

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire de fin de cycle présenté Pour l'obtention du Diplôme de Master
En Recherche Opérationnelle
Option : Mathématiques financières

Par : LITIME Asma

Synthèse sur les systèmes de retraite

Déposé à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, Le 03/12/2020.

Devant le jury composé de :

D ^r N. Khimoum	M.C. classe B	Président	UAMB - Bejaia.
D ^r L. Asli	M.C. classe B	Encadreur	UAMB - Bejaia
D ^r M. M'hamdi	M.C. classe B	Examineur	UAMB - Bejaia.
D ^r A. Laouar	M.A. A	Examineur	UAMB - Bejaia.

Année Universitaire 2019 – 2020

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier le bon *DIEU* le tout puissant de nous avoir donné la volonté, la force, la patience et le courage pour mener ce travail à terme.

Nous tenons également à remercier notre promoteur *Mr Asli* pour l'aide et l'assistance qu'il nous a fourni afin de nous permettre de mener à bien et à terme ce projet, et qu'il nous soit permis de lui exprimer notre profonde reconnaissance.

Nous exprimons notre grand respect aux honorables membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Nous tenons tout simplement à exprimer notre profonde gratitude à tous ceux qui nous ont aidé pour compléter ce travail, **Oussama, Habib** et **Bob** merci infiniment pour votre soutien et encouragement. Et à tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin durant tout notre cursus et espérons que ce projet servira de guide pour les promotions à venir.

Dédicace

Louange à Dieu, le miséricordieux, sans lui rien de tout cela n'aurait pu être.

Je dédie ce modeste travail à :

mes très chers parents AHMED et ZAHRA : Votre amour a laissé en moi une empreinte indélébile. Je vous prie de trouver en ce travail le fruit de vos efforts, le sacrifice des plus profitables années de vos vies, pour me voir réussir.

Que Dieu m'accorde la grace de vous avoir encore à mes côtés pour longtemps afin que vous soyez témoins de notre reconnaissance.

À tout ceux que
j'aime.

litime asma

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	2
1 Généralités sur les systèmes de retraite au monde	7
1.1 Quelques définitions	7
1.1.1 La retraite	8
1.1.2 Système de retraite	8
1.1.3 Régime général	9
1.1.4 Les trois piliers de la retraite	11
1.1.5 risque de marché	11
1.1.6 Histoire de la retraite	12
1.2 Les modèles de retraite	12
1.2.1 Le modèle Bismarckien	13
1.2.2 Le modèle Beveridge	13
1.3 Les principes de la retraite dans le monde	14

1.3.1	Principe de la Subvention	15
1.3.2	Principe de la Répartition	15
1.3.3	Principe de retraite par capitalisation	15
1.3.4	Autres principes et caractéristiques des systèmes de retraites .	16
1.4	Les systèmes de retraites dans le monde	19
1.4.1	Les systèmes de retraite dans les pays membres de l'OCDE . .	19
1.4.2	Les systèmes de retraites des pays rapprochés par zones géo- graphiques	24
1.5	Le système Algériens de retraites et son évolution	28
1.5.1	Les dates clés de l'évolution du système de retraite algérienne	28
1.5.2	Les caisses de la sécurité sociale	33
1.5.3	Le contenu du système de retraite Algérien [46]	35
1.5.4	L'impact des changements démographique sur le système de retraite par répartition	40

2 Modèles de risques classique, probabilité de ruine et les Probabilités viagères **43**

2.1	Modèle de risque classique	44
2.1.1	Probabilité de ruine	46
2.1.2	Processus de renouvellement	49
2.1.3	Processus de Poisson	50
2.1.4	Processus de Poisson composé	50
2.1.5	Condition de non ruine	50
2.1.6	Modèle de risque multi-branches	53
2.2	Quelques méthodes d'approximation dans la théorie classique de la ruine	55
2.2.1	Borne de Lundberg	55

2.2.2	Approximation Cramér-Lundberg de la probabilité de ruine	56
2.2.3	Autre approches	57
2.3	Probabilités viagères	58
2.3.1	Modèles probabilistes de la durée de la vie humaine	58
2.3.2	L'indicateur de survie	61
2.3.3	Estimation du nombre de vivant à l'époque t	62
3	Retraite et Risque Financier	65
3.1	Les marchés financiers	66
3.1.1	L'efficience des marchés financiers	66
3.1.2	Tests de ratio de variance multiples	74
3.1.3	Salaires, marché du travail et rendement du capital [37]	78
3.2	Régimes de retraite	83
3.2.1	Régimes par annuités	83
3.2.2	Régimes par points	85
3.3	Une dynamique stylisée du cours des actions	85
3.3.1	Les stratégies d'allocations d'actifs	92
3.4	Une simulation de référence au cadre démo-économique	93
3.4.1	Caractéristiques du plan d'épargne retraite fictif	97
	Bibliographie	i
	Résumé	I

TABLE DES FIGURES

3.1	Illustration de variance autoregressive des rendements sur le S et P500	69
3.2	Choc sur le stock de capital	83
3.3	Processus d'OU : avec un krach survenu	89
3.4	Processus d'OU : intervalle de confiance - l'évolution avec krach	90
3.5	Trending OU process : avec un krach survenu	91
3.6	Trending OU process : intervalle de confiance - l'évolution avec krach	92
3.7	Scenario de référence - hypothèses retenues	94
3.8	Population active - Projection et évolution	95
3.9	Environnement macroéconomique	96
3.10	Besoin de financement	97
3.11	Hypothèses de gestion	98
3.12	Impact de l'épargne retraite sur l'environnement macroéconomique	99

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'histoire des systèmes de retraites montre que, à différentes périodes, tous les pays développés ont partagés des objectifs similaires en matière de retraites. Ces objectifs étant de lutter contre la pauvreté, garantir un revenu aux retraités et améliorer la couverture, mais ces pays ont choisi des réponses différentes. Ces différences dépendent du type d'institutions de retraite mises en place dans le passé par ces pays, soit l'assurance-vieillesse ou retraite de base uniformes mais aussi des choix politiques présents (rendre obligatoires ou non les systèmes, les financer en répartition ou en capitalisation).

Il existe plusieurs systèmes de retraites, mais nous retenons les deux principaux en termes d'application internationale à savoir la retraite par répartition et par capitalisation.

Le travailleur ne pouvant exercer éternellement, prend des dispositions afin d'améliorer les conditions de son existence après la vie professionnelle. Ainsi, au cours de l'activité professionnelle, l'homme entreprend de s'inscrire dans une logique indivi-

duelle d'épargne en vue de faire face à des situations prévues comme imprévues.

En termes des dispositions prises de façon volontaire, nous pouvons parler de souscription à une assurance (vie, maladie, biens) ou à un régime de retraite, en vue de la perception d'une rente ou d'une pension de retraite. Cette pension de retraite, perçue en général mensuellement, est octroyée à la suite des prélèvements systématiques sur le salaire mensuel du travailleur en activité, suivant un taux défini par la loi sur la pension.

Le régime a un caractère obligatoire est dit par répartition, eu égard à son principe de fonctionnement. Celui-ci est basé sur le financement des pensions versées aux retraités par les cotisations des actifs qui accumulent en contrepartie des droits pour leur future retraite. C'est donc un système de rotation qui permet aux retraités d'aujourd'hui de bénéficier des cotisations des générations beaucoup plus jeunes.

Ce système dit intergénérationnel permet ainsi au travailleur, moyennant une cotisation périodique, de faire face à certains besoins dans sa vie de retraité. Aujourd'hui, le système de retraite suscite de nombreuses questions et inquiétudes notamment pour les pays optant pour le système de retraite dit de répartition.

Ces questions sont fondamentalement liées aux difficultés de maîtrise de l'équilibre financier des systèmes des retraites. Ces difficultés ont occasionné des réformes qui ont abouti à la prise des mesures radicales telles que l'augmentation de l'âge de retraite, l'augmentation des taux de cotisation, etc.

En Algérie, l'assurance vieillesse n'a été instituée pour l'ensemble des salariés qu'en 1953. Avant cette date, quelques corporations bénéficiaient déjà de régime de retraite[2] (les fonctionnaires, cheminots, traminots et les employés de la société d'Etat d'électricité et de gaz.

L'assurance vieillesse pour les travailleurs non salariés (indépendants) des professions industrielle, commerciale, artisanale, libérale et agricoles instituée en 1956 n'a

été mise en oeuvre qu'en 1958 et constitue au départ l'unique branche de ce régime particulier.

En juillet 1983, il a été mis une fin aux régimes de retraite de base ainsi qu'au régime de retraite complémentaire existants. Ainsi, l'avènement de la réforme de juillet 1983 s'est traduit par la fusion des régimes à base professionnelle existants en un régime unifié.

La Caisse Nationale des Retraite (CNR) a été créée par décret n^o85 – 223 du 20 août 1985 abrogé et remplacé par le décret n^o : 92 – 07 du 04 janvier 1992 portant statut juridique des Caisses de Sécurité Sociale et organisation administrative et financière de la sécurité sociale.

La CNR est le résultat de la fusion de sept (7) caisses, mise en place en 1985 et chargée de la gestion des différents régimes de retraite existant avant l'institution en 1983 d'un régime national unique de retraite, offrant les mêmes avantages à tous les travailleurs quel que soit leur secteur d'activité.

Le régime de retraite Algérien n'a cessé d'évoluer depuis la loi 83–12 en matière de législation notamment lors de la situation économique et sociale des années 90 et suite à la grave crise qu'à connu le pays. La caisse a dû se doter des nouveaux dispositifs car le système de retraite est directement affecté par les changements démographiques (vieillessement de la population), aussi l'émergence du marché parallèle du travail (entraîne la diminution de nombre des cotisants). Cette situation a obligé à la CNR d'opter pour une solution permettant d'augmenter ses recettes et donc d'atténuer son déficit, tel que la mise en place de la loi 16 - 153 du décembre 2016 modifiant et complétant la loi 83 – 12 relative à la retraite.

Le recul progressif du périmètre de la protection sociale obligatoire confère une nouvelle responsabilité aux ménages : celle de constituer une épargne de cycle de vie destinée à compenser la moindre prodigalité des systèmes traditionnels de mutua-

lisation des risques sociaux (retraite, maladie, etc.). De fait, pour compenser le rationnement des transferts entre générations consécutif au recul de l'Etat providence, les ménages vont devoir assurer la gestion de leur épargne financière, notamment dans le cadre de l'épargne retraite. Cette appréciation doit être tempérée sur un point fondamental : un Algérien sur deux déclare ne pas être en mesure d'épargner. En période de ressources contraintes, ces statistiques plaident pour un changement de modèle de transferts qui, consisterait à passer d'un Etat providence à un Etat providence "sélectif". Le problème de justice sociale posé par le développement de plans d'épargne retraite assortis d'incitations fiscales profitant en priorité aux classes aisées trouverait sa contrepartie dans la transition vers un régime obligatoire où les prestations seraient ciblées sur les besoins du milieu et du bas de la classe moyenne. Dans ce modèle de solidarité, les salariés les plus productifs (qui peuvent travailler jusqu'à des âges élevés) contribuent davantage au régime obligatoire pour recevoir relativement moins, ce qui justifie l'existence de placements défiscalisés. Quoi qu'il en soit, la constitution de compléments de retraite pose la délicate question de la capacité des ménages concernés à gérer l'épargne au cours du cycle de vie. Or, si on en croit les études empiriques, les ménages - bien qu'ils fassent preuve d'une «sagesse pratique» ne sont pas à proprement parler de "bons" investisseurs. L'analyse de leurs placements révèle de nombreuses formes d'inefficiences dont les plus notables sont : la faible participation aux marchés actions et le manque de diversification des placements (biais d'investissement domestique, diversification naïve). Pour limiter le risque systémique inhérent à la mauvaise gestion financière des ménages, deux concepts non exclusifs s'affrontent[3].

si un surcroît d'instruction financière est une condition nécessaire pour favoriser les transferts d'épargne volontaires des périodes à revenu élevé vers les périodes à revenu faible, ce n'est assurément pas une condition suffisante pour les optimiser

et limiter le coût global des mauvais choix financiers des ménages. C'est pourquoi, dans les directives européennes, l'exécution du « devoir de conseil et d'information » incombe aux intermédiaires financiers. Dans ce contexte, le principal enjeu pour les intermédiaires sera de proposer aux ménages des allocations d'actifs répondant à leurs nouveaux besoins en matière de retraite. Ainsi, bien que les marchés financiers soient davantage complémentaires que substituts des systèmes classiques d'intermédiation des risques, les producteurs et distributeurs de produits financiers se voient attribuer de nouveaux territoires, mais également de nouvelles responsabilités centrées notamment sur la performance à long terme des options par défaut des plans d'épargne retraite qu'ils proposent.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Après cette introduction les chapitres seront étagés comme suit :

Le premier chapitre sera consacré à la présentation des généralités sur les systèmes de retraite au monde.

Le deuxième chapitre regroupera les différentes notions et définitions sur les modèles de risques classiques, la probabilité de ruine et les probabilités viagères.

Le troisième chapitre fera l'objet de la retraite et du risque financier.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale mettant l'accent sur les avantages et risques des différents systèmes de retraites ainsi que leur intérêt dans la vie socio-économique.

CHAPITRE 1

Généralités sur les systèmes de retraite au monde

introduction

Savoir d'où l'on vient pour savoir où l'on va, passe par la connaissance de l'histoire des retraites pour comprendre le présent sur lequel se construit l'avenir. Il est donc intéressant de donner quelques définitions issues du système de retraite et les différents régimes de la retraite ainsi que leurs prestations.

1.1 Quelques définitions

Pour bien comprendre le fonctionnement du système de retraite, nous aborderons quelques définitions essentielles.

1.1.1 La retraite

Le concept de retraite est défini comme « une retraite est une prestation sociale versée aux salariés âgés en contrepartie de cotisation versée tout au long de leurs périodes d'activité». La retraite d'un point de vue social et financier est retrait de la vie active, cessation d'activité professionnelle sous certaines conditions d'âge et de durée d'exercice. Ce retrait de la vie professionnelle ouvre le droit de bénéficier d'une pension de vieillesse, appelée retraite, versée par la caisse vieillesse de la sécurité sociale. Cette retraite est attribuée du fait que la personne retraitée a exercé une activité professionnelle et a cotisé à un régime d'assurance vieillesse [4].

1.1.2 Système de retraite

Le système de retraite est un ensemble des organisations relatives au versement de prestation aux personnes qui, ayant cotisé au régime d'assurance vieillesse durant leur période d'activité professionnelle peuvent faire valoir leurs droits à la retraite. Son rôle est la protection contre le risque représenté par la retraite, qualifié de « risque vieillesse » [5].

Taux plein

C'est le niveau le plus élevé d'une pension, c'est-à-dire que ce taux est le maximum de calcul d'une retraite qu'un assuré affilié a un régime de retraite peut percevoir tout en justifiant la durée nécessaire de cotisation. Pour le régime de base des salariés du privé et le régime aligné en France, par exemple, le taux plein est de (50%) [6].

Taux de retraite

C'est le taux par lequel on multiplie le salaire de base qui varie selon le nombre de trimestres cotisés. Ce taux est évalué à (1.25%) en France et (2.25%) en Algérie.

Volatilité

La volatilité désigne l'écart-type annualisé des rendements d'une série historique représentant un fonds, un indice, etc

1.1.3 Régime général

L'Assurance retraite gère la retraite du régime général de la Sécurité sociale. C'est la retraite de base des salariés de l'industrie, du commerce et des services du secteur privé. En France Sur 10 Français, 9 y ont cotisé, y cotisent ou y cotiseront [7]. En France, le régime général est géré par la caisse nationale d'assurance vieillesse des travailleurs salariés [8](CNAVTS). En Algérie, c'est le secteur public tel que les travailleurs de fonction public géré par la caisse nationale de retraite (CNR).

Fonds de pension

Les fonds de pension, également appelés fonds de retraite, sont des organismes de placement collectif (OPC), qui ont pour charge de gérer les capitaux issus de l'épargne salariale, afin d'assurer le financement des retraites, et qui constituent, a ce titre, les outils indispensables de tout système de retraite par capitalisation. Les assureurs définissent les fonds de pension comme «un ensemble de valeurs affectées a la garantie d'engagement de retraite pris par une entreprise ou une profession envers son personnel ou ses membres, provisionnés et gérés en dehors des entreprises

fondatrices, sous des formes diverses (Trust au royaume Uni, Caisses de prévoyance en suisse, Trust Bank ou sociétés d'assurance au japon)» [8].

Salaire de base

Le salaire servant de base au calcul de la pension est égal soit au salaire de poste mensuel moyen de la dernière année précédant, la mise à la retraite ; soit, si c'est plus favorable, au salaire mensuel moyen déterminé sur la base des trois (3) années qui ont donné lieu à la rémunération la plus élevée au cours de la carrière professionnelle de l'intéressé [10].

Retraite de base

La retraite de base est le premier niveau de retraite obligatoire est alignée sur celle des salariés, c'est-à-dire que le régime garantit des retraites égales à celle que perçoivent les salariés du secteur privé pour des cotisations identiques. Le montant de cette retraite dépend du revenu annuel moyen calculé à partir des meilleures années dans la limite du plafond de la sécurité sociale, la durée d'assurance validée, du taux de liquidation, variable selon la durée d'assurance tous régime confondus, si l'assuré n'a pas atteint l'âge du taux plein automatiquement ou n'est pas dans une situation permettant un taux plein quelque soit la durée d'assurance [11].

Retraite complémentaire

Deuxième niveau de retraite obligatoire, complétant le régime de base. C'est la pension donnée en complément des retraites services par le régime de base de sécurité sociale. Tous les salariés, quelle que soit leur activité professionnelle, qui bénéficient d'une retraite peuvent être affiliés a un régime de retraite complémentaire [12].

1.1.4 Les trois piliers de la retraite

Un régime de retraite évolué, doit reposer sur trois composantes, complémentaire et de nature différentes selon la théorie des trois piliers :[13]

- Le premier pilier : le système de sécurité sociale vise à couvrir sur une base obligatoire et uniforme toute la population d'un pays, il vise d'une manière générale à octroyer un premier niveau de base en matière de pension, il est généralement obligatoire.
- Le deuxième pilier : Les régimes professionnelle, organisés au sein d'une entreprise ou un secteur d'activité, octroyant a chacun des affiliés de ce régime un complément de sécurité sociale sur la base collective.
- Le troisième pilier : l'épargne individuelle au libre choix de chacun. Outre la sécurité sociale et les régimes professionnels, l'individu peut constituer une épargne durant sa période d'activité qu'il lui servira lors de la mise en retraite.

1.1.5 risque de marché

Le risque de marché peut se définir comme le risque de pertes induit par les variations de valeur sur le marché. Pour un titre, le risque de marché est le risque corrélé à l'état du marché. Il évolue en fonction des différents paramètres de l'économie, de la fiscalité, des taux d'intérêt, de l'inflation [14].

Taux de remplacement

Le taux de remplacement est le rapport entre le montant de la retraite (ici la rente), au moment du départ à la retraite, et le salaire de fin de carrière [15].

Volatilité

Désigne l'écart-type annualisé des rendements d'une série historique représentant un fonds, un indice, etc.

1.1.6 Histoire de la retraite

Avant 1850 [16], le terme de la retraite n'existe pas notamment dans les pays occidentaux, à ce moment les individus pratiquant des professions comme agriculture et artisanat le plus longtemps possible pour survivre, l'épargne de ces individus est très peu et dans d'autre cas il est impossible car les sociétés sont caractérisées par la pauvreté, une grande partie du revenu est destinée à la satisfaction de leur besoins en nourriture. Durant la période 1850–1900 [17], avec l'apparition de l'industrialisation des sociétés, il y a eu pour la première fois une prise en charge de conscience de la sécurité des travailleurs, cette dernière a été une raison pour la création du régime de la retraite sens moderne en Allemagne par Bismarck en 1889 (régime de retraite par répartition), puis un développement continu des régimes de retraite ou chaque pays ayant dans ce domaine une histoire différente et donc une culture différente.

1.2 Les modèles de retraite

Si chaque pays a développé son propre dispositif de protection sociale, un certain nombre de critères permettent d'identifier deux modèles de retraite hérités de l'histoire. L'opposition entre les logiques d'assurance et de solidarité constitue l'argument central de ceux qui proposent de scinder la protection sociale en deux sous-systèmes. À la première logique sont associées le financement par les cotisations des travailleurs et à la seconde le financement par l'impôt.

Les systèmes de protection sociale peuvent être présentés comme le compromis de deux modèles :

1.2.1 Le modèle Bismarckien

Le modèle Bismarckien, fondé sur l'assurance obligatoire est le premier à apparaître la fin du 19^{ème} siècle. Dans son fonctionnement moderne, les salariés cotisent afin de se garantir contre des risques sociaux (maladie, vieillesse, et accident du travail pour les actifs uniquement). Chaque salarié cotise en fonction de son revenu ou salaire [18]. Le financement de ce modèle est assuré par le travail et les cotisations sociales assisent sur les salaires des actifs. Il existe quatre principes fondamentaux qui définissent le système Bismarckien :

- Une protection uniquement fondé sur le travail et, de ce fait, limitée à ceux qui ont su s'ouvrir des droits a protection par leur travail.
- Une protection obligatoire pour les seuls salariés.
- Une protection fondée sur la technique de l'assurance, qui instaure une proportionnalité des prestations aux cotisations.
- Une protection gérée par les employeurs et les salariés eux-mêmes.

