République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministére de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche opérationnelle

Mémoire de Master

En

Mathématique Appliquées

Spécialité

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Résolution d'un Problème de Négociation Multicritère : Approche par la théorie des jeux

Présenté par : ARRACHE Dalila et TABTA Karima

Soutenu le 15 Octobre 2020 devant le jury composé de :

Président	Mr. B. BRAHMI	M C A .
Promoteur	Mr. N. KHIMOUM	M C B.
Examinatrice	Mme.K. BOUIBED	M C B .
Examinateur	Mr. S. ZIANI	M C B.

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Allah qui nous a donné la force et le courage de terminer ce modeste travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur $\mathbf{M^r}$ N.Khimoum Maître de conférence classe B, à l'université de Béjaia, pour nous avoir suivies durant la réalisation de ce mémoire, pour sa disponibilité et la patience dont il a fait preuve à notre égard, ainsi que pour ses précieux consiels et la confiance qu'il nous a accordé. Nous ne le remercierons jamais assez pour son aide précieuse qui a été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce travail.

Nous tenons également à remercier les membres de jury : $\mathbf{M^r}$ B.BRAHMI, $\mathbf{M^{me}}$ K.BOUIBED et $\mathbf{M^r}$ S.ZIANI qui ont eu l'amabilité d'examiner ce travail.

Nous remercions tous les enseignants du département Recherche Opérationnelle pour leur rôle important dans notre formation.

Nous remercions nos parents, chacune de nous en son nom, pour nous avoir soutenues.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et à qui je ne pourrais jamais assez exprimer l'amour que je leur porte

A mes chères soeurs, Hanane, Sarah, Amira, lydia, Imane et ma petite princesse Liza

A mon cher et unique frère Tahar

A mes chers tantes, oncles, cousines, cousin

A tous mes chers amis : Sarah

A ma binôme Dalila.

Karima

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et à qui je ne pourrais jamais assez exprimer l'amour que je leur porte

A mes chères soeurs, Kahina, Leila, lynda, Nawel, Nouara et ma petite princesse Maïssa

A mes chers frères Akli, Idir, Youcef et lahssen

A mes chers neveux et mes nièces

A mon fiancé Hamza et tout sa famille

A tous mes chers amis

A ma binôme Karima.

Dalila

Table des matières

Introduction Générale

La théorie des jeux est née en 1928 dans une publication de Vonn Neu-Man, son essor est dû principalement à John Nash [16, 17], un économiste mathématicien dont les travaux ont été récompensées par le prix Nobel d'économie en 1994. Cette théorie a été mise en profit dans plusieurs domaines, tels que la biologie, l'informatique, l'économie,. . . .

L'objet de la théorie des jeux est l'étude des situations où des individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance. Les résultats de ces choix constituent une issue du jeu à laquelle est associé un gain pour chacun des participants. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur, mais également des décisions prises par d'autres participants.

Cependant, les jeux multicritères sont une extension des jeux classiques pour prendre en considération des situations où les joueurs s'intéressent à plusieurs objectifs simultanément [4, 20, 10, 11]. Cette extension est beaucoup plus réaliste, car en pratique il est très rare d'avoir une situation où les agents concernés sont préoccupés par un seul et unique objectif. La principale caractéristique des jeux multicritères est que les fonctions de gain des joueurs sont des fonctions vectorielles. Donc l'optimisation classique ne peut pas être directement appliquée ainsi que le concept de solution défini pour les jeux monocritères. Pour cela, plusieurs concepts d'équilibre ont été introduits ou réadaptés au contexte multicritère pour voir résoudre cette classe de jeu.

L'objectif de ce mémoire est la résolution numérique d'un jeu de négociation multi-critère. Par négociation, nous entendons une situation de prise de décision dans laquelle les agents doivent atteindre une décision à l'unanimité. En absence d'accord unanime, un certain désaccord préspecifié sera le résultat. Pour cela, nous nous sommes basé principalement pour les résoudre sur une procédure proposée par [1], qui utilise le concept de solution équitable. Ce concept de solution est évalué en terme du gain minimal garanti. Pour obtenir l'ensemble des solutions équitables, le vecteur des gains minimal fictif est obtenu en résolvant un nombre fini de problèmes de programmation linéaire.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie des jeux

Introduction

La théorie des jeux est une branche des mathématiques ayant de nombreuses applications en économie, mais également en physique et en biologie. Elle s'intéresse aux interactions entre les individus, appelés "joueurs", qui sont amenés a effectuer des choix dans un ensemble de circonstance, appelé "jeu". Voici une liste de situations dans lesquelles la théorie des jeux peut être appliquée :

— La concurrence entre entreprises.

— La concurrence entre hommes politiques.

— Un jury devant s'accorder sur un verdict.

— Des animaux se battant pour une proie.

— La participation à une enchère.

Comme toute discipline théorique, la théorie des jeux consiste en une collection de modèles. Ces modèles sont alors des abstractions utilisées pour comprendre ce qui est observé où vécu. Ils permettent de prédire l'évolution d'un jeu ou de conseiller les joueurs sur le meilleur coup à jouer.

1.1 Concept de jeu

On appelle jeu, toute interaction entre plusieurs décideurs ayant des intérêts partiellement (ou totalement) opposées, ou chacun est en possession d'un ensemble d'actions parmi lesquelles il fait son choix et dans un cadre défini à l' avance (les règles du jeu), qui permet de déterminer qui peut faire quoi et quand. Une fois que les décideurs (joueurs) ont fait leurs choix, ils reçoivent chacun un gain et ces gains constituent la valeur de ce jeu. On appelle donc joueur tout individu participant à un jeu et l'ensemble de ses actions est dit ensemble de stratégies, où chaque stratégie est une description de la façon dont un joueur entend jouer jusqu'à la fin du jeu.

1.1.1 Joueurs

Un joueur est l'entité de base de la théorie des jeux. On appelle joueur tout individu participant au jeu. Autrement dit, c'est un agent pouvant prendre ses décisions en agissant selon le principe de rationalité et avoir un impact sur l'issue des intactions. Il peut s'agir d'une personne, d'un groupe de personnes, d'une société ou d'un gouvernement.... L'ensemble de tous les joueurs participant au jeu est noté $\mathcal{N}$, chacun étant caractérisé par un indice il, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ où n est le nombre de joueurs.

1.1.2 Notion de stratégies

Une stratégie est la spécification complète du comportement d'un joueur dans n'importe quelle situation d'interaction. La stratégie d'un joueur représente un ensemble d'instructions à sa disposition qui lui indique les actions à choisir dans toutes les situations possibles.

Stratégies pures

Une stratégie pure du joueur i est l'action qu'il choisit à chaque fois qu'il est susceptible de jouer, c'est-à-dire, toutes les options possibles qu'a le joueur. On note par X_i, l'ensemble de toutes les stratégies pures du joueurs i avec $i \in \mathcal{N}$, tel que :$X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}\}$ avec $n_i = |X_i|$.

Stratégies mixtes

Lorsqu'un joueur choisit ses actions de manière aléatoire (on dit qu'il joue en stratégies mixtes). Cette idée est modélisée en introduisant une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures pour chacun des deux joueurs. De tels sous-ensembles sont appelées ensembles de stratégies mixtes.

1.2 Typologie et types de jeux

La littérature tend à classifier entre les jeux selon plusieurs critères :

1.2.1 Comportement des joueurs

On peut distinguer deux types de jeux :

1. **Jeux coopératifs :** un jeu est dit coopératif si les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante où leur stratégie est décidée en commun, afin d'améliorer le gain de tous les joueurs coalisées. C'est le cas par exemple, si les joueurs s'accordent sur un contrat, un accord devant une autorité, etc, où il est prévu une sanction (punition) légale en cas de non respect du contrat ou de l'accord. Dans les jeux coopératifs les actions sont choisis par des coalitions :
   - **Jeux à utilités transférables (UT) :** les gains sont affectés à chaque coalition qui les divise entre ses membres.
   - **Jeux à utilités non transférables (UNT) :** les décisions du groupe dépandent des gains qu'elles rapportent à chacun d'eux.

   En général, dans les jeux à gains transférables, les gains obtenus par une coalition dépendent des actions choisies par les autres coalitions. Ces jeux sont aussi connus sous le nom de : **Jeux a fonction de partition (JFP)**.

• **Jeux sous forme caractéristique (JFC) :**Les gains de chaque coalition dépandent uniquement des actions de chaque coalition. Dans tels jeux, chaque coalition peut être identifiée par le profit qu'elle obtient en choisissant sa meilleure action.

•Tout jeu à utilités transférables peut être représenté sous forme d'un jeu à utilités non transférables avec un continum d'actions.

•Chaque schéma de partage des gains dans le jeu à utilités transférables peut être interprêtre comme une action dans le jeu à utilités non transférables.

•Un jeu à gains transférables est définie par la paire :

$$(\mathcal{N}, u)$$

où

— $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble des joueurs.

— $u : 2^{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique.

— pour tout sous ensemble $C \subseteq \mathcal{N}$, u(C) est le montant que les membre de C peuvent gagner en agissant collectivement.

— Habituellement, on suppose que v est :

  ⋆ normalisée : $u(\emptyset) = 0$

  ⋆ non négativité : $u(C) \geq 0$ pour tout $C \subseteq \mathcal{N}$

  ⋆ monotone : $u(C) \leq u(D)$ Pour tout C, D tels que $C \subseteq D$

— Une coalition est tout sous ensemble de $\mathcal{N}$.

Il y a deux propriétés fondamentales que doit vérifier une structure de coalitions pour jouir de la stabilité :

— **Stabilité intérieure :**Une coalition est intérieurement stable, si aucun membre de la coalition a intérêt a la quitter. Formellement, une coalition C est intérieurement stable, si aucun joueur $i \in C$ a intérêt à quitter individuellement C pour rejoindre la frange $I \setminus C$ des joueurs restants.

  Autrement dit, si :

$$\forall i \in C, u_i(C) \geq u_i(C \backslash i)$$

où $u_i(C)$ est le gain du joueur i en étant dans C et $u_i(C \backslash i)$ est le gain du joueur i en quittant la coalition C.

— **Stabilité extérieure :**Une coalition est extérieurement stable, si aucun joueur $j \notin I$ qui n'est pas dans une coalition n'a intérêt à rejoindre individuellement cette coalition. Formellement, une coalition C est extérieurement stable, si aucun joueur $j \notin C$ n'a intérêt à rejoindre C

Autrement dit, une coalition $C \subseteq I$ est extérieurement stable, si :

$$\forall j \notin C, u_j(C \bigcup j) < u_j(C)$$

où $u_j(C)$ est le joueur j en étant à l'extérieure de C et $u_j(C \bigcup j)$ est le gain de joueur j en rejoignant la coalition C.

2. **Jeux non coopératifs :** on appelle jeu non coopératif, un jeu, où les joueurs ne peuvent pas former de coalition. Par contre, ils peuvent communiquer entre eux et échanger des informations, se mettre d'accord sur telle ou telle issue sans jamais contracter d'accord contraignant.

1.2.2 La nature de l'information

L'information dont on dispose chaque fois qu'on doit choisir une action est une dimension très importante des jeux. Elle possède une influence déterminante sur l'évaluation des stratégies par les joueurs et même sur leur perception des stratégies. Selon la nature de l'information, on distingue quatre types de jeu :

1. **Jeu à information parfaite :** Un jeu est à information parfaite, si chaque joueur, au moment de choisir sa stratégie, a une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. La représentation qui semble appropriée à ce type de jeux est la forme extensive.

2. **Jeu à information imparfaite :** Contrairement au type précédent, ici les joueurs n'interviennent pas les uns après les autres. Autrement dit, les règles du jeu stipulent

l'existence de coups simultanés, ce qui revient à introduire une certaine imperfection au niveau de l'information dont disposent les joueurs. La représentation qui apparait comme la plus appropriée pour chaque coup est la forme normale.

