

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

*Université Abderrahmane Mira de Bejaia*

Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques

---

---

*Mémoire de Master Académique en Mathématiques*

---

---

Spécialité : Probabilités Statistique et Applications

*Thème*

---

---

**Statistique inférentielle dans les files d'attente**

---

---

Présenté par :

Mlle : **IBAZIZEN** Kahina

*Devant le jury*

M. <b>OUAZINE</b> Sofiane	Président	M.C.B	Université de Bejaia
Mme. <b>IDJIS</b> Khelidja	Promotrice	M.C.B	Université de Bejaia
Mme. <b>BOURAINÉ</b> Louiza	Examinatrice	Professeur	Université de Bejaia
M. <b>ZIOUI</b> Arezki	Examineur	M.C.B	Université de Bejaia

Année universitaire : 2019/2020

# Remerciement

Je remercie dieu, le tout puissant, de m'avoir donné santé, courage et patience sans lesquels je n'aurais jamais accompli ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à ma promotrice Mme. IDJIS. Khelidja de m'avoir encadré durant cette année avec patience et disponibilité. Et pour son aide précieuse et pour les conseils qu'elle m'a donné.

Mes remerciements vont également aux membres de jury, le président M. OUAZINE Sofiane, les examinateurs Mme. BOURAINE Louiza et M. ZIOUI Arezki, qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail.

Un grand merci pour toute ma famille, surtout mes parents qui m'ont épaulés, soutenu et suivis tout au long de ce travail.

Je remercie mes amis(es) pour leurs aide et conseils qu'ils m'ont donné tout au long de mon projet.

Enfin, Je remercie toutes les personnes ayant contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

À

*Ma mère adorée, aucune dédicace ne saurait être assez élégante pour exprimer ce que tu mérites.*

À

*Mon père qui m'a indiqué la bonne voie, qui m'a encouragé durant toutes mes années d'études.*

*Que Dieu les protège et leurs donne tout le bonheur du monde.*

À

*Mes frères et soeurs en leur souhaitant un avenir radieux et plein de réussite.*

À

*Tous mes amis(es) avec qui j'ai partagé les meilleurs moments.*

À

*Ma promotrice et à tous les enseignants et le personnel de l'université de Bejaia.*

---

# Table des matières

---

Liste des figures	4
Introduction générale	4
<b>1 Files d'attente classiques</b>	<b>8</b>
1.1 Description d'un modèle d'attente classique . . . . .	8
1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente . . . . .	9
1.3 Classification des systèmes des files d'attente . . . . .	9
1.4 Notation de Kendall(1953) . . . . .	10
1.5 Mesures de performances d'une file d'attente . . . . .	10
1.6 Loi de little . . . . .	11
1.7 Systèmes de files d'attente markoviens . . . . .	12
1.7.1 Modèle d'attente M/M/1 . . . . .	12
1.8 Files d'attente non markoviens . . . . .	14
1.8.1 Loi d'erlang . . . . .	15
1.8.2 Le modèle d'attente M/G/1 . . . . .	16
1.8.3 Le modèle d'attente G/M/1 . . . . .	19
<b>2 Estimation paramétrique et tests Statistiques</b>	<b>22</b>
2.1 Estimation ponctuelle . . . . .	22
2.2 Méthodes de calcul d'un estimateur . . . . .	24
2.2.1 Estimation par la méthode des moments . . . . .	24
2.2.2 Estimation par maximum de vraisemblance . . . . .	25
2.2.3 Estimation bayésiens . . . . .	27
2.3 Estimation par intervalles de confiance . . . . .	29
2.3.1 Principe de la méthode . . . . .	29
2.3.2 Théorème limite central . . . . .	30
2.3.3 Estimation d'une moyenne $\mu$ par intervalle de confiance . . . . .	30
2.3.4 Propriétés des intervalles de confiance . . . . .	30
2.4 Tests statistiques . . . . .	31
2.4.1 Tests entre deux hypothèse simples . . . . .	33
2.4.2 Tests d'hypothèse simples contre hypothèse composite . . . . .	33

2.4.3	Tests entre deux hypothèses composites(test de Lehmann)	34
2.4.4	Tests non paramétriques d'ajustement	36
<b>3</b>	<b>Analyse statistique des systèmes d'attente</b>	<b>39</b>
3.1	Identification des modèles	39
3.1.1	Collection des données	40
3.1.2	Tests pour la stationnarité	40
3.1.3	Tests pour l'indépendance	41
3.1.4	Sélection des distribution	41
3.2	Estimation paramétrique	42
3.2.1	Estimation paramétrique par la méthode du maximum de vraisemblance	42
3.2.2	La méthode des moments	51
3.2.3	Estimation Bayésienne	52
3.3	Tests d'hypothèses	58
3.3.1	Tests pour les paramètres d'arrivées et de service dans le système M/M/1.	58
3.3.2	Sélection de la distribution	59
3.3.3	Un test pour le temps de service exponentiel en utilisant les données du temps d'attente	62
3.3.4	Controle de l'intensité du trafic	62
	<b>Conclusion</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>

---

# Table des figures

---

1.1	Représentation d'un modèle d'attente classique . . . . .	9
1.2	Graphe de transition de la file d'attente M/M/1 . . . . .	12
1.3	Evolution de l'état de la file d'attente M/G/1 . . . . .	16
3.1	Evolution de $MSE(\hat{\rho})$ par la methode E.M.V . . . . .	47
3.2	L'évolution de MSE des estimateurs bayésiens . . . . .	55

---

# Introduction générale

---

Les origines de la théorie des files d'attente remontent à l'époque où A. K. Erlang entre 1909 et 1920 a posé les bases dans ses recherches sur le trafic téléphonique. Ses travaux ont par la suite été intégrés à la recherche opérationnelle. Elle permet d'étudier différents systèmes réels des logistiques, de communication, de télécommunication depuis les travaux de l'ingénieur Danois Agner Krarup Erlang [33], sur l'encombrement des lignes téléphoniques, ou encore des réseaux informatiques qui admettent un phénomène d'attente.

Cette théorie a pour objectif, la modélisation stochastique, l'évaluation des performances et le contrôle des différents systèmes où les arrivées sont des clients qui rejoignent la file pour avoir leurs services.

L'analyse statistique des systèmes d'attente joue un rôle très important dans la formulation d'un modèle mathématique réel, qui a fait son apparition en (1957), avec les deux travaux faits en parallèle par Clarck [28], qui a utilisé la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les taux de transitions  $(\lambda, \mu)$  d'un système de files d'attente simple. On trouve aussi Rao [54], et les synthèses de Bhat [21][22], qui sont parmi les premiers auteurs travaillés sur l'analyse statistique des systèmes d'attente. Où ils ont commencé par exposer les problèmes statistiques survenant lors de l'identification des modèles d'attente. Ensuite ils sont passés à étudier l'estimation paramétrique, en incluant la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Jain [43] qui a utilisé la méthode de maximum de vraisemblance pour estimer la charge de système non-markoviens  $M/E_k/1$ . Malgré les problèmes rencontrés lors de l'application des méthodes statistiques dans les files d'attente, mais ces dernières sont très utilisées surtout à nos jours [23].

Récemment, une nouvelle approche plutôt subjective a été aussi à son tour adoptée par les statisticiens et appliquée à la théorie des files d'attente, il s'agit de la statistique bayésienne, qui offre un cadre de raisonnement bien adapté à l'intégration des opinions et des faits de toutes provenances qui interviennent dans la gestion des risques et la prise de décision en contexte d'incertitude [23].

Parmi les premiers travaux qui ont été publiés sur l'analyse statistique bayésienne des systèmes d'attente, on cite Muddapur [52] qui a utilisé la même fonction de vraisemblance

donnée dans l'article de Clarck [28], pour estimer le taux des inter-arrivées  $\lambda$  et le taux de la durée de service  $\mu$ , et l'intensité du trafic  $\rho$ , dans une file  $M/M/1$ . Ce système est plus simple et utile, il a été largement considéré dans la littérature (A.Choudhury et A.C.Borthakur [27], S.P.Mukherjee and S.Chowdhury [53]).

Par la suite, on trouve Ausin et al [12], qui ont étudié l'inférence bayésienne sur les files d'attente non-markoviennes  $M/G/1$ , et  $G/M/C$ . Où ils ont choisi le nombre de serveurs optimal qui minimise la fonction de cout.

L'un des premiers objectifs de ce mémoire est d'actualiser les synthèses de Bhat et Rao en 1987 et 1997 ([21], [22]). En effet, des résultats intéressants ont été intégrés dans la première synthèse de Bhat et Rao de 1987 [21]. Ces résultats ont été présentés en suivant une certaine logique bien déterminée. Les auteurs ont commencé par exposer les problèmes statistiques survenant lors de l'identification des modèles. Ensuite, ils ont passé en revue l'estimation paramétrique incluant la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode des moments ainsi que l'estimation de la valeur moyenne du processus. Enfin, ils ont terminé en donnant les tests d'hypothèses les plus utilisés dans l'analyse statistique des systèmes de files d'attente.

Dans le cadre de réalisation de cet objectif, nous avons travaillé sur l'analyse statistiques des systèmes d'attente, où on a déroulé notre travail sous trois chapitres. Le premier est consacré pour citer les notions de base sur les files d'attente classiques où on a analysé quelques systèmes de files d'attente markoviens et non markoviens. Le deuxième chapitre porte sur l'estimation statistique et les tests où on a défini quelques méthodes d'estimation, on cite la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode des moments, ainsi que l'estimation bayésienne et aussi quelques tests paramétriques et non paramétriques, à savoir le test de khi-deux et le test de Kolmogorov-Smirnov. Et e troisième chapitre est consacré pour l'analyse statistique des système de files d'attente , où on a appliqué les notions déterminées dans le deuxième chapitre pour donner les estimateurs des taux de transitions des système d'attente qui sont bien définis dans le premier chapitre, et quelques tests usuels sur le choix de la distribution et sur l'intensité de trafic en présentant deux exemples numériques.

Le mémoire se termine par une conclusion et une bibliographie, et sans oublier que tout travail commence par une introduction générale.



# Chapitre 1

---

## Files d'attente classiques

---

La théorie des files d'attente, ou queues, et les réseaux de files d'attente sont des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation de systèmes logistiques et de communication. En quelques mots, cette théorie a pour objet l'étude des systèmes où des entités, appelées clients, cherchant à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d'obtenir un service. La demande concurrente d'une même ressource par plusieurs clients engendre des délais dans la réalisation des services et la formation de files de clients désirant accéder à une ressource indisponible. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble, d'identifier les éléments critiques ou, encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement [22],[21].

Les systèmes de files d'attente sont très étudiés et une abondante littérature couvre ce sujet ([7],[3],... etc).

### 1.1 Description d'un modèle d'attente classique

Une file d'attente ou queue est un système stochastique composé d'un certain nombre (fini ou non) de places d'attente d'un ou plusieurs serveurs et bien sûr de clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système.

Le schéma suivant représente les éléments principaux dans une file d'attente.

Dans ce chapitre nous nous limiterons aux systèmes de type  $M/M/1$ ,  $M/G/1$  et  $G/M/1$  ainsi qu'à l'approche dite de la chaîne de Markov induite.

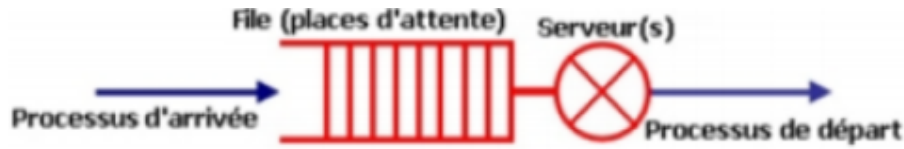


FIGURE 1.1 – Représentation d'un modèle d'attente classique

## 1.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients  $N(t)$  se trouvant dans le système à l'instant  $t$ , ( $t \geq 0$ ).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état  $P_n(t) = P(N(t) = n)$ , qui définissent le régime transitoire du processus stochastique  $N(t)$ ,  $t \geq 0$ . Avec  $P_n(t)$  dépend de l'état initial du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique qui est défini par :

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(N(+\infty) = n) = P(N = n), n=0, 1, 2, \dots$$

## 1.3 Classification des systèmes des files d'attente

Afin de spécifier un système de files d'attente, on se base sur trois éléments :

- a. Le processus d'arrivée :** Pour le processus d'arrivée, on s'intéresse aux instants d'arrivés des clients dans la file. Ils sont en général aléatoires. Certaines hypothèses sont faites sur leurs lois. Tout d'abord, il n'arrive qu'un client à la fois. La deuxième hypothèse est l'homogénéité dans le temps. Cela se traduit par le fait que les temps d'inter-arrivée des clients sont des v.a. de même loi. Ils sont également supposés indépendants. Enfin, la loi des temps d'inter-arrivée est supposée connue. Le cas le plus courant est celui où cette loi est exponentielle. Dans ce cas, le modèle des temps d'arrivée des clients est un processus de Poisson.
- b. Le processus de service :** qui comprend (le nombre de serveurs et la loi probabiliste décrivant la durée des services)
- c. Structure et discipline de la file :** La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service.

## 1.4 Notation de Kendall(1953)

La notation de Kendall (1953) permet de décrire le système d'attente de manière succincte. Avec cette notation, un système d'attente est décrit par :A/B/s/K/N/D[41].

avec :

A : est la distribution des arrivées.

B : est la distribution des temps de service.

s : est le nombre de serveurs.

K : est le nombre maximum de clients dans le système (clients attendant dans la file + clients en cours de service).

N : taille de la population des clients (habituellement infinie).

D : est la discipline de service (la manière de sortir de la file d'attente pour les clients) :First In First Out (FIFO), Last In First Out (LIFO), aléatoire (RAND), Round Robin 1... .

En particulier, les deux premiers paramètres A et B caractérisant les lois des suites des inter-arrivées et des temps de services prennent essentiellement les valeurs suivantes :

- **M (memoryless)** si la suite des variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle. ( si  $A = M$ , le processus des entrées est donc un processus de Poisson.)
- **G (general)** si la suite des variables aléatoires est de loi générale.
- **GI (general independent)** si les variables aléatoires sont de loi générale et indépendantes.
- **D (deterministe)** si la suite est déterministe et constante.
- $E_k$  (**Erlang-k**) si la suite des variables aléatoires est de loi D'Erlang d'ordre k.

Lorsque les trois derniers éléments de la notation de Kendall ne sont pas précisés, ils sont pris par défaut comme suit :

D=FIFO,  $N=\infty$ ,  $K=\infty$ .

## 1.5 Mesures de performances d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente ou d'un réseau de files d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données, et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

- $L=E(X)$  : nombre moyen de clients dans le système.
- $L_q$  : nombre moyen de clients dans la file.
- $W$  : le temps moyen de séjour d'un clients dans le système.
- $W_q$  : le temps d'attente d'un client dans la file.

Ces valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais elles sont liées par la loi de Little.

D'une manière générale, une file est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté  $\lambda$ , est inférieur au nombre moyen de client pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter  $\mu$  clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est  $s$ , une file est stable si et seulement si :

$$\lambda < s\mu \iff \rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1.$$

$\rho$  est appelé charge ou coefficient d'utilisation du système.

## 1.6 Loi de little

La loi de Little est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime permanent du système. Aucune hypothèse sur les variables aléatoires qui caractérisent le système (temps d'interarrivées, temps de service, etc). La seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable. La loi de Little s'exprime telle que dans la propriété suivante :

**Théorème 1.6.1.** (les lois de little) *Le nombre moyen de clients, le temps moyen passé dans le système et le débit moyen d'un système stable en régime permanent se relient de la façon suivante :*

$$L = \lambda_e W$$

Avec :

$\lambda_e$  : est le taux d'entrée dans le système  $M/M/1$  ( $\lambda_e = \lambda$ ).

*La loi de Little peut aussi s'appliquer en considérant uniquement l'attente dans la queue (sans le service). Elle permet alors de relier le nombre moyen de clients en attente  $L_q$  au temps moyen d'attente d'un client avant service  $W_q$ , par la relation :*

$$L_q = \lambda_e W_q.$$

*A partir de ces deux relations on peut déterminer d'autres relations qui sont :*

$$L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

## 1.7 Systèmes de files d'attente markoviens

Ils se sont les systèmes dans lesquelles les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées. La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastiques approprié. Ce processus est souvent le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ .

### 1.7.1 Modèle d'attente M/M/1

Le système M/M/1 est le plus simple des systèmes de files d'attente. Le flot des arrivées est poissonien de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$  [10],[3].

La figure suivante représente le graphe de transition de système d'attente de type M/M/1 .

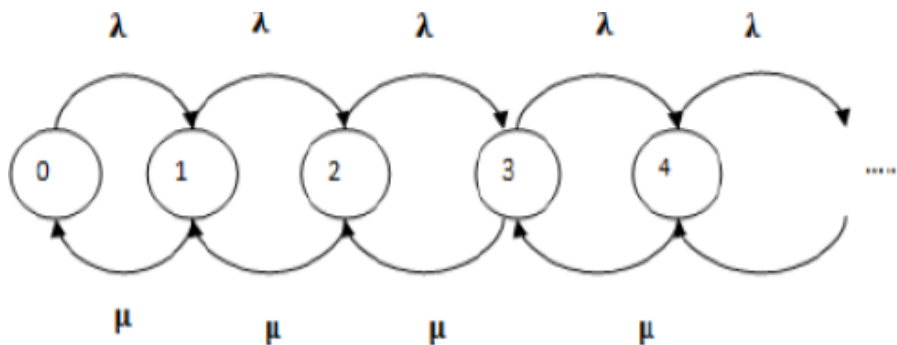


FIGURE 1.2 – Graphe de transition de la file d'attente M/M/1

#### Etude du régime transitoire

Soit  $N(t)$  le nombre de clients présents dans le système à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ). Et soit  $P_{ij}(\Delta t)$  la probabilité conditionnelle que le processus  $N(t)$  passe d'un état  $i$  à l'état  $j$  pendant la durée  $\Delta t$ . Cette probabilité est appelée probabilité de transition.

$$P_{ij}(\Delta t) = P[N(t + \Delta t) = j / N(t) = i]; i, j = 1, 2, \dots$$

Ces probabilités de transition ne dépendent pas de  $t$ .

A l'aide des propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, on a :

- $P_{n,n+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t (1 - \mu \Delta t) + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), n \geq 0$ .