1.2.2 Le modèle Beveridge

La grande Bretagne vit une autre histoire, ce modèle a été hérité de la conception de lord Beveridge, partisan d'une protection sociale généralisée basée sur la solidarité, indépendamment de toute activité professionnelle, alors que les assurances sociales y étaient organisées sur le modèle continental, le rapport Beveridge 1942 préconise une lutte systématique contre l'indigence et prône l'instauration d'une prestation minimale, uniforme, et universelle, complétée de manière volontaire par les affiliés,

le régime de retraite britannique est le fruit de ce modèle, il s'étend aux pays du Commonwealth.[19]

Ce système est également appelé « national », car la garde des services de santé et le financement y sont assurés par le même organisme, qui dépend de l'état. Ce modèle est financé par l'impôt qui est un prélèvement obligatoire effectué par l'autorité de l'état et repose sur le principe de solidarité nationale assurant aux retraites un revenu minimum. Toutefois, de nombreux pays combinent les caractéristiques de chacun des deux modèles. Ainsi dans les pays de tradition bismarckienne (l'Allemagne, la France, l'Espagne), des dispositifs à caractère universel ont fréquemment été mis en place, notamment pour l'attribution de minima sociaux.

1.3 Les principes de la retraite dans le monde

De nos jours, les systèmes de retraites sont au centre de toutes les préoccupations. En effet bon nombre des mesures sont prises afin de pallier les difficultés auxquelles ces systèmes font face. Néanmoins, dans cette section nous aborderons les principes pouvant régir le fonctionnement de systèmes de retraite avant d'étudier l'organisation des systèmes de retraite dans les différents pays de manière générale.

Les très nombreuses formes de retraites existantes sont des combinaisons de principes de base [21]. Chaque principe est lié à une ou plusieurs des trois phases du fonctionnement d'une retraite, à savoir le financement, la gestion et la redistribution. Ainsi, par exemple, le financement compte les financements par subventions ou par cotisations, sachant que d'un système à l'autre les types de subvention ou de cotisation diffèrent dans les détails. En gestion, nous pouvons inclure les retraites gérées par répartition et celles par capitalisation. La redistribution, quant à elle, concerne

les versements de pensions sous forme de capital unique ou sous forme de rentes. Les rentes peuvent être viagères, temporaires ou combinées, parfois optionnellement, avec le versement d'un capital.

1.3.1 Principe de la Subvention

Lorsque les retraites sont financées par subvention, l'organisme alloué paie les retraites à partir de ressources propres non spécifiquement prédestinées aux retraites. Il peut s'agir, par exemple, d'un Etat payant gracieusement les retraites à une certaine catégorie qualifiée de la population à partir d'impôts divers [21].

1.3.2 Principe de la Répartition

Le principe de la répartition est fondé sur la solidarité entre générations. La génération actuelle d'actifs supporte les coûts de pension des générations précédentes, actuellement en retraite. Les sommes cotisées par les individus actifs sont aussitôt reversées aux retraités du moment. Le mode de calcul des cotisations comme des droits de pension, varie d'une caisse à l'autre.

1.3.3 Principe de retraite par capitalisation

Une caisse de retraite par capitalisation [22], ou fonds de pension, est définie par l'association de trois activités : cotisations, investissements et prestations.

Cotisation

L'activité de cotisation ou de contribution est caractérisée par l'alimentation du fonds par les futurs retraités, par l'entreprise ou par les deux selon les clauses. Il

n'est évidemment pas exclu que le fonds soit financé par subvention, même si ce cas de figure est assez rare en capitalisation.

Investissement

L'activité d'investissement concerne la gestion du fonds, en vue d'atteindre les objectifs. Il s'agit en fait d'investissements du capital cotisé en actifs adéquats. Il n'y a de cotisation que durant la période d'activité professionnelle, et de pensions que durant la retraite. L'investissement, quant à lui, est très généralement commun aux deux autres périodes. Dès le versement de la première cotisation, celle-ci est placée sur des actifs du marché financier. Sur toute la vie du fonds, il y a investissement et ceci jusqu'au versement de la dernière pension. Lorsque les cotisations sont préétablies par clauses, on parle de fonds à cotisations définies. Pour des pensions promises d'avance, il s'agira de fonds à prestations définies.

Prestation

L'activité de prestation est, quant à elle, désignée par les versements des pensions aux retraités, sous forme de capital ou de rente viagère, toujours selon les clauses.

1.3.4 Autres principes et caractéristiques des systèmes de retraites

A côté de ces principes fondateurs, existent d'autres principes tout aussi importants, comme par exemple le principe de l'universalité des pensions ou le principe de la relativité des pensions par rapport au service. Nous en énumérons quelques uns des plus courants.

Principe des pensions liées au service

Dans ce principe, les pensions versées sont nécessairement liées d'une manière ou d'une autre, au service fourni avant la retraite. Le lien peut être par exemple le prorata de la durée de service ou des revenus reçus du service [23].

Principe de la neutralité actuarielle

Ce principe tente de respecter la justesse de la pension à percevoir par rapport à la somme cotisée. Il prend en compte l'évolution des environnements aussi bien économiques qu'humains. Ainsi pour chaque individu, les sommes cotisées sont capitalisées à l'âge de la retraite et avec un taux adéquat. Ce capital sert ensuite à déterminer la pension en tenant compte, d'une part, de la probabilité de survie de l'individu à chaque date de versement, et d'autre part, de l'indexation des pensions sur une valeur déterminée, généralement les salaires ou les prix des produits de consommation.

Principe de test

Avec ce principe, l'éligibilité au droit à la pension est sujette à un test, celui des revenus par exemple, par rapport à un standard défini. Ainsi, très couramment, les individus disposant de revenus moindres par rapport à un niveau précis, reçoivent la pension qui est alors généralement une pension sociale.

Principe d'universalité

Par opposition au principe de lien au service, les pensions sont ici, sans aucun rapport avec le service rendu des individus qualifiés.

Principes d'obligation ou de volontariat

Il s'agit de la possibilité de volontariat ou de l'obligation faite aux individus assurés, à leurs employeurs voire aux ayants droit, d'adhérer à une caisse de retraites. La caisse peut être précise dans certains cas.

Principe de réversion

Ce principe prévoit dans des cadres précis, une réversion de la pension aux ayants droit.

Principe de calcul par points

Dans certaines caisses, les pensions s'évaluent par l'acquisition et la liquidation de points ayant des valeurs d'achat et de liquidation différentes et souvent indexées.

Caractère de l'âge

L'âge est un caractère important dans les clauses des systèmes de retraites. Particulièrement l'âge de liquidation qui est globalement entre 50 et 70 ans et majoritairement autour des 65 ans. Il est une donnée essentielle tant pour les assurés que pour les assureurs.

Caractère privé ou public

Ce caractère renseigne sur la nature privée ou publique de la caisse. Mais il convient de noter qu'une caisse privée peut gérer des pensions du public. C'est souvent le cas des fonds de pension avec affiliation obligatoire de personnels du public.

Caractéristique du taux de remplacement

Il est aussi une mesure, mais de la qualité de la pension offerte. C'est le rapport de la pension sur les revenus antérieurs. Souvent on le limite à la première pension sur le dernier revenu de travail avant la retraite.

1.4 Les systèmes de retraites dans le monde

Outre le grand nombre de principes, de caractères ou de caractéristiques à prendre en compte, la difficulté d'étudier un ensemble de systèmes de retraites est l'avantage accru par le fait que chaque système est souvent organisé en combinaison unique de plusieurs de ces éléments. S'il est impossible de trouver deux systèmes de retraites en tous points identiques, il est possible de regrouper les différents systèmes de retraites par groupes ayant des tendances similaires. Ces groupes peuvent se réunir par zones géographiques ou par nations ayant un point historique fort, une culture ou une économie semblables. Nous allons alors diviser en deux grands groupes les différents systèmes de retraites dans le monde. Le premier groupe est composé des systèmes de retraites dans les pays membres de l'Organisation de Coopération et de développement Economiques (O.C.D.E) [24]. Ces systèmes ayant de nombreux points communs, notamment le développement plus élaboré des systèmes mis en place et les tendances démographiques. Le deuxième groupe est réservé aux systèmes de retraites du reste du monde, approché par zones géographiques.

1.4.1 Les systèmes de retraite dans les pays membres de l'OCDE

Pour chacun des trente cinq (35) pays membres 8 de l'organisation, il existe un minimum de pension, admis pour tout individu à la retraite. Tous les trente cinq

(35) pays adoptent les règles de l'Organisation Internationale du Travail (OIT) en matière de calculs démographiques. Par ailleurs la plupart des pays satisfont à la convention numéro 102 de l'O.I.T.

Ce sont là, autant de similarités qui facilitent une étude groupée des pays membres de l'O.C.D.E. Nous rassemblons les caractéristiques des systèmes de retraites des pays membres de l'O.C.D.E., autour de trois critères communs à tous ces pays :

- Le régime minimal de base forfaitaire ou social,
- Les régimes obligatoires,
- Les régimes sur-complémentaires volontaires.

Mais, à l'intérieur de ces critères, les différences d'un pays à un autre sont flagrantes. Elles vont du type même du régime à son mode de financement, différentes conditions d'éligibilité ou de la nature même des droits.

Régime minimal de retraite de base en O.C.D.E.

Tous les régimes de base forfaitaires ou d'assistance sociale s'accordent pour avoir un unique but, qui est la réduction de la pauvreté des personnes âgées. Même lorsqu'il n'est pas précisé que toute la population âgée (en général de 65 ans ou plus), est d'office prise en compte, on élargit quand même au maximum le filet, au cas par cas pour englober tout le monde.

C'est le cas en général, dans tous les pays où le régime de base forfaitaire revêt une forme d'assistance sociale aux individus âgés ayant des ressources insuffisantes et inférieures à un minimum donné. Par exemple, en Allemagne, aux Etats-Unis ou en France. Lorsque le régime admet un minimum forfaitaire de base soumis à des conditions, comme en Espagne ou en Italie, où il faut avoir cotisé, il existe alors un minimum social de vieillesse pour les individus âgés, ayant des revenus

insuffisants, sans obligation de cotisations. On parle alors de "pensions sociales", pour caractériser le minimum qui ne relève pas toujours d'une caisse de retraites mais plutôt de caisses de sécurité sociale, avec un financement social. Lorsque le minimum de base est dépourvu de tout caractère social et constitue en soi un régime de retraite contributif ou non, sa rémunération est nécessairement liée au travail fourni. Au Japon ou au Royaume-Uni, le financement du minimum forfaitaire de base est assuré par les cotisations et des subventions de l'Etat. En Irlande et en République Tchèque, il est entièrement financé par les contributions et les prestations sont conditionnées à l'affiliation à la Caisse Publique.

Le minimum de pension peut être incluse dans un régime obligatoire, auquel cas son financement est celui du régime en question (Espagne, Belgique, Grèce). Parfois, le régime forfaitaire de base est non contributif mais bien obligatoire : Nouvelle-Zélande, Canada ou Luxembourg.

Régimes obligatoires

L'adhésion à un régime de retraite est souvent une obligation faite aux actifs des pays membres de l'O.C.D.E. L'obligation peut être issue de dispositions statutaires (Australie) ou de conventions collectives (Danemark, Belgique). Il faut toutefois remarquer que tout individu actif n'est pas toujours éligible à l'obligation d'affiliation qui est souvent soumise à une condition de cotisation (Espagne, Australie, Danemark,).

Cette condition pénalise beaucoup de travailleurs à temps partiel âgés, et est objet de réformes en vue d'élargissement, notamment en Finlande et en Suisse. En Pologne, la couverture retraite est universelle.

Les régimes obligatoires sont variablement, soit exclusivement par répartition pu-

blique (France), soit exclusivement par capitalisation privée (Australie, Danemark, Mexique), soit librement, par répartition publique ou capitalisation privée (Royaume Uni; géré au choix de travailleur, soit par répartition publique ou par les caisses privées de capitalisation.), soit enfin, par répartition publique complétée d'une capitalisation (Suède). Dans le même pays il n'est pas exclu de voir une caisse obligatoire en répartition, pour un secteur d'activité précis, avec un complément également obligatoire par capitalisation dans une autre caisse. C'est le cas en Belgique par exemple pour les professions libérales.

En Irlande ou au Royaume-Uni, les pensions forfaitaires de base sont détachées des contributions obligatoires. L'exemple de la Suède est très illustratif de la réussite d'une combinaison public-privé où cohabitent répartition et capitalisation avec des pensions intimement liées aux contributions. En effet, en Suède, le régime est contributif avec 18.5% de cotisations salariales obligatoires allouées aux retraites. Les 16% prélevés sont dédiées à la répartition tandis que les (2.5%) restant vont en capitalisation gérée par l'Etat ou par des caisses privées au choix de l'assuré. La répartition suédoise a la particularité de la neutralité actuarielle. Les sommes cotisées sont réellement et directement reverses aux retraités. Mais ces sommes sont virtuellement versées dans un compte individuel rémunéré au taux de l'inflation salariale. Le capital, à la retraite, est converti en rente viagère avec des pensions indexées également sur l'inflation salariale, mais avec une réduction de 1.6% (indexation parallèle). Une autre particularité de la retraite suédoise est la date de départ qui est laissée au choix de l'assuré à partir de 61 ans avec possibilité de cumul des pensions et du salaire en cas de retraites partielles.

Aux Etats-Unis, les pensions issues du régime contributif répartitif et obligatoire respectent plus le taux de remplacement, en faveur des retraités à faibles revenus, que le lien avec les cotisations. Par ailleurs, les éventuels excédents de la caisse publique

de répartition sont capitalisés en bons du trésor public, en vue des déficits futurs éventuels de la caisse. Au Canada, l'excédent est également capitalisé pour les deux années suivantes. Au Japon aussi la répartition utilise des réserves capitalisées.

La frontière entre les retraites par capitalisation et celles par répartition, n'est donc pas toujours nette, même au coeur des régimes publics obligatoires. Mais pour les régimes surcomplémentaires non obligatoires, dans ce cas c'est presque unanimement la capitalisation privée qui prévaut. Des régimes obligatoires sont souvent complémentaires de régimes déjà obligatoires également.

En France les régimes obligatoires, en répartition par points, Association pour le régime de retraite complémentaire des salariés (ARRCO) ou Association Générale des Institutions de Retraite Complémentaire des Cadres (AGIRC) sont des complémentaires du régime de base obligatoire. Au Danemark, l'ATP (Allmän Tillägspension) en capitalisation, est une complémentaire obligatoire.

Régimes volontaires et régimes sur-complémentaires

Dans les pays de l'O.C.D.E, il existe toujours des formes individuelles et volontaires de programmes de retraites privées, servies le plus souvent par des organismes financiers ou d'assurance. Leur développement est relatif à la culture sociopolitique des pays, mais également à la situation des retraites obligatoires dans le pays.

En règle générale, lorsque le pays admet des retraites obligatoires, principalement capitalisées, alors les retraites privées volontaires y sont plus développées et sûrement capitalisées.

Par exemple ces formes de retraites sont plus développées au Royaume-Uni qu'en France. Mais aux États-Unis, malgré l'existence d'un pilier de retraite par répartition obligatoire, avec néanmoins une part de capitalisation dans la répartition même.

Les retraites privées et capitalisées connaissent un fort développement du fait de la culture capitaliste du pays.

1.4.2 Les systèmes de retraites des pays rapprochés par zones géographiques

Dans les pays qui ne faisant pas partie de l'O.C.D.E., l'organisation des systèmes de retraites révèle un regroupement possible par zones géographiques. Ces pays ont, pour la majeure partie, leurs systèmes de retraites hérités des organisations coloniales ou au moins, connaissent par zones, un développement économique ou culturel semblable, favorisant un type d'organisation très proche. Nous retenons cinq zones économiques et culturelles.

Grand-Maghreb et Moyen-Orient

Tous les pays du Grand-Maghreb et du Moyen-Orient, ont chacun un régime de base de retraites par répartition, financé par cotisations salariales. Dans tous ces pays, la retraite de base est une branche de l'assurance vieillesse incluse dans le régime général de sécurité sociale sous la tutelle du gouvernement. Mais certaines branches professionnelles détiennent leurs propres caisses, notamment en Egypte, en Iran, en Tunisie ou au Maroc où coexistent jusqu'à six caisses différentes.

En Algérie, il existe une caisse au sein du régime général de sécurité sociale pour gérer les retraites, la Caisse Nationale de Retraites (CNR). Le taux de cotisation alloué aux retraites varie beaucoup d'un pays à l'autre et va de 3% du salaire en Mauritanie, 18% en Algérie et en Tunisie.

Le mode de calcul des droits varie également beaucoup, mais en moyenne, le taux de remplacement se place d'après la banque mondiale autour des 76%. Cette

moyenne reste un des taux régionaux le plus généreux du monde. Tous ces pays accordent également des pensions forfaitaires aux assurés n'ayant pas assez cotisé. Par contre, la couverture reste le défi majeur des caisses du régime de base et seuls quelques pays comme Algérie, ou la Libye intègrent les travailleurs du privé dans le régime général.

Dans la plupart des cas, les privés sont dépourvus d'assurances retraites comme en Djibouti, au Bahreïn, en Iraq, au Liban ou au Yémen par exemple. Les régimes privés de retraites existent bien, mais pour la plupart ils restent rattachés aux pouvoirs publics comme c'est le cas en Egypte ou. La carence d'institutions de retraites dans le privé et la couverture restent des problèmes majeurs jusqu'en Afrique Sub-saharienne.

Afrique-Sub-saharienne

Comme pour les pays d'Afrique du Nord et du Moyen-Orient, il existe dans chaque pays un régime de base public par répartition. Mais ici, dans la presque totalité des cas, ce régime est l'unique régime de retraites du pays. Il y a peu de disparités dans la zone et en général l'unique caisse de retraites du pays gère les retraites des salariés du public comme du privé dans un même régime. Beaucoup de caisses, dans de nombreux pays, ont la même structure voire la même dénomination, témoignage de l'héritage colonial des infrastructures : La Caisse Nationale de Sécurité Sociale (CNSS) au Bénin, au Niger, au Congo ou au Gabon par exemples. Caisse Nationale de Prévoyance Sociale (CNPS) au Cameroun et en Côte d'Ivoire ou l'Institut National de Protection Sociale (INPS) pour le Mali et le Sénégal. En Tanzanie toutefois, il existe plus d'une caisse, gérant des retraites. La part des cotisations pour les retraites est partout autour des 6 et 7% du salaire brut.

Les régimes par capitalisations sont inexistantes dans la plupart des pays, mis à part les pays ayant un héritage coloniale anglo-saxon : Nigéria, Tanzanie par exemple. En Afrique du Sud, la pension de base publique est fixe et complétée par des fonds de pensions privés volontaires. La Tanzanie a tout son système de retraites, géré par capitalisation et en prestations définies.

Asie-Pacifique

Une disparité, encore plus marquée, caractérise les systèmes de retraites en Asie. A l'Est, la Chine est carrément dépourvue de système national de sécurité sociale et donc de système de retraites à l'échelle nationale. La retraite est assurée par les Etats et essentiellement par les entreprises, qui participent aux cotisations dans des fonds privés majoritairement par capitalisation. L'Etat central assure quand même les retraites de certaines professions et rend obligatoire aux entreprises l'affiliation des employés à des fonds individuels. Il participe également au niveau des régimes des Etats locaux ou des entreprises. Au Sud, en Inde, les salariés de certains secteurs et précisément de l'industrie sont couverts avec parfois une couverture gratuite et dans tous les cas, une participation de l'Etat. Les retraites sont néanmoins, assurées par des fonds privés de capitalisation.

L'universalité des pensions est une donnée rare dans les pays d'Asie-Pacifique exception faite de quelques pays comme le Sultanat de Brunei, Hong Kong, le Népal ou le Samoa Occidental.

Dans la plupart des cas, la couverture se limite souvent aux seuls travailleurs et le système encourage les compléments de retraites par des participations à des fonds volontaires (Bahreïn, Pakistan, Singapour, Sri Lanka, Taiwan, Turkménistan).

Les fonds de pensions à participations volontaires sont plus particulièrement dé-

veloppés dans les professions libérales (Azerbaïdjan, Sultanat de Brunei, Burma, Fiji, Malaisie, Philippines, Salomon, Thaïlande, Vanuatu, Viêt-Nam).

Europe : Europe Boréale, Centrale et Orientale, Andorre et Monaco

Les systèmes de retraites d'Europe (centrale et de l'Est principalement), sont sommes toutes, assez proches de ceux des pays européens membres de l'O.C.D.E. Ils ont tous un système de retraites, inclus dans une assurance vieillesse, au sein d'un système globale de sécurité sociale. La plupart accorde un minimum de pension avec un complément éventuel en fonction des cotisations (Lituanie ou Slovaquie). La Macédoine, le Pays Malte et la Roumanie n'accordent pas de minimum vieillesse. En Bulgarie, la couverture vieillesse est universelle. A Monaco, les retraites complémentaires sont gérées par les caisses françaises.