3. **Jeu à information incomplète :**On dit qu'un jeu est à information complète si chaque joueur connaît lors de la prise de décision : l'ensemble des joueurs, l'ensemble de ses stratégies ainsi que l'ensemble des stratégies des autres joueurs et les motivations ou les fonctions objectives de tous les autres joueurs. Dans ce cas, on dit aussi qu'il y a connaissance commune de la structure du jeu de la part de tous ceux qui y participent.

4. **Jeu à information complète :** Si l'une des conditions dans la définition précédente n'est pas vérifiée, le jeu est dit à information incomplète. Un travail de pionnier a été réalisé par J. Harsanyi (1967-1968). Dans ses articles, l'auteur montre que si l'on suppose que chaque joueur dispose d'une distribution de probabilités subjectives sur les caractéristiques inconnues des autres joueurs, alors on peut transformer un jeu d'information incomplète en un jeu d'information complète mais imparfaite. Le système imaginée par Harsanyi pour traduire l'incertitude mathématique est pris en compte par l'introduction d'un événement liée à la nature qui représente un joueur fictif et qui n'intervient qu'avant le début du jeu. endenumerate

1.2.3 Nombre de coups

Selon l'ordre dans lequel les joueurs annoncent leurs stratégies, il existe deux principales formes de représentation du jeu :

(a) **Jeu sous forme normale :** Un jeu sous forme normale est la donnée de l'ensemble des joueurs, de l'ensemble des stratégies pour chaque joueur et des gains associés à toute combinaison possible de stratégies. La forme normale est adaptée à la représentation des jeux simultanés (à un seul coup).

Définition 1.2.1. [12] Un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme suivante :

$$J_{\mathcal{N}} =< \mathcal{N}, \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{f_i\}_{i\in\mathcal{N}} > \tag{1.1}$$

où

i. $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ est l'ensemble des protagonistes appelés joueurs. Un joueur quelconque est désigne par l'indice i, $i \in \mathcal{N}$

ii. $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, i \in \mathcal{N}$: désigne l'ensemble de stratégie du i^{eme} joueur.

iii. On note par : $x = (x_i, x_{-i}) \in X = \prod_{i\in\mathcal{N}} X_i$ une issue, situation, état ou profil du jeu, où :
x_i : est la stratégie du joueur i et $x_{-i} = x_{\mathcal{N}\setminus i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$: une situation du jeu qui contient les stratégies de tout les joueurs sauf celle de i^{eme}.

iv. $f_i : X = X_1 \times \ldots \times X_{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{N}$, est la fonction gain du i^{eme} joueur.

v. chaque joueur connaît les ensembles de stratégies et les fonctions de gain de tous les autres joueurs(information complète).

(b) **Jeu sous forme extensive :** Un jeu est appelé ainsi, lorsque les règles du jeu stipulent que les joueurs interviennent les un après les autres, dans un ordre précis et que le nombre d'actions parmi lesquelles leurs choix s'exercent est fini . R. Selten en 1975 a popularisée une représentation arborescente et plus intuitive de ce type de jeux : la forme extensive. Il s'agit d'un arbre (appelée aussi arbre de Kuhn(1953) formée d'une racine, de noeuds où chaque noeud de l'arbre spécifie le joueur qui doit choisir une action à ce moment du jeu, ainsi que l'information dont chaque joueur dispose lors de la prise de décision. Les gains que chaque joueur peut réaliser après avoir suivi un chemin possible au sein de l'arbre sont donnés aux noeuds terminaux.

Exemple 1.2.1. Vous jouez avec votre camarade à un jeu de boules. Vous avez à Choisir entre deux couleurs : Rouge (R) ou Noire (N). Voici les régales du jeu :

• Si vous jouez (R), vous gagnez 7 points quelle que soit la couleur jouée par votre camarade. Ce dernier gagnerait 3 points s'il joue (N) et 4 points s'il joue (R).

• Si vous jouez (N) et que votre camarade joue également (R), vous gagnerez 10 points et lui 5 points.

• Si vous jouez (N) et que votre camarade joue (N), vous gagnerez 3 points et lui 4 points.

Quelle couleur choisissez-vous ? On distinguera le cas, ou

• Le joueur 1 joue en premier, mais n'informe pas le joueur 2 de ses choix.

On représente le jeu sous forme de l'arbre de Kuhn

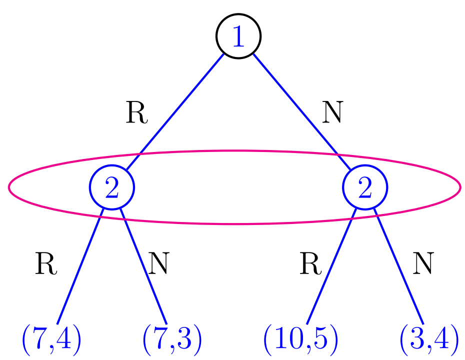

FIGURE 1.1 – Le joueur 1 n'informe pas le joueur 2

On distinguera le deuxième cas, où

• Le joueur 1 joue en premier et informe le joueur 2 de ses choix.

On représente le jeu sous forme de l'arbre de Kuhn

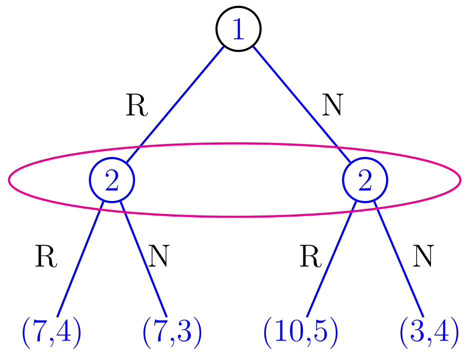

FIGURE 1.2 – Le joueur 1 informe le joueur 2

1.2.4 Jeux matriciels

Un jeu matriciel est un jeu fini à deux joueurs, simultané à un seul coup, à somme nulle et avec des ensembles de stratégies des joueurs dénombrables. Il est entièrement défini par les données de la matrice des gains de l'un des joueurs. Un jeu matriciel se présente comme suit :

$$< X_1, X_2, A >, \tag{1.2}$$

où $X_1 = \{x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1\}$: est l'ensemble des stratégies du joueur 1.
$X_2 = \{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2\}$: est l'ensemble des stratégies du joueur 2.
A : La matrice des gains pour le joueur 1 où de perte pour le joueur 2.

1.2.5 Nombre de stratégies

(a) **Jeu fini :**

Définition 1.2.2. [21] le jeu sous forme normale défini par la relation (1.1) est dit fini, si les ensembles de stratégies $X_i, \forall i \in \mathcal{N}$ sont des ensembles finis $(| X_i |) < \infty, \forall i \in \mathcal{N})$

(b) **Jeu fini à deux joueurs :** Un jeu fini à deux joueurs est un jeu qui a un ensemble de joueurs réduit à deux, et l'ensemble des stratégies de chaque joueur est fini. Ce jeu est défini comme suit :

$$< X_1, X_2, f_1, f_2 > \tag{1.3}$$

où

X_1 : est l'ensemble des stratégies du premier joueur.

X_2 : est l'ensemble des stratégies du deuxième joueur.

f_1 :est la fonction de gain du premier joueur.

f_2 :est la fonction de gain du deuxième joueur.

Remarque 1.2.1. Les jeux fini à deux joueurs occupent une place privilégiée en théorie des jeux, puisqu'ils permettent une représentation simple et pédagogique des principales questions posées en théorie des jeux.

(c) **Jeu fini à deux joueurs à somme nulle :** si dans le jeu fini à deux joueurs défini dans (1.2) la somme des gains des deux joueurs est nulle en toute situation du jeu $(f_1(x) + f_2(x) = 0, \forall x \in X)$,

on dit que le jeu (1.2) est un jeu fini à deux joueurs à somme nulle. Il sera noté par :

$$< X_1, X_2, f > \tag{1.4}$$

où $f = f_1 = -f_2$ est la fonction que le joueur 1 veut maximiser et que le joueur 2 veut minimiser.

Remarque 1.2.2. Les jeux à deux joueurs et à somme nulle constituent une classe certes intéressante, mais trés particuliére dans le sens où les joueurs n'accordent aucune coopération entre les joueurs, puisque le gain d'un joueur représente la perte du second.

(d) **Jeu fini à deux joueurs à somme non nulle :** Si dans le jeu fini a deux joueurs défini dans (1.2) la somme des gains des deux joueurs est non nulle en toute situation du jeu $(f_1(x) + f_2(x) = c^{ste}, \forall x \in X)$ on dit que le jeu (1.2) est un jeu fini à 2 joueurs a somme non nulle.

Définition 1.2.3. [21] Une stratégie mixte pour le joueur 1 dans le jeu (1.3) est un élément du simplexe défini par :

$$\triangle_m = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1,m}\} \tag{1.5}$$

et une stratégie mixte pour le joueur 2 dans le jeu (1.3) est un élément de simplexe défini par :

$$\triangle_n = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1, \beta_j \geq 0, \forall j = \overline{1,n}\}. \tag{1.6}$$

1.3 Concepts de solutions

En théorie des jeux et en théorie économique, un concept de solution est un processus par lequel les équilibres d'un jeu sont identifies. Ils sont donc employées comme des prédictions de jeu, suggérant quel sera le résultat du jeu, c'est-à-dire quelles stratégies seront ou pourront être employées par les joueurs.

Définition 1.3.1 (Notion d'équilibre)**.** [15] Par équilibre, nous entendrons un état ou une situation dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier son comportement compte tenu du comportement des autres joueurs. De façon plus précise, un équilibre est une combinaison de stratégies telle qu'aucun des joueur n'a d'intérêt à changer sa stratégie compte tenu des stratégies des autres joueurs. Une fois que l'équilibre est atteint dans un jeu (peu importe la manière dont il a été obtenu), il n'y aucune raison de le quitter. Dans le cadre des jeux non coopératifs, il existe deux grands concepts d'équilibre : les équilibres de Nash et de Stackelberg. Ils se distinguent, entre autre, dans la structure implicite du jeu : si celui de Nash est compatible avec l'hypothèse de joueurs jouant simultanément, l'équilibre de Stackelberg implique généralement un ordre, une hiérarchie entre les joueurs.

1.3.1 Equilibre de Nash

L'équilibre de Nash est basé sur le principe de rationalité individuelle. Il s'agit d'un état dans lequel aucun joueur ne souhaite changer sa stratégie en tenant compte des stratégies choisies par les autres joueurs. Donc aucun des joueurs ne peut, en changeant unilatéralement de stratégie, augmenter son niveau d'utilité.

Définition 1.3.2. [22] Une issue $x^* \in X$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu (1.1), si :

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*) \;\; \forall x_i \in X_i, \;\; \forall i \in \mathcal{N}. \tag{1.7}$$

1.3.2 Equilibre de Pareto : rationalité collective

Une issue $\overline{x} \in X$ est une décision maximale de pareto de jeu (1.1), s'il n'existe pas d'autre issue $x \in X$ qui vérifie le systéme d'inégalité :

$$f_i(x) \geq f_i(\overline{x}) \;\; \forall i \in \mathcal{N}. \tag{1.8}$$

dont au moins une inégalité est stricte. On dit que $\overline{x} \in X$ vérifie la condition de la rationalité cellective.

1.3.3 Point-Selle

Définition 1.3.3. [22] Une issue$(x^1_{i*}, x^2_{j*}) \in X_1 \times X_2$ est un équilibre de Nash du jeu matriciel : $A = (a_{ij})_{i\in I, j\in J}$(1.2), si :

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \;\; \forall i \in I, \;\; \forall j \in J. \tag{1.9}$$

Dans ce cas, l'issue(x^1_{i*}, x^2_{j*}) est souvent appelée point-selle du jeu matriciel A et $a_{i^*j^*}$ valeur du jeu.

1.3.4 Stratégie de sécurité

Le concept de solution dans jeu est basé sur le scénario le plus défavorable, ou un joueur suppose que tous les autres choisissent leurs stratégies, en réponse à sa stratégie choisie, avec l'objectifs d'atteindre une situation du jeu qui engendre la plus petite valeur de la fonction de gain. La valeur de la fonction de gain dans une telle situation est appelée niveau de sécurité correspondant à la stratégie de joueur. La stratégie de sécurité pour un joueur est la stratégie qui lui engendre le meilleur niveau de sécurité.