- $P_{n,n}(\Delta t) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t), n \geq 1.$
- $P_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t).$
- $P_{n,n-1}(\Delta t) = \mu\Delta t + o(\Delta t), n \geq 1.$
- $P_{n,m}(\Delta t) = o(\Delta t),$  pour  $|m - n| \geq 2.$

Soit  $P_n(t) = P[N(t) = n]$  la probabilité qu'à l'instant  $t$ , il y a  $n$  clients dans le système,  $n = 1, 2, \dots$

On a :

$$\begin{cases} P_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)P_0(t) + \mu\Delta tP_1(t) + o(\Delta t) \\ P_n(t + \Delta t) = \lambda\Delta tP_{n-1}(t) + (1 - (\lambda + \mu)\Delta t)P_n(t) + \mu\Delta tP_{n+1}(t) + o(\Delta t), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

et comme  $o(\Delta t)$  est négligeable, on aura :

$$\begin{cases} \frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

donc, en faisant tendre  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient les équations différentielles dites "équations de Chapman-Kolmogorov" suivantes :

$$\begin{cases} p'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) & \forall n \geq 1. \\ p'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t). \end{cases}$$

**Etude du régime stationnaire** Lorsque  $t \rightarrow \infty$  dans le système de Chapman-Kolmogorov, on peut montrer que les limites :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$$

existe sous la condition  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ , et elles sont indépendantes de l'état initial du processus et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_n(t) = 0; n = 0, 1, 2, \dots$$

On obtient donc le système d'équations linéaires et homogènes suivant :

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda + \mu)p_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Avec la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Sa résolution conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} P_0 = 1 - \rho \\ P_n = P_0 \rho^n, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

avec  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

$P = (P_n)_{n \geq 0}$  est appelée distribution stationnaire.

**Caractéristique de système M/M/1 :**

- Le nombre moyen de clients dans le système :

$$L = \mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} n P_n = (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n$$

D'où :

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

- Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \sum_{n \geq 1} (n - 1) P_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$W = \frac{1}{\lambda} L = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- Le temps moyen d'attente dans la file

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

## 1.8 Files d'attente non markoviens

En l'absence de l'exponentialité ou plutôt lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques, le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicate. On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes :

**Méthode des étapes d'Erlang :** Son principe est d'approximer toutes loi de probabilité ayant une transformé de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étape.

**Méthode de la chaîne de Markov induite :** Cette méthode élaborée par Kendall, est souvent utilisée. Elle consiste à choisir une séquence d'instantants  $1, 2, 3, \dots, n$  (déterministe ou aléatoire) telle que la chaîne induite  $N_n; n \geq 0$ , ou  $N_n = N(n)$  soit markovienne et homogène.

**Méthode des variable auxiliaires :** Elle consiste à compléter l'information sur le processus  $\{N_t, t \geq 0\}$  de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus :

$\{N(t), A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_n)\}$  Les variables  $A(t_k), k \in 1, 2, 3, \dots, n$  sont dites auxiliaires.

**Méthode des évènements fictifs :** Le principe de cette méthode est d'introduire des évènements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variable aléatoires décrivant le système étudié.

**Simulation :** C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel donné sur ordinateur. Elle nous permet d'étudier les systèmes les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs. Mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires suivant les lois gouvernant le système.

### 1.8.1 Loi d'erlang

Considerons une variable aléatoire  $X$  de densité de probabilité  $X \rightsquigarrow \gamma(\alpha, 1/\beta)$  :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, x \geq 0. \tag{1.1}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

$\alpha, 1/\beta$  sont les paramètres de la distribution de probabilité.

On a :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \alpha\beta \\ var(X) = \alpha\beta^2 \end{cases}$$

**Exemple 1.8.1.** Considerons un cas particulier de cette distribution où :

$$\begin{cases} \alpha = k & k \in \mathbb{N}^* \\ \beta = \frac{1}{k\mu} & \mu = cste > 0. \end{cases}$$

La formule de la distribution de probabilité d'Erlang est :

$$f(x) = \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\mu x}, 0 < x < \infty \tag{1.2}$$

$k, \mu$  sont les paramètres de la distribution d'Erlang :

$$\begin{cases} E(X) = \alpha\beta = k \frac{1}{k\mu} = \frac{1}{\mu} \\ var(X) = \alpha\beta^2 = k \frac{1}{k^2\mu^2} = \frac{1}{k\mu^2} \end{cases}$$

La distribution d'erlang qui correspond a une valeur particulière  $E_k$  est appelée Erlang de type (ordre)  $k$ .



**Remarque 1.8.1.** La somme de  $k$  variables aléatoires réelles exponentielles indépendantes identiquement distribuées avec une moyenne de  $\frac{1}{k\mu}$  est une distribution d'ergang de type  $k$  avec une moyenne  $\frac{1}{\mu}$  cette relation nous permet de d'écrire les systèmes d'attentes ou le service peut être divisé au plusieurs étapes identique [27] :

$\left[ \begin{matrix} 1^{ere} \text{étape} \\ \frac{1}{k\mu} \end{matrix} \right] \dots \left[ \begin{matrix} 2^{eme} \text{étape} \\ \frac{1}{k\mu} \end{matrix} \right] \dots \dots \dots \left[ \begin{matrix} k^{eme} \text{étape} \\ \frac{1}{k\mu} \end{matrix} \right]$  et le service globale est de type Erlang  $k$ .

Il faut noté que :

1. Toutes les étapes (phases) de service sont indépendantes et identiquement distribuées.
2. A chaque fois, on a un seul client dans le service, c'est-à-dire si on a un client qui rentre dans la première phase de service une fois qu'il termine, il se dirige vers une autre phase est un autre client qui est en attente ne peut pas accéder à la première phase jusqu'à se que le client qui est en service quitte complètement le système.

### 1.8.2 Le modèle d'attente M/G/1

Le flux des arrivées dans le système  $M/G/1$  est poissonnien de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est distribuée selon une loi quelconque pouvant être uniforme, normale, constante,... La particularité de ce système est que, contrairement au cas  $M/M/1$ , le processus  $N(t)_{t \geq 0}$  n'est pas markovien [37]. Le graphe de transition associe à la file d'attente  $M/G/1$  est :

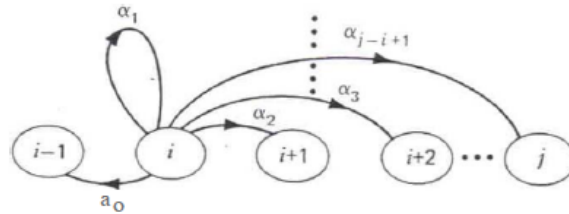


FIGURE 1.3 – Evolution de l'état de la file d'attente M/G/1

**Chaîne de Markov induite et probabilités de transition :**

Soit un système d'attente  $M/G/1$ , le processus des arrivées est poissonnien de paramètre  $\lambda$  et le temps de service  $Y$  est distribué suivant une loi générale  $G$ . On admet que  $Y$  est une variable aléatoire continue et que  $E(Y) = \frac{1}{\mu}$ .

On se propose à déterminer la distribution stationnaire et les caractéristiques usuelles du processus  $(N(t))_{t \geq 0}$  où  $N(t)$  est le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ .

Considérant le processus  $N(t)$  aux instants  $t_1, t_2, \dots$  où des clients terminent leur service et quittent le système.

On définit ainsi un processus stochastique à temps discret  $\{N_n = N(t_n), n = 1, 2, \dots\}$ . Où :  $t_n$  est l'instant du fin de service du  $n^{ieme}$  client. Pour vérifier que cette suite de variables aléatoires est une chaîne de Markov à temps discret, on considère le nombre  $A_n$  de clients qui entrent dans le système pendant le  $n^{ieme}$  service.

Les variables aléatoires  $A_n$  sont indépendantes entre elles ; leur distribution commune est :

$$\begin{aligned} P(A_n = k) &= a_k = \int_0^\infty P(A_n = k/Y)P(t < Y < t + dt) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}dG(t), 0 < a_k < 1, (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Alors

$$N_{n+1} = N_n - \delta_n + A_{n+1}. \tag{1.3}$$

avec :

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & si \quad N_n > 0 \\ 0, & si \quad N_n = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que  $N_{n+1}$  ne dépend que de  $N_n$  et de  $A_{n+1}$  et non pas de  $N_{n-1}$  et  $N_{n-2} \dots$ . Ce qui signifie que la suite  $\{N(t), t \geq 0\}$  est markovienne.

La suite de variables aléatoires  $\{N_n, n \geq 1\}$  s'appelle chaîne de Markov induite du processus  $\{N(t), t \geq 0\}$ . Ces probabilités de transition en une étape sont :

$$P_{ij} = P[N_{n+1} = j / N_n = i]$$

d'où :

$$P_{ij} = \begin{cases} P_j = a_j & si \quad i = 0 \\ P_{j-i+1} = a_{j-i+1} & si \quad j + 1 \geq i \geq 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Et la matrice de transition  $P = [P_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}}$  prend la forme suivante :

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

**Régime stationnaire :** Le régime stationnaire du système existe et est identique à l'état stationnaire de la chaîne de Markov induite  $N_n$ , si  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ . Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ , où  $\pi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr(N_n = k)$ . Cependant, nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante  $\Pi(z)$  donnée par la formule de Pollaczek-Khintchine :

$$\Pi(z) = G^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{G^*(\lambda - \lambda z) - z} \tag{1.4}$$

Où  $z$  est un nombre complexe vérifiant  $|z| \leq 1$ , et  $G^*$  représente la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service définie pour  $s > 0$  par :

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$$

**Caractéristiques du système M/G/1 :** On note  $\lambda$  le taux d'arrivée des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée séparant deux arrivées successives est  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ . On note  $\mu$  le taux de service des clients. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est  $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\mu}$ .

L'intensité du trafic s'exprime de la manière suivante :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(X)}.$$

Où :  $X$  est la durée des inter-arrivées et  $Y$  est la durée de service.

– **Le nombre moyen de clients dans le système :** Cette quantité peut être déterminée, en régime stationnaire, en utilisant la relation :

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{z \rightarrow 1} \Pi'(z)$$

Néanmoins, ce calcul s'avère compliqué. Par contre, en utilisant la relation (1.3), on obtient aisément (voir Ruegg [51])

$$L = E(X_n) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 Var(Y)}{2(1 - \rho)}. \tag{1.5}$$

Où :  $\text{Var}(Y)$  est la variance de la variable aléatoire  $Y$ .

- **Le nombre moyen de clients dans la file est :**

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}(Y)}{2(1 - \rho)}. \quad (1.6)$$

En utilisant les formules de Little, on obtient :

- **Le temps moyen de séjour dans le système :**

$$W = \frac{1}{\mu} + \lambda \left( \frac{\text{Var}(Y) + \frac{1}{\mu^2}}{2(1 - \rho)} \right), \quad (1.7)$$

- **Le temps moyen d'attente dans la file :**

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \lambda \left( \frac{\text{Var}(Y) + \frac{1}{\mu^2}}{2(1 - \rho)} \right). \quad (1.8)$$

### 1.8.3 Le modèle d'attente G/M/1

Nous commençons par une description assez peu réaliste du modèle. On considère une file d'attente à un seul serveur. Les temps des inter-arrivées des clients est une suite de variables aléatoires distribuée identiquement et indépendamment selon une loi générale commune  $F$ , de densité de probabilité  $f$  et de moyenne  $\frac{1}{\lambda}$ . Les temps de service sont indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

#### Chaîne de Markov induite :

Soit le processus bidimensionnel  $\{X(t), \delta(t), t \geq 0\}$ , où  $X(t)$  représente le nombre de clients dans le système  $G/M/1$  à l'instant  $t$  et  $\delta(t)$  représente le temps écoulé depuis la dernière arrivée avant l'instant  $t$ . Comme dans le cas  $M/G/1$ , ce processus se ramène à un processus unidimensionnel grâce à la méthode de la chaîne de Markov induite en discrétisant le temps. En effet, en choisissant les instants  $t_n$  de l'arrivée du  $n^{ieme}$  client, il est clair que les variables aléatoires  $\delta(t_n)$  sont nulles. On aura donc à étudier la chaîne de Markov à temps discret  $X_n = X(t_n)$  : " Le nombre de clients dans le système juste avant l'arrivée du  $n^{ieme}$  client.

On considère les variables aléatoires  $D_k$  : le nombre de clients servis durant l'arrivée de  $k^{ieme}$  et du  $(k+1)^{ieme}$  client ( $D_k$ ) $_{k \geq 1}$  sont indépendants. Leur distribution commune est :

$$\mathbb{P}(D_k = n) = B_n = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} f(t) dt, n \geq 0 \quad (1.9)$$

On trouve que

$$X_{n+1} = X_n + 1 - D_{n+1} \quad (1.10)$$

Il est clair que le processus  $\{X_n, n \geq 0\}$  forme une chaîne de Markov appelée chaîne de Markov induite du processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ .

**Régime transitoire**

Soit  $P_{ij} = P[X_{n+1}/X_n = i]$ , les probabilités de transition de la Chaîne de Markov induite  $X_n$ .

$$\begin{cases} P_{i0} = P(D_{n+1} \geq i + 1) = \sum_{k=i+1}^{\infty} B_k, & i \geq 0. \\ P_{ij} = P(D_{n+1} = i - j + 1) = B_{i-j+1}, & 0 \leq j \leq i + 1. \\ P_{ij} = 0, & j > i + 1. \end{cases}$$

La matrice de transition  $P = [P_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}}$  à la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & B_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{10} & B_1 & B_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{20} & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - B_0 & B_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 - \sum_{k=0}^1 B_k & B_1 & B_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 - \sum_{k=0}^2 B_k & B_2 & B_1 & B_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

**Régime stationnaire**

La chaîne de Markov  $(X_n)$  est irréductible et apériodique : Tous les états sont de même nature. Si, de plus, on suppose que  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , alors la Chaîne de Markov  $X_n$  est récurrente positive. Par conséquent, l'état d'équilibre existe et les probabilités stationnaires aux instants d'arrivées  $P_k$  possède une distribution géométrique,  $Geo(1 - \sigma)$ , et sera donné par :

$$P_k = (1 - \sigma)\sigma^k, k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.11}$$

où :  $\sigma$  est l'unique solution de l'équation :

$$\sigma = B_0 + B_1\sigma + B_2\sigma^2 + \dots = F^*(\mu - \mu\sigma), 0 < \sigma < 1 \tag{1.12}$$

$F^*$  est la transformée de Laplace de la densité de probabilité des arrivées des clients. Si  $\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) = k]$ , alors on a [34] :

$$\begin{cases} \pi_k = \rho(1 - \sigma)\sigma^{k-1} = \rho P_{(k-1)}, & k = 1, 2, \dots \\ \pi_0 = (1 - \rho) \end{cases}$$

**Caractéristiques du système G/M/1 :**

– **Le nombre moyen de clients dans le système :** cette caractéristique s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} L = E(X) &= \sum_{k \geq 0} k\pi_k = \sum_{k \geq 1} k\rho P_{k-1} = \sum_{k \geq 0} k\rho(k + 1)P_k \\ &= \rho \sum_{k \geq 0} kP_k + \rho \sum_{k \geq 0} P_k = \frac{\rho}{1 - \sigma} \end{aligned}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \sigma} \tag{1.13}$$

– Le nombre moyen de clients en attente :

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{k \geq 0} (k - 1)\pi_k = \sum_{k \geq 1} (k - 1)\rho P_{k-1} = \sum_{k \geq 1} k\rho P_{k-1} - \rho \sum_{k \geq 1} \pi_{k-1} \\ &= \frac{\rho}{1 - \sigma} - \rho \sum_{k \geq 0} P_k = \frac{\rho}{1 - \sigma} - \rho = \frac{\sigma\rho}{1 - \sigma} \end{aligned}$$

$$L_q = \frac{\sigma\rho}{1 - \sigma} \tag{1.14}$$

– Le tems moyen de séjour :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{(1 - \sigma)\mu} \tag{1.15}$$

– Le tems moyen d'attente :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\sigma}{(1 - \sigma)\mu} \tag{1.16}$$

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux concepts de la théorie des files d'attente, ainsi que l'analyse de certains systèmes classiques markoviens et non markoviens.

Le prochain chapitre va consacrer pour l'estimation statistique et les tests statistiques paramétriques et non paramétriques et aussi l'estimation bayésienne, qui seront utilisés par la suite pour déterminer les taux de transition des systèmes d'attente qui ont le taux des inter-arrivées  $\lambda$  et le taux de service  $\mu$ .

## Chapitre 2

---

# Estimation paramétrique et tests Statistiques

---

Dans ce chapitre, on va donner quelques notions de base sur la théorie de l'estimation paramétrique, où on s'intéresse à étudier le problème d'estimation d'un paramètre inconnu à partir des observations ou des échantillons (population) données.

### 2.1 Estimation ponctuelle

**Définition 2.1.** Estimer un paramètre, c'est à dire en chercher une valeur approchée en se basant sur les résultats obtenus dans un échantillon. Lorsqu'un paramètre est estimé par un seul nombre, déduit des résultats de l'échantillon, ce nombre est appelé estimation ponctuelle du paramètre.

Soit  $\theta \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p, p \geq 1$ , le paramètre inconnu dont dépend la loi de  $X$ .

- Un estimateur  $\theta_n$  de  $\theta$  est une statistique de l'échantillon aléatoire :

$$\theta_n = h(X_1, \dots, X_n), h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, p \geq 1.$$

telle que pour chaque réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  de l'échantillon aléatoire, la valeur  $\hat{\theta}_n = h(x_1, \dots, x_n)$  prise par  $\theta_n$  approche  $\theta$ .

- $\hat{\theta}_n$  s'appelle une estimation de  $\theta$ . C'est une réalisation particulière de l'estimateur  $\theta_n$ .

**Définition 2.2.** L'estimation ponctuelle se fait à l'aide d'un estimateur, qui est une variable aléatoire d'un échantillon. L'estimation est la valeur que prend la variable aléatoire dans l'échantillon observé [34].

**Propriété 2.1.1.** *Les propriétés des estimateurs ponctuels sont les suivantes :*

a). **Biais d'estimateur**[2] : On définit le biais d'estimation par :

$$\mathbb{E}\{\hat{\theta}(x)|\theta\} - \theta.$$

Il nous indique la valeur moyenne de l'erreur d'estimation :

$$\varepsilon = \hat{\theta}(x).$$

On distingue trois cas possibles :

- a).  $\mathbb{E}\{\hat{\theta}(x)|\theta\} = \theta$  pour toutes les valeurs possibles du paramètre. On dit alors que l'estimateur est non biaisé (sans biais).
- b).  $\mathbb{E}\{\hat{\theta}(x)|\theta\} = \theta + B$  où  $B$  est une constante indépendante de  $\theta$ . Dans ce cas l'estimateur a un biais constant et connu.
- c).  $\mathbb{E}\{\hat{\theta}(x)|\theta\} = \theta + B(\theta)$  c'est à dire, l'estimateur a un biais qui dépend de  $\theta$  (qui est inconnu).

