République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

MÉMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Option

Mathématiques financières

Thème :

Distributions de probabilité de la fréquence et de la sévérité des pertes dans les modèles de risque en assurance

Présenté par : M. **ZATOUT Lyes**

Président	*Dr.* **DJABRI Rabah**	**M.C.B**	**U. A/Mira Bejaia.**
Promotrice	*Dr.* **BENOUARET Zina**	**M.C.B**	**U. A/Mira Bejaia.**
Examinatrice	*Dr.* **ZIANE Yasmina**	**M.C.A**	**U. A/Mira Bejaia.**
Examinatrice	*Dr.* **AMROUN Sonia**	**M.C.B**	**U. A/Mira Bejaia.**

Bejaia, 2019-2020

Table des matières

Introduction générale

Depuis ses débuts, l'actuariat a progressé au rythme des avancements de la théorie des probabilités. En effet, l'une des plus anciennes définitions de l'assurance est celle d'un jurisconsulte portugais, *Pedro de Santarem*, auteur d'un des premiers ouvrages consacrés à l'assurance maritime, publié en 1552. Le premier livre sur les calculs de probabilités où une notion fondamentale dans la science actuarielle a été introduite, été celui du mathématicien néerlandais Christian Huygens (14 avril 1629 - 8 juillet 1695), qui s'est inspiré de la correspondance de Blaise Pascal et Pierre Fermat, dans lequel il annone cette notion fondamentale d'espérance mathématique liée à une situation d'incertitude été soulevée a permis le développement de cette discipline et depuis, l'actuariat se développe au cotés de la théorie des probabilités et le calcul statistique et devient une branche centrale de nos jours dans la gestion du risque en assurance et en finance.

L'objectif de ce travail est d'étudier les distributions de probabilité de la fréquence et de la sévérité des pertes (réclamations) dans les modèles de risque en assurance. Pour cela, nous avons introduit préalablement un chapitre pour présenter le secteur des assurances et ses principaux concepts. En se basant sur la modélisation probabiliste et stochastique de la richesse et les pertes d'une compagnie d'assurance, nous avons présenté quelques résultats fondamentaux sur la gestion du risque en général et en particulier sur l'évaluation de la probabilité de ruine comme mesure de risque la plus étudiée en actuariat. [25, 24]

Les principales lois de probabilités discrètes utilisées fréquemment pour la modélisation de la fréquence des réclamations (sinistres) sont les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative. Par conséquent, les lois de probabilités de la charge totale des sinistres (montants cumulés des réclamations) correspondantes sont alors appelées lois de Poisson composée, Binomiale Composée et Binomiale Négative Composée.

Nous nous somme intéressés également aux extensions obtenues par mélange à la loi de Poisson qui occupe une place centrale dans la modélisation du risque en assurance et on a décrit selon le besoin et l'adéquation des lois aux exigences des situations réelles de risques à modéliser. Ces lois sont décrites comme combinaison des lois usuelles en probabilités tel que les lois de Poisson-Gamma ou la loi Binomiale négative, Poisson-Inverse Gaussienne et Poisson-Lognormale.

A la fin de cette présentation des distributions de la fréquence des réclamations, nous allons exposé brièvement le modèle de *Sparre Anderson* qui est une généralisation du modèle de risque classique, où la fréquence des sinistres n'est plus modélisée par un processus de Poison mais par un processus de renouvellement stationnarisé.

Le choix de la distribution du montant d'un sinistre est crucial dans la gestion du risque en assurance. En générale, la distribution de la sévérité des pertes est bien choisit pour répondre aux exigences imposées par la nature du risque a couvrir et son impact sur la réserve de la compagnie d'assurance. Nous allons étudier les lois de probabilités continues les plus appropriées à la modélisation du comportement aléatoire du montant d'un sinistre X en prenant le soins de préciser leurs principales caractéristiques qui les rendent adéquates pour une représentation efficace et assez proche des cas réelles.

Dans la majorités des contextes d'application en assurance dommage et en assurance maladie, les distributions des montants de sinistre possèdent une asymétrie positive. Les principales lois pour le montant d'un sinistre sont les lois *exponentielle, Gamma, Lognormale* et *Pareto*. Il y a aussi les lois *Burr, Weibull* (avec $T \in]0,1[$), *log-logistique, F-généralisée* et *inverse-gaussienne*. Ainsi, des lois construites à l'aide de mélange telles que la loi *mélange d'exponentielles* et la loi *mélange d'Erlang* sont aussi utilisées. Pour conclure cette synthèse sur les distributions de la sévérité, nous allons donné un aperçu sur l'étude de la queue de ces distributions et son impact dans la gestion du risque en assurance.

Chapitre 1

Le risque en assurance : concepts généraux

L'objectif de ce travail est de donner un aperçu sur le secteur des assurances, définir ses différentes catégories et la notion du risque lié à ce domaine. Une partie de ce chapitre sera consacrée au secteur des assurances en Algérie.

1.1 Présentation générale de l'activité assurance

Le terme « **assurance** » trouve son origine du latin Securus (sûr) qui permis l'émanation du vocable bas-latin **Assecuratio** (sécurité, garantie, certitude,assurance). L'ancien français méridional adopta dès lors le terme assurance, conservant les anciennes consonances retrouvées dans les termes sécurité, sûreté, secours M. Boudjellal (cf.[22]). L'une des plus anciennes définitions est celle d'un jurisconsulte portugais, *Pedro de Santarem*,(cf.[20]) auteur d'un des premiers ouvrages consacrés à l'assurance maritime, publié en 1552, qui définissait l'assurance comme : « *Une convention par laquelle, le prix d'un risque ayant été convenu, l'un prend pour lui le risque de l'infortune de l'autre* ». Dans (cf.[21]), Albert Chaufeton cite : « *L'assurance est la compensation des effets du hasard par la mutualité organisée suivant les lois de la statistique* ». La mutuelle étant un Système de solidarité sociale fondé sur l'entraide réciproque des membres qui cotisent.

Plus récemment, *Christian Sainrapt* dans [19] propose la définition suivante :

Définition 1. *Assurance :*

C'est une convention ou un contrat de caractère synallagmatique et aléatoire selon les termes duquel une partie appelée assureur s'engage en échange du paiement d'une prime ou cotisation, unique ou annuelle, à fournir à une autre partie *appelée assuré, une prestation spécifique en cas de survenance d'un événement déterminé tel que décrit par le contrat.*

Définition 2. ***Actuariat :***
C'est la technique de calcul avec l'application de la statistique et les probabilités à l'assurance et aux différentes opérations de crédit, d'emprunt, etc...
L'actuaire est le spécialiste chargé de l'évaluation des risques dans une compagnie d'assurance (calcul, statistique, tarifs). Il applique les statistiques et les probabilités aux opérations d'assurances afin de bien gérer son risque. La gestion du risque en assurance et en particulier la théorie de la ruine sont une partie importante des sciences actuarielles.

Définition 3. ***Compagnie d'assurance :***
C'est une société a but lucratif qui permet à des individus ou des investisseurs d'éliminer certains risques que l'on estime assurables. Le client (assuré) transfère donc en contre partis d'un payement son risque assurable à une compagnie d'assurance (assureur) qui elle, en revanche, doit gérer efficacement son portefeuille afin d'éviter des scénarios catastrophiques qui pourraient mettre en péril le profit financier de l'entreprise.

1.1.1 Approche théorique sur les assurances :

La *théorie économique du risque* couvre un large champ de l'économie politique, pour ne pas dire sa totalité, puisque toute décision économique donne nécessairement lieu à un résultat aléatoire. On ne peut évidemment pas aborder toutes les questions que pose cette théorie du risque dans ce mémoire, c'est la raison pour laquelle nous nous sommes limités aux modèles et concepts qui sous-tendent cette théorie et a son application au seul domaine des assurances. Il est vrai que certaines disciplines telle que la théorie de la décision ou l'économétrie voir même une partie de la nouvelle microéconomie, se sont développer parallèlement à la théorie financière et l'économie des assurances, à tel enseigne que l'on parle couramment d'économétrie financière. La théorie financière et l'économie des assurances peuvent apparaitre aujourd'hui comme deux disciplines autonome, à la réserve prêt et non négligeable, qu'elles ont effectué des emprunts essentielles à la théorie de l'équilibre général. J.B.Ferrari(cf.[17]).

Des définitions précédentes, on retient la base de cette discipline de l'économie des assurances qui repose sur :

1) le principe de la mutualisation du risque c'est-à-dire, un grand nombre d'assurés pour un petit nombre de sinistres qui ne peut dès lors que reposer sur

un très grand nombre de personnes concernées,

2) le calcul de la probabilité de survenance du danger assuré, sur la base des statistiques recueillies sur une longue période.

Définition 4. ***Cotisation d'assurance et prime de risque :***
Une cotisation d'assurance correspond au payement de primes aux périodes convenues. Une prime de risque est un montant calculé à base des charges de l'opération d'assurance contre un risque considéré. Autrement dit, c'est le minimum à payer en moyenne par un assuré au court d'une période afin de garantir la solvabilité du capitale permettant l'opération d'assurance. On peut distinguer deux sortes de prime : une prime pure qui correspondant au montant attendu (espérance mathématique) de la charge totale des sinistres (montant de réclamations) et une prime chargé incluant le risque de volatilités extrêmes (chargement de sécurité). Une autre prime existe, dite commerciale, s'ajoute au chargement de sécurité et inclut les différents coûts et frais de l'assureur en dehors de la prime pure, son estimation est calculé selon les règles appropriées a chaque compagnie d'assurance.

Définition 5. ***Contrat d'assurance :***
Au sens de l'article 619 du code civil de la république Algérienne, un contrat par lequel l'assureur s'oblige, moyennant des primes ou autres versements pécuniaires, à fournir à l'assuré ou au tiers bénéficiaire au profit duquel l'assurance est souscrite, une somme d'argent, une rente ou une autre prestation pécuniaire, en cas de réalisation du risque prévu au contrat.

Définition 6. ***La coassurance :***
C'est une participation de plusieurs assureurs à la couverture du même risque, dans le cadre d'un contrat d'assurance unique. La gestion et l'exécution du contrat d'assurance sont confiées à l'un des assureurs appelé apériteur et dûment mandaté par les autres assureurs participants à la couverture du risque.

Définition 7. ***La réassurance :***
Le contrat ou traité de réassurance est une convention par laquelle l'assureur ou cédant se décharge sur un ré-assureur ou cessionnaire de tout ou partie des risques qu'il a assurés. En matière de réassurance, l'assureur reste le seul responsable vis à vis de l'assuré.

Catégories d'assurance

L'activité d'assurance comprend deux grandes catégories qui contiennent à chacune d'elles plusieurs branches selon leurs spécifications et caractérisations. On parle d'assurance de personnes et de l'assurance de biens et de responsabilité ; la première inclut les assurances en cas de vie, de décès, assurance maladie, accident corporelle et l'autre inclut les assurances de bien professionnels, habitats, constructions, catastrophes naturelles. Cette catégorisation est faite dans le but de se conformer au mieux à l'hypothèse centrale en assurance qu'est l'homogénéité du risque.

La caractéristique principale de l'activité d'assurance réside dans le fait qu'elle fonctionne inversement au cycle de production économique habituel ; contrairement à la situation classique où le producteur connais le coût de production qui lui permet de fixer un prix de vente adéquat pour sa production, l'assureur demande une prime d'assurance a son client sans savoir le montant réel a dédommager en cas de sinistre.

Les mécanismes d'assurance :

Le mécanisme de l'assurance s'appuie sur la compensation ou la répartition des risques. Ces risques doivent réunir un certain nombre de conditions que nous exposons ci-après

Des risques homogènes : Pour que la compensation entre les risques puisse se faire dans les meilleures conditions, il faut réunir un grand nombre de risques semblables qui ont les mêmes chances de se réaliser et qui occasionneront des charges de même catégorie, c'est à dire des risques homogènes. A cet effet, l'organisme d'assurance procède à l'analyse de chaque type de risque pour pouvoir les classer dans une catégorie et ainsi proposer des tarifs appropriés pour chaque catégorie de risque.

Des risques dispersés : L'organisme d'assurance doit éviter aussi d'assurer les mêmes types de risques qui pourraient éventuellement se réaliser en même temps. Ce principe est souvent difficile à respecter, néanmoins, les techniques de réassurance et de coassurance que nous avons déjà définies permettent le plus souvent de limiter les éventuels cumuls de risques.

La division des risques : Il ne suffit pas de sélectionner et de disperser les risques, mais il faut éviter d'accepter un trop grand risque qui pourrait ne pas être compensé par les primes. Par ailleurs, il ne faudrait pas qu'un seul et même risque puisse menacer le principe de compensation.

1.2 Le secteur des assurances en Algérie

1.2.1 Histoire de l'activité des assurances en Algérie :

Nous retraçons ici l'activité d'assurance à partir de la période coloniale mais nous restons convaincu que l'activité d'assurance en Algérie remonte à des époques plus antérieures. L'histoire de l'assurance se confond durant la période coloniale avec l'évolution de l'assurance en France. En effet, l'introduction de l'assurance en Algérie vient de l'adoption de la politique d'extension des activités à l'étranger par les sociétés françaises entrainant la croissance obligeante de la demande d'assurance. Ainsi, les pouvoirs publics ont réglementé ce vaste domaine en adoptant plusieurs textes qui ont été reconduits au lendemain de l'indépendance par le législateur algérien par la loi du 31 décembre 1962. Ce cadre juridique reconduit, avait pour but de combler le vide juridique qui existait dans le secteur des assurances, en attendant que les pouvoirs politiques et économiques algériens instaurent des textes et des lois plus adaptés aux réalités de l'économie nationale (cf.[8]).