Définition 1.3.4. [22] une stratégie $x^i \in X_i$ est dite stratégie de sécurité de joueur i dans un jeu (1.1) si :

$$x^i = \arg\max_{x_i} \min_{x_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) \tag{1.10}$$

Définition 1.3.5. [22] une stratégie maxmin $x_{1i} \in X_1$ du joueur P1 dans le jeu matriciel A est défini par :

$$\underline{V}(A) = \min_{j \in J} a_{i*j} = \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} \tag{1.11}$$

V(A) est appelé valeur inférieure du jeu A, où encore gain de sécurité du joueur P1 et la stratégie x_{1i} est souvent appelé stratégie de sécurité du joueur P2.

Exemple 1.3.1.

	x_{21}	x_{22}	x_{23}	min_j	max_i
x_{11}	1	0	3	0	
x_{12}	2	1	4	1	1

La stratégie maxmin(sécurité) du joueur P1 est donc x_{12} et la valeur inférieure du jeu $\underline{V} = 1$.

Définition 1.3.6. [22] une stratégie minmax $x_{2j} \in X_2$ du joueur P2 dans le jeu matriciel A est défini par :

$$\overline{V}(A) = \max_{i \in I} a_{ij*} = \min_{j \in J} \max_{i \in I} a_{ij} \tag{1.12}$$

$\overline{V}(A)$ est appelé valeur supérieure du jeu A, $-V(A)$ est appelé gain de sécurité du joueur P2 et la stratégie x_{2j} est souvent appelé stratégie de sécurité du joueur P2.

Exemple 1.3.2.

	x_{21}	x_{22}	x_{23}	min_j	max_i
x_{11}	1	0	3	0	
x_{12}	2	1	4	1	1
max_i	2	1	4		
min_j		1			

La stratégie minmax (sécurité) du joueur P2 est donc x_{22} et la valeur supérieure du jeu $\overline{V}(A) = 1$. comme :

$$\underline{V}(A) = 1 = \overline{V}(A)$$

Alors le jeu matriciel A admet une valeur du jeu $\overline{V}(A) = 1$

Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre queqlues définitions des notions de base de la théorie des jeux, ensuite nous avons introduit les jeux matriciels (1.2) et on a vu les notions fondamentales les concernant et les concepts de solutions.

Chapitre 2

Optimisation multicritère

Introduction

Les jeux multicritère ont été introduits par Blackwell en 1956. Ils sont très utiles dans le sens où ils modélisent des situations plus réalistes que les jeux monocritères. Les jeux multicritère sont caractérisés par des fonctions de gains vectorielles et nécessitent donc pour leur étude d'autres outils que ceux utilisés pour l'étude des jeux monocritères. Nous allons dans ce qui suit présenter les notions clées concernant cette classe de jeux.

2.1 Problème multicritère

Un problème multicritère se présente souvent sous la forme suivante :

$$P =< X, F > \tag{2.1}$$

où X : est l'ensemble des décisions.

F : est une fonction vectorielle à optimiser, avec :

$$F : X \to \mathbb{R}^p \tag{2.2}$$

$$x \mapsto F(x) = (F_1(x), \ldots, F_p(x)) \longleftarrow max \tag{2.3}$$

Nous supposons sans perte de généralité que les p critères de ce problème sont à maximiser (les fonctions $F_i(x), i = \overline{1,p}$ sont toutes à maximiser).

2.2 Relations de dominance

Pour comparer des vecteurs, les relations d'ordre usuelles $<, >, \leq$ *et* $\geq$ ne sont pas suffisantes[21]. Pour se faire, il existe d'autres relations d'ordre spécialement connues pour permettre la comparaison entre deux vecteurs de même taille. Ces relations sont appelées "relations de dominance".

Pour deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, nous avons les relations d'ordre suivantes :

• **Dominance faible :** On dit que x domine faiblement y et on note $x \geqq y$ si :

$$x_i \geq y_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.4}$$

• **Dominance au sens de Pareto :** On dit que x domine y au sens de Pareto et on note $x \succeq y$ si

$$x_i \geqslant y_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad et \quad x \neq y. \tag{2.5}$$

• **Dominance Stricte :** On dit que x domine strictement y et on note $x \succ y$ si

$$x_i > y_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.6}$$

2.3 Concepts d'optimalité

En l'absence de décision optimale maximisant tous les objectifs en optimisation multicritère, des concepts pour identifier les meilleurs compromis entre ces objectifs sont nécessaires [21].

En se basant sur les relations de dominance présentées plus haut, plusieurs concepts d'optimalité ont été définis pour ce type de problèmes. Nous allons en présenter quelques uns dans ce qui suit :

(a) **Optimalité de Pareto :** Une décision de Pareto est optimale dans le sens où il n'existe pas d'autres solution dans l'ensemble de décision capable d'améliorer la valeur d'un critère sans en détériorer au moins la valeur d'un autre.

Définition 2.3.1. (Décision optimale de Pareto) [21]Une décision $x^* \in X$ est dite optimale de Pareto (ou encore efficace ou non dominée) dans le problème (2.1), s'il n'existe pas une autre décision $x \in X$, telle que :

$$F(x) \succeq F(x^*). \tag{2.7}$$

(b) **Optimalité de Slater (faible) :** Une décision de Slater est optimale dans le sens où il n'existe pas d'autres solution dans l'ensemble de décision capable d'améliorer tous les critères simultanément. Ce concept d'optimalité est plus faible que celui de Pareto.

Définition 2.3.2. (Décision optimale de Slater) [21]Une décision $x^* \in X$ est dite optimale de Slater (ou faiblement efficace) du problème (2.1), s'il n'existe pas une autre décision $x \in X$, telle que :

$$F(x) \succ F(x^*). \tag{2.8}$$

2.4 Problème multicritère avec plusieurs décideurs

Considérons à présent le problème multicritère suivant :

$$P =< X, \mathbf{F} > \tag{2.9}$$

où X : est l'ensemble des décisions.

$\mathbf{F}$: est une fonction vectorielle à optimiser, avec :

$$\mathbf{F} : X \to \mathbb{R}^{M \times N} \tag{2.10}$$

$$x \mapsto \mathbf{F}(x) = (\mathbf{F}^1(x), \ldots, \mathbf{F}^N(x))^T \tag{2.11}$$

où $\mathbf{F}^i(x) = (\mathbf{F}^i_1(x), \mathbf{F}^i_2(x), \ldots, \mathbf{F}^i_M(x)), \quad i = \{1, \ldots, N\}$.

Cependant, les relations de dominance entre points de $\mathbb{R}^N$ ne sont pas suffisantes pour comparer entre des points de $\mathbb{R}^{M\times N}$ et il est nécessaire de considérer des relations de dominance plus générales. Ces relations de dominance doivent présenter une certaine propriété d'efficacité ou de non-dominance, de sorte qu'une amélioration supplémentaire ne peut être possible. Nous utiliserons les concepts d'optimalité de Pareto et de Slater définis précédement pour les vecteurs, pour des extensions aux matrices.

Pour deux matrices $x, y \in \mathbb{R}^{M\times N}$, nous avons les relations d'ordre suivantes :

Dominance faible On dit que x domine faiblement y et on note $x \geq y$ si

$$x_{ij} \geqq y_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, M\}. \tag{2.12}$$

Dominance au sens de Pareto On dit que x domine y au sens de Pareto et on note $x \geq y$ si

$$x_{ij} \geq y_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, M\} \ \ et \ \ x \neq y. \tag{2.13}$$

Dominance Stricte On dit que x domine strictement y et on note $x > y$ si

$$x_{ij} > y_{ij} \ \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, M\}. \tag{2.14}$$

Définition 2.4.1. [21]On dit qu'une matrice $x \in Q \subseteq \mathbb{R}^{M\times N}$ est optimale au sens de Pareto dans Q, s'il n'existe pas une matrice $y \in Q$, telle que $y \geq x$.

Définition 2.4.2. [21]On dit qu'une matrice $x \in Q \subseteq \mathbb{R}^{M\times N}$ est optimale au sens de Slater dans Q, s'il n'existe pas une matrice $y \in Q$, telle que $y > x$.

Définition 2.4.3. [21]Pour deux matrices $x, y \in Q \subseteq \mathbb{R}^{M\times N}$. On dit que la matrice x est c-préférable à y, et on note $x \geq_c y$, si $x \geqq y$ et il existe un $j \in \{1, 2, \ldots, M\}$, tel que $x_j > y_j$.

2.5 Méthode du simplexe multiobjectif

Considérons le P.L. multiobjectif suivant :

$$\begin{aligned} &\max_x Cx \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

où, A et C sont des matrices de dimensions $m \times n$, $p \times n$ respectivement et $b \in \mathbb{R}^m$ et x est un n-vecteur.

Le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est une solution réalisable du problème si et seulement si les contraintes $Ax = b$ et $x \geq 0$ sont satisfaites, soit F_d l'ensemble des solutions réalisables

$$F_d = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}.$$

La méthode simplexe multiobjectif [6] peut être utilisée pour générer une représentation exacte de l'ensemble des solutions non dominées. Cela se fait en passant d'un point extrême non dominé à des points extrêmes non dominés adjacents jusqu'à ce que tous les points extrêmes non dominés aient été trouvés.

2.5.1 Tableaux du simplexe multiobjectif

La méthode simplexe multiobjectif utilise un tableau simplexe multiobjectif, qui est une version augmentée des tableaux du simplexe monoobjectif [7]. Un tableau simplex multiobjectif pour un problème avec $(n + m)$ variables de décision (dont m variables d'écart, m contraintes et p objectifs) est présenté sous la forme suivate (Table 2.1).

Définition 2.5.1. on appelle base du problème tout sous matrice carrée A_B=$A(I, J_B)$ telque : $det(A_B) \neq 0$

	a_1	a_2	$\dots$	a_n	a_{n+1}	$\dots$	a_{n+m}	b
c_j^1	c_1^1	c_2^1	$\dots$	c_n^1	0	$\dots$	0	0
c_j^2	c_1^2	c_2^2	$\dots$	c_n^2	0	$\dots$	0	0
$\vdots$								
c_j^p	c_1^p	c_2^p	$\dots$	c_n^p	0	$\dots$	0	0
base								
fonction								
f_j^1	f_1^1	f_2^1	$\dots$	f_n^1	f_{n+1}^1	$\dots$	f_{n+m}^1	$f_0^1 = Z_1$
f_j^2	f_1^2	f_2^2	$\dots$	f_n^2	f_{n+1}^2	$\dots$	f_{n+m}^2	$f_0^2 = Z_2$
$\vdots$								
f_j^p	f_1^p	f_2^p	$\dots$	f_n^p	f_{n+1}^p	$\dots$	f_{n+m}^p	$f_0^p = Z_p$

TABLE 2.1 – Tableau type du Simplexe Multiobjectif

Théorème 2.5.1. *[6]Étant donné une solution réalisable basique courante. S'il existe une colonne non basique a_j, $j \in J_N$ tel que $f_j^k \leq 0$ pour $k = \{1, 2, \dots, p\}$, et $f_j^k < 0$ pour au moins un $k = \{1, 2, \dots, p\}$, alors la solution réalisable basique courante est dominée.*

Théorème 2.5.2. *[6]Étant donné une solution réalisable basique courante. S'il existe une colonne non basique a_j, $j \in J_N$ tel que $f_j^k \geq 0$ pour $k = \{1, 2, \dots, p\}$ et $f_j^k > 0$ pour au moins un $k = \{1, 2, \dots, p\}$, alors l'introduction de a_j dans la base conduira à une solution dominée.*

Théorème 2.5.3. *[6]Étant donné une solution réalisable basique courante. S'il existe deux colonnes différentes a_j et a_q, $j, q \in J_N$ non basiques telles que :*

$$\theta_j f_j^k \leq \theta_q f_q^k,\ k = \{1, 2, \dots, p\}, \tag{2.16}$$

où l'inégalité (2.16) est satisfaite comme une inégalité stricte pour au moins un $k = \{1, 2, \dots, p\}$, alors la solution réalisable basique résultant de l'introduction de a_q dans la base courante est dominée par la solution réalisable basique résultant de *l'introduction de a_j dans la base courante.*

2.5.2 Problème auxiliaire

Les théorèmes (2.5.1), (2.5.2) et (2.16) sont à la base de l'algorithme du simplexe multiobjectif [25]. Un outil nécessaire pour l'algorithme est une méthode qui permet de déterminer la non-dominance d'une solution réalisable basique donnée. L'algorithme emploie un sous-problème à cet effet. Le sous-problème tente de trouver une solution réalisable qui améliore la valeur d'au moins un objectif, sans affecter un autre objectif d'une valeur inférieure à celle fournie par la solution réalisable basique courante. Si une telle solution réalisable peut être trouvée, alors la solution basique courante est dominée, sinon, elle est non dominée.

