République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.Mira de BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire de Master

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques Appliquées
Spécialité : Mathématiques Financières

Thème

La programmation quadratique convexe dans les modèles économiques et financiers : cas déterministe

Présenté par :

BENACER Narimane & SEBBAH Zouina

Devant le jury composé de

Président	**M^r K. Abbas**	**Professeur**	**U. A/Mira Béjaia.**
Promoteur	**M^r M.O Bibi**	**Professeur**	**U. A/Mira Béjaia.**
Examinateur	**M^r N. Touche**	**M.C.A**	**U. A/Mira Béjaia.**
Examinateur	**M^r N. Khimoum**	**M.C.B**	**U. A/Mira Béjaia.**

Promotion 2019/2020

Remerciements

A l'issue de ce travail, nous tenons à remercier en premier lieu le bon Dieu tout puissant de nous avoir donné la force pour réaliser ce modeste travail.

Pendant toute la durée de nos études et de notre projet, on a eu la chance de rencontrer des gens réellement extraordinaires. Qu'il nous soit permis ici de leur rendre humblement hommage et de les remercier pour tout ce qu'ils nous ont apporté : pour l'aide et les conseils qu'il nous ont prodigués, pour leurs soutiens. Nous remecrcions en particulier :

Notre encadreur M^r^ Mohand Ouamer Bibi d'avoir accepté de nous encadrer, pour ses orientations, conseils qu'il nous a prodigués tout au long de ce travail,

Les membres de jury d'avoir accepté de juger notre travail,

M^lle^ Aoudia, M^lle^ Bouchebbah, M^r^ Boudjelda pour leur soutien moral,

Nos très chères familles qui ont été toujours derrière nous,

Tous nos amis et tous ceux qui ont étudié avec nous.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
A toute ma famille,
A tous mes amis.

Narimane

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
A ma mère qui est la lumière qui éclaire mon chemin
A mon père Allah yerahmo qui aurait été fier de moi s'il était vivant
A ma soeur HINDA qui a été à la fois père, frère et soeur
A mon frère KARIM et sa petite famille
A tous ceux qui portent le nom SEBBAH et BOUGHIDENE
A tous mes chers amis

Zouina

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

La programmation mathématique est un domaine des mathématiques appliquées, ayant pour objet l'étude théorique des problèmes d'optimisation, ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolution.

La programmation quadratique est une branche d'optimisation non linéaire, où la fonction objectif à minimiser est une forme quadratique et les contraintes sont linéaires et/ou quadratiques. Son importance réside dans ses propriétés théoriques, ses applications dans plusieurs domaines scientifiques et différentes disciplines, telles que l'économie, la finance, la médecine, les télécommunications et les sciences de l'ingénieur. En fait, plusieurs problèmes réels et académiques peuvent être modélisés sous forme de programme quadratique. En raison de ses nombreuses applications, la programmation quadratique est souvent considérée comme une discipline en elle-même. C'est le cas de l'optimisation du portefeuille en finance. De nombreux problèmes financiers peuvent représenter un cas particulier de ce problème.

L'optimisation quadratique est aussi très intéressante du point de vue théorique, car elle est une transition naturelle entre la programmation linéaire (PL) et non linéaire. En effet, la majorité des méthodes développées pour le cas quadratique sont des extensions directes de celles de la PL. De plus, les algorithmes élaborés pour le cas de l'optimisation non linéaire reposent essentiellement sur l'approche quadratique. En effet, le problème de gestion du portefeuille de Markowitz [10] est souvent utilisé par les économistes.

En programmation quadratique, Barankin et Dorfman [6] furent historiquement les premiers à remarquer qu'en combinant les conditions d'optimalité de Lagrange avec celle du système original, la solution optimale était une solution de base d'un système élargi ayant la propriété que seuls certains couples de variable figuraient dans l'ensemble de base. De son côté, Markowitz [10] montra qu'il était possible de modifier le système élargi et d'engendrer paramétriquement une classe de solutions de base ayant la propriété particulière ci-dessus et convergeant vers l'optimum en un nombre fini d'itérations. Enfin, Wolfe [25] montra qu'en modifiant légèrement l'algorithme du simplexe de façon à ne pas autoriser l'introduction d'une variable dans l'ensemble de base si sa variable complémentaire s'y trouvait déjà, on parvenait aisément à l'optimum recherché. Ainsi, en modifiant seulement quelques instructions peu nombreuses sur machine de la méthode du simplexe, il a été possible de résoudre un programme quadratique convexe.

D'autre méthodes ont été développées pour la résolution de ce type de problèmes, parmi lesquelles on peut citer :

- Méthode d'activation des contraintes [27] : Elle est utilisée dans le cas des contraintes d'inégalité, où on considère certaines contraintes d'inégalité comme des contraintes d'égalité pendant un certain nombre d'itérations. La première méthode est mise au point par Fletcher en 1971 [26], par la suite d'autres auteurs ont fait des raffinements numériques à cette dernière tels que Gill et Murray en 1978 [23] ainsi que Gould en 1991 [17]. Goldfarb et Idnani en 1983 [5] ont développé la méthode duale pour le cas des programmes quadratiques strictement convexes, tandis que Boland [21] l'a généralisée en 1997 pour le cas convexe.
- Méthode des points intérieurs : ces méthodes, étudiées maintenant depuis plus de 30 ans, ont été d'abord développées en 1984 par Karmarkar [20] dans le cadre de problèmes linéaires, avant d'être généralisées à d'autres problèmes plus généraux, notamment la programmation quadratique convexe. Dans cette méthode, les itérés approchent la solution par l'intérieur de l'ensemble admissible S et nécessitent un nombre d'itérations qui croit de façon polynomiale avec le nombre de variables.
- La Méthode de support [29] : Cette méthode est basée sur le principe de support, donnant ensuite une méthode générale appelée méthode adaptée, ces méthodes étant développées par R. Gabassov et F.M. Kirillova [28, 30]. Ces méthodes sont intermédiaires entre les méthodes d'activation des contraintes et celles de points intérieurs. Elles traitent les problèmes linéaires et quadratiques tels qu'ils se présentent et utilisent un critère d'arrêt de suboptimalité.
  Notons que la méthode de support est une généralisation de la méthode du simplexe, consistant à passer d'une Solution Réalisable de Support (SRS) à une autre SRS, qui n'est pas forcément un point extrême du domaine admissible.

L'objectif de ce travail consiste à résoudre des modèles économiques et financiers résolus par la programmation quadratique convexe. Pour entamer notre travail, on a commencé par quelques rappels mathématiques sur les matrices et les vecteurs, les propriétés des formes quadratiques, ainsi que la notion de la convexité.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté quelques propriétés, les conditions d'optimalité pour les problèmes classiques de l'optimisation quadratique sans contraintes et avec contraintes, ainsi que le concept de dualité, puis on a cité quelques méthodes de résolution des problèmes de programmation quadratique.

Dans le troisième chapitre, on a présenté un modèle d'optimisation du portefeuille. Ce modèle est du type moyenne-variance de la théorie classique de Markowitz et on a défini quelques éléments théoriques de la gestion du portefeuille.

Dans le dernier chapitre, en s'inspirant du travail de M. J. Best [13] pour la résolution d'un problème de gestion d'un portefeuille, on a exécuté la méthode d'activation des contraintes quadratique sous MATLAB pour trouver la solution du problème considéré et la frontière efficiente. A la fin, on déroule un exemple réel d'un portefeuille financier composé de trois titres de l'indice $SP500$ d'une bourse américaine.

Chapitre 1

Rappels mathématiques

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques notions sur les vecteurs et les matrices, les propriétés des formes quadratiques, ainsi que la notion des ensembles et des fonctions convexes.

1.1.1 Vecteurs et matrices

Définition 1.1.1. Soit $n,\ m \in N^*$. Une matrice d'ordre $m \times n$ à coefficients dans $\Re$ est un tableau à deux dimensions, ayant m lignes et n colonnes, représenté sous la forme suivante :

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

où $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $J = \{1, 2, \cdots, n\}$, $m \leq n$, représentent respectivement l'ensemble des indices des lignes et colonnes de A. Pour des calculs pratiques, la matrice A se note aussi

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_i^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix},$$

où

- $a_j = A(I,\ j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne de dimension m,

- $A_i^T = A(i,\ J) = (a_{i1}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in})$ est un vecteur-ligne de dimension n.

Le symbole $({}^T)$ est celui de la transposition. Chaque vecteur, noté $x = x(J) = (x_j,\ j \in J)$, sera ainsi considéré comme un vecteur-colonne, tandis que le vecteur-ligne sera noté x^T. La matrice transposée de A sera notée :

$$A^T = A^T(J,\ I) = (a_{ji} = a_{ij},\ j \in J,\ i \in I).$$

Notons qu'un vecteur-colonne de dimension n peut être considéré comme une matrice d'ordre $(n \times 1)$, tandis qu'un vecteur-ligne de dimension n peut être considéré comme une matrice d'ordre $(1 \times n)$.

La matrice A est dite carrée si on a $n = m$; de plus, si $A = A^T$, la matrice est dite symétrique. La matrice identité d'ordre n sera notée I_n.

1.1.2 Matrices et vecteurs partitionnés

On peut effectuer le produit d'une matrice A et d'un vecteur x, après les avoir partitionnés judicieusement. On dit alors qu'on a effectué le produit par blocs. En effet, si l'on a

$$A = [A_1 | A_2], \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ - \\ x_2 \end{bmatrix},$$

alors on peut écrire :

$$Ax = [A_1 | A_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ - \\ x_2 \end{bmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2.$$

De même, pour

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ - \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ - \\ b_2 \end{bmatrix},$$

l'équation $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

On peut partitionner une matrice d'une manière arbitraire. Par exemple, si $A = A(I,\ J)$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$, J_B et J_N sont deux sous-ensembles quelconques de J, tels que :

$$|J_B| = m,\ J_B \cup J_N = J,\ J_B \cap J_N = \emptyset,$$

alors, on peut partitionner A de la façon suivante :

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = [A_B | A_N],$$

avec

$$A_B = A(I,\ J_B) = (a_j,\ j \in J_B), \quad A_N = A(I,\ J_N) = (a_j,\ j \in J_N).$$

Si

$$x = x(J) = \begin{bmatrix} x_B \\ - \\ x_N \end{bmatrix}, \ \textit{où } x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B), \ x_N = x(J_N),$$

alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} Ax = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j \in J_B} a_j x_j + \sum_{j \in J_N} a_j x_j &= A(I, \ J_B)x(J_B) + A(I, \ J_N)x(J_N) \\ &= A_B x_B + A_N x_N. \end{aligned}$$

1.2 Propriétés des formes quadratiques

Définition 1.2.1. Une fonction réelle de la forme suivante :

$$F(x) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{1.1}$$

est dite forme quadratique de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$.
En posant $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, et $A = (a_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n)$, la formule (1.1) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$F(x) = x^T A x.$$

On dit que A est la matrice associée à la forme quadratique F.

Remarque 1.2.1. *On peut toujours représenter une forme quadratique par une matrice symétrique. En effet, en posant*

$$D = \frac{A^T + A}{2} \Rightarrow D^T = \frac{A + A^T}{2} = D,$$

et on aura $F(x) = x^T A x = x^T D x$.

1.2.1 Gradient et Hessien d'une forme quadratique

Définition 1.2.2. Soit $f : \Re^n \to \Re$, une fonction de classe C^1. Son gradient est défini par :

$$g(x) = \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

où
$\partial f / \partial x_i$ est la dérivée partielle de $f(x)$ par rapport à x_i.

Définition 1.2.3. Soit une forme quadratique avec une matrice D symétrique :

$$F(x) = x^T Dx. \tag{1.2}$$

Le gradient de $F(x)$ est :

$$g(x) = \nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2Dx, \tag{1.3}$$

où

$\partial F / \partial x_i$ est la dérivée partielle de $F(x)$ par rapport à x_i.

Définition 1.2.4. Soit $f : \Re^n \to \Re$, une fonction de classe C^2. Le hessien de la fonction f est défini par :

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix},$$

où $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ est la dérivée partielle de $f(x)$ d'ordre 2, i.e, c'est la dérivée partielle de $\partial f / \partial x_j$ par rapport à x_i.