Depuis l'indépendance de l'Algérie, l'évolution du secteur de l'assurance commence par l'apparition de nombreux textes réglementaires régissant le domaine. En conséquence, plusieurs étapes interdépendantes de l'évolution de ce domaine peuvent êtres énumérées à savoir [8] :

phase 1 : Elle intervient juste après l'indépendance et sera caractérisée par la reprise des sociétés d'assurances existantes, qui vont passer sous le contrôle du ministère des finances et par l'instauration du principe d'agrément des organismes assureurs des risques situés en Algérie.

phase 2 : L'établissement du monopole de l'Etat, qui se traduira notamment par la nationalisation des sociétés d'assurance existantes. De ce fait, en 1966, une seule société d'assurance parmi les 17 existantes a été nationalisée. Il s'agit de la SAA. En plus de la création de certaines compagnies, telle la centrale de réassurance (CCR) et l'institution de l'assurance mutualiste avec la création de la Caisse Nationale de la Mutualité Agricole.

phase 3 : (libéralisation) A la fin des années 80, la libéralisation du système algérien des assurances a induit des changements structurelles au niveau de la dé-spécialisation et la dé-monopolisation. Ces changements ont permis aux compagnies d'assurances plus compétitivité et une amélioration de leurs stratégies de développement. S'inscrivant dans ce contexte de mutations, l'ordonnance $N°95-07$ *du 23 chaàbane 1415 correspondant au 25 janvier 1995* relative aux assurances vient à son tour, contribuer aux changements en cours. Cette ordonnance visait à remettre en cause le monopole de l'Etat sur les opérations d'assurance. En d'autres termes, elle est considérée comme un déverrouillage réglementaire. Les responsables du secteur ont trouvé la nécessité de réviser ce pilier du secteur des assurances afin de la compléter et de l'améliorer.

1.2.2 Cadre juridique de l'activité des assurances :

Le cadre juridique de l'activité d'assurance en Algérie est régit par l'ordonnance $N°95-07$ *du 23 chaàbane 1415 correspondant au 25 janvier 1995* relative aux assurances et ses textes d'applications, modifiée et complétée par de nombreuses lois dont les dernières lois de finances de 2014 et de 2020, à cette version complétée sont annexés tous les décrets exécutifs ou les textes d'applications en vigueur. Le secrétariat permanent du Conseil National des Assurances ; l'organe officiel présidé par le Ministre chargé des finances publie régulièrement des mises à jour adoptées par le législateur ainsi que les décrets exécutifs relatifs à l'application de ces dispositifs qui définissent et organisent l'activité d'assurance en Algérie.

Suivant les dispositions des *articles 619, 625 et 620* du code civil, l'activité d'assurance est régit selon les trois volets que sont : la définition du contrat d'assurance,(source de la définition générale d'un contrat d'assurance précédemment introduite dans la présentation générale de l'activité d'assurance), l'organisation et le contrôle de l'activité d'assurance et enfin les assurances obligatoires.

Le contrat d'assurance

Selon l'article 6 et 7 de l'ordonnance $N°95-07$, le contrat d'assurance est écrit et rédigé en caractères apparents, Il doit contenir obligatoirement, outre les signatures des parties, les mentions ci-après :

- Les noms et domiciles des parties contractantes.
- La chose ou la personne assurée.
- La nature des risques garantis.
- La date de la souscription.
- La date d'effet et la durée du contrat.
- Le montant de la garantie.
- Le montant de la prime ou cotisation d'assurance.

Remarque 1.2.1. *: Il est noté suivant l'article 8 de l'ordonnance citée en haut, l'obligation de l'acception des deux parties engagées dans le contrat d'assurance par preuve soit de la police d'assurance, soit par la note de couverture ou toute autre écrit signé par l'assureur.*

Organisation et contrôle de l'activité d'assurance

L'organisation et le contrôle de l'activité d'assurance est un cadre très essentiel pour les compagnies d'assurance qui sans une bonne compréhension organisationnelle de leurs activités ne peuvent constituer un bon agent économique, ni encore un partenaire efficace pour leurs clients. En plus de la maitrise technique de l'activité d'assurance, l'organisation générale et les outils de contrôle de cette activité permettent un meilleur rendement pour la compagnie d'assurance et une bonne optimisation de cette fonction incontournable dans la vie économique de nos jours. L'activité d'assurance est organisée selon la législation Algérienne en trois titres généraux que sont les assurances terrestres, maritimes et aérienne.

Droits et obligations de l'assureur et de l'assuré :

Selon l'article 12 du code civil, l'assureur doit :

1. Répondre des pertes et dommages :
   a)- résultant de cas fortuits,
   b)- provenant de la faute non intentionnelle de l'assuré,
   c)- causés par les personnes dont l'assuré est civilement responsable, quelles que soient la nature et la gravité de la faute commise,
   d)- causés par les choses ou les animaux dont l'assuré est civilement responsable.
2. Exécuter selon le cas, lors de la réalisation du risque assuré ou à l'échéance du contrat, la prestation déterminée par le contrat qui ne peut être tenu au-delà.

Selon l'article 15 du même code, l'assuré est tenu entre autres de :

1. lors de la souscription du contrat d'assurance, de déclarer dans le questionnaire toutes les circonstances connues de lui, permettant à l'assureur d'apprécier les risques qu'il prend à sa charge,
2. payer la prime ou cotisation aux périodes convenues,
3. observer les obligations dont il a été convenu avec l'assureur et celles édictées par la législation en vigueur, notamment en matière d'hygiène et de sécurité, pour prévenir les dommages et/ou en limiter l'étendue,
4. aviser l'assureur, dès qu'il en a eu connaissance et au plus tard dans les sept (7) jours, sauf cas fortuit ou de force majeure, de tout sinistre de nature à entraîner sa garantie, de donner toutes les explications exactes concernant ce sinistre et son étendue et de fournir tous les documents nécessaires demandés par l'assureur.

Les assurances Obligatoires

Les assurances obligatoires telles qu'elles sont spécifiées selon la législation algérienne sont définies selon les trois titres généraux déjà cités. En plus d'un titre qui traite les diverses contraintes d'organisation et du contrôle de l'activité d'assurance, le titre sur les assurances obligatoires terrestres compte les assurances de responsabilité civile (exemple : transport publique de voyageurs), l'assurance d'incendie et l'assurance en matière de construction (architecte, entrepreneur, contrôleur technique), de la responsabilité civil chasse et automobile ainsi que des dispositions en matière de contrôle et de sanction sur ces assurances obligatoires. Un dernier titre est consacré aux différentes assurances obligatoires maritimes (exemple : assurance de navire immatriculé en Algérie) et aériennes.

1.2.3 Les sociétés d'assurance en Algérie

On comptes pas moins de 17 compagnies d'assurance privées ou publiques opérant au niveau du marché algérien. Ces compagnies sont organisées sous forme de sociétés par actions (SPA) ou de sociétés mutualistes.(cf. [80])

Nous distinguons Onze entreprises généralistes :

- Quatre entreprises publiques : SAA, CAAT, CAAR, CASH.

- Sept entreprises privées : TRUST, CIAR, 2A, GAM, Salama Assurances (ex Al Baraka Oua Al Amane), Alliance Assurances, Cardif El Djazaïr.

Trois entreprises spécialistes, toutes publiques :

-La CAGEX : assurance du crédit à l'exportation.

-La SGCI : assurance crédit immobilier.

-La CAGCI : assurance crédit à l'investissement des PME/PMI.

Une société publique de réassurance : La CCR.
Deux entreprises mutuelles :

-La CNMA : pour les agriculteurs.

-La MAATEC : pour les travailleurs de l'éducation et de la culture.

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons abordé quelques concepts généraux sur l'activité assurance et la notion de risque dans ce domaine. De plus, nous avons donné un aperçu sur le secteur des assurances en Algérie.

Chapitre 2

Modèles de risque en assurance

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter la construction d'un modèle individuel de risque qui modélise le comportement aléatoire du montant totale des sinistres a payer par la compagnie d'assurance sur une période donnée (typiquement un an) en sommant assuré par assuré les montants des sinistres subits par chaque individu sur cette période. Puis par le modèle collectif, on s'intéresse à la charge totale des sinistres susceptible d'être indemnisé par la réserve d'une compagnie d'assurance. Les deux modèles qu'on a repris de S. Loizel dans [25] pour le modèle individuel et de Dickson dans[24] pour le modèle collectif qui modélisent respectivement le montant de chaque sinistre subit par la réserve de la compagnie d'assurance (sévérité de la perte due au risque) et le montant totale des sinistres à indemniser (charge totale des sinistres) grâce aux différentes distributions de probabilités qu'ils utilisent et que nous traiterons dans les troisième et quatrième chapitres de ce travail.

En suite, on abordera les modèles de risque appliqués en temps continu, notamment le modèle du risque classique dit de *Cramer Lundberg* qui modélise l'évolution de la réserve d'une compagnie d'assurance au court du temps où le nombre de survenance des sinistre est décrit par un processus $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ de Poisson de paramètre λ et les montants des sinistres modélisés par $X_i, i \geqslant 0$ les variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes du processus du nombre de survenance des sinistres $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$. Son objectif étant d'assurer la solvabilité du capitale de la compagnie, ce modèle dit *Poisson composé* permet de définir et de calculer la probabilité de ruine et autres mesures de risque durant une période de temps T ou en temps infini. Grâce au chargement de sécurité supposé positif, on peut déterminer et garantir la rentabilité des opérations d'assurance engagées par la compagnie au court du temps.

Ce modèle fournit grâce à la formule de *pollaczek-Kinchine* une résultat numérique de la probabilité de ruine en temps infini. Ensuite, nous avons introduit la formule explicite de la probabilité de ruine à l'aide du coefficient d'ajustement de Lundberg, qui fournit une valeur numérique exacte de la probabilité de ruine. En dernier lieu, nous avons donnés l'approximation de Cramer Lundberg pour les valeurs asymptotiques de la probabilité de ruine ainsi qu'une simulation du processus de la réserve décrite dans le modèle de risque classique avec un tableau de valeurs simulées, comparées aux valeurs exactes de la probabilité de ruine.

2.2 Modèle de risque individuel

En assurance, le modèle individuel du risque permet la modélisation du montant des éventuels sinistres à couvrir par la réserve d'une compagnie d'assurance sur une période de temps donnée (typiquement un an) en sommant les montants des sinistres subis par chaque assuré (individu sinistré) sur la même période. S.Loizel (cf. [25], [?]).

Soient

- n : le nombre d'assurés qui correspond au nombre de polices d'assurances aussi désigné par l'effectif du portefeuille d'assurances.

- I_i : la variable aléatoire de *Bernouilli* qui vaut 1 si au moins un sinistre a touché la i^{me} police et 0 sinon.

- X_i la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui représente le montant total de ces éventuels sinistres couverts par la compagnie d'assurance qui peuvent être décrites soit directement, soit à l'aide du modèle collectif décrit juste après ce modèle individuel.

La charge totale des sinistres notée S^{Ind} est alors donnée par la formule

$$S^{Ind} = \sum_{i=0}^{n} I_i \, X_i.$$

Remarque 2.2.1. *Pour des raisons pratiques, des restrictions sur les hypothèses seront prisent en considération afin de réduire les difficultés des calculs liés au cas de nombre élevé de police d'assurance.*

2.2.1 Fonction de répartition de la charge des montants de réclamations

En générale, on considère l'hypothèse que les $(I_i, i \geqslant 0)$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $P(I_1 = 1) = p$ et qu'en plus, les montants $(X_i, i \geqslant 0)$ sont aussi indépendants du nombre de sinistres $(I_i, 0 \leq i \leq n)$ où n est le nombre de polices d'assurance. Dans ce cas, la fonction de répartition de la charge des sinistres individuels S^{Ind} est donnée par le produit de convolution classique.
On obtient

$$F_{S^{Ind}}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k \ (1-p)^{n-k} \ F_X^{*k}(x)$$

où F_X^{*k} est la fonction de répartition de $X_1 + ... + X_k$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$F_X^{*(k+1)}(x) = \int_0^x F_X^{*k}(x-y) \, dF_X(y).$$

Remarque 2.2.2. *Notons que $C_n^k p^k \ (1-p)^{n-k}$ représente ici la probabilité que k contrats parmi n aient subis au moins un sinistre sur la période considérée.*

Si de plus, les montants $(X_i, i \geqslant 0)$ sont indépendants et identiquement distribués, on peut simplifier la fonction de répartition de la charge totale des sinistres $F_{S^{Ind}}$ par

$$F_{S^{Ind}}(x) = \sum_{k=0}^{n} P(N=k) \ F_X^{*k}(x),$$

où n représente le nombre de polices d'assurance de sinistralité survenues au moins une fois parmi N polices d'assurances liés aux risque couvert par la compagnie d'assurance.

Dans ce cas, on a l'espérance et la variance de S^{Ind} données dans la partie suivante.

2.2.2 Espérance et variance de la charge des montants de réclamations

L'espérance ainsi que la variance de la charge totale S^{Ind} sont données respectivement par les formules suivantes, (cf. [25])

$$E(S^{Ind}) = n.p\ E(X_1)$$

et

$$Var(S^{Ind}) = n.p^2\ Var(X_1) + n.p\ (1-p)[E(X_1)]^2$$

où,

- n est le nombre de sinistres ou de réclamations.
- p est la probabilité que le sinistre ait lieu.
- X_1 est le montant de la première réclamation.

2.2.3 Fonction génératrice des moments d'un modèle individuel

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P). On appelle fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X, la fonction $M_X(t)$ définie par

$$M_X(t) = E^P[e^{tX}],$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que e^{tX} est $P-intgrable$.

La fonction génératrice des moments s'obtient de manière immédiate à partir de la transformée de Laplace $M(t) = L(-t)$, avec la transposition de ses propriétés.

Transformé de Laplace

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P). On appelle transformée de Laplace de la loi de X (ou de la mesure de probabilité (P_X), la fonction réelle M_X, définie par

$$M_X(t) = E^P[e^{-tX}] = \int e^{-tx}\ dP_X(x).$$

M_X est définie pour t tel que le moment d'ordre P est finie.

Propriété 2.2.1. *Ensemble de définition de M_X :*

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P). La transformée de Laplace M_X est définie sur un intervalle contenant 0. De plus, si X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors l'ensemble de définition de M_X contient $\mathbb{R}_+$.