Considérons la solution réalisable basique courante $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_{n+m})$, où $\widehat{x}_j > 0$, $j = \{1, 2, \ldots, m\}$ et $\widehat{x}_j = 0$, $j = \{m+1, m+2, \ldots, n\}$.
Soit le problème suivant :

$$\max V = \sum_{k=1}^{p} \delta_k \tag{2.17}$$

$$x \in F_d \tag{2.18}$$

$$Z_k(x) \geq Z_k(\widehat{x}), k = \{1, 2, \ldots, p\} \tag{2.19}$$

$$\delta_k \geq 0, k = \{1, 2, \ldots, p\} \tag{2.20}$$

où (2.18) exige que les contraintes du problème (2.5.1) soient satisfaites et (2.19) exige que la nouvelle solution réalisable fournisse au moins une valeur pour chaque objectif que celle fournie par la solution courante testée.
Le but du problème auxiliaire est d'améliorer chaque objectif d'une valeur aussi élevée que possible. Pour cela, on considère la conversion de l'inégalité (2.19) en contraintes d'égalité :

$$Z_k(x) - \delta_k = Z_k(\widehat{x}),\ k = \{1, 2, \ldots, p\}, \tag{2.21}$$

Conséquences

En résolvant le problème (2.17)-(2.20), deux cas peuvent se présenter :

- $V = 0$, alors la solution réalisable basique $\widehat{x}$ du problème multiobjectif original est non dominée. Ce qui signifie qu'il n'y a pas de solutions réalisables qui améliorent un objectif ($\delta_k > 0$), sans affecter d'autres objectifs de valeurs inférieurs.
- $V > 0$, alors $\widehat{x}$ est dominée. Ce qui implique que $\delta_k > 0$ pour au moins un $k = \{1, 2, \ldots, p\}$. Donc au moins un objectif peut être amélioré sans affecter d'autres objectifs de valeurs inférieurs.

Notons que δ_k ne peut pas être négatif (2.20).

2.5.3 Algorithme du simplexe multiobjectif

L'algorithme du simplexe multiobjectif est résumé dans les étapes suivantes :[6]

Etape 1 : Trouver une base réalisable initiale ? S'il en existe pas, alors terminer, sinon aller à **l'étape 2**.

Etape 2 : Poser $h = 1$ et $r = 0$. Déterminer la solution réalisable basique initiale x^h et aller à **l'étape 3A**.

Etape 3A : Vérifier si x^h maximise un objectif donné ? Si oui, aller à **l'étape 3B**. sinon, aller à **l'étape 4**

Etape 3B : Rechercher des variables non basiques avec $f_j^k = 0$. Si x^h est unique, alors x^h est dominée, aller à **l'étape 6**, sinon aller à **l'étape 3C**.

Etape 4 : Rechercher les colonnes non basiques avec les coûts réduits non positifs. S'il en existe pas, alors x^h est dominée, aller à l'**étape 11**, sinon, aller à **l'étape 5**.

Etape 5 : Résoudre le problème de non dominance de x^h. Aller à **l'étape 6**.

Etape 6 : Incrémenter le nombre r de solutions non dominées. Aller à **l'étape 7**.

Etape 7 : Rechercher des colonnes non basiques dominantes. S'il en existe, alors aller à **l'étape 11**, sinon vérifier si x^h est dominée, si oui aller à **l'étape 8A**, sinon aller à **l'étape 8B**.

Etape 8A : Chercher les colonnes non basiques qui ont des coûts réduits positifs et les colonnes non basiques qui ont des coûts réduits négatifs. Aller à **l'étape 9**.

Etape 8B : S'il n'existe pas de solution non dominée (r = 0), alors **l'étape 8A**, aller à **l'étape 10**.

Etape 9 : Stocker les colonnes non basiques qui ont des coûts réduits positifs et les colonnes non basiques qui ont des coûts réduits négatifs. Aller à **l'étape 10**.

Etape 10 : Vérifier s'il exite une base non explorée ? si oui aller à **l'étape 12**, sinon arrêter l'algorithme.

Etape 11 : vérifier si une de ces colonnes avec des coûts réduits non positifs conduit à une base inexplorée ? si oui, aller à **l'étape 12**, sinon aller à **l'étape 10**.

Etape 12 : Introduite dans la base une solution inexplorée pour obtenir une nouvelle solution. Incrémenter h et aller à **l'étape 2**.

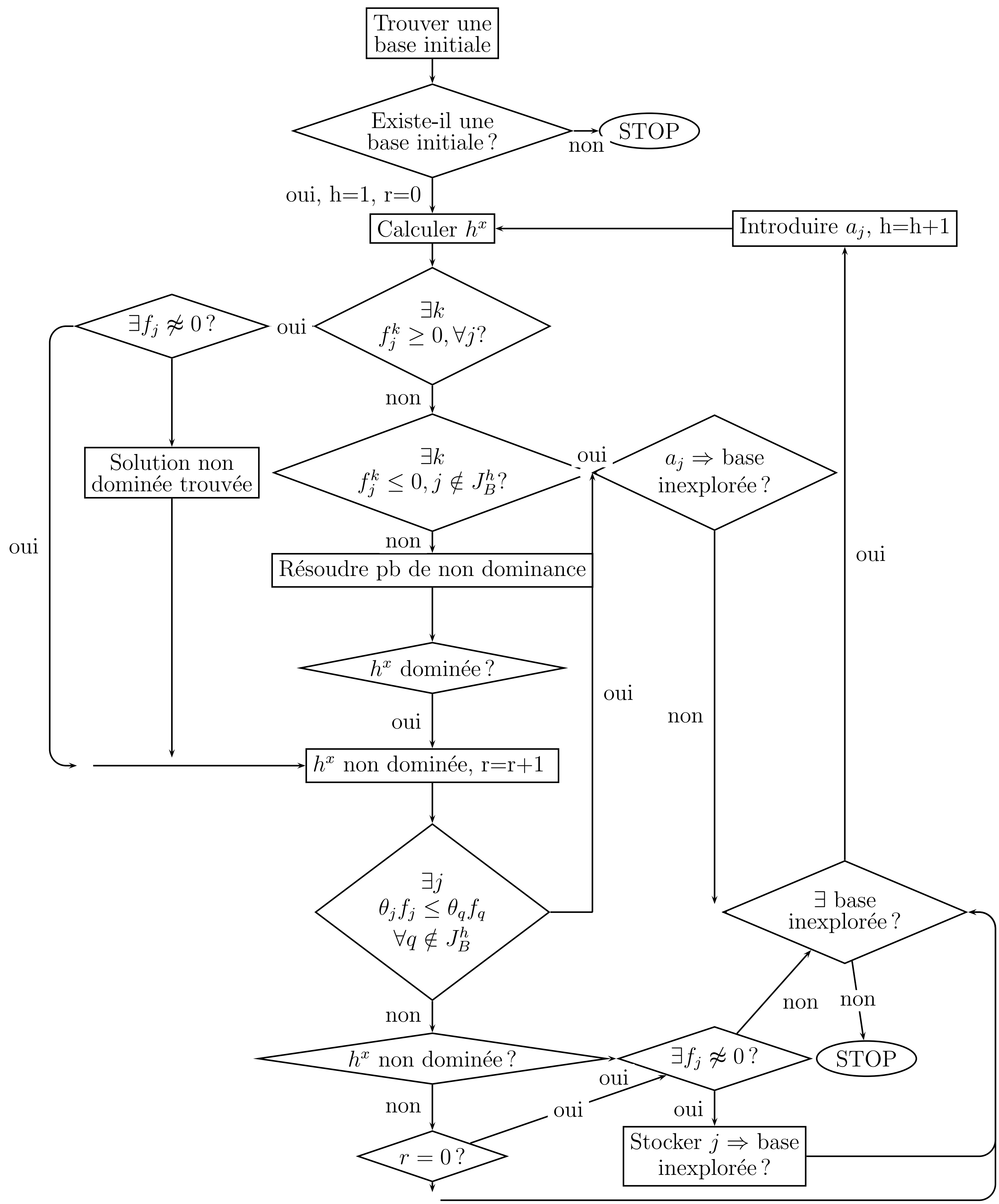

Figure 2.1 – Algorithme du Simplexe Multiobjectif

2.6 Exemple Numérique

[6] L'exemple de problème avec les variables d'écart introduites dans les contraintes est :

$$max[Z_1(x_1, x_2), Z_2(x_1, x_2)] \tag{2.22}$$

$$Z_1(x_1, x_2) = 5x_1 - 2x_2 \tag{2.23}$$

$$Z_2(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2 \tag{2.24}$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 3 \tag{2.25}$$

$$x_1 + x_2 + +x_4 = 8 \tag{2.26}$$

$$x_1 + x_5 = 6 \tag{2.27}$$

$$x_2 + x_6 = 4 \tag{2.28}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \tag{2.29}$$

Une base initiale pratique est $B^1 = (a_3, a_4, a_5, a_6)$ c'est à dire, la solution de base réalisable constituée de toutes les variables de décision de problème .
Dans la pratique, il est sans aucun doute préférable de démarrer l'algorithme avec une solution qui maximise l'un des objectifs individuellements.
Le tableau pour la base initile B^1 est montré dans le tableau (2.2). nous voyons pour l'étape 3 que $x^1 = (0, 0)$. notez que ce ne sont que les coefficients des contraintes et que les coût réduits sont les négatifs des coefficients objectifs appropriés.
En passant par l'algorithme la répense aux questions des étapes 4 et 5 "non" donc la noninfériorité de la solution réalisable de base actuelle doit être établie en résolvant

le sous-problème :

$$maxV = \delta_1 + \delta_2 \tag{2.30}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_6) \in F_d \tag{2.31}$$

$$Z_1(x_1, x_2) = 5x_1 - 2x_2 - \delta_1 = 0 \tag{2.32}$$

$$Z_2(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2 - \delta_2 = 0 \tag{2.33}$$

$$\delta_1, \delta_2 \geq 0 \tag{2.34}$$

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	c_j^1	5	-2	0	0	0	0	0
	c_j^2	-1	4	0	0	0	0	0
	a_3	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	0	3
B^1	a_4	1	1	0	1	0	0	8
	a_5	1	0	0	0	1	0	6
	a_6	0	1	0	0	0	1	4
	f_j^1	-5	2	0	0	0	0	0
	f_j^2	1	-4	0	0	0	0	0

TABLE 2.2 – Solution Réalisable Basique

Où F_d représente l'ensemble des solutions qui satisfont (2.25) - (2.29). La solution à ce problème est $V = 28$, $\delta_1 = 26$, $\delta_2 = 2$, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$, $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 2$ clairement, x^1 est inférieur.

Nous sautons l'étape 7 en notant que $r = 0$. à l'étape 8, la dominance d'une colonne non basique est vérifiée. Cependant, puisque $\theta_1, \theta_2 > 0$ ni a_1 ni a_2 ne peuvent dominer. Nous effectuons l'étape 9A car $r = 0$. Les deux colonnes x_1 et x_2 ont des coûts réduits non comparables à (0,0). Pour l'étape 10, nous noterons simplement que $B^1 = (a_3, a_4, a_5, a_6)$, a_1 et a_2 doivent être pris en compte pour l'entrée, car leur l'introduction dans la base conduirait à des solutions inexplorées.