Le hessien de la forme quadratique (1.2) est alors :

$$\nabla^2 F(x) = 2D.$$

Définition 1.2.5. Soit $f : \Re^n \to \Re$, une fonction de classe C^1. Sa dérivée directionnelle dans la direction d au point x est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial d}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hd) - f(x)}{h} \\ &= \frac{d}{dh} f(x + hd)|_{h=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + hd)|_{h=0} d_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x + hd)|_{h=0} d_n \\ &= \nabla^T f(x) d. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.2. *Si $\|d\| = 1$, alors la dérivée directionnelle est le taux d'accroissement de f dans la direction d au point x. Le taux d'accroissement est maximal dans la direction du gradient.*

1.2.2 Formes quadratiques définies et non définies

Soint F une forme quadratique et D sa matrice symétrique associée, avec

$$F(x) = x^T Dx.$$

Définition 1.2.6. La forme quadratique $F(x)$ est dite définie positive si $x^T Dx > 0, \forall x \in \Re^n \;\; et \;\; x \neq 0$. Elle est dite semi-définie positive (définie non négative) si $x^T Dx \geq 0, \forall x \in \Re^n$.

Définition 1.2.7. La forme quadratique $F(x)$ est dite définie négative si $x^T Dx < 0, \forall x \in \Re^n \;\; et \;\; x \neq 0$. Elle est dite semi-définie négative (définie non positive) si $x^T Dx \leq 0, \forall x \in \Re^n$.

Définition 1.2.8. Une matrice symétrique D est dite matrice définie positive (non négative) et se note $D > 0 \;\; (D \geq 0)$, si elle est associée à une forme quadratique définie positive (non négative).

Définition 1.2.9. Une forme quadratique $F(x)$ est dite non définie si $F(x)$ est positive pour certaines valeurs de x et négative pour d'autres valeurs.

1.2.3 Propriétés des matrices définies positives et non négatives

Les matrices symétriques définies ont des propriétés très intéressantes. En voici quelques unes :

Propriétés 1.2.1. *Soit une matrice symétrique $D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$. Si D est définie positive (non négative), alors on a :*

$$d_{ii} > 0 \;\; (d_{ii} \geq 0), \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Propriétés 1.2.2. *Soit la matrice D partitionnée de la manière suivante :*

$$D = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \end{array},$$

avec $m + k = n$.
Si $D > 0 \;\; (D \geq 0)$, alors les sous-matrices principales $D_{11} \;\; et \;\; D_{22}$ sont aussi définies positives (non négatives). D'une manière générale, toute sous-matrice principale d'une matrice définie positive (non négative) est définie positive (non négative).

Propriétés 1.2.3. *Un élément diagonal d'une matrice symétrique D définie non négative ne peut s'annuler que si les autres éléments de la même ligne et colonne s'annulent aussi.*

Propriétés 1.2.4. *Soit D une matrice symétrique définie non négative. Si x est un point quelconque mais fixé de $\Re^n$ tel que $x^T Dx = 0$, on a alors $Dx = 0$.*

1.3 Convexité

La convexité joue un rôle très important dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité.

1.3.1 Ensembles convexes

Définition 1.3.1. Un ensemble C dans $\Re^n$ est dit convexe, si $\forall x, y \in C, \lambda \in [0,1]$, on a :

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

1.3.2 Propriétés des ensembles convexes

Propriétés 1.3.1. *Soit une famille* $\{C_i\}_{i=1,\cdots,k}$ *des ensembles convexes, alors on a :*
- $C = \cap_{i=1}^{k} C_i$ *est un ensemble convexe.*
- $C = \prod_{i=1}^{k} C_i$ *est un ensemble convexe.*

Propriétés 1.3.2. *Si* C *est un ensemble convexe et* $\lambda \in \Re$, *alors* K *est un ensemble convexe, tel que*

$$K = \{x | x = \lambda x_1, \quad x_1 \in C\}.$$

1.3.3 Fonctions convexes

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble convexe C de $\Re^n$.

Définition 1.3.2. La fonction f est dite convexe, si pour tous $x, y \in C$ et pour $\lambda \in [0,1]$, l'inégalité suivante est verifiée :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1.4}$$

Définition 1.3.3. La fonction f est dite strictement convexe, si pour tous $x, y \in C, \quad x \neq y$, et pour $\lambda \in]0,1[$, l'inégalité stricte suivante est verifiée :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1.5}$$

1.3.4 Propriétés des fonctions convexes

Propriétés 1.3.3. *Si* f *et* g *sont deux fonctions convexes, alors* $f+g$ *est une fonction convexe.*

Définition 1.3.4. (Fonction concave)
Une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe C de $\Re^n$, est dite concave, si pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, l'inégalité suivante est verifiée :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1.6}$$

Remarque 1.3.1.

(i) *f est concave* $\Longleftrightarrow -f$ *est convexe.*

(ii) *Une fonction linéaire est à la fois convexe et concave.*

Propriétés 1.3.4. *Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \subset \Re^n$. Alors f est convexe si et seulement si son épigraphe*

$$epi(f) = \{(x, r) : x \in C, r \geq f(x)\} \subset \Re^n \times \Re$$

est un ensemble convexe.

Propriétés 1.3.5. *Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \subset \Re^n$. Alors f est convexe si et seulement si*

$$f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i), \tag{1.7}$$

où $x_i \in C, \quad i = 1, ..., p, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$

Propriétés 1.3.6. *Soit f une fonction réelle de classe C^1, définie sur un ensemble convexe $C \subset \Re^n$. Alors f est convexe si et seulement si*

$$f(y) - f(x) \geq (y - x)^T \nabla f(x), \quad \forall x, y \in C. \tag{1.8}$$

Propriétés 1.3.7. *Si $S \subset \Re^n$ est un ouvert, alors f est convexe si et seulement si*

$$H(x) \geq 0, \quad \forall x \in S. \tag{1.9}$$

Nous remarquons qu'une forme quadratique semi-définie positive est une fonction convexe.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait des rappels mathématiques sur les vecteurs et les matrices, les formes quadratiques et leurs propriétés et nous avons vu la notion de la convexité, avec les ensembles et les fonctions convexes et leurs propriétés.

Chapitre 2

Programmation quadratique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les conditions d'optimalité pour les problèmes classiques de l'optimisation quadratique sans contraintes et avec containtes. Nous présentons aussi le concept de dualité. On finira avec des méthodes de résolution en programmation quadratique.

2.2 Minimisation sans contraintes

Soit f une fonction réelle définie sur $\Re^n$. Le problème de minimisation sans contrainte consiste à trouver $x^* \in \Re^n$, tel que

$$f(x^*) = \min_{x \in \Re^n} f(x). \tag{2.1}$$

Le vecteur x^* est appelé minimum global de f sur $\Re^n$.

Définition 2.2.1. La fonction f admet un minimum local en $x^* \in \Re^n$, s'il existe une boule de centre x^* et de rayon ϵ, $B(x^*, \epsilon) = \{x \in \Re^n : \|x - x^*\| < \epsilon\}$, telle que

$$f(x) \geq f(x^*), \ \forall x \in B(x^*, \epsilon). \tag{2.2}$$

Définition 2.2.2. La fonction f admet un minimum local strict en $x^* \in \Re^n$ s'il existe une boule de centre x^* et de rayon ϵ, $B(x^*, \epsilon)$, telle que

$$f(x) > f(x^*), \ \forall x \in B(x^*, \epsilon), \ x \neq x^*. \tag{2.3}$$

2.2.1 Conditions nécessaires de minimalité locale

Théorème 1. *[15] Si x^* est un minimum local (global) de f sur $\Re^n$ et si f est deux fois différentiable en x^*, alors*

(i) $\nabla f(x^*) = 0$ *(stationnarité).*

(ii) $H(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ *est semi-définie positive.*

2.2.2 Conditions suffisantes de minimalité locale

Théorème 2. *[15] Si f est deux fois différentiable et si x^* est un point tel que*
(i) $\nabla f(x^*) = 0$ *(stationnarité).*
(ii) $H(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ *est définie positive.*
Alors x^* est un minimum local strict de f.

2.3 Optimisation quadratique

Il s'agit d'une classe de problèmes, o*ù* la fonction objectif est quadratique s'écrivant sous la forme $F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x$, avec D symétrique, que l'on minimise sur un ensemble S de vecteurs, satisfaisant des contraintes d'égalités et d'inégalités linéaires. Les résultats fondamentaux de l'optimisation non linéaire sont obtenus d'ailleurs pour ce cas très spécial.

Les programmes quadratiques sont classés selon les propriétés de leur matrice hessienne D. Ce sont des problèmes convexes lorsque D est semi-définie positive et strictement convexe si D est définie positive. Ces problèmes peuvent toujours être résolus en un nombre fini d'itérations et la solution est souvent aussi facile à trouver qu'un programme linéaire. On remarquera qu'un problème linéaire est un problème quadratique dégénéré ($D = 0$), et c'est toujours un problème convexe. Les programmes quadratiques non convexes, o*ù* D est indéfinie, sont plus difficiles parce qu'ils peuvent avoir plusieurs minima locaux et sont classés comme des problèmes NP-complets [11].
Le problème que l'on étudie ici dans ce travail est celui de la recherche du minimum d'une fonction quadratique convexe avec des contraintes d'égalité et d'inégalité, o*ù* le demaine admissible est du type :

$$S = \{x \in \Re^n : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Dans l'exemple cité ci-dessous, nous verrons le cas de l'optimisation d'un portefeuille en finance.

2.3.1 Exemple

Chaque investisseur sait qu'il y a un compromis à faire entre le risque et le rendement sur investissement. Afin d'augmenter le retour espéré, un investisseur doit être prêt à tolérer des risques plus importants. La théorie de gestion du portefeuille concerne la modélisation de ce compromis pour un ensemble de n investissements potentiels ayant chacun un rendement $r_i, i = 1, 2, \cdots, n$.
Les rendements ne sont pas connus d'avance et donc supposés être des variables aléatoires gaussiennes, caractérisées par leur espérances $\mu_i = E[r_i]$ et leurs variances $\sigma_i^2 = E[(r_i - \mu_i)^2]$. Une variance plus grande implique un investissement plus risqué.

Un investisseur compose son portefeuille en attribuant une proportion x_i de capitaux disponibles dans l'investissement i. Supposons que tous les capitaux sont investis et que l'on n'a pas le droit de vendre à perte, les contraintes sont :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x \geq 0, \quad x = (x_1, \cdots, x_n)^T.$$

Le rendement sur le portefeuille est donné par

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i.$$

Afin de mesurer la désirabilité du portefeuille, on a besoin d'obtenir des mesures de rendement espéré et de la variance. Le rendement espéré est simplement

$$E[R] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i E[r_i] = x^T \mu,$$

où $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$.
Les contraintes/corrélations sont définies par

$$\rho_{ij} = \frac{E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)]}{\sigma_i \sigma_j},$$

et la variance totale du portefeuille est :

$$[(R - E(R))^2] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = x^T D x,$$

où la matrice de variance-covariance D est une matrice carrée symétrique d'ordre n, définie positive et $d_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n$. Nous cherchons les portefeuilles pour lesquels le rendement $x^T \mu$ est grand, tandis que la variance du portefeuille $x^T D x$ est petite. On aboutit au problème du portefeuille suivant :

$$\begin{cases} \min \ \frac{1}{2} x^T D x + c^T x, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où D est une matrice carrée symétrique d'ordre n, x et c sont des vecteurs de $\Re^n$,
$b = (b_1, \cdots, b_m)^T$ est un vecteur de $\Re^m$ et A est une matrice d'ordre $(m \times n)$. Dans le cas de l'exemple donné ci-dessus, on a

$$D = (d_{ij}) = (\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}),\ m = 1, \quad A = (1, \cdots, 1), \quad b = 1, \quad c = -\mu.$$

2.3.2 Minimisation quadratique avec contraintes d'égalités

Les problèmes de minimisation quadratique avec des contraintes d'égalités sont formulés comme suit :

$$\min F(x) = \frac{1}{2} x^T D x + c^T x, \tag{2.4}$$

sous les contraintes suivantes :

$$x \in S = \{x \in \Re^n : g_i(x) = A_i^T x - b_i = 0, i \in I = \{1, 2, \cdots, m\}\}, \tag{2.5}$$

où D est une matrice carrée symétrique d'ordre n, x et c sont des vecteurs de $\Re^n$, $b = (b_1, \cdots, b_m)^T$ est un vecteur de $\Re^m$ et A est une matrice d'ordre $(m \times n)$, formée des vecteurs colonnes et des vecteurs lignes suivants :

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n); \quad A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix}, \; g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}.$$

Tout vecteur x vérifiant les égalités (2.5) est appelé solution réalisable du problème (2.4)-(2.5).