On désire en générale avoir des estimateurs qui soient non biaisés :

$$\mathbb{E}\{\hat{\theta}(x) - \theta|\theta\} = 0 \quad \forall \theta \in \Theta. \tag{2.1}$$

Un estimateur est sans biais si la moyenne de sa distribution d'échantillonnage est égale à la valeur de  $\theta$  du paramètre de la population à estimer, c'est-à-dire si :

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$$

Si l'estimateur est biaisé, son biais est mesuré par l'écart suivant :

$$BIAIS = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta.$$

b). **vairiance d'un estimateur** [2] : Une deuxième définition qui est importante d'un estimateur qui est la variance de l'erreur de l'estimation :

$$var\{\hat{\theta}(x) - \theta\} = \mathbb{E}\{(\hat{\theta}(x) - \theta)^2|\theta\}.$$

- C). **Estimateur efficace** : Un estimateur sans biais est efficace si sa variance est la plus faible parmi les variances des autres estimateurs sans biais.
- D). **Estimateur convergent** : Un estimateur  $\hat{\theta}$  est convergent si sa distribution tend à se concentrer autour de la valeur inconnue à estimer  $\Theta$ , à mesure que la taille d'échantillon augmente, c'est à dire si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0.$$

Soit  $X$  une v.a telle que  $\mathbb{E}[X] = m$  et  $var(X) = \sigma^2$ .



**Estimation de la moyenne :**

La moyenne empirique  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  est un estimateur sans biais et convergent vers  $m$  [42].

**Preuve :**

On a :

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k].$$

et :

$$\text{var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{var}(X_k) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'après la loi forte des grands nombres  $\bar{X}_n$  est même presque sûrement convergent. Il est possible de déterminer la loi asymptotique de la moyenne empirique.

**Proposition 2.1.2.** *Si  $n$  est assez grand on peut utiliser l'approximation normale (lorsque  $X$  admet un moment d'ordre 2).*

$$\bar{X}_n \rightsquigarrow^l \mathbb{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

C'est une conséquence du TCL qui nous assure que :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - m) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2).$$

**Estimation de la variance :**

1. **Cas de  $m$  est connu :** Lorsque  $m$  est connu  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m)^2$  est un estimateur sans biais et convergent de  $\sigma^2$  [42].
2. **Cas de  $m$  est inconnu :** En général on ne connaît pas  $m$ , on le remplace par un estimateur et on introduit la variance empirique associée [39] :

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$$

## 2.2 Méthodes de calcul d'un estimateur

### 2.2.1 Estimation par la méthode des moments

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon aléatoire issu d'une variable aléatoire  $X$  de densité  $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , où  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  sont des paramètres inconnus.

La méthode des moments consiste à estimer les paramètres  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , en égalisant les moments empiriques calculés à partir de l'échantillon avec les moments théoriques de

même ordre.

Soit  $\mu_r = \mathbb{E}(X^r), r = 1, 2, \dots, k$ , moments théoriques d'ordre  $r$  de la population et on note par  $M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$  moments empiriques d'ordre  $r$  de l'échantillon.

La solution du système  $M_r = \mu_r, r = 1, 2, \dots, k$ , nous donne les estimateurs de  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \mu_1 \\ M_2 = \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_k = \mu_k \end{array} \right. \quad k \text{ equations a } k \text{ inconnues.}$$

**Remarque 2.2.1.** Dans la plus part des cas, les estimateurs obtenus par la méthodes des moments convergent en probabilité pour le paramètre  $\theta$ , mais en général, ils ne sont pas efficaces.

### 2.2.2 Estimation par maximum de vraisemblance

Soit  $\{E, \varepsilon, \{P_\theta, \theta \in \Theta\}\}$  un modèle statistique, où  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ . On suppose qu'il existe une mesure  $\sigma - finie \mu$  qui domine le modèle, c'est à dire que  $\forall \theta \in \Theta, P_\theta$  admet une densité  $p(\theta, \cdot)$  par rapport à  $\mu$ .

Soit  $X$  une observation. On appelle vraisemblance de  $X$  l'application :

$$\Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\theta \rightarrow p(\theta, X).$$

On appelle estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ , tout élément  $\hat{\theta}$  de  $\Theta$  maximisant la vraisemblance, c'est à dire vérifiant :

$$\hat{\theta} = \arg(\max_{\theta \in \Theta} L(\theta, X)). \tag{2.2}$$

Avec :

$$L(\underline{x}, \theta) = \begin{cases} f_\theta(\underline{x}) = f(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), & \text{cas continu.} \\ P_\theta(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x} | \theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, \theta), & \text{cas discret.} \end{cases}$$

**Remarque 2.2.2.** L'estimateur de maximum de vraisemblance n'existe pas toujours et n'est pas toujours unique.

Considérons le cas typique où  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , les  $X_i$  formant un n-échantillon de loi  $\varphi_\theta$  où  $\varphi_\theta$  est une loi sur  $\chi$  de paramètre inconnu  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ . On suppose en outre que

pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $\varphi_\theta$  est absolument continue par rapport à une mesure  $\nu$  sur  $\chi$ . Dans ce cas, en notant :

$$q(\theta, x) = \frac{d\varphi_\theta}{d\nu}(x),$$

et en prenant  $\mu = \nu^{\otimes n}$  on a la vraisemblance s'écrit :

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^n q(\theta, \underline{x}_i). \tag{2.3}$$

et donc :

$$\hat{\theta}_n = \arg(\max_\theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log[q(\theta, \underline{x}_i)]), \tag{2.4}$$

avec la convention  $\log(0) = -\infty$ . Voyons quelque exemples.

### Modèle de Bernoulli

Soit  $\varphi_\theta = B(\theta)$  avec  $\theta \in [0, 1] = \Theta$ , et  $\nu$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$  et  $x \in \{0, 1\}$

$$q(\theta, x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x} = (1 - \theta) \exp[x \log \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right)]$$

La vraisemblance de la loi de Bernoulli est :

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^n q(\theta, x_i) \tag{2.5}$$

$$= \theta^{S_n} (1 - \theta)^{n - S_n}. \tag{2.6}$$

Avec :  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ .

Donc l'estimateur du maximum de vraisemblance doit maximiser dans  $[0, 1]$

$$\log L(\theta, \underline{x}) = \log(\theta^{S_n} (1 - \theta)^{n - S_n}) = S_n \log \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right) + n \log(1 - \theta)$$

ce qui conduit à  $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ .

### Lois exponentielles

Soit  $\varphi_\theta = \varepsilon(\theta)$  avec  $\theta \in ]0, \infty[ = \Theta$  et  $\nu = \mathbb{R}_+$ . On a pour tout  $x > 0$ ,

$$q(\theta, x) = \theta \exp(-\theta x).$$

et le maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  maximisant

$$n \log(\theta) - \theta S_n.$$

est donc donnée par  $\hat{\theta} = (\bar{X}_n)^{-1}$ .

### Lois de Poisson

Soit  $\varphi_\theta = P(\theta)$  avec  $\theta \in \Theta = ]0, \infty[$ , et  $\nu$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$q(\theta, x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} = e^{-\theta} \exp[x \log(\theta) - \log(x!).]$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance maximisant :

$$S_n \log(\theta) - n\theta,$$

est donné par  $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ .

### 2.2.3 Estimation bayésiens

Les estimateurs bayésiens du paramètre  $\theta$  sont construits à partir de la loi a posteriori  $\pi(\theta|\underline{x})$  par minimisation d'une fonction de coût appropriée [48].

#### Inférence bayésienne

Considérons un modèle paramétrique statistique pour lequel l'observation d'une v.a X est distribuée selon  $f(x, \theta)$ , où seulement le paramètre  $\theta$ , est inconnu et appartient a un espace de dimension finie  $\Theta$ .

1. **Information a priori** : L'information a priori est toute l'information disponible sur le paramètre  $\theta$ , en dehors de celle apportée par les observations. Cette information est modélisée à travers une loi de probabilité appelée loi a priori. On note la densité de probabilité de la loi a priori par  $\pi(\theta)$ .
2. **Loi des observations** : On interprète la loi des observations (la fonction vraisemblance) comme la loi conditionnelle des observations  $\underline{x}$  sachant  $\theta$ . On note sa densité par  $L(\underline{x}, \theta)$ , elle est définie par :

$$L(\underline{x}, \theta) = \begin{cases} f_\theta(\underline{x}) = f(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), & \text{cas continu.} \\ P_\theta(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x} | \theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i, \theta), & \text{cas discret.} \end{cases}$$

3. **Loi a posteriori** : Dans la théorie bayésienne, l'incertitude sur  $\theta$  étant décrite par une distribution a priori  $\pi$  sur  $\Theta$ , l'inférence est alors fondée sur la distribution a posteriori donnée par la loi conditionnelle de  $\theta$  sachant  $\underline{x}$ . On note sa densité par  $\pi(\theta | \underline{x})$ . elle est définie par :

$$\pi(\theta | \underline{x}) = \frac{\varphi(\theta, \underline{x})}{m(\underline{x})}. \tag{2.7}$$

Où :  $\varphi(\theta, \underline{x})$  est la distribution conjointe de  $\underline{x}$  et  $\theta$  :

$$\varphi(\theta, \underline{x}) = L(\underline{x}, \theta)\pi(\theta).$$

Et,  $m(\underline{x})$  est la distribution marginale de  $\underline{X}$  :

$$m(\underline{x}) = \int_{\theta} \varphi(\underline{x}, \theta) d\theta.$$

La densité de la loi a posteriori est alors donnée par :

$$\pi(\theta / \underline{x}) = \frac{L(\underline{x}, \theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta} L(\underline{x}, \theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (2.8)$$

$\pi(\theta / \underline{x})$  est proportionnelle à la distribution de  $L(\underline{x} / \theta)$  conditionnelle à  $\theta$ .

### Estimateur de Bayes

Soit  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un n-échantillon issu d'une v.a  $X$  de loi dépendant d'un paramètre inconnu  $\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

#### 1. Estimateur MMSE

L'estimateur MMSE (Minimisation Mean Square Error) de  $\theta$ , noté  $\hat{\theta}_{MMSE}(\underline{x})$  est l'estimateur qui minimise le coût quadratique moyen.

$$R(\theta, \hat{\theta}) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2], \text{ avec } \hat{\theta} = \hat{\theta}(\underline{x}).$$

Il est défini par :

$$\hat{\theta}_{MMSE}(\underline{x}) = \mathbb{E}[\theta | \underline{x}].$$

#### Remarque :

- Le MMSE est un estimateur admissible. Il n'est minimax que si la loi a priori  $\pi$  est bien choisie.
- L'estimation bayésienne d'une fonction de  $\theta$ ,  $h(\theta) \in \mathbb{R}$ , relativement au coût quadratique, notée  $\hat{h}_{\theta}(\theta)$ , est donnée par  $\hat{h}_{\theta}(\theta) = \mathbb{E}(h(\theta) | \underline{x})$ .
- Les MMSE sont asymptotiquement confondus avec ceux du maximum de vraisemblance. La différence est très petite devant  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

#### 2. Estimateur MAP

l'estimateur MAP (Maximisation A Posteriori) de  $\theta$  se fait par maximisation de la loi a posteriori. C'est à dire qu'on choisit le mode de la probabilité a posteriori  $\pi(\theta | \underline{x}) = \frac{f(\underline{x}, \theta)\pi(\theta)}{m(\underline{x})}$ . L'estimateur MAP est alors :

$$\hat{\theta}_{MAP}(\underline{x}) = \arg \max_{\theta} \pi(\theta | \underline{x}) = \arg \max_{\theta} L(\underline{x}, \theta)\pi(\theta).$$

**Remarque :**

- Les estimateurs MAP sont asymptotiquement équivalents aux estimateurs du maximum de vraisemblance classique et ont l'avantage d'être disponible pour des tailles finies d'échantillons.
- Le MAP est utilisé quand le MMSE est difficile à mettre en oeuvre en raison des calculs d'intégrales compliqués qu'il impose. Il n'est pas particulièrement recommandé mais se comporte asymptotiquement comme le maximum de vraisemblance puisque  $\pi(\theta)$  a un poids qui diminue lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- Pour les petits échantillons, il est plus habituel de s'intéresser plus précisément à la probabilité a posteriori, le MAP étant considéré comme une information trop succincte [32].

**3. Les propriétés des estimateurs de bayes**

Les estimateurs de bayes sont toujours biaisés. Sous certaines hypothèses de régularité, souvent satisfaites en pratique, ils sont convergent en probabilité (lorsque  $n$  tend vers l'infini). La loi a posteriori peut être asymptotiquement approximée par une loi normale  $N(E(\theta|\underline{x}), var(\theta|\underline{x}))$ , où  $var(\theta|\underline{x}) = E((\theta - E(\theta|\underline{x}))^2|\underline{x})$  est la variance a posteriori de  $\theta$ . Cette propriété est utile pour construire les intervalles de confiance a posteriori.

**2.3 Estimation par intervalles de confiance****2.3.1 Principe de la méthode**

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un n-échantillon aléatoire et  $\theta$  un paramètre inconnu de la loi des  $X_i$ .

Soit  $\hat{\theta}$  l'estimateur d'un paramètre inconnu  $\theta$ .

Et soit  $\alpha \in ]0, 1[$ .

$\hat{\theta}$  est une variable aléatoire dont la loi de probabilité notée  $(L(\hat{\theta}))$ , supposée connue dépend de  $\theta$ . Il est possible de trouver deux valeurs particulières  $t_1(\theta)$  et  $t_2(\theta)$  telle que :

$$1 - \alpha = \text{Proba}[t_1(\theta) < \hat{\theta} < t_2(\theta)].$$

Avec :

$1 - \alpha$  : degré de confiance ou degré de certitude .

$[t_1(\theta), t_2(\theta)]$  : intervalle de confiance.

**Remarque 2.3.1.** – La probabilité  $1 - \alpha$  est fixée conventionnellement a priori, si  $1 - \alpha = 95\%$ , cela signifie que l'intervalle que l'on est susceptible de construire tombera à coté de  $\theta$  dans 5% des cas. Si  $1 - \alpha = 99\%$ , ce risque est moins important, mais l'intervalle est plus large.

- Lorsque l'estimateur  $\hat{\theta}$  est sans biais, il est naturel de construire un intervalle centré sur l'estimation ponctuelle obtenue pour  $\theta$ .

### 2.3.2 Théorème limite central

Si on dispose d'un échantillon aléatoire, dont le caractère  $X$  est tel que  $E(X) = \mu$  et  $var(X) = \sigma^2$ , le TLC mentionne que [31] :

$$X \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

On constate que la démarche est la même, mais alors l'intervalle de confiance  $\mu \in (\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}(\sigma/n^{1/2}))$ , est approximativement de niveau de confiance  $1 - \alpha$  (pour  $n \geq 30$ ).

### 2.3.3 Estimation d'une moyenne $\mu$ par intervalle de confiance

On peut obtenir un intervalle de confiance  $[a, b]$ , dans lequel une moyenne,  $\mu$ , se trouve avec un risque,  $\alpha$ , donnée sous l'une des deux hypothèses suivantes :

- i- Le caractère statistique suit une distribution normale d'écart-type connu  $\sigma$  ; la taille de l'échantillons est alors sans importance.
- ii- Le caractère statistique suit une distribution quelconque d'écart-type connu  $\sigma$ , la taille de l'échantillons est grand ( $n \geq 30$ ).

Soit  $M_n$  l'estimateur de la moyenne d'espérance  $\mu$  et d'ecart-type  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . On sait d'après le théorème centrale limite :

$T = \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  suit approximativement la loi normale centrée réduite. à l'aide de la table de la loi normale  $N(0, 1)$  on peut déterminer la valeur de  $t_\alpha$  tel que :

$$P(|T| < t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

### 2.3.4 Propriétés des intervalles de confiance

- Un interavalle de confiance est un intervalle aléatoire car les bornes de cet intervalle sont des variable aléatoire, fonctions des observations.
- Les niveaux de confiance les plus fréquemment utilisés sont :90%, 80%, 99%.
- $\alpha$  est appelé le seuil (le risque), on choisira dans la plupart des cas un intervalle à risques symétriques,c.a.d tel que :

$$P(\theta < t_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(\theta > t_2) = \frac{\alpha}{2}. \quad (2.9)$$

## 2.4 Tests statistiques

En statistique un test est un mécanisme qui permet de trancher entre deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  au vue des résultats d'un échantillon, en quantifiant le risque associé à la décision. Avec  $H_0$  est l'hypothèse référence et  $H_1$  est l'hypothèse alternative, ou l'une des deux est vraie [35].

Un test statistique est basé sur les données d'une expérience aléatoire. On distingue deux types de tests :

- a) tests statistiques paramétrique : tester certaine hypothèses relatives à un ou plusieurs paramètres d'une variable aléatoire de densité de probabilité connue.
- b) tests statistiques non paramétrique : utilisés lorsqu'on a à faire à un échantillon aléatoire dont la loi est complètement inconnue.

**Définition 2.3.** Une hypothèse statistique est une assertion (affirmation) sur la distribution d'une ou plusieurs variables ou sur les paramètres des distributions.

Il existe deux sorte d'hypothèses : hypothèse simple et composite.

**Remarque 2.4.1.** La nature de  $H_0$  détermine la façon de formuler  $H_1$  par conséquent la nature unilatérale ou bilatérale du tets.

- Test unilatérale :  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta \neq \theta_0 (\theta > \theta_0 \text{ ou } \theta < \theta_0)$ .
- Test bilatérale :  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta > \theta_0$  ou bien  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta < \theta_0$ .

**Exemple 2.4.1.** Teste sur le paramètre p de la loi bernoulli.

Soit  $X \rightsquigarrow B(p)$  :

$H_0 : p = 1/2$  contre  $H_1 : p > 1/2$ . on peut aussi tester  $H_0 : p \geq 1/2$  contre  $H_1 : p < 1/2$ .

### Type d'erreurs

Lorsqu'on effectue un test statistique 4 situation peuvent se présenter, qui sont détaillées dans le tableau ci-dessous :

	$H_0$ vraie	$H_1$ vraie
$H_0$ décidée	$1 - \alpha$	$\beta$
$H_1$ décidée	$\alpha$	$1 - \beta$

ou  $\alpha$  et  $\beta$  sont les risques d'erreur de premier et de deuxième espèce respectivement.

Avec :

$$\alpha = P(H_0 \text{ rejetée} / H_0 \text{ vraie}).$$

$$\beta = P(H_0 \text{ non rejetée} / H_1 \text{ vraie}).$$



- **L’erreur de première espèce** : est le fait décider que l’hypothèse alternative  $H_1$  est vraie alors qu’en fait, en réalité c’est l’hypothèse nulle  $H_0$  qui est vraie.  
Le risque d’erreur associé à cette décision est noté généralement par  $\alpha$ .  
Il s’agit donc de la probabilité de décider à tort que l’hypothèse alternative  $H_1$  est vraie.
- **L’erreur de deuxième espèce** : est le fait de décider que l’hypothèse nulle  $H_0$  est vraie qu’en fait, en réalité c’est l’hypothèse alternative  $H_1$  qui est vraie.  
Le risque d’erreur associé à cette décision est noté généralement par  $\beta$ .  
Il s’agit donc de la probabilité de décider à tort que l’hypothèse alternative  $H_0$  est vraie.