La réponse à l'étape 11 est "oui" donc nous passons à l'étape 13 où a_2 sera choisi pour l'entrée dans la base ; $h = h+1 = 2$. Lorsque a_2 entre la base, $\theta_2 = min(\frac{3}{1}, \frac{8}{1}, \frac{6}{0}, \frac{4}{1}) = 3$ et que l'élément pivot est l'entrée encadrée dans le tableau (2.2), c'est-à-dire que a_3 quittera la base.

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	c_j^1	5	-2	0	0	0	0	0
	c_j^2	-1	4	0	0	0	0	0
	a_2	-1	1	1	0	0	0	3
B^2	a_4	2	0	-1	1	0	0	5
	a_5	1	0	0	0	1	0	6
	a_6	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	0	1
	f_j^1	-3	0	-2	0	0	1	-6
	f_j^2	-3	0	4	0	0	0	12

TABLE 2.3 – 2^{eme} Solution

Le nouveau tableau simplexe, présenté dans le tableau (2.3), donne $x^2 = (0, 3)$. Rappelez-vous que les deux dernières entrées des lignes à coût réduit affichent les valeurs des deux objectifs. Dans le tableau (2.3), $Z_1 = -6$ et $Z_2 = 12$. Dans ce passage à l'étape 5, nous constatons que a^1 a tous les coûts réduits négatifs de sorte que x^2 est inférieur. La colonne a_1 est maintenant introduite dans la base pour obtenir la nouvelle solution réalisable de base présentée dans le tableau (2.4).

En revenant à l'étape 3, $h = 3$ et $x^3 = (1, 4)$. à l'étape 4, nous constatons que Z_2 est maximisé puisque f_3^2 et f_6^2 (x_3 et x_6 sont les variables non basiques) sont tous deux positifs. Puisqu'il s'agit d'un optimum unique, x^3 est une solution non inférieure et $r = 1$; c'est-à-dire qu'une solution non inférieure a été trouvée. Pour l'étape 8, nous pouvons calculer que $\theta_3 = 3$ et $\theta_6 = 1$. On trouve à l'étape 8 que : $f_3^1\ \theta_3 = -15$, $f_6^1\ \theta_6 = 3$ et $f_3^2\ \theta_3 =f_6^2\ \theta_6 = 3$. Ainsi, a_3 domine a_6 et sera amené dans

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	c_j^1	5	-2	0	0	0	0	0
	c_j^2	-1	4	0	0	0	0	0
	a_2	0	1	0	0	0	1	4
B^3	a_4	0	0	$\boxed{1}$	1	0	-2	3
	a_5	0	0	1	0	1	-1	5
	a_1	1	0	-1	0	0	1	1
	f_j^1	0	0	-5	0	0	3	-3
	f_j^2	0	0	1	0	0	3	15

TABLE 2.4 – 3^{eme} Solution

la base conduisant au tableau (2.5).

Le calcul à l'étape 8 était en faite inutile puisque $f_6 > 0$.a été réalisée ici à des fins d'illustration. La nouvelle solution de base réalisable est $x^4 = (4, 4)$. la non infériorité de cette solution ne peut pas être étable aux étapes 5 ou 6 d sorte que le sous problème (2.30) et (2.34) doit être résolu avec un nouveau côté droit de 12 (la valeur actuelle de Z_1 et Z_2) pour les équations (2.32) et (2.33). La solution au sous problème donne $V = 0$, so x^4 est non inférieur et $r = 2$ à l'étape 7.

La colonne dominante n'est pas trouvée à l'étape 8. Il ya deux colonnes a_4 et a_6 avec f_4 et f_6 trouvée à l'étape 9A comme n'étant pas compatibles avec (0, 0).Remarquez, cependant, que l'introduction de a_4 conduirait à (a_2, a_4, a_5, a_1), qui est la base explorée précédemment, B^3 tableau (2.4) la colonne a_4 est rejetée en tant que candidat et a_6 est introduit dans la base pour obtenir $B^5 = (a_2, a_3, a_6, a_1)$.

La nouvelle solution, $x^5 = (6, 2)$, est présentée dans le tableau (2.4) Remarquez que maintenant $Z_1 = 26$, $Z_2 = 2$. La non infériorité de cette solution est déterminée par résoudre le sous problème avec 26 et 2 comme côté droit de (2.32) et (2.33),

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	c_j^1	5	-2	0	0	0	0	0
	c_j^2	-1	4	0	0	0	0	0
	a_2	0	1	0	0	0	1	4
B^4	a_3	0	0	1	1	0	-2	3
	a_5	0	0	0	-1	1	$\boxed{1}$	2
	a_1	1	0	0	1	0	-1	4
	f_j^1	0	0	0	5	0	-7	12
	f_j^2	0	0	0	-1	0	5	12

TABLE 2.5 – 4^{eme} Solution

respectivement. L'étape 8 ne trouve pas de colonne dominante, mais à l'étape 9.

Nous voyons que f_4 et f_5, dans le tableau (2.7), ne sont pas tous deux comparables à zéro. L'introduction de a_4 conduit à (a_4, a_3, a_6, a_1) tandis que a_5 conduirait à (a_2, a_3, a_5, a_1), qui est B^4, la solution de base réalisable dont nous venons de sortir. Ainsi, seul a_4 conduirait à une base inexplorée. il est introduit dans la base actuelle pour obtenir B^6 indiqué dans le tableau (2.7) .

Le nouveau tableau simplexe indique que $x^6 = (6, 0)$ avec avec $Z_1 = 30$ et $Z_2 = -6$. en parcourant les procédures, nous trouvons à l'étape 4 que $f_j^1 > 0$. Pour toutes les variables non basique. Par conséquent, cette solution est un optimum unique pour Z_1, et on conclut que cette solution est également non inférieure. à l'étape 8, $\theta_2 = 2$ et $\theta_5 = 6$ de sorte que $f_2^1\theta_2 = 4 < f_5^1\theta_5 = 30$ et $f_2^2\theta_2 = -8 < f_5^2\theta_5 = -6$

La conclusion est que a_2, domine a_5,en tant que candidat pour une nouvelle entrée dans la base. À l'étape 12, cependant, nous voyons que l'introduction de a_2 serait conduisent à (a_2, a_3, a_6, a_1) qui est B_5, une base précédemment explorée.

Avec une réponse "non" à la question de l'étape 12, la procédure nous amène à l'étape 11 où toutes les bases explorées en stockage sont examinées. Rappelez-vous

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	c_j^1	5	-2	0	0	0	0	0
	c_j^2	-1	4	0	0	0	0	0
	a_2	0	1	0	$\boxed{1}$	-1	0	2
	a_3	0	0	1	-1	2	0	7
B^5	a_6	0	0	0	-1	1	1	2
	a_1	1	0	0	0	1	0	6
	f_j^1	0	0	0	-2	7	0	26
	f_j^2	0	0	0	4	-5	0	2

TABLE 2.6 – 5^{eme} Solution

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	c_j^1	5	-2	0	0	0	0	0
	c_j^2	-1	4	0	0	0	0	0
	a_4	0	1	0	1	-1	0	2
B^6	a_3	0	1	1	0	1	0	9
	a_6	0	1	0	0	0	1	4
	a_1	1	0	0	0	1	0	6
	f_j^1	0	2	0	0	5	0	30
	f_j^2	0	-4	0	0	-1	0	-6

TABLE 2.7 – Application De La Méthode Multiobjectif Simplexe à La 6^{eme} Solution De Problème De L'échantillon

que la base formée en introduisant a_1 dans $B^1 = (a_3, a_4, a_5, a_6)$ a été stockée lors de notre premier passage dans l'organigramme. En regardant le tableau (2.2), si a_1, était introduit dans cette base, alors a_5 quitterait, donnant une nouvelle base de (a_3, a_4, a_1, a_6). Mais cette base a déjà été explorée : c'est B^6 dans le tableau (2.7). Par conséquent, il n'y a pas de bases inexplorées en mémoire, l'algorithme se termine.

Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre les notions fondamentales de l'optimisation multicritère en expliquant les notions d'optimalités en particulier l'optimalité de Pareto.

Ensuite, on a présenté la méthode de simplexe multicritère illustré par un exemple numérique.

Chapitre 3

Jeux multicritères

Introduction

Les jeux multicritères sont une extension des jeux classiques (monocritères) pour prendre en considération des situations où les joueurs s'intéressent à plusieurs objectifs simultané-ment. Cette extension est beaucoup plus réaliste, car en pratique il est très rare d'avoir une situation où les agents concernés sont préoccupés par un seul et unique objectif. Dans ce chapitre nous allons définir les principe de négociation et présenter une classe particulière de jeux à savoir les jeux de négociation multicritères et proposer en suite une procédure pour les résoudre.

3.1 Concept de la négociation

A tous les niveaux de notre vie, la plupart des situations auxquelles nous somme confrontés font de nous des négociateurs, qu'il s'agit de notre vie professionnelle, personnelle ou encore d'activités sociales.

Définition 3.1.1. (Dictionnaire) D'après, le P. Larousse la négociation est une série d'entretiens, d'échange de points de vues, de démarches qu'on entreprend pour parvenir à un accord, pour conclure une affaire. Par ailleurs, le P. Robert propose la définition suivante ≪ Art, action de mener à bonne fin les grandes affaires, les affaires publiques ≫

Définition 3.1.2 (. . . en théorie de jeu)**.** Une négociation met en jeu des ressources, qui seront rassemblées afin d'être négociées dans un contrat, et un ensemble de personnes qui participent à cette négociation. Il y a toujours un ou plusieurs managers (vendeur ou autre) et un ou plusieurs contractants(acheteurs ou autre).

Nous pouvons dire que ≪ Une négociation est une activité collaborative, au cours de laquelle des personnes procèdent à des échanges des points de vues à partir d'une idée ou des idées de départ (divergence/convergence), en suivant de processus dans l'intention de construire un compromis ≫.

3.2 Principes de la négociation

Le processus de négociation peut s'inscrire dans un rapport de coopération entre les parties ou dans un rapport de compétition. Pendant les négociations le passage du temps aura en général un coût pour les participants (par exemple, durant des négociation salariales dans une entreprise. L'entreprise ne produit pas pendant une grève et les salaires ne sont pas versés). Pour avoir une idée bien clair sur cette théorie, nous pouvons envisager deux exemples de protocoles simple de négociation :

— **A prendre ou à laisser :** Il s'agit d'une forme de négociation extrême dans sa structure, mais assez courante (quand vous allez à un supermarché, vous n'essayer pas de négocier les prix affichés) .

— **propositions alternées :** Considérons le problème de négociation classique où deux joueurs rationnels cherchent à partager un objet (un profit réalisé ensemble, un butin), d'une valeur X avec un protocole de négociation particulier :

⇒ un joueur fait une première offre : un partage des gains $(x, 1-x)$ (par exemple, (60%, 40%)).

⇒ l'autre a le choix de l'accepter, auquel cas il obtient la part $1 - x$ ou de refuser :

$\Rightarrow$ S'il refuse, il fait à son tour une proposition pour le partage $(y, 1-y)$.

$\Rightarrow$ le premier joueur peut à son tour soit accepter soit faire une nouvelle proposition.

Ce processus continue jusqu'à ce que les deux joueurs aboutissent à un partage acceptable pour les deux, ou que l'objet de la négociation disparaisse. Très souvent, le passage du temps est néfaste.

Exemple 3.2.1.

• Négociations salariales dans une entreprise.

• Négociations commerciales.

• Etablissement d'accords de coopération entre les entreprises/états.

Nous allons introduire les concepts de base de la théorie des négociations dans un cadre très simple, où deux individus cherchent à partager un bien ou un gain. Pendant les négociations, le passage du temps aura en général un cout pour les participants (l'entreprise ne produit pas pendant une grève et les salaires ne sont pas versés). Deux éléments joueront un rôle important dans l'établissement du compromis :

— **les procédures de négociations** la séquence des offres et des contres-offres.

— **l'urgence** pour chaque partie, de terminer le conflit.

Exemple 3.2.2. Bart et Lisa veulent partager une bûche glacée.

— Bart propose un partage initial.

— Si Lisa refuse, c'est à elle de faire une offre, mais une partie de glace aura fondu (chaud, impossible de laisser la glace au congélateur le temps de la négociation).