Remarque 2.3.1. *Pour que l'ensemble des solutions réalisables S ne soit pas vide ou ne soit pas réduit à un point isolé, on considère que $rang A = m < n$.*

Définition 2.3.1. La fonction $\mathcal{L}(x, \lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ est appelée fonction de Lagrange associée au problème de minimisation de F sur S, où le vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \Re^m$, est appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 3. *[15](condition nécessaire d'optimalité)*
Si x^* est un minimum local (ou global) pour le problème (2.4)-(2.5), alors il existe un vecteur
$\lambda^* \in \Re^m$, tel que

$$\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*, \lambda^*) = 0 \;\; et \;\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0. \tag{2.6}$$

Remarque 2.3.2. *Un couple (x^*, λ^*) vérifiant (2.6) est dit point stationnaire de la fonction de Lagrange.*

Le système (2.6) nous donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*} = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Dx^* + c + A^T \lambda^* = 0, \\ Ax^* = b. \end{cases} \tag{2.7}$$

En écrivant ce système de $(n+m)$ équations à $(n+m)$ inconnues sous forme compacte, on obtient :

$$\begin{pmatrix} D & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

L'expression (2.8) peut être réécrite sous une autre forme, utile pour le calcul de x^* en posant $x^* = x + p$, où x est une estimation de la solution, et p est le pas désiré. Avec la nouvelle variable p, on aura

$$\begin{pmatrix} D & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \lambda^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

où

$$r = Ax - b, \quad g = Dx + c, \quad p = x^* - x.$$

On appelle la matrice (2.9) du système matrice de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Cette matrice est non singulière si A est de rang complet en lignes et si la matrice hessienne réduite $Z^T D Z$ est définie positive, où Z est une matrice d'ordre $n \times (n-m)$, de rang complet, tel que $AZ = 0$ (une base du noyau de A).

2.3.3 Minimisation quadratique avec contraintes d'inégalités

Le problème de programmation quadratique avec des contraintes linéaires du type inégalités se formule ainsi :

$$\min F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x, \tag{2.10}$$

o*ù* l'ensemble des contraintes est le suivant :

$$S = \{x \in \Re^n : g_i(x) = A_i^T x - b_i \leq 0, \quad i \in I = \{1, 2, \cdots, m\}\}. \tag{2.11}$$

Tout vecteur x vérifiant les inégalités (2.11) est appelé solution réalisable du problème (2.10)-(2.11)

Définition 2.3.2. L'ensemble des indices actifs (ou saturés) au point x est formé des indices i qui vérifient $g_i(x) = 0$. Il est noté :

$$I_a = I_a(x) = \{i \in I : g_i(x) = 0\}. \tag{2.12}$$

Définition 2.3.3. Le vecteur $d \in \Re^n$, $d \neq 0$, est appelé direction admissible en un point $x \in S$, s'il existe un réel $\alpha > 0$, tel que

$$x + \theta d \in S, \ \forall \theta \in [0, \alpha].$$

Si x est un point intérieur, alors toute direction est admissible.

Lemme 2.3.1. *Si x^* est un minimum local de F sur S, alors pour toute direction d admissible en x^*, on a :*

$$d^T \nabla F(x^*) \geq 0,$$

où

$$\nabla F(x^*) = g(x^*) = Dx^* + c.$$

Pour formuler la condition nécessaire d'optimalité, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.3.2. *(Farkas)*
Soit $(m+1)$ vecteurs de l'espace $\Re^n$: $c, A_i, \ 1 \leq i \leq m, \ m < n$.
Si pour tout vecteur x vérifiant $A_i^T x \leq 0, \ 1 \leq i \leq m$, on a : $c^T x \leq 0$, alors il existe des coefficients $\lambda_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq m$, tels que

$$c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i.$$

Lemme 2.3.3. *[15] Dans les contraintes (2.11), un vecteur $d \in \Re^n$ est une direction admissible au point x^*, si et seulement si*

$$A_i^T d \leq 0, \ i \in I_a(x^*). \tag{2.13}$$

Ainsi, le lemme de Farkas permet d'établir le théorème de Karush-Kuhn-Tucker.

Théorème 4. *[15](condition nécessaire)*
Si x^* est un minimum local (ou global) du problème (2.10)-(2.11), alors il existe $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*) \geq 0$, tel que :

(i) $\nabla F(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* A_i = 0$ *(condition de stationnarité).*

(ii) $\lambda_i^*(A_i^T x^* - b_i) = 0, \quad i \in I$ *(condition de complémentarité).*

2.4 Minimisation convexe

Définition 2.4.1. On dit qu'un problème de programmation mathématique est convexe (strictement convexe), s'il consiste à minimiser une fonction convexe (strictement convexe) sur un domaine convexe.

L'étude des problèmes convexes et des algorithmes de résolution correspondants est l'objet de la programmation convexe. L'hypothèse de convexité est cruciale en optimisation. Notons que

- Les problèmes convexes sont synonymes de minimisation,
- Les problèmes convexes sont les bons problèmes de la théorie : ceux pour lesquels il existe des algorithmes de résolution efficaces,
- L'hypothèse de convexité ne garantit cependant ni l'existence ni l'unicité d'une éventuelle solution.

Pour tout problème de programmation convexe, nous avons les propositions suivantes :

Proposition 1. *Soit f une fonction convexe définie sur un ensemble convexe C de $\Re^n$. Alors l'ensemble M des points où f atteint son minimum est convexe.*

Proposition 2. *Tout problème strictement convexe admet au plus une solution.*

Proposition 3. *Soit une fonction convexe $f : C \subset \Re^n \longrightarrow \Re$. Alors tout minimum local est un minimum global.*

Proposition 4. *Si la fonction f est strictement convexe, alors son minimum global est atteint en un seul point x^*.*

Considérons d'abord le problème sans contraintes, où f est une fonction convexe de classe C^1.

Théorème 5. *[15] Soit f une fonction convexe continûment différentiable sur $\Re^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x^* est un minimum global de f sur $\Re^n$,*

(ii) *x^* est un minimum local de f sur $\Re^n$,*

(iii) *x^* est un point stationnaire de f, i.e, $\nabla f(x^*) = 0$.*

Remarque 2.4.1. *Dans le cas convexe, la stationnarité à elle seule constitue une condition nécessaire et suffisante de minimalité globale.*

Considérons maintenant le problème avec contraintes, donné sous forme de (2.10)-(2.11).

Théorème 6. *[15] Soit (x^*, λ^*) un couple de vecteurs vérifiant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker suivantes :*

(i) $\nabla \mathcal{L}_x(x^*, \lambda^*) = \nabla F(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* A_i = 0,$

(ii) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad i \in I.$

Si $D \geq 0$, alors le vecteur x^* constitue un minimum global de F sur S.

Ainsi, les conditions de KKT sont donc à la fois des conditions nécessaires et suffisantes de minimalité (c'est le théorème de KKT-convexe).

2.5 Dualité en optimisation convexe

Le concept de la dualité revient souvent dans la littérature sur la programmation mathématique. Le but est de trouver une formulation alternative équivalente du problème de programmation mathématique, qui convient le plus à la pratique ou qui a une signification théorique importante.

Le problème original est dit problème primal et le problème transformé est le problème dual. Souvent les variables dans le problème dual peuvent être interprétées comme des multiplicateurs de Lagrange pour le cas linéaire et prennent la valeur de λ^* comme solution duale, où λ^* est le multiplicateur associé à la solution optimale primale x^*. Cependant, dans le cas non linéaire, il existe toujours une fonction objectif (souvent reliée à la fonction de Lagrange) qui doit être optimisée. Ici, on traitera de la dualité associée à un problème de programmation convexe comme problème primal. Il est important de remarquer que si le problème primal n'est pas convexe, alors le problème dual peut très bien ne pas avoir de solution à partir de laquelle la solution primale peut être déduite. Donc ce n'est pas possible d'appliquer la dualité comme technique générale dans le but de rechercher une solution.

Nous allons par conséquent nous contenter d'introduire des résultats de base de la théorie de la dualité en programmation convexe.

Définition 2.5.1. (Problème primal)
On définit un problème primal comme un problème de minimisation qui consiste à trouver un vecteur x^* tel que

$$(PCP)\begin{cases} f(x^*) = \min\limits_{s} f(x), \\ x^* \in S = \{x \in \Re^n : g(x) \leq 0\}, \end{cases}$$

où f est une fonction réelle convexe, de classe C^1 sur $\Re^n$, et g est une fonction vectorielle convexe de classe C^1, définie de $\Re^n$ dans $\Re^m$, avec $g = (g_1, \cdots, g_m)^T$.

Définition 2.5.2. (Problème dual)
On définit le problème dual de (PCP) comme un problème de maximisation qui consiste à trouver deux vecteurs $x^* \in \Re^n$ et $\lambda^* \geq 0$, tels que

$$(PCD)\begin{cases} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = \max\limits_{V} \mathcal{L}(x, \lambda), \\ (x^*, \lambda^*) \in V = \{(x, \lambda) \in \Re^n \times \Re^m : \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0, \lambda \geq 0\}, \end{cases}$$

où $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ est la fonction de Lagrange associé à f.

Nous avons alors les théorèmes de la dualité suivants

Théorème 7. *(Théorème de la dualité faible)(Wolfe 1961)*
Soient $f(x)$ et $\mathcal{L}(x, \lambda)$ les fonctions objectives respectivement des problèmes primal et dual. On a alors

$$\mathcal{L}(x, \lambda) \leq f(\bar{x}), \quad \forall (x, \lambda) \in V, \quad \forall \bar{x} \in S.$$

Théorème 8. *(Théorème de la dualité forte)(Wolfe 1961)*
Soit x^* une solution optimale du problème primal (PCP). Alors il existe $\lambda^* \in \Re^m, \lambda^* \geq 0$, tel que le couple (x^*, λ^*) est une solution optimale du problème dual (PCD) et on a

$$f(x^*) = \mathcal{L}(x^*, \lambda^*).$$

2.6 Méthodes de résolution d'un programme quadratique convexe (PQC)

Durant les dernières années 1950, beaucoup d'algorithmes ont été conçus pour résoudre des problèmes quadratiques convexes. Il existe plusieurs méthodes de résolution des problèmes de programmation quadratique convexe, parmi elles, citons :

Méthode d'activation des contraintes (ASM :Active Set Method)

C'est une méthode classique, développée au début des années soixante [27, 22] pour la résolution des problèmes de programmation linéaire et quadratique. Elle s'applique pour des problèmes d'optimisation avec des contraintes linéaires de type inégalités ou mixtes (égalités et inégalités).
La première méthode est mise au point par Fletcher en 1971 [26], par la suite d'autres auteurs ont fait des raffinements numériques à cette dernière tels que Gill et Murray en 1978 [23] ainsi que Gould en 1991 [17]. Goldfarb et Idnani en 1983 ont développé la méthode duale pour le cas des programmes quadratiques strictement convexes, tandis que Boland [21] l'a généralisée en 1997 pour le cas convexe. Le principe général de la méthode consiste à écarter temporairement un certain nombre de contraintes d'inégalités et de résoudre à chaque itération un problème avec uniquement des contraintes d'égalités, correspondant aux contraintes actives. Par la suite, l'ensemble des indices actifs est ajusté en ajoutant ou / et en supprimant une contrainte à la fois jusqu'à l'obtention de la solution optimale.
Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x, \\ A_i^T x = b_i, \quad i \in \varepsilon \\ A_i^T x \leq b_i, \quad i \in \mathcal{I} \end{cases} \tag{2.14}$$

où

- $D = (d_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n)$ est une matrice carrée symétrique d'ordre n semi-définie positive,
- $x,\ c$ sont des vecteurs de $\Re^n$,
- $b = (b_1, \cdots, b_m)^T$ est un vecteur de $\Re^m$,
- $I = \varepsilon \cup \mathcal{I} = \{1, \cdots, m\}$.

Avant de présenter la méthode, on rappelle les conditions d'optimalité de Lagrange.

Critère d'optimalité

La fonction de Lagrange associée au problème (2.14) est la suivante :

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x + \sum_{i\in I} \lambda_i (A_i^T x - b_i), \tag{2.15}$$

où

$\lambda = (\lambda_i,\ i \in I)$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux contraintes du problème.
Un point x^* est un minimum pour le problème (2.14) si et seulement si il existe un vecteur $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$, vérifiant :
$(Dx^* + c) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* A_i = 0,$
$A_i^T x^* - b_i = 0, \ \ pour \ \ tout \ \ i \in \varepsilon,$
$A_i^T x^* - b_i \leq 0, \ \ pour \ \ tout \ \ i \in \mathcal{I},$
$\lambda_i^* \in \Re, \ \ i \in \varepsilon, \ \ \lambda_i^* \geq 0 \ \ , i \in \mathcal{I},$
$\lambda_i^*(A_i^T x^* - b_i) = 0, \ \ i \in \mathcal{I},$

Itération de la méthode

A une itération donnée de l'algorithme, soit x la solution courante et I_a l'ensemble d'indices actifs correspondant. Une itération de l'algorithme consiste à exécuter les étapes suivantes :

(1) On résout un sous-problème quadratique avec contrainte d'égalités, correspondant à l'ensemble d'indices actifs I_a :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x, \\ A_i^T x = b_i, \quad i \in I_a, \end{cases} \tag{2.16}$$

où $I_a = \varepsilon \cup \{i \in \mathcal{I} : A_i^T x = b_i\}$. La solution optimale pour (2.16) est de la forme $\bar{x} = x + p$, où p est une certaine correction (direction de descente) de la solution courante x. Alors le n-vecteur p est calculé de telle sorte que la fonction objectif diminue. Par conséquent, le programme quadratique à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \min F(p) = \frac{1}{2}p^T Dp + g^T p, \\ A_i^T p = 0, \quad i \in I_a, \end{cases} \tag{2.17}$$

où
$g = Dx + c$ est le gradient de F au point x.

