
3.1.1 Cycles et bifurcations d'ordre un de $T$ . . . . .	32
3.1.2 Cycle d'ordre deux de $T$ . . . . .	36
3.2 Plan des paramètres . . . . .	40
3.2.1 Simulation du plan des paramètres . . . . .	40
3.2.2 Cascades de bifurcations . . . . .	42
3.3 Etude de la dynamique de l'endomorphisme $T$ en perturbant l'un des paramètres $a$ et $b$ . . . . .	44
3.3.1 La dynamique de $T$ en fixant le paramètre $b$ et $a$ variant . . . . .	45
3.3.2 La dynamique de $T$ en fixant le paramètre $a$ et $b$ variant . . . . .	47
<b>Conclusion Générale</b>	<b>52</b>
3.4 Exposants de Lyapounov . . . . .	53
3.5 Dimension de Lyapounov $D_L$ . . . . .	53
<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>

# Table des figures

1.1	Plans de phases pour des valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ayant une partie imaginaire non nulle. . . . .	12
1.2	Portraits de phases plans et linéaires, lorsque les valeurs propres sont réelles ( $\xi_1$ et $\xi_2$ vecteurs propres associés à $\lambda_1$ et $\lambda_2$ , respectivement, lorsqu'ils existent). . . . .	12
1.3	Classification des points singuliers dans la dimension trois . . . . .	13
2.1	Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres $(a, b)$ pour la récurrence de Hénon. . . . .	24
2.2	Diagramme de bifurcation de Hénon. . . . .	25
2.3	Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ . . . . .	26
2.4	Bassin de l'attracteur de Hénon ( $a = 1.4$ et $b = 0.3$ ). . . . .	27
2.5	Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Hénon. . . . .	28
2.6	Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ . . . . .	29
2.7	Diagramme de bifurcation de Lozi . . . . .	30
2.8	Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi . . . . .	31
3.1	Bifurcations et stabilité des cycles d'ordre un de $T$ , où la zone rouge est la partie stable et la zone jaune est la partie instable de $T$ . Dans la zone de couleur blanche tous les points fixes sont complexes (pas de points fixe réel [13].) . . . . .	37
3.2	Stabilité des cycles d'ordre un et d'ordre deux [13]. . . . .	39
3.3	La carte des singularités de $T$ dans le plan de paramètres et leurs stabilités par rapport aux courbes de bifurcations (bifurcations Fold et Flip d'ordre un et deux et bifurcation de Neïmark-Sacker)[13]. . . . .	41
3.4	Domaines de stabilité des cycles attractifs dans le plan des paramètres $(a, b)$ [13]. . . . .	42
3.5	Cascade de bifurcation pour $b = -0.75$ [13, 15] . . . . .	43

---

3.6	Cascades de bifurcation pour $a = -0.1$ [13]. . . . .	44
3.7	Trajectoire des itérés de $T$ pour $a = -0.1$ et $b = -0.71$ [13]. . . . .	44
3.8	L'évolution dynamique de $T$ pour $b = -0.75$ et $a$ variant [13]. . . . .	46
3.9	Bassin de l'attracteur chaotique obtenu pour $a = 1.14$ et $b = -0.75$ [13, 15].	47
3.10	Bassin de l'attracteur chaotique obtenu pour $a = -0.6$ et $b = -0.75$ [13, 15].	47
3.11	Coexistence de deux attracteurs. (a) Coexistence d'une double orbite fermée avec une orbite invariante composée de six morceaux ( $a = -0.1$ et $b = -1.25$ ). (b) Coexistence de deux attracteurs nés à partir de deux courbes invariantes ( $a = -0.1$ et $b = -1.33$ ) [13, 15]. . . . .	48
3.12	Evolution de deux courbes invariantes vers le même attracteur chaotique pour $a = -0.1$ et $b$ variable [13]. . . . .	48
3.13	Les attracteurs chaotiques (en vert) et leurs bassins d'attraction (en cyan) [13]. . . . .	50

# Principales notations utilisées

$J_1^{(a,b)}(x, y, z)$  : la jacobienne de  $T_{(a,b)}$  au point  $(x, y, z)$ .

$|J_1^{(a,b)}(x, y, z)|$  : déterminant de la jacobienne  $J_1^{(a,b)}(x, y, z)$ .

$P^{(a,b)}$  : le polynôme caractéristique associé à la jacobienne de  $T_{(a,b)}$ .

$S_i$  : le  $i$ -ème multiplicateur (la  $i$ -ème valeur propre) de  $J_1^{(a,b)}$ .

$Cft1$  : col foyer type 1.

$Cft2$  : col foyer type 2.

$NFI$  : noeud foyer instable.

$NFS$  : noeud foyer stable.

$l_i$  : exposant de Lyapounov.

$D_L$  : dimension de Lyapounov.

$\Lambda_{(k)_o}^j$  : Bifurcation noeud-col (Fold), où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par  $T$ .

$\Lambda_k^j$  : bifurcation doublement de période (Flip).

$\Gamma_k^j$  : bifurcation de Neïmark-Sacker.

$cod_j^k$  : un point de codimension deux.

# Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets. C'est à dire, des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières, par le biais de l'application du premier retour. Ainsi, depuis plus de cent ans, les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les continus et les discrets.

Dans ce travail on s'intéressera à quelques généralités sur les systèmes dynamiques discrets, suivi d'illustrations numériques et graphiques sur quelques exemples de transformations ponctuelles discrètes. De telles transformations se rencontrent dans différents domaines de la science, par exemple en économie, en physique et en ingénierie. On rencontre en économie le duopole de Cournot (1838) [7] qui décrit une figure du marché très intéressante, tant en micro-économie qu'en économie industrielle et internationale. Les systèmes optoélectroniques, c'est l'un des exemples rencontrés en physique, voir les travaux de L.Larger et D.Fournier-Prunaret (2005) [23], L.Larger et Jhon M. Dudley (2010) [22]. Elles se rencontrent aussi dans le cas de la sécurité des transmissions, comme exemple, les travaux de N.Giquel (1995) [16], J.Xu, D.Fournier-Prunaret, A.K.Taha et P.Chargé (2010) [37]).

Peu de travaux ont été fait dans la dimension trois, en l'occurrence G.Wen et al (2003) [35], Jie Xu (2008) [36], A.Djerrai et I.Djellit (2011) [9], A.Naimzada et al. (2015) [29], ainsi que E.Shamsara et al. (2017) [33] et H.Gharout et al. ([13, 15, 14]. La plupart des auteurs se sont intéressés aux systèmes dynamiques dans le cas de la dimension une et deux, M.Hénon (1976) [18], C.Mira (1996, 2004, 2009) [26, 27, 12] et H.Kumeno et al (2013) [21]; ainsi que d'autres dans différentes applications des systèmes dynamiques,

A.Boukabou (2006) [2], G.Kaddoum (2009) [19], Y.Yahiaoui et N.Akroune (2018) [38].

Le présent travail est réparti en trois chapitres, dont voici une brève présentation :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction d'un certain nombre de notions de base des systèmes dynamiques discrets. Après la présentation de la nature de ses singularités, nous avons donné les définitions des courbes invariantes, bassins d'attraction et quelque structures de bifurcation classiques obtenues en utilisant des méthodes de calcul introduites par J.P.Carcassès [4, 5].

Après avoir donné dans le chapitre un, certaines définitions et propriétés des systèmes dynamiques discrets, nécessaires à la compréhension de ce travail, nous présentons dans le chapitre deux deux exemples de récurrence d'ordre deux ; en commençant par la récurrence de Hénon qu'a pour but de réaliser un système plus simple que celui de Lorenz. Une simulation du plan des paramètres nous donnera un aperçu sur l'existence des cycles attractifs et leurs zones de stabilité. Un diagramme de bifurcation de la récurrence de Hénon, pour  $b = 0.3$  et  $a$  variable, nous permettra d'observer le passage d'un point fixe vers un cycle d'ordre 2, jusqu'à l'apparition d'un comportement chaotique. La seconde récurrence s'agit de celle de Lozi ; une récurrence linéaire, qui possède presque les mêmes propriétés de la récurrence de Hénon.

Le dernier chapitre décrit un exemple d'une transformations ponctuelles non linéaire et non inversible, dite endomorphisme, étudiée par H.Gharout [13, 15, 14], où nous avons abordé les points fixes et leurs stabilité par rapport à deux paramètres réels  $a$  et  $b$ , ainsi que les bifurcations Fold, Flip et Neïmark-Sacker pour le cycle d'ordre un et le cycle d'ordre deux. Une simulation numérique du plan des paramètres nous a permis d'observer les zones de stabilité des cycles d'ordre un jusqu'à l'ordre quatorze et la présence du chaos, ainsi que les cascades de bifurcation de type Feigenbom avec perturbation de l'un des paramètres  $a$  et  $b$ , où nous avons observé deux dynamiques chaotique de  $T$  (une Feigenbom en deux parties) pour des variation du paramètre  $a$  à gauche et à droite de 0 en fixant le paramètre  $b$ . Illustration dynamiques et chaotiques de l'évolution de certains attracteurs dans l'espace de phase en fixant l'un des paramètres  $a$  et  $b$  et en variant l'autre paramètre de l'endomorphisme  $T$ , ainsi que le passage des courbes invariantes ou d'attracteurs vers des attracteurs chaotiques.

On termine par donner une conclusion générale

L'extension des travaux réalisés dans les dimensions une et deux à l'étude des systèmes dynamiques de dimension supérieure, en général, n'est pas facile. En effet, certains



problèmes pratiques non triviaux surgissent, liés à la visualisation de différentes formes des objets dans les espaces de phases de dimension  $n \geq 3$  et la détection des bifurcations de contact.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques Discrets

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons quelques généralités sur les systèmes dynamiques Discrets. Nous présentons d'abord les singularités de ces transformations. Après la présentation de la nature de ces singularités, nous donnons les définitions des courbes invariantes, bassins d'attraction et quelque structures de bifurcation classiques.

Nous nous intéressons aux transformations ponctuelles (récurrences) définies par :

$$X_{n+1} = T(X_n) = F(X_n, \Lambda), \quad (1.1)$$

où  $X_n \in \mathbb{R}^p$ ,  $p$  entier non nul et  $\Lambda$  étant un vecteur de paramètres réels dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . L'espace  $\mathbb{R}^p$  est appelé espace d'état.

Une solution de (1.1) est formée par une suite de points  $X_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  où  $X_0$  est appelé condition initiale ; les points  $X_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  forment une trajectoire discrète de phase ou orbite.

Si  $F$  est continûment différentiable et d'inverse unique sur son domaine de définition, alors (1.1) est appelée difféomorphisme. Si  $F$  ne possède pas d'inverse unique, (1.1) est appelé un endomorphisme.

L'itéré  $X_{n+r}$ , avec  $r \geq 1$ , est appelé conséquent de rang  $r$  de  $X_n$ , c'est-à-dire :  $X_{n+r} = T^r(X_n)$ ,  $X_n$  est un antécédent de rang  $r$  de  $X_{n+r}$ , noté  $X_n = T^{-r}(X_{n+r})$ .

Lorsque  $T$  est un endomorphisme, un même point peut avoir plusieurs antécédents de rang un ou aucun.

## 1.2 Singularités

Nous présentons dans cette section certaines singularités, ainsi que, leurs natures.

### 1.2.1 Points fixes et cycles d'ordre $k$ de la transformation $T$

Les transformations ponctuelles peuvent posséder différents types de singularités :

**Définition 1.1.**  $X^*$  est dit point fixe d'une transformation ponctuelle  $T$ , si :

$$X^* = T(X^*). \quad (1.2)$$

**Définition 1.2.** Un cycle d'ordre  $k$  ( $k$  entier non nul) est un ensemble de  $k$  points,  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ , vérifiant :

$$\begin{cases} X_{i+1} = T(X_i), & i = 1, \dots, k-1; \\ X_1 = T(X_k); \\ X_i = T^k(X_i), & i = 1, 2, \dots, k; \\ X_i \neq T^h(X_i), & i = 1, 2, \dots, k, 1 \leq h < k. \end{cases}$$

Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses  $k$  points  $X_i$  par applications successives de  $T$ .

### 1.2.2 Natures des singularités

Pour caractériser la nature de ces singularités (points fixes et cycles), on introduit la notion du multiplicateur :

a) Lorsque la dimension de la récurrence est  $p = 1$ , le multiplicateur d'un point fixe  $X^*$  est  $S = T'(X^*)$  où  $T' = \frac{dT}{dX}$  et le multiplicateur d'un cycle d'ordre  $k$ , formé des points  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$  est  $S = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*)$ .

Un point fixe ou un cycle est dit stable si  $|S| < 1$  et instable si  $|S| > 1$ .

b) Lorsque  $p > 1$ , les multiplicateurs d'un point fixe d'un cycle d'ordre  $k$ ,  $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*\}$ , sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $T(X^*)$  ou de  $T^k(X_i^*), i = 1, \dots, k$ .

Lorsque  $p = 2$ , on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs  $S_1$  et  $S_2$  qui sont les valeurs propres de la linéarisation de  $T^k$ ,  $k$  entier non nul, en ces singularités.

**Définition 1.3.** Dans le cas de la dimension deux, on distingue les singularités suivantes [17, 36] :

1. **Col** :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels,  $|S_1| < 1$  et  $|S_2| > 1$ . Un col est point instable :
  - de type 1 si  $S_1 > 0$  et  $S_2 > 0$ ;

- de type 2 si  $S_1 > 0$  et  $S_2 < 0$  (ou  $S_1 < 0$  et  $S_2 > 0$ );
  - de type 3 si  $S_1 < 0$  et  $S_2 < 0$ .
2. **Noeud** :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels.
    - stable si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$ ;
    - instable si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$ .
  3. **Foyer** :  $S_1$  et  $S_2$  sont complexes conjugués.
    - stable si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$ ;
    - instable si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$ .

En dimension deux, les principaux cas sont illustrés sur les figures (1.1, 1.2). Où,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres (multiplicateurs) de  $T$  et  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont les vecteurs propres réels de  $T$  associés quand ils existent. On appelle ici plan de phases l'espace  $\mathbb{R}^2$  correspondant à  $x$ .

Lorsque  $p = 3$ , on associe à un point fixe ou à un cycle d'ordre  $k$ , trois multiplicateurs  $S_1, S_2$  et  $S_3$ , qui sont les valeurs propres de la linéarisation de  $T^k$ ,  $k$  entier non nul.

**Définition 1.4.** [36] Dans la dimension 3, les singularités sont telles que :

1. **Col** :  $S_1, S_2$  et  $S_3$  sont réels.
  - de type 1 si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| > 1$ ;
  - de type 2 si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| < 1$ .
2. **Col-foyer** :  $S_1$  et  $S_2$  sont complexes conjugués et  $S_3$  est réel.
  - de type 1 si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| > 1$ ;
  - de type 2 si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| < 1$ .
3. **Noeud** :  $S_1, S_2$  et  $S_3$  sont réels.
  - stable si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;
  - instable si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ .
4. **Noeud-foyer** :  $S_1$  et  $S_2$  sont complexes conjugués et  $S_3$  est réel.
  - stable si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;
  - instable si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Une illustration de certaines singularités, dans le cas tridimensionnel, est donnée dans la figure (1.3). On constate, si  $T$  a deux valeurs propres conjuguées à parties réelles négatives et une valeur propre réelle négative, on a convergence suivant une direction et enroulement avec convergence (typique d'un foyer stable) suivant deux autres directions.