Propriété 2.2.2. *dérivabilité de M_X :*

Si X est une variable aléatoire réelle positive, et si M_X (ou L_X) reste finie sur un intervalle ouvert contenant 0, alors M_X est infiniment dérivable en zéro, X admet des moments à tout ordre P et r et on a

$$E^P[X^r] = M_X^{(r)}(0) = (-1)^r L_X^{(r)}(0).$$

Proposition 1. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et positives*

on a alors l'égalité suivante

$$L_{X_1+X_2} = L_{X_1} + L_{X_2}.$$

La transformée de Laplace est un outil indispensable en théorie de la ruine, elle intervient par exemple dans le modèle de *Cramer-Lundberg* que nous allons voir a la fin de ce chapitre. La transformée de Laplace lorsque elle existe, permet de calculer tous les moments de X et dans certain cas, après inversion, de retrouver la fonction de répartition de X. Voici quelques définitions et théorèmes donnant des équations intégrales pour la fonction génératrice des moments de X.

Fonction génératrice d'un vecteur aléatoire

Pour tout vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)^T$ à valeurs dans $[0, +\infty[^n$ sa fonction génératrice des moments L_X est donnée par

$$L_X(x) = E[exp^{x^T X}],\ avec\ x^T \in [0, +\infty[^n$$

cette fonction est finie sur $(]-\infty, 0])^n$.

Ainsi, on peut définir la fonction génératrice des moments d'une distribution sur $\mathbb{N}$ et on donne

$$G_X(x) = \sum_{n \in N} x^n P(X = n),\ x \in [0, 1].$$

Corollaire 2. *(voir [7])* *Si G_1 et G_2 sont deux fonctions génératrices égales sur un intervalle $[c, 1]$ avec $c \in]0, 1[$, alors $G_1 = G_2$.*

Finalement, on donne la fonction génératrice des moments du modèle individuel $S_{Ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ par

$$L_{S^{Ind}}(x) = (L_X(x))^n, \text{ pour tout } x \in]-\infty, 0].$$

Lorsque X suit un certain type de lois, il est possible d'utiliser les propriétés d'additivité de ces lois pour obtenir directement les F_X^{*k} pour $k \geqslant 1$.

Supposant l'exemple d'une loi de Gamma, si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, alors F_X^{*k} est la fonction de répartition d'une loi Gamma de paramètres $(k\alpha, \lambda)$.

Ce résultat se généralise si l'indépendance est vérifiée pour $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda),\ i \geqslant 0$ avec des paramètres α_i différents, mais de même paramètre λ.

La principale difficulté de ce modèle (individuel) réside dans son utilisation numérique et c'est pour cela qu'on définit un autre modèle dit *Modèle collectif*, dans lequel on inclut N comme nombre total de sinistres (sans distinction police par police) au lieu du nombre de polices individuelles qui présentent au moins un sinistre sur la période considérée.

Enfin, pour étudier ce modèle individuel, un algorithme dit de *De Pril* existe et permet théoriquement d'obtenir la loi de S^{Ind}, mais qui est en pratique très peu utilisé [25].

2.3 Modèle de risque collectif

Le modèle de risque collectif est en fait, une généralisation du modèle collectif où l'on s'intéresse à la charge totale des sinistres ou le montant de la somme des réclamations individuelles sans distinction réclamation par réclamation.

2.3.1 La charge totale des sinistres

Définition 8. *On définit la variable aléatoire positive S^{coll} qui représente l'agrégation des montants de réclamations d'un risque considéré durant une durée déterminée T. On considère la variable aléatoire N à valeur dans $\mathbb{N}$ qui représente le nombre de réclamations pour le risque durant la période T et considérons la* *variable aléatoire X_i qui représente le montant de la i^{me} réclamation.*

L'agrégation ou la charge totale des sinistres est simplement la somme des montants de réclamations individuelles [24]. Alors on peut écrire

$$S^{coll} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

avec la convention selon laquelle $S^{coll} = 0$ lorsque $N = 0$.

On a déjà vu dans le modèle individuel pour les montants de réclamations, qu'il modélise les montants de réclamations par une variable aléatoire non négative à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

A présent, nous allons poser deux hypothèses très importantes a savoir

- Premièrement, nous allons s'assurer que le processus $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une distribution de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

- Deuxièmement, la variable aléatoire N est indépendante du processus $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Ces deux hypothèses implique que le montant de chaque réclamation ne dépend pas des autres montants de réclamations et la distribution des montants de réclamations ne change pas durant la période T. Dès lors, on peut constater que le nombre de sinistres (réclamations) ne dépend pas des montants de réclamations individuelles.

Typiquement, le risque est un portefeuille de polices d'assurance et le nom de modèle de risque collectif vient du fait que nous considérons le risque dans sa totalité. Particulièrement, on compte ou bien on dénombre l'effectif des réclamations du portefeuille de risque et non pas les réclamations par police d'assurance individuelle.[24]

2.3.2 La distribution de probabilité de la charge totale des sinistres

Pour définir la distribution de S^{coll}, on se donne les notations suivante :

Soient

- $G_{S^{coll}}(x) = P(S^{coll} \leq x)$ la distribution de probabilité de l'agrégation des réclamations.

- $F_X(x) = P(X_i \leq x),\ i \geqslant 0$ la distribution de probabilité des montants de réclamations individuelles.

- $P_N = P(N = n)$ la loi de probabilité du nombre de réclamations.

Lorsque X_1 est une variable aléatoire continue distribuée sur $\mathbb{R}$ avec P_X sa fonction génératrice de probabilités, on a la fonction génératrice de probabilité de $P_{S^{coll}}$ donnée comme suit

$$P_{S^{coll}}(x) = P_N[P_X(x)],$$

On peut dériver la distribution de S^{coll} sachant que l'événement $\big(S^{coll} < x\big)$ se réalise pour un nombre $n \in \mathbb{N}$ de réclamations.

Si la somme de ces n réclamations n'est pas supérieur à x, alors on peut représenter l'événement $\big(S^{coll} \leq x\big)$ comme l'union des événements mutuels et exclusifs $\big(S^{coll} \leq x\big)$ et $N = n$ et on écrit

$$\big(S^{coll} \leq x\big) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S^{coll} \leq x\ ,\ N = n\},$$

ce qui revient à dire que :

$$G_{S^{coll}}(x) = P(S^{coll} \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S^{coll} \leq x \text{ et } N = n).$$

A présent, on a

$$P(S^{coll} \leq x\ ,\ N = n) = P(S^{coll} \leq x | N = n) P(N = n)$$

et

$$P(S^{coll} \leq x\ | N = n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) = F_X^{*n}(x).$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ on a

$$G_{S^{coll}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\ F_X^{*n}(x)$$

Rappelons que $F_X^{*0}(x)$ est définit dans le modèle individuel par 1 pour $x \geqslant 0$ et zéro ailleurs.

En principe, cette dernière équation fournie un moyen de calculer la fonction de répartition de l'agrégation des sinistres. Cependant, le produit de convolution F_X^{*n} n'existe pas sous forme fermée pour plusieurs distributions de montant de sinistres individuels d'intérêt pratique tels que la loi de Pareto et la loi Lognormale et même dans le cas d'existence sous forme fermée, la fonction de répartition dans l'équation précédente doit encore être évaluée comme une somme infinie.

Lorsque le montant des réclamations individuelles est distribué sur $\mathbb{N}$ avec pour fonction de probabilité :

$$f_i = F(i) - F(i-1), \ avec \ i \in > 0.$$

La distribution de probabilité $\{G_{S^{coll}}\}_{X=0}^{\infty}$ est obtenue à partir de $G_0 = P_0$ et pour $(X_i, \ i \geqslant 1)$, elle est donnée par

$$G_X = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \ f_x^{*n}$$

où $f_x^{*n} = P\left(\sum_{i=1}^{n} \ X_i = x \right)$.

Cette dernière formule n'est pas beaucoup plus utile que la précédente. Cependant, pour certaines distributions du nombre N de réclamations, G_X peut être calculée récursivement pour $(X_i, \ i \geqslant 0)$ en utilisant G_0 comme valeur initiale pour le calcul récursif.

2.3.3 L'espérance de la charge totale des sinistres

L'espérance et la fonction génératrice des moments de la charge totale des sinistres peuvent êtres calculées à l'aide des arguments d'espérance conditionnelle(cf. [24]).

Les principaux résultats pour deux variables aléatoires X et Y pour qui l'espérance existe sont

$$E[X] = E\left[E(X/Y)\right]$$

et

$$V[Y] = V[E(X/Y)] + E[V(X/Y)].$$

L'application du premier résultat de l'espérance sur le modèle collectif nous donne

$$E[S^{coll}] = E[E(S^{coll}/N)].$$

Soit $m_k = E[X_1^k]$ pour $k \geqslant 1$, on a alors

$$E[S^{coll}|N = n] = E\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} E[X_i] = nm_1,$$

et comme cela reste valable pour $n \geqslant 1$, on a

$$E[S^{coll}|N] = N.m = E[Nm] = E[N]\ m.$$

Il s'agit d'un résultat très attrayant car il indique que le montant total moyen des réclamations est le produit du nombre moyen des réclamations et du montant moyen de chaque réclamation.

2.3.4 La Variance de la charge totale des sinistres

De façon similaire au calcul de l'espérance de S^{coll} et en utilisant le fait que $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une variable aléatoire indépendante, on a la variance de la charge totale des sinistres pour un nombre n de réclamations

$$V[S^{coll}|N = n] = V\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} V[X_i] = n(m_2 - m_1^2).$$

En utilisant $V[S^{coll}|N] = N(m_2 - m_1^2)$ et on appliquant le deuxième résultat, on obtient

$$V[S^{coll}] = E[V(S^{coll}|N)] + V[E(S^{coll}|N)]$$

d'ou

$$V[S^{coll}] = E[N(m_2 - m_1^2)] + V[N.m_1].$$

Finalement, on peut exprimer la variance de la charge totale des sinistres S^{coll} en fonction de l'espérance et de la variance des deux variables aléatoires X et N par

$$V[S^{coll}] = E[N](m_2 - m_1^2) + V[N]\ m_1^2.$$

Cette dernière formule n'a pas le même type d'interprétation que la précédente formule, elle montre que la variance de la charge totale des sinistres S^{coll} est exprimée en fonction de la moyenne et de la variance à la fois de la distribution du nombre de réclamations et de la distribution des montants de réclamations individuels.

2.3.5 La fonction génératrice des moments de la charge totale des sinistres :

Cette technique utilisée pour le calcul de l'espérance et de la variance de S^{coll} peut être encore utilisée pour obtenir la fonction génératrice des moments de S^{coll} et on a le résultat suivant

$$M_{S^{coll}}(t) = E[e^{tS^{coll}}] = E[E[(e^{tS^{coll}} \, |N)]]$$

et

$$E[(e^{\left(tS^{coll}\right)} \, |N = n)] = E[(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)] = \prod_{i=1}^{n} E[(\exp(tX_i)].$$

Si on utilise de nouveau l'indépendance des $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ et le fait qu'elles sont identiquement distribuées, on aura

$$E[(e^{tS^{coll}} \, |N = n)] = M_X(t)^n, \;\; o \;\; M_X(t) = E[e^{tX_1}].$$

Ceci nous permet d'exprimer la fonction génératrice des moment de la charge totale des sinistres $M_{S^{coll}}$ en fonction de M_N et M_X et on a

$$M_{S^{coll}}(t) = E[M_X(t)^N] = E[\exp\left(LogM_X(t)^N\right)] = E[\exp\left(N \; LogM_X(t)\right)].$$

d'ou

$$M_{S^{coll}}(t) = M_N\left(LogM_X(t)\right).$$

Remarque 2.3.1. *Dans le développement des résultats ci-dessus, il a été tacitement supposé que toutes les quantités pertinentes existent, cependant, nous avons vu auparavant que des moments et des fonctions génératrices des moments ne peuvent exister que sous certaines conditions. Par exemple, si le moment du second ordre de X_1 n'existe pas alors le moment du second ordre de S^{coll} n'existera pas non plus.*

2.4 Modèle de risque classique

Le modèle de risque *Cramér-Lundberg*, qui est désigné aussi sous le nom du modèle de risque classique ou encore Poisson composé, a été introduit en 1903 par l'actuaire Suédois *Filip Lundberg*(cf.[23]).

Le modèle classique de la théorie de la ruine modélise l'évolution de la réserve (capitale) d'une compagnie d'assurance. En partant de l'hypothèse que la compagnie d'assurance encaisse des cotisations de ses clients (assurés) désignées par primes et en supposant ces primes encaissées de façon déterministe et continue à raison de c unités de compte par unité de temps t. Notons par u le dispositif financier de réserve initiale de la compagnie en vue d'absorber un éventuel excès de sinistralité et l'indemnisation de ses assurés pour les sinistres qui la concernent. S. Loizel dans (cf.[25])

2.4.1 Agrégation des sinistres

Le montant cumulé ou l'agrégation des sinistres, noté $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se calcul à un instant $(t \geqslant 0)$ par le processus stochastique suivant :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{X_i}, \tag{2.1}$$

où

- $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$ est le processus de comptage qui représente le nombre de sinistres survenus jusqu'au temps t, supposé dans le modèle classique comme processus de Poisson de paramètre $(\lambda > 0)$.

- avec la convention selon laquelle la somme $S(t)$ est nulle si $N(t) = 0$.
- le montant d'un sinistre i est modélisé par une variable aléatoire X_i à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Les $\{\mathbf{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes du processus de Poisson $\{N(t)\}_{t\geqslant 0}$.

- $F_X(x)$ est la fonction de répartition des montants des réclamations X et son espérance, supposée finie, sera notée μ.

2.4.2 Modélisation de la réserve d'une compagnie d'assurance

Dans le modèle de risque classique, la réserve d'une compagnie d'assurance est modélisée à l'instant t par le processus $\{\mathbf{R(t)}\}_{t\geqslant 0}$ en fonction de la réserve initial u, de l'agrégation des sinistres $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ et du nombre de polices d'assurance encaissées à raison de c unités par instant t. Le processus $\{\mathbf{R}(t)\}_{t\geqslant 0}$ est donné par

$$\mathbf{R}(t) = u + ct - \mathbf{S}(t), \quad avec \ S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{X_i}. \tag{2.2}$$

2.4.3 Mesures de risque

En actuariat, la mesure de risque est une notion incontournable. En particulier, dans le domaine des assurances, on a tendance a définir des mesures qui nous permettent de savoir l'évolution de la réserve d'une compagnie au court du temps ainsi que la solvabilité du portefeuille d'assurance suivant les risques couverts par la compagnie d'assurance. On parlera dans ce qui suit de la probabilité de ruine, de l'instant de ruine, du maximum de surplus, de la sévérité de la ruine ainsi que le temps passé en-dessous de zéro. Ces mesures utilisées dans la théorie de la ruine ont étés largement étudiées dans (cf. [14], [13], [12]).