Pour la résolution de ce problème, on envisage deux cas possibles :

* Si $p = 0$, aller à l'étape (2)
* Sinon ($p \neq 0$), posons :

$$\bar{x} = x + \theta p, \quad 0 < \theta \leq 1. \tag{2.18}$$

Le pas θ doit être choisi de telle sorte que la nouvelle solution soit réalisable. Pour $i \in I_a$, n'importe quelle valeur de θ va maintenir la faisabilité de x^*. Par contre, toutes les contraintes non actives (non saturées) doivent vérifier :

$$A_i^T(x + \theta p) \leq b_i, \ \forall i \in I \setminus I_a.$$

Par conséquent, la valeur optimale θ^0 est la suivante :

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{i_0}\}, \tag{2.19}$$

où

$$\theta_{i_0} = \min\{\theta_i, i \in I \setminus I_a\}, \quad avec \ \ \theta_i = \begin{cases} \frac{b_i - A_i^T x}{A_i^T p}, si \ \ A_i^T p > 0, \\ \infty, \qquad si \ \ A_i^T p \leq 0, \quad i \in I \setminus I_a. \end{cases}$$

– Si $\theta^0 = 1$, alors dans ce cas l'ensemble de travail ne change pas, alors on aura :

$$\bar{x} = x + p, \qquad \bar{I}_a = I_a.$$

– Sinon, la contrainte i_0 est ajoutée à l'ensemble de travail, donc le nouveau ensemble de travail est :

$$\bar{I}_a = I_a \cup \{i_0\}.$$

(2) Cette étape consiste à vérifier si la nouvelle solution obtenue $\bar{x}$ est optimale ou non pour le problème (2.14). Ceci se fait en calculant les multiplicateurs de Lagrange associés au problème (2.16). Rappelons que $\lambda_i = 0$ pour $i \notin I_a$, les autres composantes du vecteur λ ont été calculées lors de la résolution du problème (2.16).

(a) Si $\lambda_i \geq 0, \ \forall i \in \mathcal{I} \bigcap I_a$, alors la condition d'optimalité de KKT est remplie pour le problème (2.16). Donc, la solution optimale est trouvée, et on arrête l'algorithme.

(b) Sinon, il existe une composante du vecteur λ vérifiant $\lambda_{i_1} < 0, \ i_1 \in \mathcal{I} \bigcap I_a$. Alors, on peut améliorer la valeur de la fonction objectif en supprimant la contrainte i_1 de l'ensemble de travail. Si plusieurs contraintes ne vérifient pas le critère d'optimalité, alors la contrainte à supprimer doit vérifier la relation suivante :

$$\lambda_{i_1} = \min\{\lambda_i : \lambda_i < 0, i \in \mathcal{I} \cap I_a\}. \tag{2.20}$$

Donc le nouveau ensemble de travail est $\bar{I}_a = I_a \setminus \{i_1\}$. Ce processus de résolution est répété jusqu'à ce que l'optimum soit trouvé.

1 **Algorithme :** Algorithme d'activation des contraintes

(1) Soit x une S.R du problème (2.14). Calculer p en résolvant le programme quadratique (2.17).
Si $p = 0$, alors aller à (3).
Sinon, on pose :
$$\bar{x} = x + \theta^0 p,$$
où θ^0 est défini par la relation (2.19). Aller à (2).

(2) Changement de l'ensemble actif.
Si $\theta^0 = \theta_{i_0} < 1$ alors :
$$\bar{I}_a = I_a \cup \{i_0\}.$$
Sinon $\theta^0 = 1$, on pose :
$$\bar{I}_a = I_a.$$
Aller à (3).

(3) Calculer les multiplicateurs de Lagrange de (2.16).
Si $\lambda_i \geq 0,\ \forall i \in \mathcal{I} \cap I_a$, alors l'algorithme s'arrête, avec $\bar{x}$ solution optimale.
Sinon, déterminer
$$\lambda_{i_1} = \min\{\lambda_i : \lambda_i < 0, i \in \mathcal{I} \cap I_a\}.$$
On pose :
$$\bar{I}_a = I_a \setminus \{i_1\}. \textit{ Aller à } (1).$$

Méthode des points intérieurs :

Les méthodes des points intérieurs sont apparues dans les années soixante, (notamment le livre de Fiacco et McCormick [2]). C'est dans ce livre que le terme de points intérieurs sera introduit. Les itérés générés par ces méthodes sont strictement réalisables : ils restent à l'intérieur du domaine réalisable, d'*où* le nom donné à ces méthodes.

Les méthodes des points intérieurs forment une classe d'algorithmes qui permettent de résoudre des problèmes d'optimisation mathématique. Elles sont polynomiales lorsqu'on les applique aux problèmes d'optimisation linéaire, quadratique convexe, et plus généralement aux problèmes de minimisation convexe, pourvu que l'on dispose d'une barrière auto-concordante représentant l'ensemble admissible, calculable en temps polynomial (ce n'est pas toujours le cas, car certains problèmes de maximisation convexe sont NP-difficiles).

Les méthodes des points intérieurs se répartissent en plusieurs familles :

– Les méthodes "affine scaling" (optimisation sur des ellipsoïdes).
– Les méthodes de réduction du potentiel (notion de barrière, chemin central, relaxation).

L'intérêt pour ces méthodes principalement développées depuis des années 1960 [2], a connu un renouveau pour les problèmes non linéaires et a ouvert un nouveau domaine pour les problèmes linéaires. La distinction entre la programmation linéaire et non linéaire n'était plus aussi nette. Den Hertog (1994) a classé les méthodes des points intérieurs en quatre catégories :

– Méthodes de chemin central.
– Méthodes affines et mise à l'échelle.
– Méthodes projectives avec potentiel.
– Méthodes affines avec potentiel.

Méthode du simplexe quadratique de Wolfe (1959) :

C'est une modification de la méthode simplexe [7, 8, 25]. Son principe consiste à résoudre le système d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker(KKT), en ajoutant la condition de complémentarité. L'algorithme de la méthode nécessite une solution réalisable de départ, et elle est obtenue en utilisant la première phase du simplexe.

Les algorithmes suivants sont élaborés pour le PQC suivant :

$$\begin{cases} \min \quad F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x, \\ Ax = b, x \geq 0. \end{cases}$$

1 **Algorithme :** Algorithme de Wolfe

1 Introduire les données, D, A, b, c ;

Appliquer les conditions de KKT au problème ;

Déterminer les équations de KKT ;

2 Ecrire le programme linéaire de première phase ;

Introduire les variables artificielles v_i ;

Construire la matrice des contraintes A ;

Construire le vecteur des seconds membres b ;

Construire le vecteur des coûts c ;

Construire la fonction objectif $Z(x,\ \lambda,\ \delta,\ v)$;

3 Initialiser le vecteur solution (x, λ, δ, v) ;

Déterminer l'ensemble des indices J_B et J_N ;

Extraire les éléments de base $x_B,\ c_B,\ A_B$;

4 Calculer le vecteur des potentiels $u^T = c_B^T A_B^{-1}$;

Calculer le vecteur des coûts réduits $E_N^T = u^T A_N - c_N^T$;

si $E_N \geq 0$ **alors**

la solution actuelle est optimale ;

sinon

Aller à l'étape 5 ;

finsi

5 Déterminer la variable qui entre dans la base tout en vérifiant la condition $\delta_j x_j = 0,\ j = \overline{1, n}$;

Déterminer la variable qui sort de la base ;

Mettre à jour $A_B,\ x_B,\ c_B,\ J_B,\ J_N$ et aller à l'étape 4 ;

Méthode directe de support :

Cette méthode est basée sur le concept de support, généralisée ensuite en méthode adaptée par R. Gabassov et F.M. Kirillova [27, 28]. Ces méthodes sont intermédiaires entre les méthodes d'activation des contraintes et celles de points intérieurs.

---

1 **Algorithme :** Algorithme de support quadratique

A. Données :

Soit $\{x, J_p\}$, une SRS telle que $J_p = \{J_B, J_P\}$, $\epsilon \geq 0$ est un nombre quelconque, avec $g = Dx + c$.

(1) Initialisation :

Déterminer D, A, c, b,

Choisir la précision ε, la solution initiale x, J_B, J_N, A_N et on pose $J_S = \emptyset$ pour la première itération.

Calculer le vecteur des estimations : $E_N^T = g^T - u^T A_N$, avec : $u^T = g_B^T A_B^{-1}$.

(2) Test d'optimalité de la SRS $\{x, J_P\}$: **Si** $(E_N \geq 0)$ **alors**

Calculer $\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_N} E_j x_j$

Si $(\beta(x, J_B) \leq \varepsilon)$ **alors**
x est $\varepsilon-$optimale, et on s'arrête.
Fin
Sinon
Aller à (03).

(3) Amélioration de la SR x :

Déterminer l'ensemble des indices non optimaux J_{NNO}.

Choisir l'indice j_0, tel que : $|E_{j_0}| = \max_{j \in J_{NNO}} |E_j|$

Calculer la direction d'amélioration $l(J) = (l_B, l_S, l_{NN})$.

Calculer le pas $\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$.

Si $(\theta^0 = \infty)$ **alors**
Le problème n'est pas borné, et on arrête le processus.
Sinon Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 l$ et $F(\bar{x})$ et aller à l'étape (4)

---

(4) Test d'optimalité de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$:

Calculer $\bar{E}_N = E_N + \theta^0 M l_N$

Si $(\bar{E}_N \geq 0)$ **alors**

Calculer $\beta(\bar{x}, J_B) = \sum\limits_{j \in J_{NNO}} \bar{E}_j(\bar{x}_j)$.

Si $(\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon)$ **alors**

x est $\varepsilon-$optimale, et on s'arrête.

Sinon, aller à (05).

Si $E_N < 0$ **alors** aller directement à l'étape (5)

Finsi

(5) Changement du support :

Si $(\theta^0 = \theta_{j_0})$ **alors**

$\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_S = J_S,\ \bar{J}_P = J_P.$

Fin

Si $(\theta^0 = \theta_{j_s})$ **alors**

$\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_S = (J_S \setminus j_s),\ \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$

Fin

Si $(\theta^0 = \theta_F)$ **alors**

$\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_S = (J_S \cup j_0),\ \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$, et $\bar{E}_{j_0} = 0$.

Fin

Si $(\theta^0 = \theta_{j_1})$ **alors**

Si $\exists j_* \in J_S$ tq : $x_{j_1 j_*} \neq 0$, alors, $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_*,\ \bar{J}_S = J_S \setminus j_*$

Sinon, on pose : $\bar{J}_B := (J_B \setminus j_1) \cup j_0,\ \bar{J}_S = J_S$.

Fin

Poser $x \leftarrow \bar{x},\ J_P \leftarrow \bar{J}_P$ et aller à **(02)**.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques méthodes classiques de l'optimisation quadratique sans contraintes et avec contraintes, ainsi que les conditions d'optimalité. Nous avons revu la notion de dualité, et nous avons aussi cité quelques méthodes consacrées aux programmes quadratiques.

Chapitre 3

Modèle du portefeuille

3.1 Introduction

La théorie moderne d'un portefeuille [24] est apparue en 1952 avec la publication de l'article fondateur de Harry Markowitz [10]. En partant du postulat que le risque d'un portefeuille peut être mesuré par la variance de sa rentabilité, Markowitz explicite et formalise le dilemme fondamental de la finance moderne : obtenir une rentabilité faible mais certaine ou accepter de prendre un risque dans l'espoir d'accroire cette rentabilité. Il formalise et qualifie également l'effet de diversification selon lequel une combinaison judicieuse de nombreux actifs dans un portefeuille permet de réduire le risque total subi pour un taux de rentabilité espéré donné. Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques éléments théoriques et passer en revue un modèle d'optimisation du portefeuille.