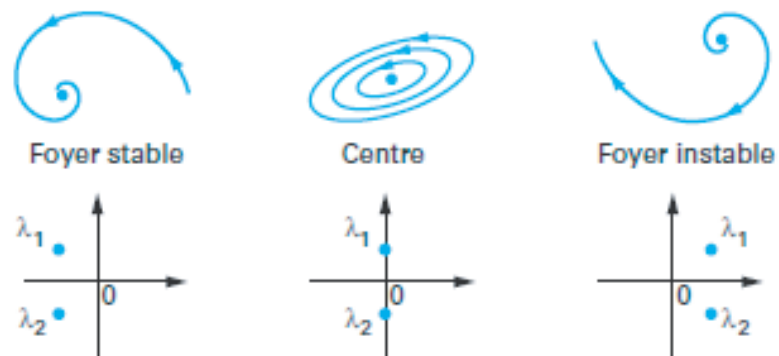


FIGURE 1.1 – Plans de phases pour des valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ayant une partie imaginaire non nulle.

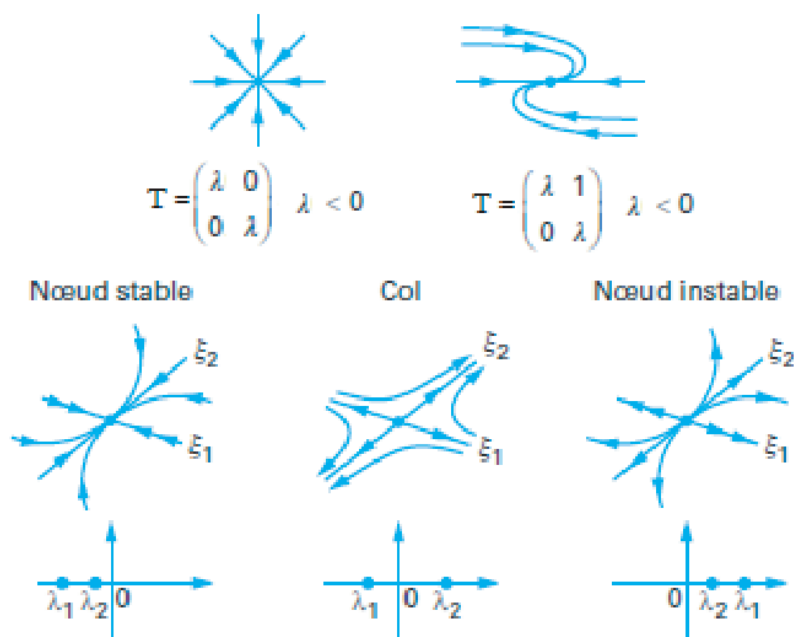


FIGURE 1.2 – Portraits de phases plans et linéaires, lorsque les valeurs propres sont réelles ( $\xi_1$  et  $\xi_2$  vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , respectivement, lorsqu'ils existent).

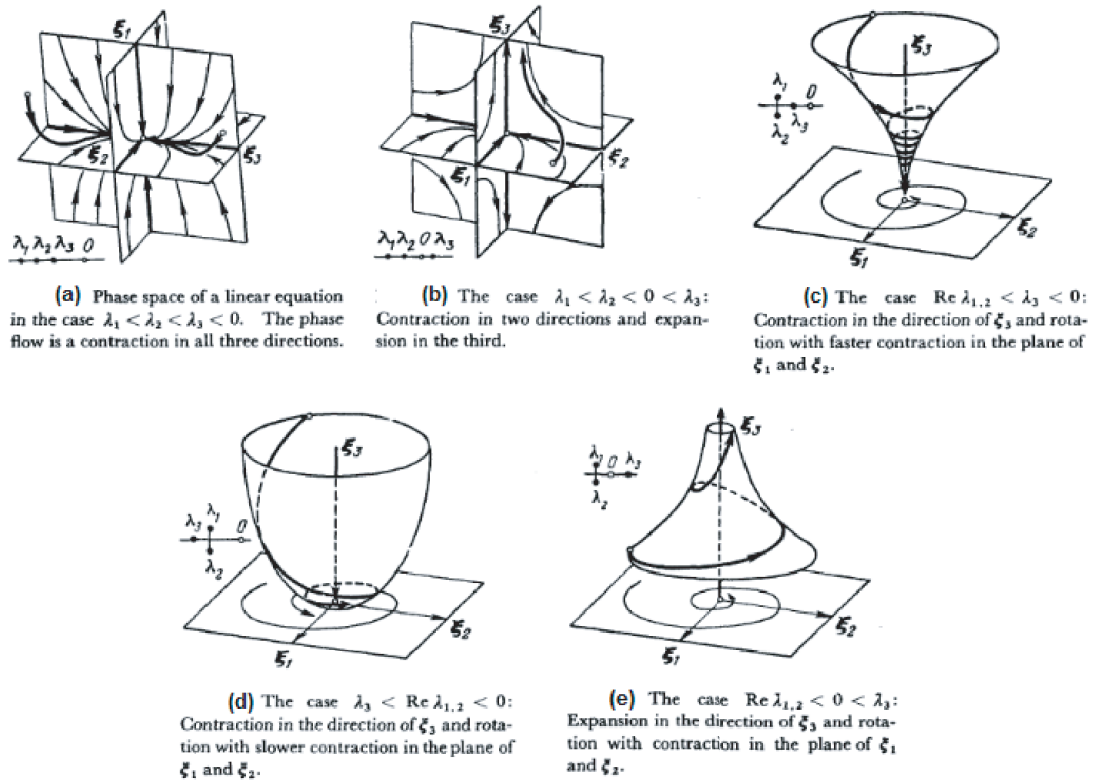


FIGURE 1.3 – Classification des points singuliers dans la dimension trois

### 1.3 Courbes invariantes

Une récurrence  $T$  peut admettre d'autres singularités que les points fixes ou les cycles d'ordre  $k$ , les courbes invariantes.

**Définition 1.5.** [36] une courbe invariante est représentée par l'équation :  $Q(X) = C$ , où  $C$  étant une constante réelle, est invariante par la transformation  $T$  définie par (1.1), si  $Q$  satisfait l'équation fonctionnelle :

$$Q[F(X)] = Q(X), \tag{1.3}$$

c'est-à-dire,

$$Q(X_{n+1}) = Q(X_n). \tag{1.4}$$

En général, un ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^p$  est invariant par  $T$ , si et seulement si :

$$T(A) = A. \tag{1.5}$$

Dans le cas d'un point fixe (ou d'un cycle d'ordre  $k$ ) de type col, on note  $W^S$  les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module inférieur à 1 et  $W^U$  les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module supérieur à 1.

### 1.3.1 Variété instable

Soit  $T$  une récurrence définie dans  $\mathbb{R}^n$  et  $X^*$  un point répulsif (instable) de  $T$  et  $U$  un voisinage de  $X^*$ .

#### Définition 1.6. Variété instable locale [31]

On appelle  $W_{loc}^u(X^*)$  ensemble instable local ou variété instable locale (c-à-dire dans  $U$ ) de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $U$  ayant une séquence d'antécédents successifs dans  $U$ , qui converge vers  $X^*$ .

$$W_{loc}^u(X^*) = \{X \in U : X_{-p} \in T^{-p}(X) \longrightarrow X^* \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, X_{-p} \in U\}. \quad (1.6)$$

#### Définition 1.7. Variété instable globale [31]

On appelle  $W^u(X^*)$  ensemble instable global de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers  $X^*$ .

$$W^u(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^n : X_{-p} \in T^{-p}(X) \longrightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^u(X^*)). \quad (1.7)$$

**Propriété 1.1.** *Les propriétés d'ensemble instable global :*

1.  $W^u(X^*)$  est invariant par  $T : T(W^u(X^*)) = W^u(X^*)$ .
2. Si  $T$  est un endomorphisme, en général,  $W^u(X^*)$  n'est pas invariant par  $T^{-1}$  et on a :  $T^{-1}(W^u(X^*)) \supseteq W^u(X^*)$ .
3. L'invariance de  $W^u(X^*)$  par  $T^{-1}$  a lieu lorsque  $T$  est inversible.

### 1.3.2 Variété stable

Soit  $T$  une récurrence définie dans  $\mathbb{R}^n$  et  $X^* \in U$ , un point fixe de  $T$ , attractif ou répulsif.

#### Définition 1.8. Variété stable locale [31]

On appelle  $W_{loc}^s(X^*)$  ensemble stable local ou variété stable locale de  $X^*$  dans  $U$ , l'ensemble des points de  $U$  dont la séquence d'images successives appartient à  $U$  et converge vers  $X^*$ .

$$W_{loc}^s(X^*) = \{X \in U : X_p = T^p(X) \longrightarrow X^* \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, X_p \in U\}. \quad (1.8)$$

**Définition 1.9. Variété stable globale** [31]

On appelle  $W^s(X^*)$  ensemble stable global de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$ , dont la séquence d'images successives converge vers  $X^*$ .

$$W^s(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^n : X_p = T^p(X) \longrightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(X^*)). \quad (1.9)$$

Si  $X^*$  est un point fixe attractif, l'ensemble stable globale est son bassin d'attraction.

**Propriété 1.2.** *Nous donnons certaines propriétés d'ensemble stable global :*

1.  $W^s(X^*)$  est invariant par  $T^{-1} : T^{-1}(W^s(X^*)) = W^s(X^*)$ .
2. Si  $T$  est un endomorphisme, en général,  $W^s(X^*)$  n'est pas invariant par  $T$  et on a :  $T(W^s(X^*)) \subseteq W^s(X^*)$ .
3. L'invariance de  $W^s(X^*)$  par rapport à  $T$  a lieu lorsque  $T$  est inversible.
4. Dans le cas d'un point fixe  $X^*$  de type noeud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de  $X^*$ , lorsque  $T$  est inversible se réduit à  $X^*$  lui même. Lorsque  $T$  est non inversible, l'ensemble stable global de  $X^*$  est constitué de tous les antécédents de tout rang de  $X^*$ . Ceci s'écrit :

$$W^s(X^*) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(X^*) \text{ et } \forall x \in W^s(X^*), \exists m \in \mathbb{N} : T^m(x) = X^*. \quad (1.10)$$

5. Les définitions des ensembles stable et instable d'un cycle d'ordre  $k$ , se déduisent des définitions précédentes en considérant les points du cycle comme des points fixes de  $T^k$ .

## 1.4 Attracteurs, attracteurs chaotiques et bassin d'attraction

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités plus générales que les points fixes et les cycles ; sont les attracteurs. Plusieurs définitions ont été proposées pour ce type de singularités [17, 32]. Dans ce mémoire, on se contentera de la définition donnée par I.Gumowski et C.Mira [17].

### 1.4.1 Définitions

Nous donnons ici les définitions d'un ensemble attractant et d'un attracteur de la récurrence  $T$ .



**Définition 1.10.** [17] Un ensemble fermé invariant  $A$  est attractant s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$ , tel que  $T(U) \subset U$  et pour tout  $x \in U : T^n(x)$  tends vers  $A$ , quand  $n$  tends vers  $\infty$ .

**Définition 1.11.** [17] Un attracteur est un ensemble attractant topologiquement transitif, si et seulement si quels que soient les ouverts  $U, V \subset A$ , il existe un entier positif  $k$ , tel que  $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

### 1.4.2 Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et on distingue trois types d'attracteurs réguliers [39] :

1. **Le point fixe** : C'est le plus simple attracteur, car le système évolue vers un état de repos (point).
2. **Le cycle limite périodique** : Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique et le système présente des oscillations permanentes.
3. **Le cycle limite pseudo-périodique** : C'est presque un cas particulier du précédent. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension deux (par exemple un tore).

### 1.4.3 Attracteurs chaotiques

Il existe des systèmes dynamiques, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ (points initiaux) dont la différence est très petite pour être observable, se séparent après un certain temps et leur distance croît de façon exponentielle. On appelle ce phénomène "sensibilité aux conditions initiales". Cette propriété du système est caractérisée par des coefficients, appelés exposants de Lyapounov. Un exposant de Lyapounov calcule la distance entre deux points de la trajectoire de deux itérés très proches. Il indique le taux moyen de divergence par iteration. On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.), si au moins un des exposants de Lyapounov est strictement positif [8, 11].

**Définition 1.12.** Un attracteur est dit chaotique, s'il a la propriété de sensibilité aux conditions initiales pour presque tout point le constituant selon Devaney[8].

Il n'existe pas de définition précise du chaos, ce phénomène est très irrégulier sur une période ou dont la période est trop grande pour être mise en évidence et il englobe divers comportements non périodiques. Un tel comportement est caractérisé par :

1. L'existence de cycles attractifs d'ordre infini.
2. La coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
3. L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

On distingue deux types du chaos

1. **Le chaos stable ou attracteur étrange** : Le chaos est dit stable, lorsque le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir et la caractéristique de cet attracteur est sa dimension de Lyapounov qui est fractale (non entière)[11].
2. **Le chaos instable ou répulseur étrange** : Le chaos est dit instable, lorsque il y a existence d'un transitoire étrange dû à la présence d'une infinité de solutions périodiques instables ; on parle alors de répulseur chaotique, un tel ensemble peut être associé à l'existence d'un attracteur à l'infini (divergence pour les conditions initiales choisies) ou à l'existence d'une frontière floue entre les bassins de deux attracteurs.

#### 1.4.4 Bassin d'attraction

**Définition 1.13.** [17] Le bassin d'attraction  $D(A)$  d'un ensemble attractif  $A$ , est l'ensemble ouvert constitué de tous les points  $x$  tels que,  $T^n(x)$  tends vers  $A$ , quand  $n$  tends vers  $\infty$ .

### 1.5 Bifurcations

Un des problèmes pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace de paramètres. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand un de ses paramètres traverse une valeur critique. Sous l'effet d'une petite variation des paramètres, ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition des singularités, soit à une modification de la nature des singularités.

Parmi les bifurcations classiques : bifurcation noeud-col (Fold), bifurcation doublement de période (Flip), bifurcation de Neïmark-Sacker, bifurcation transcritique et bifurcation fourche. Nous rappellerons que celles qui interviennent dans la suite de notre travail. Considérons la transformation ponctuelle définie en (1.1) :

$$X_{n+1} = T(X_n) = F(X_n, \Lambda), \quad F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

#### 1.5.1 Bifurcation noeud-col (Fold)

Lorsque les multiplicateurs sont à valeurs réelles, et que l'un d'eux traverse la valeur  $+1$ , il y a naissance de deux points fixes ou deux cycles d'ordre  $k$ , l'un est stable et l'autre

est instable. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\phi \longleftrightarrow^{S=+1} N_S^k(\text{resp}^t. N_I^k) + C^k \quad (1.11)$$

$\phi$  signifie absence de cycle d'ordre  $k$ ,  $N_S^k$  cycle noeud d'ordre  $k$  stable,  $C^k$  cycle col d'ordre  $k$  et  $N_I^k$  cycle noeud d'ordre  $k$  instable. Les valeurs du paramètre  $\Lambda$  qui correspondent à cette bifurcation sont notés  $\Lambda_{(k)_o}^j$  ( $j, k \in \mathbb{N}^*$ ), où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par  $T$  [17, 36].