Amérique Latine et Caraïbes

Tous les pays d'Amérique Latine ont un système de sécurité sociale incluant le versement des retraites au moins pour les salariés avec un minimum de pension. Dans certains cas, les cotisations sont obligatoires avec des pensions individuelles par capitalisation (Bolivie, Chili, République Dominicaine ou Colombie). Beaucoup d'Etats garantissent des pensions minimum (Cuba, Equateur, République Dominicaine). En Antigua-Barbade les régimes volontaires sont exclus.

Nous voyons que c'est à partir des principes et caractéristiques de la retraite qu'un pays peut déterminer son système de retraites. A côtés des principes de base (principe de la subvention, la répartition et la capitalisation) il existe encore des autres principes et caractéristiques (principe de pension liée au service, principe de la neutralité et actuarielle, caractère d'âge, caractère privé ou public. . .) de la retraite

comme nous avons expliqué dans cette section. Un pays peut prendre un ou plusieurs principes ou caractéristiques de la retraite pour définir son système ou régime de la retraite.

Comme le but de la retraite est le même (la réduction de pauvreté des personnes âgées) nous y trouvons que les pays ayant un niveau d'économie semblable, ayant un point historique fort ou réunis par zones géographiques adoptent des systèmes des retraites avec des nombreux points communs.

1.5 Le système Algériens de retraites et son évolution

La sécurité sociale en Algérie a connu différentes évolution aux quelles correspondent des organisations différenciées selon les objectifs et fondements de chaque période. Le découpage historique peut se faire en périodes distinctes qui expriment des évolutions particulières.

1.5.1 Les dates clés de l'évolution du système de retraite algérienne

- ★ Le système de protection sociale antérieure à 1962 ;
- ★ Le système de la protection sociale de 1962 à 1970 ;
- ★ Le système se la protection sociale de 1970 à 1983 ;
- ★ Le système de la protection sociale de 1983 à 1995 ;
- ★ Le système de sécurité sociale de 1995 à 2016 ;
- ★ Le système de sécurité sociale adopté à partir de janvier 2017.

Le système de protection sociale antérieure à 1962

L'histoire de la sécurité sociale en Algérie ne date pas de l'indépendance. Les premiers lois sociales furent adoptés en 1920 avec la mise en oeuvre de la législation sur les incidents sur le travaille et dans le 1941 avec l'application des prestations familiales.

Même en ce qui concerne la France les lois sur la sécurité sociale furent promulguées en 1945 et malgré le statut spécial de l'Algérie, qui était considéré comme un département français, leurs applications en Algérie a tardé jusqu'en 1949. De plus le contenu était modifié avec beaucoup des restrictions, en particulier au bénéfice des entreprises qui avaient des particuliers avantages à préjudice soit des principes fondamentaux du système de sécurité sociale, soit de la solidarité entre les cotisants des différents secteurs d'activité et soit de l'unité du système.

Le système de la protection sociale de 1962 à 1970

Au lendemain de l'indépendance, l'Algérie héritait d'un système de sécurité sociale comportant 11 régimes, 71 organismes de sécurité sociale et 11 organismes de retraite complémentaire. Il épousait en sorte la variété des secteurs professionnels. Les modalités de financement et les législations se rapportant sont différentes d'un régime à un autre. Cette diversité a rendu le système complexe dans son fonctionnement et sa gestion.

En 1963, il existait une douzaine de caisses professionnelles et 03 organismes polyvalents régionaux de la sécurité sociale. Il s'agit de la CASORAL pour le centre du pays, de la CASORAN pour la région de l'ouest et de la CASOREC pour la région de l'est.

Le système de la protection sociale de 1970 à 1983

C'est à partir de l'année 1970 que la problématique de la réforme était l'unification des régimes. L'unification des avantages et l'extension des bénéficiaires en Février 1975, une commission nationale de réforme s'installa mais le projet élaboré ne pouvait pas être adopté par le gouvernement à cause des résistances des ministères de tutelle des régimes particuliers. Des améliorations importantes ont été alors apportées par voie des circulaires au niveau des prestations services.

Le système de la protection sociale de 1983 à 1995

En 1983, le système de l'assurance se renouvelait autour des principes de l'unification des régimes et d'uniformisation des avantages afin d'évoquer un système de sécurité proprement dit. La promulgation de la loi de juillet 83 représente le cadre juridique qui régit toutes les composantes de la sécurité sociale en Algérie, on citera entre autre :

- La loi n83 – 11 du *2juillet*1983 relative aux assurances sociales.
- La loi n83 – 12 du *2juillet*1983 relative à la retraite.
- La loi n83 – 13 du *2juillet*1983 relative aux accidents du travail et aux maladies professionnelles.
- La loi n83 – 14 du *2juillet*1983 relative aux obligations des assujettis en matière de Sécurité sociale.
- La loi n83 – 15 du *2juillet*1983 relative au contentieux en matière de la sécurité social.

En 1985, les organismes existants furent unis autour de deux caisses nationales, la caisse nationale des accidents de travail et maladies professionnelles et la caisse des retraites (CNR) érigées en établissement public à caractère administratif (EPA).

En 1988, le statut juridique des deux caisses fut modifié en établissement public à caractère spécifique, à la faveur de la loi 88 – 01 qui porte autonomie aux entreprises publiques.

En 1992 la CAVNOS changeait d'appellation par Caisse Nationale des Assurances Sociales des Non Salaries (CASNOS).

En 1994 fut établi le régime de pension de retraite anticipée et l'indemnité d'allocation chômage. Les derniers changements furent en 1995 par la mise en place de la Caisse Nationale d'assurance Chômage (CNAC) et en 1998, l'institution de la Caisse Nationale des Congés Payés des travailleurs de bâtiment (CACOBATPH).

Le système de la protection sociale de 1995 à 2016

Le système de sécurité sociale en vigueur s'est enrichi depuis 1997 d'une autre caisse créée pour couvrir le chômage lié aux intempéries et aux congés payés du secteur BTPH, en considération aux conditions particulières de ce secteur exposé aux ruptures de travail pour intempéries.

La Caisse nationale des Congés Payés et du Chômage Intempéries des secteurs du Bâtiment, des travaux Publics et de l'Hydraulique (CACOBATH) créée par le décret exécutif *n* 97-47 du 04 février 1997.

Aussi la création de la caisse nationale de recouvrement des cotisations de sécurité sociale par décret exécutif *n* 06-370 du 19 Octobre 2006, et qui a été dissoute en 2015 par Le décret exécutif *n* 15-155 du 16 juin 2015.

En résumé de ce rappel historique, le système de sécurité social actuel comprend cinq organismes institués en caisses autonomes couvrant pratiquement tous les risques définis par l'Organisation Internationale du Travail (OIT) :

- Les soins médicaux, l'invalidité, le décès, la maladie, la maternité, les accidents

- de travail et les maladies professionnelles (CNAS et CASNOS),
- La vieillesse (CNR),
 - Le chômage (CNAC),
 - Les congés payés et intempéries (CACOBATH).

Le système de la sécurité sociale adopté à partir de janvier 2017

La loi 16–1512 du 31 décembre 2016 modifiant et complétant la loi 83–12 relative à la retraite est publiée au journal officiel. Cette loi qui prend effet à compter du 1^{er} janvier 2017 avait été adoptée, à la majorité, par les membres de l'Assemblée populaire nationale (APN) en date de 30 novembre 2016. Elle avait par la suite adoptée le 21 décembre par les membres du conseil de la nation.

Le texte de loi stipule que « le travailleur prétendant au bénéfice de la pension de retraite doit obligatoirement réunir les deux (02) conditions suivantes : être âgé de soixante (60) ans au moins et avoir travaillé pendant au moins trente deux ans.

Toutefois, la femme travailleuse peut être admise à sa demande à la retraite à partir de l'âge de cinquante-cinq (55) ans, au moins révolus, et avoir travaillé pendant quinze (15) ans, au moins, indique l'article 6 de cette loi.

Il est expliqué que pour pouvoir bénéficier de la pension de retraite, le (la) travailleur (se) doit avoir accompli un travail effectif dont la durée doit être, au moins égale à sept ans et demi (7.5) et verser les cotisations de la sécurité sociale.

Il est également à préciser que sous réserve des dispositions de l'article 10 de la loi, le (la) travailleur (se) peut opter volontairement pour la poursuite de son activité, au-delà de l'âge cité, ci-dessus, dans la limite de cinq (5) années, au cours desquelles l'employeur ne peut prononcer sa mise à la retraite.

L'article 07 de ce texte indique que le (la) travailleur occupant un post de travail

présentant une haute pénibilité peut bénéficier de la pension de retraite avant l'âge prévu à l'article 6 , après une durée minimale passée à ce poste ».

1.5.2 Les caisses de la sécurité sociale

Cette refonte s'est effectuée autour d'organes spécialisés par grandes régimes de risques couverts (maladie invalidité, retraite et chômage); avec toutefois, une distinction entre salariés et non salariés [35].

Les caisses créées en 1983

La première vague d'unification de 1983 a permis de créer d'abord deux grandes caisses :

- La Caisse Nationale des Assurances Sociales et des Accidents de Travail (CNAST),
- La caisse nationale de retraite (CNR).

Il faut souligner que cette première refonte ne distinguait pas entre salariés et non salariés, puisque le volet assurance sociale a été transféré à la CNR. En d'autres termes, ces deux caisses là s'occupaient à la fois de l'assurance sociale des salariés et non salariés.

Les caisses créées en 1992

C'est en 1992 après l'application du décret *n* 92-07 13 du 04 janvier 1992, qu'est apparue une nouvelle organisation donnant naissance à trois nouvelles caisses :

- La caisse nationale des assurances sociales (CNAS),
- La caisse nationale des retraites (CNR),
- La caisse nationale des assurances sociale des non salarie (CASNOS).

Cette nouvelle organisation prend en considération la distinction entre salariés et non salariés.

Les caisses créées en 1994 et 1997

Dans le souci d'amortir le choc et la tension sociale qui s'en est suivi, suite à compression d'effectif et dissolution des entreprises publiques, une nouvelle caisse a vu le jour en 1994 : La Caisse Nationale des Assurances Chômage (CNAC).

Par ailleurs, le système de la sécurité sociale en vigueur s'est enrichi depuis 1997 d'une autre caisse créée pour couvrir le chômage lié aux intempéries et aux congés payés du secteur public et hydraulique (CACOBATH), en considération des conditions particulières de ce secteur exposé à la rupture de travail pour intempérie : la caisse nationale des congés payés et du chômage intempérie des secteurs du bâtiments, travaux publique et hydraulique (CACOBATH) est créée par le décret exécutif *n*97 – 47 du 04 *fvrier*1997 [35].

Les caisses actuelles du système de la sécurité sociale

En résumé, le système de sécurité sociale actuel comprend (5) caisses autonomes couvrant tous les risques de la vie Professionnelle du travail.

La CNAS et la CASNOS

Les soins médicaux, l'invalidité, le décès, la maladie, la maternité, les accidents de travail et les maladies professionnelles, sont pris en charge par deux caisses, à savoir ; la CNAS et la CASNOS selon que la population assurée soit salariés ou non salariés.

La CNR

La retraite (vieillesse) est prise en charge par la CNR (la caisse nationale des retraites).

La CNAC

Le chômage pour raison économique est pris en charge par la CNAC.

La CACOBATPH

Les congés payés et le chômage du secteur spécifique (Bâtiment) sont pris en charge par la CACOBATPH.

L'Etat

Le dernier risque prévenu par l'OIT est appelé « aide au revenu familial », qui, en Algérie répond a d'autres mécanismes ; il est intégralement pris en charge par l'Etat et ne dispose pas de caisse spécifique à sa gestion.

1.5.3 Le contenu du système de retraite Algérien [46]

Faisant partie intégrante de la sécurité sociale Algérienne, le système National de retraite a, depuis sa création, évolué en fonction de l'évolution qu'a connue l'Algérie au plan économique et social.

La refonte adoptée par les lois de 1983, avait pour objectif entre autres de mettre fin aux différents textes législatifs et réglementaires dont leurs caractéristiques se présentaient par :

- La qualité des régimes des retraites ;
- La multitude des caisses ;

- Les disparités des avantages servis d'un secteur à un autre.

Ses principes

Le système des retraites en Algérie, applicable à partir du 01 janvier 1984, se présente comme un système assurantiel, contributif, caractérisé par une solidarité entre les actifs et les retraités, fonctionnant donc sur le principe de répartition [44].

Les dispositions des articles 1 et 2 de la loi 83 – 12 définissent l'objet et les principes de cette loi à savoir

- L'unicité du régime pour tous les travailleurs salariés ;
- L'uniformisation des règles relatives à l'appréciation des droits ;
- L'uniformisation des règles relatives à l'appréciation des avantages ;
- L'uniformisation du financement.

Ses caractéristiques

Parallèlement à ses principes le système de retraite Algérien se caractérise par :

- Le champ de protection qu'il couvre ; c'est à dire les salariés concernés par les dispositions de cette loi (tous les travailleurs quel que soit leur secteur d'activité) ;
- Un niveau de la prestation qu'on peut qualifier de très élevée ; peut atteindre 80% voire 100% du salaire ;
- Unification de l'âge légal de départ à la retraite dérogation ou bonification pour les catégories particulières (femmes travailleuses, moudjahidines ...etc.), institution d'un minimum de pension indexé sur le salaire national minimum garanti (actuellement 75% du SNMG) ;
- Fixation d'une durée de carrière « maximum » relativement courte soit 32 ans ;

- Calcul de pension sur le salaire moyen des cinq (05) dernières ou les(05) meilleures années de la carrière ;
- Le taux de pension de réversion (peut atteindre 90% du montant des conjoints) ;
- Revalorisation annuelle des pensions et allocations des retraites.

Ainsi, nous pouvons constater l'importance de la protection assurée par le système et le haut niveau des prestations qu'il procure à ses bénéficiaires.

Les avantages servis

Le régime national de retraite garantit les avantages suivants :

- * Une pension de retraite au travailleur chef de sa propre activité,
- * Une allocation de pension ; lorsqu'un travailleur ne remplit pas la condition de travail requise, il peut bénéficier d'une allocation de retraite s'il justifie des cinq (5) dernières années d'activité au moins.

Une pension de réversion est servie en faveur :

- ◇ Du conjoint survivant ;
- ◇ Des orphelins ;
- ◇ Des ascendants.

La présentation du système de retraite par répartition en Algérie

Dans un système de retraite par répartition simple comme c'est le cas de l'Algérie, les cotisations barrées sur les revenus professionnels de travailleurs en activités servent au paiement des pensions des retraites au même moment. En principe, s'il n'ya pas des réserves car les flux des cotisations varient pour des raisons économiques ou démographiques, les pensions ont une tendance de varier dans le même sens [46].

Il est cependant possible d'agir sur des paramètres pour conserver le niveau des pensions ; l'âge de liquidation, durée de cotisation pour le calcul de taux de liquidation, salaire de référence, etc. Dans un système pur, il n'y a pas non plus le lien direct entre le montant total des cotisations versé par une personne et la pension qu'elle touchera plus tard ; celle-ci dépendra des cotisations à verser au moment où elle sera retraité. Quand les cotisations et les pensions sont fixes, il est assez improbable que la somme collectée coïncide exactement avec la somme des pensions à verser. Quand l'un des termes est variable, sa variation équilibre le système.

Dans un régime de cotisation définie, les sommes collectées sont réparties entre les pensionnés, mais l'équilibre s'obtient en faisant varier les pensions en fonction des ressources ; les actifs et les retraités sont solidaires, profitant de la croissance ou subissant les crises en tous ensemble.

Symétriquement, dans un régime de prestation définie, les sommes nécessaires pour les pensions restent collectées des cotisations (cotisants) ; mais les cotisations baissent du montant en fonction des besoins. Les actifs et les retraités ne sont pas solidaires au sens précédent ; seul les actifs profitent de la croissance ou subissent les crises. Les pensionnés sont protégés, du moins tant que les sommes nécessaires n'excèdent pas les capacités réelles du système productif.

La principale caractéristique du système de retraite en Algérie est qu'il est unique et général pour tous les salariés (l'unification de 1983) ; fonctionnant sur le principe de la répartition et financé par les cotisations des salariés. La question de l'équilibre du système de retraite en Algérie, se pose avec récurrence à l'instar des systèmes des pays de l'OCDE.

Le système de retraite en Algérie a connu un redimensionnement de sa taille quant il fut utilisé comme outil de protection des salariés qui se sont retrouvés inactifs du fait de la fermeture de leurs entreprises publiques lors de l'application du Plan d'Ajustement Structurel (PAS) des années 90.

C'est à cette période que le taux de couverture du système de retraite s'est nettement élargi, en instaurant de nouvelles conditions d'accès au système dans le sens de la facilitation. Ainsi une grande partie des salariés touchés par les licenciements économiques étaient pris en charge par la caisse des retraites.

La taille du système n'a cessé de croître, et son équilibre nécessite un réajustement de son financement en adéquation avec l'évolution de la structure démographique ; adéquation entre le nombre d'actif qui y contribue et les retraités à sa charge.

Le déséquilibre du système de retraite est observé d'abord : l'Algérie, au même titre que les pays en voie de développement, en général, et ceux du Maghreb en particulier, connaissent depuis quelques années un phénomène appelé « transition démographique » le mode de vie changeant, fait baissé le taux de natalité (2.5 en moyenne de 2000 à 2011, 5.2 en moyenne de 1980 à 1990) avec une augmentation de l'espérance de vie qui approche des 75 ans, due notamment à l'amélioration de la prise en charge sanitaire. La structure démographique Algérienne entame une phase de vieillissement.

La transition démographique, certes, impacte négativement l'équilibre budgétaire du système de retraite en Algérie, ne prendra des proportions alarmantes qu'à moyen et long terme. Ce sont les évolutions économiques qui pèsent actuellement et au vu desquelles il faudra envisager les éventuelles réformes.

1.5.4 L'impact des changements démographique sur le système de retraite par répartition

Les changements démographiques qui s'opèrent actuellement et à l'avenir montrent une modification de la structure par âge de la population algérienne entraînant, avec l'augmentation continue de la fécondité³⁹, Les problèmes qui se posent et se poseront davantage à l'avenir restent le problème du chômage qui pourrait s'accroître avec l'arrivée [35].

des générations de plus en plus nombreuses sur le marché du travail ainsi que le financement de la caisse de retraite qui éprouve déjà des difficultés financières avec l'accroissement du nombre de retraités lié au processus continu du vieillissement démographique.

Deux types de changements démographiques compromettent l'équilibre financier des régimes de retraites. Tout d'abord les mouvements des naissances ou les migrations qui affectent le volume et la structure de la population et ensuite les variables de l'espérance de vie qui se manifeste par le vieillissement de la population. Ce vieillissement démographique, contrairement au vieillissement individuel qui est biologique, prend en considération l'aspect juridique (âge légal de départ à la retraite), social (cycle de vie) et économique-productif (sortie du marché de travail).

La sortie du marché du travail dans les sociétés traditionnelles, comme nous l'avons évoqué auparavant, survenait avec la déchéance physique, il y avait donc une coïncidence de fait entre l'âge biologique et l'âge socio-économique. Dans les sociétés modernes un écart se creuse progressivement entre vieillesse socio-économique et vieillissement biologique. Même après avoir perdu son rôle productif, « l'individu âgé reste en bonne forme physique et psychique : nous vivons plus longtemps et en bonne santé ». Il en résulte une anticipation progressive du seuil de vieillissement

social et un recul important de celui de la vieillesse biologique. Ces changements démographiques résultent de l'évolution des phénomènes démographiques à savoir : la fécondité, la mortalité et la mobilité spatiale.

La fécondité

L'augmentation de l'indice de fécondité entraîne en général une croissance de la population et par conséquent celle de la population active. Dans le cas d'une croissance démographique continue, la population active s'accroît, et entraîne des répercussions sur les régimes de retraite en répartition. Si c'est la situation ou une diminution de la population produira des effets tout à fait inverses puisque avec une diminution de la population active, le taux de cotisation d'équilibre augmentera et la rentabilité financière deviendra négative [46].

L'espérance de vie

De même, les variations de l'espérance de vie affectent aussi la structure de la population. En effet l'allongement de l'espérance de vie conduit également à un déséquilibre au niveau du régime de retraite par répartition, car les retraités vivant plus longtemps seront plus nombreux dans le futur. Pour analyser les seuls effets des chocs démographiques sur l'équilibre des régimes de retraite, nous avons exclu les évolutions économiques en considérant que la croissance économique et le taux de chômage sont nuls. Il est nécessaire de les prendre en considération pour analyser l'impact des évolutions économiques sur l'équilibre des régimes de retraite [44].

conclusion

Ce premier chapitre a démontré que, l'objectif des systèmes de retraite est, à la fois, d'assurer le report d'un niveau acceptable de revenus de consommation, l'assurance contre l'incertitude et la mise en place de mécanismes de redistribution.

Les retraites fonctionnent selon deux modes principaux, la répartition et la capitalisation. Ceux-ci se distinguent par le fait que dans la répartition, les cotisations des actifs servent à financer les pensions des retraités, alors qu'elles sont placées et fructifiées pour le compte de l'assuré épargnant avec la capitalisation.

