**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Mira Abderrahmane de Béjaïa**

**Faculté des Sciences Exactes**

**Département de Recherche Opérationnelle**

# Mémoire de fin de cycle

**Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Recherche Opérationnelle**

**Option : Modélisation Mathématiques et Techniques de Décision**

## *Étude du Comportement des Usagers dans un Réseau Routier en Utilisant les Jeux de Minorité*

Présenté Par :

-$M^{elle}$ Nadjet BAHRI

-$M^{elle}$ Kenza OUYAHIA

**Soutenu publiquement à l'Université de Béjaia, le 15/10/2020, devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M^{me}$ N. HALIMI-YOUSFI | MCB | à l'Universitè de Béjaia | Présidente. |
| $M^{r}$ N.KHIMOUM | MCB | à l'Université de Béjaia | Encadreur. |
| $M^{elle}$ L. IDRES | Maître de Recherche | à CREAD | Examinatrice. |
| $M^{me}$ L.MEZIANI | MCB | à l'Universitè de Béjaia | Examinatrice . |

**Année Universitaire** 2019 – 2020

# Remerciements

*Louange A Dieu, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela n'aurait pu être.*

***N**ous tenons tout d'abord à remercier le maître de conférences classe B et enseignant $M^{r}$ N.KHIMOUM pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de nous encadrer. ses conseils précieux ont permis une bonne orientation dans la réalisation de ce modeste travail.*

***N**ous tenons également à remercier $M^{me}$ N. HALIMI-YOUSFI d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.*

***N**ous remercions $M^{elle}$ L. IDRES et $M^{me}$ L.MEZIANI d'avoir accepter de faire partie du jury et consacrer leurs temps à la lecture et à la correction de ce mémoire.*

***N**os remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à nos parents.*

***E**nfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

# Table des matières

# Introduction Générale

De nos jours, le transport occupe une place importante dans tous les domaines de la vie des sociétés modernes. Ce qui fait que, le nombre de véhicules augmente plus rapidement que les infrastructures urbaines ce qui a engendré divers problèmes de transport lié aux coûts de transport, le temps de traversée ou même le confort des usagers. De nombreux modèles ont été conçus pour modéliser ces problèmes, afin d'étudier le comportement des usagers ou même optimiser le système, et qui aujourd'hui sont appliqués dans tous les domaines scientifiques, de la biologie à la chimie passant par la physique, mécanique, l'anatomie. . . etc.

Cependant, l'un des problèmes de transport les plus étudiés dans la littérature est sans doute le problème de la congestion du trafic, considéré comme l'un des facteurs qui est à l'origine de plusieurs conséquences négatives, telles que la pollution de l'air, les pertes de temps, le bruit, la diminution de la sécurité . . . etc. Au fur et à mesure que de plus en plus de personnes sont attirées par une voie dans un réseau routier, les futurs niveaux de congestion ne devraient pas diminuer, mais augmenteront, et l'extension de la capacité routière ne résoudra pas les problèmes de congestion comme l'affirme le paradoxe de Braess [8].

L'intérêt pratique et l'utilité de résoudre les problèmes de congestion ont amené plusieurs chercheurs à se penser sur la question. L'un des premiers travaux est dû à Robert W. Rosenthal en 1973, ayant utilisé l'approche de la théorie des jeux [21]. Depuis, plusieurs auteurs s'intéresseront à ce sujet [18, 16, 22, 9, 17], pour n'en citer que quelques exemples.

En outre, pour faire face au problème des embouteillages, des politiques sont mises en place par autorités concernées telles la diffusion d'information en temps réel par le biais de récepteurs situés dans les véhicules ou de panneaux à messages variables, tarification des axes routiers congestionnés, incitation au covoiturage,...etc. Afin d'évaluer l'effet de ces politiques, il est important de bien comprendre les mécanismes de répartition du trafic sur le réseau. Pour se faire, des modèles mathématiques basés sur des principes de comportement des usagers, permettant de prédire le flux de véhicules sur les artères d'un réseau routier urbain ont vu le jour.

Dans ce travail, nous souhaitons étudier les performances du modèle des jeux de minorité [1], pour l'évaluation des comportements des usagers face à un réseau routier. L'objectif principal est de développer un modèle, basé sur l'apprentissage pour atteindre un flux d'équilibre entre ces usagers.

Notre réflexion s'articulera sur une introduction, quatre chapitres, et pour finir une conclusion. Dans le premier chapitre, nous allons présenter la théorie des jeux en général, où nous allons rappeler les notions de base de la théorie des jeux, les différents concepts de solution des jeux. Dans le second chapitre nous introduisons les jeux répétés d'une manière plus détaillé qui nous servent de base pour la suite. Le troisième chapitre se base sur les jeux de minorité. Après avoir présenté la naissance et l'historique de cette discipline nous introduisons les définitions de ces notions des bases (une action, histoire, mémoire, stratégies, espaces de stratégies, prédiction, gain virtuel, équilibre de Nash), et on conclut se chapitre par quelque variantes des jeux de minorité. Le quatrième chapitre se concentre sur l'application des jeux de minorité dans le transport. En premier lieu nous allons modéliser le problème de congestion, et nous allons faire un rappelle de quelque généralité de simulation qui nous serons utile pour l'application. En second lieu, nous allons construire et implémenté un simulateur afin d'étudier le comportement des usagers par rapport au défirent paramètre (la taille de la mémoire, le nombre d'usagers, et nombres de tours, et nombre de stratégies) et évaluer leurs présences dans les deux routes A et B. Et on conclut le chapitre par l'interprétation des résultats de la simulation.

# 1

# Théorie des jeux : Généralités

## Contents



## Introduction

La théorie des jeux est une discipline théorique qui permet de comprendre formellement des situations dans lesquelles des agents, interagissent. Évidemment, cette situation se modélise sous forme d'un jeu, où les agents cités sont les joueurs, ou les preneurs de décisions et leur comportement se nomme stratégies.

## 1.1 Définition et notions de base

Dans cette section on va définir les notions de base de la théorie des jeux et les principaux concepts utilisés ultérieurement.

**Définition 1.1.** *(Jeu) La situation d'interaction stratégique entre les agents soumis au choix d'une action possible (stratégie) et obtenant une utilité dépendante des décisions adverses est appelée un jeu.*

**Définition 1.2.** *(Joueur) Un joueur est l'untité de base de la théorie des jeux, on appelle joueur tout individu participant au jeu. Autrement dit c'est un agent pouvant prendre ses décisions en agissant selon le principe de rationalité et avoir un impact sur l'issue des actions.Il peut s'agir d'une personne, d'un groupe de personnes,une société, ou un gouvernement ...*
*On note par $I$ l'ensemble des joueurs tel que $I = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$.*

Un premier concept fondamental de la théorie des jeux est celui de stratégie. Comme dans le langage courant, une stratégie fait référence à un plan d'actions.

**Définition 1.3** (Stratégie). *Une stratégie est la spécification complète du comportement d'un joueur dans n'importe quelle situation d'interaction. La stratégie d'un joueur représente un ensemble d'actions à sa disposition qui lui indique son choix futur dans toute les situations possibles. Usuellement, on utilise le mot stratégie et action de manière équivalente.*

**Définition 1.4** (Stratégie pure). *Une stratégie pure est une action qu'un joueur peut choisir de jouer au moment de faire son choix. L'ensemble des stratégies d'un joueur $i \in I$ est l'ensemble de toutes les actions possibles parmi lesquelles il doit choisir sa stratégie à jouer. On note*

$$X^i = \{x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i\}$$

*cet ensemble qui peut être discret ou continu, fini ou infini selon la situation que modélise le jeu, où $n_i = |X^i|$ est le nombre de stratégies du joueur $i$.*

**Définition 1.5** (Stratégie mixte). *Une stratégie mixte pour un joueur $i \in I$ est une distribution de probabilité $\alpha^i = (\alpha^i_1, ..., \alpha^i_{n_i})$ sur l'ensemble des stratégies pures, où l'élément $\alpha^i_j$ représente la probabilité de jouer la stratégie pure $x^i_j$ par le joueur $i \in I$. L'ensemble des stratégies mixtes pour le joueur $i \in I$ est noté :*

$$\Delta_{\alpha_i} = \{\alpha^i = (\alpha^i_1, \ldots, \alpha^i_{n_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \sum_{j=1}^{n_i} \alpha^i_j = 1, \alpha^i_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, N\}. \quad (1.1)$$

**Définition 1.6** (Fonction d'Utilité). *A chaque joueur $i \in I$ on associe une fonction d'utilité (ou de valuation)$U^i$ qui n'est pas une mesure du gain matériel ou monétaire mais une mesure subjective de contentement du joueur pour chaque ensemble de stratégies choisies. Elle est donnée par :*

$$U^i : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x^i, x^{-i}) \in X \longmapsto U^i(x),$$

*où $x^{-i} = \{x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^N\}$ représente les stratégies de tous les joueurs sans celle du joueur $i \in I$.*

**Définition 1.7.** *(Jeu sous forme stratégique). [14]Un jeu sous forme stratégique ou normale en stratégies pures est donnée par le triplet suivant :*

$$\Gamma_n =< I, \{X^i\}_{i\in I}, \{U^i\}_{i\in I} > \quad (1.2)$$

- *Un ensemble de joueurs $I = \{1, ..., N\}$.*
- *Un ensemble de stratégies $X^i = (x^i_1, \ldots, x^i_{n_i})$ pour chaque joueur $i$.*
- *Une fonction d'utilité pour chaque joueur $i$*

$$U^i : X = \prod_{i=1}^{N} X^i \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*L'extension mixte du jeu sous forme normale (1.2) est donnée comme suit :*

$$\Gamma_n =< I, \{\Delta_{\alpha_i}\}, \{U^i\}_{i\in I} >, \quad (1.3)$$

,

*où :*

- $\Delta_{\alpha_i}$ *est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur* $i \in I$ *définie par (1.1).*
- $U^i$ *est le gain espéré du joueur* $i \in I$ *qui représente le gain moyen qu'il peut obtenir en jouant à la stratégie* $x^i$*, avec une probabilité* $\alpha^i$*.*

**Exemple 1.1** (Dilemme du prisonnier)**.** *Le dilemme du prisonnier caractérise en théorie des jeux une situation où deux joueurs auraient intérêt à coopérer, mais où en absence de communication entre les deux joueurs, chacun choisira de trahir l'autre.*

***principe***

*On suppose deux prisonniers ( complice d'un crime) retenus dans les cellules séparées et qui ne peuvent pas communiquer, l'autorité pénitentiaire offre à chacun des prisonniers les choix suivant :*

- *si un des deux prisonniers dénonce l'autre, il est remis en liberté alors que second obtient la peine maximale (10 ans).*
- *si les deux se dénoncent entre eux, ils seront condamnés à une peine plus légère (5 ans).*
- *si les deux refuse de se dénoncer la peine sera minimale (6 mois).*

*On résume la situation dans ce tableau*

| $J_1/J_2$ | *Nier* | *Dénoncer* |
|---|---|---|
| *Nier* | $(0.5, 0.5)$ | $(10, 0)$ |
| *Dénoncer* | $(0, 10)$ | $(5, 5)$ |

*Chacun des prisonniers réfléchit de son coté en considérant les deux cas possibles de réaction de son complice.*

∗ *Dans le cas où il me dénoncerait :*

- *si je me tais je ferais 10 ans de prison.*
- *si je le dénonce je ferais que 5 ans.*

∗ *Dans le cas où il ne me dénoncerait pas :*

- *si je me tais, je ferais 6 mois.*
- *si je le dénonce, je serais libre.*

*"Quelque soit son choix j'ai donc intérêt à le dénoncer."*

**Remarque 1.1.** *Ce jeu ne conduit pas spontanément à un état où on ne pourrait améliorer le bien être d'un joueur sans détériorer celui d'un autre ( c'est-à-dire un optimum de Pareto).*
*A l'équilibre chacun des prisonniers choisira probablement de faire défaut alors qu'il gagnerait à coopérer : chacun est fortement incité à tricher. ce qui constitue le coeur du dilemme.*

Il y a une deuxième manière de représenter un jeu, appelée forme extensive ou forme arborescente. Il s'agit de le représenter sous la forme d'un arbre de jeu, encore appelé arbre de Kuhn, du nom du mathématicien ayant développé le concept.

**Définition 1.8** (Jeu sous forme extensive)**.** *Un jeu sous forme extensive est défini par :*
- *Un ensemble de joueurs* $I = \{1, \ldots, N\}$.
- *Un arbre (arbre de Kuhn) qui représente un graphe connexe sans cycle où l'ensemble des noeuds* $\{A, B, C, \ldots\}$ *représente les coups (chaque noeud terminal correspond à une issue de jeu et un joueur est associé aux noeuds non terminaux de même niveau indiquant son tour de jouer), et l'ensemble des arcs* $\{x, y, \ldots\}$ *représente les alternatives à chaque coup.*
- *Fonction de nommage (indiquant à chaque noeud le tour de chaque joueur).*
- *Fonction de payement (associant à chaque noeud terminal un vecteur de payement de chaque joueur).*

**Exemple 1.2.** *(Dilemme du prisonnier). La représentation du jeu sous forme extensive.*

## 1.2 Classification des jeux

Parlant de jeu, on se retrouve le plus souvent devant une vaste variété de types distincts, et de formes différentes, séparées selon plusieurs critères et spécifications.

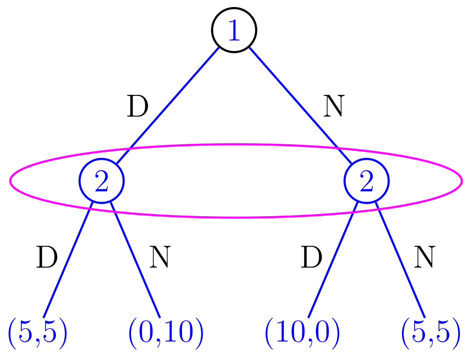



Figure 1.1 – Dilemme du prisonnier

### 1.2.1 Déroulement du jeu dans le temps

On distingue deux types de jeux, à savoir jeu statique et jeu dynamique.

**Définition 1.9.** *(Jeu statique) Un jeu statique (ou stratégique ) est un jeu qui se déroule en un seul coup, c'est à dire les joueurs interviennent simultanément en choisissant leurs stratégies. Par exemple le jeu du dilemme des prisonniers.*

**Définition 1.10.** *(Jeu dynamique) Les jeux dynamiques sont des jeux qui se déroulent en plusieurs coups. Les joueurs jouent les uns aprés les autres (pouvant être à un horizon fini ou pas).Par exemple, le jeu d'échecs.*

### 1.2.2 Nature de l'information

**Définition 1.11** (Information complète et incomplète)**.** *Un jeu est à information incomplète si au moins un des joueurs ne connaît pas parfaitement la structure du jeu. Dans le cas contraire, il est à information complète. Ce qui signifie que chaque joueur est au courant de ces éléments : nombres de joueurs, ensemble de stratégies de chaque joueur, objectif de chaque joueur, y compris lui-même.*

**Définition 1.12.** *(Information parfaite et imparfaite) On dit que l'information est parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs, elle est* *imparfaite lorsqù'un joueur ignore certains des choix effectués avant le sien.*

**Remarque 1.2.** *D'aprés la nature de l'information on distinct 2 type de jeu dynamique séquentiel et répété ce dernier sera détaillé dans le deuxième chapiter.*

### 1.2.3 Selon le comportement des joueurs

**Définition 1.13.** *(Jeu coopératifs et non coopératifs) Un jeu est coopératif lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante (par exemple, sous la forme d'un contrat qui prévoit une sanction légale dans le cas du non respect de l'accord) avant le déroulement du jeu dans le cas contraire, on parlera alors des jeux non coopératifs.*

### 1.2.4 Selon le nombre de stratégies

**Définition 1.14.** *(Jeu fini à N joueurs) Un jeu est dit fini, lorsque les ensembles de stratégies $X^i$ , $i \in I$ sont finis.*

$$(|X^i| < \infty, \forall i \in I).$$

**Définition 1.15.** *(Jeu infini à N joueurs) Un jeu est dit infini, lorsque un des ensembles de stratégies $X^i$ , $i \in I$ est un ensemble infini.*

$$(\exists i \in I, |X^i| = \infty).$$

### 1.2.5 Selon les gain joueurs

**Définition 1.16.** *(Jeu fini à somme non nulle) Le jeu est dit à somme constante si*

$$\sum_{i=1}^{N} U^i(x) \neq 0; \forall x \in X = \prod_{i=1}^{N} X^i$$

**Définition 1.17.** *(jeu à somme nulle) Un jeu à deux joueurs est dit à somme nulle, si quelque soit l'issue du jeu, les valeurs des fonctions d'utilité des deux joueurs sont de signes* *opposés, c'est à dire que dans ce type de jeu, le gain d'un joueur représente effectivement la perte de l'autre (jeu strictement compétitif).*

$$U^1(x^1, x^2) + U^2(x^1, x^2) = 0, \forall x^1 \in X^1, x^2 \in X^2, (U^1 = -U^2).$$

**Exemple 1.3.** *Jeu d'échecs, Poker, Pierre-feuille-ciseaux,... etc.*

## 1.3 Concepts de solution

Les agents en théorie des jeux sont supposés avoir un comportement rationnel : chaque joueur est conscient des alternatifs, fait des anticipations sur les éléments inconnus, possède des préférences , et choisis délibérément son action aprés un processus d'optimisation [**?**].