### 1.5.2 Bifurcation doublement de période (Flip)

Cette bifurcation se produit lorsque un des multiplicateurs  $S$  associé au cycle d'ordre  $k$  traverse  $-1$ . Elle est représenté par le schéma suivant :

$$\begin{cases} N_S^k(\text{resp}^t. N_I^k) \longleftrightarrow^{S=-1} N_S^{2k}(\text{resp}^t. N_I^{2k}) + N_I^k(\text{resp}^t. N_S^k) \\ C^k \longleftrightarrow^{S=-1} N_S^k(\text{resp}^t. N_I^k) + C^{2k}. \end{cases} \quad (1.12)$$

$N_S^{2k}$  signifie cycle noeud d'ordre  $2k$  stable,  $N_I^{2k}$  cycle noeud d'ordre  $2k$  instable et  $C^{2k}$  cycle col d'ordre  $2k$ . Les valeurs du paramètre  $\Lambda$  qui correspondent à cette bifurcation sont notés  $\Lambda_k^j$  ( $j, k \in \mathbb{N}^*$ ), où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par  $T$  [24].

### 1.5.3 Bifurcation de Neïmark-Sacker

Cette bifurcation se produit lorsque les multiplicateurs sont complexes conjuguées ( $S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\theta}$ ). La situation  $\rho = 1$  est celle d'un cas critique au sens de Lyapounov. Un cas critique est associé à une bifurcation locale obtenue par traversée des trajectoires des itérés du point ou de la courbe ayant  $\rho = 1$ , sous l'effet de variation des paramètres; et cette bifurcation est appelée bifurcation Neïmark-Sacker, pour laquelle un noeud foyer donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que les points fixes et cycles d'origines [34]. On a le schéma suivant :

$$F_S^k(\text{resp}^t. F_I^k) \longleftrightarrow^{r=1} F_I^k(\text{resp}^t. F_S^k) + CFI_S(\text{resp}^t. CFI_I), \quad (1.13)$$

où  $F_S^k$  est un cycle foyer d'ordre  $k$  stable,  $F_I^k$  est un cycle foyer d'ordre  $k$  instable,  $CFI_S$  une courbe fermée invariante stable et  $CFI_I$  une courbe fermée invariante instable. Les valeurs du paramètre  $\Lambda$  qui correspondent à cette bifurcation sont notés  $\Gamma_k^j$ .

Une ligne isocline est formée par les valeurs des paramètres du point fixe pour chaque argument  $\theta$  spécifié [34]. Pour calculer et retrouver la ligne isocline, on résout le système

suisant :

$$\begin{cases} T(X) = X; \\ \Re_s = 0; \\ \Im_s = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\Re_s$  et  $\Im_s$  sont la partie réelle et imaginaire de l'équation caractéristique, définie par :

$$\det[J_c - \rho e^{i\theta} I] = \Re_s + i\Im_s = 0, \quad (1.15)$$

avec  $J_c$  est la jacobienne de  $T$  et  $I$  est la matrice identité.

La ligne isocline montre la phase instantanée autour du point fixe ; le long de cette ligne, la stabilité est indexée par  $\rho$  ; entre 0 et 1 il est stable et  $\rho = 0$  indique la super stabilité.

#### 1.5.4 Détermination des courbes de bifurcation dans un plan des paramètres

Si dans (1.1) on pose  $\Lambda = (a, b)$  vecteur paramètre de  $\mathbb{R}^2$ , les courbes de bifurcation des cycles d'ordre  $k$  de la récurrence, sont tracées dans le plan des paramètres  $(a, b)$ . En s'inspirant des travaux de Jean Pierre Carcasses [25, 4, 6, 5], l'étude des bifurcations de cycle d'ordre  $k$  se résume à l'étude du système suivant :

$$\begin{cases} \Phi_k(X) = T^k(X) - X = 0, \\ \Psi(\sigma, X, \Lambda) = D\sigma - N = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $D$  et  $N$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , sont donnés par :

$$N(X, \Lambda) = - \sum_{i=0}^{E(\frac{p-1}{2})} a_{2i+1} \quad (1.17)$$

et

$$D(X, \Lambda) = \sum_{i=0}^{E(\frac{p}{2})} a_{2i}, \quad (1.18)$$

où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$  et les  $a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique  $P_c$  avec  $a_0 = 1$  associé à la jacobienne de  $T^k$  :

$$P_c(s) = \sum_{i=0}^{i=p} a_i s^{p-i}. \quad (1.19)$$

Dans le système (1.16),  $\Phi_k(X) = 0$ , signifie que  $X$  est un cycle d'ordre  $k$  de  $T$  et  $\Psi(\sigma, X, \Lambda) = 0$  est l'équation caractéristique du cycle pour lequel on a fixé l'une des valeurs propres  $S$  (notée  $\sigma$ ).

Soit  $\Sigma_1$  la courbe dans l'espace  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^2$ , qui représente l'ensemble des points  $(X, \Lambda)$  solution de l'équation (1.16) avec  $\underline{\sigma} = 1$ . La projection de  $\Sigma_1$  dans le plan des paramètres  $\Lambda$ , sur laquelle existe un cycle d'ordre  $k$ , est la courbe de bifurcation noeud-col (Fold), notée  $\Lambda_{(k)o}^j$ .

Pour  $\underline{\sigma} = -1$ , la projection de l'ensemble de solutions de (1.16) sur le plan des paramètres, nous permet d'avoir la courbe de bifurcation Flip dite doublement de période  $\Lambda_k^j$ .

Dans le cas de la dimension trois ( $p = 3$ ), le polynôme caractéristique de  $T^k$  s'écrit sous la forme :

$$P(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3, \quad (1.20)$$

avec  $a_0 = 1$ .

Et les paramètres de niveaux dits aussi de réduction sont :

$$N(X, \Lambda) = - \sum_{i=0}^{E(\frac{3-1}{2})} a_{2i+1} = -(a_1 + a_3), \quad (1.21)$$

$$D(X, A) = \sum_{p=0}^{E(\frac{3}{2})} a_{2p} = a_0 + a_2. \quad (1.22)$$

Dès lors, le problème (1.16), s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} T^k(X) - X = 0, \\ (a_0 + a_2)\sigma + (a_1 + a_3) = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

La recherche de la bifurcation de type Fold  $\Lambda_{(k)o}^j$  pour  $S = 1$  (respectivement de type Flip  $\Lambda_k^j$  pour  $S = -1$ ) correspond à la résolution du système (1.23) avec  $\sigma = 1$  (respectivement  $\sigma = -1$ ).

Si  $S = \rho e^{i\theta}$  et  $\rho = 1$ , la courbe de bifurcation de Neïmark-Sacker s'obtient en utilisant l'algorithme défini par Carcasses [3] :

$$\begin{cases} a_2 - 1 + a_3(a_3 - a_1) = 0, \\ |a_3 - a_1| < 2, \\ r = 1, \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $r$  est le nombre de paires des multiplicateurs (valeurs propres) complexes ayant un module égale à un.

### 1.5.5 Points de co-dimension deux

Tout point vérifiant le système d'équations :

$$\begin{cases} T^k(X) = X; \\ D = 0; \\ N = 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

est appelé point de co-dimension deux, correspondant à un point de contact entre la courbe de la bifurcation Fold  $\Lambda_{(k)_o}^j$  et la courbe de la bifurcation Flip  $\Lambda_k^j$  associées à un même cycle  $(k; j)$  [4, 28].

## Chapitre 2

# Exemples de récurrences de dimension 2

L'astronome Michel Hénon [18] exploitera la suggestion de Pomeau et Ibanez, pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque Pomeau expose l'idée de réaliser des systèmes dynamiques plus simples encore que celui de Lorenz, mais présentant des caractéristiques similaires, et qui permettraient de prouver plus clairement des "évidences" mises en lumière par les calculs numériques. Puisque le raisonnement repose sur la section de Poincaré, il propose de produire une application du plan dans lui-même, plutôt qu'une équation différentielle, imitant le comportement de Lorenz et son attracteur étrange. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de système de Hénon et correspond à l'application (2.1), un problème très général avec les attracteurs étranges, amené par la proposition de Ruelle et non résolu depuis : il n'existe aucune preuve mathématique de leur existence, seulement des indications numériques (graphiques), même pour les plus étudiés d'entre eux. Cela signe une certaine "limite" aux expériences numériques dans le domaine. Un seul système (2.8) fait exception, celui construit par René Lozi, mathématicien à l'université de Nice, à partir de l'attracteur de Hénon. Il est un peu plus simple que les autres et le mathématicien Michal Misiurewicz est parvenu à démontrer, grâce aux outils des systèmes dynamiques, l'existence effective de l'attracteur étrange.

### 2.1 Attracteur de Hénon

M.Hénon en 1976, dans le but de simplifier le système de trois équations différentielles du modèle de Lorenz, proposa l'application suivante du plan sur lui même :

$$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (y + 1 - ax^2, bx), \quad (2.1)$$

$a$  et  $b$  étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante  $a$  contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de  $b$  traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour  $a$ ,  $b$  sont :  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

Partant d'un point du plan de coordonnées  $(x_0, y_0)$  on peut calculer les coordonnées  $(x_1, y_1)$  du point suivant, et ainsi de suite. L'application de Hénon est inversible et son inverse est :

$$H^{-1}(x, y) = \left( \frac{1}{b}y, x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2 \right). \quad (2.2)$$

La matrice jacobienne ici a pour expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est  $|J| = -b$ .

Considérons l'application de Hénon :

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx) \quad (2.4)$$

avec  $0 < b < 1$ .

### 2.1.1 Existence de points fixes

Pour  $a \geq -\frac{(b-1)^2}{4}$ , la récurrence de Hénon admet deux points fixes  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , vérifiant

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx) = (x, y). \quad (2.5)$$

$$x_1 = \frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a} \text{ et } y_1 = b \cdot \frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, \\ x_2 = \frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a} \text{ et } y_2 = b \cdot \frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}. \quad (2.6)$$

Pour  $a < -\frac{(b-1)^2}{4}$ , la récurrence de Hénon n'admet pas de points fixes réels.

### 2.1.2 Stabilité des points fixes

La matrice jacobienne  $J$  a pour valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b} \quad (2.7)$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieure à 1, tandis que l'autre varie selon la variation de



$|x|$  par rapport à  $(1 - b)/2a$ .

Le point fixe  $(x_2, y_2)$  est un point selle, car la seconde valeur propre est de module supérieure à 1, et l'autre point fixe  $(x_1, y_1)$  est stable pour  $a < 3(1 - b)^2/4 = 0.3675$ .

Pour  $a = 3(1 - b)^2/4$ , on a  $\lambda_1(x_1, y_1) = b$  et  $\lambda_2(x_2, y_2) = -1$ .

### 2.1.3 Etude du plan des paramètres

Dans cette section, nous présentons l'étude du plan des paramètres  $(a, b)$ .

#### Simulations du plan des paramètres :

Les domaines de stabilité pour les cycles de cette récurrence ont été déjà simulés et construits numériquement, en utilisant une méthode de balayage par plusieurs auteurs (en l'occurrence Belkhir [1]). Le résultat du programme de balayage est représenté sur la Figure (2.1) dans le plan paramétrique  $(a, b)$ , qui nous donne un aperçu sur l'existence des cycles attractifs de la transformation  $H$  et leurs zones de stabilité, où chaque couleur est associée à un cycle d'ordre  $k = 1, 2, 3, \dots$

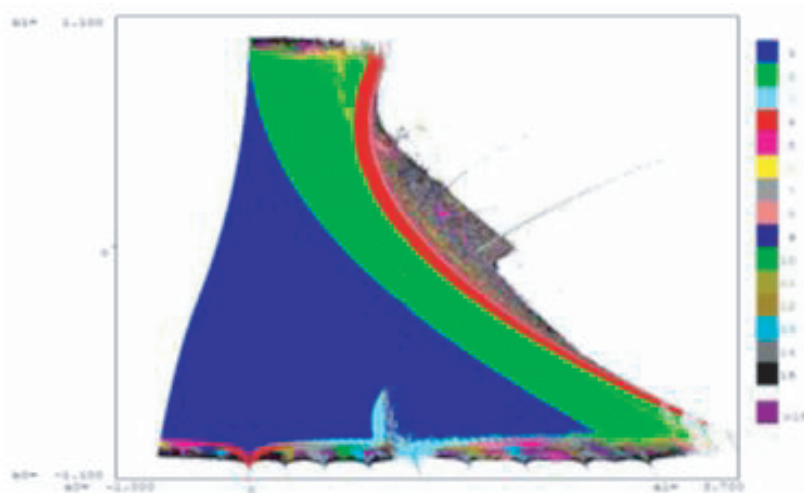


FIGURE 2.1 – Domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs dans le plan des paramètres  $(a, b)$  pour la récurrence de Hénon.

Dans la Figure (2.1) chaque couleur représente la zone de stabilité d'un cycle attractif d'ordre  $k$  :

1. Les zones bleues représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un point fixe attractif;

2. Les zones vertes représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 2 ;
3. Les zones rouges représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 4 ;

### Diagramme de bifurcation :

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre  $a$  de 0 à 2 avec un pas de 0.0005 et la valeur du paramètre  $b$  est de 0.3 (voir figure 2.2).

On observe dans ce diagramme la bifurcation de doublement de période, l'attracteur de Hénon contient deux points fixes. La partie stable d'un point fixe est observée dans l'intervalle  $[0; 0.3675]$  et un cycle stable d'ordre deux commence à  $a = 0.3675$  suivi d'un cycle stable d'ordre quatre à  $a = 0.9$ .

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière. Pour  $a = 1.4$ , on ne distingue plus les cycles chose qu'est dû à la présence de plusieurs cycles ou peut être le système est chaotique.