Probabilité de ruine

Elle correspond à la probabilité que la réserve de la compagnie devienne strictement négative à un instant t . C'est la mesure de risque la plus utilisée dans la prise de décision.

En supposant une réserve initiale u de la compagnie, la probabilité de ruine se note traditionnellement par
En temps fini, elle est définie par

$$\psi(u\ ,t) = \mathbb{P}\left(\exists t \in [0,T],\ \mathbf{R}(t) < 0\right)\ avec\, \mathbf{R}(0) = u,\ u \geqslant 0. \tag{2.3}$$

En temps infini, on définit la probabilité de ruine par

$$\psi(u) = \psi(u\ ,+\infty) = \mathbb{P}\left(\exists t \geq 0,\ \mathbf{R}(t) < 0\right),\ avec\, \mathbf{R}(0) = u, u \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Définition 9. *Probabilité de non ruine :*

On note également, les probabilités de non ruine correspondantes respectivement par $\bar{\psi}_{\mathbf{T}}$ et $\bar{\psi}$, définies par les équations suivantes

$$\begin{cases} \bar{\psi}(u\ ,t) = 1 - \psi(u\ ,t), \\ \qquad\qquad et \\ \quad \bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u). \end{cases} \tag{2.5}$$

Instant de ruine

L'instant de ruine est une autre mesure de risque notée T_u, qui définie l'instant où le processus de la réserve $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ est strictement négatif, elle correspond à l'instant t où la charge totale des sinistres $S(t)$ est strictement supérieur à la somme de la valeur de la réserve initiale u et de la somme des primes reçus c.

L'instant de ruine est donnée par

$$T_u = \inf\{t \geqslant 0,\ R(t) < 0\} = \inf\{t \geqslant 0,\ S(t) > u + ct\}. \tag{2.6}$$

où $\{S(t), t \geqslant 0\}$ est le processus de la charge totale des sinistres définit par

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{X_i} = u + ct - R(t),\ t \geqslant 0.$$

et on déduit que

$$\psi(u) = P\left(\exists t \geqslant 0 :\ R(t) < 0\ /R(0) = u\right) = P\left(T_u < \infty\ /R(0) = u\right)$$

Le maximum de surplus

La *sévérité maximale de la ruine* ou le maximum de surplus représente la charge maximale des totaux des sinistres au cours d'une période de temps infini ou fini. Le maximum du processus de surplus noté M respectivement M_T pour une période de temps fini T, est définit par

$$\begin{cases} M = Sup\{S(t),\ t \geqslant 0\} \\ et \\ M_T = Sup\{S(t),\ t \in [0, T]\} \end{cases} \tag{2.7}$$

Remarque 2.4.1. *La probabilité de ruine peut être exprimée en fonction de l'instant de ruine et du maximum de surplus en temps infini et fini respectivement par :*

$$\begin{cases} \psi(u) = P(T_u < \infty) = P(M > u + ct),\ t \geqslant 0 \\ et \\ \psi(u, T) = P(T_u < T) = P(M_T > u + ct), t \in [0, T]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Autres mesures de risque

D'autres mesures de risque existes pour l'étude du risque en assurance. Voici quelques-unes les plus utiles

- La sévérité de la ruine donnée par

$$R(T_u) = u + cT_u - S(T_u).$$

où T_u est un instant de ruine.

- Le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement obtenu avec
$$T_u^{'} - T_u. \;\; o \;\; T_u^{'} = inf\{t > T_u, \; R(t) = 0\}.$$
- La sévérité de la ruine jusqu'au rétablissement
$$J(u) = \int_{T_u}^{T_u^{'}} \mid R(t) \mid dt.$$
- Le temps total passé en-dessous de zéro
$$\tau(u) = \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{R(t)<0\}} dt.$$

2.4.4 Espérance et variance du processus de réserve

Dans ce modèle de risque dit de *Cramer-Lundberg* (classique) définit précédemment par

$$\mathbf{R}(t) = u + ct - S(t), \; t \geqslant 0$$

avec

- $S(t) = \lim \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbf{X_i}$,
- $\{N(t) \; , t \geqslant 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ,
- X_i représente les pertes (réclamations) individuelles supposées indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $\mu = E[X_i]$.

L'espérance ainsi que la variance du processus des pertes cumulées $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ sont donnés respectivement pour $t \geqslant 0$ par (S. Loizel [18])

$$E[S(t)] = E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i] = E[N(t)] \; E[X_i] = \mu \; \lambda t,$$

et

$$Var[S(t)] = E[N(t)] \; E[(X_i)^2] = \lambda t \; E[(X_i)^2].$$

En conséquence, l'espérance et la variance du processus de réserve $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ seront respectivement

$$E[R(t)] = E[u + ct - S(t)] = u + (c - \mu\lambda)t, \quad t \geqslant 0,$$

et

$$Var[R(t)] = Var[-S(t)] = Var[S(t)] = \lambda t \; E[(X_i)^2], \quad t \geqslant 0.$$

2.4.5 Chargement de sécurité

Le coefficient ou le chargement de sécurité θ est un indicateur de la rentabilité des contrats d'assurance engagés par la compagnie (cf.[18]). Il indique l'appréciation ou la dépréciation du rendement obtenue durant les opérations d'assurance engagées par la compagnie d'assurance. On le définit par

$$\theta = c - \lambda\mu, \tag{2.9}$$

où

- $\lambda > 0$ est le paramètre d'intensité de la loi de Poisson qui modélise la distribution des montants de réclamations individuelles.

- μ est la moyenne de la charge totale des sinistres à couvrir par la réserve de la compagnie.

- c est le montant des primes encaissées durant les opérations d'assurance exprimées par contrats.

Remarque 2.4.2. *De l'équation (2.9), on constate facilement deux cas de figures à savoir :*

a) Si $c > \lambda\mu$, alors $\theta > 0$, ce qui donne une appréciation satisfaisante de la rentabilité de l'activité. On parle donc d'activité rentable. Autrement dit, lorsque t tend vers l'infini, le processus $\{R(t), t \geqslant 0\}$ tend vers $+\infty$ presque sûrement, ce qui rend la probabilité de non ruine $\bar{\psi}(u)$ (respectivement$\bar{\psi}(u,T)$) strictement positive.

b) Dans le cas où $c < \lambda\mu$, c'est-à-dire $\theta < 0$, l'appréciation de la rentabilité de l'activité est considérée insatisfaisante ou défaillante, explicitement lorsque t tend vers l'infini, le processus de réserve $\{R(t), t \geqslant 0\}$ tend presque sûrement vers $-\infty$, ce qui annule la probabilité de non ruine de la réserve. Autrement dit, $\psi(u) = 1$, la ruine est certaine.

Dans la suite de ce travail, l'hypothèse que la rentabilité de l'activité est satisfaisante sera toujours maintenue en dépit de sa non exigence en temps fini.

2.4.6 Fonction génératrice des moments

On a $u - R(t) = S(t) - ct$,

$M_{S(t)-ct}(x) = E[\exp^{x(S(t)-ct)} = e{-}ctx\ M_{S(t)}(x) = \exp^{-ctx}\ M_{N(t)}(\ln(M_X(x))) = \exp^{t(\lambda(M_X(x)-1)-cx)}$

on remarque que $M_{S(t)-ct}(0) = E[\exp^{0(S(t)-ct)}] = 1, \forall t \geqslant 0$.

Proposition 3. *S'il existe $\rho > 0$ tel que $\lambda(M_X(\rho) - 1) - c\rho = 0$,*
Alors la probabilité de ruine vérifie

$$\psi(u) \leqslant \exp^{-\rho u}.$$

et par conséquent, $\psi(u) \to 0$ lorsque $u \to +\infty$ avec une vitesse exponentielle.

2.4.7 Coefficient d'ajustement de Lundberg

Si on considère des primes de la forme $c = (1+\theta)\lambda\mu$ avec $\theta > 0$ (afin d'éviter la ruine certaine), l'équation de Lundberg s'écrit

$$\lambda(M_X(\rho) - 1) - c\rho = \lambda(M_X(\rho) - 1) - (1+\theta)\ \lambda\mu\ \rho = 0$$

d'où

$$\lambda(M_X(\rho) - 1) - (1+\theta)\mu\rho) = 0.$$

Définition 10. *Le coefficient d'ajustement est la plus petite solution strictement positive $\rho > 0$ telle que*

$$M_X(\rho) = 1 + (1+\theta)\mu\rho.$$

Remarque 2.4.3. *Pour certaines lois de probabilité M_X n'est pas défini tel que Pareto et Log-Normale et donc leurs coefficient d'ajustement n'existes pas. Si M_x existe et bien défini, alors le coefficient existe mais n'est pas toujours simple à calculer.(cf.[10],[5])*

En effet, on cherche $\rho > 0$ tel que : $M_X(\rho) = 1 + (1+\theta)\mu\rho$.
On a $X \to 1 + (1+\theta)\mu x$ est une droite en partant de 1 de pente $(1+\theta)\mu$
et $X \to M_X(x)$ passe par 1 en zéro, elle est convexe.

2.4.8 Probabilité de non ruine du modèle Cramer-Lundberg

La probabilité de non ruine $\bar{\psi}(u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet comme dérivées à gauche et à droite respectivement $\bar{\psi}'_+$ et $\bar{\psi}'_-$, qui vérifient respectivement les équations intégro-différentielles suivantes :

$$\begin{cases} c\bar{\psi}'_+(u) = \lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y)\, dF_X(y)), \\ \\ c\bar{\psi}'_-(u) = \lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^{-u} \bar{\psi}(u-y)\, dF_X(y)). \\ \end{cases} \tag{2.10}$$

Ce couple d'équations contient à la fois une dérivée et une intégrale de $\bar{\psi}$. L'intégration de la première équation du couple nous ramène à l'équation intégrale suivante

$$c\psi(u) = \lambda(\int_u^\infty \bar{F}_X(x)\, dx \ + \int_0^u \psi(u-x)\, \bar{F}_X(x)\, dx) \tag{2.11}$$

ce qui nous ramène à cette équation

$$\psi(u) = \psi(0) + \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-x)\, \bar{F}_X(x)\, dx\right). \tag{2.12}$$

Transformée de Laplace de la probabilité de ruine

Les transformées de Laplace de ψ et $\bar{\psi}$ respectivement $\widehat{L}_\psi(s) = \int_0^\infty \psi(u)\, e^{-su}\, du$ et $\widehat{L}_{\bar{\psi}}(s) = \int_0^\infty \bar{\psi}(u)\, e^{-su} du$, sont données en fonction de la transformée de Laplace $\widehat{l}_X$ de la variable aléatoire X qui représente les pertes individuelles et on a la proposition suivante.

Proposition 4. *Pour tous $s > 0$,*

$$\begin{cases} \widehat{L}_{\bar{\psi}}(s) = \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-\widehat{l}_X(s))}, \\ \\ \qquad et \\ \widehat{L}_\psi(s) = \frac{1}{s} - \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-\widehat{l}_X(s))}. \\ \end{cases} \tag{2.13}$$

Par la suite, on obtient la formule de **Pollaczek-Khinchine** qui fait intervenir des produits de convolution infinis de la fonction de survie intégrée F_X^s de X définie pour tout $x \geqslant 0$ et donne

$$F_X^s(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_X(y)\, dy, \tag{2.14}$$

où $\bar{F}_X(y) = 1 - F_X(y)$ est la fonction de survie de X.

Dans la suite de ce travail, G^{*n} désignera le n^{me} produit de convolution d'une fonction G avec elle-même et qui vérifie $G^{*0} \equiv 1$.

Formule de Pollaczek-Khinchine

Proposition 5. *démonstration voir dans [16]*
Pour tout $(u \geqslant 0)$, *la probabilité de survie partant de u vérifie l'équation :*

$$\bar{\psi}(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{1+\theta})^n \; (\bar{F}_X^s)^n \; (u). \tag{2.15}$$

Cette formule fournit un premier moyen d'obtenir un résultat numérique de la probabilité de ruine en temps infini.

Formule explicite de la probabilité de ruine

Dans le cas du modèle classique ou $X \sim exp(\frac{1}{\mu})$ et d'après l'équation integro-différentielle (10), pour tout$(u \geq 0)$,

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\psi(u) - \int_0^u \psi(u-y) \; e^{-\frac{y}{\mu}} dy \right) = \frac{\lambda}{c} \left(\psi(u) - \int_0^u \psi(y) \; e^{-\frac{u-y}{\mu}} dy \right). \tag{2.16}$$

En dérivant par rapport à u, on obtient

$$\psi''(u) = \frac{\lambda}{c} \psi'(u) \; \frac{\lambda}{c} \frac{(-1)}{\mu} \; \int_0^u \psi(y) \; e^{-\frac{u-y}{\mu}} dy \; - \frac{\lambda}{c\mu} \psi(u). \tag{2.17}$$

remarquant que d'après l'équation intégro-différentielle (10) le second terme de droite dans l'équation (17) est égale à

$$\frac{\lambda}{c} \frac{(-1)}{\mu} \; \int_0^u \psi(y) \; e^{-\frac{u-y}{\mu}} dy = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda}{c} \psi(u) - \psi(u) \right). \tag{2.18}$$

L'équation (17) se simplifie donc en

$$\psi''(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} \right) \psi'(u). \tag{2.19}$$

Soit

$$\rho = \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} = \frac{\theta}{(1+\theta)\mu}.$$

En intégrant deux fois, on obtient

$$\psi(u) = C_1 + C_2 e^{-\rho u}.$$

$C_1 = \psi(+\infty) = 1$ et

$$\psi(0) = C1 + C2 = 1 - \frac{1}{1+\theta}$$

d'où pour $u \geq 0$,

$$\psi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta}\, e^{-\rho u}. \tag{2.20}$$

et

$$\bar{\psi}(u) = \frac{1}{1+\theta}\, e^{-\rho u}. \tag{2.21}$$

où $\theta = c - \lambda\mu.$ est le chargement de sécurité.