— De même si c'est Bart qui refuse et qui doit faire une contre-offre.Quel va être le partage décidé par les deux enfants ?

Nous allons considérer différentes possibilités de négociation.Imaginons qu'il y ait qu'une seule période possible (la glace fond complétement si la proposition initiale de Bart est refusée).

— Lisa n'aura pas la possibilité de faire une contre-offre. Quelle part pourra alors demander Bart ?

— Si son offre est refusée, Lisa n'aura rien. $\Rightarrow$ il suffirait qu'il propose une petite portion pour que Lisa accepte. En effet, dans ce cas, elle est mise devant le choix entre rien et manger la portion proposée par Bart.

— Ce dernier pourra donc obtenir la quasi-totalité de la glace.

— Liberté de choix : Résultat peut paraître extrême. Si on sort d'un cadre strict de décision rationnelle, il est fort probable que Lisa refuse l'offre si elle lui parait trop inéquitable et si elle a effectivement la liberté de refuser.

— Dans la mise en oeuvre réelle, il faut tenir compte de ces marges plus étroites dont dispose le joueur qui fait la première offre.

— Si la liberté de choix n'est pas présente, on aboutit facilement à ce type de résultat extrême.S'il y a une seconde période de négociation (la glace prend deux périodes pour fondre).

— Les choses seront plus favorable pour Lisa.

— Elle sait maintenant que si elle refuse l'offre initiale de Bart, elle pourra s'assurer le presque totalité de la moitié restante de la glace.

— En effet, ce sera à elle dans ce cas, de faire une offre $\ll$ à prendre ou à laisser $\gg$.

— Anticipant cela , Bart n'a pas d'autre choix que de demander au plus la moitié de la glace.

— Le partage se fera alors à parts égales $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Remarque 3.2.1.

•Quand le nombre de périodes de négociation est suffisamment grand, on tend vers le partage à parts égales et le fait de faire la première ou la dernière offre n'apporte plus d'avantage.

•Dans tous les cas, le partage sera accepté dès la première proposition mais il tient compte de la fonte de la glace, car les joueurs l'anticipent.

•Le raisonnement stratégique dans la conception du cadre de négociation (le protocole, la longueur des négociations) joue un rôle important dans le partage final.

3.3 Approches de négociation

Avant d'examiner les différentes approches de la négociation, il faudrait définir le verbe ≪ Gagner ≫, qui signifie ≪ préserver le lien moral qui fonde l'identité de sa propre organisation, et obtenir au contraire la dissolution du lien moral qui fonde l'identité de l'organisation adverse ≫. Cette définition, généralement admise en matière de stratégie militaire, n'est pas adaptée au monde des affaires. Dans cette deuxième hypothèse, le verbe ≪ Gagner ≫ devrait signifier ≪ obtenir satisfaction de ses demandes, tout en respectant un certain équilibre entre les interlocuteurs ≫. Une telle définition se réfère à l'approche gagnant-gagnant de la négociation, tandis que la première se réfère à l'approche gagnant-perdant, voire même perdant-perdant.[14]

3.3.1 Approche gagnant-gagnant

Ce concept consiste à rechercher son propre intérêt tout en comprenant que si nous servons les intérêts de l'autre personne, nous pouvons aussi mieux servir les navaîtres. Pour que la négociation soit réussie, les deux parties doivent avoir l'impression d'avoir gagné.

Les parties n'ont sans doute pas tout ce qu'elles avaient demandé initialement, mais toutes deux reçoivent une contrepartie estimée satisfaisante. En d'autres termes, la négociation sert à parvenir à un équilibre.[14]

3.3.2 Approche gagnant-perdant

Situation dans laquelle, une partie dit : ≪ *je veux obtenir ce pour quoi je suis venu, je veux gagner la négociation, et si je gagne l'autre partie aura perdu* ≫. Le résultat de la négociation est alors inégale, rendant fragile l'exécution du contrat. Approche utilisée souvent dans le cadre des relations internationales. Dans le cadre de cette approche, la stratégie est définie comme ≪ *l'art de la dialectique des volontés employant la force pour résoudre leur conflit. Son but est d'atteindre la décision en créant et en exploitant une situation entraînant une désintégration morale de l'adversaire suffisante pour lui faire accepter les conditions qu'on veut lui imposer. L'art de la stratégie consiste alors à identifier le "point décisif" permettant d'atteindre le résultat. Cette formule se situe au niveau de la "stratégie totale", dont l'emploi éventuel de la force militaire n'est qu'une composante. L'objectif du stratège est d'imposer sa volonté, et non pas de gagner une simple bataille* ≫[14].

3.3.3 Approche perdant-perdant

Si les deux parties sont déterminées à ne pas laisser l'autre gagner, elles peuvent toutes deux finir par ne pas atteindre leur objectif. Ceci arrive quand les parties adoptent une approche de ≪ gagnant-perdant ≫ et sont plutôt déterminées àă ne pas céder. Dans cette hypothèse, la négociation aboutit à un échec.[14]

3.4 Stratégies de négocition

D'après Dupont ≪ en matière de négociation, la stratégie est d'abord réflexion (élaboration mise en place) et ensuite action. La réflexion constitue un aspect important de la préparation, l'application se situe au moment du déroulement ≫.

3.4.1 Stratégie conflictuelle ou distributive

La négociation distributive a comme fonction de résoudre les conflits à l'égard des enjeux pour lesquels il existe une divergence au niveau des intérêts des parties. Selon ce processus, les gains de l'un seront proportionnels aux pertes de l'autre.[2]

3.4.2 Stratégie coopérative ou intégrative

La négociation intégrative, deuxième sous-processus, a comme fonction de régler les différents à l'égard d'enjeux où il existe des objectifs communs. Contrairement à la négociation distributive, il devrait en résulter des gains pour les deux parties et les avantages obtenus par l'un ne le seront pas au profit de l'autre.[2]

3.5 Jeux de négociation multicritère

Dans ce qui suit, on s'interessera à la résolution numérique d'un jeu de négociation multicritère. Pour celà, on rappelle une precocédure pour les résoudre proposée dans [1], en utilisant le concept de solutions équitables. L'idée derrière ce concept est que les joueurs soient d'accord sur les résultats qui minimisent la distance de Chebyshev entre leurs gains.

3.5.1 Position du problème :

Soit le jeu de négociation multicritère suivant :

$$< \mathcal{N}, F, d > \tag{3.1}$$

où $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$: est l'ensemble des joueurs.

$F = \{f(x)/x \in X\}$: est l'ensemble des gains possibles et X l'ensemble des issues réalisables.

$d^i \in \mathbb{R}^m$: est le gain attribué à chaque joueur $i \in \mathcal{N}$ en cas de désaccord.

La fonction de gain du i^{eme} joueur, est la fonction vectorielle f^i définie par :

$$f^i : X \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto f^i(x)$$

Chaque joueur $i \in \mathcal{N}$, a la possibilité de choisir une stratégie x_k dans son ensemble de stratégies X_i, $k \in \{1, \ldots, |X^i|\}$. Le profil de stratégies ainsi formé de toutes les stratégies choisies par tous les joueurs, soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_i \in X^i, i = \{1, \ldots, n\})$, sera évaluée par les fonctions vectorielles des n joueurs (chaque joueur ayant m critères à évaluer), donnant ainsi une issue réalisable du jeu représentée par la $m \times n$-matrice :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1^1(x) & f_1^2(x) & \ldots & f_1^n(x) \\ f_2^1(x) & f_2^2(x) & \ldots & f_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_m^1(x) & f_m^2(x) & \ldots & f_m^n(x) \end{pmatrix}$$

La j^{eme} ligne $(f_j^1, f_j^2, \ldots, f_j^n)$ représente le gain de tous les joueurs selon le j^{eme}critère. La i^{eme} colonne $(f_1^i, f_2^i, \ldots, f_m^i)^T$ représente le gain du i^{eme} joueur selon tous les critères.[1]

Remarque 3.5.1. Notons que chaque point de $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ représente un résultat possible qui est le gain que tous les joeurs peuvent atteindre d'un accord commun, dans le cas de disaccord les agents reçoivent un gain $d \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Remarque 3.5.2. Nous supposerons dans ce qui suit que tous les critères devront être maximisés, et on supposera aussi que tous les joueurs sont en accord, donc on peut représenter le problème de négociation multicritère sous forme $< \mathcal{N}, F >$.

3.5.2 Gain minimal garanti

Afin de définir ce concept de solutions pour la classe de jeux de négociations multicritères, chaque résultat réalisable sera évalué par un vecteur en terme des pires gains en respectant tous les critères.

Définition 3.5.1. [1] Pour toute issue réalisable $s \in F \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ le vecteur gain minimal est définit par :

$$V(s) = (V_1(s), V_2(s), \ldots, V_m(s)) \tag{3.2}$$

où

$$V_j(s) = \min_{1\leq i\leq n} (f_j^i(x), \forall j \in \{1, \ldots, m\}) \tag{3.3}$$

$V_j(s)$: représente le gain garanti de tous les joueurs selon le j^{eme} critère.

Remarque 3.5.3. Le vecteur V (s) représente ainsi, le gain que chacun des joueurs a la possibilité d'atteindre et cela pour tous les critères. A chaque issue réalisable $s \in F$ est associé un vecteur gain minimal. Notons l'ensemble de toutes les issues réalisables aux quelles est associé un vecteur gain par : $F(V) = \{s \in F/V = V(s)\}$

Définition 3.5.2. [1] Un vecteur gain minimal fictif est définit par :

$$V^u = (V_1^u, V_2^u, \ldots, V_m^u) \tag{3.4}$$

où

$$V_j^u = max_{s\in F} \quad V_j(s), \forall j = \{1, \ldots, m\} \tag{3.5}$$

V_j^u : est la valeur optimale du programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} &P_j(1) : \max V_j(s); \\ &\quad f_j^i(x) \geq V_j(s), \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}; \\ &\quad s \in F; \end{aligned} \tag{3.6}$$

Définition 3.5.3. [1] Pour chaque résultat possible $s \in F$, le vecteur des déviation d(s) par rapport aux vecteurs des gains minimums V^u

$$d(s) = (\frac{V_1^u - V_1(s)}{V_1^u}, \frac{V_2^u - V_2(s)}{V_2^u}, \ldots, \frac{V_m^u - V_m(s)}{V_m^u}). \tag{3.7}$$

Ce vecteur représente les différences entre le niveau minimal fictif et les niveaux minimaux atteints en s pour chaque critère.

3.5.3 Solution lexicographique

Afin de comparer les déviations associés aux différentes issues du jeu multicritère on va utiliser la relation d'ordre lexicographique suivante dans le sens où pour chaque $x \in \mathbb{R}^m$, soit r(x) le vecteur dont les composantes sont les composantes de x disposée par ordre de grandeur décroissante [1].

Définition 3.5.4. $x \leqslant_{lex} y, \quad \exists i \in \{1,..,n\} \quad telque : r_i(x) < r_i(y) \quad et \quad r_j(x) = r_j(y) \ \ \forall j < i$. Cette relation lexicographique définie un ordre complet dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 3.5.5. d(s) est un vecteur des déviations minimal au sens lexicographique pour $F \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$ s'il n'existe pas une autre décision $s' \in F$ tel que $d(s') \leq_{lex} d(s)$.

Le concept des solutions équitables pour les jeux multicritères est à présent définit comme suit :

Définition 3.5.6. Une solution réalisable $s \in F$ est dite solution équitable pour le jeu multicritère si d(s) est le vecteur des déviations minimal au sens lexicographique pour $F \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$.

Cela signifie qu'une solution équitable est une issue réalisable qui minimise le vecteur des déviations selon l'ordre lexicographique défini précédemment.

Remarque 3.5.4. Les solutions équitables présentent une propriétée d'efficacité plus forte que l'optimalité de Slater mais plus faible que l'optimalité de Pareto, du fait que les solutions équitables sont non dominées selon la relation de dominance.