### Variable de décision :

C’est une statistique qui doit apporter le maximum d’informations sur le problème posé et dont la loi sera différente sous  $H_0$  et sous  $H_1$ . Il faut que sa loi soit entièrement connue au moins sous  $H_0$ .

### Région critique (région de rejet) :

La région critique  $W$  est l’ensemble des valeurs de la variable de décision qui conduisent à rejeter  $H_0$  alors qu’elle est vraie.

La détermination de la région critique se fait en écrivant :  $P(W|H_0) = \alpha$ .

La région d’acceptation est  $\bar{W}$  tel que :

$$P(\bar{W}/H_0) = 1 - \alpha. \quad (2.10)$$

### Puissance d’un test :

On appelle puissance d’un test la probabilité  $1 - \beta$  de rejeter  $H_0$  alors qu’elle est fautive :

$$1 - \beta = P(W|H_1). \quad (2.11)$$

### Construction d’un test statistique :

Avant d’appliquer tout test statistique, il s’agit de bien définir le problème posé. Après on se base sur les étapes suivantes pour construire un test statistique :

1. Choix de  $H_0$  et  $H_1$ .
2. Détermination de la variable de décision.
3. Calcul de la région critique ( $W$ ) en fonction de  $\alpha$ .
4. Calcul de la puissance  $1 - \beta$ .
5. Calcul de la valeur expérimentale de la variable de décision.
6. Conclusion : rejet ou non rejet de  $H_0$ .

### 2.4.1 Tests entre deux hypothèse simples

**Variable de décision et région critique optimale (test de Neymen-Pearson) :**

L'idée de N-P est de déterminer une région critique rendant  $\beta$  minimum ( $1-\beta$  maximale), pour un niveau  $\alpha$  fixé. Une telle région, si elle existe est appelée "région critique optimale". Il s'agit donc de maximiser la puissance  $1 - \beta$  pour un risque  $\alpha$  fixé.

**Méthode de Neyman-Pearson [57] :**

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f(x, \theta)$  où  $\theta$  est un paramètre réel inconnu. Il s'agit de tester :

$$H_0 : \theta = \theta_0, \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1$$

Supposons  $\alpha$  connu et soit  $W$  une région critique de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$\int_W L(\underline{x}, \theta_0) d\underline{x} = \alpha = P(W|H_0).$$

Il s'agit de maximiser :  $1 - \beta = \int_W L(\underline{x}, \theta_1) d\underline{x} = P(W|H_1)$ , on peut écrire : [43]

$$1 - \beta = \int_W \frac{L(\underline{x}, \theta_1)}{L(\underline{x}, \theta_0)} L(\underline{x}, \theta_0) d\underline{x}.$$

$\forall \alpha \in [0, 1]$ , il existe un test, de puissance maximale, défini par la région critique  $W$  au seuil de signification  $\alpha$  :

$$W = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n / \frac{L(\underline{x}, \theta_1)}{L(\underline{x}, \theta_0)} > k_\alpha, k_\alpha \geq 0 \}. \tag{2.12}$$

**Tests et statistique exhaustive :**

La considération d'une statistique exhaustive simplifie la recherche de la région critique du test. Si elle existe une statistique exhaustive  $T$  pour  $\theta$ , de densité  $g(t, \theta)$  on a :

$$L(\underline{x}, \theta) = g(t, \theta).h(\underline{x}), t = \varphi(x_i).$$

Le test de N-P se réduit alors à :

$$\frac{g(t, \theta_1)}{g(t, \theta_0)} > k_\alpha.$$

### 2.4.2 Tests d'hypothèse simples contre hypothèse composite

Ce sont des tests de la forme :  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta_1 \in \Theta \subset R$ .

Tout test d'hypothèse simple contre composite est caractérisé par le niveau  $\alpha$  et une fonction puissance :

$$\begin{aligned} \pi(\theta) = 1 - \beta(\theta) & : \Theta_1 \rightarrow [0, 1] \\ \theta_1 & \rightarrow 1 - \beta(\theta) \end{aligned}$$

**Test uniformément le plus puissant :**

Un test est dit uniformément le plus puissant si  $\forall \theta \in \Theta_1$ , sa puissance  $\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta)$  est supérieure à la puissance de tout autre test.

Pour chaque valeur de  $\theta \in \Theta_1$ , on sait déterminer une région critique optimale, le problème est de construire une qui soit optimale pour tout l'ensemble  $\Theta_1$ .

On dit que le test de région critique  $W$  est uniformément le plus puissant de niveau  $\alpha$  pour un problème de test d'une hypothèse simple contre hypothèse composite si  $\forall W'$  une autre région critique d'un test au niveau  $\alpha$ , on a :

$$1 - \beta(\theta) = P_{H_1}(W) > 1 - \beta'(\theta) = P_{H_1}(W'), \forall \theta \in \Theta_1.$$

**Remarque 2.4.2.** Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un test uniformément le plus puissant au niveau  $\alpha$  pour tester une hypothèse simple  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre une hypothèse composite.

1.  $\forall \theta \in \Theta_1$ , il existe un test le plus puissant de niveau  $\alpha$  pour tester  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta = \theta_1(N - P)$ .
2. La forme de la région critique du test précédent ne doit pas dépendre de  $\theta \in \Theta_1$  (sous  $H_1$ ).

**2.4.3 Tests entre deux hypothèses composites(test de Lehmann)**

**Famille à rapport de vraisemblance monotone :**

L'hypothèse  $H_0$  est aussi une hypothèse composite et le risque  $\alpha$  de première espèce est une fonction de  $\theta$ , et le niveau du test est  $\alpha = \sup_{\theta} \alpha(\theta)$ .

On posera la condition  $\alpha(\theta) \leq \alpha$  valeur donnée.

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un n-échantillon issu de  $X$ . La loi de  $X$  est dite à rapport de vraisemblance monotone (R.V.M) s'il existe une statistique  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :  $\frac{L(x, \theta_1)}{L(x, \theta_0)} = f_{(\theta_0, \theta_1)}(t)$ , est une fonction monotone croissante de  $T$  si  $\theta_1 > \theta_0$ .

**Cas de famille exponentielle :**

$$\log f(x, \theta) = a(x)q(\theta) + B(x) + A(\theta).$$

Donc :

$$\log L(\underline{x}, \theta) = q(\theta) \sum_{i=1}^n a(x_i) + \sum_{i=1}^n B(x_i) + nA(\theta).$$

Et :

$$\log \frac{L(\underline{x}, \theta_1)}{L(\underline{x}, \theta_0)} = (q(\theta_1) - q(\theta_0)) \sum_{i=1}^n a(x_i) + n(A(\theta_1) - A(\theta_0)).$$

$T = \sum_{i=1}^n a(X_i)$ , est une statistique exhaustive.

$\log \frac{L(\underline{x}, \theta_1)}{L(\underline{x}, \theta_0)}$ , est une fonction monotone croissante en  $T$  ssi  $:(q(\theta_1) - q(\theta_0)) > 0$ , lorsque  $\theta_1 > \theta_0$ .

i.e :  $q$  doit être une fonction croissante en  $\theta$ .

**Remarque 2.4.3.** Les lois de famille exponentielle vérifiant cette propriété sont donc à rapport de vraisemblance monotone.

**Tests bilatérales :**

- a) Test de la forme :  $\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ ou } \theta \geq \theta_2. \\ H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2. \end{cases}$

**Théorème 2.4.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $f(x, \theta)$  et  $T$  une statistique.

Si  $f(x, \theta)$  est à R.V.M en  $T$  alors il existe un test U.P.P de niveau  $\alpha$  donné dont la région critique est de la forme :

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / c_1 < T(\underline{x}) < c_2\}.$$

Avec  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminés par :

$$P_{H_0}(W) = \alpha = \sup_{\alpha} \alpha(\theta).$$

$$P_{\theta_1}(T < c_2) = P_{\theta_2}(T_2 > c_1) = \frac{\alpha}{2}.$$

- b) Test de la forme :  $\begin{cases} H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ H_1 : \theta < \theta_1, \text{ ou } \theta > \theta_2 \end{cases}$

**Théorème 2.4.2.** (lehmann)

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f(x, \theta)$ .

Si  $f(x, \theta)$  est à R.V.M en une statistique  $T$ , alors il existe un test sans biais de niveau inférieur ou égal à  $\alpha$  donné qui est U.P.P.S.B de région critique de la forme :

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / T(\underline{x}) < c_1, \text{ avec } : T(\underline{x}) > c_2\}.$$

Avec  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminés par :

$$P_{\theta_1}(T < c_1) = P_{\theta_2}(T > c_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

**Tests unilatérales :**

- a) Test de la forme :  $\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_1 \end{cases}$

**Théorème 2.4.3.** (lehmann) Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f(x, \theta)$ . Si  $f(x, \theta)$  est à R.V.M en une statistique  $T$ , alors il existe un test U.P.P de niveau  $\alpha$  donné dont la région critique de la forme :

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / T(\underline{x}) > c\}$$

Avec :  $P_{H_0}(T > c) = \alpha$ .

- b) Test de la forme :  $\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$

**Théorème 2.4.4.** (lehmann) Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f(x, \theta)$ . Si  $f(x, \theta)$  est à R.V.M en une statistique  $T$ , alors il existe un test U.P.P de niveau  $\alpha$  donné dont la région critique de la forme :

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / T(\underline{x}) < k\}$$

Avec  $k$  est donné par :  $P_{H_0}(W) = \alpha$ .

**Test à rapport de vraisemblance maximale :** Ce test est utilisé dans le cas où les méthodes précédentes ne donnent pas des bonnes résultats.

Tester  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  ou peut être un vecteur de dimension "p".

Posons :

$$\lambda = \frac{L(\underline{x}, \theta_0)}{\sup_{\theta} L(\underline{x}, \theta)}. \tag{2.13}$$

1.  $0 < \lambda \leq 1$ .
2. Plus  $\lambda$  est grand plus  $H_0$  est vraisemblable, cela revient à remplacer sous  $H_1, \theta$  par son E.M.V  $\hat{\theta}$ .

La région critique du test sera :

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / \lambda < k\}.$$

## 2.4.4 Tests non paramétriques d'ajustement

**Test d'ajustement de Khi-deux :**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un n-échantillon issu d'une variable aléatoire  $X$ .

On veut tester :  $\begin{cases} H_0 : F \text{ est la loi de } X \\ H_1 : F \text{ n'est pas la loi de } X. \end{cases}$

$F$  étant la fonction de répartition par la quelle on veut ajuster la loi de l'échantillon.

Le test revient à effectuer une partition du domaine de définition en  $r$  classes et à calculer une distance entre la distribution théorique selon la loi tester et la distribution empirique constatée sur l'échantillon.

Soit  $P_1, \dots, P_r$  probabilités théoriques de chaque classe, et  $N_1, \dots, N_r$  les effectifs observés pour chaque classe.

Statistique de test :

$$D^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - nP_i)^2}{nP_i}. \tag{2.14}$$

Sous  $H_0$  :

Si  $F(x)$  est entièrement spécifiée  $D^2 \rightsquigarrow \chi_{r-1-l}^2$  asymptotiquement.

Si  $F(x)$  dépend de  $l$  paramètres, alors il faut estimer ces paramètres à partir de la loi discrétisée, et  $D^2 \rightsquigarrow \chi_{r-1-l}^2$  asymptotiquement.

La région critique est :

$$W = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n / d^2 = \sum_{i=1}^r \left( \frac{n_i - nP_i}{nP_i} \right)^2 > k_\alpha \}.$$

Avec :  $P_{H_0}(W) = \alpha = P_{H_0}(D^2 > k_\alpha)$ .

- Il faut que le nombre de classes soit le plus élevé possible afin de perdre moins d'informations (en pratique  $r \geq 7$ ).
- Si  $P_i$  est trop faible il faut choisir les claces telle que  $nP_i \geq 5$ .

**Test d'ajustement de Kolmogorov-smirnov :**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un n-échantillons issu d'une variable aléatoire  $X$  absolument continue, de fonction de répartition  $F$  inconnue.

Notons  $F_n$  la fonction de répartition empirique définie par l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  où les  $x_i$  représentent des réalisations de la variable aléatoire  $X$ .

Soit  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  l'échantillon réordonné par ordre croissant tel que :  $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ , et  $X_{(i)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

La fonction  $F_n$  est définie par :

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_{(1)} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x_{(1)} \leq x < x_{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{i-1}{n} & \text{si } x_{(i-1)} \leq x < x_{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 & \text{si } x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

On cherche à tester l'ajustement de la distribution de l'échantillon à une loi théorique (entièrement spécifiée  $F_0$ ).

i.e, on veut tester :  $\begin{cases} H_0 : F(x) = F_0(x) \\ H_0 : F(x) \neq F_0(x). \end{cases}$

La statistique  $D_n$  de Kolmogorov-Smirnov est définie par :

$$D_n = \max_x |F_n(x) - F_0(x)|. \tag{2.15}$$

$$D_n = \max_i \left| \frac{i-1}{n} - F_0(x_i) \right|. \tag{2.16}$$

Sous  $H_0$  la loi de  $D_n$  est tabulée (table de K.S).

On rejette  $H_0$  si  $d_n > d(\alpha)$ .

Avec :  $P(D_n > d(\alpha)) = \alpha$ .

$d(\alpha)$  est obtenue sur la table de K.S.

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons fais un rappel général sur les notions de base concernant l'estimation statistique, ainsi que les méthodes d'estimation. Ces notions vont nous servir dans le chapitre prochaine pour la détermination des estimateurs des taux d'arrivée et de service.

Dans ce qui suit on s'intéresse beaucoup plus sur la méthode de maximum de vraisemblance et l'estimation Bayésienne.

## Chapitre 3

---

# Analyse statistique des systèmes d'attente

---

La statistique inférentielle a un rôle très important dans tous les domaines et particulièrement dans l'utilisation des systèmes d'attente. comme une aide à prendre des décisions.

Ce chapitre est organisé en trois sections, la première concerne l'identification du modèle d'attente où on va expliquer comment il faut identifier un modèle d'attente. La deuxième porte l'estimation paramétrique des systèmes d'attente markovien et non markovien. La dernière section est consacré pour l'étude des tests statistiques appliqués dans les files d'attente.

Pour rédiger ce chapitre on s'est basé sur des articles et des livres spécifiques. Parmi ces derniers on cite, les synthèses de Bhat et Rao [21] 1987, Cox [29], Harris [40], Clarke [28], Gross et Harris [37]...etc.

### 3.1 Identification des modèles

Dans l'identification du modèle d'attente, on commence en premier lieu par la détermination de ses éléments principaux et leurs propriétés, en générale identifier le modèle c'est donner la structure de ce dernier et cette étape est l'étape la plus simple.

Il reste alors la détermination des processus d'entrée et de service de ce système. Quatre parties sont essentielles dans cette analyse :

- Collection des données
- Tests pour la stationnarité.
- Tests pour l'indépendance.



- Sélection des distributions.

### 3.1.1 Collection des données

La forme des données nécessaires dépend largement du modèle proposé et de la nature des résultats recherchés. Par exemple, dans un système de files d'attente  $M/M/1$ , l'intensité du trafic  $\rho$  peut être estimée comme le rapport des estimateurs des taux d'arrivés  $\lambda$  et de service  $\mu$ . Ou bien, en notant que l'intensité du trafic  $\rho$  prévoit un facteur d'utilisation pour le système, on doit utiliser le facteur d'utilisation empirique comme son estimateur. Quelques pièges de cette approche sont indiqués par Cox [29], qui note que si  $\rho$  est l'intensité du trafic, l'efficacité de cette approche est donnée par  $(1 - \rho)$ .

Un problème supplémentaire est lié au plan d'échantillonnage dans l'étude. Le problème fondamentale qui se pose est le suivant :

Pendant combien de temps le système doit-il être observé? Pour une durée spécifiée ou jusqu'à l'apparition d'un nombre spécifiée d'événements?.

Lorsque le processus des arrivées est poissonnien Birnbaum a montré que la seconde alternative est meilleure, pour la détermination de la taille et des données de l'échantillon, que la première. Mais quand rien n'est connu concernant les processus, aucune des deux déclarations ne peut être faite et l'efficacité des différents plans doit être considérée dans un cas individuel.

### 3.1.2 Tests pour la stationnarité

Une étape importante pour identifier un système de file d'attente. Un traitement compréhensif des tests de stationnarité a été donné par Cox et Lewis [30]. En plus du traitement des données à l'apparition des événements comme des séries temporelles et la détermination des propriétés du second ordre du processus de comptage. Ils considèrent les problèmes statistiques liés aux processus de renouvellement et donnent des tests d'hypothèses dans quelques cas généraux, aussi bien que dans quelques cas spécifiques. Lewis [49] actualise cette étude et considère le sujet comme une tendance d'analyse des processus poissonniens non-homogènes.

Dans plusieurs système d'attente (comme le trafic aéroport et téléphonique), la non stationnarité du processus d'arrivée mène à un comportement périodique. En outre, bien que le processus soit non-stationnaire quand la période entière est considérée, il doit être possible de le considérer comme un processus stationnaire par morceaux dans lequel les périodes stationnaires peuvent être identifiées. Sous de telles circonstances, une procédure qui peut être utilisée pour tester la stationnarité du processus, aussi bien que pour identifier les périodes stationnaires, et les tests de Mann-Whitney-Wilcoxon [58]. Les données pour leurs test peuvent être obtenues en considérant deux intervalles de temps adjacents  $]0, t_1]$ , et  $]t_1, t_2]$ , et on observe le nombre d'arrivées durant chaque intervalle pour plusieurs périodes de temps. Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , le nombre d'arrivées durant le premier intervalle

pour  $n$  périodes, et soit  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ , le nombre d'arrivées durant le second intervalle pour  $m$  périodes (souvent  $m = n$ ). Si  $F$  et  $G$  représentent les distributions de  $X$  et  $Y$  respectivement, alors l'hypothèse à tester est  $F = G$  contre l'alternative  $F \neq G$ , pour lequel la statistique de Mann-Whitney-Wilcoxon [58] peut être utilisée. En utilisant ce test, des périodes stationnaires successives peuvent être déterminées et le système peut être étudié en détail au sein de chaque période (voir Moor [51] qui donne un algorithme pour la procédure).

Un autre test dans le cadre du processus poissonnien non-homogène est proposé par Joseph [41]. Il considère les sorties d'un système de files d'attente  $M/G/\infty$  où  $G$  est supposée être connue. Parallèlement à l'hypothèse sur la file vide au début de l'observation, l'inférence statistique de l'intensité des entrées alors considérée. Les autres donnent un test pour l'hypothèse d'une intensité d'entrée constante contre une intensité d'entrée croissante. Ainsi, a été discutée une comparaison entre les entrées de deux processus de Poisson indépendants, où seulement les processus de sortie sont observés.