3.2 Définitions

3.2.1 La finance

La finance est la base de l'articulation d'un système économique, car elle permet de s'assurer que toutes les décisions créent de la valeur et engendrent de la richesse. Par conséquent, la finance doit permettre à tous les individus d'accéder à un niveau de vie plus élevé .

3.2.2 L'économie

L'économie est une science sociale qui étudie la production, la répartition et la consommation des richesses d'une société. Elle consiste à consommer un minimum de moyens en vue de réaliser un maximum de profits.

3.2.3 Un marché financier

Un marché financier est un marché sur lequel des personnes physiques, des sociétés privées et des institutions publiques peuvent négocier des titres financiers, matières premières et d'autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande. Le marché financier comprend le marché primaire (produits neufs) et le marché secondaire (produits d'occasion) qui sont complémentaires.

3.2.4 Un portefeuille financier

Un portefeuille en finance désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Cela peut aussi désigner des valeurs mobilières détenues à titre d'investissement, de dépôt, de provision ou de garantie.

3.2.5 Un portefeuille efficient

Un portefeuille efficient est un portefeuille d'actifs financiers permettant d'optimiser le couple rendement /risque grâce à une diversification judicieuse.

3.2.6 Frontière efficiente

La frontière qui caractérise la courbe des contraintes s'appelle "frontière efficiente de Markowitz" et à l'intérieur de la courbe se situent tous les portefeuilles à rejeter, dits "portefeuille dominés". Cette frontière peut se concrétiser par une représentation graphique du couple rendement/risque pour chaque portefeuille d'actifs.

3.2.7 Un indice boursier

Un indice boursier est un groupe d'actions, utilisé pour évaluer un secteur, une bourse ou une économie. En général, un indice boursier est constitué des actions les plus performantes d'une bourse donnée.

3.2.8 Actif financier

Un actif financier est un titre ou un contrat, généralement transmissible ou négociable sur un marché financier qui est susceptible de produire des revenus ou un gain en capital.

3.2.9 Action

Une action est tout simplement une part de la propriété d'une entreprise. L'action représente un droit sur l'actif et le bénéfice. Plus vous achetez d'actions, plus l'intérêt que vous détenez dans l'entreprise est grand.

3.2.10 Une obligation

Une obligation est un titre de créance négociable, utilisé par les entreprises ou les Etats pour emprunter de l'argent sur les marchés financiers.

3.2.11 Rendement

Appelé aussi taux de rentabilité et il mesure l'appréciation ou la dépréciation relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs pendant un intervalle du temps.

Rendement arithmétique

La rentabilité arithmétique d'un titre i mesure la variation relative du prix de l'actif entre les instants $t-1$ et t :

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} + D_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}},$$

où :

- $P_{i,t-1}$: Le prix du titre i à l'instant $t-1$,
- $P_{i,t}$: Le prix du titre i à l'instant t,
- $D_{i,t}$: Le cash flux du titre i à l'instant t (appelé dividende dans le cas d'une action).

Rendement géométrique (logarithmique)

Il est calculé comme suit :

$$R^g_{i,t} = \ln\left(\tfrac{P_{i,t}+D_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right) = \ln(R_{i,t}+1),$$

où :

$R^g_{i,t}$ est la rentabilité géométrique du titre i à l'instant t.

3.2.12 Rendement espéré d'un portefeuille

Le rendement espéré d'un portefeuille ($E(R_p)$) est égal à la moyenne pondérée des rendements espérés des titres qui le composent :

$$E(R_p) = x_1E(R_1) + x_2E(R_2) + \cdots + x_nE(R_n) = \sum_{i=1}^{n} x_iE(R_i),$$

où : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

- x_i : Proportion des fonds investis dans le titre i,
- n : Nombre de titres inclus dans le portefeuille,
- $E(R_i)$: Rendement espéré du titre i.

3.2.13 Rendement espéré d'un titre

Le rendement espéré d'un actif financier peut être calculé à partir :

- Des probabilités subjectives par rapport au rendements possibles,
- Des rendements historiques.

Calcul du Rendement espéré à partir des probabilités subjectives

Le rendement espéré d'un titre est la moyenne pondérée des différents rendements possibles :

$$E(R) = p_1R_1 + p_2R_2 + \cdots + p_nR_n = \sum_{i=1}^{n} p_iR_i,$$

où :

- R_i est le rendement possible de l'issue i.
- p_i est la probabilité de réalisation de l'issue (évènement) i, telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Calcul du rendement espéré à partir des rendements historiques

Le rendement espéré d'un actif i est la moyenne arithmétique des rendements réalisés au cours des $T-$périodes précédentes :

$$\mu_p = \mathbb{E}(R_p) = \frac{R_{p,1} + R_{p,2} + \cdots + R_{p,T}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{p,t},$$

où :

$R_{i,t}$ est le rendement du titre à la fin de la période t.

3.2.14 Un risque financier

Un risque financier est la possibilité de perdre de l'argent à la suite d'une opération financière (sur un actif financier) ou une opération économique ayant une incidence financière (par exemple une vente à crédit ou en devises étrangères).

3.2.15 La volatilité

La volatilité est considérée comme la base de la mesure du risque des actifs financiers dans la gestion d'un portefeuille, et par définition elle mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier, durant tous les horizons (court, moyen et long terme)[1]. Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée, plus l'investissement dans ce portefeuille sera considéré comme risqué et par conséquent plus l'espérance de gain (ou risque de perte) sera important. Par contre, un portefeuille sans risque ou très peu risqué aura une volatilité très faible[31].

3.3 La théorie de Harry Markowitz

Markowitz (économiste américain, prix Nobel d'économie en 1990) a eu l'idée de mesurer la rentabilité d'un portefeuille par l'espérance de rendement et le risque par sa variance. Il postule dans sa "théorie de portefeuille" que lorsque l'on cherche à répartir son épargne entre différents placements ou types de placements, les deux critères de choix des supports d'investissement qu'il faut avoir, ce sont la rentabilité espérée du placement et le risque associé, mesuré par la variance (ou écart-type) de cette rentabilité. A partir de ces deux critères, ce qui est appelé le modèle de Markowitz fournit la répartition dite optimale des actifs, donc "le portefeuille efficace". Les deux étapes du raisonnement sont :

A. les préférences des individus admettent une représentation dans le plan espérance-variance.

B. le modèle de Markowitz permet de construire l'ensemble des portefeuilles optimaux selon ces préférences.

Le choix de ces deux critères n'a rien d'évident comme le reconnaît Markowitz lui-même et repose sur des hypothèses assez restrictives. Malgré son fondement assez fragile, l'analyse de Markowitz a connu un grand succès, car elle est intuitivement compréhensible, techniquement réalisable et donne lieu à une profusion d'applications en finance de marché et en théorie financière.

But du modèle de Markowitz

Le modèle de Markowitz vise au moyen d'une méthode mathématique à construire un portefeuille assurant :
– soit le meilleur rendement à risque donné.
– soit le plus petit risque à rendement donné.

Exemple et notations

Considérons un investisseur désirant répartir une somme initiale $W(0)$ entre n actifs financiers (action, obligation, etc). Nous supposons ses préférences représentées par l'espérance d'une fonction d'utilité μ croissante.

Chaque portefeuille est modélisé par :

· $W(t)$: la valeur du portefeuille à l'instant t,

· $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où x_i représente la part de l'investissement initial $W(0)$ affectée au $i^{\text{ème}}$ actif.

Chaque actif du portefeuille peut être acquis à la date $t = 0$ en quantité illimitée au prix unitaire $V_i(0)$. Chaque actif est caractérisé par deux variable aléatoires $V_i(t)$ et $R_i(t)$ définies sur l'ensemble $\Omega(t)$ des évènements possibles à la date t telles que :

- $V_i(t)$ est la valeur du $i^{\text{ème}}$ actif à l'instant t,
- $R_i(t)$ est la rentabilité du $i^{\text{ème}}$ actif à l'instant t, avec :

  - $V_i(t) = (1 + R_i(t)V_i(0))$, et donc
  - $R_i(t) = -1 + \frac{V_i(t)}{V_i(0)}$.

Principe du modèle de Markowitz

Entre deux portefeuilles, par leurs rendements supposés aléatoires, on retient :

· à risque identique, celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée,

· à espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible.

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres.

La courbe qui relie l'ensemble des portefeuilles efficients s'appelle la frontière efficiente. En dessous de cette courbe, tous les portefeuilles rejetés sont dits dominés.

Sélection d'un portefeuille

Soit R_P le rendement du portefeuille composé de n actifs caractérisés par leur rendements respectifs $R_1, R_2, \cdots, R_n$. On suppose que chaque actif i entre pour une proportion x_i dans la composition du portefeuille P, c'est à dire $R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$,
où :

$$E(R_P) = E(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i).$$

$$V(R_P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j cov(x_i, x_j).$$

Nous pouvons également écrire cette dernière relation sous forme matricielle, si nous notons x le vecteur des parts d'actifs et x^T le même vecteur transposé :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

et $(d_{ij}, \ 1 \leq i, j \leq n)$ la matrice de variance-covariance :

$$D = (d_{ij}) = \begin{bmatrix} Var(R_1) & cov(R_1, R_2) & \cdots & cov(R_1, R_n) \\ cov(R_2, R_1) & Var(R_2) & \cdots & cov(R_2, R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(R_n, R_1) & cov(R_n, R_2) & \cdots & Var(R_n) \end{bmatrix},$$

matrice qui se simplifie directement en :

$$D = (d_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix},$$

où $\sigma_{ij} = cov(R_i, R_j)$. Nous obtenons finalement la relation de la variance sous la forme suivante

$$cov(R_i, R_j) = cov(R_j, R_i),$$

et que :

$$cov(R_j, R_j) = V(R_j).$$

Nous pouvons simplifier et écrire la variance sous la forme algébrique suivante :

$$V(R_P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j cov(R_i, R_j) = x^T Dx.$$

Sélectionner un portefeuille revient à choisir celui satisfaisant la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ et présentant les propriétés suivantes, telles que

- $E(R_P)$ soit maximal,
- $V(R_P)$ soit minimal.

Il s'agit donc d'un problème de minimisation d'une fonction économique sous contraintes. Soit F cette fonction économique. Dans le cas général *où* on peut vendre avec perte, le portefeuille à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \min \quad F(x) = V(R_P) - \beta E(R_P), \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

où β est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs. Autrement dit, il s'agit du taux marginal de substitution du rendement et du risque qui exprime dans quelle mesure l'investisseur est d'accord pour supporter un risque accru en contrepartie d'un accroissement de son espérance de rendement.

En utilisant le lagrangien, le problème de minimisation sous contrainte consiste à déterminer le minimum de la fonction L définie par :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j cov(R_i, R_j) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1).$$

Cette fonction de $2n+1$ variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)$ est minimisée, si sa dérivée partielle par rapport à chacune de ces variables est nulle, ce qui revient à poser les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 cov(R_1, R_1) + 2x_2 cov(R_1, R_2) + \cdots + 2x_n cov(R_1, R_n) + \lambda - \beta E(R_1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1 cov(R_2, R_1) + 2x_2 cov(R_2, R_2) + \cdots + 2x_n cov(R_2, R_n) + \lambda - \beta E(R_2) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 2x_1 cov(R_n, R_1) + 2x_2 cov(R_n, R_2) + \cdots + 2x_n cov(R_n, R_n) + \lambda - \beta E(R_n) = 0 \\ \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1 = 0, \\ \lambda \in \Re, x_j \in \Re, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} 2x_1\sigma_1^2 + 2x_2\sigma_{12} + \cdots + 2x_n\sigma_{1n} + \lambda = \beta E(R_1) \\ 2x_1\sigma_{21} + 2x_2\sigma_2^2 + \cdots + 2x_n\sigma_{2n} + \lambda = \beta E(R_2) \\ \vdots \\ 2x_1\sigma_{n1} + 2x_2\sigma_{n2} + \cdots + 2x_n\sigma_n^2 + \lambda = \beta E(R_n) \\ \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ \lambda \in \Re, x_j \in \Re, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

L'écriture matricielle sera alors :

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \cdots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & \cdots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \cdots & 2\sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta E(R_1) \\ \beta E(R_2) \\ \vdots \\ \beta E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \cdots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & \cdots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \cdots & 2\sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} \beta E(R_1) \\ \beta E(R_2) \\ \vdots \\ \beta E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le système d'équations à résoudre peut se résumer sous la forme $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Par conséquent $\tilde{x} = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$.