#### Elimination des stratégies équivalentes

**Définition 1.18.** *(Stratégies équivalentes) Deux stratégies $x^i$ et $x^{i'}$ sont équivalentes pour le jeu (1.2) si et seulement si pour tout profil donné de stratégies des joueurs adverses, le joueur $i \in I$ obtient la même utilité quand il joue la stratégie $x^i$ ou $x^{i'}$*

$$\forall i \in I, \forall x^{-i} \in X^{-i}, U^i(x^i, x^{-i}) = U^i(x^{i'}, x^{-i}).$$

*Toutes les stratégies équivalentes à $x^i$ forment une classe d'équivalence.*

**Définition 1.19.** *(Forme normale réduite) La forme normale réduite d'un jeu s'obtient en remplaçant par une seule stratégie toutes les stratégies d'une classe d'équivalence dans sa forme normale initiale.*

#### Elimination des stratégies dominées

Certaines stratégies peuvent être globalement plus mauvaises que d'autres, et on s'attend qu'elles ne soient jamais choisies par un joueur rationnel. On peut alors les éliminer d'emblée du jeu.

**Définition 1.20.** *[14] Une stratégie $x^i$ du joueur i est strictement dominée dans le jeu (1.2)si :* $\exists x^{i'} \in X^i$ *tel que :*

$$U^i(x^{i'}, x^{-i}) > U^i(x^i, x^{-i}), \forall x^{-i} \in X^i.$$

*Une stratégie $x^i$ est dominée si :*

$\exists x^{i'} \in X^i$ *tel que :*

$$U^i(x^{i'}, x^{-i}) \geq U^i(x^i, x^{-i}), \forall x^{-i} \in X^i.$$

### 1.3.1 Dominance au sens de Pareto

**Définition 1.21.** *(Dominance).[27] Un profil $x$ domine $x^{'}$ au sens de Pareto dans le jeu (1.2) s'il est au moins aussi bon pour tous les joueurs et si $x$ est strictement meilleur pour au moins l'un d'entre eux.*

$$\forall x^i \in X, x'^i \in X', \text{ on a : } x^i \succeq x'^i,$$

*et*

$$\exists x^i \in X, x'^i \in X', \text{ tel que : } x^i \succ x'^i.$$

*Un profil $x$ domine $x'$ strictement au sens de Pareto s'il est strictement meilleur pour tous les joueurs.*

$$\forall x^i \in X, x'^i \in X', ona : x^i \succ x'^i,$$

**Définition 1.22.** *(Niveau de sécurité).[27] Le niveau de sécurité de la stratégie $x^i$ du joueur i dans le jeu (1.2)est le gain minimum que peut apporter $x^i$, $\forall x^{-i} \in X$*

$$\min_{x^{-i}} U^i(x^i, x^{-i}).$$

*Le niveau de sécurité du joueur i est définie comme le niveau de sécurité maximal des stratégies du joueur i.*

$$\max_{x^i}(\min_{x^{-i}} U^i(x^i, x^{-i})).$$

### 1.3.2 Equilibre de Nash

**Définition 1.23.** *(Equilibre de Nash en stratégies pures). [27] Un équilibre de Nash du jeu en stratégies pures est un profil de stratégies* $x^* = (x^{i*}, x^{-i*})$ *tel que :*

$$\forall i \in I, \forall x^i \in X^i : U^i(x^{i*}, x^{-i*}) \geq U^i(x^i, x^{-i*}).$$

**Définition 1.24.** *(Equilibre de Nash en stratégie mixte). [27] Soit une issue*

$$\alpha^* \in \Delta = \prod_{i=1}^{N} \Delta_{\alpha_i}$$

*est un EN du jeu en stratégies mixtes est défini comme suit :*

$$\forall i \in I, \forall \alpha^i \in \Delta_{\alpha_i} : E_i(\alpha^{i*}, \alpha^{-i*}) \geq E_i(\alpha^i, \alpha^{-i*}).$$

**Théorème 1.1.** *(Nash 1950). [27] Tout jeu fini sous sous forme normale admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

**Définition 1.25.** *Soit un jeu (1.2) fini à deux joueurs à somme nulle qui peut être entièrement caractérisé par la matrice des gains A, sera noté par :*

$$\Gamma_2^0 =< X^1, X^2, A >, \tag{1.4}$$

*Où*

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ *et* $a_{ij} = (x^i, y^j), \forall i = \{1...m\}, \forall j = \{1...n\}$,
- $X^1 = \{x^1, x^2, ..., x^m\}$ *est l'ensemble des stratégies pures du premier joueur,*
- $X^2 = \{x^1, x^2, ..., x^n\}$ *est l'ensemble des stratégies pures du deuxième joueur.*

*On notera* $A_{i.}$ *la* $i^{me}$ *ligne et* $A_{.j}$ *la* $j^{me}$ *colonne de la matrice A.*

### 1.3.3 Résolution par programmation linéaire

La résolution du jeu matriciel revient à résoudre une paire de programmes linéaires duaux, et les solutions optimales d'un des programmes correspondent au stratégies optimal de l'un des deux joueurs.

**Théorème 1.2.** *Dans tout jeu matriciel en stratégies mixtes, la valeur inférieure* $\underline{V}_m(A)$ *et la valeur supérieure* $\overline{V}_m(A)$ *du jeu existent toujours en stratégies mixtes, et elles sont égales*

$$\underline{V}_m(A) = \max_{\alpha \in \Delta_m} \min_{\beta \in \Delta n} \alpha^t A \beta = \overline{\alpha} A \overline{\beta} = \min_{\beta \in \Delta n} \max_{\alpha \in \Delta_m} \alpha^t A \beta = \overline{V}_m(A)$$

**Remarque 1.3.** *La paire de stratégies* $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ *constitue un équilibre point de selle pour le jeu En effet, considérons les deux problème suivantes :*

$$\begin{cases} \min_{\beta \in \Delta_n} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \alpha_i \beta_j \longrightarrow \max_{\alpha \in \Delta_m}; \\ \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \\ \\ \alpha_i \geq 0, \forall i = \overline{1.m}. \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} \max_{\alpha \in \Delta_m} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \alpha_i \beta_j \longrightarrow \min_{\beta \in \Delta_n}; \\ \\ \sum_{j=1}^n \beta_j = 1, \\ \\ \beta_j \geq 0, \forall j = \overline{1.n}. \end{cases} \tag{1.6}$$

*Les deux problèmes (1.5), (1.6) se ramènent à :*

$$\begin{cases} \lambda \longrightarrow \max, \\ \\ \sum_{j=1}^n A_{ij} \alpha_i \geq \lambda, \quad \forall i = \overline{1.m}, \\ \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \\ \\ \alpha_i \geq 0, i = \overline{1.m}. \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} \eta \longrightarrow \min, \\ \\ \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_j \leq \eta, \quad \forall j = \overline{1.n}, \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1, \\ \\ \beta_j \geq 0, \qquad\qquad j = \overline{1.n}. \end{cases} \tag{1.8}$$

### 1.3.4 Equilibre parfait en sous jeux

En théorie des jeux, lorsqù'on a affaire à des jeux sous forme extensive, les concepts de solution précédemment définis sont moins utiles, sur ce, on est amené à définir de nouvelles notions d'équilibre.

**Définition 1.26.** *(Sous-jeu d'un jeu). [27] Un sous jeu d'un jeu sous forme extensive est un jeu composé d'un noeud (ensemble d'information singleton), de tous ses noeuds successeurs, des arcs les reliant ainsi que les utilités associés à tous les noeuds terminaux successeurs.*

**Définition 1.27.** *(équilibre parfait en sous-jeu (EPSJ)). [27] Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un équilibre parfait en sous-jeu si : toute restriction du profil de stratégies à un sous-jeu est un EN pour ce sous-jeu.*

#### Récurrence à rebours (Backward induction)

- On commence par chercher les choix optimaux à la dernière période (noeuds terminaux).
- On remonte l'arbre de noeud en noeud, cherchant à chaque noeud le choix optimal, une fois que les choix optimaux des noeuds fils sont pris en compte.

**Théorème 1.3.** *(Zermelo, Kuhn 1953). [15]Tout jeu (fini) sous forme extensive à information parfaite a un équilibre de Nash en stratégies pures (obtenable par récurrence à rebours).*

**Théorème 1.4.** *[15]Tout jeu sous forme extensive à information imparfaite admet un équilibre sous-jeu parfait en stratégies mixtes (donc en stratégies de comportement).*

## Conclusion

Dans ce premier chapitre on s'est consacré sur la théorie des jeux de manière générale en citant quelques notions fondamentales qui permettent de construire un jeu et de le résoudre.

# 2

# Les jeux répétés

## Contents

# Introduction

Jusqú'à maintenant, nous avons étudié uniquement des situations où l'interaction n'a lieu qu'une seule fois entre les joueurs, alors que beaucoup d'interactions se déploient dans le temps et souvent de manière répétée.
L'idée principale qui est derrière la théorie des jeux répétés est que malgrés ce résultat fort, la situation de coopération peut devenir stable. Et ces modèles servent à analyser la logique de ce type d'interactions de long terme où il peut être fini ou infini, à information parfaite ou imparfaite, complète ou incomplète, avec ou sans dépendance temporelle.

## 2.1 Jeu constituant

Le jeu constituant ou jeu ordinaire est défini comme un jeu statique dans lequel les joueurs choisissent simultanément leurs actions.

Dans la théorie des jeux répétés, $\Gamma_N = (I, X, U)$ défini (1.2) est le jeu constituant qui est rejoué à chaque période. Il constitue la base ou le " squelette " du jeu répété[11] Pour résoudre le jeu $\Gamma = (I, X, U)$ il suffit d'appliquer les concepts de solution cités auparavant comme l'équilibre de Nash.

**Définition 2.1.** *Un jeu répété, au sens strict, est un jeu ordinaire ou constituant réitéré plusieurs fois de suite, dont les conditions du jeu ne se modifient pas au cours du temps :*

- *Même nombre de joueurs ;*
- *Mêmes ensembles de stratégies des joueurs ;*
- *Mêmes fonctions de gains ;*
- *Même facteur d'actualisation. Si l'une des conditions évolue au cours du temps, nous parlerons alors de super jeu [19].*

*On notera par :*

- $\Gamma_N^T$ *, si à chaque période $t = 0, 1, 2, ..., T$ le jeu constituant $\Gamma_N$ est répété.*
- $\Gamma_N^\infty$*, si le jeu constituant $\Gamma_n$ est répété indéfiniment.*

## 2.2 Stratégies dans un jeu répété

Nous considérons le jeu répété dans lequel les joueurs font face à chaque période au jeu constituant défini précédemment. La répétition de ce jeu permet aux joueurs de conditionner leurs choix présents et futurs sur les choix passés. Cette interdépendance temporelle peut conduire à des solutions plus coopératives ou plus agressives que celles observées dans le jeu constituant. La répétition élargit l'ensemble des solutions[11] Soit :

- $x^i(t)$ l'action du joueur $i \in I$ à la date $t$.
- un profil d'actions sélectionnées par les $N$ joueurs à la date $t$ s'écrit alors :

$$x(t) = (x^1(t), ..., x^j(t), ..., x^N(t)) \in X = \prod_{i \in I} X^i.$$

### 2.2.1 Histoire du jeu

**Définition 2.2.** *Une histoire du jeu à une date t est donnée par :*

$$h_t = (x(0), x(1), ..., x(t_1)) \in X^t = \prod_{k=0}^{t-1}$$

*Une histoire du jeu correspond à l'ensemble des actions que les joueurs ont choisies entre la période initiale $k = 0$ et la période $k = t - 1$. Dans un jeu répété, le profil d'actions sélectionnées par les joueurs à chaque période crée un nouveau sous-jeu qui est entièrement défini par l'histoire à cette date [11][19].*

### 2.2.2 Stratégies dans un jeu répété

Dans un jeu répété, une stratégie (pure) pour un joueur $i \in I$ consiste en une séquence de règles de décision, une par période. Cette stratégie est notée par $\sigma_i = (\sigma_{i(0)}, \sigma_{i(1)}, ..., \sigma_{i(t)}, ...)$. où $\sigma_{i(t)}$ est la règle de décision du joueur $i$ à la période $t$. [11][25]

$\sigma_{i(t)}(.)$ est une application de $X^t$ vers $X^i$ qui spécifie pour chaque histoire du jeu $h_t$ une action ou une conduite à tenir à la date $t$. On notera :

- $\Sigma_{i(t)}$ l'ensemble des règles de décision du joueur $i$ à la date $t$ ;

- $\Sigma_i = X^i \times \Sigma_{i(1)} \times \Sigma_{i(2)} \times ...$, l'ensemble des stratégies du joueur $i \in I$ dans le jeu répété ;$X^i = \Sigma_{i(0)}$;
- $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_i, ...\sigma_N)$ un profil de stratégies du jeu répété ;
- $\sigma_{(t)} = (\sigma_{1(t)}, ..., \sigma_{i(t)}, ...\sigma_{N(t)})$ un profil des règles de décision à la période $t$.

On a $\sigma \in \Sigma$ est le produit cartésien des ensembles de stratégies $\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma_i$.

### 2.2.3 Classes de stratégies dans un jeu répété

Nous pouvons distinguer plusieurs classes de stratégies selon la place que l'histoire occupe dans les règles de décisions des joueurs.

#### Stratégies en boucle ouverte

Le joueur ne tient pas compte de l'histoire du jeu. C'est à dire que le joueur choisit initialement une séquence d'actions (une par période) et qu'il applique ce programme quel que soit le comportement de ses adversaires .

**Définition 2.3.** *Une stratégie en boucle ouverte s'écrit [19] :*

$$\sigma_i = x^i(t), t = 0, 1...$$

*ou encore*

$$\sigma_{(t)} = (\sigma_{1(t)}, ..., \sigma_{i(t)}, ...\sigma_{N(t)})$$

*ou* $\sigma_{i(t)}[h_t^1]$ *pour toutes les histoires* $h_t^1 \neq h_t^2 \in X^t$ .

#### Stratégies en feed-back

Le joueur conditionne son choix présent sur les seules actions de la période précédente et non sur toute l'histoire du jeu. Ce type de stratégie revient à supposer une mémoire imparfaite des joueurs. Nous pouvons aussi concevoir des stratégies qui se fonderaient sur les seules actions des deux ou trois périodes précédentes [11].

#### Stratégies en boucle fermée

Les joueurs tiennent compte de l'histoire du jeu. Initialement, chaque joueur adopte une séquence de règles de décision, une règle par période. A la période $t$, il observe l'histoire $h_t$ et joue l'action prescrite par sa règle de décision $\sigma_{i(t)}$

## 2.3 Fonction d'utilité dans un jeu répété

Le temps intervient de manière cruciale dans un jeu répété. En effet, les répétitions du jeu génèrent un flux d'utilité (gains) pour chaque joueur. A chaque moment du temps ou un joueur doit faire un choix, il doit pouvoir évaluer les conséquences de ce choix dans la suite du jeu. Or, les joueurs accorderont de l'importance à la date à laquelle ils obtiennent les différents gains : Un euro obtenu aujourd'hui n'aura pas la même valeur aux yeux d'un joueur qu'un euro qui ne sera obtenu que demain. Quand le joueur doit arbitrer entre ces deux possibilités, il doit pouvoir comparer. Cette comparaison se fait par le biais de l'actualisation.

### 2.3.1 Facteur d'actualisation

On peut observer la préférence de l'agent entre aujourd'hui et demain en lui demandant de nous indiquer le gain futur minimal, $U_{t+1}$, qu'il acceptera d'échanger contre un gain $U_t$ d'aujourd'hui. On appelle alors $\delta = U_t/U_{t+1}$ le facteur d'actualisation de l'agent, $U_t$ est alors la valeur actualisée d'une période de $U_{t+1}$

$$U_t = \delta U_{t+1}$$

On peut alors utiliser le facteur d'actualisation de l'agent pour comparer des revenus à des différentes dates ou pour voyager les gains dans le temps. Etant donné son facteur d'actualisation $\delta$, l'agent économique sera indifférent entre obtenir $U$ dans $t$ période et obtenir $\delta^t U$ aujourd'hui. En économie, l'hypothèse standard concernant la relation au temps est la préférence pour le present : on suppose en général que les agents préfèrent, toutes choses égales par ailleurs, les revenus actuels aux revenues futurs. Cette hypothèse correspond alors à $\delta \leq 1$. Si le joueur du jeu répété obtient un flux infini ($t$ appartient à $[0, \infty]$) de gains $U^i(t)$, la valeur actualisée au début du jeu est donnée par

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U^i(t)$$

Si $U^i(t) = f$ quelque soit cette valeur actualisée devient

$$U \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = (1/1 - \delta)U$$

De manière corollaire, si l'on s'interesse à la valeur actualisée du flux q'on obtient à partir de t=1 [27] :

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = [(1/1 - \delta) - 1]U = (\delta/1 - \delta)U.$$

### 2.3.2 Utilité des joueurs dans un jeu répété

Le joueur $i$ reçoit à l'étape $t$ le paiement $U^i(\sigma(t))$. On supposera ici que le joueur donne plus de poids à une unité d'utilité reçue aujourd'hui par rapport à une unité d'utilité reçue demain. Pour modéliser cela, on utilise généralement en économie un taux d'escompte $\delta \in ]0, 1[$. Ainsi, une unité d'utilité reçue à l'étape 2 vaut seulement $\delta$ unité d'utilité à l'étape 1 et une unité d'utilité reçue à l'étape $t$, vaut $\delta^{t-1}$ à l'étape 1. La valeur présente des gains générés par le profil de stratégies $\sigma = (\sigma(0), \sigma(1), ..., \sigma(t), ...) \in P$ choisis par les $n$ joueurs est égale pour le joueur $i \in I$ à :

$$F_i(\sigma) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U^i(\sigma(t))$$

Où $\delta$ est le facteur d'actualisation commun à tous les joueurs ; $F_i$ est la fonction de gains du jeu répété avec actualisation. On notera le jeu infiniment répété avec actualisation (jeu escompté) par :

$$\Gamma_N^{\infty} =< I, \{\Sigma_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I}, \delta >$$

où $\{\Sigma_i\}$ est l'ensemble des stratégies et $F_i$ la fonction des gains du joueur $i \in I$.