### 3.1.3 Tests pour l'indépendance

Quand on donne la forme générale du modèle d'attente, plusieurs hypothèses d'indépendance sont faites concernant ses éléments. Ainsi, la plupart des modèles suppose que le temps d'inter-arrivées et les durées de services sont des séquences indépendantes de variables aléatoires. Pour faire telle ou telle hypothèse, y'a des raisons différentes pour appliquer des tests statistiques, pour la vérification .

On distingue plusieurs algorithmes de test d'indépendance d'une séquence d'observations données (voir Lewis [49]). De plus pour vérifier l'indépendance entre les inter-arrivées et les tests non paramétriques paraissent plus appropriés. On peut également tester la corrélation entre deux séquences de variables aléatoires, à l'aide des tests de Spearman.

Des tests pour la structure de dépendance peuvent aussi être faits sur le processus de sortie (par exemple le processus du nombre de clients dans le système). Alors une vérification pour la dépendance markovienne peut être faite en utilisant des tests bien connus pour les chaînes de Markov (voir Bhat [18]).

### 3.1.4 Sélection des distributions

La dernière étape dans l'identification du processus approprié est la détermination du meilleur modèle pour les processus d'arrivée et de service. Elle constitue une étape fondamentale dans l'étude du processus d'identification du modèle d'un système de files d'attente.

Le problème de choix de distribution est un problème standard et classique. Il est basé sur la nature des données et la possibilité d'obtenir des modèles analytiques de distributions. Pour une discussion compréhensive il est préférable de commencer par des distributions simples comme la poissonnienne, puisque l'analyse sous de telles suppositions est

similaire. Après tout, le modèle mathématique est essentiellement, une approximation d'un processus réel. Ainsi, le choix d'une distribution doit être fait en prenant en considération le compromis entre les avantages de la sophistication du modèle et notre capacité d'en tirer des informations utiliser.

Lorsqu'aucune des distributions classiques ne s'ajuste avec notre modèle, la distribution est dite quelconque. Dans ce cas, on fait appel à des méthodes d'estimation non paramétriques.

## 3.2 Estimation paramétrique

L'application d'estimation paramétrique sur les systèmes de files d'attente est parmi les problèmes qui apparaissent sous différents types, parmi eux :

- L'estimation paramétrique par la méthode de vraisemblance.
- La méthode des moments.
- L'estimation Bayésienne.

L'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance à été appliquée en premier lieux sur les files d'attente markoviens de type  $M/M/s$ , par Clark [28], Bhat [21], Gross et Harris [37], par la suite cette méthode a été adapté au système d'attente semi markoviens par Harris [40], de type  $M/E_2/1$ , et ensuite de type  $M/E_k/1$  par Harishchandra et Rao [39], et enfin au système non markoviens par Achary, comme l'application du cette méthode sur les systèmes non-markoviens est dure , les chercheurs dans ce domaines ont trouvé une autre méthode c'est la méthode des moments où ils ont prouvé que les estimateurs déterminés par cette dernière sont meilleurs que ceux trouver par la méthode de vraisemblance déterminés sur les systèmes non-markoviens où la loi des inter-arrivées est une loi générale. Halfin et Heyde [38] soulèvent la discussion des moyennes en considérant une classe plus large des estimateurs linéaires.

Muddapur [52], ensemble avec Armero [3], Armero et Conesa [7], Armero et Bayarri [10] ont discuté les méthodes Bayésienne appliquées pour l'estimation dans les systèmes de files d'attente .

### 3.2.1 Estimation paramétrique par la méthode du maximum de vraisemblance

- a) **Estimation paramétrique par la méthode de vraisemblance dans les systèmes markoviens :** Clarke [28], a commencé une séquence d'articles sur ceci et a mis en rapport les sujets en obtenant l'E.M.V pour les paramètres des arrivées et de service dans une files d'attente  $M/M/1$ .

Par illustration, l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance dans une file d'attente  $M/M/1$  donné par Clarke [28] avec des taux d'arrivées et de service  $\lambda$ ,

et  $\mu$  inconnus ( $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ).

Soit  $n_0$  le nombre initiale de clients se trouvant dans le système.

Soit  $N(t)$  le nombre des clients présents dans le système à l'instant  $t$ , avec  $N(0) = n_0$ .

Il est claire que le temps enter-évènements est exponentiel avec une moyenne  $\frac{1}{\lambda+\mu}$ , quand le système est libre, et  $\frac{1}{\lambda}$  quand le système est occupé.

Tous les sauts sont montants de zéro, les sauts montants des états non nuls se présentent avec la probabilité  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$  et les sauts descendants se présentent avec la probabilité  $\frac{\mu}{\mu+\lambda}$ .

Soit  $T$  le temps d'observation de système où  $T$  est suffisamment large pour garantir quelques nombres appropriés d'observations, avec  $T$  choisi indépendamment du processus des arrivées et de service, afin que l'intervalle du temps soit indépendant de  $\lambda$  et  $\mu$ . Utilisant alors  $T_e$ ,  $T_b$  pour noter la durée du temps de système vide et occupé ( $T_b = T - T_e$ ).

Soit :

- $n_c$  le nombre des clients qui sont servis.
- $n_{ae}$  le nombre des arrivées dans un système vide.
- $n_{ab}$  le nombre des arrivées dans un système occupé.

Avec :

Le nombre totale des arrivées est données par :  $n_a = n_{ae} + n_{ab}$ .

d'où :

La vraisemblance du système markoviens peut être construite avec les composantes suivants :

- $X_b$  : les intervalles de longueur  $X_b$  passées dans un états non nul et finissants à une arrivées ou départ.
- $X_e$  : les intervalles de longueur passées dans un états nul et finissants à une arrivées.
- $X_t$  : les intervalles d'observation.

Comme on trouve aussi dans le système, les arrivées qui se trouvent devant un serveurs occupées ( arrivées au système occupé), les départs ( après le service d'un clients, il doit quitte le système), le nombre initiale de clients  $n_0$  dans le système.

Les contributions à la vraisemblance de chacune de ceci sont :

- ▷  $(\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)x_b}$ .
- ▷  $\lambda e^{-\lambda x_e}$ .
- ▷  $e^{-\lambda x_t}$ .
- ▷  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ .
- ▷  $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ .

▷  $P(N(0) = n_0) = (1 - \rho)\rho^{n_0}$ .

On a :  $\sum_0^{n_c+n_{ab}} X_b = T_b$ ,  $\sum_0^{n_{ae}} X_e = T_e$ .

D'après le chapitre précédent, on sait que la vraisemblance est :

$$L(X, \theta) = \prod_{i=1}^n q(X_i, \theta)$$

Alors, la vraisemblance est donnée par (avec  $X_T$  inclu soint dans  $T_b$  ou  $T_e$ ) :

$$\begin{aligned} L(\lambda, \mu) &= (\lambda + \mu)^{n_c+n_{ab}} e^{-(\lambda+\mu)\sum x_b} \lambda^{n_{ae}} e^{-\lambda\sum x_e} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{n_{ab}} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n_c} P(n_0). \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t_b} \lambda^{n_a} e^{-\lambda t_e} \mu^{n_c} P(n_0). \end{aligned}$$

D'où :

$$L(\lambda, \mu) = e^{-(\lambda+\mu)t_b} \lambda^{n_a} e^{-\lambda t_e} \mu^{n_c} P(n_0). \quad (3.1)$$

La log-vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} \log L(\lambda, \mu) &= -(\lambda + \mu)t_b + n_a \log \lambda + n_c \log \mu - \lambda t_e + \log P(n_0). \\ &= -\lambda t - \mu t_b + n_a \log \lambda + n_c \log \mu + \log P(n_0). \end{aligned}$$

D'où :

$$\log L(\lambda, \mu) = -\lambda t - \mu t_b + n_a \log \lambda + n_c \log \mu + \log P(n_0). \quad (3.2)$$

Dans le cas où la file d'attente est stable, la taille initiale doit être ignorée, et alors les estimateurs du maximum de vraisemblance  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{\mu}$  sont les solutions de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = -t + \frac{n_a}{\lambda} \\ \frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -t_b + \frac{n_c}{\mu} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{n_a}{T} \\ \hat{\mu} = \frac{n_c}{T_b} \end{cases} \quad (3.3)$$

$\hat{\rho} < 1$  car on a supposé que la files d'attente est stable, mais si cette condition n'est pas vérifiée, alors nous devons supposer que  $\hat{\lambda} = \hat{\mu}$  minimisé le  $\log L(\lambda, \mu) + \theta(\lambda, \mu)$ , où  $\theta$  est le multiplicateur de lagrange, et on obtient comme estimateurs commun,  $\hat{\lambda} = \hat{\mu} = \frac{(n_a+n_c)}{T+T_b}$ .

Si on suppose maintenant que  $N(0)$  ne peut pas être ignoré, alors afin d'obtenir des résultats significatifs, quelques suppositions doivent être faites en ce qui concerne la distribution de cette taille initiale. Si  $\rho < 1$ , et en choisissant :  $P(N(0) = n_0) = (1 - \rho)\rho^{n_0}$ , nous avons immédiatement se placer dans l'état stable d'autre part, nous pouvons faire l'estimation sous la supposition que  $\rho$  peut être, en effet supérieur à 1. Mais la distribution géométrique indiquée pour la taille du système ne sera pas

appropriée. Dans ce cas, on doit essayer une autre approche alternative, et le choix est alors arbitraire.

Maintenant, utilisant pour des buts illustratifs  $P(n_0) = (1 - \rho)\rho^{n_0}$ , dans ce cas l'équation  $\log L(\lambda, \mu)$  devient :

$$\log L(\lambda, \mu) = -\lambda t - \mu t_b + n_a \log \lambda + n_c \log \mu + n_0(\log \lambda - \log \mu) + \log(1 - \rho) \quad (3.4)$$

Alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = -t + \frac{n_a}{\lambda} + \frac{n_0}{\lambda} - \frac{1}{\mu - \lambda} \\ \frac{\partial \log L(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = -t_b + \frac{n_c}{\mu} - \frac{n_0}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \end{cases}$$

Les estimateurs  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{\mu}$  sont ainsi les solutions de :

$$\begin{cases} -T + \frac{n_a + n_0}{\hat{\lambda}} - \frac{1}{\hat{\mu} - \hat{\lambda}} = 0 \\ -T_b + \frac{n_c - n_0}{\hat{\mu}} + \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}(\hat{\mu} - \hat{\lambda})} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

A partir de la première équation on trouve  $\hat{\mu} = \hat{\lambda} + \frac{\hat{\lambda}}{(n_a + n_0) - \hat{\lambda}T}$ . Alors en remplaçant  $\hat{\mu}$  par sa formule dans la 2<sup>ème</sup> équation, où on va résoudre une équation du 2<sup>ème</sup> ordre, et on trouve deux valeurs pour  $\hat{\lambda}$ . La valeur négative obtenue est rejetée, et par la valeur restante de  $\hat{\lambda}$ , et la valeur de  $\hat{\mu}$  correspondante.

De plus on rejette le couple  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$  pour lequel :

$$\begin{cases} \hat{\mu} \leq 0 \\ \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}} > 1 \end{cases}$$

Si les deux solutions sont valables, alors on garde celle qui maximise la vraisemblance. Une approche alternative d'incorporer l'état initiale serait pour ajuster  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{\mu}$  et on aura l'approximation suivante :

$$\hat{\lambda} = \frac{n_a}{T} + \frac{n_0 - (n_a T_b / n_c T) / (1 - n_a T_b / n_c T)}{T} \quad (3.6)$$

$$\hat{\mu} = \frac{n_c}{T_b} - \frac{n_0 - (n_a T_b / n_c T) / (1 - n_a T_b / n_c T)}{T_b} \quad (3.7)$$

où  $(n_a T_b / n_c T) / (1 - n_a T_b / n_c T)$  est un estimateur de  $L$  (nombre moyen de clients dans le système),  $\hat{L} = \hat{\rho} / (1 - \hat{\rho})$ .

Lilliefors [50] a considéré le problème d'avoir l'intervalle de confiance pour l'intensité du trafic  $\rho$  d'une file d'attente  $M/M/1$  à partir de l'E.M.V calculer. Car les inter-arrivées sont indépendants et identiquement distribués, d'une loi exponentielle, alors la durée  $T$  suit une loi d'Erlang de type  $n_a$  et avec une moyenne  $\frac{n_a}{\lambda}$  ; d'où  $\lambda T$  suit

une loi d'Erlang de type  $n_a$  et avec une moyenne  $n_a$ . De même, la durée  $\mu T_b$  suit une loi d'Erlang de type  $n_c$  et avec une moyenne  $n_c$ .

Donc :

$$2\lambda T \rightsquigarrow \chi_{2n_a}^2, 2\mu T_b \rightsquigarrow \chi_{2n_c}^2.$$

et :

$$\frac{\mu T_b/n_c}{\lambda T/n_a} \rightsquigarrow F(2n_c, 2n_a).$$

Où :

$$n_a T_b/n_c T \rho \rightsquigarrow F(2n_c, 2n_a).$$

Et on a aussi :

$$n_a T_b/n_c T \rho = \hat{\rho}/\rho.$$

D'où :

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho} \rightsquigarrow F(2n_c, 2n_a).$$

Et ainsi, l'intervalle de confiance peut être facilement trouvé pour  $\rho$  par l'estimation de la table de Fisher avec un niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

On a :

$$P(k_1 < \frac{\hat{\rho}}{\rho} < k_2) = 1 - \alpha.$$

On trouve  $k_1$  dans la table de Fisher par l'équation suivante :

$$P(\frac{\hat{\rho}}{\rho} \leq k_1) = \frac{\alpha}{2}.$$

Et  $k_2$  par l'équation :

$$P(\frac{\hat{\rho}}{\rho} \leq k_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Donc l'intervalle de confiance de  $\rho$  au niveau de confiance  $(1 - \alpha)$  est :

$$I = [\frac{\hat{\rho}}{k_2}, \frac{\hat{\rho}}{k_1}] = [\rho_i, \rho_s]. \tag{3.8}$$

### Simulation sous MATLAB de la méthode E.M.V sur le modèle M/M/1

Notre étude de simulation est menée pour différentes périodes de simulation :  $T_{max} = 50$ ,  $T_{max} = 100$  et  $T_{max} = 500$  (unités de temps). Différentes valeurs de  $\rho$  sont considérées, aussi. Générer des temps d'arrivées et des durées de service et estimer  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\rho$  pour chaque période de simulation sont répétées 10 fois. Nous avons réalisé la simulation pour trois différentes valeurs de  $\rho$  :  $\rho = 0.5, (\lambda = 1, \mu = 2)$ ,  $\rho = 0.7, (\lambda = 1.4, \mu = 2)$ ,  $\rho = 0.9, (\lambda = 2.25, \mu = 2.5)$ . Nous avons même calculé

l'MSE (mean squared error) de chaque estimateur.

Le M.S.E est calculée en utilisant la formule suivante :

$$MSE(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2].$$

Valeurs théoriques	$T_{max}$	$\hat{\lambda}$	$MSE(\hat{\lambda})$	$\hat{\mu}$	$MSE(\hat{\mu})$	$\hat{\rho}$	$MSE(\hat{\rho})$
$\lambda = 1, \mu = 2, \rho = 0.5$	50	1.1200	0.0114	2.0964	0.0947	0.5342	0.0065
	100	1.0400	0.0089	2.1948	0.0353	0.0353	0.0066
	500	1.0280	0.0011	2.0087	0.0068	0.5118	$1.75 \cdot 10^{-4}$
$\lambda = 1.4, \mu = 2, \rho = 0.7$	50	1.5800	0.0324	2.5589	0.0728	0.6175	0.0205
	100	1.4200	0.0065	1.9640	0.0327	0.7230	0.0088
	500	1.3980	0.0020	0.0020	0.0064	0.7256	$8.86 \cdot 10^{-4}$
$\lambda = 2.25, \mu = 2.5, \rho = 0.9$	50	2.0400	0.0807	2.7436	0.0541	0.7436	0.0167
	100	2.3400	0.0162	2.6341	0.0175	0.8884	0.0015
	500	2.2320	0.0075	2.5394	0.0039	0.8789	0.0013

TABLE 3.1 – Tableau des estimations des taux de transition par la méthode M.V.S

On remarque d'après le tableau que  $\rho < 1$ , par conséquent, le système est stable dans tous les cas considérés. Le tableau montre que les estimations de  $\lambda, \mu$ , et  $\rho$  données par la méthode de M.V.S sont très bonnes pour toutes les périodes de simulation.

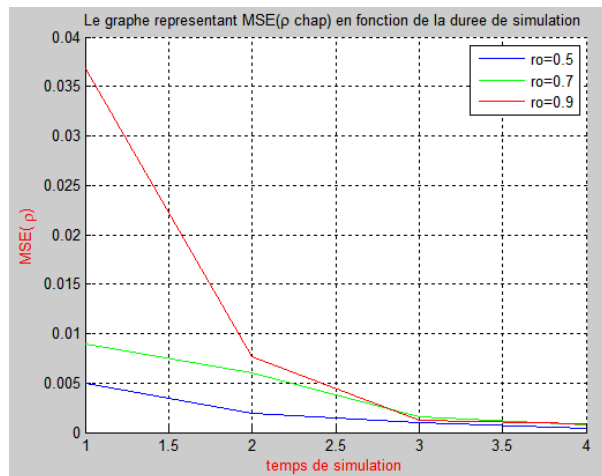


FIGURE 3.1 – Evolution de  $MSE(\hat{\rho})$  par la methode E.M.V



**L'interprétation de graphe :**

On remarque à partir du graphe de l'évolution de  $MSE(\hat{\rho})$  que lorsque  $T_{max}$  augmente, le biais ou le M.S.E diminue pour les différents cas considérés de  $\rho$ .

**b) Estimation paramétrique par la méthode de maximum du vraisemblance dans les système non-markoviens :**

Maintenant on applique la méthode de maximum de vraisemblance sur une file d'attente non-markovienne de type  $M/G/1$ . La méthode appliquée est semblable à celle vu précédemment, mais la vraisemblance n'est pas la même à cause de la propriété d'absence de mémoire, car on peut pas utiliser des données qui distinguent entre les intervalles vides et occupés.

La vraisemblance appliquée sur cette file est construite à partir de ces quatre éléments :

- L'intervalle des inter-arrivées de longueur  $T$  avec la densité de probabilité  $\lambda e^{-\lambda t}$ .
- La durée du temps de service  $X$  pour les  $n_c$  clients avec la loi  $B(x)$  et la densité de probabilité  $b(x)$ .
- Le temps passé dans le service (dire  $X_l$ ) par le dernier client avec la loi  $1 - B(x_l)$ .
- Le nombre initiale de clients  $n_0$ .