Le problème auquel on s'intéresse dans ce travail est un cas particulier du problème ci-dessus, cette différence réside dans l'ajout d'une deuxième contrainte dite de nonnégativité qui se traduit par l'absence de vente (l'investisseur ne vend aucun actif). Le problème prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \min\{x^T\Sigma x - \beta\mu^T x\}, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \ \forall i = 1, \cdots, n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ici, β est le paramètre d'aversion au risque $0 \leq \beta \leq +\infty$. Si l'on résout le problème (3.2) en variant β entre 0 et $+\infty$, à partir des résultats obtenus on peut tracer une courbe qui représente la relation entre le rendement et le risque du portefeuille. On l'appelle la frontière efficiente (voir la Figure (3.1)). Ce problème est un problème d'optimisation quadratique que nous essayerons de résoudre par la méthode d'activation des contraintes qui sera introduite dans le chapitre suivant.

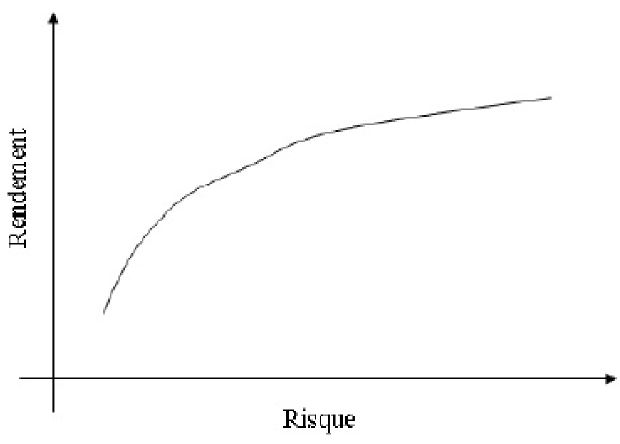

FIGURE 3.1 – Exemple de la fonction efficiente.

Pour obtenir une solution, on doit tenir compte des deux modèles à la fois et avoir un rendement minimal et un risque maximal à ne pas dépasser.

On constate ainsi, que l'optimisation multi-critère n'est plus une option mais bien une obligation pour une bonne modélisation économique.

3.4 Conclusion

Nous avons évoqué dans ce chapitre un modèle d'optimisation d'un portefeuille. Ces modèles sont du type Moyenne-Variance. En plus de la théorie classique de Markowitz, nous avons vu quelques éléments théoriques de la gestion d'un portefeuille financier.

Chapitre 4

Application de la programmation quadratique convexe dans la gestion d'un portefeuille

4.1 Introduction

Plusieurs problèmes peuvent se modéliser sous forme d'un Programme Quadratique dans les modèles économiques et financiers. Le modèle de Markowitz classique est un problème quadratique convexe. Dans ce chapitre, nous traitons une application, concernant un problème de gestion d'un portefeuille. On sait qu'elle a pour but de maximiser le rendement pour un niveau fixé du risque ou de minimiser le risque pour un rendement fixé.

Notre problème consiste à minimiser une fonction objectif qui est sous forme quadratique. Nous l'avons transformé en un problème quadratique paramétrique, et nous allons le résoudre par la méthode d'activation des contraintes (ASM) qui nous a permis de déterminer la solution optimale et la frontière efficiente.

4.2 Modélisation du problème

Considérons le problème d'optimisation du portefeuille suivant :

$$\begin{cases} \min \quad F(x) = \frac{1}{2}x^T\Sigma x - \beta\mu^T x \\ e^T x = 1, \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où :

- Σ est une matrice de variance-covariance symétrique d'ordre n et semi-définie positive .
- μ est le vecteur des rendements espérés,
- x est le vecteur des proportions investies,
- e le vecteur des uns (vector of ones),

Ce problème est dit paramétrique, car la solution de celui-ci dépend du paramètre d'aversion au risque β qui varie selon le degré de tolérance de l'investisseur. En effet, pour une valeur $\beta = 0$, ce problème consiste à trouver le portefeuille de variance minimale.

4.2.1 Résolution du problème

Lorsque $n = 3$ le problème (4.1) s'ecrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x, & \\ -x_1 \leq 0, & (1) \\ -x_2 \leq 0, & (2) \\ -x_3 \leq 0, & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. & (4) \end{cases} \tag{4.2}$$

où

- $\Sigma = D = (d_{ij}) = (\sigma_i \sigma_j \rho_{ij})$,
- $c^T = -\beta \mu^T$.

Le Problème (4.2) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x, \\ A^1 x \leq b_1, \\ A^2 x = b_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Notos que, $A^2x = b_2$ est équivalent à $A^2x \leq b_2$ et $-A^2x \leq -b_2$, alors (4.3) peut s'ecrire :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{1}{2}x^T Dx + c^T x, \\ \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ -A^2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Pour commencer la résolution, on a besoin du théorème et des conditions d'optimalité suivants :
Les conditions d'optimalité pour le problème (4.3) sont un cas particulier des conditions de K.K.T pour les problèmes de programmation non linéaire, λ_i s'appelle le multiplicateur associé à la contrainte i .

- La $1^{ère}$ condition :
  $A^1 x^0 \leq b_1$, $A^2 x^0 = b_2$, (4.3.1)

- La $2^{ème}$ condition :
  $-\nabla F(x^0) = (A^1)^T \lambda_1 + (A^2)^T \lambda_2 - (A^2)^T \lambda_3 = (A^1)^T \lambda_1 + (A^2)^T v$, (4.3.2)
  où $v = \lambda_2 - \lambda_3$

Où

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = (0,0,0)^T, \quad b_2 = (1),$$

Théorème 9. *[13] x^0 est optimal pour (4.3) si et seulement si x^0 satisfait les conditions d'optimalité* (4.3.1) *et* (4.3.2).

L'indice SP500

L'idice $SP500$ pour Standard and Poor's 500 est construit à partir de 500 grandes entreprises cotées sur les bourses américaines. Il est considéré comme l'indice de référence en ce qui concerne les actions de grandes capitalisations aux États-Unis et fait partie des indices les plus largement utilisés, au même titre que le Dow Jones Industrial Average ou encore le Russell 2000 en ce qui concerne les petites et moyennes entreprises.

Cas pratique

On considère un portefeuille financier composé de 3 titres ($n = 3$) de l'indice $SP500$ d'une bourse américaine (voir **Annexe** 1). Les données sont extraites du site Yahoo finance qui présentent les prix journaliers de ces titres dans une période de 3 ans (du 20/09/2017 jusqu'au 18/09/2020). On a calculé :

– Les rendements de chaque titre (**Annexe** 2 représente un échantillon).

– Le rendement espéré (moyenne) de chaque titre de la manière suivante :

$$\mu_p = \frac{1}{752} \sum_{i=1}^{752} R_{pi}, \quad p = 1, 2, 3. \tag{4.4}$$

Et on a obtenu le résultat suivant :

Titre	A	B	C
Rendement	0,00158151	0,00081827	0,00126578

TABLE 4.1 – Les rendements espérés des 3 titres

– La matrice de variance-covariance entre les différents titres.

Titre	A	B	C
A	0,00063458	0,00030703	0,00044004
B	0,00030703	0,00045383	0,0003479
C	0,00044004	0,0003479	0,00081485

TABLE 4.2 – La matrice variance-covariance des 3 titres

```

%Exempleportefeuille1.m
n = 3;
A = [ -1 0 0; 0 -1 0; 0 0 -1; 1 1 1 ];
b = [ 0 0 0 1 ]';
data=xlsread('Rendement.xlsx');
muu=data(1,1:n);
mu=muu'
data=xlsread('Covariance.xlsx');
BigC=data(1:n,1:n)
m = 3;  q = 1;
x0 = [0.2 0.2 0.6 ]';
checkdata(BigC,1.e-6);
checkconstraints(A,b,x0,m,q,n);
betalow = .0;  betainc = 0.01;  betahigh = 2.0
ii = 0;
for beta = betalow:betainc:betahigh;
  c = - beta * mu;
  [minvalue,xj,Ij,lambdaj] = QPSolver(A,b,BigC,c,n,m,q,x0);
  beta
  xjprint = xj'
  mup = mu' * xj
  if beta == 0.
      mupmin = mup;
  end
  sigma2p = xj' * BigC * xj
  ii = ii + 1;
  sig2vec(ii) = sigma2p;
  mupvec(ii) = mup;
  muplowvec(ii) = 2*mupmin - mup;
  Ij
end
plot(sig2vec,mupvec)
xlabel(' Variance du portefeuille \sigma_p^2')
ylabel('Moyenne du portefeuille \mu_p')
```

FIGURE 4.1 – Le code MATLAB

Certains résultats de l'exécution de "Exempleportefeuille1.m" sont indiqués dans le tableau suivant :

β	μ_p	σ_p^2	La solution optimale			L'ensemble actif
0	0.0011	4.0614×10^{-4}	0.2739	0.6554	0.0707	4
0.20	0.0013	4.5561×10^{-4}	0.5816	0.3198	0.0985	4
0.28	0.0014	5.0311×10^{-4}	0.7048	0.1856	0.1097	4
0.39	0.0015	5.9426×10^{-4}	0.8740	0.001	0.125	4
0.40	0.0015	5.9612×10^{-4}	0.8801	0	0.1199	4, 2
0.48	0.0016	6.0845×10^{-4}	0.9245	0	0.0755	4, 2
0.55	0.0016	6.2107×10^{-4}	0.9633	0	0.0367	4, 2
0.61	0.0016	6.3326×10^{-4}	0.9966	0	0.0034	4, 2
0.62	0.0016	6.3458×10^{-4}	1	0	0	4, 2, 3

TABLE 4.3 – Les solutions optimales avec différentes valeurs de β

L'ensemble complet des résultats peut être obtenu en exécutant "Exempleportefeuille1.m".

A partir du tableau, nous pouvons voir que la $4^{ème}$ contrainte est toujours active pour tout β dans le tableau, car la contrainte avec l'indice 4 (la $4^{ème}$ contrainte) est la contrainte budgétaire, et c'est une contrainte d'égalité, alors elle est toujours active.
Le tableau montre aussi qu'aucune des contraintes de non négativité (avec les indices 1, 2, 3, $-x_1 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$, $-x_3 \leq 0$, respectivement) n'est active pour tout β compris entre 0 et 0.39.

Itération 0

$\beta_0 = 0$
On définit l'ensemble initial des indices actifs I_0, *où* $I_0 = \{4\}$, alors on peut définir A_0 et b_0 comme suit :

$$A_0 = (1, 1, 1) \quad et \quad b_0 = 1.$$

Le vecteur x^0 sera optimal si et seulement si x^0 avec le multiplicateur scalaire de la contrainte budgétaire, v^0, satisfont les équations linéaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} \Sigma & A_0^T \\ A_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\mu \\ b_0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

On réécrit (4.5) en séparant son côté droit en un vecteur constant et une fonction de β donnés comme suit :

$$\begin{pmatrix} \Sigma & A_0^T \\ A_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Soit

$$H = \begin{pmatrix} \Sigma & A_0^T \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

En remplaçant avec nos données, on obtient :

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0,00063458 & 0,00030703 & 0,00044004 & 1 \\ 0,00030703 & 0,00045383 & 0,0003479 & 1 \\ 0,00044004 & 0,0003479 & 0,00081485 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Notons que H_0 n'est pas singulière. La solution de (4.6) est donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^0 \\ v^0 \end{pmatrix} &= H_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \beta H_0^{-1} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{00} \\ g_{00} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} h_{10} \\ g_{10} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Avec :

$$\begin{pmatrix} h_{00} \\ g_{00} \end{pmatrix} = H_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} h_{10} \\ g_{10} \end{pmatrix} = H_0^{-1} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

En utilisant (4.10) et MATLAB, on obtient h_{00}, g_{00}, h_{10} et g_{10} pour que la solution optimale au problème donné est

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0(\beta) \\ v^0(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2739 \\ 0.6555 \\ 0.0706 \\ -0.0004 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1.5783 \\ -1.7929 \\ 0.2146 \\ 0.0011 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0.2739 \\ 0.6555 \\ 0.0706 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1.5783 \\ -1.7929 \\ 0.2146 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

De même, le vecteur complet des multiplicateurs peut s'écrire :

$$\lambda^0 = \lambda_{00} + \beta \lambda_{10}, \tag{4.12}$$

où les composantes de λ_{00} et λ_{10} correspondant aux contraintes inactives sont toutes nulles et celles qui correspondent aux contraintes actives sont obtenues à partir de v^0 et I_0, donc on obtient :

$$(\lambda^0)_4 = -0.0004 + 0.0011\beta, \tag{4.13}$$

et le vecteur complet des multiplicateurs est :

$$\lambda^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0004 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0011 \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

ou plus simplement

$$\lambda^0 = (0, 0, 0, -0.0004 + 0.0011\beta)^T. \tag{4.15}$$

Notez que dans (4.11), $(x^0)_1$ et $(x^0)_3$ sont des fonctions croissantes de β, cependant, $(x^0)_2$ est une fonction décroissante de β et elle est réduite à zéro lorsque :

$$\beta = \beta_1 = \frac{0.6555}{1.7929} = 0.365, \tag{4.16}$$

En définissant $\beta_0 = 0$, nous avons montré que $x^0(\beta)$ est optimal pour cet exemple avec le vecteur multiplicateur $\lambda^0(\beta)$ pour tout β, avec $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$. Noter que la seule contrainte active dans cet intervalle est la contrainte budgétaire. Nous avons observé précédemment à partir du *Tableau* 4.1 que l'ensemble actif change de $I_0 = \{4\}$ à $I_1 = \{4, 2\}$ pour β se trouvant entre 0.39 et 0.40. Nous avons montré plus haut que ce changement a lieu précisément en $\beta_1 = 0.365$.