Exemple 2.4.1. *On supposant que les pertes sont exponentielles et que le capital initiale de la compagnie fixé à u, on cherche le chargement de sécurité θ de façon à ce que la probabilité de ruine soit égale à $\alpha = 0.5$.*
par conséquent, on cherche θ tel que

$$\frac{1}{1+\theta} e^{-\rho u} = 0.5, \ \ \textit{avec} \ \ \rho = \frac{\theta}{(1+\theta)\mu}.$$

la valeur de θ sera obtenue de façon numérique et exacte.

Valeurs asymptotique de la probabilité de ruine

Le but est d'estimer les valeurs de U et de θ pour que la probabilité de ruine soit inférieure à un certain seuil α. On donne dans ce qui suit une approximation dite de Cramer de la probabilité de ruine.

Théorème 6. *Considérons des pertes dont la fonction génératrice des moments existe.*
Soit ρ le coefficient d'ajustement de Lundberg : $M_X(\rho) = 1 + (1+\theta)\mu\rho$.
Alors, la probabilité de ruine vérifie :

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{ce^{-\rho u}} = 1.$$

avec $c = \frac{\mu\theta}{M_{X'}(\rho) - \mu(1+\theta)}$.
Autrement dit, lorsque $n \to \infty$ on a $\psi(u) \sim ce^{-\rho u}$.

2.4.9 Simulation du processus de réserve

Dans cette partie, nous allons présenté les résultats de simulation de la probabilité de ruine dans le modèle de Lundberg obtenus par A. Touazi dans (cf. [9]) où le problème de la compagnie d'assurance a été modélisé par deux vecteurs à n composantes où n est le nombre de points de la trajectoire qui correspond au nombre de sinistres. La simulation est faite de manière a relier les points par des segments de droite. Chaque élément du premier vecteur représente un instant $T_i,\ i \geqslant 0$ de sinistre. Ceux du deuxième vecteur représentent la valeur du montant $X_i,\ i \geqslant 0$ correspondant au instants T_i.(cf.[9])

2.4.10 Algorithme de Simulation du processus de la réserve

La construction de cette algorithme de simulation est faite avec la définition des paramètres d'entrées et de sorties de la procédure qui simule le processus de la réserve de la compagnie.

Les entrées :

- λ : représente le taux d'arrivé des sinistres.
- $\frac{1}{\mu}$: représente le montant moyen des réclamation.
- u : représente la réserve initiale de la compagnie d'assurance.
- c : représente le taux de primes considéré comme constant.
- fin : représente le temps de simulation.

Les sorties

-reserve- représente le vecteur de la réserve aux instants des sinistres.
-sinistre- représente le vecteurs des instants d'arrivées des sinistres.

La procédure de l'algorithme

Procédure[reserve,sinstre]=**Procéduredereserve**$(\lambda, \mu, u, c, fin)$
début

$$t \leftarrow 1;$$

$$sinistre[1] \leftarrow 0;$$

$$y \leftarrow 0;$$

$$X[1] \leftarrow u;$$

Tanque (y<=fin) **faire**

$$gnrers \leftrightsquigarrow Exponentielle(\lambda)$$

$$y \leftarrow sinistre[t] + s;$$

Si (y<fin) **alors**

$$sinistre[t+1] \leftarrow y;$$

$$gnrerZ \leftrightsquigarrow Exponentielle(\mu);$$

$$X1[t] \leftarrow X[t] + c^*(sinistre[t+1] - sinistre[t]);$$

$$X[t+1] \leftarrow X1[t] - Z;$$

Fin Si

$$t \leftarrow t+1;$$

Fin Tanque

$$n \leftarrow 2^*Longueur(X);$$

$$reserve[1] \leftarrow u;$$

Pour i allant de 2 **jusqu'à** $(n-1)$ **faire**

Si (mod(i,2)==0) **alors**

$$reserve[i] \leftarrow X1[i/2];$$

Sinon

$$reserve[i] \leftarrow X1[i+1/2];$$

Fin Si

Fin Pour

$$reserve[n] \leftarrow reserve[n-1] + c^*(fin - sinistre[n-1]);$$

Exemple 2.4.2. *Pour les valeurs suivantes des paramètres de la procédure qui simule le modèle de risque classique :*

- $\lambda = 10$ *: représente le taux d'arrivé des sinistres.*
- $\frac{1}{\mu} = 170$ *: représente le montant moyen des réclamation.*
- $u = 10000$ *: représente la réserve initiale de la compagnie d'assurance.*
- $c = 1500$ *: représente le taux de primes considéré comme constant.*
- $fin = 36$ *: représente le temps de simulation.*

*Et en utilisant le logiciel **MATLAB 7.4 (R2007a)**, les résultats obtenus de la trajectoire du processus de réserve sont représentés dans la figure qui suit :*

Fin.

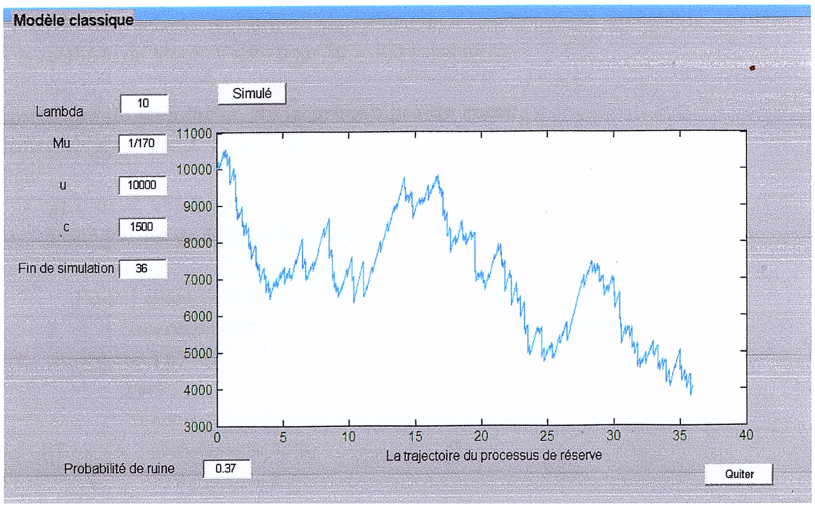

FIGURE 2.1 – Interface sous MATLAB du modèle de risque classique : Sa trajectoire et sa probabilité de ruine.

2.4.11 Comparaison des résultats

Le tableau qui suit expose quelques résultats de simulation de la probabilité de non ruine comparés aux valeurs exactes calculées pour différentes valeurs du taux d'arrivées des sinistres (réclamation), du taux de service (montant de réclamation) et des différentes valeurs de la réserve initiale et avec un taux de prime $c = 1$.

On remarque que la valeur simulée de la probabilité de non ruine $\bar{\psi}(u, T)$ est égale à la valeur exacte. bien que cette dernière est différentes de la probabilité de non ruine lorsque $\lambda \simeq \mu$ (condition de stabilité du système).

λ	u	μ	$\bar{\psi}(u)$	la valeur exacte commune
0.01	1	0.0101	0.089	0.01
		0.02	0.509	0.505
		0.03	0.678	0.673
		0.1	0.906	0.908
		$\geqslant 1$	1	1
0.01	10	0.0101	0.097	0.01
		0.02	0.547	0.547
		0.03	0.728	0.727
		0.1	0.960	0.959
		$\geqslant 1$	1	1
0.5	1	0.501	0.052	0.003
		0.6	0.248	0.246
		0.7	0.420	0.415
		0.9	0.625	0.627
		$\geqslant 1$	1	1
0.5	10	0.501	0.207	0.011
		0.6	0.695	0.693
		0.7	0.905	0.903
		0.9	0.991	0.989
		$\geqslant 1$	1	1

TABLE 2.1 – Résultat de simulation et du calcul exact de la probabilité de non ruine.

Le modèle de risque classique de la théorie de la ruine peut être généralisé sous diverses formes que l'on distingue suivant les deux hypothèses portant sur le passif de la compagnie (la modélisation des sinistres) et sur son actif (investissement de la réserve et la prise en compte du taux d'intérêt). Dans ce travail, nous nous intéresserons à l'hypothèse qui porte sur le passif de la compagnie d'assurance.

La première généralisation possible du modèle de risque Poisson Composé est le modèle de **Sparre Andersen** [11], dans lequel $\{N(t)_{t\geqslant 0}\}$ n'est plus un processus de Poisson mais un processus de renouvellement stationnarisé, donné par des temps inter-sauts $\triangle_i$ indépendants, identiquement distribuées et indépendants des montants de réclamations X_i, et de fonction de répartition $F_{\triangle}$.Ce modèle est décrit à la fin du chapitre qui suit, dédié aux distributions de la fréquence des réclamations.

2.5 Conclusion

En décrivant l'activité assurance et ses paramètres, nous avons présenté les modèles probabilistes les plus étudiées dans la littérature à savoir les modèles de risque individuels et collectifs ainsi que le modèle de risque classique. En se basant sur ces modèles, nous avons définit plusieurs mesures de risque avec quelques résultats fondamentaux sur l'évaluation de leurs caractéristiques, en particulier sur l'estimation de la probabilité de ruine.

Chapitre 3

Distributions de la fréquence des réclamations

Dans ce chapitre, nous allons discuter les principales lois de probabilités (discrètes) utilisées pour la modélisation de la fréquence des réclamations (sinistres). En actuariat, on utilise fréquemment les lois de Poisson, Binomiale et Binomiale Négative pour la représentation du nombre de réclamations. Les lois de probabilité de la charge totale des sinistres S (montants cumulés des réclamations) correspondantes sont alors appelées lois de Poisson composée, Binomiale composée et Binomiale négative composée.

Nous nous intéresserons aussi aux extensions obtenues par mélange à la loi de Poisson qui occupe une place centrale dans la modélisation de risque en assurance et on décrit selon le besoin et l'adéquation des lois aux exigences des situations réelles de risques à modéliser. Ces lois sont décrites comme combinaison des lois usuelles en probabilités et on cite : Poisson-Gamma ou la loi Binomiale négative, Poisson-Inverse Gaussienne et Poisson-Lognormale. De plus, on indiquera pour chaque loi de fréquence les expressions de l'espérance, de la variance et de la fonction génératrice des moments ainsi que le coefficient d'asymétrie de la loi composée correspondante. E. Marceau et Klugman dans (cf.[28], [29]).

3.1 La famille de lois (a,b,0)

Définition 11. *La distribution $(p_k)_{k \geqslant 0}$ d'une variable aléatoire discrète appartient à la famille $(a, b, 0)$ s'il existe deux constantes a, b qui vérifient*

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n} \quad avec \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Une distribution de la famille $(a, b, 0)$ est entièrement caractérisée par les valeurs a, b et p_0.

Voici un tableau descriptif des distributions de probabilités appartenant à la famille de lois $(a, b, 0)$

Distribution	a	b	p_0
Poisson	0	λ	$\exp^{\lambda}$
Binomiale	$\frac{-q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$1-q)^m$
Binomiale négative	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1-\beta)^{-r}$
Géométrique	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1-\beta)^{-r}$

Table 3.1 – Les distributions de la classe (a,b,0)

3.1.1 La loi de Poisson

La loi de Poisson est fondamentale dans la modélisation du nombre de sinistres et la gestion de risque en assurance. Elle est employée comme loi de fréquence dans le modèle classique [Cramer-Lundberg] et constitue en quelque sorte la base des lois de la fréquence ou le nombre de réclamations. Elle vérifie la propriété de l'équidispersion où l'espérance et la variance de la variable aléatoire sont égales.

Définition 12. *On dit que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on écrit $N \sim P(\lambda)$ si*

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad avec \; k \in \mathbb{N}.$$

On a alors, la fonction génératrice de probabilité P_N de la variable aléatoire N donnée par $P_N = e^{-\lambda(t-1)}$.

L'espérance ainsi que la variance de la fréquence N des sinistres, suivant la loi de Poisson sont données respectivement par

$$E[N] = \lambda \quad et \quad V[N] = \lambda.$$

Propriété 3.1.1. *Si $N_1, N_2, ..., N_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivants des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, alors $N = N_1 + N_2 + ... + N_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.*

Lorsque $N \sim P(\lambda)$, il en découle que la variable aléatoire de la charge totale des sinistres S suit une loi de Poisson composée de paramètres λ et F_X, notée $S_P \sim PCamp(\lambda; F_X)$.
où $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Espérance et variance de la loi de Poisson composée

On considère l'agrégation des montants de réclamations $S_P = \sum_{i=1}^{N} X_i$ où $N \sim P(\lambda)$. On utilisant les résultats sur l'espérance et la variance de la fréquence des réclamations, on obtient l'espérance et la variance de S_P donnés respectivement par

$$E[S_P] = \lambda E[X]$$

et

$$V[S_P] = \lambda\, V[X] + \lambda E[X]^2 = \lambda E[X^2],$$

où X représente le montant des réclamations.

Fonction génératrice des moments et coefficient d'asymétrie de la loi de poisson composée

Dans cette partie, nous allons présenter la fonction génératrice des moment et le coefficient d'asymétrie de la loi de poisson composé. Rappelons d'abord de manière générale, la définition et les propriétés du coefficient d'asymétrie.