La réalisation de ces objectifs nécessite un environnement économique et démographique favorable. En effet, le financement des pensions de retraites reste tributaire de plusieurs facteurs surtout dans les régimes par répartition : nombre d'actifs, d'inactifs, productivité, croissance économique.

L'environnement économique, dont le principal élément est la croissance, détermine l'augmentation des salaires ; l'augmentation de la masse salariale, fait augmenter l'assiette d'assujettissement aux cotisations, c'est de nature à faire augmenter le rendement des retraites.

La croissance économique fait, aussi augmenter le nombre d'actifs cotisants, Celle-ci constitue alors une base d'amélioration et de renforcement des cotisations participant ainsi à l'amélioration du niveau de vie et celle des revenus et facilitant par conséquent la pérennité des régimes de retraite.

L'environnement démographique, à travers ces principales variables que sont la fécondité, la mortalité et allongement d'espérance de vie, impactes aussi le rapport démographique des systèmes de retraite. Un choc démographique produit des effets à la fois sur les variables économiques et sur l'équilibre des régimes de retraite.

CHAPITRE 2

Modèles de risques classique, probabilité de ruine et les Probabilités viagères

introduction

En assurance vieillesse, il est nécessaire de modéliser le comportement d'un surplus financier afin de quantifier le risque qui lui est associé. Plus précisément, on tente d'étudier la probabilité que ce surplus financier tombe en dessous de zéro, événement qu'on appellera "ruine".

dans ce chapitre, on présente les modèles de risque classiques d'une manière générale, par la suite, on introduit la probabilité de ruine à horizon fini et infini, le moment de la ruine et le processus de renouvellement. Enfin, on cite les principales approches utilisées pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique.

2.1 Modèle de risque classique

On peut considérer le surplus financier de la caisse nationale des retraites comme le montant d'argent qu'elle possède pour payer les réclamations de ses clients. Ces derniers paient des primes d'assurance qui sont ajoutées au surplus de l'assureur, et qui sont la seule source de revenus qu'on considère dans les modèles de risque de la forme :

$$R(t) = u + c t - Z(t) \quad (2.1)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} R(t) : \text{ Le processus de risque qui modélise le surplus financier d'une compagnie d'assurance,} \\ u : \quad \text{ Le surplus (capital) initial,} \\ c : \quad \text{ Le taux auquel sont reçues les primes par unité de temps (taux de cotisation),} \\ Z(t) : \text{ Le processus de pertes agrégés.} \end{array} \right.$$

Le choix de $Z(t)$ détermine le processus $R(t)$ lorsque $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ , et les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $i = 1, 2, \dots, N(t)$, on est en présence du modèle classique, exhaustivement étudié dans la littérature. Le lecteur intéressé peut se référer à [12][24][28][35]. Le modèle de surplus prend alors la forme suivante :

$$R(t) = u + c t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Ce modèle a été étudié en détail dans plusieurs ouvrages de références[11][22], et récemment dans [43]. Un des premiers résultats historiques sur la probabilité de ruine concerne le cas où les montants de remboursements X_i ; suivent une loi exponentielle [18]. Un peu plus tard, Dufresne et al [17]. introduisent le processus Gamma, ils ont montré que le processus de Poisson composé (qui modélise les pertes agrégées) pouvait être remplacé par un processus Gamma.

Ils construisent le processus Gamma comme étant une limite du processus de Poisson composé. Le modèle de risque obtenu est alors représenté par un processus de surplus de la forme :

$$R(t) = u + c t - Z_G(t)$$

Où $Z_G(t)$ est le processus Gamma, c'est-à-dire un processus dont les accroissements suivent une loi Gamma. Des formules pour la probabilité ultime de ruine, ainsi que pour la fonction de densité conjointe sont dérivées à partir des résultats déjà connus pour le modèle ayant un processus de Poisson composé.

Par la suite, Dickson et Waters [16] étendent ces résultats et obtiennent des formules pour la probabilité de ruine à temps fini pour le modèle basé sur la construction de Dufresne et Gerber [18].

Morales et al. [32] ont proposé un modèle de risque plus général englobant le cas où le processus de pertes agrégées est un processus de Lévy, ou plus précisément, une classe particulière de processus de Lévy (un subordonateur). Le modèle de risque a alors un surplus de la forme suivante :

$$R(t) = u + c t - Z_{Levy}(t) - \eta S(t)$$

Où $Z(t)$ est un subordonateur, et S est un processus de Lévy. Ils se concentrent sur le cas où $\eta = 0$, i.e. $R(t) = u + c t - Z_{Levy}(t)$.

Remarque 1. *Le processus de surplus $R(t)$ obtenu avec un subordonateur s'écrit :*

$$R(t) = u + c t - Z_{sub}(t) \tag{2.2}$$

Le processus de Lévy

Les processus de Lévy sont des processus stochastiques dont les propriétés sont très intéressantes pour la construction des modèles de risque. Pour une étude détaillée sur les processus de Lévy, on pourra consulter les travaux de [5][39] ou encore [29].

Définition 1. Processus de Lévy [29]

Un processus stochastique $\{X_t : t \geq 0\}$ défini sur \mathbb{R} est un processus de Lévy s'il satisfait les conditions suivantes :

1. Pour tout choix de $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les variables aléatoires $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes ;
2. $X_0 = 0$;
3. La loi de $X_{s+t} - X_s$ ne dépend pas de s ;
4. (X_t) est continu en probabilité, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{s \rightarrow t} P[|X_s - X_t| > \epsilon] = 0;$$

5. Il existe un ensemble $\Omega_0 \in F$ tel que $P\Omega_0 = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ est continue à droite en tout $t \geq 0$ et a une limite à gauche en tout $t > 0$. Un processus aléatoire vérifiant les conditions (1) à (4) est appelé processus de Lévy en loi.

2.1.1 Probabilité de ruine

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine. Et pour la définir, il faut d'abord définir le moment τ où survient la ruine.

Définition 2. L'istant de la ruine τ

Dénotant par τ la variable aléatoire du moment de la ruine défini par :

$$\tau = \inf\{t : R(t) < 0\}.$$

La probabilité de ruine peut ainsi être définie à travers l'istant de la ruine. En effet, si on observe la ruine pour le processus $\mathcal{R}(t)$, c'est que τ existe et est fini, i.e. $\tau < \infty$. Par contre, si on n'observe pas de ruine, alors τ n'existe pas. Ainsi la probabilité ultime de ruine, notée $\Psi(u)$, peut se définir de la manière suivante.

Définition 3. La probabilité ultime de ruine

Soit un modèle de risque de la forme (2.2), avec $R(0) = u$. Dénnotant par $\Psi(u)$ la probabilité ultime de ruine pour ce modèle. Alors,

$$\Psi(u) = P(\tau < \infty / R(0) = u).$$

La probabilité ultime de ruine n'est autre que la probabilité que $\tau < \infty$, pour un surplus initial $R(0) = u$. Si $\tau = \infty$, on parlera de survie pour le processus $R(t)$.

Le cas échéant, si $\tau < \infty$, on parlera de ruine. En cas de survie, la probabilité d'un tel scénario est donnée par la probabilité de survie $\phi(u) = 1 - \Psi(u)$.

Dans la suite, on donne une définition alternative de la probabilité ultime de ruine.

Définition 4. La probabilité ultime de ruine

Soit un modèle de risque de la forme (2.2), avec $R(0) = u$. Dénnotant par $\Psi(u)$ la probabilité ultime de ruine pour ce modèle. Alors,

$$\Psi(u) = P\{\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 / R(0) = u\}.$$

Notons que cette probabilité de ruine, appelée "probabilité ultime de ruine" est complexe à calculer puisqu'il n'existe que très rarement des expressions exacte et précises pour obtenir un résultat numérique.

Probabilité de ruine à horizon fini

Soit $\{R(t) : t \geq 0\}$ un processus de surplus tel que défini en (2.2), dénotant par $\Psi_T(u)$ la probabilité de ruine à horizon fini, pour un surplus initial $R(0) = u$, alors

$$\Psi_T(u) = \mathbf{P}\{\tau < T/R(0) = u\}.$$

de plus il est clair que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Psi_T(u) = \Psi(u). \quad (2.3)$$

La probabilité $\Psi_T(u)$ est beaucoup plus facile à simuler que $\Psi(u)$. De plus, grâce à la limite obtenue par la formule (2.3), on peut approcher $\Psi(u)$ par $\Psi_T(u)$, qui est la probabilité que la ruine survienne à l'intérieur de l'intervalle de temps $[0, T]$ lorsqu'il n'existe pas d'expression analytique exacte exprimant $\Psi(u)$. Cette probabilité a donc deux utilités remarquables : Elle est facile à calculer, cela nous offre une alternative aux obstacles posés par la simulation de $\Psi(u)$, elle a un aspect plus pratique.

Probabilité de ruine à horizon infini

on note que cette probabilité est définie pour un horizon de temps infini

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\tau < \infty/R(0) = u\}.$$

La fonction de densité conjointe

On considère maintenant une nouvelle quantité qui apporte de l'information supplémentaire dans l'étude du risque d'un modèle de surplus, la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit à l'instant de la ruine que l'on notera *fdc*. En effet, on associe également à l'évènement de la ruine deux autres quantités importantes. Il s'agit du surplus avant la ruine, c'est-à-dire, la valeur du surplus juste

avant le moment de la ruine. Et u déficit au moment de la ruine, c'est-à-dire la valeur absolue du surplus juste après que la ruine ait eu lieu. Ces deux variables aléatoires, peuvent offrir beaucoup d'informations concernant le surplus financier $R(t)$ [2].

Définition 5. Soit τ le moment de la ruine de la définition 2. On note τ^- le dernier instant juste avant la ruine où :

$$\tau^- = \lim_{s \uparrow \tau} s.$$

Définition 6. Surplus avant la ruine

Soit τ le moment de la ruine de la définition 2, la variable aléatoire du surplus juste avant le moment de la ruine, que l'on dénote X pour alléger le texte, est définie par :

$$X = R(\tau^-).$$

Définition 7. Déficit au moment de la ruine

Soit τ le moment de la ruine, la variable aléatoire du déficit au moment de la ruine, que l'on dénote Y pour alléger le texte, est définie par :

$$Y = |R(\tau)|.$$

2.1.2 Processus de renouvellement

Un processus de renouvellement est un processus de comptage pour lequel les variables aléatoires $T_i, i = 1, 2, \dots$ sont indépendantes et identiquement distribuées. L'exemple le plus important d'un processus de renouvellement est le processus de Poisson [10].

2.1.3 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est le processus de comptage d'événements entre lesquels s'écoulent des durées indépendantes de distribution exponentielle.

Définition 8. Soit $\{X_i, i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$, soit $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Le processus de Poisson N d'intensité constante λ est défini par

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{T_n \leq t}$$

2.1.4 Processus de Poisson composé

Définition 9. Soit N un processus de Poisson d'intensité $\theta > 0$. Soit $X_i, i > 1$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et indépendantes de N . Le processus S défini par $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ est appelé un processus de Poisson composé.

2.1.5 Condition de non ruine

Considérons maintenant le surplus $R(t)$ d'une certaine compagnie d'assurance à la date t , lorsque le capital initial est u et les primes sont versées par les clients à un taux instantané c :

$$R(t) = u + ct - Z(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Ainsi, le théorème de Wald [42], nous permet d'obtenir

$$E[R(t)] = u + ct - \lambda \mu t$$

,

avec μ étant le taux de remboursement.

Une condition qu'il est naturel d'imposer que l'espérance de la fortune d'une compagnie d'assurance soit toujours positive, soit $\lambda \mu \leq c$. On va voir que la condition d'équilibre, $\lambda \mu = c$, est insuffisante pour la compagnie puisqu'elle implique une ruine certaine. Exprimons tout d'abord la probabilité de ruine d'une autre façon. Remarquons que la ruine se produit nécessairement à l'occasion d'un sinistre, c'est-à-dire à l'une des dates T_n . On a donc :

$$\Psi(u) = P\{\exists t \geq 0 / R(t) < 0\} = P\{\exists n \geq 0 / R(T_n) < 0\}.$$

$$\text{Or, on a : } R(T_n) = u + cT_n - Z(T_n) = u - \sum_{i=1}^n (X_i - c\tau_i).$$

$$\text{D'o, en posant } S_i = X_i - c\tau_i \text{ et } w_n = \sum_{i=1}^n S_i.$$

$$\text{Il vient : } \Psi(u) = P\{\exists n \geq 0 / w_n > \mu\} = 1 - P\max_{n \geq 1} w_n \leq \mu.$$

Par la loi des grands nombres, on sait que w_n/n converge presque sûrement vers

$$E[S_1] = \mu - (c/\lambda)$$

- Si $\lambda \mu > c$, alors elle converge presque sûrement vers $+\infty$ et donc la ruine est presque sûre ;

- Si $\lambda\mu < c$, alors elle converge presque sûrement vers $-\infty$ et donc la ruine n'est pas presque sûre ; c'est-à-dire qu'il existe une probabilité positive de non-ruine à horizon infini ;
- Si $\lambda\mu = c$, la théorie des marches aléatoires montre que $\text{Lim sup } w_n = +\infty$ presque sûrement et donc la ruine est presque sûre.

La condition de non-ruine est donc :

$$\lambda\mu < c.$$

On peut alors définir la charge de sécurité ϱ par :

$$\varrho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1. \quad (2.4)$$

Formule de Pollaczak-Khinchine

Théorème 1. [9] *Pour tout $u \geq 0$*

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_Z^s)^{*n}}(u). \quad (2.5)$$

où $\overline{(F_Z^s)^{*n}}(u) = 1 - (F_Z^s)^{*n}(u)$ et $(F_Z^s)^{*n}$ est la n^{eme} convolution de la fonction de distribution complémentaire F_Z^s telle que F_Z^s la fonction de répartition de Z définie par :

$$F_Z^s = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_Z(y)) dy, x \geq 0.$$

La formule (2.5) est appelée formule de Pollaczak-Khinchine ou encore formule de Behan.

La représentation en série infinie donnée dans (2.5) est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des

approximations numériques de la probabilité de ruine $\Psi(u)$, telle que l'algorithme de Panjer [36].

2.1.6 Modèle de risque multi-branches

l'évolution conjointe des branches est décrite par l'arrivée déterministe du vecteur des primes et par le vecteur des montant globaux des sinistres de chaque branche qui est équivalente à la sommation algébriques de toutes les richesses. Ces branches peuvent représenter des filiales différentes, des secteurs d'activité différents (assurance santé, habitation, automobile, responsabilité civile) ou encore des activités, différentes ou identiques, dans différents continents, pays ou régions.

Récemment, des modèles de risque multidimensionnels ont été introduits et étudiés dans la littérature(cf. Chan et al. (2003) [27]). Les modèles tels qu'ils sont présentés dans sundt (1999), sont composés de p branches d'activités donc p sous réserves. Le nombre d'événements de réclamation jusqu'au temps t est modélisé généralement par un processus de poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, sachant qu'un seul événement peut produire jusqu'à p types de réclamations.

Notons pour tout $j = 1, \dots, p$ u_j : la réserve initiale de la j^{me} branche, c_j : le taux de prime de la réclamation de type j produite par le i^{me} événement.

Alors, le modèle de risque multi-branches est décrit par le procesus suivant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + c_1 t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^1 \\ u_2 + c_2 t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^2 \\ \vdots \\ u_p + c_p t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^p \end{pmatrix}, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Supposans que $N(t), t \geq 0$ est un processus de Poisson de paramètre λ et $\{(Z_i^1, \dots, Z_i^p), i \geq 1\}$

est une séquence de vecteurs aléatoires non négatifs, indépendants et identiquement distribués et aussi indépendantes de $N(t), t \geq 0$.

Une évaluation de la distribution du processus $\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^1, \dots, \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^p\right)$ associé à ce modèle a été faite par Sundt en 1999. Chan et al. (2003) [27] ont considéré un modèle multidimensionnels avec les même hypothèses mais avec deux branches d'activité. Les études faites sur les modèles présentés dans ces deux derniers travaux supposent une indépendance entre les différents types de réclamation $Z_i^1, Z_i^2, \dots, Z_i^p$ pour simplifier l'études. Or, cette hypothèse d'indépendance est souvent non vérifiée dans la pratique. Du fait qu'il existe presque toujours une certaine forme de dépendance entre les différents types de réclamations qui sont produites par le même événement. Par exemple, considérons une compagnie avec deux contrats d'assurance : automobile et habitation. Typiquement, plusieurs assurés résident dans le même secteur, de sorte qu'en cas de tornade, par exemple, le nombre et la taille des réclamations pour des dommages aux véhicules et aux domiciles des clients seront liés entre eux. Si le modèle ne tient pas compte de cette possibilité, il s'ensuivra une sous estimation des mesures de risque.

Soit

$$\varrho_j = \frac{c_j}{\lambda E(Z_i^j)} - 1 \geq 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p,$$

le chargement de sécurité relatif de la j^{me} branche.

Notons par

$$\bar{S}^j(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^j - c_j t, t \geq 0, j = 1, \dots, p,$$

les mesures de risque définies précédemment possèdent plusieurs propositions d'extension dans les modèles de risque multidimensionnels. Elles sont définies soit par

rapport à la richesse globale de la compagnie ou par rapport à quelques branches spécifiques suivant le critère choisi par le décideur dans la compagnie d'assurance.

2.2 Quelques méthodes d'approximation dans la théorie classique de la ruine

En général, il est difficile de trouver une expression explicite de $\Psi(u)$. Par conséquent, des approximations de la probabilité de ruine sont requises. Ainsi nous verrons dans cette section différentes bornes et approximations de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique.

2.2.1 Borne de Lundberg

L'inégalité de Lundberg garantit que la probabilité de ruine à horizon infini $\Psi(u)$ est bornée par une fonction qui décroît de façon exponentielle en fonction du capital initial u lorsque le coefficient d'ajustement ρ existe.

Théorème 2. [40]

Supposons que le coefficient d'ajustement (la charge de sécurité) $\rho > 0$ existe.

Pour tout $u \geq 0$:

$$a_- e^{-\rho u} \leq \Psi(u) \leq a_+ e^{-\rho u}$$

Où

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0]} \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty (1 - F_z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\rho y} (1 - F_z(y)) dy} \quad \text{et} \quad a_+ = \sup_{x \in [0, x_0]} \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty (1 - F_z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\rho y} (1 - F_z(y)) dy}.$$

2.2.2 Approximation Cramér-Lundberg de la probabilité de ruine

Soit $\Psi(u)$, avec $u \geq 0$, la probabilité de ruine du modèle défini en (3.1). Afin d'éviter une ruine certaine, on suppose que le chargement de sécurité relatif $\varrho = \frac{(c-\lambda\mu)}{(\lambda\mu)}$ est strictement positif. On note $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, où F est la fonction de distribution des montants des réclamations.

En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine qui vérifie l'équation intégrale suivante [23] :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{u} \int_0^u \Psi(u-y) \bar{F}(y) dy.$$

En général, il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur l'approximation des probabilités de ruine ont été réalisés par Cramér-Lundberg dès 1930. La condition Cramér-Lundberg stimule l'existence d'une constante $k > 0$ satisfaisant l'équation suivante de Lundberg :

$$\int_0^\infty e^{kx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}.$$

Qui est équivalente à :

$$\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = 1 + \varrho, \tag{2.7}$$

où $G(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{kx} \bar{F}(y) dy$ est la distribution équilibrée de F .

Supposons que l'équation (2.5) est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est donnée comme suite : Si $\int_0^\infty dG(x) < \infty$, alors,

$$\Psi(u) \sim \frac{\rho u}{k \int_0^\infty y e^{ky} \bar{F}(y) dy} e^{-ku} \text{ quand } u \rightarrow \infty,$$

$$\text{avec } a(x) \sim b(x) \text{ quand } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$

si $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = \infty$, alors,

$$\Psi(u) = o(e^{-ku}) \text{ quand } u \rightarrow \infty.$$

ainsi, on a l'intégralité de Lundberg donnée par :

$$\Psi(u) \leq e^{-ku}, u \geq 0.$$

2.2.3 Autre approches

En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de large champs dans les modèles de risques, il existe plusieurs autres approches. Ces approches permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation stochastique se retrouvent dans d'autres domaines. C'est le cas les réactions des assureurs et des assurés dans la théorie des jeux. En général, les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur : les théorèmes limites des marches aléatoires [23][45], les représentations matricielles avec modèles markoviens [3], la théorie des martingales et inégalités de probabilités [39], les méthodes d'optimisation [14], les transformations analytiques, [13] et la théorie des distributions [30][50][51].

2.3 Probabilités viagères

L'objectif est de présenter les principales définitions et de maîtriser les concepts et les résultats fondamentaux des mathématiques de l'assurance vie.

2.3.1 Modèles probabilistes de la durée de la vie humaine

Les calculs actuariels de l'assurance vie sont basés sur un modèle probabiliste simple défini par un processus stochastique. Autrement dit, les mathématiques de l'assurance vie sont basées sur une famille de variables aléatoires indexées par l'âge de l'assuré.

La durée de vie

On note par T_0 la durée de vie future d'un individu (homme ou femme) où sa date de naissance est prise comme origine du temps. Il est clair que T_0 est une variable aléatoire définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ [38]. La fonction de répartition de T_0 est :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_0(t) = P(T_0 \leq t).$$

On a T_0 est une variable aléatoire positive ou nulle, donc $F_0(t) = 0$ si $t \leq 0$. De plus, la durée de la vie humaine est bornée supérieurement par une valeur w . Cela entraîne que $F_0(t) = 1$ si $t > w$ (en France, $w = 110$ ans).