L'attracteur de Hénon pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  est représenté dans la figure 2.3. La

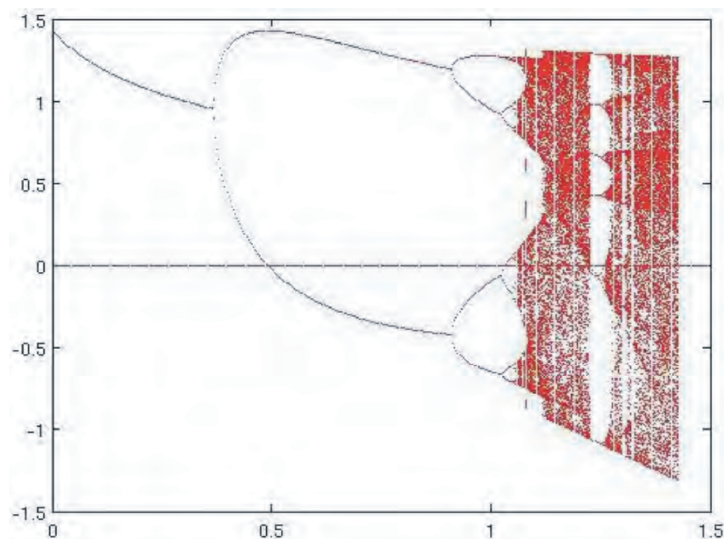
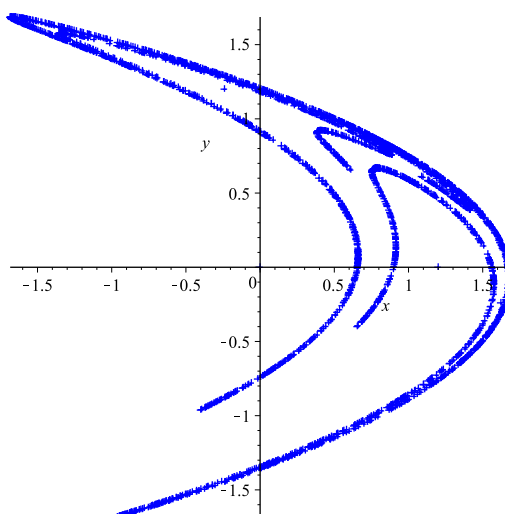


FIGURE 2.2 – Diagramme de bifurcation de Hénon.

structure de l'attracteur se répète identiquement à elle-même aux échelles d'observation successives. Cette structure dont la permanence à différentes échelles est caractéristique d'un objet fractale.

On peut aussi associer à l'attracteur de Hénon la dimension de Lyapunov, qu'est calculée à partir des exposants de Lyapunov, en l'occurrence pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ , les exposants

FIGURE 2.3 – Attracteur de Hénon pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

de Lyapunov sont :

$$\lambda_1 = 0.42205 \text{ et } \lambda_2 = -1.626,$$

et la dimension de Lyapunov est

$$D_L = 1.2596.$$

### 2.1.4 Bassin de l'attracteur de Hénon obtenu pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$

L'attracteur de Hénon 2.3 et son bassin 2.4 sont obtenus en utilisant le logiciel Maple.

## 2.2 Attracteur de Lozi

Dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon, René Lozi, propose l'application suivante :

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y + 1 - a|x|, bx) \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.2.1 Propriétés de l'application de Lozi

1. La seule différence entre l'application de Hénon et de Lozi est que le terme non-linéaire  $x^2$  de l'application de Hénon est remplacé par  $|x|$  dans l'application de Lozi. Cette modification de l'application de Hénon est linéaire pour  $x > 0$  et  $x < 0$ .

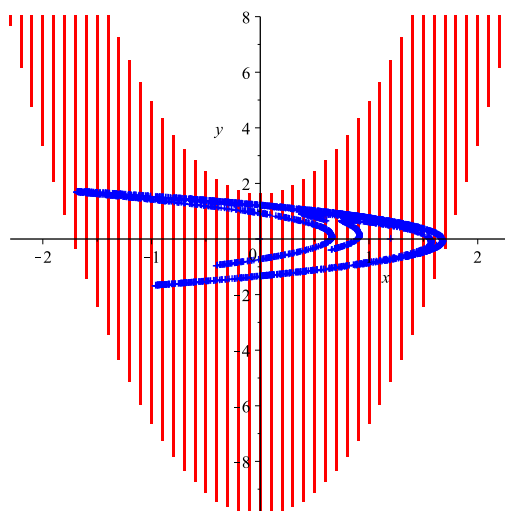


FIGURE 2.4 – Bassin de l'attracteur de Hénon ( $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ ).

2. L'application de Lozi n'est pas différentiable.
3. Si  $a = 0$ , l'application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours  $a \neq 0$ .
4. L'application de Lozi est inversible, son inverse est :

$$L^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-1}|y|). \quad (2.9)$$

5. Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à :  $|J| = -b$ .

Cette application possède deux points fixes définis par :

$$\begin{cases} P_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b}\right), & \text{si } b < a + 1; \\ P_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b}\right), & \text{si } b > -a + 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points fixes par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -a \frac{\partial |x|}{\partial x} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Stabilité :

La jacobienne est :

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + a\lambda - b \quad \text{pour } P_1 \\ &\lambda^2 - a\lambda - b \quad \text{pour } P_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

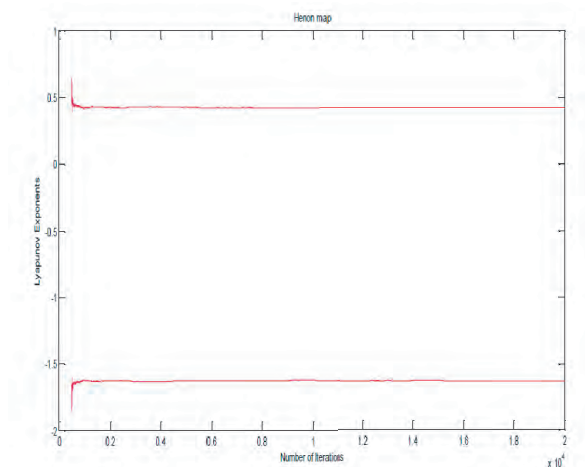


FIGURE 2.5 – Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l’application de Hénon.

- **Stabilité de  $P_1$**

Pour  $b \geq \frac{-a^2}{4}$ , les valeurs propres sont des réelles.

Pour  $b < \frac{-a^2}{4}$ , les valeurs propres sont des complexes.

1. Elles sont de module inférieur à 1 si

$$b > -1, \quad b < a + 1 \quad \text{et} \quad b < 1 - a.$$

Donc le point fixe  $P_1$  est stable.

2. Les valeurs propres sont de module supérieur à un si

$$b < -1, \quad b < a + 1 \quad \text{et} \quad b < 1 - a.$$

Le point fixe  $P_1$  est instable.

3. Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont :  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$  si :

$b > a + 1$  et  $b > 1 - a$ . Et le point fixe  $P_1$  est un point selle (col).

- **Stabilité de  $P_2$**

Le polynôme caractéristique pour  $P_2$  est défini par  $\lambda^2 - a\lambda - b$ . Pour chercher les racines de ce dernier on calcule le discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = a^2 + 4b.$$

L’existence de  $P_2$  est pour  $b > -a + 1$ . Ainsi  $\Delta = a^2 + 4b > 0$  et les valeurs propres sont toujours réelles :

Stabilité des points fixes	Stabilité de $P_1$	Stabilité de $P_2$
$b < a + 1$ et $b < -a + 1$ $b > -1$	stable	n'existe pas
$b < a + 1$ et $b < -a + 1$ $b < -1$	instable	n'existe pas
$b < a + 1$ et $b > -a + 1$	instable	instable
$b > -a + 1$ et $b > a + 1$	n'existe pas	instable

TABLE 2.1 – Stabilité des points fixes de la récurrence de Lozi par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$ .

- Elles sont de modules supérieurs à 1, si

$$b > -a + 1 \text{ et } b < a + 1.$$

Dans ce cas le point fixe  $P_2$  est instable.

- $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$  si :

$$b > a + 1 \text{ et } b > 1 - a.$$

Le point fixe  $P_2$  est un point selle.

Pour plus de détails sur la stabilité des points fixes de la récurrence de Lozi, une petite illustration est donnée dans le tableau 2.1 :

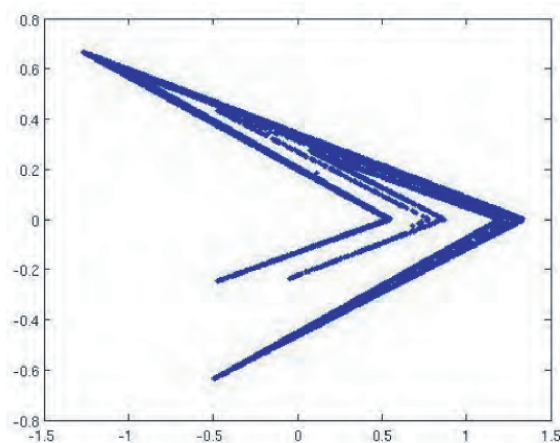


FIGURE 2.6 – Attracteur de lozi pour  $a = 1.7$  et  $b = 0.5$

Misiurewicz prouve l'existence d'un attracteur étrange de l'application de Lozi.

Pour les paramètres  $a = 1.7$  et  $b = 0.5$  la suite de points itérés par l'application de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par la figure (2.6)

**Structure fractale :**

Pour déterminer la structure de l'attracteur de Lozi, on peut faire un agrandissement d'une région de l'attracteur et on observe que la structure se répète. Contrairement au cas de l'application de Hénon, la route vers le chaos par l'application de Lozi n'est pas une bifurcation de doublement de période. Puisque la dérivée de l'application de Lozi n'est pas continue.

Le diagramme obtenu est représenté par la figure (2.7).

**Exposants de Lyapunov pour l'application de Lozi :**

Pour  $a = 1.7$  et  $b = 0.5$ , l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov  $\lambda_1 = 0.69314$  qui est positif,  $\lambda_2 = -1.204$ . On vérifie bien cependant que la somme de ces exposants est strictement négative. La figure (2.8) représente la variation des exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi.

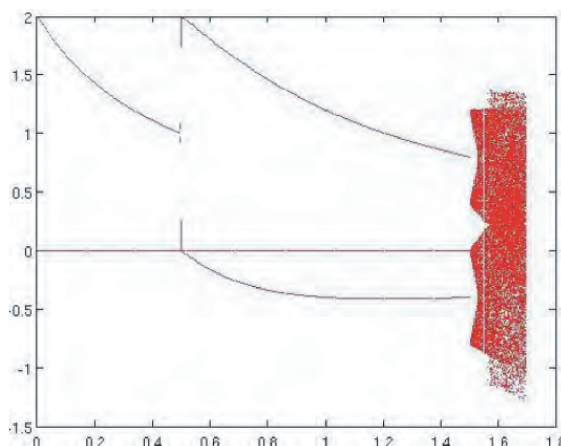
**Dimension de l'attracteur de Lozi :**

FIGURE 2.7 – Diagramme de bifurcation de Lozi

Les exposants de Lyapunov de la récurrence de Lozi pour  $a = 1.7$  et  $b = 0.6$  sont :

$$\lambda_1 = 0.69314$$

$$\lambda_2 = -1.204$$

et sa dimension de Lyapunov est  $D_L = 1.5757$ . L'attracteur correspondant à ces deux valeurs de  $a$  et  $b$  est chaotique d'après Devaney [8].

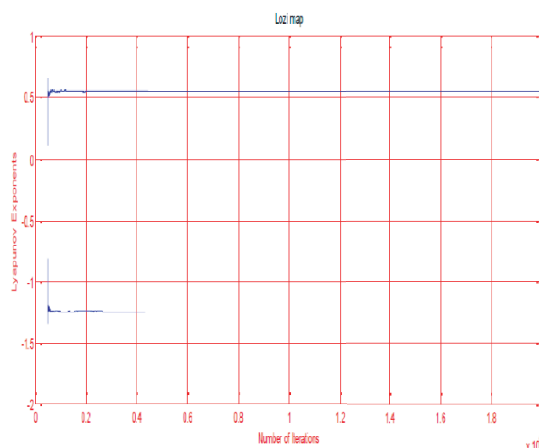


FIGURE 2.8 – Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux exemples de récurrence d'ordre deux, en commençant par la récurrence de Hénon où nous avons étudié l'existence des points fixes, ainsi que leurs stabilités. Une simulation du plan des paramètres nous donne un aperçu sur l'existence des cycles attractifs et leurs zones de stabilité. Un diagramme de bifurcation de la récurrence de Hénon, pour  $b = 0.3$  et  $a$  variable, nous permet d'observer le passage d'un point fixe vers un cycle d'ordre 2, puis un cycles d'ordre 4, jusqu'à l'apparition de plusieurs cycles où le comportement peut être chaotique. La seconde récurrence s'agit de celle de Lozi ; une recurrence linéaire définie par morceaux, qui possède presque les mêmes propriétés de la récurrence de Hénon.



# Chapitre 3

## Cas d'une transformation ponctuelle non linéaire et non inversible de dimension trois

Dans ce chapitre nous abordons l'exemple d'une transformation ponctuelle non linéaire et non inversible (endomorphisme) de dimension trois à deux paramètres réels. Cet endomorphisme tridimensionnel noté  $T$  à deux paramètres réels  $a$  et  $b$ , défini par le système (3.1), a été introduit par H.Gharout [13] et étudié par H.Gharout et al. [13, 15, 14].

L'endomorphisme  $T$  est définie par la récurrence suivante :

$$T \begin{cases} x_{n+1} = y_n, \\ y_{n+1} = z_n, \\ z_{n+1} = x_n^2 + ay_n(x_n + z_n) + b. \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $a$  et  $b$  deux paramètres réels.

### 3.1 Etude des premiers cycles et bifurcations de $T$

#### 3.1.1 Cycles et bifurcations d'ordre un de $T$

##### 1. Points fixes

L'endomorphisme  $T$  admet deux points fixes  $X_1 = (x_1, x_1, x_1)$  et  $X_2 = (x_2, x_2, x_2)$ , avec

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a} \quad (3.2)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a}. \quad (3.3)$$

Autrement dit, les deux points fixes de  $T$  sont :

$$X_1 = \left( \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a}, \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a}, \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a} \right), \quad (3.4)$$

$$X_2 = \left( \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a}, \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a}, \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - 4b - 8ba}}{1 + 2a} \right). \quad (3.5)$$

Les points fixes de  $T$  sont définis pour  $a$  et  $b$  vérifiant les conditions suivantes :

- (a)  $a \neq \frac{-1}{2}$  ;
- (b)  $b \leq \frac{1}{4(2a+1)}$  si  $a > \frac{-1}{2}$  et  $b \geq \frac{1}{4(2a+1)}$  si  $a < \frac{-1}{2}$ .
- (c)  $a \leq \frac{1-4b}{8b}$  si  $0 < b$  et  $a \geq \frac{1-4b}{8b}$  si  $b < 0$ .

**Remarque 3.1.** Pour  $a = \frac{-1}{2}$ , on a un seul point fixe de la transformation  $T$ , qui est  $X = (b, b, b)$ .

## 2. Polynôme caractéristique de $T$

Pour étudier la stabilité des points fixes et les bifurcations de  $T$ , on aura besoin de sa jacobienne et du polynôme caractéristique. La jacobienne de  $T$  obtenue est :

$$J_1^{(a,b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x + ay & a(x+z) & ay \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

et son polynôme caractéristique, associé à la jacobienne de  $T$ , est :

$$P_1^{(a,b)}(s) = s^3 - s^2ay + (-ax - az)s - 2x - ay. \quad (3.7)$$

Rappelons que un point fixe est dit stable si et seulement si son rayon spectral est strictement inférieure à 1, autrement dit  $\max\{|s_1|, |s_2|, |s_3|\} < 1$ .