## 2.4 Classes des jeux répétés

On peut distinguer deux classes des jeux répétés en fonction de l'horizon, jeu répété a horizon fini ou infini.

### 2.4.1 Jeux répétés à l'horizon fini

Le jeu finement répété est un jeu dans lequel le même jeu de scène ( jeu de base ou jeu constituant ) est joué à plusieurs reprises sur un certain nombre de périodes de temp s distinctes. Chaque période est indexée par $0 < t \leq T$ où $T$ est le nombre total de périodes.

**Définition 2.4.** *[13] Etant donné un jeu sous forme normale* $\Gamma_n =< N, (X^i), (U^i) >$*, le jeu répété fini* $\Gamma(T, \delta)$ *est le jeu sous forme extensive où* $\Gamma_n$ *est joué en* $T$ *étapes, où les actions de toutes les étapes passées sont publiquement et parfaitement observées, et où les utilités des joueurs sont les utilités totales (ou moyennes) actualisées au taux* $\delta$*.*

#### Concepts de solution

#### Jeu de scène à un unique équilibre de nash

Pour les parties répétées avec un nombre fixe et connu de périodes de temps, si le jeu contituant a un unique équilibre de Nash, alors le jeu répété a unique équilibres de Nash parfaits en sous-jeu. Et cela peut être déduit par induction à rebours. Cette méthode a été proposée dans la section concept de solution de la théorie des jeux

#### Jeu de scène à plusieurs équilibres de nash

Si le jeu constituant a plusieurs équilibres de Nash, le jeu répété peut avoir plusieurs équilibres de Nash parfaits en sous-jeu. Alors qu'un équilibre de Nash doit être joué dans le dernier tour, la présence d'équilibres multiples introduit la possibilité de jouer les stratégies de récompense et de punition qui peuvent être utilisées pour soutenir la déviation des équilibres de Nash du jeu constituant dans les tours précédents.

**Définition 2.5.** *Paiement de punition Le niveau de paiement* min max*, ou paiement de punition, du joueur i dans un jeu sous forme normale* $\Gamma_n$ *est le niveau le plus faible auquel les autres joueurs peuvent le contraindre :*

$$v_i = \min_{\sigma_{-i} \in \prod_{i \neq j} \Delta(X^j)} \max_{x^i \in X^i} U^i(x^i, \sigma_{-i}).$$

**Remarque 2.1.** *Les jeux finement répétés avec un nombre inconnu ou indéterminé de périodes de temps sont considérés comme un jeu infiniment répété. Il n'est pas possible d'appliquer l'induction à rebours à ces jeux.*

### 2.4.2 Jeux infiniment répétés

Ces jeux représentent le cas d'un horizon temporel infini $T = \infty$ et sont destinés à modélise les situations où les joueurs ne savent pas exactement quand le jeu se terminera.

**Définition 2.6.** *[13] Étant donné un jeu sous forme normal* $\Gamma_N =< I, (X^i), (F_i) >$*,le jeu répété* $\Gamma_N(\infty, \delta)$ *est le jeu* $\Gamma_N$ *répété indéfiniment où les actions de toutes les étape passées sont publiquement et parfaitement observées et où les utilités des joueurs sont les utilités moyennes actualisées au taux* $\delta$*.*

#### Concepts de solution

L'ensemble des équilibres d'un jeu répété à l'infini peuvent être très différents de ceux du jeu correspondant au jeu finement répété parce que les joueurs peuvent utiliser des récompenses et des punitions auto-exécutoires qui ne peuvent pas dépasser la date limite. En particulier, parce qu'il n'y a pas de dernière période fixe du jeu, dans lequel les deux joueurs vont sûrement faire défection, contrairement dans les jeux finement répétés, où une stratégie peut explicitement indiquer ce qu'il faut faire dans chacune des périodes $T$, la spécification de stratégies pour des jeux répétés à l'infini est plus délicate car elle doit spécifier des actions après toutes les histoires possibles, et il y en a un nombre infini. En voici quelques-unes. les spécifications de plusieurs stratégies communes [20] :

**1-Toujours défectueux (ALL-D)**

Cette stratégie prescrit de faire défection après chaque histoire, peu importe ce que l'autre joueur a fait. Donc, $\sigma_i(h^t) = D$ pour tout $t = 0, 1, ...$

**2-Toujours coopérer (ALL-C)**

Cette stratégie prescrit de coopérer après chaque histoire , peu importe ce que l'autre joueur a fait. Donc, $\sigma_i(h^t) = C$ pour tout $t = 0, 1, ...$

**3-Naïve Grim Trigger (N-GRIM)**

Cette stratégie prescrit de coopérer tandis que l'autre joueur coopère et, si l'autre joueur fait défaut ne serait-ce qu'une fois, il fait défaut pour toujours par la suite :

$$\sigma_i(h^t) = \begin{cases} C, si & t = 0, \\ C, si & x_j^\tau = C, j \neq i, \tau = 0, ..., t-1, \\ D & autrement. \end{cases}$$

C'est une stratégie très impitoyable qui punit une seule déviation pour toujours. Cependant, elle ne sanctionne que les écarts de l'autre joueur. La stratégie suivante punit même les déviations passées du joueur.

**4-Grim Trigger (GRIM)**

Cette stratégie prescrit de coopérer dans la période initiale puis coopérer tant que les deux joueurs ont coopéré dans toutes les périodes précédentes :

$$\sigma_i(h^t) = \begin{cases} C, si & t = 0, \\ C, si & x^\tau = (C, C), for \tau = 0, ..., t-1, \\ D & autrement. \end{cases}$$

Contrairement au N-GRIM, cette stratégie "punit" le joueur pour ses propres déviations, et pas seulement les déviations de l'autre joueur.

**5-Tit-for-Tat, donnant donnant (TFT)**

Cette stratégie prescrit de coopérer pendant la première période et de jouer ensuite ce que l'autre joueur a fait pendant la période précédente : dévier si l'autre joueur a dévié, et coopérer si l'autre joueur a coopéré :

$$\sigma_i(h^t) = \begin{cases} C, si & t = 0, \\ C, si & x_j^{t-1} = C, j \neq i, \\ D & autrement. \end{cases}$$

la stratégie de rétorsion la plus indulgente : elle punit une défection par une défection et rétablit la coopération immédiatement après que l'autre joueur a repris la coopération.

**6-Représailles limitées (LR-K)**

Cette stratégie, également connue sous le nom de "Forgiving Trigger", prescrit coopération dans la première période, puis k périodes de défection pour chaque défection de tout acteur, puis de revenir à la coopération, quel que soit ce qui s'est passé pendant la phase de punition :

- Phase A : coopérer et passer à la phase B
- Phase B : coopérer, sauf si un joueur a fait défection au cours de la période précédente, en auquel cas passer à la phase C et régler $\tau = 0$ ;
- Phase C : si $\tau \leq k$, régler $\tau = \tau + 1$ et défaut, sinon passer à la phase A.

Cette stratégie de rétorsion fixe le nombre de périodes avec lesquelles la défection doit être punie mais cela est indépendant du comportement de l'autre joueur. (En TFT, par contre, la durée de la sanction dépend de ce que fait l'autre joueur pendant qu'il est punis).

**7- Pavlov (WS-LS)**

Aussi appelée "win-stay", "lose-shift", cette stratégie prescrit la coopération dans la première période, puis la coopération après toute histoire dont le dernier résultat a été soit (C,C) soit (D,D) et la défection autrement :

$$\sigma_i(h^t) = \begin{cases} C, si & t = 0, \\ C, si & x^{t-1} \in \{(C,C),(D,D)\} \\ D & autrement. \end{cases}$$

Cette stratégie choisit la même action si le dernier résultat était relativement bon et change d'action si le dernier résultat a été relativement mauvais pour le joueur.

**8- Dévie une fois (DEV1L)**

Cette stratégie prescrit un TFT jusqú'à la période $L$, puis une déviation en période $L$, en coopérant au cours de la période $L+1$, et en jouant au TFT par la suite.

$$\sigma_i(h^t, t \neq L, L+1) = \begin{cases} C, si & t = 0 \vee t = L+1, \\ C, si & x_i^{t-1} = C, j \neq i \wedge t \neq L, \\ D & autrement. \end{cases}$$

Cette stratégie de représailles tente d'exploiter l'adversaire une seule fois, si cela est possible.

**9- Grim DEV1L**

Jouer Grim Trigger jusqú'à la période $L$, puis jouer $D$ à la période $L$ et ensuite.

$$\sigma_i(h^t, t < L,) = \begin{cases} C, si & t = 0, \\ C, si & x_i^{\tau} = C, j \neq i, \tau = 0, 1, ..., t-1, \\ D & autrement. \end{cases}$$

$$\sigma_i(h^t, t \geq L,) = D$$

Cette stratégie tente d'être "gentille" jusqú'à une certaine période déterminée, puis d'être anticipée par en faisant défection en premier et en ne reprenant jamais la coopération.

**Exemple 2.1.** *Soit le jeu du ¨Dilemme du prisonnier¨ qu'est répété une infinité de fois, où les gains du jeu statique est définit dans le tableau suivant :*

| | C | D |
|---|---|---|
| C | (2,2) | (0,3) |
| D | (3,0) | (1,1) |

G=

*Le nombre de stratégies possibles de jeu du Dilemme du prisonnier répété ¨ RPD ¨ (en anglais Repeated Prisoner's Dilemma) est infini, et des personnes ont proposé diverses modifications à la liste de base des exemples de stratégies présentés ci-dessus.*

*Pour calculer les gains, nous devons spécifier les stratégies pour les deux joueurs. Par exemple, vérifions si (ALL-D, ALL-D) est un équilibre de Nash. C'est clairement le cas car quoi que fasse le joueur* 1*, le joueur* 2 *jouera toujours D, et la meilleure réponse à D est aussi D Voyons maintenant notre chemin à travers un exemple plus intéressant. Qu'est (GRIM, GRIM), le profil de stratégie où les deux joueurs utilisent Grim Trigger, est un équilibre de Nash si les deux joueurs suivent la stratégie GRIM, le résultat sera la coopération dans chaque période :*

$$(C, C), (C, C), (C, C), ...(C, C), ...$$

*dont la valeur moyenne actualisée est de*

$$(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t U^i(C, C) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t U^i(2) = 2$$

**Remarque 2.2.** $(1-\delta)$ *est un facteur de normalisation qui permet de comparer les paiements du jeu d'étape et du jeu répété.*

*Considérer maintenant le meilleur écart possible pour le joueur* 1*. Pour qu'un tel écart soit rentable, il doit produire une séquence de profils d'actions qui a la défection de certains acteurs dans certaines périodes. Si le joueur* 2 *suit le GRIM, il ne sera pas défaillant jusqú'à ce que le joueur 1 soit défaillant, ce qui implique que une déviation rentable doit impliquer une défection du joueur* 1*. Soit* $\tau$ *où* $\tau \in \{0, 1, ...\}$ *la première période de défection du joueur* 1*. Comme le joueur* 2 *suit le GRIM, il jouera D à partir de la période* $\tau + 1$*. Par conséquent, la meilleure déviation pour le joueur* 1 *est de générer la séquence suivante de profils d'action*

$$\underbrace{(C, C), (C, C), ..., (C, C)}_{\tau - 1 fois}, \underbrace{(D, C)}_{\tau}, (D, D), (D, D), ...,$$

*qui engendre la sequence de gains suivante pour le joueur 1*

$$\underbrace{2, 2, 2, 2, ...}_{\tau-1 fois}, 3, 1, 1, 1, ...$$

*La valeur moyenne actualisée de cette séquence est de*

$$(1-\delta)[2 + \delta(2) + \delta^2(2) + ... + \delta^{\tau-1}(2) + \delta^{\tau}(3) + \delta^{\tau+1}(1) + ...]$$
$$= (1-\delta)[\sum_{t=0}^{\tau-1} \delta^t(2) + \delta^{\tau}(3) + \sum_{t=\tau+1}^{\infty} \delta^t(1)]$$
$$= 2 + \delta^{\tau} - 2\delta^{\tau+1}$$

*En résolvant l'inégalité suivante pour $\delta$, on obtient le facteur d'actualisation nécessaire pour soutenir la coopération :*

$$2 + \delta^{\tau} - 2\delta^{\tau+1} \leq 2$$
$$\delta^{\tau} \leq 2\delta^{\tau+1}$$
$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

*En d'autres termes, pour $\delta = 1/2$, la déviation n'est pas rentable. Cela signifie que si les joueurs sont suffisamment patients(c'est-à-dire si $\delta \geq 1/2$), alors le profil de stratégies (GRIM, GRIM) est un équilibre de Nash de la DP répétée à l'infini. Le résultat est la coopération dans toutes les périodes. Il est assez facile de voir que le profil de stratégies dans lequel les deux joueurs jouent ALL-C ne peut pas être un équilibre de Nash car chaque joueur peut gagner en déviant vers ALL-D, par exemple.*

- **Équilibres parfaits dans les jeux à répétition infinie**

Puisque l'équilibre de Nash est un concept insatisfaisant dans les jeux infiniment répété parce qu'il n'est pas assez exigeant sur les profils d'actions prescrits dans les sous-jeux hors équilibre. C'est pourquoi les équilibres de Nash d'un jeu dynamique sont toujours soumis au critère de sous-jeux parfaits.

**Définition 2.7.** *[19] Un profil de stratégies $\sigma^*$ est un équilibre parfait dans le jeu infiniment répété $\Gamma_n^{\infty}$, si*

1. *$\sigma^*$ est un équilibre de Nash sur l'ensemble du jeu*

$$F_i(\sigma^*) \geq F_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}), \forall \sigma_i \in \Sigma_i, \forall i \in I$$

2. *$\sigma^{*h_t}$ est un équilibre de Nash pour tout $t$ et toute histoire $h_t$*

$$F_i(\sigma^{*h_t}) \geq F_i(\sigma_i, \sigma^{*h_t}_{-i}), \forall t = 1, 2, ...., h_t \forall \sigma_i \in \Sigma^{h_t}_i, \forall i \in I$$

## 2.5 Le théorème populaire ( folk theorem )

En théorie du jeu, les théorèmes folkloriques ou populaires (Friedman 1971) sont une classe de théorèmes décrivant une abondance de profile de gain d'équilibre de Nash dans les jeux répété. Le théorème de Friedman (1971) concerne les gains de certains équilibres Nash (SPE) sous-parfaits d'un jeu infiniment répété, et renforce ainsi le théorème folklorique original en utilisant un concept d'équilibre plus fort : les équilibres Nash sous-parfaits plutôt que les équilibres Nash.
Le théorème populaire suggère que si les joueurs sont suffisamment patients et prévoyants (c'est-à-dire si le facteur d'actualisation est de 1), alors une interaction répétée peut entraîner pratiquement n'importe quel gain moyen dans un équilibre SPE. "Pratiquement tout" est ici techniquement défini comme "faisable" et "individuellement rationnel"(ie Tout profil de gain à l'équilibre Nash d'une partie répétée doit satisfaire deux propriétés faisable et individuellement rationnel.

**Définition 2.8.** *(Rationalité individuelle.) le gain doit dominer faiblement le profil de gain minmax du jeu à étapes constitutives. Autrement dit, le gain d'équilibre de chaque joueur doit être au moins aussi important que le gain minmax de ce joueur. En effet, un joueur qui obtient un gain inférieur à son gain minmax est toujours incité à s'écarter en jouant simplement sa stratégie minmax à chaque historique.*

**Définition 2.9.** *(Faisabilité). le gain doit être une combinaison convexe des profils de gain possibles du jeu de scène. En effet, le gain dans un jeu répété n'est qu'une moyenne pondérée des gains des jeux de base.*

**Théorème 2.1.** *(Théorème de Friedman (1971) ). [24]Soit Gun jeu fini statique a information complète. Soient*

- $U^* = (U_1^*, ..., U_n^*)$ *le vecteur de gain des joueurs à l'équilibre de Nash de ce jeu.*
- $U = (U_1, ..., U_n)$ *un vecteur de gain réalisable de ce jeu .*
- $\delta$ *est le facteur d'actualisation commun de tous les joueurs.*

*Si* $U_i > U_i^*$ *pour tout joueur i et delta est suffisamment proche de l'unité alors il existe un EPSJ du jeu répété de manière infinie qui donne* $U$ *comme vecteur des gains moyens.*

# Conclusion

Dans ce deuxième chapitre en a présenté et définir une classe dans la théorie des jeux qu'est les jeux répété qui seront utile dans les chapitres suivants.

# 3

# Jeux de minorités

## Contents

# Introduction

Les jeux minoritaires (MG) sont des modèles mathématiques qui ont été initialement conçus pour améliorer notre compréhension des phénomènes et des fluctuations de la coopération qui sont observés sur les marchés financiers. Ils s'appliquent en fait plus généralement à toute situation dans laquelle un grand nombre d'agents décisionnels égoïstes tentent tous le gain individuel en prédisant de manière inductive, sur la base d'une information publique incomplète, et souvent avec un élément d'irrationalité et en anticipant les décisions à prises par leurs concurrents. De telles situations se produisent assez fréquemment, en citer les conducteurs qui choisissent une route moins fréquentée ou les personnes qui choisissent un restaurant moins fréquenté.