En assurance vie, on est amené à considérer un individu ayant déjà atteint un âge x (une tête d'âge x) qu'on note par (x) .

Soit T_x la durée de vie future ou résiduelle de (x) . Nous avons donc

$$T_0 = x + T_x.$$

Soit F_x la fonction de répartition de T_x , $\forall t \in \mathbb{R}$;

$$F_x(t) = P(T_x \leq t/T_0 > x) = \frac{P(x < T_0 \leq x + 1)}{P(T_0 > x)} = \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}.$$

On suppose que Q_x désigne la probabilité conditionnelle sachant $T_0 > x$, c'est à dire,

$$Q_x = P(. / T_0 > x).$$

On peut donc écrire :

$$F_x(t) = Q_x(T_x \leq t).$$

Dans ce qui suit, nous présentons les probabilités de survie et de décès d'un individu qui sont à la base des divers calculs effectués par l'assureur.

Fonction de survie : [47]

La fonction de survie, notée par ${}_tP_x$, est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, {}_tP_x &= Q_x(T_x > t) = P(T_x > t/T_0 > x) \\ &= P(T_x > t/T_x > 0) = 1 - F_x(t), \end{aligned}$$

car $T_0 > 0 = T_x > 0$.

Si x est fixé, la fonction de survie ${}_tP_x$ est considérée comme une fonction à une seule variable t où t est un réel positif.

De plus, puisque la vie humaine est bornée par w , donc l'événement $T_x + x \leq w$ est certain. Par conséquent,

$$\forall t > w - x; {}_tP_x = 0 \text{ car } x + T_x \leq w.$$

Par ailleurs, on a ${}_0P_x = Q_x(T_x > 0) = 1$ car on sait que à l'époque d'observation l'assuré est vivant.

Notons que ${}_1P_x$ est appelé taux annuel de vitalité noté simplement par P_x . Autrement dit, P_x est la probabilité de survie de l'assuré au bout d'un an.

Remarque 2. • Une personne prise en observation à l'âge x décède à l'âge $x + T_x$ (l'unité de temps est l'année).

• Les probabilités liées à la durée de la vie humaine sont dites probabilités viagères.

On a ${}_t p_x$ est la probabilité qu'un individu d'âge x soit vivant dans t années ou encore la probabilité qu'un individu d'âge x atteigne l'âge $x + t$.

$${}_{t/t'}q_x = P(t < T_x \leq t + t') = P(t < T_x < t + t').$$

car il est à priori improbable que la durée de vie T_x soit exactement égale à $t + t'$.

L'événement $T_x > t$ peut se produire de deux manières incompatibles ; soit $t < T_x \leq t + t'$ ou $T_x > t + t'$. Par conséquent, $P(T_x > t) = P(t < T_x \leq t + t') + P(T_x > t + t')$; $\Rightarrow {}_t p_x = {}_{t/t'} q_x - {}_{t+t'} p_x$.

On obtient la formule suivante de la probabilité de décès exprimée en fonction des probabilités de survie :

$${}_{t/t'}q_x = {}_t p_x - {}_{t+t'} p_x.$$

Remarque 3. • On utilise la notation ${}_t q_x$ pour ${}_0/t q_x = P(0 < T_x \leq t)$. On a évidemment ${}_t q_x = 1 - {}_t p_x$.

- De même, on posera ${}_1q_x = q_x$ le taux annuel de mortalité et l'on vérifie que :
 $p_x + q_x = 1$.
- Les valeurs de q_x peuvent être estimés à partir des tables de mortalité.

2.3.2 L'indicateur de survie

Si, pour un âge x donnée, la fonction de survie $t \rightarrow {}_t p_x$ est connue pour $t > 0$, alors la formule ci-dessous donne la fonction $t \rightarrow {}_t p_y$ pour tout âge $y(y > x)$ [37],

$${}_t p_y = \frac{y - x + {}_t p_x}{y - x p_y} \cdot {}_t p_x \quad *$$

Etant donné un individu d'âge x à un instant pris pour origine du temps. On définit son indicateur de survie comme la famille des variables aléatoires $X(t)$ définies pour $t \geq 0$ par :

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{si l'individu est vivant à l'instant } t; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que la variable aléatoire $X(t)$ n'est autre que l'indicatrice de l'évènement

$$A_t = \{(x) \text{ est vivant l'poque (l'anne) } t\}.$$

$$X(t) = I_{A_t} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramtre } {}_t p_x.$$

Par conséquent, on a $E(X(t)) = {}_t p_x$ et $Var(X(t)) = {}_t p_x \cdot {}_t q_x$. En effet,

$$E(X(t)) = 1 \cdot {}_t p_x + 0 \cdot (1 - {}_t p_x) = {}_t p_x.$$

Puisque $X^2(t) = X(t) \Rightarrow E(X^2(t)) = {}_t p_x$. On obtient

$$Var(X(t)) = E(X^2(t)) - (E(X(t)))^2 = {}_t p_x - ({}_t p_x)^2 = {}_t p_x \cdot {}_t q_x.$$

Le processus stochastique $(X(t))_{t \geq 0}$ défini comme l'indicateur de survie d'une tête d'âge x à l'époque $t = 0$ vérifie la propriété de Markov, c'est à dire, $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ et si i, i_1, i_2, \dots, i_k sont $k + 1$ valeurs dans l'ensemble $0, 1$, on a

$$P(X(t) = i / X(t_1) = i_1, \dots, X(t_k) = i_k) = P(X(t) = i / X(t_k) = i_k).$$

Remarque 4. L'égalité (*) donnée précédemment est équivalente à la relation suivante :

$${}_{t+h} p_x = {}_t p_x \cdot {}_h p_{x+t},$$

quels que soit les réels positifs x, t et h .

2.3.3 Estimation du nombre de vivant à l'époque t

Considérons à l'intérieure d'un groupe homogène, à un instant pris comme origine, l'ensemble des individus d'âge x en nombre L_x [38]. A l'époque t , le nombre de survivants du groupe composé de L_x individus est :

$$L_{x+t} = X_1(t) + X_2(t) + \dots + X_{L_x}(t).$$

D'où,

$$E(L_{x+t}) = L_x \cdot {}_t p_x.$$

Comme les variables $X_i(t)$ sont indépendantes, on a

$$Var(L_{x+t}) = L_x \cdot {}_t p_x \cdot {}_t q_x.$$

On appelle nombre probable de vivants à l'âge $x + t$, noté par l_{x+t} , la quantité $E(L_{x+t})$. Autrement dit,

$$l_{x+t} = E(L_{x+t}) = L_x \cdot {}_t p_x.$$

Les hypothèses faites sur les individus entraînent que les variables aléatoires $X_i(t)$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1; {}_t p_x)$. On déduit donc que la variable aléatoire L_{x+t} suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(L_x, {}_t p_x)$.

On a $l_{x+t} = E(L_{x+t})$ est la moyenne du nombre de vivants à l'âge $x + t$ (appelé nombre moyen ou nombre probable de vivants à l'âge $x + t$).

À $t = 0$ (origine du temps), dans le cas où L_x est supposé connu, on a

$$l_x = E(L_x) = L_x.$$

On obtient la relation suivante entre les probabilités de survie et les nombres moyens théoriques de vivants :

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

En effet, $l_{x+t} = E(L_{x+t}) = L_x \cdot {}_t p_x = l_x \cdot {}_t p_x \Rightarrow l_{x+t} = l_x \cdot {}_t p_x$. D'où ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$.

En particulier, si w est l'âge extrême de la vie humaine, on a $\forall \alpha > 0$,

$$l_{w+\alpha} = l_x \cdot {}_{w-x+\alpha} p_x = 0$$

Remarque 5. *L'ensemble des valeurs l_y pour $x \leq y \leq w$ constitue une loi de survie pour les individus d'âge x . Il s'agit alors de la suite des nombres moyens de vivants pour tous les âges supérieurs ou égaux à x .*

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux résultats de la théorie de ruine : des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité

de ruine pour le modèle de risque classique. Le modèle de risque classique, connu comme le fondement théorique de la théorie du risque fût l'objet de plusieurs études, et de nombreux résultats sur la probabilité de ruine existent pour ce modèle.

CHAPITRE 3

Retraite et Risque Financier

Introduction

De façon générale, il y a deux sources sur lesquelles peuvent être prélevées les retraites : le revenu du travail (retraite par répartition) et les revenus du capital (retraite par capitalisation). En théorie, aucune des deux techniques ne présente de supériorité intrinsèque mais chacune présente une sensibilité différente aux principaux risques auxquels les régimes de retraites sont exposés (risques économiques, démographiques, politiques).

3.1 Les marchés financiers

3.1.1 L'efficience des marchés financiers

L'efficience de marché est l'un des concepts centraux de la théorie financière moderne. La théorie des marchés financiers est née au début des années 60 dans le sillage de la définition de l'efficience des marchés financiers donnée à partir de FAMA [1965]. C'est, en effet, dans l'article fondateur «The Behavior of Stock-Market Prices» que Fama postule «qu'un marché financier est dit efficient si et seulement si l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif».

Dynamique des marchés efficients (EMH)

Hypothèse centrale de la finance donnée par FAMA [1970] :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dz \quad (3.1)$$

où :

$$\varepsilon \sqrt{dt}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \text{Les cours de l'action;} \\ \mu = \text{Espérance de rendement;} \\ \sigma = \text{Écart type du taux de rendement;} \\ dt = \text{Intervalle de temps;} \\ \varepsilon = \text{Suit une loi normale } \mathcal{N}(0, 1). \end{array} \right.$$

Il découle de cette théorie que si les marchés sont efficients, ils sont imprédictibles et suivent une marche aléatoire. Ainsi, aucun agent économique ne peut prévoir de

façon certaine l'évolution des cours d'un actif financier. Partant de cette hypothèse de marche aléatoire parfaite, il serait très risqué pour les épargnants averse au risque d'investir sur des titres financiers. Cependant, comme l'indique la persistance du débat sur la dynamique des prix au cours de ces trois dernières décennies, l'hypothèse de marche aléatoire régulièrement prêtée au cours d'actifs financiers ne s'accorde pas toujours avec les performances des cours boursiers sur le long terme. De fait, à ce jour, en dépit de la multiplication des études visant à tester l'efficacité des marchés financiers, aucune recherche n'a pu démontrer, avec impartialité, la validité de la théorie.

Les tests d'efficacité faible des marchés boursiers [37]

La quantification de l'hypothèse d'efficacité de marché, plus formellement, l'idée de marche aléatoire attribuée à la dynamique des cours d'actifs financiers trouve son origine dans la thèse de **BACHELIER** [1900] qui introduit l'utilisation du mouvement brownien en finance, pour soutenir l'argument selon lequel l'espérance mathématique du rendement d'un spéculateur est nulle. Paul Samuelson dans les années 1950 décrit des marchés efficaces à travers la notion de martingale. Cette idée initiale de mouvement aléatoire des prix, largement reprise dès les années cinquante, est rapidement remplacée par un modèle dans lequel les cours des actions suivent une distribution log-normale à travers un mouvement brownien géométrique. Les développements de **BLACK et SHOLES** [1973] et le principe de non-arbitrage en sont une résultante. La théorie mathématique des marchés financiers efficaces écrite par Fama, devient la référence commune pour le monde académique et les praticiens. Depuis lors, les économistes n'ont eu de cesse de tester la forme faible de l'efficacité des marchés afin de valider ou d'infirmer la théorie. **SUMMERS** [1986], en

partant de simulations de processus aléatoires, fût l'un des premiers à montrer que les tests statistiques classiques de marche aléatoire n'étaient pas adaptés pour tester l'hypothèse d'efficience des marchés. Les tests classiques (tests de racine unitaire et d'auto-corrélation), présentent un risque de deuxième espèce très important dans le sens où bien souvent ils ne permettent pas de distinguer une marche aléatoire pure d'un processus comportant une composante transitoire persistante. Fort de ce constat, Lo et Mackinlay développent en 1998 le test du « ratio de variance » dédié spécifiquement à la vérification de l'efficience de marchés. Convaincus de la puissance de ce test, de nombreux chercheurs vont l'utiliser pour valider la théorie.

Test du ratio de variance

Le test du ratio de variance s'est imposé sur les deux dernières décennies comme le principal élément économétrique pour tester l'hypothèse de marche aléatoire. A l'origine, développé par LO et MACKINLAY [1988] spécialement pour vérifier l'hypothèse de marche aléatoire, il a donné lieu à plusieurs variantes au cours du temps afin de le rendre robuste, ce test est le test le plus utilisé dans les travaux académiques. [37]

Les rendements

Considérons P_t le prix d'une action, et supposons qu'il suit un mouvement brownien géométrique, de paramètres b et σ , $P_t = P_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$, tel que $y_t = \ln(P_t)$ suit un processus de marche aléatoire. On appelle $(r_{t,1})_{t \geq 1}$ la série des log-rendements sur une période, telle que :

$$r_{t,1} = Y_{t+1} - Y_t. \quad (3.2)$$

Alors :

$$r_{t,1} = \mu + \sigma(B_{t+1} - B_t) \Rightarrow r_{t,1} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Ainsi le test de L et M^1 consiste à vérifier de manière empirique que la variance des rendements sur q -périodes est q fois égale à la variance des rendements sur une période.

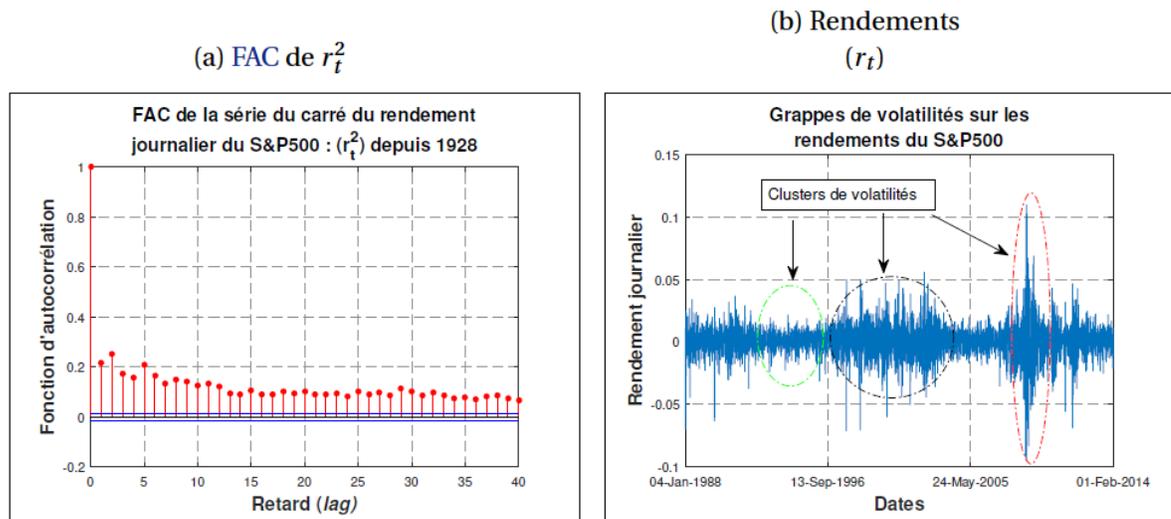


FIG. 3.1 – Illustration de variance autoregressive des rendements sur le S et P500

Test de Lo-Mackinlay (1988)

LO et MACKINLAY [1988] développent le test du ratio de variance afin d'en faire un élément économétrique essentiel pour tester l'hypothèse de marche aléatoire, ou de manière équivalente que les log-rendements forment une séquence de différences de martingales (MDS). L'idée du test est que, si le logarithme des cours y_t suit un

processus de marche aléatoire, alors la variance des différences des y_t doit être une fonction linéaire de la période retenue pour calculer ces différences. Par exemple, la variance des log-rendements annuels doit être égale à douze fois la variance des taux de rentabilité mensuels. Pour un échantillon de rendements de taille T , le ratio de variance est défini par : [37]

$$VR_q = \frac{\text{Var}(r_{t,q})}{q\text{Var}(r_{t,1})} = \frac{\text{Var}(\sum_{i=0}^{q-1} r_{t+i,1})}{q\text{Var}(r_{t,1})}. \quad (3.3)$$

et pour : $t \geq 1$, $\text{Var}(r_{t,1}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{t,1} - \mu)^2$ et $\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{t,1}$ Ainsi, VR_q devrait être égale à 1 dans le cas où les cours définis par y_t suivent une marche aléatoire. **LO et MACKINLAY** [1988] montrent que si les rendements r_t sont indépendants et identiquement distribués (et sous certaines hypothèses complémentaires), on a :

$$\sqrt{T}(V(R_q) - 1) \sim \mathcal{N}(0, \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}). \quad (3.4)$$

Par conséquent la statistique de test proposée, utilisée pour inférer une marche aléatoire est la suivante :

$$M_1(q) = (VR_q - 1) \left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Cette statistique suit asymptotiquement une loi normale standard. Les hypothèses sont donc :

H_0 : y_t suit un processus de marche aléatoire : $M_1 \in] - Z_{\alpha/2}; +Z_{\alpha/2}[$

H_1 : y_t ne suit pas un processus de marche aléatoire : $M_1 \in -] - \infty; -Z_{\alpha/2}] \cup$
 $[+Z_{\alpha/2}; +\infty[$

L'hypothèse alternative H_1 évoque le fait que les incréments de y_t sont corrélés, positivement ou négativement. Cependant, il se trouve que les rendements r_t peuvent être non auto-corrélés et présentent une hétéroscédasticité. Or, même en

présence d'hétéroscédasticité, le rapport des variances devrait toujours être proche de l'unité lorsque le nombre d'observations augmente et n'est pas borné, puisque la variance de la somme des incréments doit être égale à la somme des variances sur chaque incrément, mais la statistique de test, elle, dépendra évidemment du degré d'hétéroscédasticité. Dans ce cas la statistique M1 ne suit plus asymptotiquement une loi normale standard, en utilisant la statistique M1 on risque de rejeter l'hypothèse H_0 de marche aléatoire au profit de l'hypothèse alternative à tort.

Bien des études ignorent cette caractéristique en inférant directement sur des statistiques basées sur les hypothèses standards de normalité. Voilà pourquoi LO et MACKINLAY [1988] proposent aussi une statistique M_2 robuste face au cas d'incrémentes hétéroscédastiques :

$$M_2(q) = (VR_q - 1) \left(\sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{2(q-1)}{q} \right)^2 \delta_i \right)^{-1/2}. \quad (3.6)$$

$$\text{où : } \delta_i = \frac{\sum_{t=i+1}^T (r_{t,1} - \mu)^2 (r_{t-i,1} - \mu)^2}{\left(\sum_{t=i+1}^T (r_{t,1} - \mu)^2 \right)^2}.$$

De même, la statistique M_2 suit asymptotiquement une loi normale standard. LO et MACKINLAY [1988] montrent que le test bilatéral est celui qui donne des taux de rejet plus proches de la valeur nominale α avec la statistique robuste face à l'hétéroscédasticité.

Test de Wright (2000)

Dans la mesure où le test de LO et MACKINLAY est un test qui fait des hypothèses très fortes sur la distribution de la statistique de test, WRIGHT [2000] propose un test nonparamétrique basé sur les rangs et les signes des incréments du logarithme des prix y_t . Par la suite, l'inférence statistique se fait sur les distributions exactes des statistiques de tests. Une présentation du test basé sur les rangs des rendements est

faite ci-dessous, suivie d'une présentation du test basé sur les signes.[37]

Considérons l'échantillon de log-rendements d'actions calculé sur une période suivant $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_T$. soit ϵ_t tel que $\mathbb{E}(\epsilon_t) = \tilde{\mu}$ et qu'il existe un processus z qui vérifie : $\epsilon_t = \mu + Z_t$ avec $Z_t = \sigma_t \zeta_t$ Hypothèses possibles :

A_0 Les $(z_t)_t$ sont indépendants et identiquement distribués.

A_1 ζ_t et σ_t sont indépendant conditionnellement à la filtration $F_{t-1} = \sigma(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-3} \dots)$

A_2 : $E(\epsilon_{t+1} | \mathcal{F}_t) = 0$ et $I(\epsilon_t)$ la variable binomiale qui vaut 1 si $\epsilon_t > 0$ et 0 sinon.

$$I(\epsilon_t) = \begin{cases} 1 & \text{avec une probabilité de } \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Présentation du test basé sur les rangs : Pour $t = 1, \dots, T$ définissons $r(\epsilon_t)$ le rang de ϵ_t dans l'échantillon. Ecrivons également les statistiques de rangs [4] suivantes :

$$r_{1t} = \frac{r(\epsilon_t) - \frac{T+1}{2}}{\sqrt{\frac{(T-1)(T+1)}{12}}}$$

$$r_{2t} = \Phi^{-1} \left(\frac{r(\epsilon_t)}{T+1} \right)$$

Notons que r_{1t} et r_{2t} sont de moyennes nulles et de variances égales à 1.