## 3. Bifurcations des cycles d'ordre un de $T$

Pour la recherche des courbes des bifurcations Fold  $\Lambda_{(k)^o}^j$  (respectivement Flip  $\Lambda_k^j$ , où  $k$  indique l'ordre du cycle,  $j$  indique de la courbe) on utilisera les méthodes élaborées par J.P.Carcasses [4]. L'étude de la bifurcation de Fold et de la bifurcation Flip se ramène à l'étude du système :

$$\begin{cases} F(X) = X, \\ D.\sigma - N = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $D$  et  $N$  sont données par :

$$N(X, A) = - \sum_{p=0}^{E(\frac{n-1}{2})} a_{2p+1} = -(a_1 + a_3) = -(-ay - 2x - ay), \quad (3.9)$$

et

$$D(X, A) = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} a_{2p} = a_0 + a_2 = 1 + (-ax - az), \quad (3.10)$$

avec  $E(x)$  est la partie entière de  $x$  et les  $a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique  $P_1^{(a,b)}$  associé à la jacobienne de  $T$ , avec un ordre décroissant des puissances

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = -ay, \\ a_2 = -ax - az, \\ a_3 = -2x - ay, \end{cases}$$

Le système à étudier est :

$$\begin{cases} x = y = z, \\ (1 + 2a)x^2 - x + b = 0, \\ (1 - ax - az)\sigma - 2ay + 2x = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

(a) **Bifurcations Flip  $\Lambda_k^1$  :**

La résolution de l'équation (3.11) en posant  $\sigma = -1$ , nous permet d'avoir la solution niveau :

$$x = \frac{-1}{2}. \quad (3.12)$$

Ainsi, l'équation de la courbe de bifurcation Flip est :

$$b = \frac{-3}{4} - \frac{1}{2}a. \quad (3.13)$$

(b) **Bifurcations Fold**  $\Lambda_{(k)^o}^1$  :

En posant  $\sigma = 1$  dans l'équation (3.11), on obtient une solution niveau, qui dépend de  $a$  et définie pour  $a \neq \frac{-1}{2}$  :

$$x = \frac{1}{2 + 4a}. \quad (3.14)$$

L'équation de la bifurcation Fold obtenue est :

$$b = \frac{1}{4 + 8a}. \quad (3.15)$$

(c) **Points de co-dimensions** :

Les points de co-dimensions (les points d'intersection) des deux bifurcations Fold ( $S = 1$ ) et Flip ( $S = -1$ ), sont calculés en résolvant le système :

$$F(X) = X, \quad (3.16)$$

$$D = 0, \quad (3.17)$$

$$N = 0. \quad (3.18)$$

Les solutions obtenues sont :

$$(a, b) = \left(-1, \frac{-1}{4}\right), \quad (3.19)$$

et

$$x = \frac{-1}{2}. \quad (3.20)$$

On a un seul point de co-dimensions  $(a, b) = \left(-1, \frac{-1}{4}\right)$  pour  $x = \frac{-1}{2}$ .

(d) **Bifurcation de Neïmark-Sacker** :

On utilisera l'algorithme de J.P.Carcasses [4] pour l'étude de la bifurcation de Neïmark-Sacker. La recherche des courbes de la bifurcation de Neïmark-Sacker, se ramène à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} F(X) = X, \\ a_2 - a_0 + a_3(a_3 - a_1) = 0, \\ |a_1 - a_3| < 2, \\ r = 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $r$  est le nombre de paires des valeurs propres complexes de la jacobienne (sous la forme exponentielle  $\lambda_j = r.e^{i\theta}$ ),  $j = \widehat{1,3}$ .

La résolution de l'équation (3.21), nous permet d'avoir deux bifurcations Neïmark-Sacker d'ordre un, notées  $\Gamma_1^1$  et  $\Gamma_1^2$ , pour  $x \in ]-1, 1[$  et  $(a, b)$  vérifiant les conditions :

$$\begin{aligned} b &\geq \frac{1}{4(1+2a)}, \text{ si } a < -0.5, \\ b &\leq \frac{1}{4(1+2a)}, \text{ si } a > -0.5. \end{aligned}$$

Les bifurcations obtenues sont :

$$\Gamma_1^1 : b = \frac{-2 - 3a - 2a^2 - 2a^3 + 2\sqrt{4 + 2a - 7a^2 - 4a^3 + 2a^4 + 2a^5 + a^6}}{8 + 8a + 2a^2}, \quad (3.22)$$

$$\Gamma_1^2 : b = \frac{-2 - 3a - 2a^2 - 2a^3 - 2\sqrt{4 + 2a - 7a^2 - 4a^3 + 2a^4 + 2a^5 + a^6}}{8 + 8a + 2a^2}. \quad (3.23)$$

Une simulation numérique, dans le plan des paramètres  $(a, b)$ , de la zone de stabilité des points fixes de  $T$  (figure 3.1), nous permet d'observer la zone de stabilité en couleur rouge et la zone d'instabilité en couleur jaune des points fixes de  $T$ . La zone de stabilité de  $T$  est délimitée par les courbes de bifurcations Fold ( $\Lambda_{(1)^\circ}^1$  et  $\Lambda_{(1)^\circ}^2$ ), Flip ( $\Lambda_1^1$ ) et Neïmark-Sacker ( $\Gamma_1^1$  et  $\Gamma_1^2$ ).

### 3.1.2 Cycle d'ordre deux de $T$

La transformation ponctuelle d'ordre deux  $T^2$ , définie par  $X_{n+1} = F(F(X_n, \Lambda))$ , où  $X_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$  et  $\Lambda$  est un vecteur de paramètres réels dans  $\mathbb{R}^2$ , est :

$$T^2 \begin{cases} x_{n+1} = z_n, \\ y_{n+1} = x_n^2 + ay_n(x_n + z_n) + b, \\ z_{n+1} = y_n^2 + az_n(y_n + x_n^2 + ay_n(x_n + z_n) + b) + b, \end{cases} \quad (3.24)$$

avec  $a$  et  $b$  deux paramètres réels.

#### 1. Les points fixes d'ordre deux

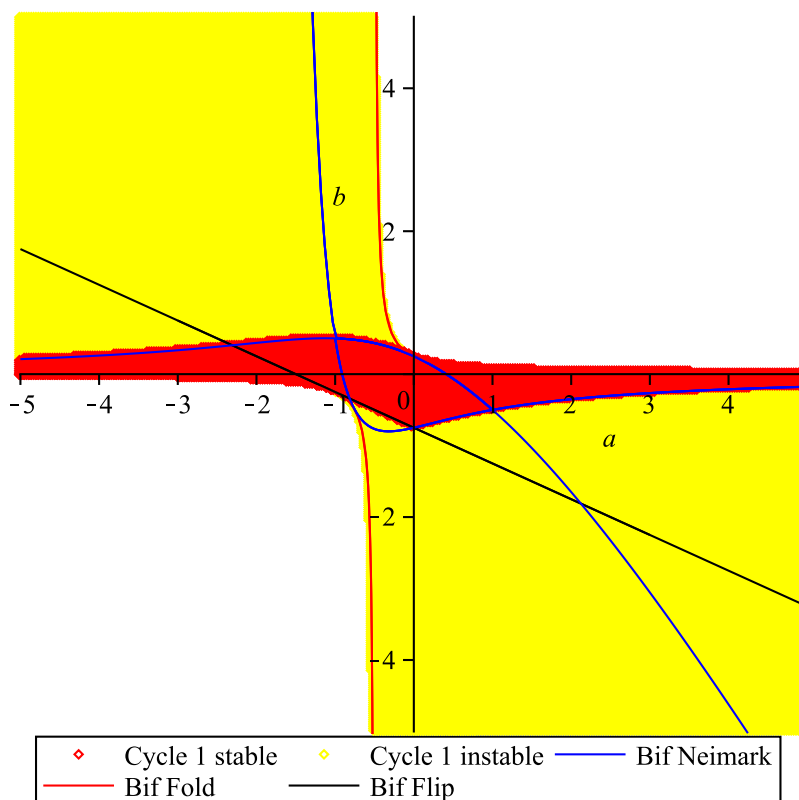


FIGURE 3.1 – Bifurcations et stabilité des cycles d’ordre un de  $T$ , où la zone rouge est la partie stable et la zone jaune est la partie instable de  $T$ . Dans la zone de couleur blanche tous les points fixes sont complexes (pas de points fixe réel [13].)

Les cycles d’ordre deux sont déterminés en résolvant le problème

$$\begin{cases} x = z, \\ y = x^2 + ay(x + z) + b, \\ z = y^2 + az(y + x^2 + ay(x + z) + b) + b. \end{cases} \quad (3.25)$$

Les points fixes  $X_1 = (x_1, x_1, x_1)$  et  $X_2 = (x_2, x_2, x_2)$  de  $T$ , sont aussi des points fixes pour un cycle d’ordre deux. Et le cycle d’ordre se compose de :

$$V1 = (x_{1p}, y_{1p}, x_{1p}), \quad (3.26)$$

$$V2 = (x_{2p}, y_{2p}, x_{2p}), \quad (3.27)$$

avec

$$x_{1p} = \left(\frac{1}{2}\right) \left( \frac{1 - 2a + \sqrt{-3 + 4a + 4a^2 - 4b + 8ab}}{-1 + 2a} \right); \quad (3.28)$$

$$x_{2p} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1 + 2a + \sqrt{-3 + 4a + 4a^2 - 4b + 8ab}}{-1 + 2a}\right); \quad (3.29)$$

$$y_{1p} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2a - 4ab + \sqrt{-3 + 4a + 4a^2 - 4b + 8ab} - 1}{-2a^2 + a\sqrt{-3 + 4a + 4a^2 - 4b + 8ab} - a + 1}\right); \quad (3.30)$$

$$y_{2p} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2a + 4ab + \sqrt{-3 + 4a + 4a^2 - 4b + 8ab} + 1}{2a^2 + a\sqrt{-3 + 4a + 4a^2 - 4b + 8ab} + a - 1}\right). \quad (3.31)$$

### Conditions d'existences des cycles d'ordre deux :

Les points fixes d'ordre deux sont définis pour  $a$  et  $b$  vérifiant les conditions suivantes :

- (a)  $b \neq \frac{-1}{4a^2}$  pour  $a \neq 0$ ;
- (b)  $b \leq \frac{1}{4(2a-1)}$  pour  $a \neq \frac{1}{2}$ .

## 2. Polynôme caractéristique

La jacobienne de  $T^2$  notée  $J_2$  est :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x + ay & a(x + z) & ay \\ az(2x + ay) & 2y + az(1 + a(x + z)) & a(y + x^2 + ay(x + z) + b) + a^2yz \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Et son polynôme caractéristique, noté  $P_2$  est :

$$P_2(s) = s^3 + (-ax^2 - 2a^2yz - a^2yx - az - ba - ax - ay)s^2 + (a^2x^2z - a^2yz + 2a^3xyz + a^3z^2y + a^2x^3 + a^2xb - 2ay^2 + a^2b + a^2yx - 2xaz + a^3x^2y)s - 2ay^2 - a^2yz - 4yx - 2xaz.$$

Dans la figure (3.2), la zone de couleur bleu représente la partie stable des points fixes de  $T$  et la zone de couleur rouge représente la zone de stabilité du cycle d'ordre deux. Le segment de courbe qui sépare les deux zones est une bifurcation de type doublement de période (Flip d'ordre un).

## 3. Bifurcations d'ordre deux

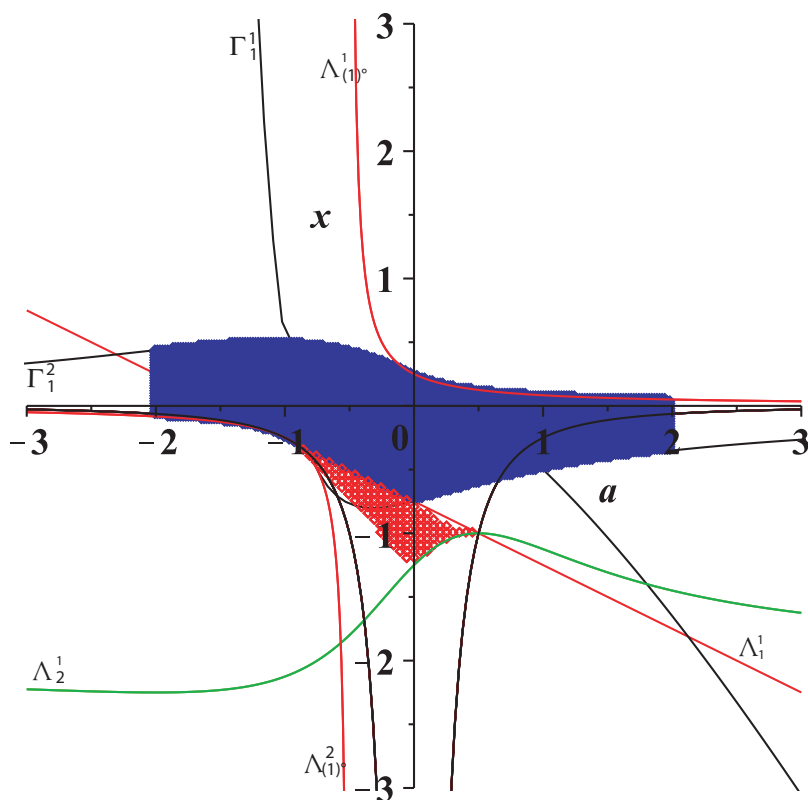


FIGURE 3.2 – Stabilité des cycles d'ordre un et d'ordre deux [13].

De même, on utilisera la méthode de J.P.Carcasses [4], et l'étude de la bifurcation de Fold et de la bifurcation Flip se ramène à l'étude du système suivant :

$$\begin{cases} F^2(X) = X, \\ D_2\sigma - N_2 = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

Et le système à étudier est :

$$\begin{cases} x = z, \\ x^2 + ay(x + x) + b - y = 0, \\ y^2 + ax(y + x^2 + ay(x + x) + b) + b - x = 0, \\ D_2\sigma - N_2 = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

(a) **Bifurcations Flip :**

La résolution de l'équation (3.34) en prenant  $\sigma = -1$ , nous permet d'avoir les



courbes de bifurcations Flip d'ordre deux ( $\Lambda_2^j$ ) :

$$b = \frac{-5 + 4a - 8a^2}{4(a^2 + 1)}, \quad (3.35)$$

$$b = \frac{-1}{4a^2}, \text{ avec } a \neq 0. \quad (3.36)$$

(b) **Bifurcations Fold :**

En prenant  $\sigma = 1$  dans l'équation (3.34) on obtient les équations des courbes des bifurcations Fold d'ordre deux ( $\Lambda_{(2)^o}^j$ ) :

$$b = \frac{-3}{4} - \frac{1}{2}a, \quad (3.37)$$

$$b = \frac{-1}{4a^2}, \text{ avec } a \neq 0. \quad (3.38)$$

On a un cas de dégénérescence comme le montre la figure (3.3), une bifurcation commune pour  $S = 1$  et  $S = -1$ , qui se produit pour  $b = \frac{-1}{4a^2}$ .