## 3.1 Problème du Bar d'El-farol

William Brian Arthur a conçu le problème "El Farol Bar"dans son article de 1994, qui est un bar qui propose des soirées musicale live chaque jeudi soir et il contient que 60 places si au plus 60 personnes se présentent la soirée serait agréable sinon ça serait désagréable. ce problème est conçu sur le raisonnement inductif et la rationalité bornée (Inductive reasoning and bounded rationality [1]). Frustré par la prémisse d'une rationalité parfaite dans l'économie moderne, qui dit que les agents sont équipés d'esprits rationnels, savent tout et le comprennent avec une capacité implicitement infinie d'information, il a posé un probléme où la rationalité des agents tait limitée (bornée) Il est difficile de modéliser un comportement rationnel borné, car le degré et le type d'imperfection doivent être spécifiés et il existe de nombreuses façons d'être imparfait. Arthur est venu avec le problème " El-Farol Bar " pour illustrer la question du raisonnement inductif et comment il pourrait être modélisé. Puisqu'il n'y a pas de modèle évident que tous les agents peuvent utiliser pour prévoir la fréquentation et fonder leurs décisions, aucune solution déductive n'est possible. Ne sachant pas quel modèle d'autres agents pourraient choisir, un agent de référence ne peut pas choisir le sien de manière bien définie. Alors, les agents sont jetés dans un monde d'induction.

## 3.2 Naissance des jeux de minorité

Le jeu de base des minorités a été formulé par les physiciens Damien Challet et Yi-Cheng Zhang en 1997[6]. En adoptant une approche plus pragmatique, ils ont évité le principal obstacle du problème d'El Farol, à savoir la définition des stratégies des agents. Avec $N$ agents, la fréquentation peut prendre $N$ valeurs possibles pour chaque période au cours des $M$ dernières périodes. Cela donne $N^M$ combinaisons possibles d'informations sur le passé. Si les stratégies de prévision de la fréquentation sont basées sur des antécédents, il existe $N$ prédictions possibles pour chaque combinaison d'informations et donc $N^{N^M}$ prédictions possibles pour toute combinaison, ce qui est prohibitif car il évolue avec la population $N$ et présente une tâche lourde lors de la recherche de la meilleure stratégie. Ils ont simplifié, jusqù'à ce qu'on obtienne seulement $2^{2^M}$ stratégies. A partir de là, on a pu appliquer ce modèle dans plusieurs domaines comme les finances, l'informatique, le transport. . . etc.

## 3.3 Formulation basique d'un jeu de minorité

On considère une population de $N = 2k + 1$ agents dotés d'une rationalité limitée en compétition dans un jeu répété ou chaque agent doit choisir une décision binaire. Nous représentons cette hypothése en supposant que chaque agent $i \in \{1; ...; N\}$, peut effectuer é l'instant $t$, l'action $a_i(t) \in \{+1; -1\}$( dans certaine littérature c'est de "0" et "1" a la place de "$-1$" et "1" qui sont utilisé comme action ). A chaque étape $t$, les joueurs qui ont pris la décision de la minorité l'emportent et tous les agents gagnants sont récompensés. Chaque tour $t$ représente Le jeu constituant qui est répété plusieurs fois, et chaque agent utilise un ensemble de stratégies pour décider de son prochain mouvement et renforce les stratégies qui auraient permis de prédire le groupe gagnant.

### 3.3.1 Jeu constituant d'un jeu de minorité

**Définition 3.1.** *Le jeu constituant du jeu de minorité à $N$ joueurs, qui se déroule sur $T$ étapes est donné par*

$$< I, X^i, U^i >_{i \in N}$$

- $I = \{1, \ldots, N\}$ *représente l'ensemble des joueurs.*
- $X^i$ *est l'ensemble des stratégies du joueur* $i \in I$.
- $U^i$ *la fonction de gain du joueur* $i \in I$.

### 3.3.2 Histoire du jeu et stratégies

#### Histoire du jeu

L'histoire du jeu est une chaîne de $M$ bits, qui représente l'historique des actions gagnantes des $M$ étapes précédentes, qui est également connu sous le nom de signal ou d'information. L'histoire évolue avec le temps et est généralement noté par $\mu(t)$. Le paramètre $M$ est parfois connu sous le nom de taille du cerveau ou la mémoire des agents. Pour les jeux avec une mémoire $M$, le nombre total d'histoires possibles est de $2^M$.

**Exemple 3.1.** *Supposons que l'information publique disponible pour les agents sur les* 5 *stratégies gagnantes des* 5 *dernières semaines est : Dans ce cas, pour une mémoire* $M = 2$,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |

Tab. 3.1 – Exemple d'information commune

*les agents ne prennent en compte que les deux dernières stratégies gagnantes, l'information* $\mu$ *sera les deux derniéres cases du tableau (colorées en bleu), c'est-à-dire,* $\mu(t) = (1, -1)$.

#### Stratégies

Les stratégies peuvent être visualisées sous forme de tableaux où chaque stratégie contient une "colonne histoire" et une " colonne prédiction ". Pour chacune des histoires possibles $\mu(t)$ d'une table, est attribuée l'action $a_{i,s_j(t)}^{\mu(t)}$ , que l'agent $i$ prend, s'il choisit la stratégie $s_j$ à l'étape $t$.

**Exemple 3.2.** *Un exemple de stratégie avec* $M = 2$ *est donné dans le tableau suivant. Le nombre total d'histoires possibles est de* $2^M = 2^2 = 4$.

| Histoire | prédiction |
|---|---|
| 1 -1 | -1 |
| -1 1 | -1 |
| 1 -1 | 1 |
| 1 1 | 1 |

Tab. 3.2 – Exemple d'une stratégie si $M = 2$

Comme le montre la stratégie de la table Tab. 3.2, un historique "$1-1$" correspond au cas où les deux dernières actions gagnantes sont "1" et "$-1$", et la prédiction correspondante au choix gagnant pour la prochaine étape est : "$-1$".

### 3.3.3 Espace des stratégies

Comme on a pu le voir précédemment, pour une mémoire de taille $M$, on a $2^M$ histoires possibles, alors chaque stratégie peut être représentée par un vecteur $\overrightarrow{a_{i,s}}$ de dimension $P$, qui enregistre les $P = 2^M$ prédictions, dont les composantes sont $" - 1"$ ou $" + 1"$. Ce qui signifie que, l'espace de toutes les stratégies possibles sera de cardinalité $2^{2^M}$.

**Exemple 3.3.** *pour une mémoire de $M = 2$ la cardinalité de l'espace des stratégies est de $2^{2^M} = 2^{2^2} = 16$, illustré dans le tableau suivant :*

| historique | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ | $s_8$ | $s_9$ | $s_{10}$ | $s_{11}$ | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{14}$ | $s_{15}$ | $s_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| -1 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 |

Tab. 3.3 – Espace des stratégies pour $M = 2$

### 3.3.4 L'ensemble de stratégies de chaque joueur

Au début du jeu, chaque agent $i \in N$ tire de l'espace total de stratégies, $|S_i|$ stratégies, qui les aident à prendre des décisions tout au long du jeu. Il n'y a pas d'a priori meilleure stratégie, c'est-à-dire des stratégies qui sont meilleures ou préférées. On note par $S_i$ le sous ensemble des stratégies choisies par le $i^{me}$ joueur.
Et $S = \{\bigcup_{i=1}^{N} S^i\}$, l'espace de toute les stratégies.

**Exemple 3.4.** *le tableau suivent représente un sous ensemble de 3 stratégies choisies par le joueur i dans l'espace des stratégies. Alors, d'après l'exemple, l'ensemble de stratégies du joueur $i \in N$ est $S^i = \{s_1^i, s_2^i, s_3^i\}$.*

| historique | $s_1^i = s_6$ | $s_2^i = s_{10}$ | $s_3^i = s_{13}$ |
|---|---|---|---|
| 1 1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 -1 | 1 | 1 | -1 |
| -1 1 | 1 | -1 | 1 |
| -1 -1 | 1 | -1 | -1 |

Tab. 3.4 – Exemple d'un sous ensemble de stratégies $S = \{s_1^i; s_2^i; s_3^i\}$ choisies par un agent $i$

### 3.3.5 Prédiction

Face à une histoire $\mu(t)$ du jeu, chaque agent doit choisir une action à utiliser dans la période suivante, et afin de bien choisir son action à l'instant $t$, le joueur doit procéder par des prévisions.

**Définition 3.2.** *supposons que le joueur $i \in N$ ait choisit la stratégie $s_j^i \in S^i$ , $i \in N$, $j \in \{1, \ldots, |S|\}$ La réponse du joueur $i$ face à l'histoire $\mu(t)$ est la stratégie située à l'intersection de la ligne histoire $\mu(t)$ et la $j^{me}$ colonne de la table de l'espace des stratégies*

**Définition 3.3.** *La prédiction de la stratégie $s^{i*}$ de l'agent $i$ sous l'information $\mu(t)$ à l'étape $t$ est donnée par :*

$$a_i(t) = a_{i,s_{i*(t)}}^{\mu(t)} \tag{3.1}$$

*où $s_{i*(t)}$ est la meilleure stratégie de l'agent $i$ à l'étape $t$, et $a_{i,s_{i*(t)}}^{\mu(t)}$ est l'action réelle de l'agent $i$.*

**Exemple 3.5.** *On suppose qu'un joueur $i$ ait choisit la stratégie $s_1^i = s_6$ , de la table d'un exemple de sous ensemble de stratégie du joueur $i$. La réponse du joueur $i$ face à l'histoire $\mu(t) = (1, -1)$ est la stratégie située à l'intersection de la deuxième ligne et de la sixième colonne de la table 3. L'action prédite du joueur $i$ est ainsi $a_{i,s_1^i}^{\mu(t)} = 1$.*

| historique | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ | $s_8$ | $s_9$ | $s_{10}$ | $s_{11}$ | $s_{12}$ | $s_{13}$ | $s_{14}$ | $s_{15}$ | $s_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| -1 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 |

Tab. 3.5 – Exemple d'une prédiction

### 3.3.6 Gain total (fréquentation)

La somme totale des actions de tous les agents à l'instant $t$ est présentée comme la fréquentation $A(t)$ définie comme suit :

**Définition 3.4.** *En vertu de la relation (3.1), la fréquentation $A(t)$ à l'étape $t$, sous l'information $\mu(t)$ est :*

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{i,s_{i(t)}}^{\mu(t)} \tag{3.2}$$

### 3.3.7 Gains virtuels

Pour les stratégies qui donnent des prévisions correctes, des points leurs seront attribués. Les points de toutes les stratégies disponibles pour un agent sont accumulés et sont connus comme les points virtuels, scores virtuels ou gains cumulés des stratégies, noté par $U_{i,s}(t)$.

#### Mise à jour des gains virtuels

au début du jeu, les gains virtuels prennent la valeur zéro, après chaque période, Le gain virtuel de chaque stratégie est mis à jour. Lorsqú'une stratégie aurait donné une prévision correcte, son gain virtuel est augmenté du gain que l'agent aurait gagné, sinon elle est diminuée de la même quantité. A chaque étape, les agents prennent chacun une décision en fonction de la meilleure stratégie.

**Définition 3.5.** *Le gain virtuel du joueur i pour la stratégie $s^i \in S^i$ à l'étape t est mis à jour selon la règle de la minorité suivante*

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a^{\mu(t)}_{i,s_{i(t)}} A(t). \tag{3.3}$$

**Meilleure stratégie**

**Définition 3.6.** *La meilleure stratégie à l'étape t, du joueur i, notée $s^{i*}(t)$, est la stratégie dont le gain virtuel est le plus élevé*

$$s^{i*}(t) \in \arg\max_s U_{i,s(t)} \tag{3.4}$$

Afin de choisir la meilleure stratégie à jouer, il existe plusieurs méthodes qui permettent aux joueurs de se souvenir de leurs meilleurs choix que celle des gains virtuels le plus élevé, des méthodes qu'on appelle mode de réponse. On cite quelques-unes :
Le gain virtuel le moins élevé : son principe est le même que celui du gain virtuel le plus élevé, on attribue des gains virtuels aux stratégies qui ont prédit l'action gagnante, la seule différence est qu'au lieu de choisir la stratégie qui a le plus grand gain virtuel, on choisit la stratégie qui a le plus petit gain virtuel et qu'on appelle le mode de réponse indirecte.
La même que le dernier tour : cette méthode consiste à choisir à l'instant $t+1$, la stratégie qui prédit la même action que l'action gagnante à l'instant $t$.
La même que deux tours d'avant (ou n'importe quel autre cycle) : il consiste à jouer l'action gagnante de deux tours (ou cycle) d'avant.
La moyenne arrondie des R tours d'avant : ça consiste à calculer la moyenne des R derniers tours et l'arrondir afin de prédire l'action à jouer.
L'image du dernier tour (ou n'importe quel autre tour) : il s'agit de plier le tableau dont on garde les stratégie gagnante en deux et de jouer l'action gagnante qui se trouve exactement sur la case de l'action gagnante du dernier tours ( ou autre tour) .
La stratégie miroir du tour $t$ : le joueur choisira de jouer le miroir de l'action gagnante du tour $t$ .

### 3.3.8 Gains des agents

Les agents qui prennent les décisions gagnantes sont également récompensés par des points, que l'on appelle les gains réels des agents (à distinguer des gains virtuels des stratégies) et qui est défini par :

**Définition 3.7.** *Le gain du joueur $i$ à l'étape $t$ est donné par :*

$$g_i(t) = \begin{cases} a_i(t), & A(t) < 0; \\ -a_i(t), & A(t) > 0. \end{cases}$$

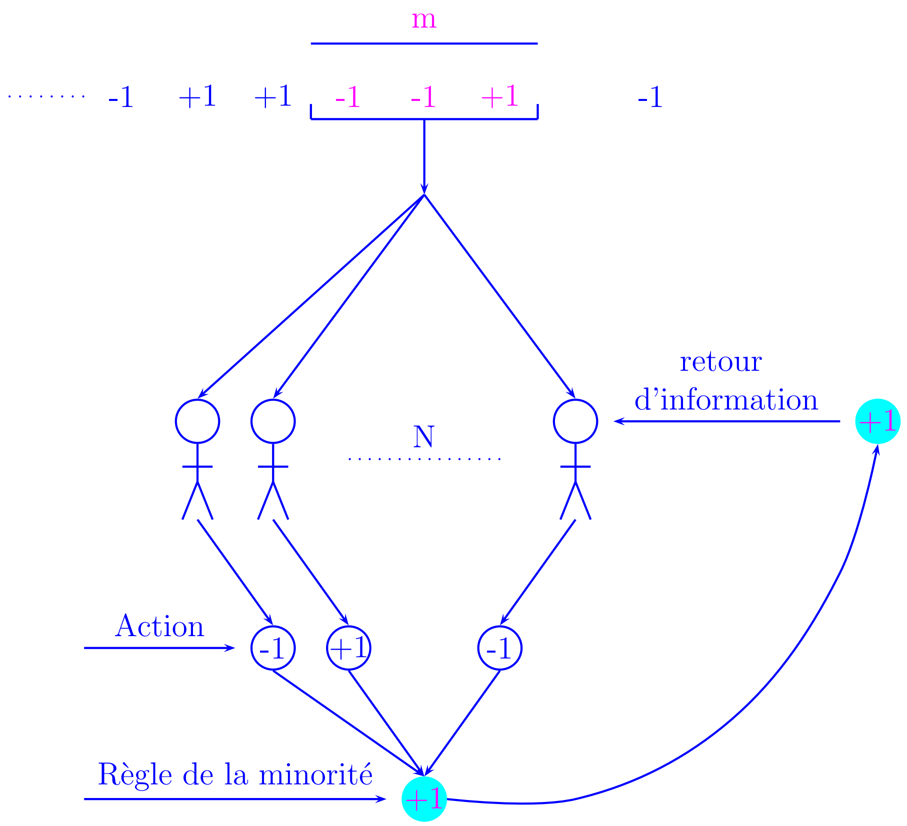



FIGURE 3.1 – Modèle d'apprentissage inductif dans un jeu de minorité

### 3.3.9 Équilibre de nash

Rappelons que l'équilibre de Nash défini précédemment pour un jeu sous forme normale, prend la forme suivante dans le contexte des jeux de minorité.

**Définition 3.8.** *Un profil d'actions $(a_1(t), a_2(t), ..., a_{2k+1}(t))$ est un équilibre de Nash dans le jeu , si l'égalité suivante (3.1)est vérifiée*

$$|A(t)| = 1 \tag{3.5}$$

**Définition 3.9.** *(volatilité)[3] La volatilité des jeux minoritaires est la variance moyenne de la fréquentation dans le temps après chaque tour de jeu. Une forte volatilité correspond à de grandes fluctuations dans la fréquentation et donc un jeu inefficace. Une faible volatilité correspond à des fluctuations de fréquentation plus faibles et donc un jeu efficace.*

## 3.4 Quelques variantes des jeux de minorité

Après la première publication du problème du bar d'Arthur et du jeu des minorités, de nombreuses variantes du jeu sont établies et étudiées. Certains de ces modèles sont développés pour simplifier davantage le jeu des minorités ou pour inclure plus de fonctionnalités. La plupart des modifications comprennent l'utilisation de différents types de stratégies et de fonctions de paiement, la présence de différents types d'agents et la flexibilité accrue de la participation des agents, l'évolution des agents, le remplacement d'agents mal exécutés par de nouveaux agents et les préoccupations individuelles pour Capitale.