Où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite. En substituant les rendements par leurs statistiques de rangs r_{1t} , puis r_{2t} , dans l'expression permettant le calcul de statistiques de test M1 de LO et MACKINLAY, on obtient des statistiques de tests R1 et R2 suivantes :

$$R_1(q) = \left(\frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (r_{1t} + r_{1t-1} + \dots + r_{1t-q+1})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{1t}^2} - 1 \right) \times \left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

et

$$R_2(q) = \left(\frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (r_{2t} + r_{2t-1} + \dots + r_{2t-q+1})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{2t}^2} - 1 \right) \times \left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.8)$$

Présentation du test basé sur les signes : Afin de faire face à l'hétéroscédasticité, WRIGHT [2000] développe d'autres statistiques de tests basés sur les signes de rendements. Pour la série x_t soit $\mu(x_t, p) = I(x_t > p) - 0.5$ alors

$$\mu(x_t, p) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x_t \text{ est positif;} \\ -\frac{1}{2} & \text{autre part.} \end{cases}$$

Supposons que les hypothèses A1 et A2 sont satisfaites, et que $\mu = 0$, comme c'est souvent le cas pour les rendements à hautes fréquences. Alors la variable suivante est clairement une variable IID de moyenne nulle et de variance égale à 1 : Posons $s_t = 2u(\epsilon_t, 0) = s_t = 2u(\zeta_t, 0)$, telque

$$s_t = \begin{cases} 1, & \text{avec la probabilité } \frac{1}{2}; \\ -1, & \text{avec la probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi une statistique robuste, utile pour tester l'hypothèse de marche aléatoire, hétéroscédastique telle que σ_t soit variable dans le temps, dans le cas où les rendements ne possèdent pas de drift (cas de données hautes-fréquences par exemple) est la statistique S_1 définie ci-dessous :

$$S_1(q) = \left(\frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (S_t + S_{t-1} + \dots + S_{t-q+1})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S_t^2} - 1 \right) \times \left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.9)$$

Et dans le cas où la moyenne des rendements n'est pas nulle, on définit une autre statistique de test robuste face à l'hétéroscédasticité, en réécrivant

$$S_t(\bar{\mu}) = 2u(\zeta_t, \bar{\mu}) \forall \bar{\mu}.$$

D'où :

$$S_2(q) = \left(\frac{\frac{1}{Tq} \sum_{t=q}^T (S_t(\bar{\mu}) + S_{t-1}(\bar{\mu}) + \dots + S_{t-q+1}(\bar{\mu}))^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T S_t^2(\bar{\mu})} - 1 \right) \times \left(\frac{2(2q-1)(q-1)}{3qT} \right)^{-1/2} \quad (3.10)$$

Si $\bar{\mu} = \mu$ alors $S_t(\bar{\mu}) = 2u(\zeta_t, 0)$ et $S(\bar{\mu})$ a la même distribution que S_1 .

De même que R_1 et R_2 on peut obtenir la distribution exacte, sous l'hypothèse nulle, des statistiques S_1 et S_2 en simulant des échantillons aléatoires de rendements. Sous les hypothèses A1 et A2 qui postulent que les rendements forment une séquence de différences de martingales (MDS), la probabilité que la statistique S_2 rejette l'hypothèse nulle est inférieure ou égale à α . Comparée aux autres statistiques de tests, cette statistique S_2 reste très conservative vis-à-vis de l'hypothèse nulle de marche aléatoire sans dérive, l'étude de WRIGHT [2000] l'a démontré. Par ailleurs, lorsque l'on teste une marche aléatoire avec drift et que toutes les autres statistiques rejettent l'hypothèse nulle, la statistique S_2 la rejette également. Par conséquent elle est généralement moins puissante, on préférera donc dans la pratique utiliser S_1 .

3.1.2 Tests de ratio de variance multiples

Dans certaines études, les applications du test du ratio de variance se font souvent pour des valeurs importantes de q pouvant aller de 2 à 100. Or, le risque de deuxième espèce est plus probable lorsque l'on effectue le test de marche aléatoire pour des valeurs individuelles du retard q . Ainsi, certains auteurs conseillent de tester l'hypothèse de marche aléatoire pour un ensemble de retards, en prenant plusieurs valeurs de q , pour combler la faiblesse du test de LO et MACKINLAY qui ne tient pas compte de la nature conjointe des rendements calculés sur différentes périodes, pour des valeurs individuelles de q .

Test paramétrique du ratio de variance multiple de Chow-Denning(1992)

CHOW et DENNING [1993] proposent une extension du test de LO et MACKINLAY, test qui se veut plus puissant que sa version individuelle. Le test proposé tente de remédier à l'absence de mesure du test joint pour des valeurs multiples de k du test du ratio de variance. CHOW et DENNING [1993] utilisent l'argument suivant : pour une plage de valeurs de q données $Q = q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_M$ avec $q_i \in N(0, 1)$ si $\exists k \in Q$ telle que le test du ratio de variance individuel rejette l'hypothèse de marche aléatoire pour cette valeur k alors l'hypothèse de marche aléatoire sur la série considérée devrait directement être rejetée. Autrement dit, si la série étudiée suit un processus de marche aléatoire, la somme des ratios de variances pour cet ensemble de valeur Q doit être égale à M [37]. En partant des statistiques du test de ratio de variance pour un q individuelle, alors la statistique pour inférer sur le test avec un ensemble de décalage q_i devient :

$$M_1^* = \max_{1 \leq i \leq M} | M_1(q_i) |$$
$$M_2^* = \max_{1 \leq i \leq M} | M_2(q_i) |$$

Où M_2^* représente la version robuste face à l'hétéroscédasticité. Pour des échantillons de rendements de grandes tailles, les auteurs utilisent l'inégalité de probabilité de ŠIDÁK [1967] et les résultats de HOCHBERG [1974] et RICHMOND [1982], pour définir les bornes de valeurs critiques, sous l'hypothèse nulle de marche aléatoire. Asymptotiquement, pour un seuil de probabilité α , les valeurs critiques du test du ratio de variance de CHOW et DENNING s'obtiennent en posant $P(M_j^*) \leq SMM(\alpha; M; \infty) \geq 1 - \alpha$ où $SMM(\alpha; M; \infty)$ est le «Module maximum studentisé» (Studentized Maximum Modulus) défini comme suit : Soit x_1, x_2, \dots, x_N une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $N(\mu, \sigma)$. Soit V une variable aléatoire suivant une loi du Khi-deux à m degré de liberté. Posons

$s_m = \sqrt{\frac{v}{m}}$ une estimation de σ indépendant des $x_{i1 \leq i \leq N}$.

Alors : $M_{r,m} = \frac{\max(|x_1|, \dots, |x_i|, \dots, |x_N|)}{s_m}$ est le module maximum studentisé de paramètre N et m . Les quantiles du module maximum studentisé peuvent être calculés par inversion de sa fonction de répartition. La distribution du maximum du module studentisé a pour fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^\infty (2\Phi(xu) - 1)^L dg_v(u). \quad (3.11)$$

et

$$dg_v(u) = \frac{v/2}{\Gamma(\frac{v}{2})^2} u^{v-1} e^{-\frac{vu^2}{2}} du. \quad (3.12)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard. Et Γ est la fonction gamma. Cette fonction de répartition peut être évaluée par intégration numérique. Posons Z_α le quantile de la loi normale standard d'ordre α et $SMM(\alpha; m; N)$ le quantile d'ordre α de la distribution des modules maximum studentisés de degrés de liberté m sur des échantillons de taille N , des variables (x_i) définies ci-dessus. Asymptotiquement, lorsque $N \rightarrow \infty$ en appliquant les inégalités de HOCHBERG et ŠIDÁK, on a $SMM(\alpha; m; \infty) = Z_{\alpha^+}$. Avec $\alpha^+ = 1 - (1 - \alpha)^{1/m}$. Compte tenu de cette définition, les bornes des valeurs critiques du test de CHOW et DENNING s'écrivent :

$$-SMM(\alpha; M; \infty) \leq M_1^* \leq SMM(\alpha; M; \infty),$$

et

$$-SMM(\alpha; M; \infty) \leq M_2^* \leq +SMM(\alpha; M; \infty).$$

Où SMM est le module maximum studentisé, α est la tolérance du test M est le cardinal de q .

Test non-paramétrique du ratio de variance multiple de BELAIRE-FRANCH et CONTRERAS [2004] : A l'instar du test du ratio de variance

joint proposé par CHOW et DENNING [1993] se basant sur le test individuel développé par LO et MACKINLAY, BELAIRE-FRANCH et CONTRERAS proposent, en 2004, un test du ratio joint basé sur le test du ratio de variance individuel, non-paramétrique développé par WRIGHT [2000]. Ainsi, ils proposent d'utiliser les mêmes règles que CHOW et DENNING [1993], c'est-à-dire de substituer dans la définition des statistiques $\{M_j^*\}_{j=1,2}$ de CHOW et DENNING [1993] les statistiques de tests de LO et MACKINLAY $\{M_j\}_{j=1,2}$ par les statistiques de tests de WRIGHT [2000] $\{R_j\}_{j=1,2}$ et $\{S_j\}_{j=1,2}$. D'où les statistiques non-paramétriques suivantes :

$$CD_{(R_1)} = Max_{1 \leq i \leq M}(| R_1(q_i)) |$$

$$CD_{(R_2)} = Max_{1 \leq i \leq M}(| R_2(q_i)) |$$

$$CD_{(S_1)} = Max_{1 \leq i \leq M}(| S_1(q_i)) |$$

$$CD_{(S_2)} = Max_{1 \leq i \leq M}(| S_2(q_i)) |$$

Sous l'hypothèse A_0 d'incrémentes indépendantes et identiquement distribuées – ou independent and identically distributed – (IID) de WRIGHT [2000], les statistiques de tests $CD_{(R_1)}$ et $CD_{(R_2)}$ ont la même distribution de probabilité. D'autre part, sous les hypothèses $A1$ et $A2$ de WRIGHT [2000], supposant que les incréments forment une séquence de différences de martingales, les statistiques de tests $CD_{(S_1)}$ et $CD_{(S_2)}$ ont la même distribution de probabilité.

la fonction de production [37] : La fonction de production choisie est une fonction de type Constant Elasticity of Substitution (CES), Le progrès technique est supposé incorporé au facteur travail. Cette fonction s'écrit :

$$Y = F(K, L) = A [\alpha K^{-\gamma} + \beta((1 + g)^{t-t_0} L)^{-\gamma}]^{-\frac{1}{\gamma}} . \quad (3.13)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \text{La valeur ajoutée totale;} \\ K = \text{Quantité de capital utilisée;} \\ L = \text{Quantité de travail utilisée;} \\ \alpha : \text{Paramètre de distribution, tel que : } 0 < \alpha < 1; \\ \beta = 1 - \alpha; \\ A = \text{Le niveau de la technologie;} \\ \gamma = \text{Paramètre de substitution } \geq -1; \\ g = \text{Le rythme du progrès technique;} \\ t = \text{La dimension temporelle.} \end{array} \right.$$

L'élasticité de substitution, notée σ , est reliée au paramètre γ par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{1}{1 + \gamma}.$$

A , α et β , sont déterminés de manière à être compatibles avec un rapport K/Y exogène :

$$\beta = \left(\left(\frac{Y}{K} \right)^{(1+\gamma)} \left(\frac{Y}{L} \right)^{-(1+\gamma)} \right) \times \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial K}}{\frac{\partial f}{\partial L}} + \left(\left(\frac{Y}{K} \right)^{(1+\gamma)} \left(\frac{Y}{L} \right)^{-(1+\gamma)} \right) \right)^{-1}. \quad (3.14)$$

$$A = \left(\frac{(1 - \beta) \left(\frac{Y}{K} \right)^{(1+\gamma)}}{\frac{\partial f}{\partial K}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (3.15)$$

3.1.3 Salaires, marché du travail et rendement du capital [37]

Valeurs d'équilibre

Conformément au programme « classique » de maximisation du profit en concurrence pure et parfaite, on suppose qu'à l'équilibre, la rémunération de chaque facteur

est égale à sa productivité marginale. On a donc, en notant w^* le salaire d'équilibre de plein-emploi correspondant une population employée L^*

$$w^* = \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} = \frac{\beta(1+g)^{(t-t_0)}}{A^\gamma} \left(\frac{Y^*}{(1+g)^{(t-t_0)}L^*} \right)^{1+\gamma} \quad (3.16)$$

En notant respectivement r_g le rendement brut du capital, r_n le rendement net, et δ le taux de dépréciation du capital, on obtient :

$$r_g = \frac{\partial f}{\partial K} = \frac{\alpha}{A^\gamma} \left(\frac{Y}{K} \right)^{1+\gamma} = (r_n + \delta). \quad (3.17)$$

Salaire effectif et volume d'emploi [37]

On suppose que le salaire effectif diffère du salaire d'équilibre en raison de rigidités qui conduisent à des délais d'ajustement. Pour tenir compte de ces délais d'ajustement, on définit le salaire effectif en t comme une moyenne pondérée du salaire d'équilibre en t et du salaire effectif en $t - 1$. On suppose aussi que les salaires sont rigides à la baisse. Le salaire effectif ne peut être inférieur au salaire d'équilibre :

$$W_t = \max[(1 - \lambda) \times (1 + g) \times W_{t-1} + \lambda \times W_t^*, W_t^*] \quad (3.18)$$

Avec

$$\begin{cases} w_t : & \text{Le salaire effectif;} \\ w_t^* : & \text{Le salaire d'équilibre de plein-emploi;} \\ \lambda : & \text{Paramètre d'ajustement.} \end{cases}$$

Le volume d'emploi se déduit ensuite du salaire effectif. Il est estimé de manière itérative : on recherche le volume d'emploi \hat{L}_t , à partir de l'équation (3.16), conduite à un salaire effectif $\hat{\omega}$ qui soit le plus proche possible du salaire effectif ω_t .

$$\hat{\omega}_t = \frac{\beta(1+g)^{(t-t_0)}}{A^\gamma} \left(\frac{A \left[\alpha K_t^{-Y} + \beta[(1+g) \times \hat{L}_t]^{-Y} \right]^{-\frac{1}{Y}}}{(1+g)^{t-t_0} \hat{L}_t} \right), \text{ avec } 1 - \frac{\hat{\omega}_t}{\omega_t} < \varepsilon \quad (3.19)$$

Au terme du processus itératif, on obtient \hat{L}_t volume d'emploi en t.

Stock de capital [37]

Le modèle considère deux classes d'individus. D'une part les « capitalistes » ou « héritiers » qui accumulent de l'épargne dynastique et d'autre part les salariés qui épargnent en fonction de leur anticipation sur le rendement des régimes par répartition. Corrélativement, une différence est faite entre le stock de capital « structurel » (K_s) et le capital destiné à la retraite (K_r). Le capital total (K) est donné par $K_t = K_{s(t)} + K_{r(t)}$

Capital structurel

Le stock de capital structurel est déterminé par l'équation d'accumulation suivante :

$$K_{s_{t+1}} = K_{s_t}(1 - \delta + s\nu + r_{g_t}) \quad (3.20)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} K : \text{ Le stock de capital ;} \\ \delta : \text{ Le taux de dépréciation ;} \\ s\nu : \text{ Proportion du revenu brut du capital réinvesti.} \end{array} \right.$$

Le comportement d'épargne des « capitalistes » consiste donc à réinvestir une part constante ($s\nu$) du revenu brut du capital. Les différentes valeurs du taux d'épargne de cette classe d'agents permettent de jouer sur les rendements du capital en se plaçant de manière déterministe dans un contexte de « règle d'or » ou de « sous-accumulation ».

Capital retraite

Au sujet du capital retraite, on suppose que les salariés dirigent vers un fonds une fraction θ_f de leur salaire brut courant $w_{(s,a,t)}$.

L'épargne accumulée dans le fonds par les différentes cohortes est donnée par

l'équation d'accumulation :

$$Kr(s, a, t) = Kr(s, a-1, t-1) \times (1 - \delta + r_{g(t)}) + (\hat{a}r(s, a, t) \times (1 - u_{s, a, t})) \times P_{(s, a, t)} \times \theta_f \times w_{(s, a, t)} \quad (3.21)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Kr : \text{ Stock de capital retraite ;} \\ r_g : \text{ Rendement brut du capital ;} \\ \theta_f : \text{ Fraction du salaire brut consacré à l'épargne retraite ;} \\ \hat{a}_r : \text{ Taux d'activité salarié ;} \\ w : \text{ Salaire brutmoyen de la cohorte ;} \\ P : \text{ Population totale ;} \\ u : \text{ Taux de chômage.} \end{array} \right.$$

Calcul des rentes du plan de retraite

Les rentes issues du fonds de pension sont calculées très simplement. La valeur de la rente est déterminée en fonction du capital accumulé par les différentes cohortes, du rendement net du capital et de l'espérance de vie prospective. Les rentes sont indexées sur les prix.

$$pr(s, a, t) = Kr(s, a, t) \times \left(P_{(s, r, t)} \sum_{i=r}^{99} (1 + r_n)^{r-i} \times \prod_{k=r}^i (1 - Q_{(s, k, t+(i-r))}) \right)^{-1} \quad (3.22)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Pr, \text{ Rentes attribuées par le fonds de pension ;} \\ Q, \text{ Probabilité pour un individu d'âge } k \text{ de décéder avant la fin de l'intervalle d'âge } (k, k + n). \end{array} \right.$$

Après la liquidation de la retraite, le fonds K_r est décapitalisé en fonction de l'équation de dé-accumulation suivante :

$$Kr(s, a, t) = Kr(s, a-1, t-1) \times (1 + r_n) - (P_{(s, a, t)} \times pr(s, a, t)). \quad (3.23)$$

L'impact d'un choc sur le stock de capital :

Afin d'illustrer les propriétés dynamiques du bouclage utilisé dans la maquette de projection, l'impact d'un choc sur le stock de capital (K) qui découlerait d'une accumulation de capital retraite est simulé. On considère l'économie à deux classes d'épargnants décrite dans l'introduction - dans la quelle coexistent un stock de capital « structurel » accumulé par les « capitalistes » ou « héritiers » et un stock de capital retraite accumulé par les individus qui épargnent pour leur retraite -. On suppose que les capitalistes réinvestissent la totalité des revenus bruts du capital.

On suppose ici, par simplicité, que le paramètre de substitution γ de la fonction CES est fixé à 0, ce qui détermine une fonction de production de type Cobb-Douglas et une élasticité de substitution capital / travail unitaire : $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow Y \rightarrow AK^\alpha L^{(1-\alpha)}$ et $\sigma \rightarrow 1$.

Dans le cas d'un modèle de Solow avec un progrès technique exogène croissant au taux g , le choc sur le stock de capital conduit, à partir d'une situation équilibrée, à une progression du poids du capital retraite dans la production en début de période, puis à une stabilisation à partir du moment où le fonds est décapitalisé par le service des rentes. Dans ce modèle, le poids du stock de capital structurel au sein du capital total se réduit. On peut conclure à une éviction des héritiers par le fonds capitalisé.