Lemme 3.5.1. *[1] Si V^* est un vecteur gain minimal dont le vecteur des déviations associé est minimal au sens lexicographique, alors l'ensemble de toutes les issues réalisables associées à V^* est :*

$$F(V^*) = \{s \in F / f_i^j \geq V_j^*, \forall i = \{1, \ldots, n\}, \forall i = \{1, \ldots, m\}\}.$$

Il y'a un vecteur gain minimal $V^* = (V_1^*, V_2^*, \ldots, V_m^*)$ unique associé au vecteur gain minimal au sens lexicographique. Cependant, l'ensemble des issues réalisables *correspondantes peut avoir plus d'un élément.*

Afin d'obtenir l'ensemble de toutes les solutions équitables, nous considèrons le problème d'optimisation qui minimise les déviations maximales, défini comme suit :

$$\begin{aligned} P(1) : \min \max_j \ & \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u}; \\ & f_i^j(x) \geqslant V_j, \forall i = \{1, \ldots, n\}, \forall j = \{1, \ldots, m\}; \\ & s \in F; \end{aligned} \tag{3.8}$$

On pose $t = \max_j \dfrac{V_j^u - V_j}{V_j^u}$, *alors le problème (3.8) est équivalent au problème suivant :*

$$\begin{aligned} P_1 : \min \quad & t \\ & t \geq \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u}, \forall j = \{1, \ldots, m\} \\ & f_i^j(x) \geqslant V_j, \forall i = \{1, \ldots, n\}, \forall j = \{1, \ldots, m\}; \\ & s \in F; \end{aligned} \tag{3.9}$$

S'il existe un V^* unique qui est optimal pour le problème (3.8), alors l'issue $s \in F$ tel que (V^*, s) est une solution optimale pour le problème (3.8) vérifie $V^* = V(s)$ et que le vecteur des déviations d(s) est minimal au sens lexicographique. Et par conséquent, l'ensemble des solutions équitables coàŕncide avec $F(V^*)$.

Pourtant, en général, si (V, s) est une solution optimale pour le problème (3.8), V n'est pas nécessairement le vecteur gain minimal pour s.

Notons $I(t^*) = \{j \in \{1, \ldots, m\}, t^* = \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u}\}$ et par q le cardinal de $I(t^*)$

Lemme 3.5.2. *[1] Si t^* est une valeur optimale pour le problème (3.9), alors il existe $j \in I(t^*)$, tel que $V_j(s) = V_j$, $\forall (V, s)$ qui est une solution optimale pour le problème (3.8).*

Remarque 3.5.5. Lorsque le problème (3.8) possède plusieurs solutions optimales, on applique une procédure recursive pour obtenir un vecteur gain minimal unique associé au vecteur des déviations minimal au sens lexicographique.

3.5.4 Algorithme 1

[1] **étape 1**

Résoudre le problème (3.8). Si une solution V^* unique est obtenue, alors arrêter l'algorithme, sinon, soit t_1^* la valeur optimale de (3.9) et j_1 le critère avec une contrainte d'inégalité active pour toute solution optimale.

$\vdots$

étape k

Soit t_{k-1}^* la solution optimale du problème P_{k-1} et soit j_{k-1} le critère pour la nouvelle contrainte d'inégalité pour toute solution optimale. On considère alors le problème obtenu en éliminant la contrainte d'inégalité active dans l'étape $k-1$, et résoudre ensuite le problème suivant :

$$\begin{aligned}
P_k : \min \quad & t \\
& t \geq \frac{V_j^u - V_j}{V_j^u} \forall j = \{1, \ldots, m\}, j \neq j_1, \ldots, j_{k-1}; \\
& f_j^i(x) \geq V_j, \forall i = \{1, \ldots, n\}, \forall j = \{1, \ldots, m\}, j \neq j_1, \ldots, j_{k-1}; \\
& f_{jr}^i(x) \geq V_{jr}, \forall j = \{1, \ldots, m\}, \forall r = \{1, \ldots, k-1\}; \\
& s \in F;
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Si la solution optimale est unique, alors arrêter l'algorithme, sinon soit t_k^* la solution optimale du problème (3.10) et soit j le critère de la nouvelle contrainte d'inégalité active et aller à l'étape k + 1.

Remarque 3.5.6. Si F est un polyèdre, alors tous les problèmes (3.10) sont linéaires. Et dans ce cas, la contrainte qui devrait être active à chaque étape est celle qui correspond à une variable duale non nulle.

Une fois que l'ensemble $F(V^1)$ est détermine, si c'est un singleton,$F(V^1) = \{s\}$, le vecteur des déviations correspondant est l'unique vecteur minimal au sens lexicographique pour F, et donc, s est une solution équitable pour le jeu de négociation multicritère.

3.5.5 Raffinement de l'ensemble des solutions équitables

S'il y a un ensemble d'issues réalisables dont le vecteur de gain minimal coincident à V^1, il est alors possible d'affiner la notion proposée du solution équitables dans le sens qu'un seul vecteur gain minimal dont le vecteur des déviations soit minimal au sens lexicographique est assuré pour tous les joueurs. Ceci peut être fait en appliquant récursivement la procedure décrite précédemment , à l'ensemble $F(V^1)$.
Pour une issue réalisable $s \in F$, on construit une $m \times n$-matrice V (s), où, la j^{eme} ligne de la matrice V (s) contient la j^{eme} ligne de la matrice s arrangés dans l'ordre décroissant.
Ensuite, la premiere colonne de $V^{'}(s)$, c'est à dire $V^1(s)$, contient le plus petit element de chaque ligne de la matrice s, c'est à dire le gain minimal de s. La deuxième colonne $V^2(s)$, contient le second plus petit élément de chaque ligne de la matrice s, qui représente ainsi le second vecteur gain minimal de la matrice s. D'une manière générale, les éléments de $V^k(s)$ les k^{eme} plus petits éléments de chaque ligne de la matrice s, c'est à dire $V^k(s)$ représente le k^{eme} vecteur gain minimal pour s.
La seconde étape est d'introduire le concept du k^{eme} vecteur gain minimal fictif et le k^{eme} vecteur des deviations correspondant. Pour ainsi définir le concept de la solution équitable au sens lexicographique .

Définition 3.5.7. [1] Le k^{eme} vecteur gain minimal fictif pour le jeu multicritère est défini par :

$$V^u(k) = (V_1^u(k), V_2^u(k), \ldots, V_m^u(k)),$$

où $V_j^u(k) = \max\ V_j^k(s), \quad \forall j = \{1, \ldots, m\}$.

Définition 3.5.8. [1] Pour toute issue realisable $s \in F$, le k^{eme} vecteur des déviations $d^k(s)$ selon le k^{eme} vecteur gain minimal fictif $V^u(k)$ est le m-vecteur,

$$d^k(s) = \left(\frac{V_1^u(k) - V_1^k(s)}{V_1^u(k)}, \frac{V_2^u(k) - V_2^k(s)}{V_2^u(k)}, \ldots, \frac{V_m^u(k) - V_m^k(s)}{V_m^u(k)} \right) \tag{3.11}$$

On définit à présent la relation d'ordre dans $\mathbb{R}^{m \times n}$ suivante :

Définition 3.5.9. [1] $x \succeq y$ s'il existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que :

$$d^r(x) = d^r(y), \forall r < k \quad \text{et} \quad d^k(x) <_{lex} d^k(y)$$

Remarque 3.5.7. La relation d'ordre $x \geq y \Rightarrow x \succeq y$. De plus, la relation $\succeq$ définit un ordre total dans $\mathbb{R}^{m \times n}$ ce qui permet de définir le concept de solution equitable au sens lexicographique.

Définition 3.5.10. [1] Une issue réalisable $s \in F$ est une solution equitable au sens lexicographique pour le jeu multicritères s'il n'existe pas de solution $s^{'} \in F$ tel que $s^{'} \succeq s$.

Remarque 3.5.8. Le concept de solution lexicographique equitable possède deux importantes propriétés dans le context des jeux de négociations multicritère qui sont l'unicité et l'optimalité de Pareto.

Le lemme suivant, montre que pour toutes les issues realisables dans $F(V^1)$, une valeur minimale pour chaque critère est atteinte pour le même joueur.

Lemme 3.5.3. *[1] Soit F un ensemble convexe et V^* le vecteur gain minimal dont le vecteur des deviations associés est minimal au sens lexicographique pour F, alors pour chaque $j = \{1, \ldots, m\}$, il existe $k \in N$, tel que $V_j(s) = V_j^k(x) = V_j^*$, pour tout $s \in F(V^*)$.*

La solution proposée pour le calcul de la solution equitable au sens lexicographique, consiste à étape k, a déterminer le k^{eme} vecteur gain minimal fictif et chercher les issues réalisables qui minimisent le k^{eme} vecteur des deviations par rapport au k^{eme} vecteur gain minimal fictif au sens lexicographique. Pour construire la procedure pour $V^1, V^2, \ldots, V^k \in \mathbb{R}^m$, $k = \{1, \ldots, m\}$, on définit les ensembles suivants :

$F(V^1, V^2, .., V^k) = \{s \in F / V^i(s) = V^i; i = \{1, \ldots, k\}, k = \{1, \ldots, m\}$ Le lemme

précédent peut être ainsi appliqué aux ensembles $F(V^1, V^2, .., V^k)$*,* $k = \{1, \ldots, m\}$*, où,* V^l*,* $l = \{1, \ldots, k\}$ *représente le* l^{eme} *vecteur gain minimal dont le leme vecteur des deviations est minimal au sens lexicographique. Dans ce cas, si* $i(r)_j, r = \{1, \ldots, k-1\}$*, représente le joueur dont la* r^{eme} *valeur minimale est atteinte pour le* j^{eme} *critère. Ces ensembles peuvent être représentés par :*

$$F(V^1, V^2, .., V^k) = \{s \in F(V^1, V^2, \ldots, V^{k-1}) / f_j^i(x) \geq V_j^k, i \neq i(r), r = \{1, \ldots, k-1\}, j = \{1, \ldots, m\}$$

3.5.6 Algorithme 2

[1] **étape 1** Determiner l'ensemble des solutions $F(V^1)$ et le vecteur gain minimal correspondant V^1, en utilisant l'algorithme. Si $F(V^1) = \{s^*\}$ alors s^* est une solution equitable au sens lexicographique. Sinon, pour chaque critère j, soit $i(1)_j$ le joueur dont la valeur minimale V_j^1 j est atteinte.

⋮

étape k Pour chaque critère j, résoudre le problème :

$$\begin{aligned} & P_j(k) : \max V_j \\ & \qquad f_j^i(x) \geq V_j \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}, i \neq i(r)_j, \forall r = \{1, \ldots, k-1\}; \\ & \qquad s \in F(V^1, V^2, \ldots, V^{k-1}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

et soit V_j^u la valeur optimale obtenue.

Résoudre le problème

$$\begin{aligned} & P_1 : \min \max \quad \frac{V_j^u(k) - V_j}{V_j^u(k)}; \\ & \quad f_j^i(x) \geq V_j \forall i = \{1, \ldots, n\}, i \neq i(r)_j, \forall r = \{1, \ldots, k-1\}, \forall j = \{1, \ldots, m\}; \\ & \quad s \in F(V^1, V^2, \ldots, V^{k-1}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

et applique l'algorithme pour obtenir un k^{eme} vecteur gain minimal unique V^k et la solution correspondante $F(V^1, V^2, \ldots, V^k)$. Si $F(V^1, V^2, \ldots, V^k) = \{s^*\}$ alors, s^* est une solution equitable au sens lexicographique. Sinon, soit $i(k)_j$ le joueur pour lequel la valeur f_j^i est atteinte et procéder à l'étape k + 1.

Remarque 3.5.9. Cette procédure donne une solution equitable au sens lexicographique en n étapes au plus.