### 3.4.1 Jeux de minorité évolutionnaires

En 1999, N. F. Johnson et al. [12] a introduit le jeu de minorité évolutionnaire qui est généralement cité comme EMG dans les littératures ou le modèle génétique dans les littératures ultérieures. Du nom d'EMG, l'évolution des agents est une fonctionnalité importante ajoutée au jeu. De plus, les stratégies employées par les agents ont également des modifications majeures. Contrairement aux stratégies du jeu de minorité de base, la colonne de prédiction n'est pas fixe, elle enregistre l'action gagnante passée la plus récente ou le choix pour l'historique correspondant. Ainsi, cette table de stratégie dépend du temps. Pour prendre des décisions, tous les agents se voient attribuer une probabilité $p_i$, avec $0 \leq p_i \leq 1$, qui est définie comme la probabilité que l'agent $i$ agisse selon le tableau de stratégie, et il choisit le choix opposé à l'action gagnante passée pour cette histoire avec la probabilité $1 - pi$. Cette probabilité $p_i$ joue un rôle de stratégie dans la prise de décisions pour les agents et est appelée " stratégie " dans l'EMG ou valeur de " gène " dans le modèle génétique. Par conséquent, les agents sont récompensés ou pénalisés sous réserve de $p_i$. Pour améliorer la propriété évolutive du jeu, les agents sont autorisés à modifier le $p_i$ si les scores tombent en dessous d'un seuil noté $d$, où $d < 0$, qui est parfois connu comme le score de décès.

### 3.4.2 Jeux de la minorité thermique

En 1999, Cavagna et al [4] ont introduit dans le modèle probabiliste, la température au processus de prise de décision des agents dans le modèle dit Jeu minoritaire Thermique (TMG). Cette température stochastique peut également être mise en oeuvre dans le jeu de base. Au lieu de choisir la meilleure stratégie à coup sûr, les agents emploient leur $s$ stratégies avec des probabilités. En plus de l'aspet stochastique dans le choix des stratégies, il y a plusieurs autres modifications dans le TMG [4] par rapport au jeu de base. A savoir dans l'espace stratégique, le TMG peut être considéré comme une formulation continue du jeu de minorité, dans lequel le jeu n'est plus discret et binaire. Malgré ces différences et la formulation continue, TMG reproduit les mêmes comportements collectifs que la MG de base [7, 4].

### 3.4.3 Jeux de minorité simples sans information

Dans ce jeu minoritaire simplifié, aucune information n'est donnée aux agents et donc ils n'ont pas de tables de stratégies. Les agents choisissent entre les choix $+1$ et $-1$ selon des probabilités [26].

### 3.4.4 Jeu de minorité canonique

Le jeu minoritaire canonique fait référence à une sous-classe de jeux minoritaires où le nombre d'agents qui participent activement au marché est variable. Au lieu de sommer sur tous les $N$ agents, l'action collective ou la fréquentation est effectivement la somme des actions des agents actifs au temps $t$. Les agents peuvent être actifs ou inactifs à tout moment, en fonction de leur rentabilité potentielle sur le marché. Le terme " grand-canonique " provient de l'ensemble grand-canonique en mécanique statistique où le nombre de particules dans le système d'observation est variable. Dans la plupart des formulations [23],[5],[10], lorsque le score virtuel le plus élevé des stratégies détenues par un agent est inférieur à un certain seuil, l'agent s'abstient de participer à ce tour de jeu.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé la définition des jeux de minorités de manière générale. Nous avons introduit l'histoire et la naissance de cette catégorie de jeux, leurs modélisation mathématique et présenté quelques types de jeu de minorité connu dans la littérature. Dans ce qui suit, nous allons appliquer ces notions sur un problème de congestion dans réseau routier.

# 4

# Application au Problème de congestion

## Contents

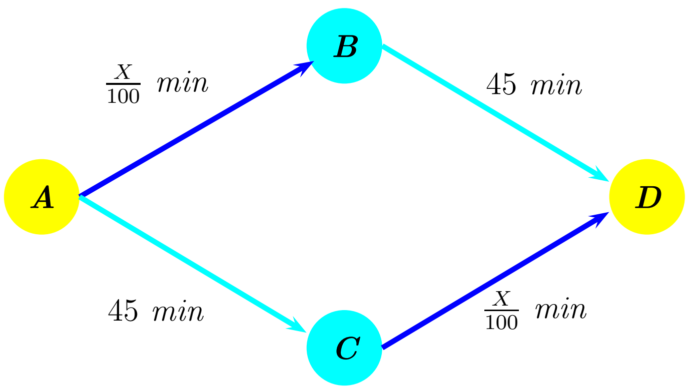
# Introduction

Le problème de congestion réside dans la capacité limitée des réseaux routiers et le nombre très grand des usagers de ces réseaux, ce qui crée de longs bouchons de circulation. Très longtemps, pour résoudre ce problème on a procédé par l'ajout de nouvelles routes, jusqu'à ce que le mathématicien allemand Dietrich Braess [8] met en évidence le paradoxe qui porte son nom en 1968. Le paradoxe de Braess s'énonce comme suit :

### Paradoxe de Braess

Etant donnés le nombre de véhicules partant de chaque point d'un réseau routier, et leur destination, on cherche à estimer la distribution du flot de circulation. Le fait qu'une voie soit préférable à une autre dépend non seulement de la qualité de la voie, mais également de la densité du flux. Si chaque conducteur emprunte le chemin qui lui paraît le plus favorable, les temps de trajet résultant ne sont pas nécessairement les plus faibles. De plus, une extension du réseau routier peut entraîner une redistribution du réseau qui résulte en des temps de trajet plus longs.[2]. L'objet de ce qui suit est l'application de l'approche des jeux de minorité au problème de transport.

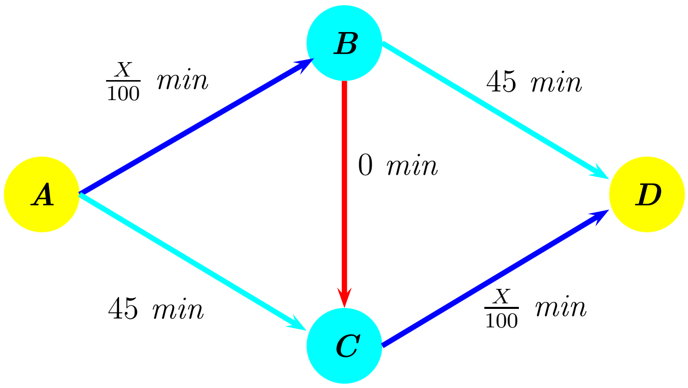
**Exemple 4.1.** *Considérons un réseau routier comme indiqué sur le schéma suivant :*




*sur lequel les voyageurs souhaitent aller de la ville $A$ à la ville $D$, le plus vite possible. Deux itinéraires s'offrent à eux, l'un passant par $B$, l'autre passant par $C$, chacun composé* *d'un bout de nationale et d'une route départementale. Le temps de parcours sur les nationales est de 45 minutes quelque soit la circulation. Par contre, comme il y a des feux sur les départementales, le temps de parcours dépend du nombre de voitures $X$ qui l'emprunte : il vaut par exemple $\frac{X}{100}$ minutes.*

*Supposons qu'il y ait 4000 voitures souhaitant passer de $A$ à $D$. Si elles prennent toutes le trajet $(ABD)$ elles mettront 85 minutes. Idem si elles prennent toutes le trajet $(ACD)$. La situation optimale sera celle où le trafic s'équilibre entre les deux trajets. Le temps de parcours sera alors de 45 +2000/100 = 65 minutes.*

*Pour désengorger la circulation, on construit une voie ultra-rapide reliant $B$ et $C$, dont le temps de parcours est négligeable quelque soit le nombre de véhicules qui l'emprunte. Avec cette voie rapide, le temps de parcours entre $A$ et $B$ devrait raccourcir, or c'est l'inverse qui se produit :*




*Le meilleur trajet pour les 4000 voitures est maintenant $(ABCD)$, et le temps de trajet passe ainsi de 65 minutes à 80 minutes. En effet, dans cette situation, tous les conducteurs vont choisir $(AB)$ plutôt que $(AC)$, car $(AB)$ prendra seulement $\frac{X}{100} = 40$ minutes au pire, alors que $(AC)$ prendra à coup sûr 45 minutes. Une fois au point $B$, tout conducteur rationnel choisira la route (gratuite) vers $C$, et de là continuer vers $D$, car là encore, $(BD)$ prendra à coup sûr 45 minutes alors que $(BCD)$ prendra au plus $0 + \frac{4000}{100} = 40$ minutes. Le temps de trajet de chaque conducteur est donc de $\frac{4000}{100} + \frac{4000}{100} = 80$ minutes, un temps supérieur aux 65 minutes requises si la ligne rapide $(BC)$ n'existait pas.*

*Cette situation est un équilibre parfaitement stable (équilibre de Nash). Si tous les conducteurs se mettaient d'accord pour ne pas utiliser le racourcis $(BC)$, chacun en bénéficierait, par une réduction de son trajet de 15 minutes.*

## 4.1 Position du problème

Soit un ensemble de $N$ usagers qui souhaitent voyager d'une ville $X$( source) à une ville $Y$(puit) , sachant qu'entre les deux villes $X$ et $Y$ , il existe deux routes $A$ et $B$, qui ont la même longueur (c'est-à-dire si on prend un seul passager sur les deux routes $A$ et $B$, il va faire le même temps de passage) ce qui signifie y'a pas une route préférée pour les $N$ usagers. Si la majorité des usagers empreinte la route $A$ on aura une congestion, cela veut dire que le temps de passage de la route $A$ sera plus élevé que celui de la route $B$ et les usagers de $B$ arrivent avant les usagers de la route $A$ à leurs destinations, et vice versa, si la majorité empreinte la route $B$ le temps de passage de la route $B$ sera plus élevé que la route $A$. La question qui se pose, si on répète la même expérience en plusieurs semaines, comment les $N$ usagers vont se comporter face aux deux routes $A$ et $B$ ?

## 4.2 Formulation mathématique

Nous souhaitons expérimenter le modèle des jeux de minorité sur le problème de congestion énoncé auparavant tel que :

- L'expérience sera répétée $T$ fois.
- L'ensemble de passagers comme étant l'ensemble des joueurs $I = \{1, \ldots, N\}$.
- On suppose que chaque joueur $i \in I$ peut effectuer à l'instant $t \in T$ , l'action $a_i(t)$ définit comme suit :

$$a_i(t) = \begin{cases} +1, & \text{si l'agent } i \text{ décide de passer par } A\,; \\ \text{-1}, & \text{si l'agent } i \text{ décide de passer par } B \end{cases}$$

- L'action gagnante est de $+1$ (passer par $A$) si la plupart des agents ont choisi $-1$ (passer par $B$) et inversement. Les joueurs se font ainsi concurrence à chaque étape du jeu pour tenter d'être dans la minorité, et tous les gagnants sont récompensés.

En effet, si la fréquentation $A(t)$ est positive, le temps de passage sur la route $A$ augmente et ceux qui ont décidé de passer par $B$, c'est-à-dire les usagers qui ont opté pour l'action $a_i(t) = -1$, peuvent être récompensés, car ils arriveront les premiers à destination.

Contrairement aux passagers de la route $A$, $a_i(t) = +1$, qui subissent une perte, car ils ont pris plus du temps à arriver. Inversement, la participation négative récompense les passagers de la route $A$ et punit les passagers de la route $B$.

## 4.3 Généralité sur la simulation

L'approche numérique est bien antérieure à l'apparition des premiers ordinateurs. En 1822, Babbage proposait déjà l'utilisation des machines numériques pour calculer les tables astronomiques [1]. Mais qu'au milieu du 20 -ème siècle, la simulation numérique a eu de l'ampleur auprès des physiciens et statisticiens, et est devenue un outil incontournable de nos jours dans certains domaine (spatial, aéronautique, nucléaire ...). Les calculs de simulations permettent de prédire le comportement du sujet étudié sans avoir à passer par la construction de prototypes ou la réalisation d'essais réels, coûteux et/ou difficiles à mettre en place ; ce qui est un avantage essentiel en matière de coûts de production, notamment dans les domaines innovants [2]. La simulation contient plusieurs modèles, dans ce travail nous simulons un modèle stochastique qui est basé sur la génération des nombres pseudo aléatoire, et le but de cette section est de présenter certaines méthodes de génération des nombres aléatoires, mais avant ça, la définition de quelques lois de probabilités est nécessaire.

### 4.3.1 Lois de probabilités

Soit $(\Omega, F, P)$ un espace probabilisé modélisant une certaine expérience aléatoire. Dans ce chapitre l'espace $\Omega$ sera le plus souvent discret et dans ce cas on supposera que la tribu $F$ des événements est égale à l'ensemble $P(\omega)$ de tous les sous-ensembles de $\omega$.

### 4.3.2 Variables aléatoires discrète

**Définition 4.1.** *On dit qu'une variable aléatoire est discrète si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs :*

$$X \in \{x_k, k \in K \subset N\}.$$

*Dans ce cas, la loi de la variable aléatoire $X$ est la loi de probabilité sur l'ensemble des valeurs possibles de $X$ qui affecte la probabilité $\mathbf{P}\{X = x_k\}$ au singleton$\{x_k\}$ .*

### Loi de Bernoulli

Soit$A$ un événement relatif à une expérience aléatoire modélisée par un espace $(\Omega, F, P)$.

**Définition 4.2.** *On appelle v.a. indicatrice de l'événement $A$ la v.a. définie sur $\Omega$ par*

$$\begin{cases} \mathbf{1}_{A(w)} = 1, & w \in A; \\ \mathbf{1}_{A(w)} = 0, & w \notin A. \end{cases}$$

*Si on note $p = P(A)$ la probabilité de l'événement $A$. La loi de probabilité de la v.a. $\mathbf{1}_A$ (appelée loi de Bernoulli $B(1, p)$) est donnée par*

| $\mathbf{1}_A$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p_i$ | $(1-p)$ | $p$ |

### Loi binomiale

On considère une expérience aléatoire à deux issues $S$(succès) et $E$(échec) avec $P(S) = p$ et $P(E) = 1 - p$ $(0 \leq p \leq 1)$. On fait $n$ répétitions indépendantes de cette expérience.

**Définition 4.3.** *La variable aléatoire $X$ = " nombre total de succès " (au cours des $n$ répétitions) est appelée v.a. binomiale de paramètres $(n, p)$. Pour abréger la loi d'une telle v.a. sera désignée par $B(n, p)$*

### La loi géométrique

Considérons $n$ répétitions indépendantes d'une variable de Bernoulli. La loi géométrique est la loi de la variable aléatoire $X$ : " nombre d'observations jusque (et $y$ compris) au premier succès ".

**Définition 4.4.** *Les probabilités associées à une loi géométrique sont de la forme : $Pr(X = i) = pqi-1$ où $p$ est la probabilité d'observer un succès, $q = 1-p$ la probabilité d'échouer et $i$ est le nombre d'essais jusqu'à ce que le premier succès (inclus) se réalise. La loi géométrique* *est utilisée entre autres choses dans le cadre des études de processus stochastiques et de la théorie des files d'attente.*

#### Loi de Poisson

**Définition 4.5.** *Soit $\lambda > 0$ un paramètre fixé. On dit qu'une v.a. $X$ à valeurs dans l'ensemble des entiers $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ si*

$$\forall n \in N, P(X = n) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^n}{n!}$$

### 4.3.3 Variable aléatoire continue

Si une variable aléatoire $X$ peut prendre les valeurs réelles contenues dans un intervalle, elle est dite continue. Une variable aléatoire continue $X$ est définie par son intervalle de variation $(a, b)$ et par la fonction $f(x)$ appelée fonction de densité.

#### La loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire $X$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ avec une fonction de densité constante

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Est distribuée uniformément dans l'intervalle $[a, b]$. On notera $X \sim U(a, b)$. Par intégration, nous obtenons la fonction de répartition $F$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

#### La loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une distribution exponentielle de paramètre $\lambda$ si sa densité est donnée par :

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x); 0 \leq x < \infty, \lambda > 0.$$

Et sa fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x); 0 \leq x < \infty, \lambda > 0$$

**La loi normale**

Une variable aléatoire $X$ définie sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, caractérisée par la fonction de densité suivante

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

où $\mu$ et $\sigma$ sont deux paramètres, est appelée variable aléatoire normale (ou gaussienne). On écrit $X \sim N(\mu, \sigma)$.

**La loi du chi-carré**

La loi du chi-carré, noté $\chi^2$ , est la densité d'une somme de variables aléatoires normales indépendantes élevées au carré. Soit $\nu$ un entier positif. La densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$ distribuée selon la loi du $\chi^2$ de paramètre $\nu$ (ou avec $\nu$ degrés de liberté) est donnée par :

$$F_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2}}) x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-x/2}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

### 4.3.4 Génération de nombres pseudo-aléatoires

**1-La méthode du carré médian**

La méthode du carrée médian est la première méthode de génération automatique de nombres pseudo-aléatoires, introduite par John van new man en 1951. Elle consiste à générer une suite de nombre aléatoires ayant m chiffre ou chaque successeurs de cette suite est obtenu en élevant chaque nombre au carrée et retourne les m chiffre du milieu. Cette méthode est très vite abandonner car elle ne procure pas des suites des nombre aléatoires d'une manière certaine.

**2-Les méthodes de congruence**

**Méthode de congruence simple( linéaire)** Introduite par Derrick Lehmer en 1948 cette méthode est la plus répondu. Elle consiste à générer des nombre pseudo aléatoires par un algorithme simple définit par une relation de récurrence suivante

$$x_i = (ax_{i-1} + b) mod m$$

Ou $a$ est le multiplicateur, $b$ l'incrément, et $m$ le module.

Le terme initial $x_0$ est appelé la graine (seed en anglais).

**Méthode de congruence avec retard** Le point faible de la méthode de congruence réside dans la relation de récurrence qui provoque des irrégularités non désirées. Une modification de la règle de récurrence est donnée par

$$x_i = (ax_{i-r} + b) \mod m$$

Ou $r$ est le retard, les premiers termes sont calculés par la relation $x_i = (a'x_{i-1} + b') \mod m'$

$a', b', m'$ peuvent être déférente de $a, b, m$.