(c) Les points de co-dimensions obtenus en résolvant le système

$$\begin{cases} F2(X) = X, \\ D2 = 0, \\ N2 = 0; \end{cases} \quad (3.39)$$

sont :

- $(a, b) = (-1, \frac{-1}{4})$ , avec  $(x, y, z) = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$ .
- $(a, b) = (\frac{1}{2}, -1)$ , avec deux valeurs de  $(x, y, z)$  :

$$(x, y, z) = (0, -1, 0), \quad (3.40)$$

$$(x, y, z) = (-1, 0, -1). \quad (3.41)$$

## 3.2 Plan des paramètres

Nous commençons l'étude du plan des paramètres par une simulation numérique, qui nous permet d'avoir une idée global sur l'existence et la stabilité des attracteurs.

### 3.2.1 Simulation du plan des paramètres

Une simulation numérique a été effectuée dans le plan des paramètres  $(a, b)$  figure (3.4) par H.Gharout [13, 15]. Cette figure permet de mettre en évidence les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe au moins un attracteur (points fixes, cycles d'ordre  $k$ ,

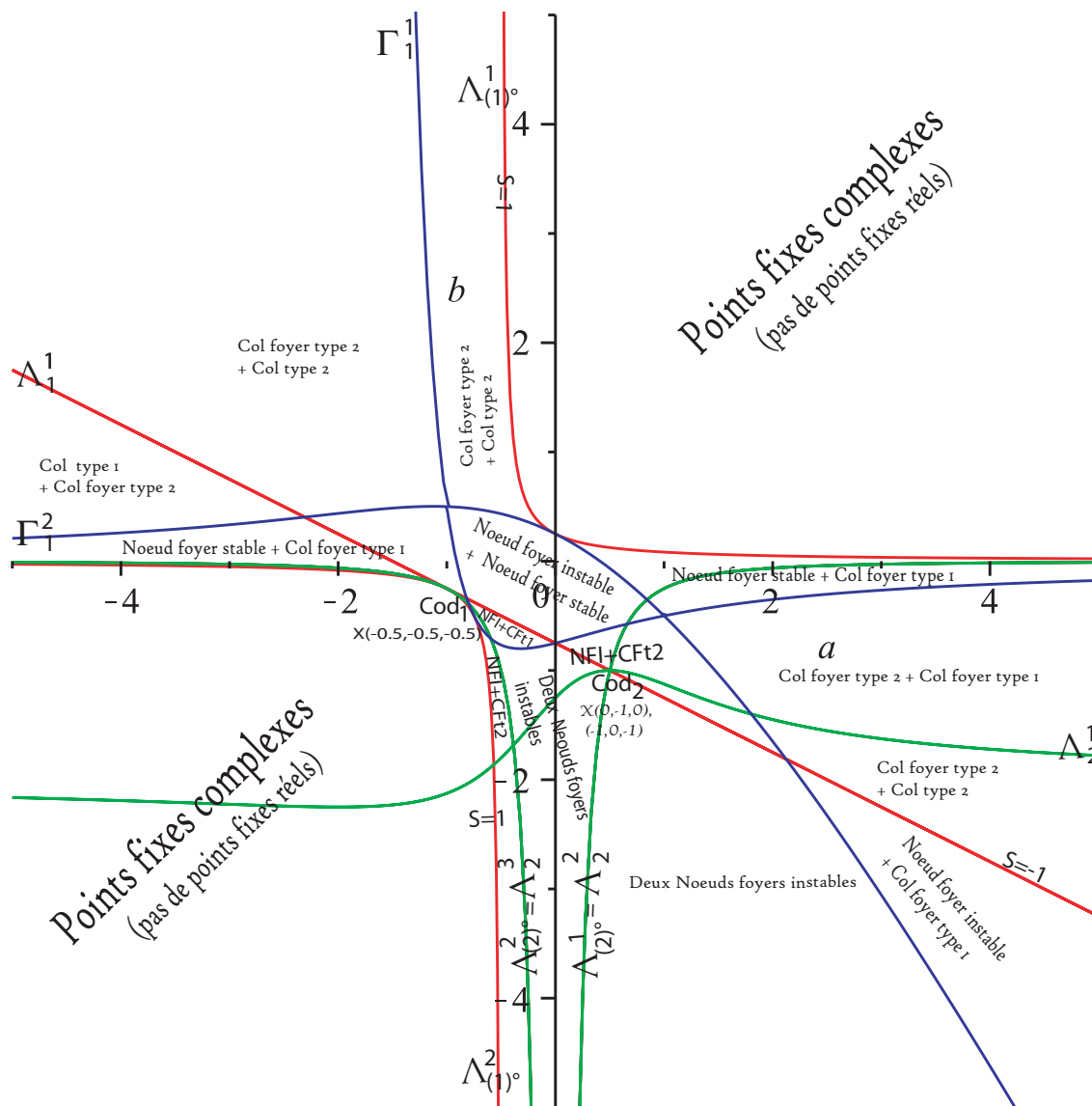


FIGURE 3.3 – La carte des singularités de  $T$  dans le plan de paramètres et leurs stabilités par rapport aux courbes de bifurcations (bifurcations Fold et Flip d’ordre un et deux et bifurcation de Neïmark-Sacker)[13].

attracteurs chaotiques,...) à distance finie. La figure joue le rôle d'une loupe de stabilité pour les cycles d'ordre  $k$ ,  $k = \widehat{1..14}$ , où à chaque cycle d'ordre  $k$  est associé une couleur. Les zones de couleur bleu représentent les valeurs de paramètres  $(a, b)$ , pour lesquelles il existe un point fixe stable (attractif); les zones rouges représente l'existence des cycles attractifs d'ordre 2; les zones roses l'existence des cycles d'ordre 5 attractifs, ainsi de suite pour les cycles jusqu'à l'ordre  $k = 14$ .

Les zones noires correspondent aux valeurs de paramètres  $(a, b)$  pour lesquelles il existe des suites d'itérations bornées (cycles d'ordre 15, attracteur étranges, orbites invariantes,...). Dans ces zones, les phénomènes chaotiques peuvent être observés.

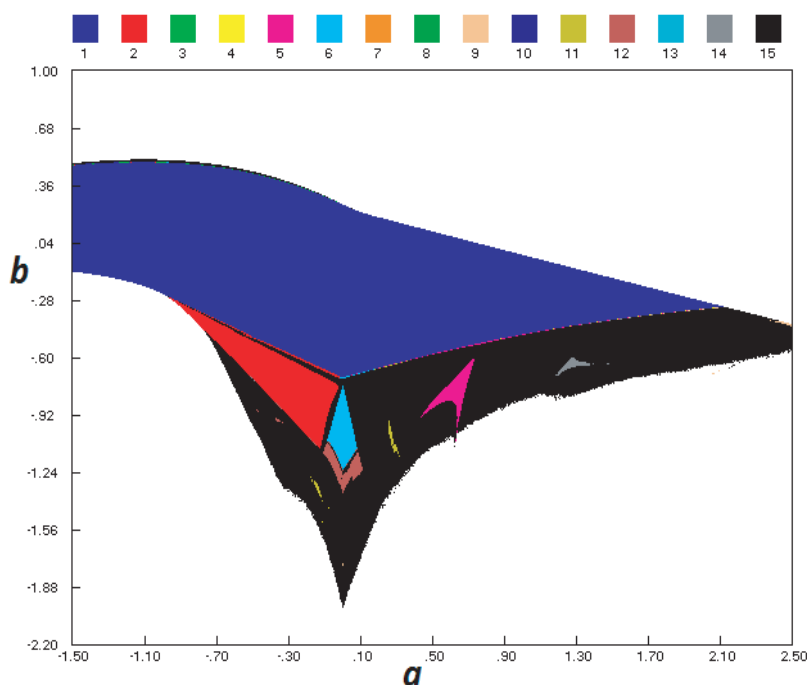


FIGURE 3.4 – Domaines de stabilité des cycles attractifs dans le plan des paramètres  $(a, b)$  [13].

### 3.2.2 Cascades de bifurcations

Ici, nous présentons quelques cascades de bifurcation (dites aussi, Feigenbaum) en fixant l'un des deux paramètres  $a$  et  $b$ , en choisissant le vecteur initial  $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$ . On exposera, ici, deux cascades de bifurcations obtenues en fixant l'un des deux paramètres  $a$  et  $b$ .

### 1. Diagramme de bifurcation pour $b = -0.75$ et $a$ variable :

Nous avons effectué une simulation en prenant  $b = -0.75$  et en variant le paramètre  $a$  avec un pas de 0.0001 (voir figure 3.5). Le diagramme de bifurcation obtenu représente deux évolutions différentes de la variable  $x$  en fonction des valeurs du paramètre  $a$  (à gauche et à droite de  $a = 0$ ). Dans la figure 3.5, certaines trajectoires des itérés sont observables et l'apparition d'orbites doubles (sens négatif des variations de  $a$ ) et orbites d'ordre un (sens positif des variations de  $a$ ); chose qui est expliquée, par le fait que, pour  $(a, b) = (0, -0.75)$  la transformation  $T$  admet un point fixe d'ordre un qui est le seul point fixe d'ordre deux de  $T$  et qui appartient à la courbe de bifurcation Neïmark-Sacker ( $X = (-0.5, -0.5, -0.5)$  de multiplicateurs  $S_1 = \overline{S_2} = 0.5 - 0.8660254038I$ ,  $S_3 = -1$  et de module  $\rho = 1$ ). La bifurcation Neïmark-Sacker pour laquelle ce point fixe, change de stabilité et donne naissance à une courbe invariante fermée qui a la même stabilité que le point fixe et à une double courbe invariante fermée de même stabilité que le point fixe d'ordre deux.

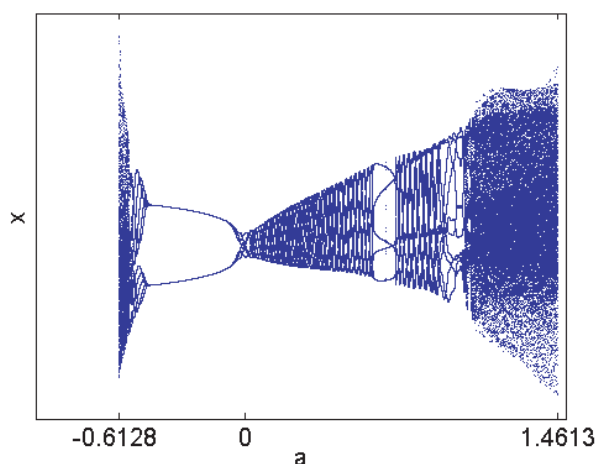
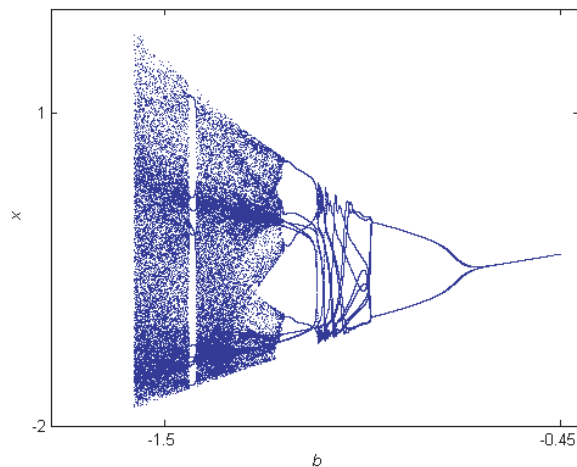


FIGURE 3.5 – Cascade de bifurcation pour  $b = -0.75$  [13, 15]

### 2. Diagramme de bifurcation pour $a = -0.1$ et $b$ variable

En fixant le paramètre  $a$ , l'évolution de la récurrence se fait dans une seule direction et on observe la coexistence de plusieurs cycles, orbites et attracteurs (attracteurs d'ordre six et orbites fermées), qui se développent vers des attracteurs chaotiques (voir figure 3.6).

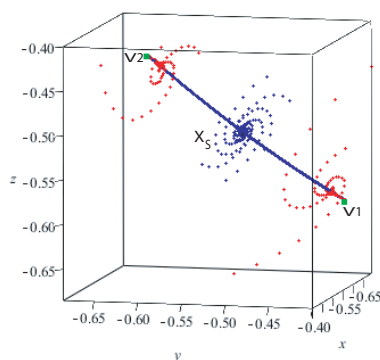
FIGURE 3.6 – Cascades de bifurcation pour  $a = -0.1$  [13].

### 3.3 Etude de la dynamique de l'endomorphisme $T$ en perturbant l'un des paramètres $a$ et $b$

Commençons par une petite visualisation des trajectoires des itérés de  $T$  (figure 3.7), issues d'un col foyer type un  $X_S = (-0.5055419055, -0.5055419055, -0.5055419055)$  vers un cycle stable d'ordre deux  $C_2$  formé des deux noeuds foyers stables  $V_1$  et  $V_2$  de  $T$  pour  $a = -0.1$  et  $b = -0.71$ , où

$$V_1 = (-0.5912870930, -0.4087129070, -0.5912870930),$$

$$V_2 = (-0.4087129070, -0.5912870930, -0.4087129070).$$

FIGURE 3.7 – Trajectoire des itérés de  $T$  pour  $a = -0.1$  et  $b = -0.71$  [13].

On verra par suite, en perturbant l'un des paramètres, la naissance de courbes invariantes en contact de la bifurcation de Neïmark-Sacker et l'apparition d'attracteurs chaotiques. La dynamique chaotique de  $T$ , en fixant l'un des paramètres, sera illustrée pour deux valeurs choisies de  $a$  et  $b$  :

- $a = -0.1$  et  $b$  varie ;
  
- $b = -0.75$  et  $a$  varie.

### 3.3.1 La dynamique de $T$ en fixant le paramètre $b$ et $a$ variant

On prend comme cas,  $b = -0.75$ , pour lequel la cascade de Feigenbaum (voir figure 3.5) possède deux dynamiques pour les variations du paramètre  $a$  en choisissant le terme initial  $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$ . La transformation  $T$  a deux points fixes  $X_1$  et  $X_2$ , un col foyer instable et un noeud foyer stable respectivement pour les valeurs de  $a$  et  $b$ . Le point fixe stable de  $T$  devient instable pour  $b < -0.75$  en donnant naissance via une bifurcation de Neïmark-Sacker ( $(a, b) = (0, -0.75)$ ) à une courbe invariante fermée pour des variations de  $a$  dans le sens positif ; et deux orbites invariantes fermées quand  $a$  varie dans le sens opposé (voir figure 3.8).

Dans ce qui suit, on notera  $l_i$  les exposants de Lyapounov et  $D_L(a)$  les dimensions de Lyapounov d'un attracteur, associés à la variation de  $a$  pour  $b = -0.75$ .