Définition 13. *Coefficient d'asymétrie* *Soit la variable aléatoire X dont les trois premiers moments existent. Le coefficient d'asymetrie de la variable aléatoire X, noté, $\gamma(X)$, est défini par :*

$$\gamma(X) = \frac{E[(X - E[X])^3]}{Var(X)^{\frac{3}{2}}}$$

. où le troisième moment centré est donne par :

$$E[(X - E[X])^3] = E[X^3] - 3E[X]E[X]^2 + 2E[X]^3$$

Remarque 3.1.1. *Le coefficient d'asymétrie donne une information quant à la symétrie de la distribution de X par rapport à son espérance et on distingue :*

- *Le cas où $\gamma(X) = 0$, la distribution de la v.a. X est symétrique par rapport à son espérance. La loi normale est un exemple de distribution avec un coefficient d'asymétrie nul.*

- *Si ,$\gamma(X) > 0$, l'asymétrie de la distribution de X est à gauche (positive), ce qui signifie que la distribution est plus étalée à droite de l'espérance. Ainsi, la probabilité que la v.a. X prenne une valeur beaucoup plus élevée que son espérance est élevée.*

La fonction génératrice des moments de S_P est donnée par

$$M_{S_P}(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}.$$

où M_X est la fonction génératrice des moments de X.
Ainsi, on obtient le moment centré d'ordre trois

$$E[(S_P \ - \ E[S_P])^3] = E[(S_P)^3] \ - \ 3E[S_P] \ E[S_P]^2 \ + \ 2E[S_P]^3.$$

Par conséquent, nous pouvons calculer le coefficient d'asymétrie qui donne une information quant à la symétrie de la distribution de S_P par rapport à son espérance.

En effet, le moment d'ordre 3 de S_P est donné par

$$E[S_P^3] = \lambda E[X^3] \ + \ 3\lambda \ E[X] \ E[X^2] \ + \ \lambda^3 \ E[X]^3.$$

En dérivant $M_X(t)$ trois fois de suite on obtient

$$E[(S_P \ - \ E[S_P])^3] = \lambda \ E[X^3].$$

Ainsi, on obtient l'expression suivante du coefficient d'asymétrie de la loi de Poisson composée

$$\gamma(S_P) = \frac{E[(S_p \ - \ E[S_P])^3]}{V[S_P]^{\frac{3}{2}}} = \frac{E[X^3]}{\sqrt{\lambda \ E[X^2]^3}} > 0.$$

Remarque 3.1.2. *Notons que :*

- *La distribution de Poisson composée est toujours positivement asymétrique. D'où la probabilité que* S_P *prenne une valeur beaucoup plus élevée que son espérance est élevée.*

- *La loi de Poisson a le double avantage d'être compatible à une étude dynamique de la survenance des sinistres et d'apparaître naturellement comme limite de lois binomiales. Néanmoins, la sur-dispersion due à l'hétérogénéité du portefeuille peut conduire à lui préférer d'autres types de lois. S. Loisel [25]*

3.1.2 Loi Binomiale

La loi Binomiale modélise la situation où l'on compte le nombre de succès parmi n expériences réalisées de façon indépendante.

Définition 14. *La variable aléatoire* N *suit la loi Binomiale de paramètres* n *et* p *notée* $N \sim B(n,p)$ *si*

$$P(N=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}, \; n \in \mathbb{N}$$

où

- k *est le nombre de succès -sinistres- parmi* n *polices d'assurance.*

- $(P = (1-q), \; q \in [0,1])$ *est la probabilité d'avoir un succès -sinistre-.*

L'espérance et la variance de la fréquence des sinistres N *suivant la loi Binomiale sont données respectivement par*

$$E[N] = np$$

et

$$V[N] = np(1-p).$$

Lorsque la fréquence des sinistres $N \sim Bin(n,p)$, la charge totale des sinistres S suit une loi Binomiale composée avec les paramètres n, p et F_X, notée $S_B \sim BComp(n,p,F_X)$ où F_X est la distribution des montants de sinistres.

Propriété 3.1.2. *En fixant* $np = \lambda$, *la loi Binomiale tend vers la loi de Poisson de paramètre* λ *lorsque le nombre* n *tend vers* ∞.

Démonstration. voir E. Marceau dans (cf.[28]). □

Espérance et variance de la loi Binomiale Composée

L'espérance ainsi que la variance de la charge totale des sinistres S_B sont données respectivement par

$$E[S_B] = np\ E[X]$$

et

$$V[S_B] = np\ V[X] + np(1-p)\ E[X]^2.$$

Fonction génératrice des moments et coefficient d'asymétrie

La fonction génératrice des moments de S_B est donnée par (voir [28])

$$M_{S_B}(t) = (1 - p + p\ M_X(t))^n,$$

où M_X est la fonction génératrice des moments du montant de réclamation X.

Le moment centré d'ordre 3 de S_B est donne par

$$E[(S_B\ -\ E[S_B])^3] = np\ (E[X^3]\ - 3p^2\ E[X^2]\ E[X]\ +\ 2p^3\ E[X]^3).$$

En simplifiant les termes de cette dernière équation, on obtient le coefficient d'asymétrie suivant :

$$E[(S_B - E[S_B])^3] = E[N]\left(E[(X - E[X])^3]\ +\ 3(1-p)E[X]V[X]\ +\ (1-p)(1-2p)E[X]^3\right)$$

De cette dernière équation, on déduit que $\gamma(S_B)$ est positif si $E[(X - E[X])^3] > 0$, qui est une condition souvent satisfaite par la distribution des montants de sinistres si $p < 0.5$, ce qui est souvent le cas des contextes d'application en actuariat.

3.1.3 La loi Binomiale négative

La loi binomiale négative modélise la situation où l'on compte le nombre d'échecs nécessaires pour avoir n succès en répétant de manière successive une expérience où la probabilité d'avoir un succès est $p = \frac{1}{q+1}$. (cf.[28])

Définition 15. *On dit que la variable aléatoire de la fréquence des sinistres N suit une loi Binomiale négative de paramètres r, q et on note $N \sim BN(r, q)$ si*

$$P(N = n) = C^n_{r+n-1} \left(\frac{1}{q+1}\right)^r \left(\frac{q}{q+1}\right)^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

où

- *n est le nombre sucés appartenant à $\mathbb{N}$,*

- *r est le nombre d'échecs avant n sucés,*

- *q est la probabilité de l'échec.*

Dans ce cas, on a l'espérance et la variance de la fréquence des sinistres données respectivement par

$$E[N] = rq$$

et

$$V[N] = rq(1+q).$$

On en déduit l'inégalité suivante

$$V[N] > E[N].$$

Lorsque N suit une loi $BN(r, q)$, la variable aléatoire qui modélise la charge totale des sinistres S suit une loi Binomiale négative composée avec les paramètres r, q et F_X, notée $S_{BN} \sim BNCamp(r, q; F_X)$. voir (cf.[28], [29])

Espérance et variance de la loi Binomiale Négative Composée

L'espérance et la variance de S_{BN} sont données respectivement par

$$E[S_{BN}] = r\left(\frac{1-q}{q}\right)\ E[X]$$

et

$$V[S_{BN}] = r\left(\frac{1-q}{q^2}\right)\ E[X]^2 \quad + \quad r\left(\frac{1-q}{q}\right)\ V[X]$$

Fonction génératrice des moments et coefficient d'asymétrie

La fonction génératrice des moments de S_{BN} est donnée par :

$$M_{S_{BN}}(t) = \left(1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)(M_X(t) - 1)\right)^r.$$

Le moment centré d'ordre d'ordre 3 de S est alors obtenu comme suit :

$$E[(S_{BN} - E[S_{BN}])^3] = \left(r\left(\frac{1-q}{q}\right) E[X^3] - 3r\left(\frac{(1-q)^2}{q^2}\right) E[X^2] + E[X] + 2r\left(\frac{(1-q)^3}{q^3}\right) E[X]^3\right)$$

Puisque cette dernière expression est toujours positif, on conclut que la loi Binomiale négative composée possède toujours une asymétrie positive.

3.1.4 Comparaison des variances des lois composées

On sait que la fréquence des sinistres N, lorsqu'elle suit une lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, elle admet λ comme valeur pour l'espérance et la variance de N. Ceci dit

$$V[N_P] = E[N_P].$$

Lorsqu'elle suit une loi Binomiale, on a l'assertion

$$V[N_B] \leq E[N_B].$$

Dans le cas où N suit une loi Binomiale négative, on a l'assertion suivante

$$V[N_{BN}] \geqslant E[N_{BN}].$$

.(cf.[3],[4])

Pour une loi de Poisson composée P^{Comp} on a son espérance et sa variance données respectivement par

$$E[S_P] = \lambda E[X]$$

et

$$V[S_P] = \lambda\, V[X] + \lambda E[X]^2 = \lambda E[X^2].$$

où X représente le montant des réclamations.
Pour la Binomiale composée, on a respectivement l'espérance et la variance de la charge totale des sinistres

$$E[S_{BComp}] = np\; E[X]$$

et

$$V[S_{Bcomp}] = nq(V[X] + (1-q)E[X]^2).$$

De même pour la loi Binomiale négative composée, on a respectivement son espérance et sa variance

$$E[S_{BNComp}] = r\left(\frac{1-q}{q}\right)\; E[X]$$

et

$$V[S_{BNComp}] = r\left(\frac{1-q}{q}\right)\left(\frac{1}{q}E[X]^2 \;+\; V[X]\right).$$

Par conséquent, si les paramètres des trois lois qui modélisent la fréquence N des réclamations sont fixés de telle sorte que leurs espérances sont identiques $\left(np = \lambda = r\left(\frac{1-q}{q}\right)\right)$ et si la loi du montant de réclamation X est identique pour les trois lois composées, on constate que

$$E[S^{BComp}] = E[S^{PComp}] = E[S^{BNComp}]$$

et

$$V[S^{BComp}] \leq V[S^{PComp}] \leq V[S^{BNComp}].$$

3.2 Famille de loi (a,b,1)

De nombreuses distributions de probabilités existent et servent a la modélisation de la fréquence des sinistres.Dans ce qui suit, on présente d'autres lois de probabilité appartenant à la famille de lois $(a, b, 1)$ qui permettent la modélisation du nombre de sinistres en précisant pour chaque distribution son espérance et sa variance ainsi que sa fonction génératrice des moments.(cf.[8]

Pour chacune des lois suivantes, on retient les notations
- $P(N = n)$: la loi de probabilité de N,
- $E(N)$: espérance de N,
- $Var(N)$: variance de N,
- $P_N(t)$: la fonction génératrice des moments de N.

3.2.1 La loi Géométrique (p)

$$\begin{cases} P(N=n) &= p(1-p)n, n \in \mathbb{N}. \\ E(N) &= \frac{1-p}{p} \ \ et \ \ Var(N) = \frac{1-p}{p^2}. \\ P_N(t) &= 1 + \frac{1-p}{p}(t-1). \end{cases}$$

3.2.2 La loi de Poisson Inverse Gaussienne (μ, β)

$$\begin{cases} P(N=0) &= e^{-\mu\left(\sqrt{1+2\beta-1}\right)/\beta}. \\ P(N=n) &= p_0 \, \frac{\mu^n}{n!} \, \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1+m)!}{(n-1+m)!m!}\right) \left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^m (1+2\beta)^{\frac{-n+m}{2}}. \\ E(N) &= \alpha\beta, Var(N) = \frac{\alpha(\beta+1)}{(\beta)^2}. \\ P_N(t) &= e^{-\mu\left(1+2\beta(1-t)^{1/2}-1\right)/\beta}. \end{cases}$$

3.2.3 La loi de Poisson Zéro Tronquée (λ) :

$$\begin{cases} P(N=n) &= \frac{\lambda^n}{k!(e^{\lambda}-1)}, n \in \mathbb{N}. \\ E(N) &= \frac{\lambda}{1-e^{\lambda}} \ \ et \ \ Var(N) = \frac{\lambda\left(1-(\lambda+1)e^{-\lambda}\right)}{\left(1-e^{-\lambda}\right)^2}. \\ P_N(t) &= \frac{e^{\lambda t}-1}{e^{\lambda}-1}. \end{cases}$$

3.2.4 La loi Géométrique Zéro Tronquée (λ) :

$$\begin{cases} P(N=n) &= p(1-p)^{n-1}, n \in \mathbb{N}. \\ E(N) &= \frac{1}{p} \;\; et \;\; Var(N) = \frac{1-p}{p^2}. \\ P_N(t) &= \frac{(1+(1-p)(1-t)/p)^{-1}-p}{1-p}. \end{cases}$$

3.2.5 La loi Binomiale Zéro Tronquée (m ;p) :

$$\begin{cases} P(N=n) &= \frac{C_n^m \, p^n \, (1-p)^{m-n}}{1-(1-p)^m}, n \in \mathbb{N} \; et \; n \leq m. \\ \\ E(N) &= \frac{mp}{1-(1-p)^m} \;\; et \;\; Var(N) = \frac{(mp((1-p)-(1-p+mp)(1-p)^m)}{(1-(1-p)^m)^2}. \\ \\ P_N(t) &= \frac{(1+p(t-1))^m-(1-p)^m}{1-(1-p)^m}. \end{cases}$$

Distributions	p_0	a	b	Espace des paramètres
Poisson	$\exp^{-\lambda}$	0	λ	$\lambda > 0$
Poisson ZT	0	0	λ	$\lambda > 0$
Poisson ZM	arbitraire	0	λ	$\lambda > 0$
Binomiale	$(1-p)^n$	$-\frac{p}{1-p}$	$(m+1)\frac{p}{1-p}$	$0 < p < 1$
Binomiale ZT	0	$-\frac{p}{1-p}$	$(m+1)\frac{p}{1-p}$	$0 < p < 1$
Binomiale ZT	arbitraire	$-\frac{p}{1-p}$	$(m+1)\frac{p}{1-p}$	$0 < p < 1$
Binomiale négative	p^r	$1-p$	$(r-1)(1-p)$	$0 < p < 1, r > 0$
ETNB	0	$(1-p)$	$(r-1)(1-p)$	$0 < p < 1, r > -1$
ETNB ZM	arbitraire	$1-p$	$(r-1)(1-p)$	$0 < p < 1, r > -1$
Géométrique	p	$(1-p)$	0	$0 < p < 1$
Géométrique ZT	0	$(1-p)$	0	$0 < p < 1$
Géométrique ZM	arbitraire	$(1-p)$	0	$0 < p < 1$
Logarithmique	0	$(1-p)$	$-(1-p)$	$0 < p < 1$
Logarithmique ZM	arbitraire	$(1-p)$	$-(1-p)$	$0 < p < 1$

TABLE 3.2 – Les distributions de probabilité de la famille (a,b,1) où ZT : zéro tronqué et ZM : zéro modifié.