**Méthode de congruence avec mélange** La méthode de congruence avec mélange est une alternative à la méthode de congruence avec retard pour éviter certaine régularités. Cette méthode consiste à modifier l'ordre des termes de suite de nombre pseudo aléatoires, c'est-à-dire soit une suite donnée ou en forme des groupes de longueur $t$ et en permute ces éléments d'une manière symétrique ou aléatoire...etc, en utilisant d'autres générateurs. La méthode de congruence avec mélange peut donner lieu à $t!$ suites distinctes, qui elles-mêmes dépendent aussi du choix des groupes.

**Méthode de l'inverse en congruences** La méthode de l'inverse en congruences introduite en 1986 par Eichenauer et Lehn , elle utilise la notion inverse multiplicatif modulo $m$ pour supprimer la notion de linéarité de la méthode de congruence qui sèvre inutile dans certain problème de simulation. La relation recurrence associée a cette méthode et donner par ça :

$$x_i = (a\widetilde{x}_{i-r} + b) \mod p$$

Ou $x\widetilde{x} = 1 \mod p$

## 4.4 Simulation du problème de transport

On s'intéresse à l'emergence d'un équilibre des nombres d'usagers les routes .

Théoriquement, afin que les deux routes $A$ et $B$ soient fluides, il faudrait que les usagers les empruntant simultanement soient départagé equitablement entre les deux routes. En effet, le cas idéal est l'émergence de l'équilibre de Nash où nous aurons l'égalité (3.5) satisfaite.

### 4.4.1 Algorithme

**Étape 1**

1. Fixer le nombre de joueurs $N = 2k + 1$, $k$ un nombre entier et l'horizon $T$.
2. Chaque agent $i \in \{1; ...; N\}$ prend à l'étape $t$ une action $a_i(t) \in \{-1; +1\}$.
3. Calculer La fréquentation $A(t) = \sum_{N}^{i=1} a_i(t)$
4. Calculer le gain $g_i(t)$de chaque joueur
5. Determiner la stratégie gagnante selon qu'elle prédit ou non le choix de la minorité.

**Étape 2**

1. Conclure l'information $\mu(t)$.
2. Calculer les $P = 2^M$ histoires et les $S_P = 2^P$ stratégies possibles.
3. Chaque joueur choisit aléatoirement $k$ stratégies parmi les $S_P$ stratégies.
4. Initialiser le gain virtuel $U_{i;s}$ de chaque stratégie à zéro.

**Étape 3**

1. Chaque agent $i$, choisit aléatoirement une stratégie de son ensemble $S_i$.

2. Déterminer la prédiction $a^{\mu(t)}_{i;s_i(t)}$, pour chaque agent $i$.

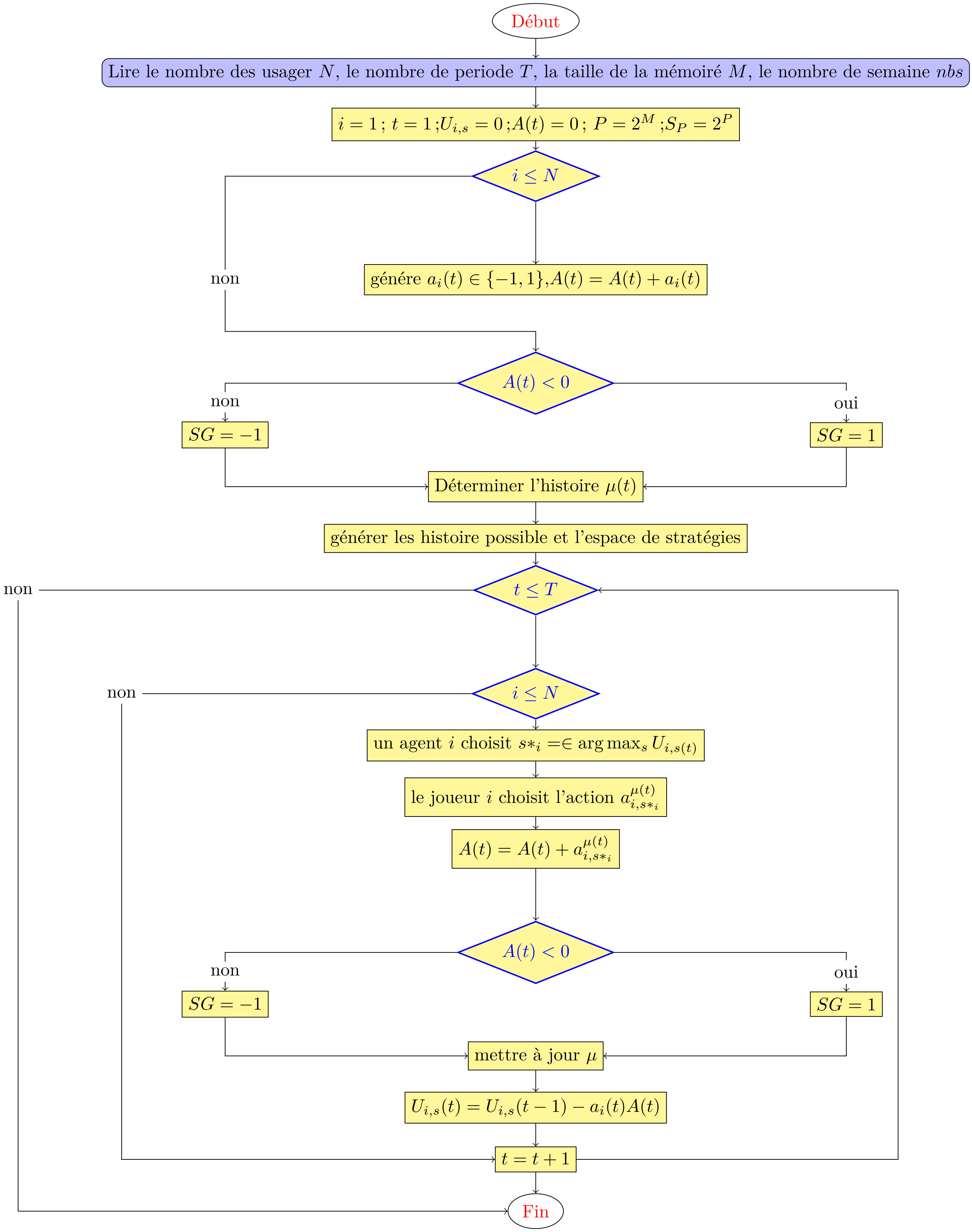
3. Indiquer la stratégie gagnante $a^{\mu(t)}_{i;s_i(t)}$ et la présence $A(t)$.

4. mettre a jour $\mu$.

5. Mettre à jour les gains virtuels des stratégies selon la règle de la minorité.

### Étape 4

1. Si le nombre d'itérations $T$ est atteint, alors terminer, sinon aller à l'étape 3.


Début
Lire le nombre des usager $N$, le nombre de periode $T$, la taille de la mémoiré $M$, le nombre de semaine $nbs$
$i = 1$ ; $t = 1$ ;$U_{i,s} = 0$ ;$A(t) = 0$ ; $P = 2^M$ ;$S_P = 2^P$
$i \leq N$
non
génére $a_i(t) \in \{-1, 1\}$,$A(t) = A(t) + a_i(t)$
$A(t) < 0$
non
oui
$SG = -1$
$SG = 1$
Déterminer l'histoire $\mu(t)$
générer les histoire possible et l'espace de stratégies
non
$t \leq T$
non
$i \leq N$
un agent $i$ choisit $s*_i = \in \arg\max_s U_{i,s(t)}$
le joueur $i$ choisit l'action $a_{i,s*_i}^{\mu(t)}$
$A(t) = A(t) + a_{i,s*_i}^{\mu(t)}$
$A(t) < 0$
non
oui
$SG = -1$
$SG = 1$
mettre à jour $\mu$
$U_{i,s}(t) = U_{i,s}(t-1) - a_i(t)A(t)$
$t = t + 1$
Fin

### 4.4.2 Simulateur

Nous présentons dans ce qui suit l'interface d'un simulateur que nous avons implémenté en language MATLAB Version : 7.14.0.739 (R2012a), afin d'étudier le comportement des usagers, par rapport à la taille de leurs mémoires et évaluer leurs présence dans les routes $A$ et $B$. Le simulateur utilise en paramètres d'entrée quatre données qui sont respectivement le nombre impair des usagers des deux routes $A$ et $B$, la durée du jeu, la mémoire retenue et le nombre de stratégies pour l'ensemble des usagers. En sortie, nous obtenons une courbe représentant la tendence de la présence des usagers sur la route $A$, leurs moyenne et variance.

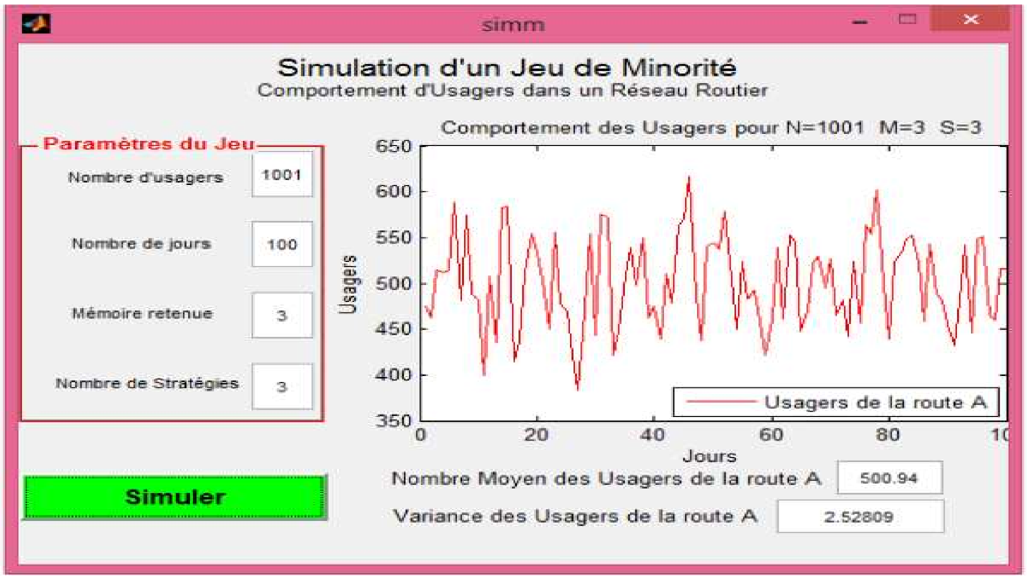



FIGURE 4.1 – Simulateur du Jeu de Minorité

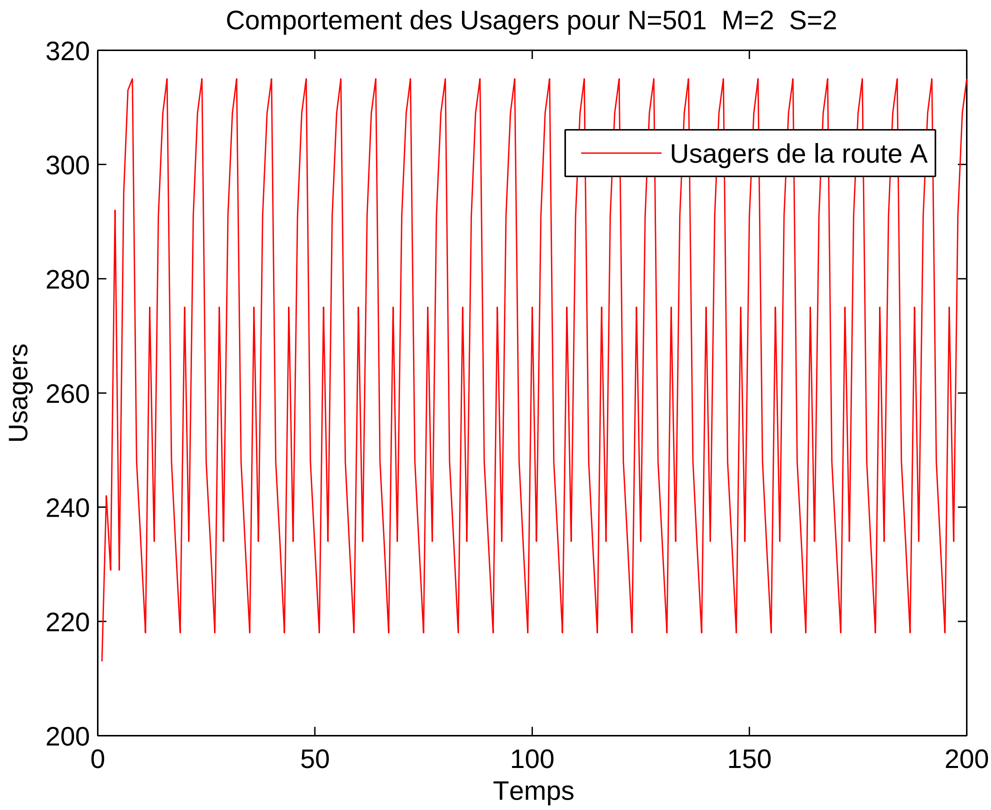
### 4.4.3 Résultats et Discussion

Comme le nombre d'usagers est symétrique dans les deux routes, nous allons étudier la variation par rapport à la route $A$.

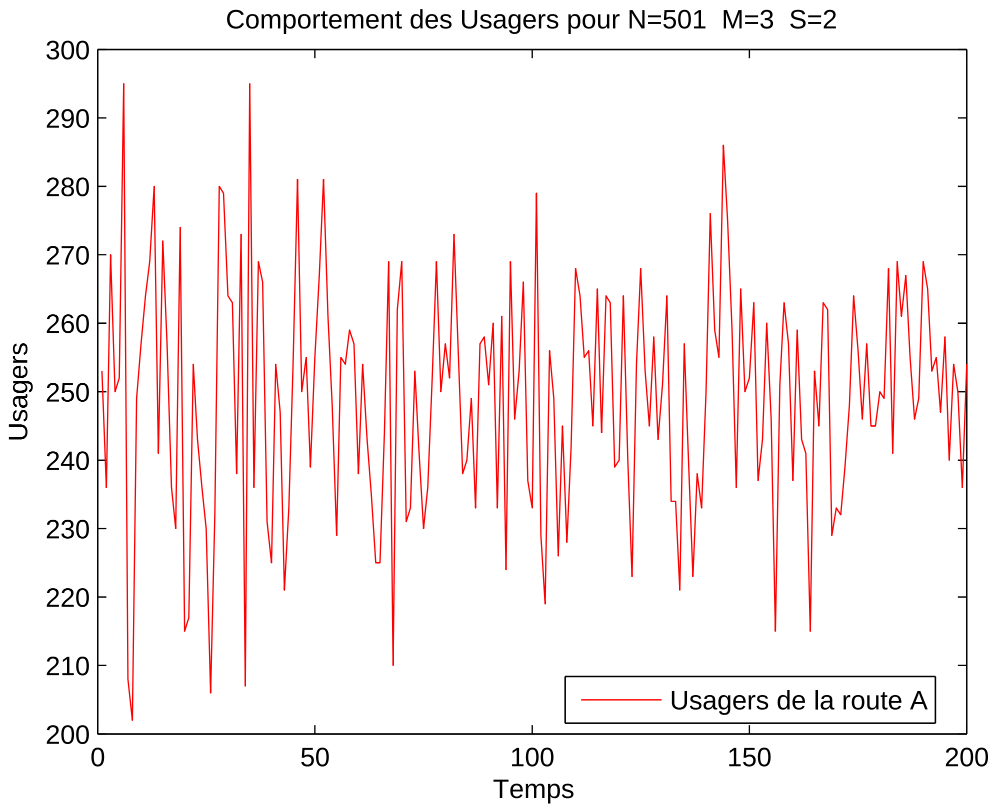
- **Variation par raport a $M$**

Lorsqu'on varie la taille $M$ de la mémoire et on fixe $N = 501$, nombre $T$ de jours tel que $T = 200$ et $S = 2$.

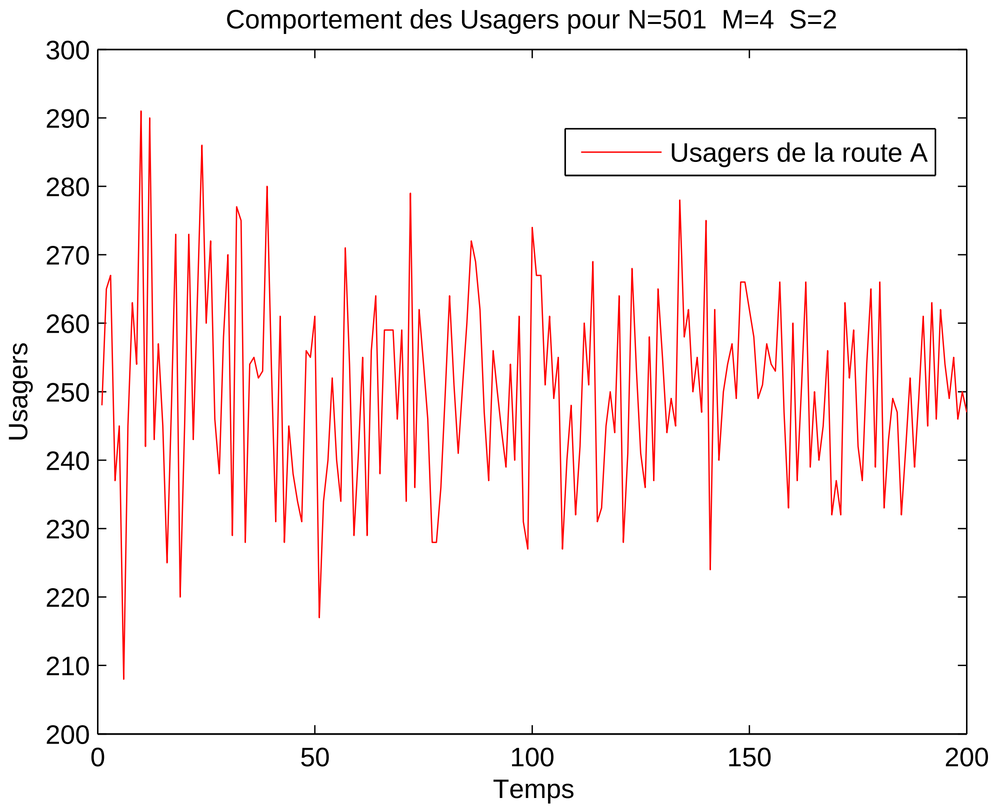
$*$ **Pour M=2** : le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 265.40 et Variance : $1.2307e + 003$.