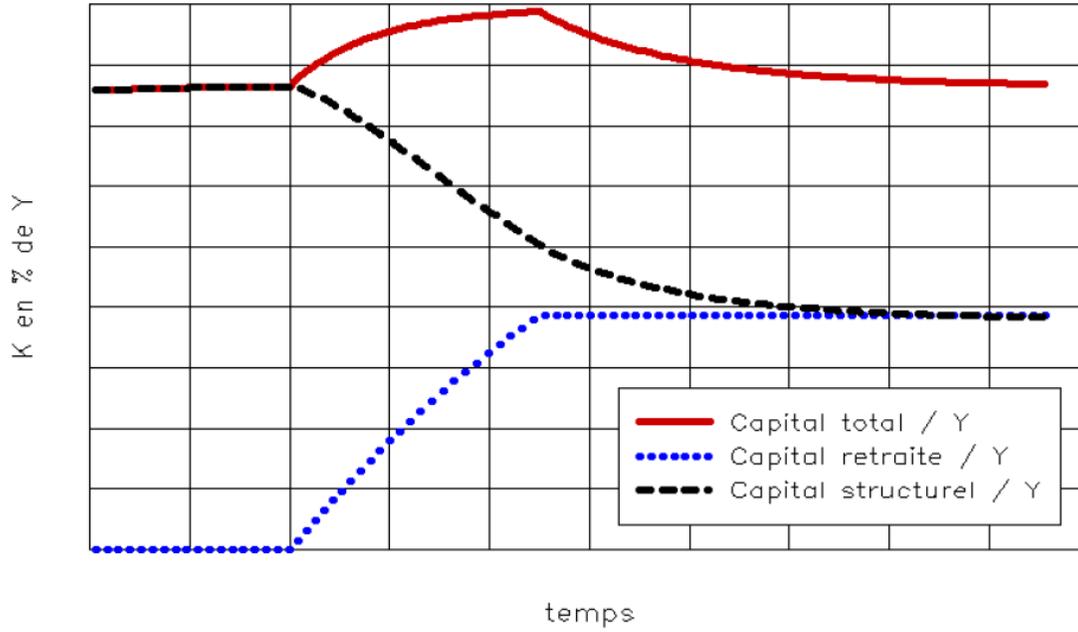


FIG. 3.2 – Choc sur le stock de capital

3.2 Régimes de retraite

3.2.1 Régimes par annuités

Schématiquement, les différentes étapes du calcul des pensions servies par un régime par annuités sont les suivantes [37] :

$$Rp_{s,g,t} = \min \left(\sum_{a=\max(15; dcr-t+g)}^{a=g-1} ar_{s,a,t-g+a}QL \right) * anr. \quad (3.24)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} Rp : \text{ Le taux de remplacement moyen des g\u00e9n\u00e9rations ;} \\ QL : \text{ La dur\u00e9e de cotisation pour une carri\u00e8re compl\u00e8te ;} \\ anr : \text{ Le taux de l'annuit\u00e9 ;} \\ t : \text{ La dimension temporelle ;} \\ s : \text{ Le sexe ;} \\ g : \text{ L'\u00e2ge des retrait\u00e9s ;} \\ dcr : \text{ La date de cr\u00e9ation du r\u00e9gime ;} \\ ar : \text{ Le taux d'activit\u00e9 dans le r\u00e9gime.} \end{array} \right.$$

Le montant des pensions de retraite se calcule alors \u00e0 partir de la relation suivante :

$$Pold_{s,g,t} = Rp_{s,g,t} * \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_{s,g-k,t-k} * prf_{s,g-k,t-k} * \left(\frac{W_{s,g-1,t-1}}{W_{s,g-k,t-k}} \right)_{\lambda} \quad (3.25)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} Pold : \text{ Le montant de la pension de retraite ;} \\ prf : \text{ Le profil de carri\u00e8re ;} \\ w(s, g - k, t - k) : \text{ La s\u00e9quence des N meilleurs salaires ;} \\ \lambda : \text{ Permet de r\u00e9gler l'indexation des pensions.} \end{array} \right.$$

En t, les d\u00e9penses du r\u00e9gime sont \u00e9gales \u00e0 :

$$EX_t = \sum_{s=1}^2 \sum_{g=r}^{99} pols_{s,g,t} \times (1 - ar_{s,g,t}) \quad (3.26)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} EX : \text{ Les d\u00e9penses du r\u00e9gime (pensions vieillesse) ;} \\ P : \text{ La population ;} \\ ar : \text{ Le taux d'activit\u00e9 ;} \\ r : \text{ L'\u00e2ge l\u00e9gal de la retraite.} \end{array} \right.$$

Indexation des pensions

Notons $Pold_{s,a,t}$ le niveau des pensions pour les individus d'âge a au temps t . Pour les individus déjà retraités à la période $t - 1$, la pension sera réévaluée selon la formule :

$$Pold_{s,a,t} = Pold_{s,a-1,t-1} \times \left(1 + \lambda \times \left(\frac{W_{n(s,t-1)}}{W_{n(s,t-2)}} - 1\right)\right). \quad (3.27)$$

Avec : W_n , le salaire net moyen. Où λ mesure le degré d'indexation des pensions. Une valeur de 1 indique une indexation totale sur les salaires, une valeur de 0 une indexation sur les prix.

3.2.2 Régimes par points

Lorsque l'on s'intéresse aux régimes par points, les chroniques de taux contractuels, de salaire de référence et de salaire différentiel, permettent de transformer les durées d'activité, calculées par l'intermédiaire des taux d'activité, en masse de points validés par les différentes générations.[37]

$$PN_t = \sum_{s=1}^2 \sum_{g=r}^{99} P_{s,g,t} \times \sum_{d=\max[15; dcr-t+g]}^{g-1} ar_{s,g,t-d+g} \times \frac{SD_{s,g,t-d+g} \times TC_{s,g,t-d+g}}{SR_{s,g,t-d+g}} \quad (3.28)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} PN : \text{ Le nombre de points acquis par les individus à la date } t \text{ dans un régime par points;} \\ SD : \text{ Le salaire différentiel;} \\ TC : \text{ Le taux de cotisation contractuel;} \\ SR : \text{ Le salaire de référence.} \end{array} \right.$$

3.3 Une dynamique stylisée du cours des actions

l'accumulation du capital est notamment fonction de la productivité marginale du capital, dont on déduit le rendement net partir taux de dépréciation δ . Bien qu'il

soit sensible aux évolutions démographiques, le rendement du capital physique, fonction de sa productivité marginale, reste relativement inerte dans ce type de modèle. En effet, dans le cadre de l'analyse néo-classique, le capital physique se résume à un stock de biens et de services servant la production se dépréquant au taux δ . Afin de prendre en compte le risque de court terme, lié à l'imperfection des marchés, qui se traduit par une forte volatilité des actifs financiers, il est primordial de « mimer » la dynamique du cours des actifs risqués. La nature du processus qui régit les prix des actifs financiers fait toujours l'objet de nombreux débats. Cette incertitude justifie la démarche consistant à analyser la sensibilité de l'épargne retraite face aux aléas boursiers au travers d'une double modélisation proposant une carte simple mais contrastée du processus de détermination du prix des actions. La première hypothèse suppose assez classiquement que les marchés suivent une marche aléatoire, ce qui revient à s'inscrire dans le cadre de la théorie des marchés efficients (EMH), posé par FAMA [1965], qui argue qu'il n'est pas possible de tirer parti des informations passées pour prévoir l'évolution future du prix d'un actif. Toutefois, la mise en évidence récurrente de retour vers la moyenne (mean reversion) dans le cours des actions justifie une modélisation alternative à celle qui suppose l'efficacité faible des marchés. Ce type de processus présume que les chocs sur les marchés boursiers ont un caractère transitoire et qu'à plus ou moins long terme un mouvement de sens opposé viendra corriger la déviation initiale pour rapprocher les prix des actifs de leur valeur d'équilibre.

La mise en évidence de mean reversion dans la dynamique du prix des actifs risqués, pose la question de sa mesure. Pour cela, il convient en premier lieu de définir une version en temps discret d'un processus de retour vers la moyenne et d'en estimer les paramètres. Pour définir une version en temps discret de la dynamique des prix, nous nous sommes inspirés des travaux de METCALF

et HASSETT [1995], d'ONALAN [2009] ou, plus récemment, de THIERFELDER [2015]. La constante qui ressort des recherches des auteurs précités est que le prix des actifs risqués suit un processus dans lequel la composante permanente est un mouvement brownien standard et la composante transitoire est un processus stationnaire d'Ornstein-Uhlenbeck (OU process). Après différentes vérifications empiriques, suivant les développements de Thierfelder, nous avons retenu une spécification de type « Trending OU process » qui permet de simuler : un mouvement brownien, un pur OU process ou une mixture des deux.

Trending OU process

$$dX_t = (\mu - (\kappa(X_t - \mu t)))dt + \sigma dW_t$$

↓

Sans trend

↓

$$dX_t = \kappa(X_t - \mu)dt + \sigma dW_t$$

↓

Processus d'OU

$$dX_t = (\mu - (\kappa(X_t - \mu t)))dt + \sigma dW_t$$

↓

Sans mean-reversion

↓

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

↓

Mouvement Brownien

Avec :

X = prix d'un actif μ = le drift W_t = processus de Wiener σ = volatilité de x
 κ = paramètre de « retour vers la moyenne »

Concernant la dynamique de retour vers la moyenne, le verdict des expérimentations à favoriser l'arbitrage entre les spécifications de type « Trending OU process » et « OU process ». La première piste consiste à assimiler la dynamique des actifs risqués à un pur processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour vérifier la compatibilité de ce processus avec la dynamique du prix des actions déduite des analyses effectuées sur les chroniques des cours boursiers, on a simulé un grand nombre de trajectoires par tirages aléatoires pour un triplet $(\mu\sigma\kappa)$ donné. Puis on a généré arbitrairement une séquence négative de logreturns. Abstraction faite de la période de krach, on constate que les rendements médians sont stationnaires autour de leur espérance.

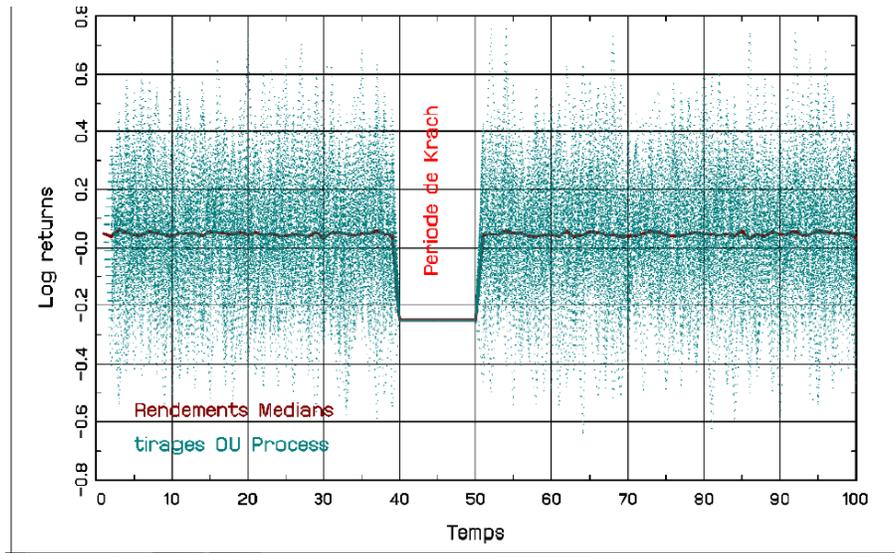


FIG. 3.3 – Processus d'OU : avec un krach survenu

Le krach n'affecte pas la dynamique du processus DS (Difference Stationnary) et les cours sont stationnaires après différentiation. Toutefois, quand on examine l'intervalle de confiance de l'épargne capitalisée dans notre univers fictif, on constate qu'une fois intégrée, la série ne revient pas autour de sa tendance déterministe en niveau après le choc simulé. Or, pour les épargnants, la détention d'actifs risqués n'a d'intérêt que si les prix, et non les rendements, sont caractérisés par un processus de retour à la moyenne.

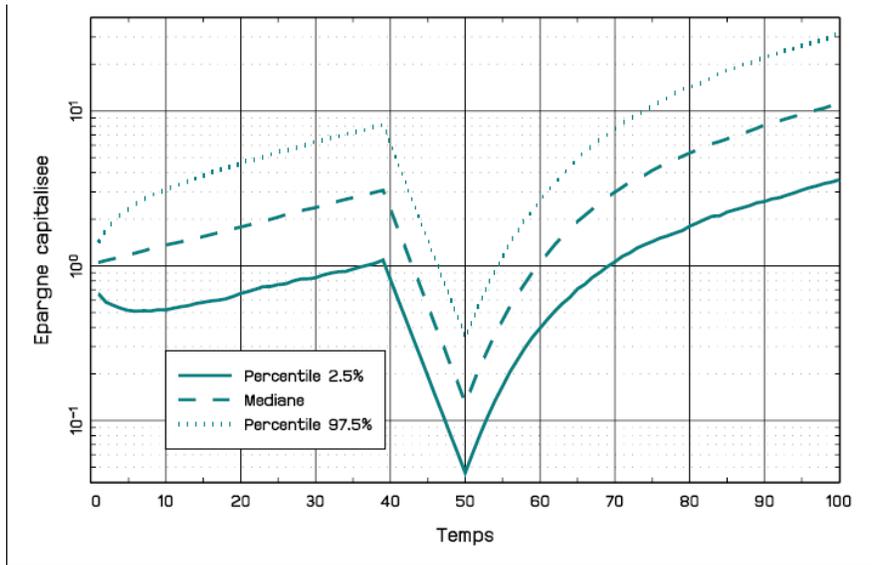


FIG. 3.4 – Processus d’OU : intervalle de confiance - l’évolution avec krach

Dans les processus DS, il existe une propriété de persistance des chocs qui n’existe pas dans les processus TS (Trend Stationary). Cela signifie que lorsque l’on a un processus TS, en cas de choc positif ou négatif à une date donnée, toutes choses égales par ailleurs, l’influence de ce choc a tendance à s’estomper au cours du temps. La variable considérée rejoint alors sa dynamique de long terme. Afin de vérifier les propriétés d’une dynamique de type « Trending OU process », on effectue une simulation stochastique en se plaçant dans le même environnement espérance-variance que précédemment (seule la valeur de κ est ajustée à la spécification du processus). Une des propriétés importantes de la spécification « Trending OU process » retenue, réside dans l’influence des innovations stochastiques dW_t . Contrairement au processus d’Ornstein-Uhlenbeck précédemment étudié, on constate sur la figure (3.5) que les rendements médians simulés sont affectés par la période de krach : la valeur médiane des rendements est supérieure à sa valeur d’avant crise, jusqu’à ce

que le niveau de la série rejoint graduellement le trend déterministe.

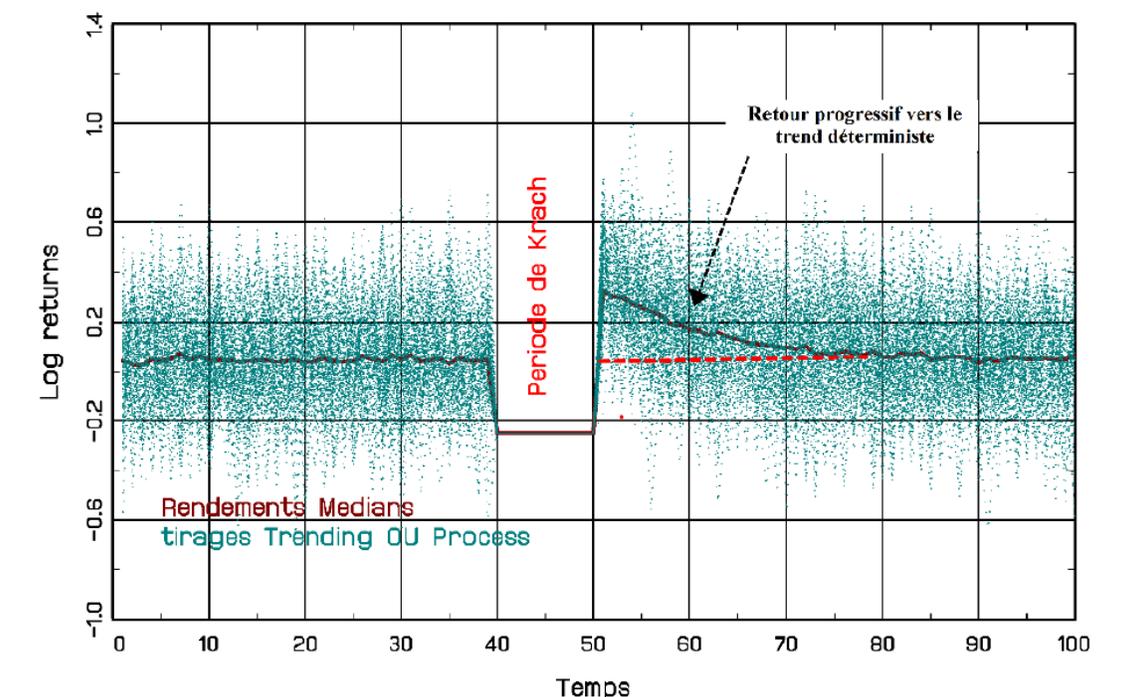


FIG. 3.5 – Trending OU process : avec un krach survenu

On constate que lorsque un processus TS est affecté par un choc stochastique, l'effet de ce choc tend à disparaître au fur et à mesure que le temps passe : c'est la propriété de non persistance des chocs. Les mouvements extrêmes de prix observés sur les marchés financiers sont donc transitoires, c'est-à-dire qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposé qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Le mécanisme est clairement résumé par l'intervalle de confiance construit à partir des simulations aléatoires.

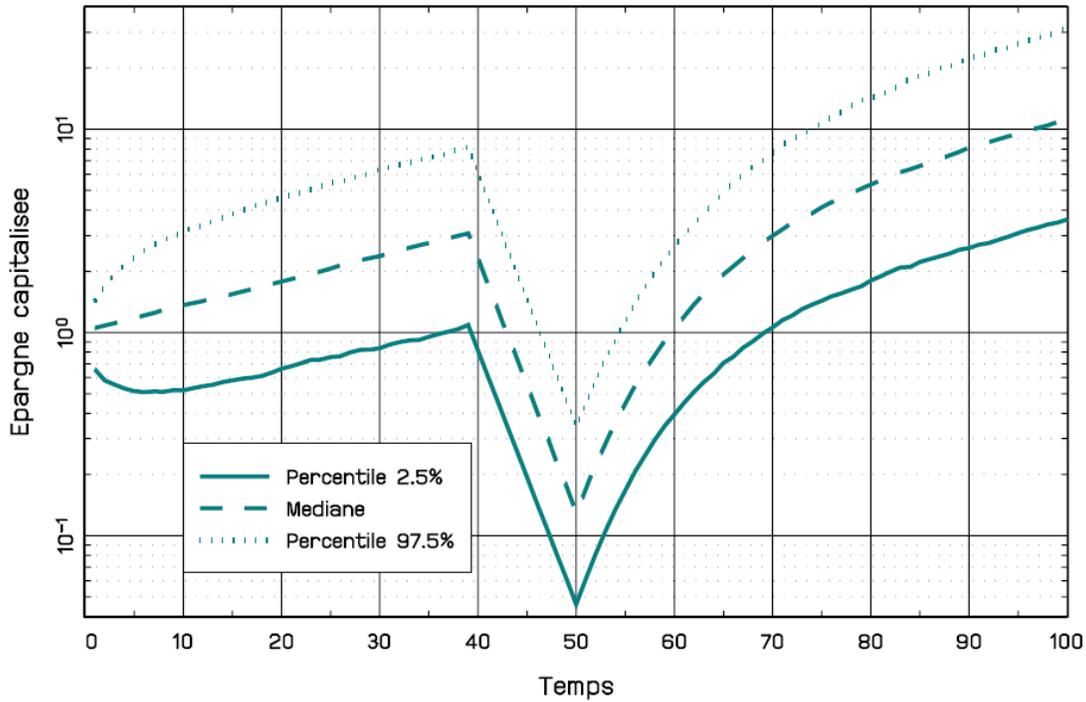


FIG. 3.6 – Trending OU process : intervalle de confiance - l'évolution avec krach

3.3.1 Les stratégies d'allocations d'actifs

Les résultats des simulations précédentes nous conduisent à retenir deux hypothèses distinctes pour décrire la dynamique du cours des actifs risqués. L'une suppose que les différences premières du logarithme des cours suivent un bruit blanc gaussien (EMH), l'autre que la dynamique des log-returns est déterminée par un « Trending OU process ». Naturellement, ces conjectures ont un impact direct sur les stratégies de gestion de l'épargne. Comme dans l'ensemble de nos recherches, nous avons retenu un critère de VaR pour définir le risque de perte accepté par les agents. De plus, par souci de simplification, on suppose, à l'instar de BARBERIS [2000], que le marché

est constitué d'un actif sans risque et d'un actif risqué, conformément au théorème de la séparation.

L'hypothèse d'efficience des marchés

Dans le cas paramétrique - hypothèse de distribution gaussienne des rendements - la VaR s'exprime en fonction de la moyenne et de la variance déterminées par la proportion (p) d'actifs risqués :

$$VaR(T, p) = p((\mu_T - r) + \sigma_T K_{1-\alpha})$$

Avec $k(1 - \alpha)$: Le quantile de la loi $N(0,1)$ au seuil de probabilité $(1 - \alpha)$

Dans le cas d'un gaussien, on déduit facilement l'évolution de la VaR en fonction de l'horizon de placement :

$$VaR_{(T,p)} = p \left((\mu_T - r) + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} K_{1-\alpha} \right)$$

L'hypothèse de retour vers la moyenne

Dans le cas où la dynamique des cours est régie par un « Trending OU process » l'expression de la VaR en fonction de l'horizon T devient :

$$VaR_{(T,p)} = p \left((\mu_T - r) + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{k} * (1 - \exp(-k * T)) / T}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{k} * (1 - \exp(-k))}} k_{(1-\alpha)} \right)$$

3.4 Une simulation de référence au cadre démo-économique

Cette analyse évalue les perspectives des régimes de retraite par répartition dans un environnement démo-économique « tendanciel ». Les simulations issues de ce

scénario serviront de référence et faciliteront les comparaisons ultérieures avec des scénarios alternatifs. Le fonctionnement des systèmes de retraite est stylisé et emprunte les principales caractéristiques réglementaires et démographiques des régimes du secteur marchand.

Scenarior de référence	
Economie	
Taux de progrès technique exogène	1,50%
Taux de chômage de long terme	5,00%
Démographie	
Hypothèse de mortalité	Projection tendancielle INSEE
Descendance finale par femme	1,95 enfant
Solde migratoire net annuel	70000
Régimes de retraites	
Age légal de départ à la retraite	62 ans en 2017
Age moyen de départ à la retraite	64 ans en 2025
Durée de cotisation	172 trimestres en 2035
Indexation	Pensions et salaires de référence revalorisés en fonction des prix

FIG. 3.7 – Scenarior de référence - hypothèses retenues

Dans nos projections, l'hypothèse de productivité du travail est fixée à 1,5% l'an, soit un pronostic similaire à celui retenu par le Conseil d'orientation des retraites (COR) et en phase avec le ralentissement de la croissance de la productivité du travail observée depuis le début des années 1990. Parallèlement, le chômage convergerait vers son niveau frictionnel. L'analyse des sorties du modèle montre que la hausse de la population active contribuerait mécaniquement à l'augmentation de la croissance

économique. Toutefois, à partir des années 2030, le chômage atteindrait son taux incompressible et contribuerait au ralentissement de la croissance de la population salariée.