Pour β, avec $0 \leq \beta \leq \beta_1$, on peut également calculer le rendement attendu du portefeuille efficient :

$$\begin{aligned} \mu_P = \mu^T x^0(\beta) &= \mu^T(h_{00} + \beta h_{10}) \\ &= \alpha_{00} + \beta\alpha_{10}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

où

$$\alpha_{00} = \mu^T h_{00} \quad et \quad \alpha_{10} = \mu^T h_{10}.$$

Nous pouvons aussi calculer la variance du portefeuille efficient

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 = [x^0(\beta)]^T \Sigma x^0(\beta) &= (h_{00} + \beta h_{10})^T \Sigma (h_{00} + \beta h_{10}) \\ &= \gamma_{00} + \beta\gamma_{10} + \beta^2\gamma_{20}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

où

$$\gamma_{00} = h_{00}^T \Sigma h_{00}, \; \gamma_{10} = 2h_{00}^T \Sigma h_{10} \quad et \quad \gamma_{20} = h_{10}^T \Sigma h_{10}.$$

Noter que chacune des quantités h_{00}, h_{10}, α_{00}, α_{10}, γ_{00}, γ_{10} et γ_{20}, sont des analogues de h_0, h_1, α_0, α_1, γ_0, γ_1 et γ_2, respectivement, le $2^{ème}$ indice "0" indique qu'il correspond à ce premier intervalle ($\beta_0 = 0 \leq \beta \leq \beta_1 = 0.365$) qui correspond à l'itération 0.

Il est simple de montrer que

$$\gamma_{10} = 0 \quad et \quad \gamma_{20} = \alpha_{10}. \tag{4.19}$$

Alors, pour ce premier intervalle $[\beta_0, \beta_1]$, on a :

$$\mu_p = 0.0011 + 0.0014\beta,$$

$$\sigma_p^2 = 4.0611 \times 10^{-4} + 0.014\beta^2.$$

Itération 1

A la fin de ce premier intervalle, $(x^0)_2$ est réduit à zéro. Cela suggère que pour tout $\beta > \beta_1$, les contraintes 2 ($-x_2 \leq 0$) et 4 (la contrainte budgétaire) seront actives. Ainsi, on définit $I_1 = \{4, 2\}$, par conséquent

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour l'intervalle suivant $[\beta_1, \beta_2]$, (4.8) avec A_0 remplacée par A_1, devient

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6.3458 \times 10^{-4} & 3.0703 \times 10^{-4} & 4.4004 \times 10^{-4} & 1 & 0 \\ 3.0703 \times 10^{-4} & 4.5383 \times 10^{-4} & 3.479 \times 10^{-4} & 1 & -1 \\ 4.4004 \times 10^{-4} & 3.479 \times 10^{-4} & 8.1485 \times 10^{-4} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Notons que H_1 n'est pas singulière. La solution de (4.6) avec A_0 remplacée par A_1 est alors :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x^1 \\ v^1 \end{pmatrix} &= H_1^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b^1 \end{pmatrix} + \beta H_1^{-1}\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{01} \\ g_{01} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} h_{11} \\ g_{11} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

avec

$$\begin{pmatrix} h_{01} \\ g_{01} \end{pmatrix} = H_1^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b^1 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} h_{11} \\ g_{11} \end{pmatrix} = H_1^{-1}\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

En utilisant (4.22) et MATLAB, on obtient h_{01}, g_{01}, h_{11} et g_{11}, alors la solution optimale pour le problème donné est :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1(\beta) \\ v^1(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6583 \\ 0 \\ 0.3417 \\ -0.0006 \\ -0.0002 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0.5544 \\ 0 \\ -0.5544 \\ 0.0015 \\ 0.0006 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0.6583 \\ 0 \\ 0.3417 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0.5544 \\ 0 \\ -0.5544 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

De même, le vecteur complet des multiplicateurs peut s'écrire comme suit :

$$\lambda^1 = \lambda_{01} + \beta\lambda_{11},$$

o*ù* les composantes de λ_{01} et λ_{11} correspondant aux contraintes inactives sont toutes des zéros, les autres qui correspondent aux contraintes actives sont obtenues à partir de v^1 et I_1 de la manière suivante : $(\lambda^1)_2 = -0.0006 + 0.0015\beta$, de même à partir de v^1 on obtient le multiplicateur de la contrainte budgétaire : $(\lambda^1)_4 = -0.0002 + 0.0003\beta$, et comme la $1^{ère}$ et la $3^{\text{ème}}$ contraintes sont actives, donc le vecteur complet des multiplicateurs est

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0006 \\ 0 \\ -0.0002 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0015 \\ 0 \\ 0.0003 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

ou plus simplement

$$\lambda^1 = (0, -0.0006 + 0.0015\beta, 0, -0.0002 + 0.0003\beta)^T. \tag{4.25}$$

A partir de (4.23), $(x^1)_3$ est une fonction décroissante de β et elle est réduite à zéro lorsque :

$$\beta = \beta_2 = \frac{0.3417}{0.5544} = 0.616.$$

Ainsi, nous avons montré que x^1 défini par (4.23) est optimal avec le vecteur des multiplicateurs λ^1 donné par (4.25) pour tout $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$. En outre, nous pouvons calculer la moyenne et la variance de la manière suivante

$$\mu_P = \mu^T x^1(\beta) = \mu^T(h_{01} + \beta h_{11}) = \alpha_{01} + \alpha_{11}\beta.$$
$$\sigma_P^2 = [x^1(\beta)]^T \Sigma x^1(\beta) = (h_{01} + \beta h_{11})^T \Sigma (h_{01} + \beta h_{11}) = \gamma_{01} + \beta\gamma_{11} + \beta^2\gamma_{21}.$$

Il est facile de calculer les coefficients de la moyenne et de la variance pour cet intervalle :

$\alpha_{01} = 0.0015, \ \ \alpha_{11} = 1.7504\times 10^{-4}, \ \ \gamma_{01} = 5.6810\times 10^{-4}, \ \ \gamma_{11} = 0 \ \ et \ \ \gamma_{21} = 1.7504\times 10^{-4}.$

Alors, la moyenne et la variance sont les suivantes :

$$\mu_P = 0.0015 + 1.7504 \times 10^{-4}\beta,$$
$$\sigma_P^2 = 5.6810 \times 10^{-4} + 1.7504 \times 10^{-4}\beta^2.$$

Itération 2

Lorsque $\beta = \beta_2$, la $3^{\text{ème}}$ contrainte devient active, donc le nouveau ensemble actif est $I_2 = \{4, 2, 3\}$. Par conséquent, nous définissons

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ \ et \ \ b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour l'intervalle suivant, l'expression (4.8) o*ù* A_0 est remplacée par A_2, devient

$$H_2 = \begin{pmatrix} 6.3458 \times 10^{-4} & 3.0703 \times 10^{-4} & 4.4004 \times 10^{-4} & 1 & 0 & 0 \\ 3.0703 \times 10^{-4} & 4.5383 \times 10^{-4} & 3.479 \times 10^{-4} & 1 & -1 & 0 \\ 4.4004 \times 10^{-4} & 3.479 \times 10^{-4} & 8.1485 \times 10^{-4} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Notons que H_2 n'est pas singulière, donc la solution de (4.6), o*ù* A_0 remplacée par A_2 est :

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ v^2 \end{pmatrix} = H_2^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b^2 \end{pmatrix} + \beta H_2^{-1}\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} h_{02} \\ g_{02} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} h_{12} \\ g_{12} \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

avec

$$\begin{pmatrix} h_{02} \\ g_{02} \end{pmatrix} = H_2^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b^2 \end{pmatrix} \ \ et \ \ \begin{pmatrix} h_{12} \\ g_{12} \end{pmatrix} = H_2^{-1}\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

En utilisant (4.28) et MATLAB, on obtient h_{02}, g_{02}, h_{12} et g_{12}, alors la solution optimale au problème donné est

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(\beta) \\ v^2(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0006 \\ -0.0003 \\ -0.0002 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0016 \\ 0.0008 \\ 0.0003 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Le vecteur des multiplicateurs est

$$\lambda^2 = \lambda_{02} + \beta\lambda_{12}.$$

Les composantes de λ_{02} et λ_{12} correspondant aux contraintes inactives sont toutes des zéros, les autres qui correspondent aux contraintes actives sont obtenues à partir de v^2 et I_2 de la manière suivante :

$$(\lambda^2)_2 = -0.0006 + 0.0016\beta, \quad (\lambda^2)_3 = -0.0003 + 0.0008\beta \quad et \quad (\lambda^2)_4 = -0.002 + 0.0003\beta.$$

Comme la 1ère contrainte n'est pas active, alors le vecteur complet des multiplicateurs est

$$\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0006 \\ -0.0003 \\ -0.002 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0016 \\ 0.0008 \\ 0.0003 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

ou plus simplement,

$$\lambda^2 = (0, -0.0006 + 0.0016\beta, -0.0003 + 0.0008\beta, -0.002 + 0.0003\beta)^T.$$

Alors on peut calculer la moyenne et la variance de la manière suivante

$$\mu_P = \mu^T x^2(\beta) = \mu^T h_{02} + \beta\mu^T h_{12} = \alpha_{02} + \alpha_{12}\beta,$$

$$\sigma_P^2 = [x^2(\beta)]^T \Sigma x^2(\beta) = (h_{02} + \beta h_{12})^T \Sigma (h_{02} + \beta h_{12}) = \gamma_{02} + \gamma_{12}\beta + \gamma_{22}\beta^2.$$

Il est facile de calculer les coefficients de la moyenne et de la variance pour cet intervalle comme suit

$$\alpha_{02} = 0.0016, \ \alpha_{12} = 0, \ \gamma_{02} = 6.3460 \times 10^{-4}, \ \gamma_{12} = 0, \ \gamma_{22} = 0.$$

Alors la moyenne et la variance sont les suivantes

$$\mu_P = \mu^T x^2(\beta) = \mu^T h_{02} + \beta \mu^T h_{12} = 0.0016,$$
$$\sigma_P^2 = [x^2(\beta)]^T \Sigma x^2(\beta) = (h_{02} + \beta h_{12})^T \Sigma (h_{02} + \beta h_{12}) = 6.3460 \times 10^{-4}.$$

La relation (4.29) montre que la solution optimale est précisément $(1, 0, 0)^T$ qui est indépendante de β et ce point est optimal pour $\beta \geq \beta_2$.

4.2.2 Application de la méthode ASM (Active Set Method) par MATLAB

Pour une bonne implémentation de la méthode, nous avons exécuté le programme MATLAB suivant :

Présentation des résultats

Après avoir introduit les données du cas d'étude construit auparavant, on fixe $\beta = 0$. La résolution nous a permis de déterminer le portefeuille de variance minimale.
Les itérations de la méthode et la frontière efficiente sont illustrées ci-dessous :

j	0	1	2
β_j	0	0.40	0.62
I_j	{4}	{4,2}	{4,2,3}
μ_p	0.0011	1.570016×10^{-3}	0.0016
$\sigma_p^2(\beta_j)$	4.0611×10^{-4}	5.961064×10^{-4}	6.3460×10^{-4}
	h_{00}	h_{01}	h_{02}
h_{0j}	0.2739 0.6555 0.0706	0.6583 0 0.3417	1 0 0
	h_{10}	h_{11}	h_{12}
h_{1j}	1.5783 -1.7929 0.2146	0.5544 0 -0.5544	0 0 0
	λ_{00}	λ_{01}	λ_{02}
λ_{0j}	0 0 0 -0.0004	0 -0.0006 0 -0.0002	0 -0.0006 -0.0003 -0.002
	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}
λ_{1j}	0 0 0 0.0011	0 0.0015 0 0.0003	0 0.0016 0.0008 0.0003
α_{0j}	0.0011	0.0015	0.0016
α_{1j}	0.0014	1.7504×10^{-4}	0
γ_{0j}	4.0611×10^{-4}	5.6810×10^{-4}	6.3460×10^{-4}
γ_{1j}	0	0	0
γ_{2j}	0.0014	1.7504×10^{-4}	0
x^j	0.2739 0.6555 0.0706	0.88006 0 0.11994	1 0 0

TABLE 4.4 – Les résultats obtenus après l'exécution de l'ASM.