∗ **Pour M=3** : le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 249.17 et Variance : 288.45.



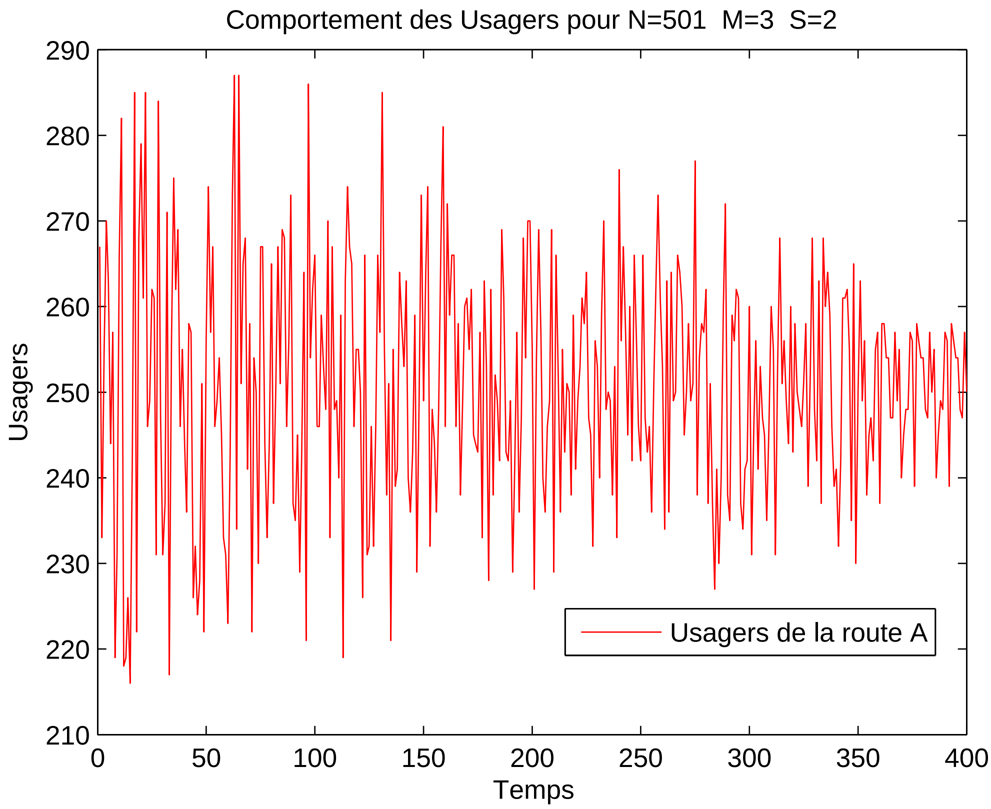
∗ **Pour M=4** : le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 250.25 et Variance : 199.3769.



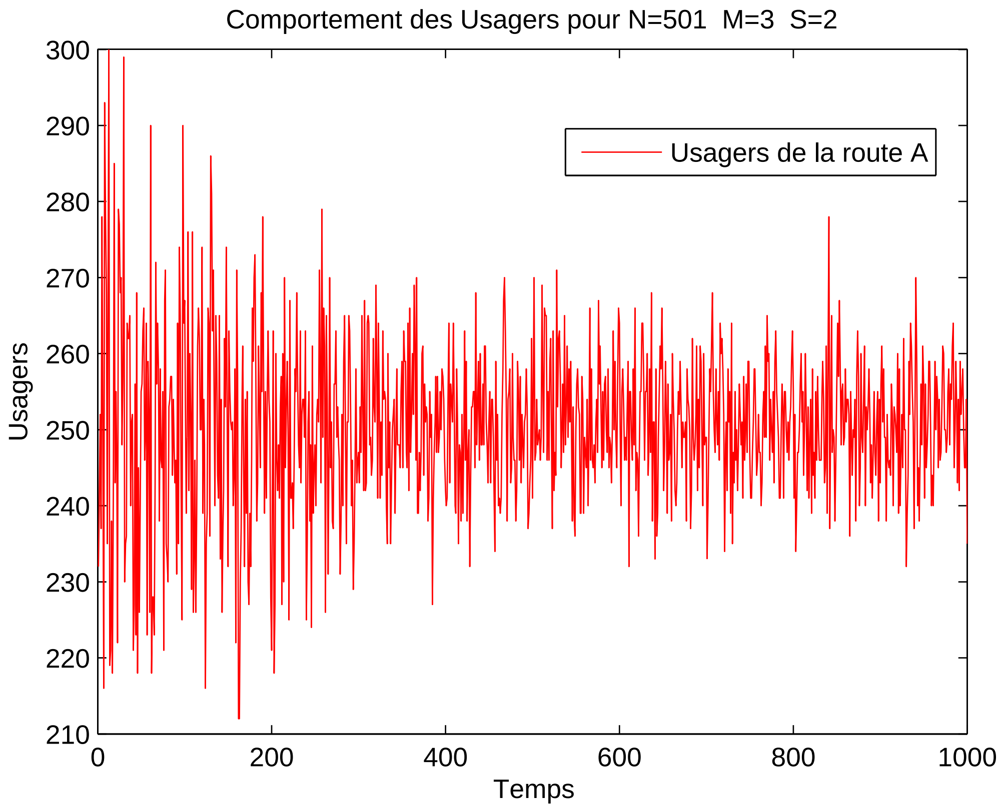
- **Variation par raport a $T$**

  Lorsqu'on varie le nombre $T$ de jours et on fixe $M = 3$, nombre de joueurs$= 501$ et $S = 2$

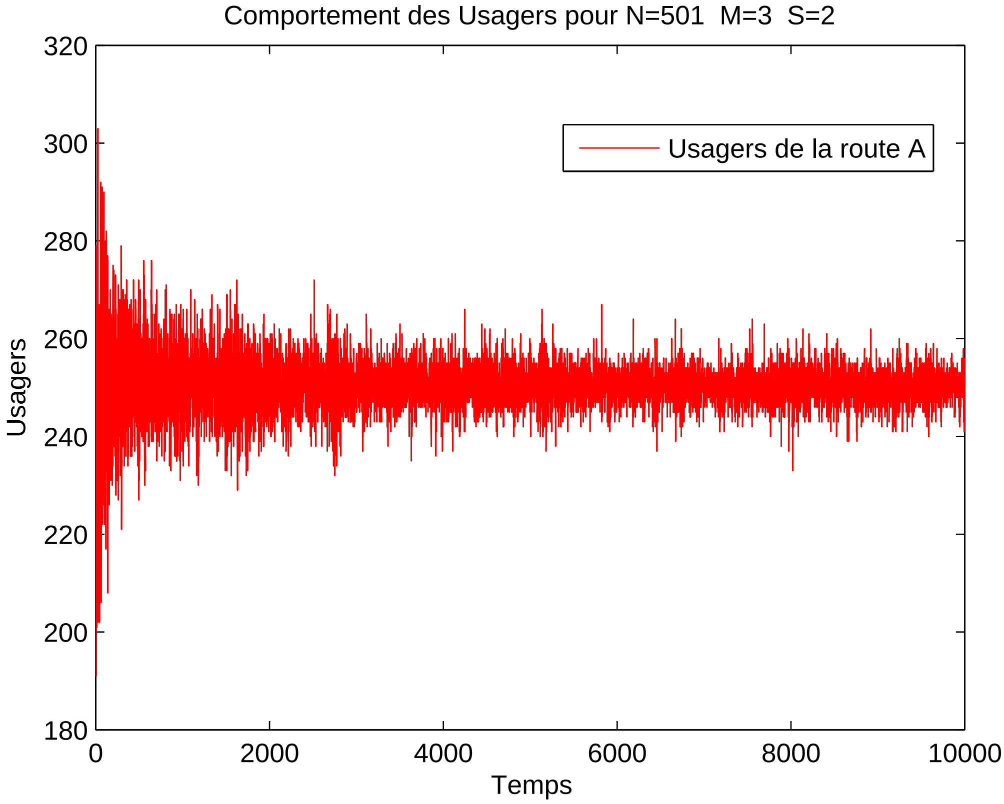
$*$ **Pour T=400** : le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 250.82 et Variance : 185.63.



∗ **Pour T=1000** : le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 250.38 et Variance : 121.25.



$*$ **Pour T=10000** : le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 250.46 et Variance :

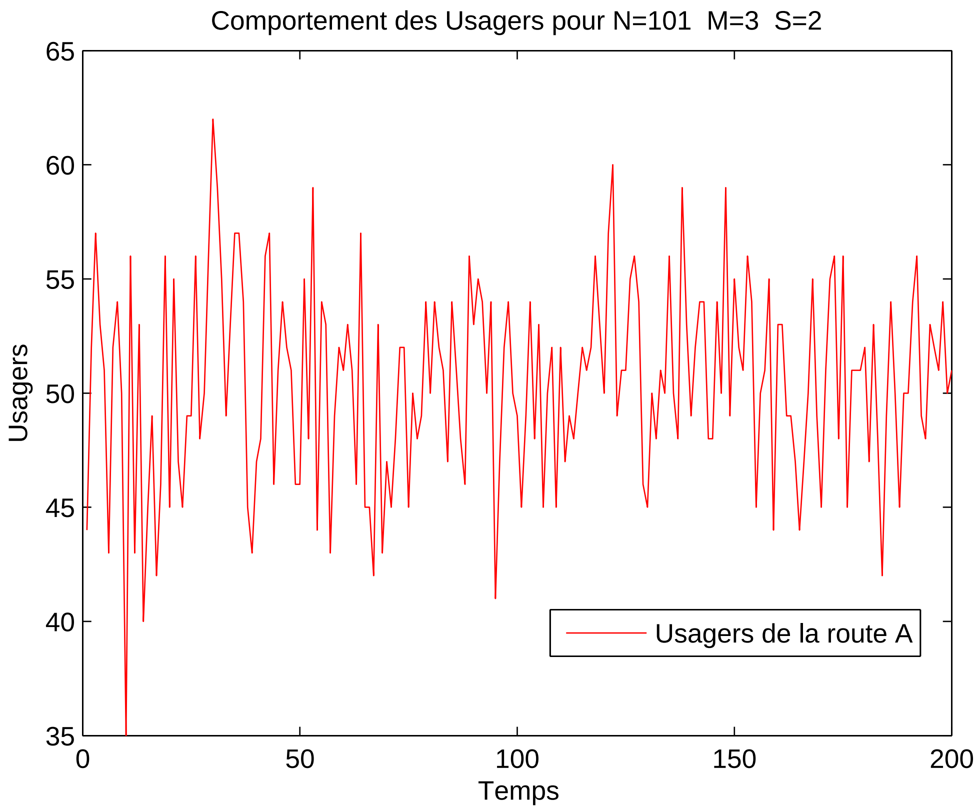



28.35.

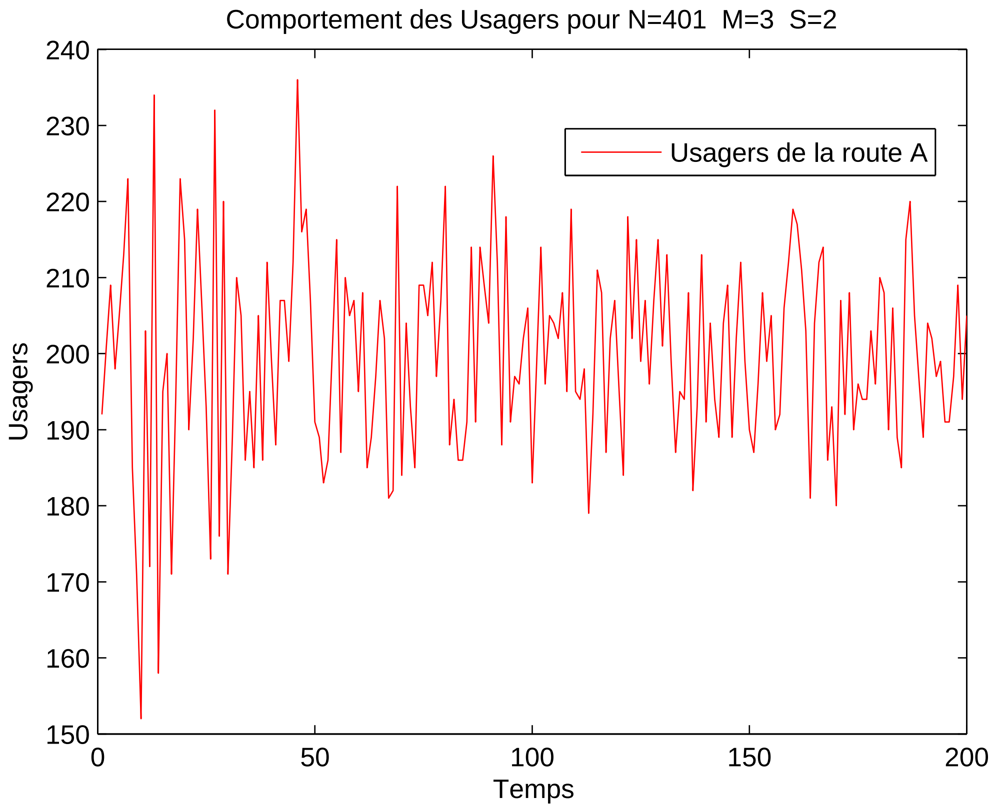
- **Variation par rapport au nombre des usager** $(U)$

Lorsqu'on varie le nombre des joueurs et on fixe $M = 3$, $T = 200$ et $S = 2$.

$*$**Pour N=101 :** le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 50.46 et Variance : 18.50

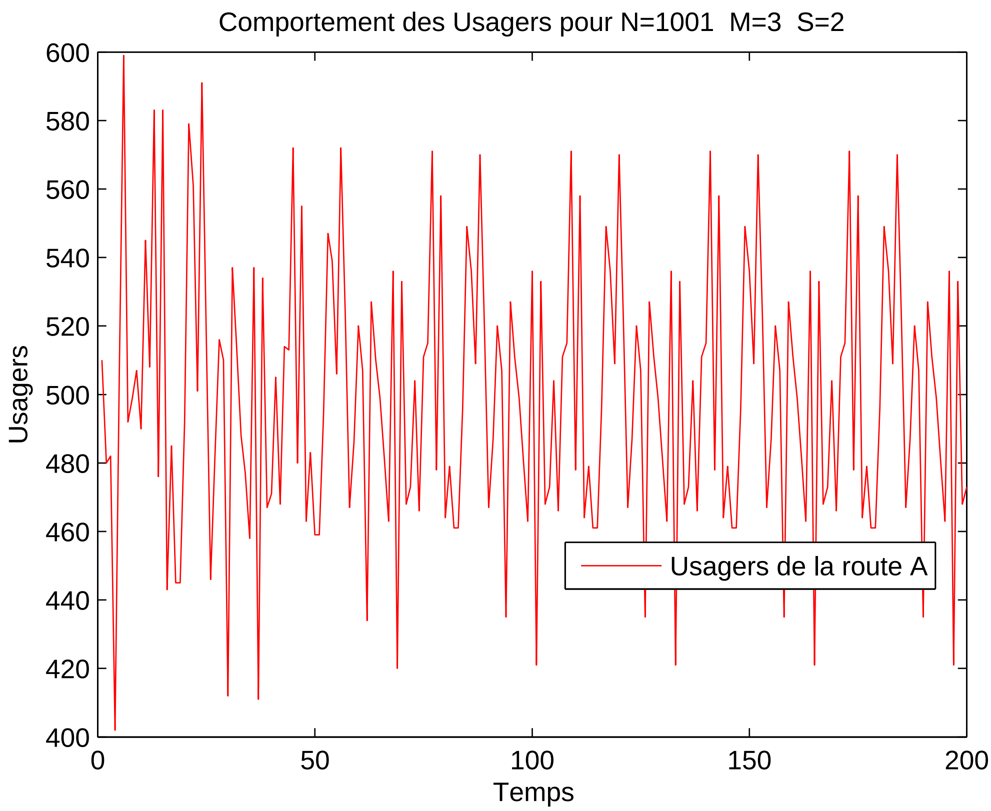


$*$**PourN=401 :** le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 199.70 et Variance : 170.44



$*$**PourN=1001 :** le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 499.3 et Variance :