Donc :

$$L(\lambda, \mu) = \lambda^{n_a} e^{-\lambda(t-x_l)} \left( \prod_{i=1}^{n_c} b(x_i) [1 - B(x_l)] \right) P(n_0) \quad (3.9)$$

On obtient la log-vraisemblance par :

$$\log L(\lambda, \mu) = n_a \log \lambda - \lambda(t - x_l) + \sum_{i=1}^{n_c} \log b(x_i) + \log[1 - B(x_l)] + \log P(n_0). \quad (3.10)$$

La procédure est la même que la file  $M/M/1$ , pour la détermination de  $\hat{\rho}, (\hat{\lambda}, \text{et } \hat{\mu})$ .

Où on obtient :

$$\hat{\lambda} = \frac{n_a}{T - X_l}.$$

Et  $\hat{\mu}$  c'est la solution d'une équation d'ordre 2.

**Exemple 3.2.1.** Trouvons l'estimateur du maximum de vraisemblance pour une file d'attente  $M/E_2/1$  avec le taux moyen des arrivées  $\lambda$  et le temps de service moyen est  $\frac{2}{\mu}$ .

$$b(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}.$$

La vraisemblance est :

$$L(\lambda, \mu) = \lambda^{n_a} e^{-\lambda(t-x_l)} \prod_{i=1}^{n_c} b(t_i) \left[ 1 - \int_0^{x_l} b(t) dt \right] P(n_0).$$

Et la log-vraosemblance :

$$\log L(\lambda, \mu) = n_a \log \lambda - \lambda(t - x_l) + \sum_{i=1}^{n_c} [2 \log \mu + \log x_i - \mu x_i] + \log \left[ 1 - \int_0^{x_l} \mu^2 t e^{-\mu t} dt \right] + \log P(n_0).$$

On a l'intégral d'une Erlang s'écrit en terme d'une somme poissonnienne (voir Gross et Harris [34]) :

$$\int_0^{x_l} \mu^2 t e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu x_l} \sum_{i=0}^l \frac{(\mu x_l)^i}{i!}.$$

Donc :

$$\log L(\lambda, \mu) = n_a \log \lambda - \lambda(t - x_l) + 2n_c \log \mu + \sum_{i=1}^{n_c} \log x_i - \mu \sum_{i=1}^{n_c} x_i + \log [e^{-\mu x_l} + \mu x_l e^{-\mu x_l}] + \log P(n_0).$$

Et on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \frac{n_a}{\lambda} - (t - x_l) + \frac{\partial \log P(n_0)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \log L(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \frac{2n_c}{\mu} - \sum_{i=1}^{n_c} x_i - x_l + \frac{x_l}{1 + \mu x_l} + \frac{\partial \log P(n_0)}{\partial \mu} \end{cases}$$

Si on suppose que l'état initial est indépendant de  $\lambda$  et  $\mu$  alors on trouve les E.M.V de  $\lambda$  et  $\mu$  comme suit :

$$\begin{cases} \frac{n_a}{\lambda} - (t - x_l) = 0 \\ \frac{2n_c}{\mu} - \sum_{i=1}^{n_c} x_i - x_l + \frac{x_l}{1 + \mu x_l} = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\hat{\lambda} = \frac{n_a}{T - X_l}$$

et  $\hat{\mu}$  est la solution de l'équation d'ordre 2 suivante :

$$X_l \left( X_l + \sum_{i=1}^{n_c} X_i \right) \hat{\mu}^2 + \left( \sum_{i=1}^{n_c} X_i - 2n_c X_l \right) \hat{\mu} - 2n_c = 0.$$

**c) Estimation paramétrique par la méthode de vraisemblance en utilisant les chaînes de markov induite pour les files d'attente  $M/G/1$  et  $G/M/1$  :**

**a) Pour un système  $M/G/1$  :** Soit  $\theta$  le vecteur représentant les paramètres des distributions des inter-arrivées et du service dans une file d'attente  $M/G/1$ .

A partir de premier chapitre, on a retenue les définitions, et les notations pour les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite, pour un système  $M/G/1$  :

$$P_{ij} = \begin{cases} a_j, & i = 0. \\ a_{j-i+1}, & 1 \leq i \leq j + 1. \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où :

$$a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} b(t) dt, k = 0, 1, 2, \dots$$

Soit  $\theta$  inclut le taux des inter-arrivées  $\lambda$  et la distribution  $B(\cdot)$ .

Supposons qu'on a observer le système jusqu'à l'occurrence de  $N$  départs.

Soit  $X_n$  : le nombre de clients dans le système juste après le  $n^{ieme}$  départ.

$n_{ij}$  : le nombre de transitions des valeurs observées de  $X_n$  de l'état  $i$  à l'état  $j$  ( $i, j = 0, 1, 2, \dots$ ).

Et :  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  les valeurs observées de  $X_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ).

La fonction de vraisemblance est la suivante :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N P(X_n = x_n / X_{n-1} = x_{n-1}). \quad (3.11)$$

Et on obtient la log-vraisemblance par :

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log P(X_n = x_n / X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (3.12)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (n_{0j} + n_{1j}) \log a_j + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=i-1}^{\infty} n_{ij} \log a_{j-i+1}. \quad (3.13)$$

Pour calculer les estimations des taux des transition il faut utiliser des méthodes numériques ( voir Goyal et Harris [40]).

**b) Pour un système  $G/M/1$  :** Dans ce cas les expressions sont un peu compliquées à cause des probabilités des transitions  $P_{i0}$  qui s'écris ci-dessous :

$$P_{i0} = \sum_{k=i+1}^{\infty} \beta_k = \sum_{k=i+1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} b(t) dt.$$

Comme cette méthode est compliqué, Harishchanda et Rao [39] ont trouvé une autre approche en utilisant la chaine de markov induite du système  $M/G/1$ .

L'équation des  $A_{n+1}$  peut s'écrire comme la formule suivante :

$$A_{n+1} = \begin{cases} X_{n+1} - X_n + 1, & si X_n > 0 \\ X_{n+1}, & si X_n = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Où :  $A_n, n = 0, 1, \dots$  sont des variables aléatoires i.i.d, représentant le nombre d'arrivées durant le service du  $n^{ieme}$  client de densité de probabilité :

$$P(A_n = j) = a_j = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} b(t) dt.$$

Pour un système  $M/E_K/1$ ,  $A_n$  a une distribution binomiale négative (voir Bhat, Miller, et Rao [21]) donnée par :

$$P(A_n = x) = f(x, \rho) = C_{x+k-1}^x \left(\frac{\rho}{\rho+k}\right)^x \left(\frac{k}{\rho+k}\right)^k, x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Où  $\rho$  : l'intensité de trafic.

L'E.M.V de  $\rho$  est donnée par  $\hat{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$ .

Cet estimateur est sans biais et consistant. On a :  
 $E(\hat{\rho}) = \rho$ , et  $var(\hat{\rho}) = [n\mathbb{E}(\frac{\partial}{\partial \rho} \log f(x, \rho))^2]^{-1} = \frac{\rho(\rho+k)}{nk}$ .

On obtient :  $\hat{\mu} = \frac{N}{\tau}$  et  $\hat{\lambda}$  à partir de la relation  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  avec :  
 $\tau$  : le temps où le serveur est occupé.

### 3.2.2 La méthode des moments

Comme on a déjà cité précédament, la détermination des estimateurs des taux de services et d'inter-arrivées dans les systèmes d'attente de type  $M/G/1$  est difficile, par la méthode de maximum de vraisemblanc, ce qui a conduit plusieurs chercheurs comme Cox [30], Harris [40] et autres, à pensés à autre méthodes comme la méthode des moments.

Cox [30] a montré que si le système est stable, on peut estimé le taux d'arrivées avec l'efficacité asymptotique complète, d'où il devrait à peu prés égal au taux de départ durant une longue période de temps. Si la distribution de temps de service est exponentielle, aucune inférence n'est possible pour le temps moyen de service. Dans ce cas la distribution limite de sortie est celle d'entrée sont les mêmes.

D'un autre coté, si la distribution du temps de service n'est pas exponentielle, une estimation du temps moyen de service est possible. Ceci est facilité par la relation suivant (voir Gross et Harris [37]) :

$$C(t) = \frac{\lambda}{\mu} B(t) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \int_0^t B(t-x) \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (3.16)$$

Où  $C(t)$  et  $B(t)$  sont les distributions des temps d'inter-départ et servic, respectivement. Si le temps de service est constant ,  $C(t)$  ,se réduit à :

$$C(t) = \begin{cases} 0, & t < 1/\mu \\ \frac{\lambda}{\mu}, & t = 1/\mu \\ \frac{\lambda}{\mu} + (1 - \frac{\lambda}{\mu})[1 - e^{-\lambda(t-1/\mu)}], & t > 1/\mu. \end{cases}$$

Comme  $C(t)$  n'set pas nulle au point  $t = 1/\mu$ , alors on peut monter que son estimateur est données par le temps minimum d'inter-départ observé.

### 3.2.3 Estimation Bayésienne

– Pour un système markovien de type  $M/M/1$  :

Les premiers travaux sur l'estimation bayésienne dans les files d'attente sont ceux de Muddapur [52], qui tire les estimateurs bayésiens de  $\lambda$  et  $\mu$  dans les modèles d'attente  $M/M/1$ , ainsi que  $M/M/\infty$  , avec l'utilisation de même fonction de vraisemblance donnée par Clarke [28]. Il a même utilisé la même densité conjointe a priori pour  $\lambda$  et  $\mu$ , comme étant le produit des distributions Gamma a priori pour produire deux ensembles d'estimateurs de Bayes pour les paramètres des taux de transitions dans les systèmes  $M/M/1$ .

Plus tard Armero [3] a considéré la file d'attente  $M/M/1$ , où il a obtenu des distributions a posteriori de  $\rho$  et les distributions prédictives postérieures du temps d'attente dans la file et le nombre de clients dans le système sachant des échantillons indépendants des temps d'arrivées et de service.

Une procédure de maximum de vraisemblance pour estimer les taux d'inter-arrivées  $\lambda$ , et la durée de service  $\mu$ , dans un système  $M/M/1$ , (les inter-arrivées poissonien et la durée de service exponentielle), avec la discipline FIFO, et en état d'équilibre (stable). A été données par A.B.Clarke [28].

En générale pour estimer  $\lambda$ , on peut observer l'opération pendant un temps de longueur  $T$ , si  $n$  personne arrivent, alors  $\lambda = \frac{n}{T}$ , et si  $m$  personnes sont servis et que le temps totale d'occupation du canal de service est  $t$  alors  $\mu = \frac{m}{t}$  et si  $\rho$  est l'intensité de trafic et si  $\rho \geq 1$ , alors les estimations ci-dessous sont les mailleur qu'on puisse trouver, sinon on peut utilise la taille initiale de la file d'attente pour améliorer les estimateurs pour une files d'attente stable [52].

Soit :  $Z_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un échantillon aléatoire des temps de service d'une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ .

Et  $Z_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  un échantillon d'inter-arrivées aléatoires de distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

d'où :

$$Z_1 \rightsquigarrow Exp(\mu), \Rightarrow f(z_1) = \mu e^{-\mu z_1}.$$

$$Z_2 \rightsquigarrow Exp(\lambda), \Rightarrow f(z_2) = \lambda e^{-\lambda z_2}.$$

La vraisemblance est donnée par :

$$L(\mu, \lambda) = \mu^n \lambda^m e^{-(\mu r_1 + \lambda r_2)}. \quad (3.17)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} r_1 = \sum_{i=1}^n x_i \\ r_2 = \sum_{j=1}^m y_j \end{cases}$$

Supposons que  $\lambda$ , et  $\mu$ , sont inconnues et on leur associe les lois a priori suivantes :

$$\lambda \rightsquigarrow \gamma(\alpha_1, \beta_1), \text{ et } \mu \rightsquigarrow \gamma(\alpha_2, \beta_2).$$

, leurs distributions antérieures jointes est donnée par :

$$\pi(\lambda, \mu) = \gamma(\lambda/\alpha_1, \beta_1) \gamma(\mu/\alpha_2, \beta_2).$$

Et leurs distributions postérieures jointes est la suivante :

$$\pi(\lambda, \mu/Z_1, Z_2) = \gamma(\lambda/\alpha, \beta) \gamma(\mu/a, b).$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + m \\ \beta = \beta_1 + r_2 \\ a = \alpha_2 + n \\ b = \beta_2 + r_1 \end{cases}$$

D'où  $\lambda$  et  $\mu$ , aussi a posteriori indépendants avec les distributions marginales  $\gamma(\lambda/\alpha, \beta)$  et  $\gamma(\mu/a, b)$  respectivement.

En utilisant la relation entre la distribution Gamma et la distribution de Fisher, on tire la distribution de  $\rho$  comme suit :  $\rho \rightsquigarrow \frac{ab}{a\beta} F(2\alpha, 2a)$ .

Après, le calcul des lois a posteriori, on obtient les estimateurs de la moyenne a posteriori suivants :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_B = \frac{\alpha_1 + m}{\beta_1 + r_2} \\ \hat{\mu}_B = \frac{\alpha_2 + n}{\beta_2 + r_1} \end{cases}$$

### Simulation de l'estimation bayésienne de la file d'attente de type $M/M/1$ :

Notre étude de simulation est menée pour différentes périodes de simulation :

$T_{max} = 50, 100, 500, 1000$  (unités de temps). Générer  $\lambda$  et  $\mu$ , avec  $\lambda \rightsquigarrow \gamma(5, 1)$  et

$\mu \rightsquigarrow \gamma(6, 1/2)$ , des arrivées et des durées de service et estimer  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\rho$ , pour chaque période de simulation sont répétées 10 fois. Nous avons réalisé la simulation pour  $\rho = 0.6040$  ( $\lambda = 8.9092$ ,  $\mu = 13.9113$ ). Nous avons même calculé l'*MSE* (mean squared error) de chaque estimateur. Les résultats obtenues sont résumés dans le tableau suivant :

valeurs théoriques	$T_{max}$	$\hat{\lambda}$	$MSE(\hat{\lambda})$	$\hat{\mu}$	$MSE(\hat{\mu})$	$\hat{\rho}$	$MSE(\hat{\rho})$
$\lambda = 8.9092, \mu = 13.9113$ $\rho = 0.6040$	50	9.1375	0.1310	13.8621	0.2993	0.6592	0.0013
	100	9.0631	0.0795	13.4172	0.1383	0.6755	0.0012
	500	8.9982	0.0201	13.6758	0.0189	0.6580	0.0002
	1000	8.7701	0.0095	13.7212	0.0032	0.6392	0.0001

TABLE 3.2 – Tableau des estimations des taux de transition et leurs MSE par la méthode Bayésienne.

**L'interprétation des résultats :**

On remarque d'après le tableau et le graphe que  $\rho < 1$ , par conséquent, le système est stable dans tous les cas considérés. Le tableau montre que les estimations de  $\lambda, \mu, \rho$  données par la méthode bayésienne sont très bonnes pour toutes les périodes de simulation. Lorsque  $T_{max}$ , augmente, le biais ou le MSE diminue pour les trois estimateurs considérés ( $\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\rho}$ ). Ce qu'on remarque d'après la figure suivante.

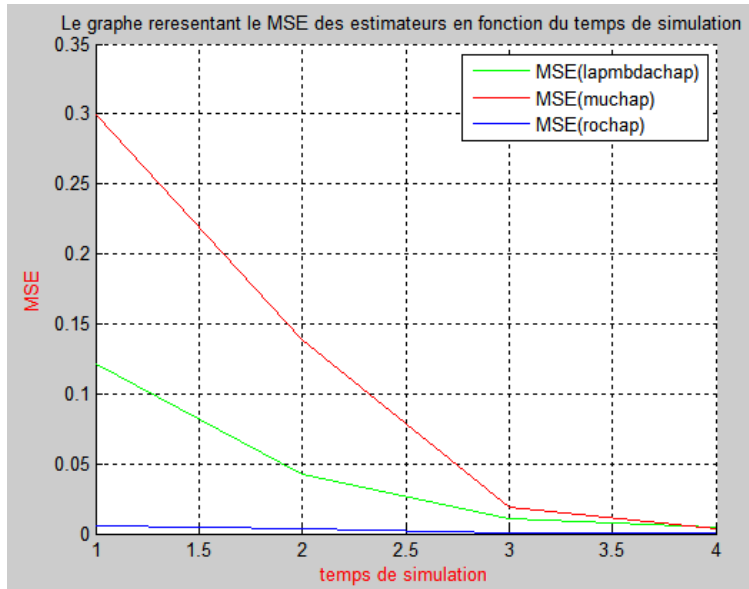


FIGURE 3.2 – L'évolution de MSE des estimateurs bayésiens

– **Pour un système non markovien de type  $G/M/1$  :**

Nous considérons un cas particulier du système  $G/M/1$  défini dans le premier chapitre, qui est le  $Er/M/1$  (les inter-arrivées suivent une loi d'Erlang de paramètres  $(\lambda k, k)$ , et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ ).

Le choix d'Erlang est motivé par le fait que son coefficient de variation est inférieur à 1, c'est aussi le système de file d'attente non markovien le plus utilisé dans des applications réels.

**Description du modèle :**

On considère un système de files d'attente à un seul serveur, avec une discipline FIFO, des temps de service exponentiels et des inter-arrivées distribuées selon une loi d'Erlang de paramètres  $(\lambda k, k)$ , ayant une densité :

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} (\lambda k)^k t^{k-1} e^{-\lambda k t}, t > 0.$$

Dans ce qui suit, la méthode bayésienne appliquée sur les paramètres du système étudié sera bien détaillée.

**Estimation bayésienne des paramètres du système :**

Une file d'attente peut être observée de différentes manières et de nombreuses données peuvent être récoltées sur les paramètres et les caractéristiques de la file. Dans cette étude, une simple expérience à été considérée et qui nous permet d'observer  $n_s$  temps de service  $s = (s_1, \dots, s_{n_s})$ , et  $n_a$  temps d'inter-arrivées,  $t = (t_1, \dots, t_{n_a})$ . on suppose



aussi que les inter-arrivées et les durées de service sont indépendants. De ce fait, on obtient [24] et [59] :

$$\begin{aligned} L(k, \lambda, \mu) &= \prod_{i=1}^{n_a} \left( \frac{1}{\Gamma(k)} (\lambda k)^k t_i^{k-1} e^{-\lambda k t_i} \right) \prod_{i=1}^{n_s} (\mu e^{-\mu s_i}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)^{n_a}} (\lambda k)^{n_a k} T_a^{k-1} e^{-\lambda k t_a} \mu^{n_s} e^{-\mu t_s}. \end{aligned}$$

Où :  $T_a = \prod_{i=1}^{n_a} t_i$ ,  $t_a = \sum_{i=1}^{n_a} t_i$ , et  $t_s = \sum_{i=1}^{n_s} s_i$ .