Avec le coefficient d'ajustement γ introduit dans ce modèle, il permet d'encadrer la probabilité de ruine pour les distributions de montant à queue légère et l'usage de la loi *exponentielle* de paramètre $\frac{1}{\mu}$ comme distribution de montant d'un sinistre W et la loi de *poisson* de paramètre λ comme distribution de fréquence permet d'écrire la fonction de l'évolution de la réserve en fonction du coefficient d'ajustement γ et la moyenne de la charge des sinistres μ tendit que

3.3 Modèle de Sparre Anderson :

Le modèle de *Sparre Anderson* est un cas de figure du modèle classique où la distribution de fréquence des sinistres n'est plus modélisée par un processus de Poison mais par un processus de renouvellement stationnarisé, donné par des temps inter-sauts $\triangle_i$ indépendants, identiquement distribués et indépendant des montants des sinistres X_i. Les résultats de ce modèle restent appréciable dans le cas d'une réserve initial assez grande. Dans ce modèle, les distributions à queue lourde présentent un comportement asymptotique de la probabilité de ruine qui ne dépend du montant de sinistre qu'à travers ses queues et de l'espérance du temps inter-sinistres.(cf.[1],[14],[18]

Considérons le modèle de Sparre Andersen, toujours avec des montants de sinistres modélisés par des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et des temps inter-sinistres indépendants et distribués comme $\triangle$ et indépendants des montants des sinistres. Supposons aussi que le chargement de sécurité est strictement positif. Le processus décrivant la réserve disponible au temps t s'écrit encore :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Soit

$$\hat{m}_X(s) = E[e^{sX}].$$

Pour les distributions de montants de sinistres à queues légères, l'équation en s

$$\hat{m}_X(s)\hat{l}_\triangle(cs) = 1.$$

où $\hat{l}_\triangle$ est la transformé de Laplace des temps inter-sinistres.

Cette dernière équation admet une solution non nulle γ appelée le coefficient d'ajustementγ.

Soit $Y = X - c\triangle$, et $x_0 = sup\{x;\ F_Y(x) < 1\}$.

Théorème 7. *Pour tout $u \geqslant 0$, on a l'encadrement :*

$$b_- e^{-\gamma u} \leq \psi(u) \leq b_+ e^{-\gamma u},$$

où $0 \leq b_- \leq b_+ \leq 1$ *vérifient :*

$$b_- = \inf_{x \in [0;x_0[} \frac{e^{\gamma x}\bar{F}_Y(x)}{\int_x^\infty e^{\gamma y} d\bar{F}_Y(y)}, \quad et \quad b_+ = \sup_{x \in [0;x_0[} \frac{e^{\gamma x}\bar{F}_Y(x)}{\int_x^\infty e^{\gamma y} d\bar{F}_Y(y)}.$$

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$, et si $\{N(t), t \geqslant 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ, alors la propriété asymptotique devient une égalité vraie pour tout $u \geqslant 0$:

$$\psi(u) = (1 - \mu\gamma)e^{-\gamma u}.$$

Cette formule peut être généralisée à une famille de lois appelées lois *phase-type*, que nous introduirons plus loin dans le chapitre dédié aux distributions de montant d'un sinistre, dont font partie entre autres les lois exponentielles et Gamma.

3.4 Conclusion

Le nombre ou la fréquence des réclamations est un paramètre aléatoire qui gouverne un modèle de risque avec d'autres paramètres. Sa modélisation par une variable aléatoire ou par un processus stochastique au fil du temps nécessite la détermination de sa distribution de probabilité afin de l'utiliser dans les calculs actuariels. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéresse aux différentes lois de probabilité les plus utilisées par les actuaire dans la description du nombre de pertes pour l'assureur.

Chapitre 4

Distribution de montant d'un sinistre

Le choix de la distribution du montant d'un sinistre est crucial dans la gestion du risque en assurance. En générale, la distribution de la sévérité des pertes est bien choisit pour répondre aux exigences imposées par la nature du risque a couvrir et son impact sur la réserve de la compagnie d'assurance. Nous allons voir le long de ce chapitre que les lois de probabilités continues, sur un support compris dans $\mathbb{R}_+$, les plus appropriées à la modélisation du comportement aléatoire du montant d'un sinistre X.([2],[3][4])

Nous allons exposé les principales distributions de sévérité qui modélisent le montant d'un sinistre toute en prenant le soins de préciser leurs principales caractéristiques qui les rendent adéquates pour une représentation efficace et assez proche des cas réelles auquel une compagnie d'assurance est exposé en terme de risque.

Dans la majorités des contextes d'application en assurance dommage et en assurance maladie, les distributions des montants de sinistre possède une asymétrie positive.

Les principales lois pour le montant d'un sinistre sont les lois *exponentielle, gamma, lognormale* et *Pareto*. Il y a aussi les lois *Burr, Weibull* (avec $T \in]0,1[$), *log-logistique, F-généralisée* et *inverse-gaussienne.* Ainsi, des lois construites à l'aide de mélange telles que la loi *mélange d'exponentielles* et la loi *mélange d'Erlang* sont aussi utilisées.

4.1 La loi Exponentielle :

En actuariat, la loi exponentielle est une loi fondamentale pour la description du comportement aléatoire du montant d'un sinistre. Elle possède de nombreuses propriétés intéressantes et reste une loi de référence pour les autres lois de probabilités continues utilisées dans la description du comportement d'un montant de sinistre. Parmi ses avantage, la loi exponentielle est définie en terme d'un seul paramètre, son mode est à 0, sa fonction d'excès moyen est constante et son coefficient d'asymétrie est égal à 2. En revanche, il est rare que la loi exponentielle soit utilisée directement pour modéliser un montant de sinistre.

En supposant la variable aléatoire qui représente le montant d'un sinistre X distribuée suivant la loi exponentielle $X \sim Exp(\lambda)$, il est possible d'obtenir des expressions analytiques de quantiles définis en fonction de la charge totale des sinistres S, notamment la fonction de répartition et d'autres mesures de risque associées à S.(cf.[28])

Définition 16. *On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim Exp(\lambda)$ si sa densité de probabilité est de la forme*

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{x \geqslant 0}.$$

De plus, X est carré intégrable

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration. On obtient les deux premiers moments par une simple intégration par parties.(cf.[27]) □

La fonction de répartition de la distribution du montant de sinistres suivant la loi exponentielle est donnée $\forall x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}_+}.$$

4.1.1 Propriété sans mémoire de la loi exponentielle

La propriété suivante est propre à la loi exponentielle, elle est dit *propriété sans mémoire* et souvent utilisée dans la modélisation du risque en assurance.

Proposition 8. *On définit la variable aléatoire $X(d) = (X - d) \mid X > d$, correspondant à l'excèdent de la variable aléatoire X par rapport à d sachant que X dépasse d. Alors, on a :*

$$X(d) \sim Exp(\lambda).$$

Démonstration. On identifie la distribution de $X(d)$ à partir de sa fonction de survie qui est donnée par

$$\bar{F}_{X(d)}(x) = P(X(d) > x) = P((X - d) > x \mid X > d) = \frac{e^{-\lambda(x+d)}}{e^{-\lambda d}} = e^{-\lambda x}.$$

□

Corollaire 9. *Soit la variable aléatoire X tel que $X \sim Exp((\lambda)$. La loi exponentielle possède la propriété de perte de mémoire et on a pour tout s et t positifs*

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

Remarque 4.1.1. *On peut démontrer que la loi exponentielle est la seule loi continue sur $\mathbb{R}_+$ à avoir cette propriété. Cependant, cette proposition est très utilisée en théorie de la ruine, car elle permet de qualifier un processus de Poisson composé par un processus qui perd sa mémoire à un instant bien choisi, ou d'utiliser des méthodes de martingales lorsque les coûts de sinistres suivent une loi exponentielle.(voire cf. [25]).*

Dans le modèle de risque classique (Cramer-Lundberg), si les montants de réclamations $(X_i)i \geqslant 1$ suivent une loi exponentielle de paramètre $(\frac{1}{\mu})$, alors la probabilité de ruine en temps infini possède une formule explicite donnée par l'équation suivante

$$\bar{\psi}(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{1+\theta})^n \; (\bar{F}_X^s)^n \; (u), \tag{4.1}$$

où $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$.

4.1.2 Fonction génératrice et fonction caractéristique de la loi exponentielle :

On note par M_X et ϕ, respectivement la fonction génératrice des moments et la fonction caractéristique de la variable aléatoire X du montant des sinistres. On a les assertions suivantes

$$\begin{cases} M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda, \\ \quad\quad et \\ \phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad t < \lambda. \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1.3 Fonction de survie d'une somme de variables aléatoires exponentielles :

On peut étendre cette propriété du minimum au cas de plusieurs variable aléatoire indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ de lois exponentielles de paramètres respectifs $(\lambda_i > 0)$ avec $i = 1, ..., n$. Ainsi, l'instant de ruine représenté par la variable aléatoire $T_u = \inf\{t \geqslant 0,\ R(t) < 0\}$ obéit aussi a la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Démonstration. (voir cf.[28]) La fonction de survie de T_n est donnée par :

$$P(min(X_1; ...; X_n) > x) = P(X_1 > x, ..., X_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = e^{-(\lambda_1, + ... + \lambda_n)x}.$$

□

Remarque 4.1.2. *Cette propriété est utilisée notamment pour la construction de la loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin.*

Exemple 4.1.1. *Un investisseur serait entre autres intéressé par la connaissance de la loi du premier temps de défaut, c'est-à-dire de $T = Min(X_1, X_2, ..., X_n)$ et de savoir lequel des actifs risqués peut faire défaut en premier. Les réponses à ces deux questions pour des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielles sont très faciles.*

4.2 Sommes de variables aléatoires exponentielles indépendantes :

Le temps entre deux sauts d'un processus de Poisson homogène d'intensité $(\lambda > 0)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. Chaque saut d'un processus de Poisson correspond en théorie de la ruine à un sinistre (accident de voiture, incendie, ...) que la compagnie d'assurances va devoir indemniser. Si on modélise par X_1 l'instant de survenance du premier sinistre, puis par X_2 le temps écoulé entre le premier et le deuxième sinistre, et plus généralement par X_i le temps écoulé entre $(i+1)^{me}$ sinistre et le i^{me} sinistre et si l'on suppose que les $(X_i)_{i\geqslant 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et de loi exponentielle de paramètre λ, quelle est la loi de la date de survenance du n^{me} sinistre ?

4.2.1 La loi de Gamma

La loi Gamma est une généralisation de la loi exponentielle. Avec ses deux paramètres n et $\left(\beta = \frac{1}{\lambda}\right)$, elle offre plus de flexibilité dans la modélisation du montant des réclamations d'un risque en assurance. Si $(n > 1)$, son mode est supérieur à 0 et sa fonction d'excès moyen est décroissante. La loi exponentielle est un cas particulier de la loi Gamma où $n = 1$.

Définition 17. *Soient $(n \geqslant 1)$ et $X_1, ..., X_n$ des variable aléatoire indépendantes, identiquement distribuées et de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit S_n la somme de ces variables aléatoires. Alors, on dit que $S_n = X_1 + ... + X_n$ suit une loi Gamma de paramètres (n, β) si sa densité de probabilité est*

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On note $S_n \sim \Gamma(\alpha = n, \beta = \frac{1}{\lambda})$, la variable aléatoire S_n qui suit la loi de Gamma de paramètres n et β.

Espérance et variance de la loi Gamma

On conservant les hypothèses de la propriété sans mémoire de la loi exponentielle, on donne respectivement l'espérance et la variance de S_n par

$$E(S_n) = \frac{n}{\beta} \;\; et \;\; Var(S_n) = \frac{n}{\beta^2}.$$

Démonstration. Immédiat, d'après la proposition 8 de la propriété sans mémoire de la loi exponentielle et le fait que les montants $(X_i, \; i \geqslant 1)$ sont aléatoires, indépendants et identiquement distribuées. □

Fonction de répartition et fonction caractéristique de la loi Gamma :

On note par F_{S_n}, la fonction de répartition de la loi Gamma et on donne

$$F_{S_n}(t) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^n, \;\; t < \frac{1}{\beta}.$$

et ϕ_{S_n} la fonction caractéristique de la loi Gamma est donnée par

$$\phi_{S_n}(t) = \frac{1}{1-\beta i t}, \quad t < \frac{1}{\beta}.$$

De même que la loi exponentielle, on obtient des expressions analytiques de $F_X, E[S_n \times \mathbf{1}_{(Sn>b)}]$ lorsque le montant d'un sinistre obéit a une loi Gamma. Ces expressions sont présentées dans la prochaine proposition (cf.[28]).

Proposition 10. *Supposons que $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Alors, on déduit que*

$$F_X(x) = f_N(0) \ + \sum_{k=1}^{\infty} F_N(k) \ H(x; \alpha k, \beta), \tag{4.3}$$

et

$$E[S_n \times \mathbf{1}_{S_n>b}] = \sum_{k=1}^{\infty} F_N(k) \ \frac{k\alpha}{\beta} \ \bar{H}(b; \alpha(k+1), \beta), \tag{4.4}$$

Démonstration. voir(cf.[28]). □

Distribution	Densité	Paramètres
Uniforme sur $[a, b]$	$1/(b-a)$, $a \leqslant x \leqslant b$	$a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$
Normale ou Gaussienne	$(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Log-normale	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x > 0$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Rayleigh	$x e^{-x^2/2}$, $x \geqslant 0$	
Gamma	$\frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$, $x \geqslant 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$
Beta	$\frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{B(r,s)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$	$r > 0$, $s > 0$
Exponentielle (Γ, $\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$)	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$	$\lambda > 0$
Laplace	$\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}$	$\lambda > 0$
Chi-deux, χ^2 (Γ, $\alpha = n/2$, $\beta = 2$)	$\frac{2^{-n/2} x^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)}$, $x \geqslant 0$	$n = 1, 2, \ldots$
Student, t	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{(n\pi)^{1/2}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}^{-(n+1)/2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$	$n = 1, 2, \ldots$
F	$\frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2,n/2)} \frac{x^{m/2-1}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}}$	$m, n = 1, 2, \ldots$
Cauchy	$\frac{\theta}{\pi(x^2+\theta^2)}$, $x \in \mathbb{R}$	$\theta > 0$
Logistique	$\frac{e^{-(x-\alpha)/\beta}}{(1+e^{-(x-\alpha)/\beta})^2}$	$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$
Weibull	$\alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha}$, $x > 0$	$0 < \alpha < 1$, $\theta > 0$
Gumbel	$\exp(x - e^x)$, $x \in \mathbb{R}$	
Pareto	$\alpha k^\alpha x^{-(\alpha+1)}$, $x \geqslant k$	$k > 0$, $a > 0$, $x \geqslant k$

FIGURE 4.1 – Tableau des distributions les plus utilisées pour la modélisation des montants de sinistres en assurance .