3.5.7 Exemple Numérique

[1] Considérons le jeu de négociation multicritère à trois joueurs

$$\mathrm{N} = \{1,\, 2,\, 3\}\,;$$

ayant chacun deux objectifs à optimiser. L'ensemble

$$F = \{f(x) \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \sum_{i=1}^{3} f_1^i(x) \leq 30, \sum_{i=1}^{3} f_2^i(x) \leq 18\}$$

$$f_1^1(x) \leq 3f_2^1(x), \quad f_1^2(x) \leq 2f_2^2(x), \quad f_1^3(x) \leq f_2^3(x), \quad f_j^i(x) \geq 0, \forall i = \{1,2,3\}, j = \{1,2\}$$

représente l'ensemble des issues réalisables où, $f_1^i(x)$ et $f_2^i(x), i = \{1,2,3\}$, représentent respectivement les gains du joueur i, selon chaque critère. Pour obtenir l'ensemble des solutions équitables, nous calculons d'abord le vecteur des gains minimal fictif en résolvant les deux problèmes de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
&\max \;\; V_1 \\
&\quad f_1^1(x) \geq V_1 \\
&\quad f_1^2(x) \geq V_1 \\
&\quad f_1^3(x) \geq V_1 \\
&\quad f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30 \\
&\quad f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18 \\
&\quad f_1^1(x) \leq 3f_2^1(x), \\
&\quad f_1^2(x) \leq 2f_2^2(x), \\
&\quad f_1^3(x) \leq f_2^3(x), \\
&\quad f_j^i \geq 0, i = \{1,2,3\}, j = \{1,2\}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

et

$$\begin{aligned}
&\max \;\; V_2 \\
&\quad f_2^1(x) \geq V_2 \\
&\quad f_2^2(x) \geq V_2 \\
&\quad f_2^3(x) \geq V_2 \\
&\quad f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30 \\
&\quad f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18 \\
&\quad f_1^1(x) \leq 3f_2^1(x), \\
&\quad f_1^2(x) \leq 2f_2^2(x), \\
&\quad f_1^3(x) \leq f_2^3(x), \\
&\quad f_j^i \geq 0, i = \{1,2,3\}, j = \{1,2\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

La resolution de ces deux programmes fournit comme solution optimale, le vecteur gainminimal fictif

$$V^* = \begin{pmatrix} 9.8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

. L'ensemble des solutions équitables est obtenu ensuite en résolvant le problème minmax suivant :

$$\min\max \ \{\frac{9.8 - V_1}{9.8}, \frac{6 - V_2}{6}\}; \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
& f_j^i(x) \geq V_j \forall i = \{1, 2, 3\}, \forall j = \{1, 2\}; \\
& f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30 \\
& f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18 \\
& f_1^1(x) \leq 3f_2^1(x), \qquad (3.17) \\
& f_1^2(x) \leq 2f_2^2(x), \\
& f_1^3(x) \leq f_2^3(x), \\
& f_j^i \geq 0, i = \{1, 2, 3\}, j = \{1, 2\}
\end{aligned}$$

equivalent au problème multicritère suivant :

$$\begin{aligned}
&\min \quad (t_1, t_2)\\
&\quad t_1 \geq \frac{9.8 - V_1}{9.8};\\
&\quad t_2 \geq \frac{6 - V_2}{6};\\
&\quad f_j^i(x) \geq V_j, \forall i = \{1,2,3\}, \forall j = \{1,2\};\\
&\quad f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) \leq 30\\
&\quad f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) \leq 18\\
&\quad f_1^1(x) \leq 3 f_2^1(x),\\
&\quad f_1^2(x) \leq 2 f_2^2(x),\\
&\quad f_1^3(x) \leq f_2^3(x),\\
&\quad f_j^i \geq 0, i = \{1,2,3\}, j = \{1,2\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

qui donne comme unique vecteur gain minimal

$$V^1 = \begin{pmatrix} 8.1 \\ 4.9 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble des solutions équitables est alors

$$F(V^1) = Conv\left\{ \begin{pmatrix} 13.8 & 8.1 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8.1 & 8.1 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8.1 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix} \right\}$$

où, $Conv\{A\}$ représente l'enveloppe convexe de l'ensemble A. $t^* = 0.173$, c'est à dire que pour toutes les solutions équitables, la déviation maximale de tout le groupe par rapport au vecteur gain minimal fictif est de 17.3%.

A présent, nous appliquons la deuxième partie de l'algorithme qui consiste à determiner parmi les issues équitables de l'ensemble $F(V^1)$, une solution equitable au sens lexicographique unique pour le jeu multicritère défini dans cet exemple.

Notons que pour tout $s \in F(V^1)$, la valeur minimale pour le premier critère est atteinte par le joueur 3, et pour le deuxième critère, la valeur minimale est atteinte par le joueur 1. Ainsi, $i(1) = (3, 1)$ et le second vecteur gain minimal fictif est donné par les solutions optimales des problèmes suivants :

$$max V_1 \tag{3.19}$$
$$f_1^i(x) \geq V_1, \forall i = \{1, 2\} \tag{3.20}$$
$$s \in F(V^1) \tag{3.21}$$

et

$$max V_2 \tag{3.22}$$
$$f_2^i(x) \geq V_2, \forall i = \{2, 3\} \tag{3.23}$$
$$s \in F(V^1) \tag{3.24}$$

On obtient ainsi,

$$V^u(2) = \begin{pmatrix} 9.9 \\ 4.9 \end{pmatrix}$$

Les solutions optimales du problème suivant :

$$minmax\{\frac{9.9 - V_1}{9.9}, \frac{4.9 - V_2}{4.9}\} \tag{3.25}$$
$$f_1^i(x) \geq V_1, \forall i = \{1, 2\} \tag{3.26}$$
$$f_2^i(x) \geq V_2, \forall i = \{2, 3\} \tag{3.27}$$
$$s \in F(V^1) \tag{3.28}$$

donnent un second vecteur gain minimal unique V^2 (dans ce cas, il coïncide avec $V^u(2)$) et les issues réalisables dans $F(V^1)$ qui minimisent le second vecteur des deviations par rapport au second vecteur gain minimal fictif dans l'ordre lexicographique.

$$F(V^1, V^2) = \text{Conv}\left\{\begin{pmatrix} 9.9 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}\right\}$$

Le vecteur des joueurs où la valeur minimale est atteinte à chaque critère pour toutes les issues dans (V^1, V^2) est $i(2) = (2, 2)$. Cependant, dans la dernière étape de la procedure, en obtient le troisième vecteur gain minimal fictif,

$$V^u(3) = \begin{pmatrix} 12 \\ 8.1 \end{pmatrix}$$

et résolvant le problème :

$$\min\max \ \{\frac{12 - V_1}{12}, \frac{8.1 - V_2}{8.1}\} \tag{3.29}$$

$$f_1^1(x) \geq V_1 \tag{3.30}$$

$$f_2^3(x) \geq V_2 \tag{3.31}$$

$$s \in F(V^1, V^2) \tag{3.32}$$

on obtient l'unique solution equitable au sens lexicographique qui est :

$$s^* = \begin{pmatrix} 12 & 9.9 & 8.1 \\ 4.9 & 4.9 & 8.1 \end{pmatrix}$$

Conclusion

Dans ce dernier chapitre nous avons commencé par présenter un jeu de négociation multicritère et pour le résoudre nous avons proposé une procédure qui consiste à trouver les issues dont le vecteur de gain minimise le vécteur de déviation associé appelées les solutions equitables.

Enfin pour raffiner l'ensemble des issues dans le cas où la solution n'est pas un singleton en proposant une autre procédure qui adopte le même concept pour arriver à une solution équitable unique dite solution équitable lexicographique.

Conclusion Générale

L'objectif de ce mémoire est la résolution numérique d'un problème de négociation multicritère par l'approche de la théorie des jeux.

Après avoir introduit au chapitre 1 quelques concepts de base de la théorie des jeux et énuméré certains types de jeux et leurs concepts de solutions, nous avons consacré le deuxième chapitre à la présentation des notions d'optimalité et l'optimisation multicritère, et on a présenté la méthode du simplexe multi-objectif.

Dans le troisième chapitre, on a défini les principes de négociation et présenté une classe particulière des jeux à savoir les jeux de négociation multicritères et proposé ensuite une Procédure pour les résoudre. Cette méthode permet de trouver les issues dont le vecteur de gain minimise le vecteur des déviations associé, appelées solutions équitables.

Enfin, on a procédé à raffiner l'ensemble des issues dans le cas ou la solution n'est pas un singleton en proposant une autre procédure qui adopte le même concept pour arriver à une solution équitable unique dite solution équitable lexicographique.

Bibliographie

[1] V. Rubiales A. M. Màrmol, L. Monroy. An equitable solution for multicriteria bargaining games. *European Journal of Operational Research. 177*, 2007.

[2] P. Audebert. La négociation. *Ed. Organisation. Paris*, 1999.

[3] T. Basar and G.J. Olsder. Dynamic noncooperative game theory. *Academic Press, New York*, 1982.

[4] P. Borm., H. Tijs, and M. Van Der Aarssen. *Pareto equilibria in multiobjective Games.* Methods of Operation research, vol. 60, 303-312, 1988.

[5] F. CARMICHA. *A guide to game theory.* prentice Hall, 2005.

[6] Jared L. Cohon. *Multiobjective Programming and Planning.* Mathematics in Science and Engineering 140. Academic Press, 1978.

[7] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions.* Rand Corporation Research Studies. Princeton University Press, 1963.

[8] DOMINIQUE Henriet et RENAUD Bourlès. *Théorie des jeux.* Centrale Marseille, 2017.

[9] J. EYCKMANS. Nash implementation of a proportional solution to international pollution control problems. *Journal of Environmental Economics and Management*, pages 314–330, 1997.

[10] D. Ghose. *A Necessary and Sufficient Condition for Pareto-Optimal Security Strategies in Multicriteria Matrix Games.* Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 68 (3), 463-481., 1991.

[11] D. Ghose and U. R. Prasad. *Solution Concepts in Two-person Multicriteria Games*. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 63 (2), 167-189., 1989.

[12] R. Gibbons. A primer in game theory. *Princeton University Press*, 1992.

[13] L. IDRESS. *Théorie des jeux et trafic routier. Mémoire de master*. Université de Béjaia, 2012.

[14] C. Kosma-Lacroze. *Communication Commerciale*. BTS Commerce International, 2000.

[15] O. Labbani. *Comparaison des théories des jeux pour l'étude du comportement d'agents.Master's thesis*. LIFL-USTL(Université des sciences et technologies de Lille), 2003.

[16] J.F. Nash. *Equilibrium Points in n-Person Games*. Proceedings of the National Academy of Sciences 36, 48-49, 1950.

[17] J.F. Nash. *Noncooperative Games*. Annals of Mathematics 54, 286-295., 1951.

[18] Khimoum Nouredine. *Résolution Numérique d'un Jeu bi-Matriciel Multicritère*. Université de Béjaïa, 2006.

[19] Marc Plantevit. *Théorie des jeux : Jeux de négociation*. Université de Lyon 1.

[20] J. Puerto, F. Fernandez, M. Hinijosa, A. Marmol, and L. Monroy. *Solution Concepts for Multiple Objective N-person Games*. Operation research, vol. 19, 193-209.

[21] M. S. RADJEF. *Cours en post-graduation sur la théorie des jeux et l'optimisation multicritère*. Université de Béjaia.

[22] M. S. RADJEF. *Théorie des jeux, Cours de Premiére Année Master*. Université de Béjaia, 2019.

[23] SAIT Razika. *Application de la théorie des jeux dans l'organisation industrielle, Mémoire de Magister*. Université de Béjaia, 2008.

[24] R. E. Steuer. *Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation and Application.* John Wiley, New York, 546 pp, 1986.

[25] M. Zeleny. *Linear Multiobjective Programming.* Springer-Verlag, Berlin, 1974.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssé à la résolution d'un jeu de négociation multicritère. l'objectif est de proposer une procédure pour résoudre ce type de jeux (jeux de négociation multicritère) qui consiste à trouver les issues dont le vecteur de gain minimise le vecteur des déviations associé, ce qu'on a appelé les solutions équitable, puis raffiner l'ensemle des issues dans le cas ou ce dernier n'est pas un singleton.

Abstract

In this thesis, we are interested in solving a multi-criteria negotiation game.The objective is to propose a procedure to solve this type of game (multi-criteria negotiation games) which consists in finding the outcomes whose gain vector minimizes the associated vector of deviations, what we called the equitable solutions, then refine the set of issues in the case where the latter is not a singleton.