La fonction de vraisemblance est visiblement séparée en deux termes, le premier concerne les paramètres des arrivées et le deuxième concerne le paramètre du service. Par conséquent, en choisissant des lois a priori indépendants, et les lois a posteriori résultants seront aussi indépendants.

### A) Les distributions a priori et les a posteriori correspondants :

Le point le plus critiqué de l'analyse bayésienne est le choix de la loi a priori. En effet, car une fois cette loi connue, l'inférence peut être conduite d'une façon casi-mécanique en minimisant le coût a posteriori.

Le choix de la loi a priori la plus appropriée au problème posé, nécessite un minimum d'informations récoltées des expériences déjà réalisées et des avis des experts. La détermination des hyper-paramètres peut être faite en utilisant l'une des méthodes qui existent dans la littérature. (Voir quelques exemple dans la thèse de Braham (2019)) [24].

Dans ce qui suit, on attribue à chaque paramètre considéré une loi a priori de la manière suivante :

#### Le paramètre du service $\mu$ :

Comme le paramètre  $\mu > 0$ , alors on considère la loi gamma comme a priori c-à-d  $\mu \rightsquigarrow \gamma(a, b)$ . En utilisant le principe de la proportionnalité, on obtient la distribution a posteriori qui est aussi une loi gamma.

$$\begin{aligned} \pi(\mu/s) &\propto \frac{1}{\Gamma(a)} b^a \mu^{a-1} e^{-b\mu} \frac{1}{\Gamma(k)^{n_a}} (\lambda k)^{n_a k} T_a^{k-1} e^{-\lambda k t_a} \mu^{n_s} e^{-\mu t_s} \\ &\propto \mu^{a+n_s-1} e^{-(b+t_s)\mu}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mu/s \rightsquigarrow \gamma(a + n_s, b + t_s). \quad (3.18)$$

**Les paramètres des arrivées  $k$  et  $\lambda$  :**

Pour les paramètres  $\lambda$  et  $k$ , on garde la même distribution a priori jointe utilisée dans le travail de Wiper [59] :

$$\pi(\lambda, k) \propto \frac{\theta^{k-1} k (\lambda k)^{\alpha k - 1} e^{-\beta k \lambda}}{\Gamma(k)^\alpha}, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

Où  $\alpha \in \mathbb{N}, \beta, \theta \geq 0$  sont des paramètres fixés,  $\theta \alpha^\alpha / \beta^\alpha < 1$  et  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma.

On intègre par rapport à  $\lambda$  pour obtenir la distribution marginale de  $k$ .

$$\begin{aligned} \pi(k) &\propto \int \pi(\lambda, k) d\lambda \\ &\propto \int \frac{\theta^{k-1} k (\lambda k)^{\alpha k - 1} e^{-\beta k \lambda}}{\Gamma(k)^\alpha} d\lambda \\ &\propto \frac{\theta^{k-1} k^{\alpha k}}{\Gamma(k)^\alpha} \int \lambda^{\alpha k - 1} e^{-\beta k \lambda} d\lambda \\ &\propto \frac{\theta^{k-1} k^{\alpha k} \Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)^\alpha (\beta k)^{\alpha k}}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\pi(k) = \frac{\Gamma(\alpha k) \theta^{k-1}}{\Gamma(k)^\alpha \beta^{\alpha k}}, k \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

En utilisons le meme principe de proportionnalité, on déduit la loi a posteriori du paramètre  $k$  ci-après,

$$\begin{aligned} \pi(k/\lambda, t) &\propto \pi(k) L(k, \lambda, \mu) \\ &\propto \frac{\Gamma(\alpha k) \theta^{k-1}}{\Gamma(k)^\alpha \beta^{\alpha k} \Gamma(k)^{n_a}} (\lambda k)^{n_a k} T_a^{k-1} e^{-\lambda k t_a} \mu^{n_s} e^{-\mu t_s}. \\ \pi(k/\lambda, t) &\propto \frac{\Gamma(\alpha k) \theta^{k-1}}{\Gamma(k)^{n_a + \alpha} \beta^{\alpha k}} (\lambda k)^{n_a k} T_a^{k-1} e^{-\lambda k t_a} \end{aligned} \quad (3.21)$$

La distribution jointe de  $\lambda$  et  $k$  implique que sachant  $k$  ;

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &\propto \frac{\theta^{k-1} k (k \lambda)^{\alpha k - 1} e^{-\beta k \lambda}}{\Gamma(k)^\alpha} \\ &\propto \lambda^{\alpha k - 1} e^{-\beta k \lambda}. \end{aligned}$$

Finalement ; il en résulte que :

$$\lambda \rightsquigarrow \gamma(k\alpha, k\beta).$$

La distribution a posteriori du paramètre  $\lambda$  est donc déduite comme suit :

$$\begin{aligned} \pi(\lambda/k, t) &\propto \pi(\lambda)L(k, \lambda, \mu) \\ &\propto \lambda^{\alpha k-1} e^{-\beta k \lambda} \lambda^{n_a k} e^{-\lambda k t_a} \\ &\propto \lambda^{k(\alpha+n_a)-1} e^{-k(\beta+t_a)\lambda}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\lambda|k, t \rightsquigarrow Er(k(\alpha + n_a), k(\beta + t_a)).$$

On a remarqué que les distributions a posteriori obtenues ne sont pas tous des lois connues et faciles à simuler, c'est pour cette raison qu'on fait appel aux méthodes de simulation de Monte Carlo par chaîne de Markov [24], [25]

### 3.3 Tests d'hypothèses

Les problèmes des tests d'hypothèses survient quand on a besoin de faire des inférence sur les paramètres des distributions des inter-arrivées, et des durées de service, ou des mesures comme l'intensité du trafic  $\rho$ , les formes de distributions basé sur les données échantillonnées du système. Lorsque on a assez d'informations à partir des données échantillonnées (une grande connaissance sur l'échantillons utilisées), on aura plus de possibilités d'utiliser des techniques standard de la théorie statistique.

Comme on a déjà vu, les données échantillonnées peuvent être tirées du processus d'attente comme la taille de la files, le temps d'attente ou le processus de sortie.

Dans cette section, nous nous intéressons à développer quelques tests sur le choix de la distribution et sur l'intensité du trafic.

#### 3.3.1 Tests pour les paramètres d'arrivées et de service dans le système M/M/1.

Pour un système d'attente M/M/1, les tests pour les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , peuvent être basés sur la distribution  $\chi^2$ .

$$\text{On a : } \begin{cases} 2\lambda T \rightsquigarrow \chi_{2n_a}^2 \\ 2\mu T_b \rightsquigarrow \chi_{2n_c}^2 \end{cases}$$

Par conséquent, un test pour  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  peut être basé sur la distribution de fisher.

Cox [26] a proposé un test simple pour la proportion du temps inoccupé à travers l'axe du temps dans le système M/M/1, qui est aussi la probabilité que le temps d'attente est nulle.

### 3.3.2 Sélection de la distribution

Dans cette sous section, on s'intéresse à sélectionner un modèle approprié par l'analyse des inter-arrivées, temps de service, et le temps d'attente. Pour trouver ou déterminer la distribution des inter-arrivées, ou le temps de service à partir des données empiriques, trois questions essentielles se posent. Elles sont comme suit :

- a) Le processus est-il exponentiel ?
- b) Y'a-t-il homogénéité dans les données par rapport au temps ?
- c) Y'a-t-il autocorrélation entre les données utilisées ?

La question (a) est importante pour faire l'analyse de système d'attente, parce que l'absence des processus poissonniens/exponentiels peut créer des obstacles presque insurmontables pour l'analyse du modèle. Une réponse négative à question (b) signifie qu'une tâche supplémentaire doit être prise dans l'analyse des données, puisque les paramètres et/ou les distributions peuvent changer avec le temps. Pour la question (c), il faut être prudent dans le traitement des données et de ne pas supposer qu'on a vraiment un échantillon aléatoire. Ceci est particulièrement vrai dans l'analyse des données de sorties et d'attente.

Généralement, la méthode la plus simple pour tester les caractères poissonniens/exponentiels des données est d'utiliser le test de  $\chi^2$  où les paramètres sont remplacés par leurs estimateurs du maximum de vraisemblance.

#### Les inconvénients du test de $\chi^2$

- Son exigence pour les grands échantillons.
- Sa dépendance lourde sur le choix du nombre et de la position des intervalles de temps.
- Son erreur de type II la plus élevée pour quelques distributions alternatives faisables.

Comme la loi exponentielle est très importante dans les files d'attente, on va définir deux tests pour l'exponentialité : le test de Fisher, et le test de Kolmogorov-Smirnov (K.S).

#### 1. Test de Fisher

Soit un ensemble de  $n$  interoccurrences exponentielles d'instant  $\{t_i\}$ . Décomposant cet ensemble en deux sous ensembles de  $(r = n/2)$  et  $(n - r)$  interoccurrences telles que les  $\{t_i\}$  sont ordonnés par ordre croissant. Soit les variables aléatoires  $\{S_i\}$  définies par :

$$S_i = (n - i + 1)(t_i - t_{i-1}), (t_0 = 0).$$

Il est clair que  $\{S_i\}$  sont indépendants et identiquement distribués d'une loi exponentielle avec une moyenne identique à celle de la distribution de  $\{t_i\}$ .

Donc, elles vérifient comme vu précédemment que la statistique :

$$F_{2r,2(n-r)} = \frac{\sum_{i=1}^r S_i/r}{\sum_{i=r+1}^n S_i/(n-r)} \tag{3.22}$$

Suit une loi de Fisher avec les degrés de liberté  $2r$  et  $2(n - r)$  quand l'hypothèse d'exponentialité est vraie.

2. **Test Kolmogorov-Smirnov**

Le test de (K.S) cherche à tester l'ajustement de la distribution de l'échantillon à une loi théorique ( $F_0(t) = 1 - e^{-\hat{\lambda}t}$ ,  $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i}$ ).

Donc on va tester les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : F(x) = F_0(x) \\ \text{Contre} \\ H_1 : F(x) \neq F_0(x) \end{cases}$$

La statistique  $D_n$  de (K.S) est définie par la formule suivante :

$$D_n = \max_i \left\| \frac{i-1}{n} - F_0(t_{(i)}) \right\|. \tag{3.23}$$

Où  $t_{(i)}$  est la  $i^{ime}$  observation ordonnée (ordre croissant).

**Exemple 3.3.1.** La séquence de 25 temps de service est observée pour une file d'attente  $M/G/1$ . Nous allons tester ces données pour l'exponentialité en utilisant le test de Fisher et le test de K.S respectivement.

27.6 28.9 3.8 16.6 13.3 3.3 7.8 55.3 12.6 1.8 12.9 4.8 12.6 8.8 3.3 2.7 0.6 1.3 1.1 21.3 11.3 14.9 15.7 8.6 9.6

Pour le test de Fisher, nous arrangeons les observations dans l'ordre croissant, et divisons les observations en deux ensembles de 13 et 12 éléments respectivement.

13 : 0.6 1.1 1.3 1.8 2.7 3.3 3.3 3.8 4.8 7.8 8.6 8.8 9.6

$t_{(i)}$	0.6	1.1	1.3	1.8	2.7	3.3	3.3	3.8	4.8	7.8	8.6	8.8	9.6
$S_i$	15.0	12.0	4.6	11.0	18.9	12.0	0	9.0	17.0	48.0	12.0	2.8	10.4

12 : 11.3 12.6 12.6 12.9 13.3 14.9 15.7 16.6 21.3 27.6 28.9 55.3

$t_{(i)}$	11.3	12.6	12.6	12.9	13.3	14.9	15.7	16.6	21.3	27.6	28.9	55.3
$S_i$	20.4	14.3	0	2.7	3.2	11.2	4.8	4.5	18.8	18.9	2.6	26.4

On trouve :

$$\begin{aligned} F_{26,24} &= \frac{\sum_{i=1}^{13} S_i/13}{\sum_{i=14}^{25} S_i/12} \\ &= \frac{172.7/13}{127.8/12} \\ &= 1.24 \end{aligned}$$

Les valeurs critique de la table de Fisher à 95% pour  $F_{26,24}$  est 1.97. Donc, on accepte l'hypothèse que les données sont exponentielles.

On va appliquer maintenant le test de K.S. Ordonnons les observations dans l'ordre croissant, et comparons la distribution empirique avec la distribution exponentielle théorique  $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} = 0.083$ .

D'où  $F_0(t) = 1 - e^{-0.083t}$ , (distribution théorique estimée).

i	$t_i$	$F_0(t_i)$	$ \frac{i-1}{n} - F_0(t_i) $
1	0.6	0.05	0.05
2	1.1	0.09	0.05
3	1.3	0.10	0.02
4	1.8	0.14	0.02
5	2.7	0.20	0.04
6	3.3	0.24	0.04
7	3.3	0.24	0
8	3.8	0.27	0.01
9	4.8	0.33	0.01
10	7.8	0.48	0.12
11	8.6	0.51	0.11
12	8.8	0.51	0.08
13	9.6	0.55	0.07
14	11.3	0.61	0.09
15	12.6	0.65	0.09
16	12.6	0.65	0.09
17	12.9	0.66	0.02
18	13.3	0.67	0.01
19	14.9	0.71	0.01
20	15.7	0.73	0.03
21	16.6	0.75	0.05
22	21.3	0.83	0.01
23	27.6	0.90	0.02
24	28.9	0.91	0.01
25	55.3	0.98	0.02

$$d_n = \max |F_n(x) - F_0(x)| = 0.12$$

La valeur critique de la table de K.S pour  $d_n$  est : 0.21.

D'où : nous acceptons l'hypothèse que les données sont exponentielles.

### 3.3.3 Un test pour le temps de service exponentiel en utilisant les données du temps d'attente

Parfois, l'observation complète du système ne peut être possible. Supposons que seules les observations des temps d'attente  $W_1, W_2, \dots, W_N$  des  $n$  premiers clients successifs sont disponibles. On suppose que les temps des inter-arrivées ont une distribution exponentielle, et on souhaite tester l'hypothèse que les temps de service sont exponentiels. Cette hypothèse peut être déclarée comme :  $G = M$  dans le système de files d'attente  $M/G/1$  (voir Thiagarajan et Harris [37]).

La difficulté principale survient du fait que les  $W_i$  sont corrélées. Supposons qu'aucun des  $W_i$  n'est nul. Alors, on a la relation suivante :  $W_{n+1} = W_n + Y_n$ , où  $Y_n = v_n + u_n$ , avec  $u_n$  étant le  $n^{ième}$  instant d'inter-arrivées et  $v_n$  le  $n^{ième}$  instant de service. Ici  $u_n$  et  $v_n$  sont supposées être des v.a.i.i.d, et par conséquent les  $Y_n$  le sont aussi. Sous l'hypothèse  $H_0 : "G = M"$ , les densités conditionnelles de  $Y$ , sachant  $Y > 0$  et  $Y < 0$  sont respectivement :

$$g(y/Y > 0) = \mu e^{-\mu y}.$$

$$g(y/Y < 0) = \lambda e^{-\lambda y}.$$

Cette équation suggère que le test pour  $G = M$  peut être déclaré comme suit, diviser les données en deux groupes, l'un est composé de nombres positifs et l'autre composé de nombres négatifs. Tester l'exponentialité séparément, en utilisant le test proposé par Gnedenko et al [33]. Pour des détails et des tests pour des cas où il y a des temps d'attente nuls, on peut se référer à Thiagarajan et Harris [37].

### 3.3.4 Contrôle de l'intensité du trafic

#### Test de rapport de probabilités séquentiels

Quand la différence entre les valeurs des paramètres sous l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative est grande, un test séquentiel a l'avantage d'utiliser un échantillon de taille considérablement petite. Avec cet objectif, Rao et al [50] ont développés une procédure pour tester les hypothèses :  $H_0 : \rho = \rho_0$  contre  $H_1 : \rho = \rho_1$  en utilisant le test de rapport de probabilité séquentiel de Wald (SPRT) pour les systèmes  $M/G/1$  et  $G/M/S$  dans lesquels le processus de longueur de files d'attente  $X_n, n = 1, 2, \dots$ , représentant le nombre de clients dans le système à l'instant d'un départ (dans une file  $M/G/1$ ) ou à l'instant d'une arrivée (dans une file  $G/M/S$ ), est une chaîne de Markov induite. Soient les probabilités de transition de la chaîne  $P_{ij}(\rho)$  où  $\rho$  est l'intensité du trafic, et soit  $n_{ij}$  le nombre de transitions  $i \rightarrow j$  de  $\{X_n\}$ . D'où le rapport de vraisemblance pour le SPRT est  $(n = \sum \sum n_{ij})$  (voir Bhat [18]).

$$L_n = \prod_{ij} P_{ij}^{n_{ij}}(\rho_1) / \prod_{ij} P_{ij}^{n_{ij}}(\rho_0) \tag{3.24}$$

Soit  $A = (1 - \beta)/\alpha$  et  $B = \beta(1 - \alpha)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les erreurs de type I et II respectivement. La procédure du SPRT est la suivante : après avoir observé  $X_n$ , on accepte  $H_1$  si  $L_n \geq A$ , on accepte  $H_0$  si  $L_n \leq B$ . L'application des tests est plus facile si les logarithmes sont utilisés. Pour les systèmes  $M/M/1$  et  $M/E_k/1$ ,  $E_k/M/1$  et  $M/M/S$ , le log de l'équation précédente prend la forme suivante :

$$\log L_n = an + \sum_{ij} n_{ij}c_{ij}$$

Où  $a$  et  $c_{ij}$  sont des fonctions dépendantes de  $\rho_1$  et  $\rho_0$ , et les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite. Pour détailler plus cette procédure, on peut voir Rao et al [50].

### Tests utilisant les distribution limites du nombre de clients dans le système

Une procédure alternative sur le contrôle du paramètre dans les files d'attente  $M/G/1$  et  $G/M/1$  est d'utiliser les distributions limites du nombre de clients dans le système comme discuté dans Bhat [18]. Soit  $t_0, t_1, \dots$  les instants de départs dans une file d'attente  $M/G/1$  ( où les instants d'arrivées dans une file d'attente  $G/M/1$ ), et  $X_n$  le nombre de clients dans le système aux instants  $t_0, t_1, \dots$  cette technique a deux phases : la première phase indique le temps sur lequel la fonction de l'échantillon sort de la région couverte par les limites supérieures et inférieures de contrôle  $c_u$  et  $c_l$  respectivement, la seconde phase (la phase du test) est posée pour voir si le processus retourne à la région de contrôle dans des période spécifique du temps et implique deux limite :  $d_u$  et  $d_l$ .

le premier ensemble des limites est déterminé en utilisant la distribution limite de  $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Soit  $X^* = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  et soit  $\alpha_u$  et  $\alpha_l$  deux probabilités spécifiées.