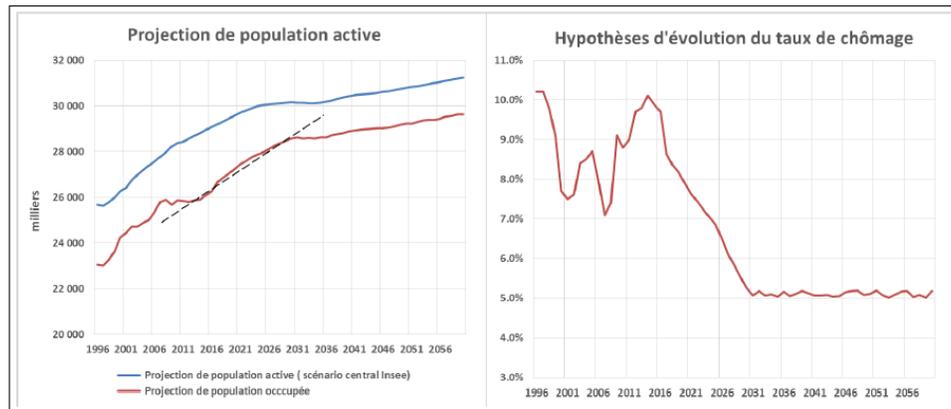


FIG. 3.8 – Population active - Projection et évolution

Cette évolution se traduirait par un léger fléchissement du rendement du capital net jusqu'à ce que la croissance du capital par tête converge vers son niveau d'équilibre. On constate, par ailleurs, que le rendement du capital déterminé par la maquette démoéconomique est relativement inerte sur la période de simulation. Cette propriété résulte directement des hypothèses néo-classiques qui supposent que la rémunération des facteurs est égale à leur productivité marginale. Cette spécification n'est pas adaptée à l'analyse des risques inhérents à la capitalisation et justifie l'introduction ultérieure d'une dynamique stylisée du cours des actifs risqués dans le prototype de simulation.

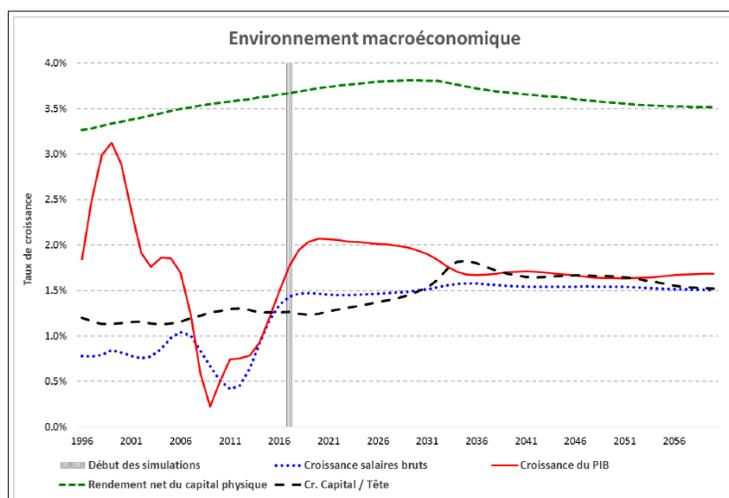


FIG. 3.9 – Environnement macroéconomique

Couplées aux mesures d’âge, d’allongement des durées cotisées et aux transferts en provenance de l’assurance chômage, ces perspectives assureraient pratiquement l’équilibre financier des régimes à l’horizon 2060. Dans ce scénario, conformément à l’incidence de la réforme de 2003, l’équilibre des régimes serait tributaire des transferts instantanés de cotisations chômage libérées par une forte reprise de l’emploi. Dans un mode de gestion classique où les ressources des régimes proviennent essentiellement des cotisations des affiliés, le besoin de financement serait de l’ordre de 20 milliards d’euros constants en 2060, au terme des simulations (courbe rouge pointillée sur le graphique ci-contre).

La projection à la législation 2013 constante montre que la succession des réformes entamées depuis 1993 va se traduire par une poursuite de la baisse du niveau des pensions relativement aux salaires. Pour s’en convaincre, analysons l’évolution des taux de remplacement projetés pour les différentes générations tout au long de la durée de leur retraite.

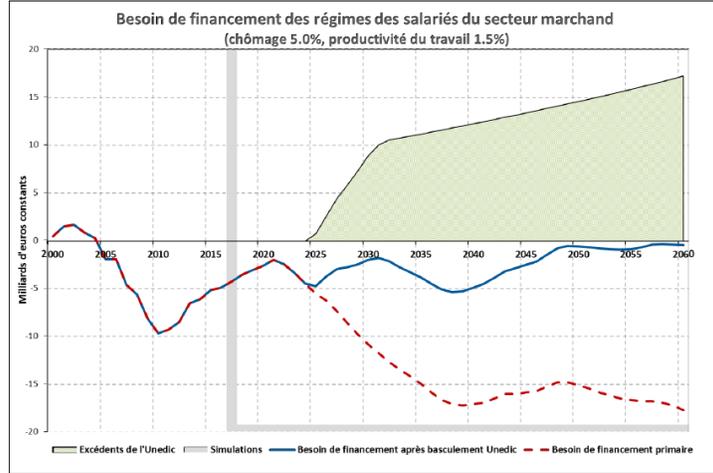


FIG. 3.10 – Besoin de financement

3.4.1 Caractéristiques du plan d'épargne retraite fictif

Afin d'évaluer l'incidence de la constitution d'un plan d'épargne retraite sur la rémunération des facteurs et sur le niveau de vie des retraités, les hypothèses suivantes ont été faites : On suppose que le fonds de retraite est abondé à partir de 2017 par les différentes cohortes de salariés. Tous les salariés du secteur privé dont l'âge est inférieur de 20 ans à l'âge de la retraite à la date de démarrage du fonds y accumulent 6bruts. Ce taux correspond à l'augmentation nécessaire pour réindexer les pensions liquidées sur la croissance des salaires nets (hors transferts des cotisations chômage). Nous supposons donc dans nos simulations, qu'en moyenne, la majorité de l'épargne financière est investie pour la retraite. Cet effort apparait compatible avec le taux d'épargne des ménages français (15.5% des revenus disponibles en 2015), pour peu que l'on suppose qu'il y ait proximité entre le revenu disponible brut et le revenu primaire des salariés net de cotisations employeurs. Ce qui sous-entend que les prestations sociales sont, en moyenne, approximativement neutralisées par les cotisations

sociales salariales, l'impôt sur le revenu et autres impôts courants.

Gestion du fonds d'épargne	
Effort d'épargne en % du salaire brut	6%
Part du fonds dédié à la gestion	0.5%
Part des flux consacrée à la gestion du fonds	5%
Rendement réel de l'actif sans risque	0%
Volatilité des actifs risqués	18%
Rendement réel des actifs risqués	Rendement d'équilibre $r_g + 1.5\%$
taux d'intérêt technique des rentes	0%

FIG. 3.11 – Hypothèses de gestion

Pour apprécier l'impact de la capitalisation retraite, on fait l'hypothèse forte que l'épargne génère intégralement et instantanément de l'investissement productif. Dans le modèle avec croissance à la Solow, la croissance de la production (courbe rouge sur le graphique ci-dessous) est transitoirement accélérée pendant la phase de montée en puissance du fonds. Toutefois, les effets de la croissance du stock de capital retraite sont limités dans le temps en raison de la baisse du rendement du capital qui contribue à réduire rapidement le poids du capital structurel dans la production. L'introduction d'une dose de capitalisation contribue donc à réduire le rendement du capital relativement à la projection initiale effectuée sans épargne retraite (ligne verte en pointillé versus ligne grisée). Le graphique ci-dessous ci-après précise l'impact de la constitution d'un plan d'épargne retraite sur les facteurs de production.

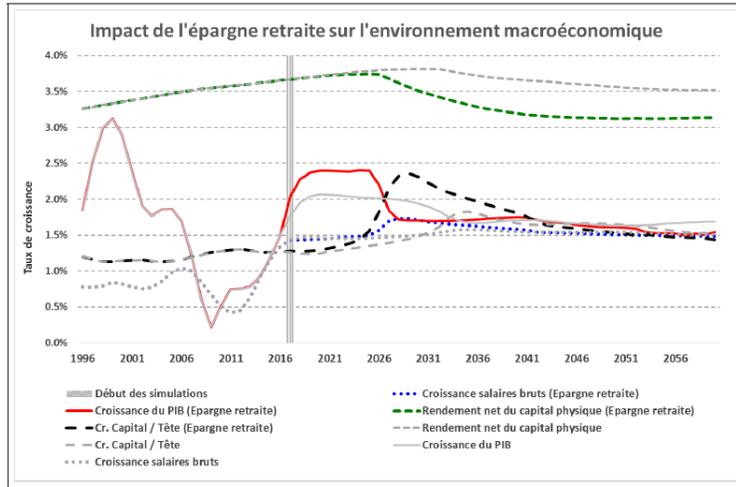


FIG. 3.12 – Impact de l'épargne retraite sur l'environnement macroéconomique

Conclusion

Les simulations réalisées dans le cadre démo-économique sont riches d'enseignement. Elles montrent que si le prix des actifs risqués suit une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents (EMH), les agents averses au risque ne pourront pas obtenir sur les marchés un ratio rendement / risque équivalent à celui procuré implicitement par l'édifice des régimes par répartition du secteur privé. Si l'on prend le taux de rendement interne comme proxy du « bien-être » des agents, alors l'abondement à un plan d'épargne procurerait une utilité moindre que celle procurée par la répartition.

Conclusion Générale

Le recours à la hausse des taux de cotisation des régimes par répartition plutôt qu'à l'épargne pour couvrir le risque retraite n'est pas pour autant une solution satisfaisante, car la hausse des cotisations accroît le coût du travail et encourage la substitution du capital au travail.

Quoi qu'il en soit, les résultats n'ont pas pour ambition d'évaluer les avantages et les limites des ajustements possibles pour couvrir le risque vieillesse. Les simulations sont focalisées avant tout sur la mesure du risque associée à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites.

En la matière, elles soulignent que les raisonnements simplistes consistant à comparer directement l'espérance des rendements des marchés financiers à celle des régimes par répartition pour en déduire une hiérarchie comportent une faille majeure car ils font abstraction de la volatilité des marchés et des évolutions démographiques.

Ces premières remarques doivent être modulées si l'on suppose - comme nous le pensons - que la dynamique des cours est gouvernée par un processus de retour vers la moyenne. C'est-à-dire que les mouvements extrêmes de prix observés sur les

marchés financiers sont transitoires et qu'une forte variation dans un sens est suivie de mouvements de sens opposé qui corrigent tendanciellement la déviation initiale et ramènent les prix des actifs vers leurs valeurs fondamentales. Dans cette seconde hypothèse, toujours dans le cas d'un agent qui opterait pour probabilité nulle perte en capital, le marché pourrait concurrencer les régimes par répartition - sans toutefois offrir un surcroît de rendement au prix d'un investissement massif en actifs risqués en début et milieu de vie active.

Toujours dans le cas d'une dynamique de retour vers la moyenne et sous l'hypothèse forte d'une force de rappel stable, les simulations montrent qu'un dispositif d'épargne retraite résisterait bien à un krach boursier équivalent à celui enregistré sur les marchés de 2000 à 2011.

Naturellement, ces simulations ne prétendent pas à examiner l'ensemble des configurations possibles et pourraient être enrichies par de nombreuses variantes. Elles reposent, par exemple, sur des hypothèses assez conservatrices en matière de substitution capital / travail. Rappelons que le paramètre de substitution de la fonction CES est fixé à 0 ce qui détermine une élasticité de substitution capital / travail unitaire. Or, l'analyse historique nous montre que le poids des revenus du capital dans le revenu est croissant, ce qui accrédite l'idée que l'élasticité de substitution entre le capital et le travail est supérieure à 1. PIKETTY [2013] estime que l'élasticité de substitution est comprise entre 1,3 et 1,6. Plus récemment, partant d'une fonction CES, ARTUS [2015] trouve les élasticités de substitution capital / travail comprise entre 1,3 pour les Etats-Unis, et 1,87 pour la France. Des variantes retenant ces élasticités pourraient compléter les simulations.

Sur un autre plan, le développement de l'économie du savoir laisse supposer que des mécanismes de croissance endogène sont à l'oeuvre dans les pays développés. L'introduction dans les maquettes d'une fonction de production avec croissance en-

dogène pourrait enrichir l'analyse des liens entre retraite et risque financier. HAMAYON et LEGROS [2001] montrent clairement que les mécanismes d'éviction sont moins violents dans les fonctions de croissance endogène. Ces dernières déterminent une relation plus forte et plus durable entre capitalisation, production et rémunération des facteurs. Dans un tel cadre, l'utilité tirée de la constitution d'une épargne retraite pourrait être augmentée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Asmussen. S. Approximations for the probability of ruin within finite time, *Insurance Act. J.* 57 (1984) 31-57
- [2] Asmussen. S. and Albrecher. H. *Ruin Probabilities*. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. World Scientific, UK, 2000.
- [3] Asmussen. S and Rolaki. T. Computational Methods in Risk Theory : A Matrix Algorithmic Approach, *Insurance : Mathematics and Economics* 10 (1991) 250-274.
- [4] Ayyub. B. M, and Klir. G. J. *Uncertainty Modeling and Analysis in Engineering and the Sciences*, Chapman et Hall, USA, 2006.
- [5] B.Sund. On Multivariate Panjer Recursions. *ASTIN Bulletin* 29, pages 29-45, 1999.
- [6] Bertoin. J and Doney. R. Cramér's estimate for Lévy processes. *Stat. Probab. Lett* 21 (1994) 363- 365.
- [7] Billingsley. P. *Probability and Measure*. Wiley, New York, 1995.

- [8] Bogaert. P. Introduction au Calcul des Probabilités, Boeck et Larcier, Bruxelles, 2006.
- [9] Bosq. D and Lecoutre. J. Théorie de l'Estimation Fonctionnelle, Economica, Paris, 2004.
- [10] Cai. J. Ruin Probabilities Under Dependent Rates of Interest. Journal of Applied Probability 39 (2002) 312-323.
- [11] Coccozza. C. Processus Stochastique et Fiabilité des Systèmes, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.,
- [12] Cramér. H. On the Mathematical Theory of Risk. Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.
- [13] Devylder. F. Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction. Editions de l'Université de Bruxelles, 1996.
- [14] Devylder. F, and Marceau. E. Explicit Analytic Ruin Probabilities for Bounded Claims, Insurance : Mathematics and Economics 18 (1995) 79-105.
- [15] Devylder. F, Goovaerts. M, and Marceau. E. The Bi-atomic Minimal Solution of Schmitter's Problem, Insurance : Mathematics and Economics 70 (1997) 59-78.
- [16] Denuit. M, and Charpentier. A. Mathématiques de l'Assurance non Vie : Principes Fondamentaux de Théorie de Risque, Economica, 2004.
- [17] Dickson. C. M. D, and Howard Waters. R. Gamma Processes and Finite Time Survival Probabilities. Astin Bulletin 61 (1993) 259-272.
- [18] Dufresne. F, Gerber. U, and Shiu. W. Risk Theory With the Gamma Process. Astin Bulletin 31 (1991) 177-192.

- [19] Dufresne. F, and Gerber. U. The Surpluses Immediately Before and at Ruin, and the Amount of the Claim Causing Ruin. *Insurance : Mathematics and Economics* 101 (1988) 193-199.
- [20] FAMA, E. F., L. FISHER, M. C. JENSEN et R. ROLL. 1969, «The adjustment of stock prices to new information», *International Economic Review*, vol. 10, no 1, p. 1–21, ISSN 00206598, 14682354.
- [21] Garrido. J, and Morales. M. On the Expected Discounted Penalty Function for Levy Risk Processes. *North American Actuarial Journal* 16 (2006) 196-217.
- [22] Grandell. J. *Aspect of Risk Theory*, Springer-Verlage, New york, 1991.
- [23] Grandell. J. *Aspects of Risk Theory*. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
- [24] Gerber. U. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Monograph, University of Philadelphia, 1979.
- [25] Héssjer. O, and Ruppert. D. Taylor Series Apporximations of Transformation Kernel Density Estimators, *Nonparametric Statistics*, Taylor et Francis group 10 (1994) 165- 177.
- [26] Kalashnikov. V, and Konstantindis. D. *Ruin Probability*, Fundamental'nayai Prik- ladnaya Matematika, 1996.
- [27] kartashov. N. V. *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, 1996.
- [28] Kass. R, Goovaerts. M. Dhaene, J. and Denu?t, M. *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publisher, 2001.
- [29] Kyprianou. A. E. *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes With Applications*. Springer, 2008.

- [30] Lin. X. S. Tail of Compound Distribution and Excess Time, Journal of Applied Probability 4 (1996) 184-195.
- [31] Lois n°16-15 du 31 décembre 2016 modifiant et complétant les lois n° 83-12 du 02 juillet 1983
- [32] Lundberg. F. Approximerad Framst ?llning, Almqvist Wiksell, 1993.
- [33] Malaval. F. Développement Durable. Assurance et Environnement, 1999.
- [34] Morales. M. On the Expected Discounted Penalty Function for a Perturbed Risk Process Driven by a Subordinator. Insurance : Mathematics and Economics 30 (2007) 293-301.
- [35] Newton. L, Bowers. J, Hickman. C, Cecil. J, and Donald. A. Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, Schaumburg, 1997.
- [36] Panjer. H, H. Recursive Evaluation of a Family of Compound Distribution, Astin Bulletin 22 (1981) 22-26.
- [37] PETAUTON P. and FROMENTEAU M. Théorie et pratique de l'assurance vie. Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris, 2012.
- [38] POINCELIN T. Calculs élémentaires de l'assurance vie. Edition ECONOMICA, France, 2003.
- [39] Sato. K. I. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press, 1999.
- [40] Schmidt. V, Rolski. T, Teugels. J, and Schmidli.H. Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley, 1999.
- [41] Silvermann. B. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. Chapman and Hall, London, 1986.

- [42] Soulier. P. Bases Mathématiques de l'Assurance. Université Paris Ouest Master ISIFAR, 2013.
- [43] Stuart. A, Panjer. H. H, and Gordon. E. Loss Models, Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience, 2004.
- [44] TALFI Mohamed « Organisation des systèmes des retraites et modélisation des fonds de pension »Thèse de doctorat en sciences actuarielle et financière, sous la direction de François QUITARD-PINON, Lyon, Université Claude Bernard-Lyon 1, 2007,
- [45] Teugels. J. L. Estimation of the Ruin Probability, Insurance : Mathematics and Economics 14 (1982) 169-175.
- [46] TOURE Ibrahim, « Optimisation de la gestion financière d'une caisse de retraite. Cas de CGRAE » Mémoire de master en gestion bancaire et maîtrise des risques, sous direction de BOUABRE Fabrice, Côte d'Ivoire, Centre Africain d'Etude Supérieure en Gestion (CESAG), 2014
- [47] TOSSETI A., WEISS F. and POINCELIN T. Les outils de l'assurance vie. Edition ECONOMICA, France, 2003.
- [48] Tsybakov. A. Introduction to Nonparametric Estimation. Springer Science and Business Media, New York, 2009.
- [49] W.S . Chan, H. Yang, and L. Zhang. Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model. Insurance : Mathematics and Economics 32, page 345-358,
- [50] Willmot. G. E. Refinements and Distributional Generalizations of Lundberg's Inequality, Insurance : Mathematics and Economics 45 (1994) 49-03.
- [51] Willmot. G. E, and LIN. X. S. Simplified Bounds on the Tails Compound Distribution, Journal of Applied Probability 15 (1997) 127-133.

Résumé

Le premier chapitre présente quelques notions de base sur le système de retraite qui contient d'importantes définitions sur la retraite ces modèles et leurs principes dans le monde et montre l'importance de la retraite et les marchés financiers sur le développement financier du pays. Le chapitre deux fournit une explication sur les Modèles de risques classiques, probabilité de ruine et les Probabilités viagères. Tandis que le dernier chapitre présente une explication au débat sur l'hypothèse d'efficacité des marchés. La cause du débat est souvent attribuée à la petite taille des échantillons et à la faible puissance des tests statistiques dédiés et les résultats d'un modèle conçu pour étudier les interactions entre la démographie et les régimes de retraite. Afin d'étudier les risques inhérents à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites, nous utilisons un « Trending OU process » au lieu d'un MBG classique pour modéliser les rendements. Pour un épargnant averse au risque le marché pourrait concurrencer les régimes par répartition.

Abstract

The first chapter presents Some basic notions on the retirement system which contains important definitions on the retirement these models and their principles in the world and to show the importance of the retirement and the financial markets on the financial development of the country. Chapter Two provides an explanation of Classical Risk Models, Probability of Ruin and Lifetime Probabilities The last chapter provides an explanation of the debate on the efficient market hypothesis. The cause of the debate is often attributed to the small sample sizes and low power of dedicated statistical tests and the results of a model designed to study the interactions between demographics and pension plans. In order to study the risks inherent in using capital income to finance pensions, we use a "Trending OR process" instead of a classic MBG to model returns. For a risk averse saver the market could compete with pay-as-you-go plans.