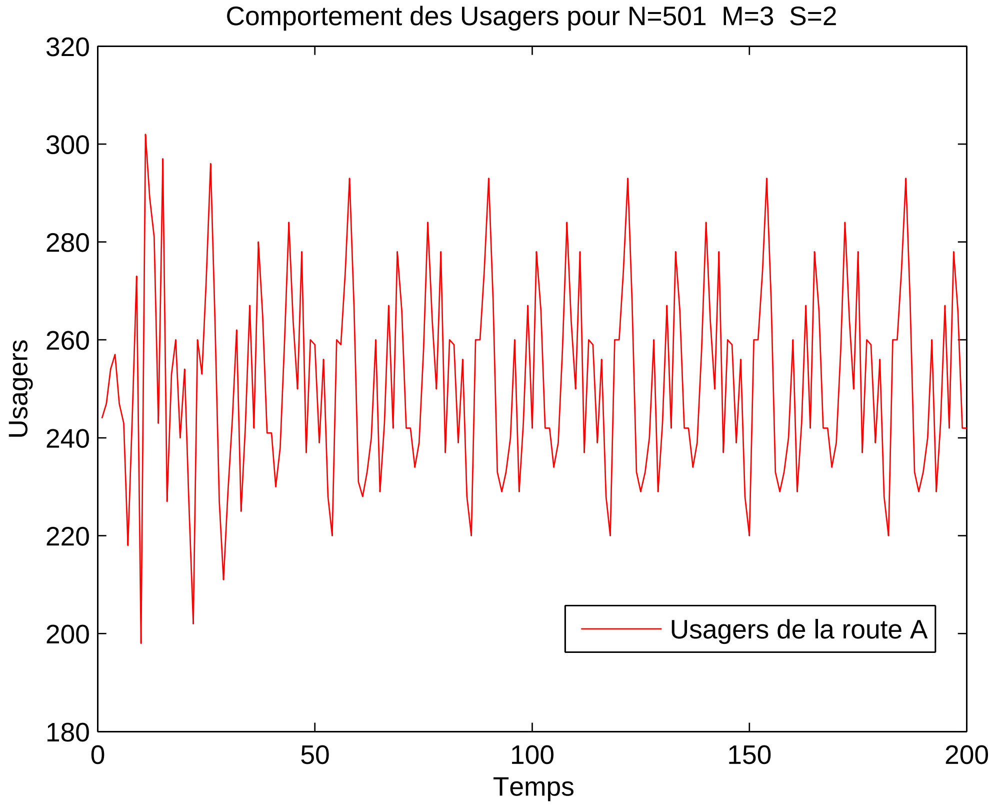
$$1.5555e + 003$$



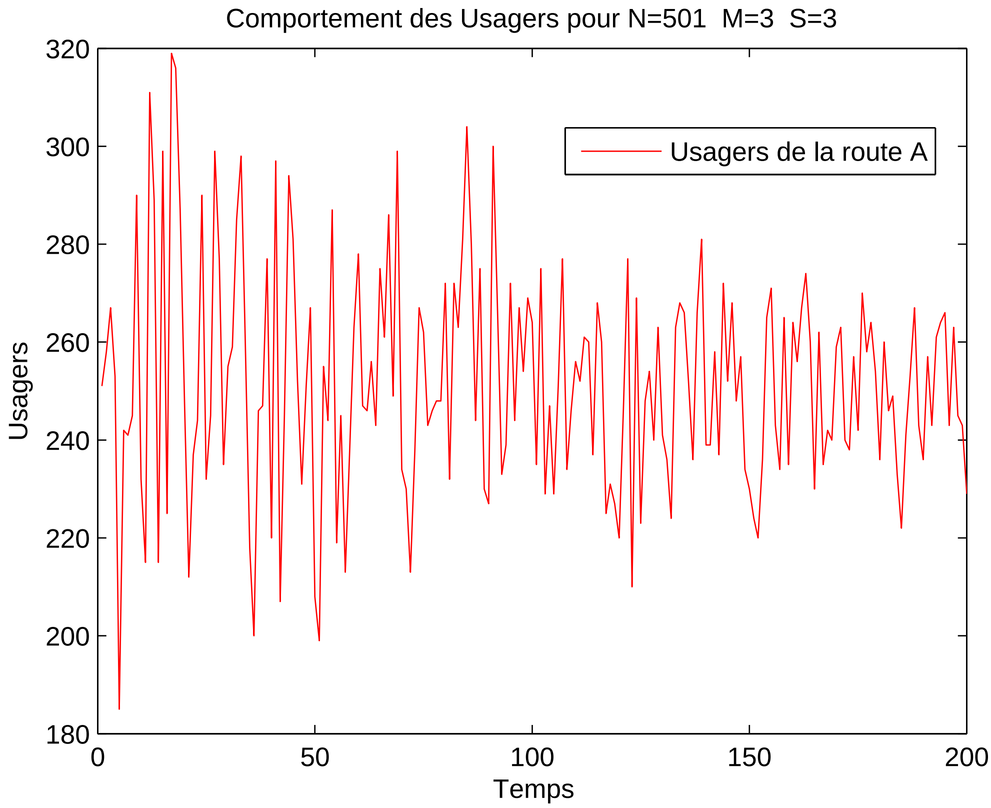
- **Variation par rapport au nombre des stratétigie** $(S)$

Lorsqu'on varie le nombre de stratégies $S$ et on fixe $M = 3$, $N = 501$ et le $T = 200$.

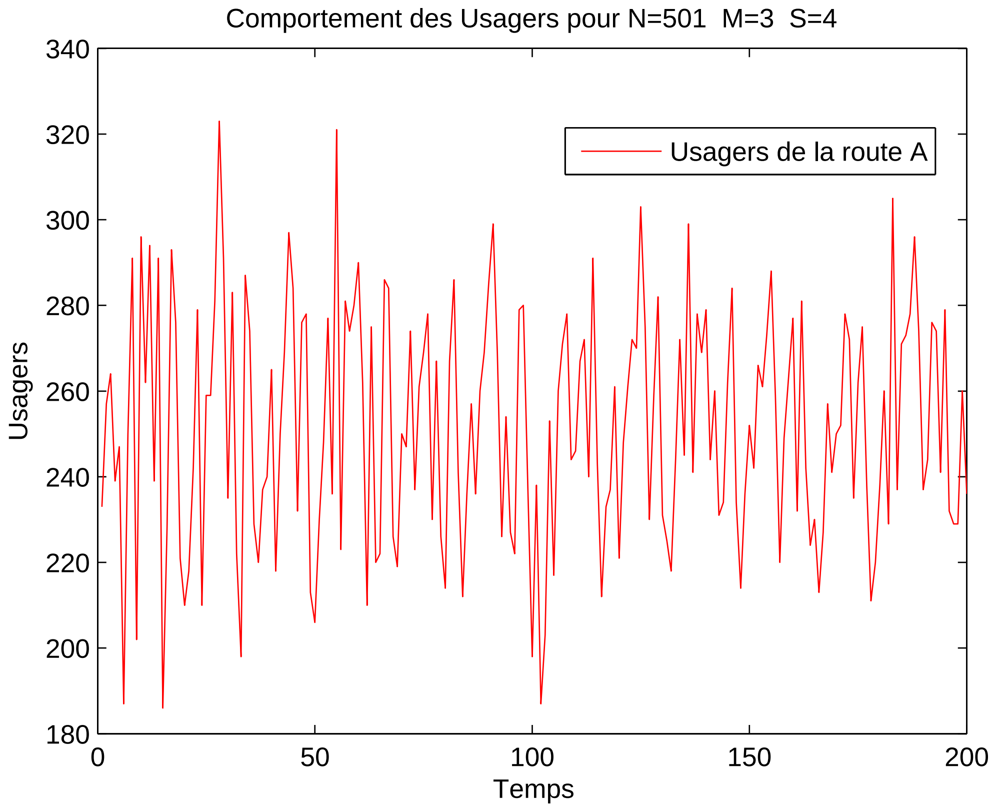
$*$**Pour S=2 :** le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 251.69 et Variance : 383.51



∗**Pour S=3 :** le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 251.81 et Variance : 525.41



$*$**Pour S=4 :** le nombre moyen de joueurs sur la route $A$ est 251.80 et Variance : 747.08




## Interprétation

Nous avons simulé le problème de congestion posé auparavant, en appliquant le modèle du jeu de minorité où on a varié les paramètres de ce modèle comme le montre les figures ci-dessus, nous avons constaté ce qui suit :

- En augmentant la taille $M$ de la mémoire tout en fixant les autres paramètres ($N = 501$, $nbj = 200$ et $S = 2$), nous avons remarqué que l'équilibre de Nash émerge toujours pour toute taille $M$, par contre la variance diminue ce qui signifie que plus la taille de la mémoire est grande y'aurait moins de fluctuations donc moins de changement de route car les joueurs auront suffisamment d'informations qui leurs permettent un bon apprentissage durant le temps et le système devient plus performant
- Lorsqu'on varie le nombre $N$ de joueurs et on fixe les autres paramètres ($M = 3$,

$T = 200$ et $S = 2$), les équilibre de Nash correspondants à chaque $N$ choisit émergent également ; par contre, pour un nombre $N$ de joueurs grand, la variance est grande donc y'a d'énormes fluctuations cela est du au manque d'informations qu'engendre une petite taille de mémoire par rapport à un grand nombre de joueurs .

- Quand on augmente le nombre de fois dont l'expérience est répétés $T$ et en fixant ($M = 3$, $N = 501$ et $S = 2$),, l'équilibre de Nash émerge pour chaque $T$ et la variance diminue, ce qui fait que, chaque fois l'expérience est répétée, les joueurs apprennent et deviennent plus stable dans leurs prises de décisions, ce qui engendre moins de fluctuations et donc un système plus performant.
- En variant le nombre $S$ de stratégies et en fixant $M = 3$, $T = 200$ et $N = 501$, la variance augmente avec l'augmentation du nombre de stratégies cela est du encore à la taille de la mémoire car pour que les joueurs puissent gérer plus de stratégies ils ont besoin de plus d'informations.

Nous avons pu remarquer grâce à la simulation que dans le modèle de jeu de minorité y'a quatre paramètres qui jouent un rôle important sur les performances du système, sont : le nombre $N$ de joueurs, la taille $M$ de la mémoire, le nombre $S$ de stratégies et le nombre de jours dont l'expérience est répétée.

# Conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué le modèle du jeu de minorité sur le problème de congestion dans un réseau routier, en construisant un simulateur du comportements des usagers afin d'etudier les performances de ce modèle.

# Conclusion Générale

L'un des problèmes quotidien qui ronge les villes de par le monde est le problème des embouteillages, un problème qui menace la vitalité des villes et le bien-être des citoyens. Longtemps on a essayé de le résoudre par l'extension des réseaux routiers, mais contrairement à ce qu'on croyait, ceci n'a pas été toujours la bonne solution ; une contradiction qui a été démontrée par le mathématicien allemand Braess d'où le paradoxe qui porte son nom.

Alors, des chercheurs se sont mit à explorer de nouvelles méthodes pour la résolution du problème de la congestion, et sont parvenus à développer des solutions technologiques conçues sur des modèles d'apprentissage basées essentiellement sur le comportement des usagers.
Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à l'étude des performances de l'une des méthodes d'apprentissage descendante de la famille de la théorie des jeux, appelée communement les jeux de minorité.

Le but est d'équilibrer les nombres de passagers sur un réseau routier constitué de deux routes similaires $A$ et $B$, en utilisant le principe des jeux de minorité.

Nous avons construit, un modèle basé sur cette méthode d'apprentissage qui nous a permis d'étudier le comportement de $N$ usagers face aux deux routes $A$ et $B$.

D'après notre modèle d'apprentissage, nous avons constaté que l'équilibre de Nash émerge toujours, quelque soit les changements que le système pourrait subir, alors, la mesure qui peut traduire ses performances est la fluctuation, moins y'a de fluctuations plus le système est performant. Nous avons aussi remarqué que le modèle comporte quatre paramètres de contrôles qui influent sur les fluctuations du système.

- la taille $M$ de la mémoire : l'augmentation de ce paramètre permet aux agents de mieux prédire les bonnes décisions et d'éviter les changements fréquents de routes ce qui diminue la fluctuation.
- Le nombre de tours $T$ : répéter l'expérience un grand nombre de fois permet aux usagers d'apprendre de leurs histoire ce qui engendre une petite fluctuation.
- Le nombre $N$ de joueurs : en augmentant le nombre d'agents, la fluctuation augmente, cela est du au manque d'informations car la taille de la mémoire devient petite par rapport au nombre de joueurs.
- Le nombre $S$ de stratégie : la fluctuation augmente également avec l'augmentation du nombre de stratégies car à cause de la taille de la mémoire, les agents n'auront pas assez d'informations pour gérer plus de stratégies.

# Bibliographie


[1] W. B. Arthur. Inductive reasoning and bounded rationality (the el farol problem). *Amer. Econ. Review (Papers and Proceedings)*, 1994.

[2] D. BRAESS. *uberein Paradoxon aus der Verkehrsplanung Von.* Münster, Eingegangen am 28. März, 1968.

[3] and Y.-C. Zhang C. H. Yeung. *Minority Games.* November 18, 2008.

[4] Garrahan J. P.-Giardina I. Cavagna, A. and Sherrington. A thermal model for adaptive competition in a market. *Physical Review Letter 83*, 1999.

[5] D. Challet and M Marsili. Criticality and finite size effects in a simple realistic model of stock market. *Physical Review E 68, 036132*, 2003.

[6] D. Challet and Y.-C. Zhang. Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A 246*, 1997.

[7] Marsili M. Challet, D. and R Zecchina. Comment on 'thermal model for adaptive competition in a market. *Physical Review Letter 85*, 2000.

[8] Braess D. On a paradox of traffic planning. *Transport Sci*, 39, 2005. Translation of the original German (1968) article by D. Braess, A. Nagurney and T. Wakolbinger.

[9] Dimitris Fotakis. Congestion games with linearly independent paths : Convergence time and price of anarchy. *Theory of Computing Systems*, 47, 2010.

[10] J.-P Giardina.Iand Bouchaud. Bubbles, crashes and intermittency in agent based market models. *Eur. Phys. J. B 31*, 2003.

[11] Thierry Pénard ICI. *La théorie des jeux répété : Application à la concurrence oligopolistique*. ENST Bretagne, 1 Avril 1998.

[12] Hui P. M. Johnson R. Johnson, N. F. and T. S Lo. Self-organized segregation within an evolving population. *Physical Review Letter 82*, 1999.

[13] Frédéric Koessler. *Jeux Répétés*. 22 juillet 2008.

[14] KONIECZNY.S. *Introduction à la théorie des jeux*. Université d'Artois-lens.

[15] SORIN.S LARAKI.R, RENAULT.J. *Bases mathématiques de la théorie des jeux*. Ecole polytechnique, 2013.

[16] Ron Holzman ; Nissan Law-Yone. Strong equilibrium in congestion games. *Games and Economic Behavior*, 21, 1997.

[17] Tristan Tomala Marco Scarsini. Repeated congestion games with bounded rationality. *International Journal of Game Theory*, 41, 2012.

[18] Igal Milchtaich. Congestion games with player-specific payoff functions. *Games and Economic Behavior*, 13, 1996.

[19] M.S.RADJEF. *cours de master 2 Théorie Des Jeux et Stratégies Managériales*. Université Abderrahmane mira de Bejaia.

[20] Marc Plantevit. *Théorie des Jeux : Jeux Répétés*. Lyon 1.

[21] Robert W. Rosenthal. A class of games possessing pure strategy nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2, 1973.

[22] Chi Kin Chau ; Kwang Mong Sim. The price of anarchy for non-atomic congestion games with symmetric cost maps and elastic demands. *Operations Research Letters*, 31, 2003.

[23] Slanina and Y.-C. Zhang. Capital flow in a two-component dynamical system. *Physical Review Letter 82*, 1999.

[24] Branislav L. Slantchev. *Game Theory :Repeated Games*. Department of Political Science, University of California – San Diego, March 7, 2004.

[25] T.Pénard. *cours de théoris des jeux répétés :Master recherche economique*. Faculté de Science Economique, Université de Rennes 1.

[26] C. H. Yeung and Y.-C. Zhang. *Minority Games.* Department of Physics, The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China, 2 Département de Physique, Université de Fribourg, Pérolles, Fribourg, CH-1700 Switzerland, November 18, 2008.

[27] YILDIZOGLU.M. *Introduction à la théorie des jeux.* Dunod, Paris, 2003.

**Résumé** : *Étude du Comportement des Usagers dans un Réseau Routier en utilisant les Jeux de Minorité.*

*Le problème de congestion du trafic est à l'origine de plusieurs conséquences négatives qui menacent la vie des citoyens. L'extension des réseaux routiers ne résout pas forcément ce problème. Dans le cadre de ce travail nous intéressons au jeu de minorité afin de construire un modèle d'apprentissage basé sur l'étude du comportement des usagers. Notre but est d'étudier le comportement d'usagers face à un réseau routier constitué de deux routes similaires A et B. Pour cela nous avons modélisé la situation par un jeu de minorité en premier lieu, puis nous avons construit et implémenté un simulateur sur MATLAB basé sur cette discipline afin d'analyser le comportement des passagers dans le réseau par rapport au changement des paramètres du modèle (mémoire , nombre d'usagers, nombre de tours et nombre de stratégies).*
***Mots clés :*** *congestion, trafic, jeux de minorité, modèle d'apprentissage.*

**Abstract** : *Study of User Behavior in a Road Network using Minority Games.*

*The problem of traffic congestion is the cause of several negative consequences that threaten the lives of citizens. The extension of road networks does not necessarily solve this problem. Within the framework of this work we are interested in minority games in order to build a learning model based on the study of users behavior.Our goal is to study users behavior when facing a road network made up of two similar roads A and B. For this, we modeled the situation using a minority game, then we built and implemented a simulator on MATLAB based on this discipline in order to analyze the behavior of passengers in the network in relation to the change in model parameters (memory, number of users, number of turns, number of strategies).*
***Keywords :*** *congestion, traffic, minority games, learning model . . . .*