D'où  $c_u$  et  $c_l$  sont des entiers tels que :

$$c_u = \min\{k/P(X^* \geq k) \leq \alpha_u\} \tag{3.25}$$

$$c_l = \max\{k/P(X^* \geq k) \leq \alpha_l\} \tag{3.26}$$

Une procédure simple, suggérée par Bhat [18], pour la détermination du 2<sup>ieme</sup> ensemble des limites  $d_u$  et  $d_l$  fait usage des périodes de service dans lesquelles aucune arrivée d'un client ne se produit dans la file  $M/G/1$  et les périodes des inter-arrivées dans lesquelles aucune fin de service ne se produit dans la file  $G/M/1$ . Il est clair que ces événements sont de loi de bernoulli avec le probabilité du succès  $d_u$  et  $d_l$  sont alors définies avec les probabilités associées  $\beta_u$  et  $\beta_l$  comme suit :



Dans la file  $M/G/1$ , quand  $\{X_n\}$  tend vers la limite supérieur  $c_u$ , on conclut pas que  $\rho > \rho_0$  à moins que le processus reste à où dépasse  $c_u$  pour un nombre minimal de transitions de  $d_u$ . D'où, en donnant une probabilité  $\beta_u$ ,  $d_u$  est le plus petit nombre  $n$  tel que la probabilité du nombre d'arrivées ( $\geq 1$ ) dans  $n$  transitions consécutives est ( $\leq \beta_u$ ). Ceci peut être déclaré comme :

$$d_u = \min\{n/(1 - k_0)^n \leq \beta_u\} \quad (3.27)$$

Quand  $\{X_n\}$  tend vers  $c_l$ , on conclut pas que ( $\rho < \rho_0$ ) à moins qu'il reste à au moins que  $c_l$  pour un nombre minimale de transitions de  $d_l$  est le plus petit nombre  $n$  tel que la probabilité du nombre d'arrivées est nulles pour  $n$  transition consécutives est ( $\leq \beta_l$ ). Ceci peut être déclaré comme :

$$d_l = \max\{n/k_0^n \leq \beta_l\} \quad (3.28)$$

Dans le cas d'une file d'attente  $G/M/1$ , des expressions similaire peuvent être obtenues en notant que  $b_0$  est la probabilité de ne pas avoir une fin de service durant une période d'inter-arrivées. Ceci va être accompli en remplaçant  $(1 - k_0)$  avec  $b_0$  dans (3.28) et  $k_0$  avec  $(1 - b_0)$  dans (3.29).

Puisque  $(1 - k_0)$  est la probabilité qu'une arrivée ou plus se produit dans une file d'attente  $M/G/1$  durant une période de service, les limites de la seconde phase obtenues comme décrit au-dessus sont très conservatrices et fournissent assez de protection pour la fausse conclusion que l'intensité du trafic a changé.

Donc, une fois les limites ( $c_u, c_l, d_u, d_l$ ) sont déterminées comme elles sont données dans (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29), la procédure pour diriger et contrôler l'intensité du trafic dans les files d'attente  $M/G/1$  et  $G/M/1$  peut être décrit comme suit :

1. Commencer avec une taille initiale de la file  $n_0$  et une intensité du trafic  $\rho_0$ , laisser le système seul aussi long que  $X_n$  soit compris entre  $c_u$  et  $c_l$ , ou quand elle sort de ces limites et elle retourne entre ces dernières avant  $d_u$  et  $d_l$  transitions, respectivement.
2. Si la longueur de la file ne retourne pas entre  $c_u$  et  $c_l$ , en  $d_u$  ou  $d_l$  transitions successives, on conclut que l'intensité du trafic a changé de  $\rho_0$  et on réinitialise le système pour rapporter l'intensité du trafic à  $\rho_0$ .
3. Répéter les étapes 1 et 2 en utilisant le dernier état du système comme l'état initial.

### Un test uniformément le plus puissant pour $\rho$ dans le système de files d'attente $M/E_k/1$

En utilisant la supposition que le nombre de clients  $X_n$  arrivent durant la  $n^{ieme}$  période de service dans le système de files d'attente  $M/E_k/1$  forme une séquence de v.a.i.i.d avec une distribution binomiale négative, Harishchandra et Rao [36] ont développé un test de rapport de vraisemblance pour  $\rho$  basé sur l'échantillon  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Par le terme de Neyman-Pearson, un test uniformément le plus puissant de niveau  $\alpha$  pour  $H_0 : \rho = \rho_0$

contre  $H_1 : \rho > \rho_0$  est donné par :

$$\Phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \sum x_i > c \\ \gamma(\underline{x}), & \sum x_i = c \\ 0, & \sum x_i < c \end{cases}$$

Où  $c$  et  $\gamma$  sont tels que  $\alpha = P(\sum x_i > c/\rho_0) + \gamma P(\sum x_i = c/\rho_0)$  et  $\Phi(\underline{x})$  est la probabilité du rejet de  $H_0$ . Notons que c'est un test ranfomisé. La fonction puissance du test est donnée par  $:\beta(\rho) = P(\sum x_i > c/\rho) + \gamma P(\sum x_i = c/\rho)$ .

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé un domaine très important dans l'étude des systèmes de files d'attente. Il s'agissait d'actualiser les travaux de Bhat et Rao de 1987 et de 1997 ([19] et [20]) sur les différentes méthodes utilisées dans l'analyse statistique des systèmes de files d'attente.

Pour ce genre de problèmes, nous avons fait recours à l'analyse par simulation à cause de l'absence d'un modèle analytique, et nous nous sommes limité aux systèmes  $M/M/1$ , sur lesquels on a appliqué l'E.M.V et la méthode bayésienne pour estimer le taux d'arrivées et du temps de service ainsi que l'intensité du trafic.

---

# Conclusion

---

Dans notre travail, nous avons actualisé les synthèses de Bhat et Rao sur les méthodes statistiques utilisées dans l'étude des systèmes de files d'attente. En premier lieu, Nous avons présenté un système de files d'attente d'une manière générale, et en particulier, nous nous sommes intéressées aux systèmes markoviens ( $M/M/1$ ) et non markoviens ( $M/G/1$  et  $G/M/1$ ) en définissant les notions de base qui lui sont liées (probabilités stationnaires, caractéristiques associées et chaîne de Markov induite).

En second lieu, nous avons développé quelques méthodes d'estimation paramétriques (à savoir : méthode du maximum de vraisemblance, méthode des moments, estimation bayésienne) et les tests statistiques (tests paramétriques et tests non paramétriques d'ajustement).

En effet, l'analyse statistique des systèmes d'attente nous permet d'identifier un modèle mathématique correct et de déterminer si ce modèle est approprié.

Dans l'étude d'une file d'attente, généralement on s'intéresse à étudier le processus des arrivées et le processus de sortie. Mais souvent, dans la pratique, le taux d'arrivées et le taux de service sont inconnus, alors on fait appel à la statistique inférentielle pour estimer ces deux derniers ainsi qu'à l'intensité du trafic en utilisant les données échantillonnées. Dans notre étude, un modèle analytique est inexistant, pour cela nous avons réalisé un simulateur sous l'environnement MATLAB sur la file  $M/M/1$  dont lequel nous avons estimé le taux d'arrivées et le taux de service ainsi qu'à l'intensité du trafic en appliquant la méthode de maximum de vraisemblance et l'estimation bayésienne.

En fin, pour le choix de la distribution, nous avons effectués deux tests essentiels à savoir le test de Fisher et le test de K.S (Kolmogorov-Smirnov).

Ce travail ouvre des perspectives de recherche qui sont :

1. Développer d'autres techniques d'estimation, à savoir :
  - L'estimation en utilisant deux types spéciaux de données (données croisées et données transactionnelles).
  - L'estimation liée aux mesures de performance.
  - L'estimation par simulation de processus d'attente.

2. Réaliser un simulateur sous MATLAB sur les files non markoviennes et estimer le taux d'arrivées et le taux de service. En plus, faire une comparaison entre l'E.M.V et l'estimation bayésienne en utilisant l'erreur quadratique moyenne des taux estimés.

---

# Bibliographie

---

- [1] D.Aissani et A.Aissani. La théorie des files d'attente, Fondament historique et application à l'évaluation des performances. Publication du Laboratoire LaMOS, Bejaia, 2004.
- [2] S.Antipolis and M.J.rendas. traitement statistique de signal, note de cours ,EPU. April, 13,2007.
- [3] C.Armero. Bayesian analysis of  $M/M/1/\infty/FIFO$  queues, In : Bayesian statistics 2 (ed.by J.M.Bernardo, M.H.Degroot, D.v.Lindley, and A.F.M.Smith). 613-617, 1985.
- [4] C.Armero. Bayesian inference in Markovian queus. Queueing systems (15), 419-426,1994.
- [5] C.Armero and M.J.Bayarr. Bayesian prediction in  $M/M/1/\infty/FIFO$  queues. Queueing systems (15). 401-417, 1994.
- [6] C.Armero. Dealing with uncertainties in queues and networks of queues : a Bayesian approach. Technical Report, Departement of statistics and operations Research, Universitat de València, Spain,2000.
- [7] C.Armero and D.Conesa. prediction in Markovian bulk arrival queues, Queueing Systems(34), 327-350 ;2000.
- [8] C.Armero and D.Conesa. Bayesian Hierarchcal Models in Manufactruning Bulk. Technical Report, Departement of statistics and operations Research, Universitat de València, Spain,2002.
- [9] C.Armero and D.Conesa. Statistical Performance of a Multiclass Bulk. Technical Report, Departement of statistics and operations Research, Universitat de València, Spain,2002.
- [10] C.Armero and M.J.Bayarri. Dealing with uncertainties in queues and networks of queues : a Bayesian approach. Technical Report, Department of statistics and Operations Research, Universitat de València, Spain, 2000. bibitem[11]11A.Asanjarani, Y.Nazarathy and P.K.Polbett, Parameter and estimation in queues and related stochastic models : A bibliography. ArXiv preprint (2017). ArXiv : 1701-08338. V1.
- [12] M.C.Ausin, M.P.Wiper and R.E.Lillo. Bayesian estimation for the  $M/G/1$  queue using a phase type approximation. Journal of Statistical Planning and Inference 118(2004), 93-101..

- [13] A.Bareche. Analyse statistique des systèmes d'attente. Thèse Magistère en Mathématique appliquées. Université de Bejaia. 2003.
- [14] L.Berdjoudj. statistique inférentielle. cours - site Elearning. Université de Bejaia. 2014.
- [15] I.V.Basawa, U.N.Bhat and R.Lund. Maximum likelihood estimation for single server queues from waiting time data. *Queueing Systems* (24), 155-167, 1996.
- [16] B.Baynat. Théorie des files d'attente. Hermes Sciences Publications, Paris, 2000.
- [17] U.N.Bhat. An Introduction to Queueing Theory, Modeling and Analysis in Applications. Birkhauser Boston, 2008.
- [18] U.N.Bhat. Parameter estimation in M/GI/1 and GI/M/1 queues using length data, in S.K. Srinivasan and A.Vijayakumar, eds, *Stochastic Point Processes*, Narosa, New Delhi, 96-107, 2003.
- [19] U.N.Bhat. A sequential technique for the control of traffic intensity in Markovian queues. *Ann. Oper. Res.*,(8),151-164, 1987.
- [20] U.N.Bhat and I.V.Basawa. Maximum likelihood estimation in queueing systems, in N.Balakrishnan, ed.. *Advances on Methodological and applied Aspects of Probability and Statistics*, Taylor and Francis, New York, 13-29, 2002.
- [21] U.N.Bhat and S.S.Rao. Statistical analysis of queueing systems. *Queueing systems* (1) :217-247,1987.
- [22] U.N.Bhat, G.K.Miller, and S.S.Rao. Statistical analysis of queueing systems, in J.H.Dshalalow, ed., *Frontiers in Queueing*, CRC Press, New York, Chapter 13, 351-393, 1997.
- [23] A.Birnbaum. *Statistical methods for poisson processus and exponential population*. Soc, 1954.
- [24] H.Braham. L'analyse bayésienne des systèmes de files d'attente. Thèse de doctorat (LMD) en Mathématique appliquées. U.Béjaia. 2019.
- [25] H.Braham, L.Berdjoudj, M.Boualem and N.Rahmania. Analysis of a non markovian queueing model : bayesian statistics and MCMC Methods, *Monte Carlo Methods Application*. 2019, 25(2). 147-154.
- [26] A.Choudhury and A.Basak. Statistical inference on traffic intensity in an  $M/M/1$  queueing systems, *International Journal of Management Science and Engineering Management* 13(2018), 274-279.
- [27] A.Choudhury and A.C.Borthakur. *American Journal of Mathematical and Management Sciences* 27(2013), 25-41.
- [28] A.B.Clarke. Maximum likelihood estimates in a simple queue. *Ann. Math. Statist.*,(28), 1036-1040,1957.
- [29] D.R.Cox. Some problems of statistical analysis connected with congestion, in W. L.Smith and W.B.Wilkinson, eds., *Proceedings of the Symposium on Congestion Theory*, University of North Carolina Press, Chapel Hill, NC, 289-316,1965.

- [30] D.R.Cox and P.A.W.Lewis. The Statistical Analysis of Series of Events. Methuen, London, 1966.
- [31] P.Duchesne. chapitre3 : estimation par intervalle, february,2,2017.
- [32] R.Delyon. estimation non parametrique, cours master 2, irmar, Université rennes 1, france 2015.
- [33] A.K.Erlang. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, Elektroteknikeren, (13),5,1957.
- [34] S.N. FIIFO 3. Probabilité-statistiques.Estimationde paramètres.
- [35] B.Frédéric. Tests paramétriques, IRMA, Université de strasbourg, Franc M1,MccB2a Fc 01-06,2010.
- [36] B.V.Gnedenko, Y.K.Balyayev and A.D.Solovyev. Mathematical Methods of Reliability Theory. Academic Press, New York, 1969.
- [37] D.Gross and C.M.Harris. Fundamentals of Queueing Theory. 2<sup>nd</sup> edition. John Wiley and Sons, New York,1985.
- [38] S.Halfin. Linear estimators for a class of stationary queueing processes. Oper. Res, (30),515-529,1982.
- [39] K.Harishchandra and S.S.Rao A note on the statistical inference on the traffic. intensity parameter in  $M/E_K/1$  queue, Sankhya (50), 144-148,1988.
- [40] C.M.Harris. Some new results in the statistical analysis of queues. In : Proc. of a Conf. on Math. in Queueing Theory (ed. by A.B.Clarke), Lecture Notes in Economics and Math. Sys., Spring-Verlag, (98) : 157-183,1974.
- [41] L.Joseph, D.B.Wolfson, and C.Wolfson. Is multiple sclerosis an infectious disease, Inference about an input process based on the output, Biometrics (46), 337-349,1990.
- [42] J.Jacques Ruch. Statistique : Estimation. Préparation à l'Algrégation bordeaux1, années 2012-2013.
- [43] S.Jain, Estimation in  $M/E_r/1$  queueing systems. Communication in statistics-Theory and Methods 20(1991), 1871-1879.
- [44] S.Jain, J.C.C.Templeton. Statistical inference for  $G/M/1$  queueing system, 7(6), 309-313, 1988.
- [45] D.G.Kendall. Stochastic processes occuring in theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. Annals of Mathematical statistics, (24),338-354,1953.
- [46] L.Kleinrok. Queueing Systems-Volume1 : Theory, volume1, John Wiley and Sons, New York,1975.
- [47] L.Kleinrok. Queueing Systems-Volume2 :Computer Applications, volume2, John Wiley and Sons, New York,1976.
- [48] K.Lagha. cours statistiques bayésiennes, M1, Université de Bejaia, 2019-2020.

- 
- [49] P.A.W.Lewis. Recent results in the statistical analysis of univariate point processes. In : Stochastic Point Processes, Wiley, New York, 1-54,1972.
- [50] H.W.Lilliefors. Some confidence intervals for queues. Oper. Res. 14, 723-727, 1966.
- [51] S.C.Moore. Approximate technique for non-stationary queues. Ph.D.Dissertation. Computer Science/Operations Research Center, Southern Methodist University, Dallas, Texas, 1972.
- [52] M.V.Muddapur. Bayesian estimates of parameters in some queueing models. Ann. Inst. Stat. Math.(24),327-331,1972.
- [53] S.P.Mukherjee and S.Chowdhury. Maximum likelihood and Bayes estimation in  $M/M/1$  queue. Stochastic Modelling and Applications 8(2)(2006). 47-55.
- [54] S.S.Rao, U.N.Bhat and K.Harishchandra. Control of traffic intensity in a queue : method based on SPRT. Opsearch, (21),63-80, 1984.
- [55] A.Reugg. Processus Stochastique, volume 6. Presses Polytechniques Romandes, 1989.
- [56] N.Saadi. Statistique inferentielle, Université de Bejaia, Master 1, 2019-2020.
- [57] G.Saporta. Probabilité, analyse des données statistique, edition,technip,1990.
- [58] M.W.Wilcoxon. Is multiple scleriosis an infections disease ?, Inference about an input process based on the output, Biometrics (46), 337-349.
- [59] M.P.Wiper. Bayesian analysis of  $Er/M/1$  and  $Er/M/c$  queues, Journal of Statistical Planning and Inference, (69), 65-79, 1998.



# Résumé

Ce mémoire concerne l'étude de la statistique inférentielle dans les systèmes de files d'attente. Nous exposons les principales méthodes statistiques utilisées dans l'étude des systèmes de files d'attente. Nous allons voir en détail l'application de la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode bayésienne pour estimer des taux d'arrivées et de service dans les systèmes de files d'attente  $M/M/1$ ,  $M/G/1$  et  $G/M/1$ . Nous réalisons une simulation sous MATLAB pour estimer les taux d'arrivées et de service en utilisant les deux méthodes citées précédemment sur un système de files d'attente  $M/M/1$ . Nous donnons aussi l'intervalle de confiance pour l'intensité du trafic dans un système  $M/M/1$ , en utilisant la distribution de Fisher et quelques tests usuels sur le choix de la distribution et sur l'intensité du trafic.

# Abstract

This memory concerns the study of inferential statistics in queuing systems. We present the main statistical methods used in the study of queuing systems. We will see in detail the application of the maximum likelihood method and the Bayesian method to estimate arrival and service rates in  $M/M/1$ ,  $M/G/1$  and  $G/M/1$  queuing systems. We perform a simulation under MATLAB to estimate the arrival and service rates using the both methods mentioned above on a  $M/M/1$  queuing system. We also give the confidence interval for the traffic intensity in a  $M/M/1$  system, using the Fisher distribution and some usual tests on the choice of distribution and on the traffic intensity.