1. En variant le paramètre  $a$  dans le sens positif à partir de  $((a, b) = (0, -0.75))$  (3.8), le point fixe stable de  $T$  donne naissance à une courbe invariante fermée pour  $a = 0.01$ , qui s'élargit en augmentant le paramètre  $a$  jusqu'à  $a = 1.01$  et elle devient faiblement chaotique ( $l_1 = 0.016202$ ,  $l_2 = -0.036653$ ,  $l_3 = -0.306021$  et  $D_L(1.01) = 1.44203$ ), puis en augmentant le paramètre  $a$ , la complexité de la courbe croît, ainsi que sa dimension de Lyapounov et devient un attracteur chaotique pour  $a = 1.14$  ( $l_1 = 0.051117$ ,  $l_2 = 0.002747$ ,  $l_3 = -0.282441$  et  $D_L(1.14) = 2.19071$ ). En augmentant le paramètre  $a$  l'attracteur touche la frontière de son bassin d'attraction et disparaît pour  $a = 1.461391$ .
2. En variant le paramètre  $a$  dans le sens négatif, le cycle d'ordre deux de  $T$  est stable pour  $b = -0.75$  et  $-0.484 \leq a < 0$ , et devient instable pour  $a < -0.484$  en donnant naissance, via une bifurcation de Neïmark-Sacker, à une courbe invariante, constituée de deux orbites invariantes fermées qui s'élargissent comme on peut l'observer sur la courbe (3.8), en diminuant  $a$  (dans le sens négatif), pour  $a = -0.556$  les courbes forment un attracteur faiblement chaotique constitué de deux attracteurs cycliques, ayant une dimension de Lyapounov  $D_L(-0.556) = 2.00322$ . En faisant diminuer la valeur du paramètre  $a$  de plus en plus, les deux attracteurs cycliques s'élargissent et se

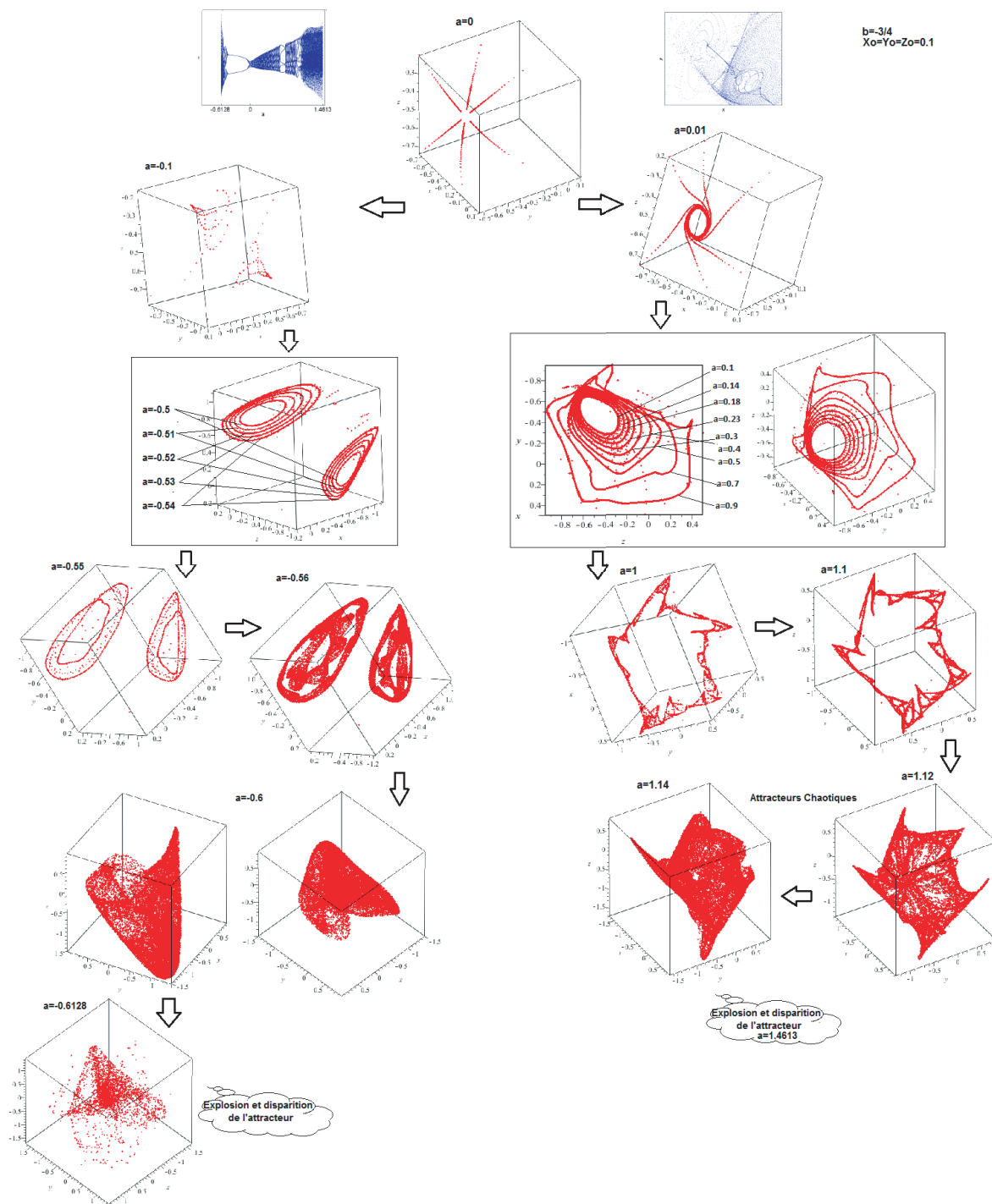


FIGURE 3.8 – L'évolution dynamique de  $T$  pour  $b = -0.75$  et  $a$  variant [13].

fusionnent en un attracteur unique. La complexité de l'attracteur obtenu croît, ainsi que sa dimension de Lyapounov et devient un attracteur chaotique pour  $a = -0.6$

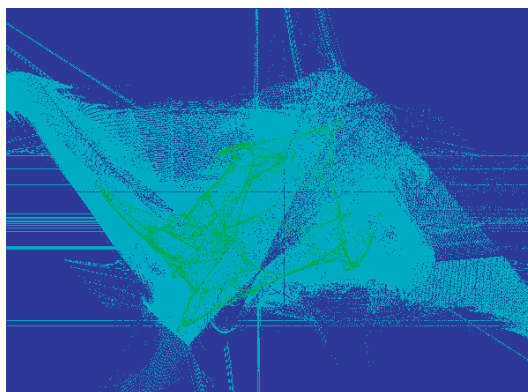


FIGURE 3.9 – Bassin de l'attracteur chaotique obtenu pour  $a = 1.14$  et  $b = -0.75$  [13, 15].

( $l_1 = 0.062330$ ,  $l_2 = 0.003910$ ,  $l_3 = -0.100978$  et  $D_L(-0.6) = 2.655599$ ) et atteint sa plus grande dimension de Lyapounov à  $a = -0.61$ , où  $D_L(-0.61) = 3$ . En diminuant le paramètre  $a$ , l'attracteur touche la frontière de son bassin d'attraction et disparaît pour  $a = 0.612$ .

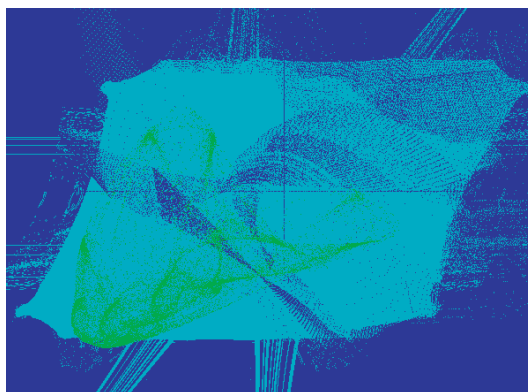
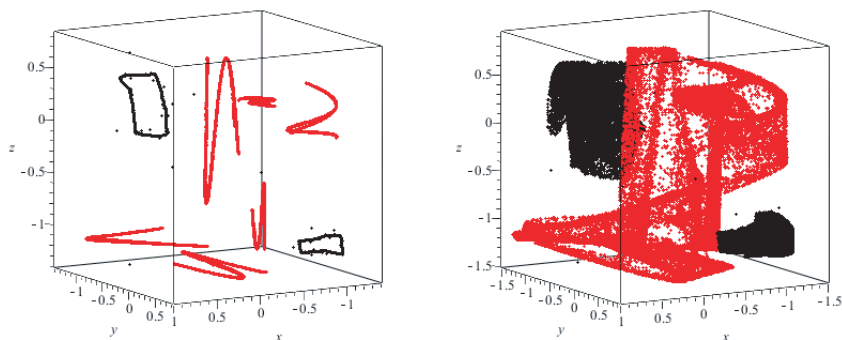


FIGURE 3.10 – Bassin de l'attracteur chaotique obtenu pour  $a = -0.6$  et  $b = -0.75$  [13, 15].

### 3.3.2 La dynamique de $T$ en fixant le paramètre $a$ et $b$ variant

Pour un paramètre  $a$  fixe et  $b$  variant, on peut avoir la coexistence de différents attracteurs dans l'espace des phases (voir figure 3.11) et leurs évolutions chaotiques peuvent se ramener au même attracteur chaotique. Par exemple pour  $a = -0.1$  et  $b$  varie, le noeud foyer stable de  $T$  devient instable et donne naissance à une courbe invariante fermée via la bifurcation de Neïmark-Sacker ( $b = -0.7$ ) qui se transforme en un attracteur composé de six tranches au lieu d'une (né à partir d'un attracteur de douze morceaux) ; et en chan-





(a)  $a = -0.1$  et  $b = -1.25$

(b)  $a = -0.1$  et  $b = -1.33$

FIGURE 3.11 – Coexistence de deux attracteurs. (a) Coexistence d’une double orbite fermée avec une orbite invariante composée de six morceaux ( $a = -0.1$  et  $b = -1.25$ ). (b) Coexistence de deux attracteurs nés à partir de deux courbes invariantes ( $a = -0.1$  et  $b = -1.33$ ) [13, 15].

geant la valeur du vecteur initial, deux orbites fermées sont créés et se développent vers un unique attracteur chaotique en diminuant le paramètre  $b$  (voir figure 3.12).

Nous illustrons ici, la coexistence et l’évolution de deux attracteurs (ou d’orbites) vers un attracteur chaotique pour  $a = -0.1$  et  $b$  variant. Pour cela, on choisira deux valeurs initiales  $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$  et  $X_0 = (1.5, 1, -0.5)$  pour les itérés de  $T$ , de sorte à avoir séparément l’évolution des attracteurs.

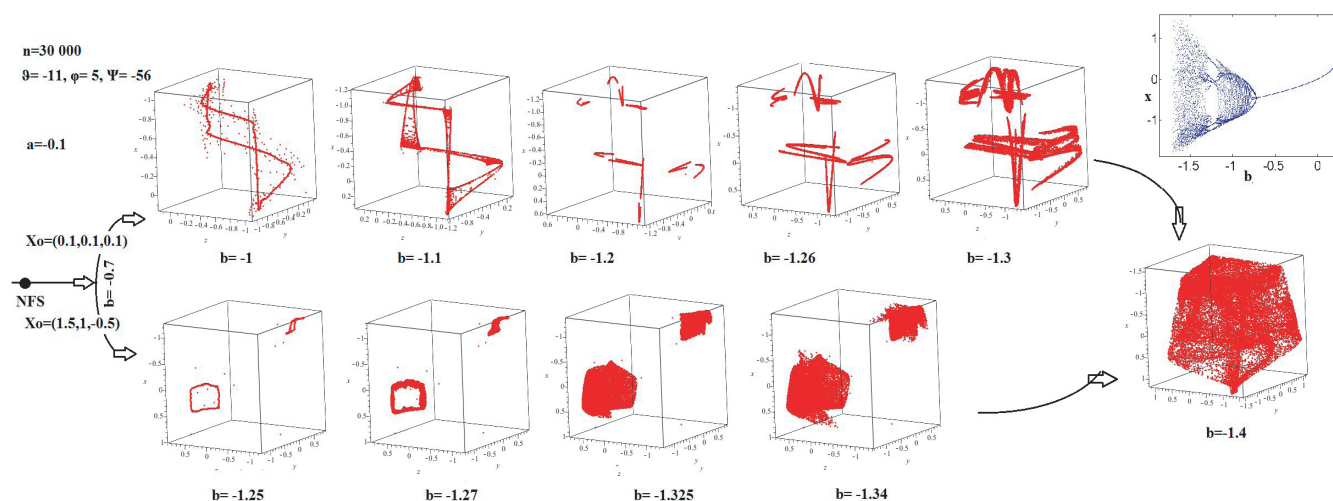


FIGURE 3.12 – Evolution de deux courbes invariantes vers le même attracteur chaotique pour  $a = -0.1$  et  $b$  variable [13].

1. **Pour**  $X_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$  :

Le point fixe de  $T$  devient instable pour  $b = -0.77$  et donne naissance à une courbe invariante fermée via la bifurcation de Neïmark, qui s'élargit pour  $b = -1.1$ . En diminuant  $b$ , la courbe invariante fermée se transforme en un attracteur de douze morceaux pour  $b = -1.2$  qui se fusionnent en un attracteur de six morceaux pour  $b = -1.26$ , qui évolue en un seul attracteur chaotique pour  $b = -1.4$ .

En faisant décroître le paramètre  $b$ , la complexité de l'attracteur chaotique par morceaux croît, ainsi que sa dimension de Lyapounov, notée ici  $D_L(b)$  :

$$D_L(-1.2) = 1.15288, \quad D_L(-1.26) = 1.47679,$$

$$D_L(-1.3) = 2.08497,$$

$$D_L(-1.344585) = 2.9657,$$

$$D_L(-1.38) = 3.$$

L'attracteur correspondant à la dimension de Lyapounov  $D_L = 3$  est dit hyper chaotique, où tous les exposants de Lyapounov sont positifs et disparaît pour  $b < -1.57879$ . Par exemple, pour  $b = -1.49 + 10^{-14}$  on a  $D_L = 3$  et tous les exposants de Lyapounov  $L_i, i = \widehat{1, 3}$  sont positifs :  $l_1 = 0.097947$ ,  $l_2 = 0.072423$  et  $l_3 = 0.022402$ .

2. **Pour**  $X_0 = (1.5, 1, -0.5)$  :

En choisissant  $X_0 = (1.5, 1, -0.5)$ , le cycle d'ordre deux de  $T$  stable pour  $-1.155 \leq b < -0.7$ , devient instable et donne naissance à une courbe invariante double (voir les deux orbites correspondantes à  $b = -1.25$  dans la figure 3.12), qui évolue vers l'attracteur chaotique obtenu précédemment (voir figure 3.12).

En faisant diminuer le paramètre  $b$ , les deux orbites fermées de la courbe invariante s'élargissent (voir les courbes de  $b = -1.27$ ,  $b = -1.325$  et  $b = -1.34$  sur la figure 3.12), devient faiblement chaotique ( $l_1 = 0.003023$ ,  $l_2 = -0.001647$ ,  $l_3 = -0.016845$  et  $D_L(-1.27) = 2.0817$ ) et se fusionnent en un attracteur chaotique formé d'une seule orbite (d'un seul bloc au lieu de deux) pour  $b = -1.4$ .

La dynamique chaotique dans ce cas, passe d'une dimension de Lyapounov nulle où tous les exposants de Lyapounov sont négatifs  $(-, -, -)$  (le cas de  $b = -1.19$  où  $D_L(-1.19) = 0$  (avec  $l_1 = -0.000083$ ,  $l_2 = -0.077717$  et  $l_3 = -0.354569$ ); vers une dimension de Lyapounov non nulle correspondant au chaos faible où le premier exposant de Lyapounov est positif  $(+, -, -)$ , (le cas de  $b = -1.27$ ,  $D_L(-1.27) = 2.0817$

avec  $l_1 = 0.003023$ ,  $l_2 = -0.001647$  et  $l_3 = -0.016845$  ; puis au chaos  $(+, +, -)$ , le cas de  $b = -1.38$  où  $D_L(-1.38) = 3$  et les exposants de Lyapounov sont :  $l_1 = 0.090583$ ,  $l_2 = 0.032421$  et  $l_3 = -0.036398$ .