4.2.2 Loi d'Erlang

La loi *Erlang* est aussi un cas particulier de la loi Gamma avec le paramètre $\alpha = n$,un entier positif appartenant à $\mathbb{N}^+$, ce qui implique que la fonction de répartition de $S_n = X_1 + ... + X_n$ aura la forme analytique suivante

$$F_{S_n}(x) = H(x; n, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!},\ x \in \mathbb{R}^+$$

Cela reste valable pour tout paramètre de type entier de la loi Gamma. La loi d'Erlang intervient fréquemment dans les calculs malgré qu'elle n'est pas utilisée directement pour modéliser la distribution des montants de sinistres.

Comme nous l'avons signaler au début de ce chapitre, il existe beaucoup de distributions dédiées à la modélisation du montant des réclamations en assurance. Voici quelques unes les plus utiles :

- Pareto : elle permet de modéliser les très gros sinistres (facile à repérer car le log de la fonction de survie est linéaire en fonction du log des coûts) de densité : soit $\theta, \alpha > 0$,

$$f(x) = \alpha \frac{\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \mathbf{1_{x \geqslant 0}}.$$

  Généralisation : Pareto généralisée, Pareto inverse.

- Burr : souvent utilisée pour étudier les revenus des ménages, de densité : soit $\alpha, \beta > 0$,

$$f(x) = \alpha\beta \frac{x^{\beta-1}}{(1+x^\beta)^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{x \geqslant 0}.$$

  Généralisation : Burr inverse.

- Log-logistique pour modéliser des durée de vie dont l'intensité peut croître ou décroître, de densité :
  soit $\alpha, \beta > 0$,

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{(x/\alpha)^{\beta-1}}{(1+(x/\alpha)^\beta)^2} \mathbf{1}_{x \geqslant 0}.$$

- Gumbel : elle permet de modéliser un maximum, de densité :
  Soit $\mu \in \mathbb{R}$ (paramètre de position), et $\tau > 0$ (paramètre d'échelle)

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-(x-\mu)/\lambda} exp\left(e^{-(x-\mu)/\lambda}\right).$$

- Normale : loi centrale en statistique, de densité :
  Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

  Généralisation : LogNormale, Inverse Gaussienne.

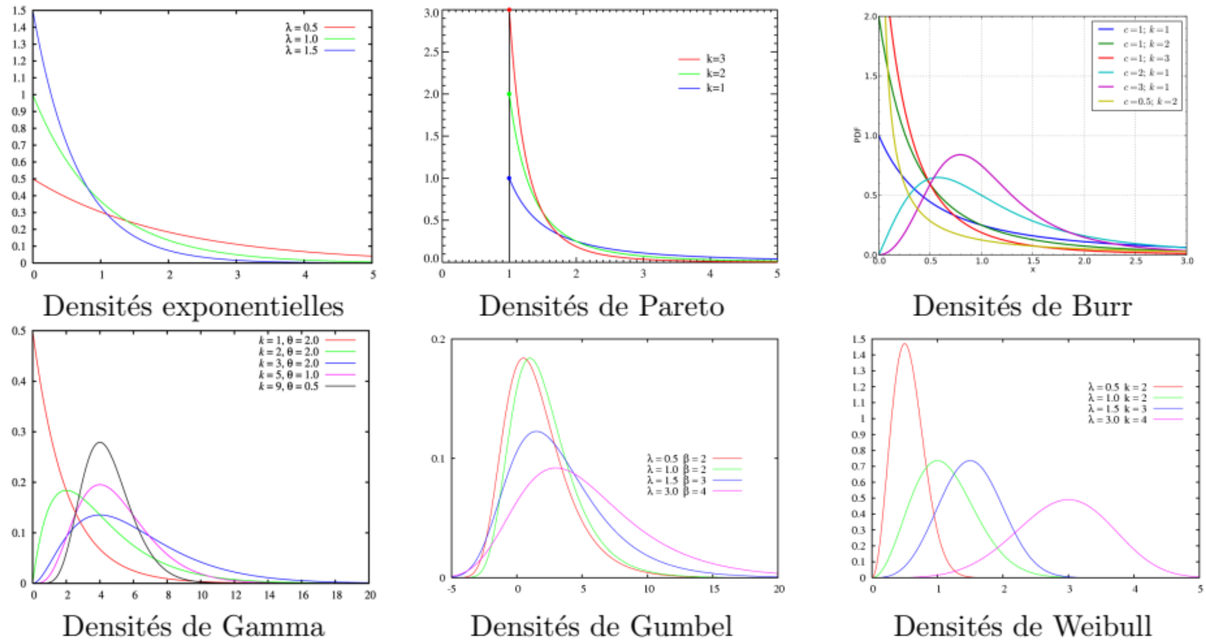

FIGURE 4.2 – Représentation graphique des densités de quelques lois de probabilité du montant des sinistres .

4.3 Étude des queues

En assurance, il est important de connaître le type de la queue d'une distribution. Par exemple, une catastrophe naturelle arrive rarement amis très lourde de conséquences pour les compagnies d'assurance.(cf.[**?**])
Dans la partie suivante, quelques objets permettant d'étudier les queues d'une loi de probabilités

- hazard rate.
- Limited expected value, Mean excess loss.

Définition 18. *Soit X une variable de loi de densité f et de fonction de répartition F. Son hazard rate est*

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = P\left(X + dx \mid X > x\right)$$

Si h est décroissante, on dit alors que les queues (ailes) de la loi X sont épaisses et si h est croissante alors les queues de X sont légères.

On remarque que $S(x) = 1 - F(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt}$.

- La loi de Pareto : $h(x) = \frac{\alpha}{x+\theta}$.

- La loi exponentielle : $h(x) = \lambda$.

Définition 19. *The mean excess loss (aussi appelé mean residual life) de la variable X est défini par*

$$e(d) = \mathbb{E}[X - d \mid X > d] = \frac{1}{1 - F_X(d)} \left(\mathbb{E}[X] - lev(d)\right),$$

où F est la fonction de répartition de X.

La fonction e caractérise la loi de X et surtout contient les informations sur les queues. On dit qu'une distribution a des queues épaisses si e est une fonction croissante et qu'elle a des queues légères si MEL est une fonction décroissante.

Remarque 4.3.1. *On remarque que le lien entre hasard rate et Mean Excess Loss est*

$$e(d) = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)} = \int_d^\infty e^{-\int_d^x h(t)dt} dx$$

le passage a la limite se fait en appliquant la règle de l'hôpital, quand $d \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\lim_{d \longrightarrow \infty} e(d) = \frac{-S(d)}{-fd} = \lim_{d \longrightarrow \infty} \frac{1}{h(d)}.$$

Une distribution a des queues épaisses si $e(d) \longrightarrow \infty$ lorsque $d \longrightarrow \infty$ (ailes sous-exponentielles) et sinon elle a des queues légères (ailes sur-exponentielles).

Exemple 4.3.1. ***Simulation du mean excess loss pour différentes lois :***

Equivalent du mean excess life quand $d \longrightarrow \infty$ pour quelques lois connues :
- *Pareto :* $\frac{\theta}{\alpha-1}$, $\alpha > 1$,
- *Burr :* $\frac{d}{\alpha\beta-1}$, $\alpha\beta > 1$,
- *Log-Gamma :* $\frac{d}{\alpha-1}$, $\alpha > 1$,
- *Weibull :*$\frac{d^{1-\tau}}{c\tau}$,
- *Gamma :* $\beta^{-1}\left(1 + \frac{\alpha-1}{\beta d}\right)$,
- *Exponentielle :* λ^{-1}.

Par conséquent, on a cette classification ci-après de quelques lois de probabilité usuelles :

Distributions à queues légères	Distributions à queues épaisses
exponentielle Gamma Weibull avec $\tau \geqslant 1$	Log-normale Pareto Weibull avec $\tau < 1$ Burr Log-Gamma.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les différentes distributions utilisées par les actuaires dans la modélisation du montant des réclamations qui représentent des pertes pour l'assureur qui doit les assumer sans mettre en péril l'équilibre financier de sa compagnie d'assurance. De plus, nous avons présenté les caractéristiques de ces lois de probabilité et leurs classification selon les propriétés de la queue.

Conclusion générale

La détermination des distributions de probabilité des paramètres aléatoires qui gouvernent un modèle de risque joue un role très important dans la gestion du risque en assurance.

En décrivant l'activité assurance et ses paramètres, nous avons présenté les modèles probabilistes les plus étudiées dans la littérature à savoir les modèles de risque individuels et collectifs ainsi que le modèle de risque classique. En se basant sur ces modèles, nous avons définit plusieurs mesures de risque avec quelques résultats fondamentaux sur l'évaluation de leurs caractéristiques, en particulier sur l'estimation de la probabilité de ruine.
Ce travail consiste à étudier les différentes distributions utilisées par les actuaires dans la modélisation du montant et de la fréquence des réclamations. De plus, nous avons donné un aperçu sur l'étude de la queue des distributions de la sévérité des pertes avec une classification de quelques lois de probabilité usuelles.

Bibliographie

[1] S. Asmussen and H. Albrecher, *Ruin Probabilities*. Vol. 14 of Advanced Series on Statistical Science Applied Probability, World Scientific, 2010. 49

[2] H Guerain. *Notes de cours : ACT3251 Theorie du risque*.Université de Monréal, 2012.

[3] H. Schmidli. *A general insurance model*.ETH, 2012. 46, 51

[4] J. Grandell. *Aspect of risk theory*. Springer, 1990. 46, 51

[5] A Charpentier et M Denuit. *Mathematiques de l'ssurance non-vie : principes fondamentaux de theorie du risque*, tome 1. Economica, 2004.

[6] K Lazhari et A Boulakhras. *Lois de probabilité et algorithme de Panjer dans la gestion du risque en assurance*. Mémoire de Matser en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira Béjaia, 2019.

[7] R. Ghersa and R. Bengasmia.*Métodes d'approximation du modèle de risque individuel : coparaison numérique*. Mémoire de Matser en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira Béjaia, 2019.

[8] L. Tlilane et H. Allaoua. *calcul de la probabilité de ruine : Cas de la branche rc automobile de l'agence SAA 3201 de Béjaia*. Mémoire d'ingéniorat en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira Béjaia, 2010. 9, 47

[9] A. Touazi and N. Benmamas.*Illustration numerique de la dualité entre un système de file d'attente et un modèle de risque*, Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira Béjaia, 2011. 34

[10] Z. Benouaret. *Stabilité forte dans les modèles de risque*. Thèse de doctorat en Mathématiques Appliquées. Université A. Mira Béjaia, 2012. 30

[11] L. Shuanming. *The time of recovery and the maximum severity of ruin in a Sparre Andersen model*. North American Actuarial Journal, vol. 12 (4), pages : 413–425, 2008. 37

[12] Ph. Picard. *On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model.* Insurance : Mathematics and Economics, vol. 14(2), pages : 107–115, 1994. 26

[13] F. Dufresne and H. U. Gerber. *The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin.*Insurance : Mathematics and Economics, vol. 7(3), pages : 193–199, 1988. 26

[14] H. U Gerber. *Mathematical fun with ruin theory.*Insurance : Mathematics and Economics, vol.7(1), pages :15–23, 1988. 26, 49

[15] P. Embrechts and N. Veraverbeke. *Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims.*Insurance : Mathematics and Economics, vol. 1(1), pages : 55–72,1982.

[16] T. Rolski and H. Schmidli and Schmidt, J. Volker and L. Teugels.*Stochastic processes for insurance and finance.*John Wiley & Sons, 2009.

[17] J. Ferrari. *Economie du risque, application à la finance et à l'assurance : deuxième cycle universitaire.* Bréal,2002. 32
6

[18] S. Loisel. *Contributiona l'étude de processus univariés et multivariés de la théorie de la ruine.* 2004. 28, 29, 49

[19] C. Sainrapt. *Dictionnaire général de l'assurance.* Arcature, 1996. 5

[20] F. Malaval. *Développement durable, assurances et environnement.* Economica, Editions (FR), 1999. 5

[21] A. Chaufton. *Les assurances : Etudes théoriques et pratiques.* 1984. 5

[22] M. Boudjellal. *Les Assurances dans un sysème Islamique*, 2015. 5

[23] F. Lundberg. *Some supplementary researches on the collective risk theory.* Scandinavisk Aktuarietidskrift, 15, pages : 137-158, 1932.

[24] D. Dickson. *Insurance risk and ruin.* Cambridge University Press, 2016. 3, 14, 20, 22

[25] S. Loisel. *Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine.* Cours en ISFA 3ème année, Université de Lyon, 2005.

[26] M. Denuit and Dhaene and J Goovaerts and M Goovaerts. *Actuarial Theory for Dependent Risks-Measures : Orders and Models.* John Wiley & Son, 2005. 3, 14, 15, 17, 19, 25, 43, 53

[27] N. Piskounov. *Calcul Differentiel Et Integral Tome 1 and Tome 2.* Editions MIR, 9970.

[28] E. Marceau. *Modélisation et évaltuation quantitative des risques en actuariat.* Springer Berlin, 2013. 52

[29] S. A ; Klugman and H. H. Panjer and G. E. Willmot. *Loss models : from data to decisions*. John Wiley & Sons, 2012 39, 43, 44, 45, 52, 54, 56
39, 45