Cet attracteur chaotique devient hyper chaotique et tous les exposants de Lyapounov sont positifs  $(+, +, +)$ , le cas de  $b = -1.57$  avec sa dimension de Lyapounov  $D_L(-1.57) = 3$  et ses exposants sont :  $l_1 = 0.128915$ ,  $l_2 = 0.102991$  et  $l_3 = 0.058293$ .

L'unique attracteur hyper-chaotique obtenu pour les deux cas, touche la frontière de son bassin d'attraction et disparaît à  $b = -1.5788$ . Les bassins d'attraction des attracteurs obtenus à  $b = -1.34$  et  $b = -1.4$  avec  $a = -0.1$ , sont illustrés dans la figure 3.13.

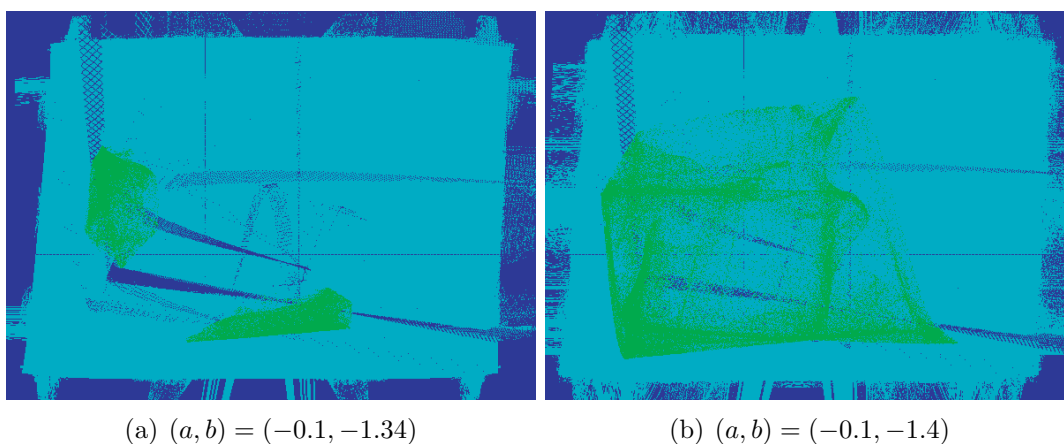


FIGURE 3.13 – Les attracteurs chaotiques (en vert) et leurs bassins d'attraction (en cyan) [13].

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté un exemple d'une transformation ponctuelle non linéaire et non inversible de dimension trois, où nous avons cherché les points fixes et leurs zones de stabilité, ainsi que les bifurcations Fold, Flip et Neïmark-Sacker pour le cycle d'ordre un et le cycle d'ordre deux. Une simulation numérique du plan des paramètres nous a permis d'observer les zones de stabilité des cycles d'ordre un jusqu'à l'ordre quatorze et la présence du chaos. En fixant l'un des paramètres  $a$  et  $b$  et en variant l'autre paramètre de l'endomorphisme  $T$ , les évolutions dynamiques et chaotiques de certains attracteurs ont été illustrées dans l'espace de phases. Le passage des courbes invariantes ou d'attracteurs vers des attracteurs chaotiques, qui disparaissent après la bifurcation de contact avec la

frontière de leurs bassins d'attraction. La coexistence d'orbites invariantes ou d'attracteurs est observée ainsi que leurs évolutions dynamiques vers un seul attracteur chaotique.

# Conclusion Générale

L'objectif assigné à ce mémoire est l'étude des systèmes dynamiques discrets à travers quelques exemples de transformations ponctuelles discrètes, en l'occurrence la récurrence de Hénon et de Lozi en dimension deux et l'endomorphisme tridimensionnel étudié par H.Gharout.

En premier temps, on s'est intéressé à l'étude de deux récurrences d'ordre deux ; en commençant par la récurrence de Hénon, où points fixes et leurs stabilité. Une simulation du plan des paramètres nous a donné un aperçu sur l'existence des cycles attractifs et leurs zones de stabilité et une simulation numérique du diagramme de bifurcation de la récurrence de Hénon pour  $b = 0.3$  et  $a$  variable nous a permis d'observer le passage d'un point fixe vers un cycle d'ordre deux, jusqu'à l'apparition d'un comportement chaotique. La seconde récurrence s'agit de celle de Lozi ; une récurrence linéaire, qui possède presque les mêmes propriétés de la récurrence de Hénon.

En second temps, une transformation ponctuelle non linéaire et non inversible à deux paramètres réelles  $a$  et  $b$  (dite endomorphisme) de dimension trois a été étudiée. En commençant par l'étude de ses points fixes et leurs stabilité, ainsi que les bifurcations classiques (Fold, Flip et Neïmark) pour les cycles d'ordre un et le cycle d'ordre deux. Puis, une simulation numérique du plan des paramètres qui nous a permis de définir les zones de stabilité des cycles d'ordre un jusqu'à l'ordre quatorze ; suivie des cascades de bifurcation (de type Feigenbaum) avec perturbation de l'un des paramètres réelles ont été effectuées. Une illustration dynamique et chaotique de l'évolution de certains attracteurs dans l'espace de phase en fixant l'un des paramètres  $a$  et  $b$  et en variant l'autre paramètre de l'endomorphisme  $T$ , ainsi que le passage des courbes invariantes ou d'attracteurs vers des attracteurs chaotiques.

# Annexe

Les  $n$  exposants de Lyapounov et la dimension de Lyapounov sont calculés à l'aide du logiciel Dynamics [30], où  $n$  est la dimension de la transformation ponctuelle  $T$  (dans notre cas  $n = 3$ ).

## 3.4 Exposants de Lyapounov

**Définition 3.1.** Les exposants de Lyapounov sont un moyen direct de détection du chaos, ils donnent une information sur l'instabilité locale de l'attracteur et quantifie la sensibilité aux conditions initiales. Il s'agit d'une quantité qui mesure le taux de séparation de deux trajectoires avec une différence infinitésimale.

**Remarque 3.2.** Un intérêt particulier est accordé au plus grand exposant  $l_{max}$ , comme le note H.Kantz et T.Schreiber (2004) dans [20].

1. Si  $l_{max} < 0$  : Il s'agit d'un point fixe stable.
2. Si  $l_{max} = 0$  : Il s'agit d'un cycle limite.
3. Si  $l_{max} > 0$  : Le processus est chaotique.

## 3.5 Dimension de Lyapounov $D_L$

Soient  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$  les  $n$  exposants de Lyapounov relatifs à un attracteur d'un système dynamique, rangés par ordre décroissant. Soit  $j$  le plus grand entier tel que  $l_1 + \dots + l_j \geq 0$ , la dimension de Lyapounov  $D_L$  est alors définie par :

$$D_L = j + \frac{l_1 + \dots + l_j}{|l_{j+1}|}. \quad (3.42)$$

**Remarque 3.3.** Pour le calcul de la dimension de Lyapounov, l'intérêt est porté même aux signes des exposants [10].

1. Pour un attracteur on a toujours  $\sum_{i=1}^n l_i < 0$ , donc  $j$ , s'il existe est strictement inférieur à  $n$ .

2. Si  $j$  n'existe pas, on a par convention  $D_L = 0$ . En effet, cette situation se présente lorsque l'attracteur est un point fixe et donc possède une dimension nulle.
3. Pour un cycle limite, on a  $l_1 = 0 > l_2 \geq \dots \geq l_n$  et  $D_L = 0$ .
4. Si tous les exposants de Lyapounov sont positifs non nuls, alors  $D_L > 1$ .

# Bibliographie

- [1] S. Belkhiri. Etude des exemples des systèmes dynamiques chaotique de dimension deux. Master's thesis, 2016.
- [2] A. Boukabou. *Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches*. Doctorat, Département d'électronique, Université de Constantine. Algérie, Juin 2006.
- [3] J.P. Carcasses. A necessary and sufficient condition to have  $r$  pairs of complex multipliers with modulus equal to unity in the case of an  $n$ -dimensional map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(4) :1193–1204, 1995.
- [4] J.P. Carcasses. Singularities of the parametric plane of an  $n$ -dimensional map. determination of different configurations of fold and flip bifurcation curves. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(2) :419–447, 1995.
- [5] J.P. Carcasses and H. Kawakami. Existence of a cusp point on a fold bifurcation curve and stability of the associated fixed point. case of an  $n$ -dimensional map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(5) :875–894, 1999.
- [6] J.P. Carcasses and A.K. Taha. Study of a two-dimensional endomorphism by use of the parametric singularities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(12) :2853–2862, 2000.
- [7] A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Number 12. Hachette, Paris, 1838.
- [8] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [9] A. Djerrai and I. Djellit. Dynamics of three dimensional maps. *Facta Universitatis*, 24(01) :107–119, 2011.
- [10] J.D. Farmer, E. Ott, and J.A. Yorke. *The Dimension of Chaotic Attractors*. In : Hunt B.R., Li TY., Kennedy J.A., Nusse H.E. (eds) *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, New York, NY, 1983.



- [11] D. Fournier-Prunaret, C. Mira, and L. Gardini. Some contact bifurcations in two dimensional exemples. *Grazer Mathematische Berichte (Special issue Proceedings ECIT94)*, (334) :77–96, 1997.
- [12] L. Gardini, I. Foroni, and C. Mira. On a particular foliation associated with a polynomial family of noninvertible maps of the plane. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(5) :1601–1624, 2004.
- [13] H. GHAROUT. *Transformation ponctuelle de type polynomiale de dimension trois*. Doctorat, Département des Mathématiques, Université de Bejaia, Université de Bejaia, Algérie, Décembre 2018.
- [14] H. GHAROUT, N. Akroune, and A.K. Taha. *Etude de la dynamique chaotique d'une transformation ponctuelle non linéaire et non inversible de dimension trois*. 8ème Ecole sur les Equations Différentielles Abstraites, Université de Bejaia, Algérie, 2015.
- [15] H. GHAROUT, N. Akroune, A.K. Taha, and D. Fournier-Prunaret. Chaotic dynamics of a three-dimensional endomorphism. *Journal of Siberian Federal University Mathematics and Physics*, 12(1) :36–50, 2019.
- [16] N. Giquel. Bifurcation structure in a transmission system modelled by a two-dimensional endomorphism. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 06(08) :1463–1480, 1996.
- [17] I. Gumowski and C. Mira. *Dynamique chaotique, Transformations ponctuelles Transition Ordre-Désordre*. Cepadus editions, 1980.
- [18] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comunications of Mathematical Physics*, 50 :69–77, 1976.
- [19] G. Kaddoum, D. Roviras, P. Chargé, and D. Fournier-Prunaret. Robust synchronization for asynchronous multi-user chaos-based ds-cdma. *Elsevier, Signal Processing*, 89 :807–818, 2009.
- [20] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*, volume 388. Cambridge University Press, 2 edition, 26 janvier 2004.
- [21] H. Kumeno, D. Fournier-Prunaret, A.K. Taha, and Y. Nishio. Two-dimensional coupled parametrically forced map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(2) :1–20, 2013.
- [22] L. Larger and J.M. Dudley. Nonlinear dynamics optoelectronic chaos. *Nature*, 465 :41–42, 2010.
- [23] L. Larger and D. Fournier-Prunaret. *Route to chaos in an optoelectronic system*. Cork, Irlande, IEEE Publishers, 2005.

- [24] G. Millerioux. *Modèles par Transformations Non Inversibles et Application à la Sécurité des Communications. Synchronisation du Chaos*. Doctorat, INSA de Toulouse, Octobre 1997.
- [25] C. Mira and J.P. Carcasses. On the crossroad area-saddle area and crossroad area-spring area transitions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1(3) :641–655, 1991.
- [26] C. Mira, D. Fournier-Prunaret, L. Gardini, H. Kawakami, and J.C. Cathala. Basin bifurcations of two-dimensional non invertible maps. fractalization of basins. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 4(2) :343–382, 1994.
- [27] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, and J.C. Cathala. *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*, volume 20. World Scientific, Series A, Juin 1996.
- [28] C. Mira, M. Touzani-Qriouet, and H. Kawakami. Bifurcation structures generated by the nonautonomous duffing equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(7) :1363–1379, 1999.
- [29] A. Naimzada and F. Tramontana. Two different routes to complex dynamics in an heterogeneous tripoly game. *Journal of Difference Equations and Applications*, 21(7) :553–563, 2015.
- [30] H.E. Nusse and J.A. Yorke. *Dynamics : Numerical Explorations*. Number 2. Springer-Verlag New York, 1998.
- [31] T. Puu and I. Sushko. *Oligopoly Dynamics : Models and Tools*. Springer Verlag, New York, 2002.
- [32] D. Ruelle. Small random perturbations of dynamical systems and the definitions of attractors. *Comm.Math.Phys.New York : Springer*, 82 :137–151, 1981.
- [33] E. Shamsara, Z. Afsharnezhad, and R. Mostolizadeh. Hopf bifurcation for a discontinuous htlv-1 model. *Filomat*, 31(20) :6247–6267, 2017.
- [34] T. Ueta, S. Tsuji, T. Yoshinaga, and H. Kawakami. Calculation of the isocline for the fixed point with a specified argument of complex multipliers. *IEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2001)*, 3 :755–758, 2001.
- [35] G. Wen, D. Xu, and J. Xie. Control of degenerate hopf bifurcations in threedimensional maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, 13 :486–494, 2003.
- [36] J. Xu. *Dynamique chaotique en vue d'applications aux télécommunications : étude d'une transformation ponctuelle symétriquement découplée définie à partir d'une fonction sinus carré*. Doctorat, Ecole Doctorale Systèmes, Université de Toulouse. France, 07 Février 2008.

- 
- [37] J. Xu, D. Fournier-Prunaret, A.K. Taha, and P. Chargé. Chaos generator for secure transmission using a sine map and a rlc series circuit. *Science China*, 53(1) :129–136, 2010.
- [38] Y.Yahiaoui and N. Akroune. Neimark-sacker and closed invariant curve bifurcations of a two dimensional map used for cryptography. *Electronic Journal of Theoretical Physics*, 14(37) :195–212, 2018.
- [39] O. Zehrour. *Contribution à l'étude et à la classification du chaos dans les systèmes dynamiques*. Doctorat, Départements de mathématiques appliquées, Université de Constantine. Algérie, 2013.

## Résumé

Dans ce travail, on s'est intéressé aux systèmes dynamiques discrets de dimension deux et trois. Deux exemples de dimensions deux (modèle de Hénon et récurrence de Lozi) ont été abordés et un exemple d'une récurrence non linéaire et non inversible de dimension trois à deux paramètres réels, appelé endomorphisme, a été illustré.

**Mots clés :** récurrence de Hénon, récurrence de Lozi, bifurcation, chaos.