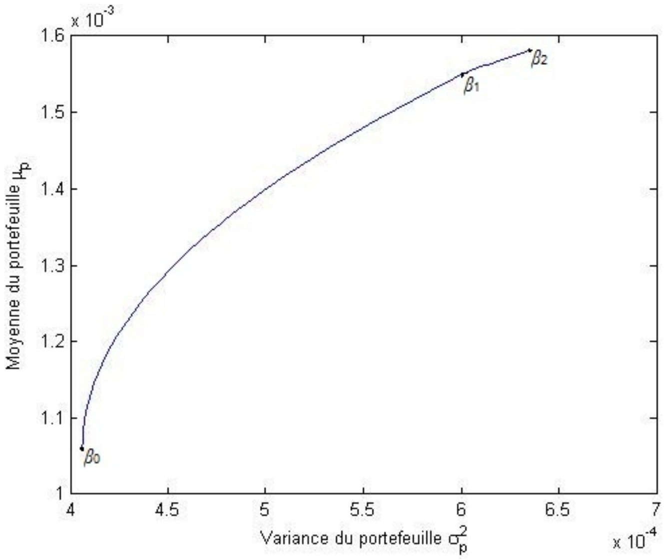

FIGURE 4.2 – La frontière efficiente

Discussion des résultats

Le tableau représente différentes situations proposées au décideur pour qu'il prenne sa décision du choix d'investissment qui dépend du paramètre β. Alors cela permet de déterminer les proportions x_i à investir dans chaque titre, ainsi que le rendement espéré μ_p et le risque σ_p^2. $LaFigure$ 4.2 montre la frontière efficiente pour notre problème. Elle se compose de deux morceaux, un pour le premier intervalle ($0 = \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$) et l'autre pour l'intervalle suivant ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$). Ces deux morceaux de la frontière efficiente se rencontrent en $\beta = \beta_1$. Quand le paramètre d'aversion au risque β augmente, la moyenne augmente, et par conséquent, la variance augmente aussi.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré la méthode d'activation des contraintes avec un exemple pratique qui consiste à optimiser un portefeuille financier constitué de 3 titres de l'indice $SP500$ d'une bourse américaine. A la fin, nous avons obtenu la solution optimale et la frontière efficiente qui est indiquée dans la $Figure$ 4.2.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié la programmation quadratique d'un point de vue théorique et pratique, le but assigné à ce travail consiste à appliquer une méthode de résolution des problèmes de programmation quadratique convexe dans les problèmes économiques et financiers. Pour ce faire, on a suivi le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous avons fait des rappels mathématiques sur le vecteurs et les matrices, les formes quadratiques et nous avons vu la notion de la convexité.

Dans le deuxième chapitre, on a rappelé les concepts de base de la programmation quadratique, la convexité et les méthodes de résolution.

Dans le troisième chapitre, on a présenté un modèle de portefeuille, ainsi que quelques définitions pour pouvoir introduire le quatrième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous avons fait une résolution d'un problème d'optimisation du portefeuille, puis nous avons exécuté le programme MATLAB de la méthode d'activation des contraintes en s'inspirant du travail de M.J. Best [13]. Le cas pratique concerne l'investissement dans la bourse américaine (indice $SP500$). Nous avons choisi trois titres. En utilisant le tableau EXCEL, nous avons estimé les rendements et les volatilités de ces titres, ainsi que les covariances entre ces titres.

Annexe 1

Dans cette $1^{ère}$ annexe, nous présentons les 3 titres de l'indice $SP500$ d'une bourse américaine, qui composent le portefeuille financier qu'on a étudié dans le dernier chapitre. Le portefeuille est constitué par les 3 titres suivants :

Notation	Code	Société
A	FB	Facebook Inc. Class A
B	MSFT	Microsoft Corporation
C	NFLX	Netflix Inc.

Annexe 2

Les tableaux ci-dessous représentent respectivement un échantillon des prix et des rendements des titres(du 20/09/2017 jusqu'au 20/10/2017).

Date	PRIX_FB	PRIX_MSFT	PRIX_NTFX
20/09/2017	172,169998	74,940002	188,779999
21/09/2017	171,110001	74,209999	187,350006
22/09/2017	170,539993	74,410004	178,550003
25/09/2017	162,869995	73,260002	179,380005
26/09/2017	164,210007	73,260002	181,970001
27/09/2017	167,679993	73,849998	180,699997
28/09/2017	168,729996	73,870003	181,350006
29/09/2017	170,869995	74,489998	177,009995
02/10/2017	169,470001	74,610001	179,190002
03/10/2017	169,960007	74,260002	184,449997
04/10/2017	168,419998	74,690002	194,389999
05/10/2017	171,240005	75,970001	198,020004
06/10/2017	172,229996	76	196,869995
09/10/2017	172,5	76,290001	195,080002
10/10/2017	171,589996	76,290001	194,949997
11/10/2017	172,740005	76,419998	195,860001
12/10/2017	172,550003	77,120003	199,490005
13/10/2017	173,740005	77,489998	202,679993
16/10/2017	174,520004	77,650002	199,479996
17/10/2017	176,110001	77,589996	195,539993
18/10/2017	176,029999	77,610001	195,130005
19/10/2017	174,559998	77,910004	194,160004
20/10/2017	174,979996	78,809998	192,470001

FIGURE 4.3 – Un échantillon des prix des titres.

Date	REND_FB	REND_MSFT	REND_NTFX
20/09/2017	-0,00615669	-0,00974117	-0,00757492
21/09/2017	-0,00333124	0,00269512	-0,04697092
22/09/2017	-0,04497478	-0,01545494	0,00464857
25/09/2017	0,00822749	0	0,0144386
26/09/2017	0,02113139	0,00805345	-0,00697919
27/09/2017	0,00626195	0,00027089	0,00359717
28/09/2017	0,01268298	0,00839306	-0,02393168
29/09/2017	-0,00819333	0,00161099	0,01231573
02/10/2017	0,0028914	-0,00469105	0,02935429
03/10/2017	-0,00906101	0,00579047	0,05388995
04/10/2017	0,0167439	0,01713749	0,01867383
05/10/2017	0,00578131	0,00039488	-0,00580754
06/10/2017	0,00156769	0,0038158	-0,00909226
09/10/2017	-0,00527539	0	-0,00066642
10/10/2017	0,00670207	0,00170398	0,00466788
11/10/2017	-0,00109993	0,00915997	0,01853367
12/10/2017	0,00689656	0,00479765	0,01599072
13/10/2017	0,00448946	0,00206483	-0,01578842
16/10/2017	0,00911069	-0,00077278	-0,01975137
17/10/2017	-0,00045427	0,00025783	-0,0020967
18/10/2017	-0,00835086	0,00386552	-0,00497105
19/10/2017	0,00240604	0,01155171	-0,00870418
20/10/2017	-0,02120238	0,00025383	0,01844445

FIGURE 4.4 – Un échantillon des rendements des titres.

Bibliographie

[1] *A. Bouaziz et K. Ghemmour, Optimisation de Portefeuille de Produits dans le Marché Concurrentiel : une Approche par la Théorie des Jeux, Mémoire de Master, Université M. Bougerra de Boumerdes, 2015.*

[2] *A. V. Fiacco, and G. P. McCormick, Nonlinear programming : sequential unconstraind minimization techniques, Siam, vol.4, New York, London, Sydney, 1990.*

[3] *B. Brahmi, Méthodes Primales et Duales pour la Programmation Quadratique : Extension et Applications, Thèse de Doctorat, Université de Béjaia, 2012.*

[4] *B. Brahmi, Optimisation d'un portefeuille financier, Cours de Première Année Master. Université de Béjaia, 2019.*

[5] *D. Goldfarb and A.U. Idnani, A Numerically Stable Dual Method for Solving Strictly Convex Quadratic Problems, Mathematical Programming, 27, pp. 1-33, 1983.*

[6] *E.W. Barankin and R. Dorfman, On Quadratic Programming, vol.2, University of California, Publication in statistics, pp. 285-318, 1958.*

[7] *G. B. Dantzig, Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, in Activity Analysis of Production and Allocation, 1951.*

[8] *G. B. Dantzig, and P. Wolfe, Decomposition Principle for Linear Program, Operations Research 8, pp. 101-111, 1960.*

[9] *H. Markowitz, Selected Works, World Scientifie - Nobel Laureate Series, Volume 1, University of California, 2008.*

[10] *H. Markowitz, Portfolio Selection, Journal of Finance, Vol. 7, pp. 77-99, 1952.*

[11] *K. G. Murty, and S.N. Cabadi, Some NP-Complete Problems in Quadratic and Nonlinear Programming, Mathematical Programming, vol. 39, pp. 117-129, 1987.*

[12] *M. J. Best, Equivalence of Some Quadratic Programming Algorithms, Mathematical Programming, vol. 30, pp. 71-87, 1984.*

[13] *M. J. Best, Portfolio Optimization, tome1, pp. 140-151, 2010.*

[14] *M. J. Best and N. Chakravarti, Stability of Linearly Constrained Convex Quadratic Programs, JOTA, vol. 64, no. 1, pp. 43-53, 1990.*

[15] *M. Minoux, Programmation Mathématique, Théorie et Algorithmes, vol 1, Bordas et C.N.E.T-ENST, Paris, 1983.*

[16] *M. O. Bibi, Programmation Linéaire et Quadratique, Cours de Première Année Master, Université de Béjaia, 2019.*

[17] *N. I. Gould, An Algorithm for Large-Scale Quadratic Programmig, IMA Journal of Numerical Analysis 11, 3, pp. 299-324, 1991.*

[18] *N. Ikheneche, Méthode Primale-Duale de Support pour la Minimisation d'une Fonction Quadratique Convexe, Thèse de Doctorat, Université Bejaia, 2019.*

[19] *N. Ikheneche, Méthode de Support pour la Minimisation d'une Fonctionnelle Quadratique Convexe, Mémoire de Magister, Université Bejaia, 2004.*

[20] *N. K. Karmarkar, A new Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming, Combinatorica 4, pp. 373-395, 1984.*

[21] *N. L. Boland, A Dual-Active-Set Algorithm for Positive semi-definite Quadratic Programming, Mathematical Programming, 78(1), pp. 1-27, 1997.*

[22] *P. E. Gill et W. Murray, Numerical Methods for Constrained Optimization, Academic Press, London, pp. 67-92, 1974.*

[23] *P. E. Gill, and W. Muraay, Numerically Stable Methods for Quadratic Programming, Mathematical Programming 14, 1, pp. 349-372, 1978.*

[24] *P. Poncet et R. Portait, La Théorie Moderne du Portefeuille,* 1ère *édition, Saint Germain, Paris, France, pp. 795-798, 1998.*

[25] *P. Wolfe, The Simplex Method for Quadratic Programming, Journal of the Econometrica Society, pp. 382-398, 1959.*

[26] *R. Fletcher, A General Quadratic Programming Algorithm, IMA Journal of Applied Mathematics 7, 1 , pp. 76-91, 1971.*

[27] *R. Flether, Practical Methods of Optimization, J. Wiley and Sons, second edition, University of Dundee, Scotland, UK, 1987.*

[28] *R. Gabasov, F.M. Kirillova and A.I. Tyatyushkin, Constructive Methods of Optimization, Part I, Linear Problems. Universitetskoye, Minsk, 1984.*

[29] *R. Gabasov et F.M. Kirillova, Méthodes de Programmation Linéaire, volumes 1,2 et 3, Edition de l'Université, Minsk, 1977, 1978 et 1980.*

[30] *R. Gabasov, F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova, Solution of Linear Quadratic Extremal Problems, Soviet Math, Dokl, vol. 31, pp. 99-103, 1985.*

[31] *S. Chebbar et S. Lallouch, Optimisation du Portefeuille Sous des Contraintes de Risque, Mémoire d'Ingénieur, Université Mohamed V Rabat, 2015.*

Résumé

Ce travail a pour objectif d'étudier la programmation quadratique convexe du point de vue théorique et pratique. Pour ce faire, on a commencé avec des rappels mathématiques sur les vecteurs et les matrices, les formes quadratiques et les fonctions convexes avec leurs propriétés. Puis on a cité les concepts de base de la programmation quadratique et quelques méthodes de résolution. Ensuite, nous avons présenté le modèle financier de Markowitz. Enfin, on a résolu un problème de programmation quadratique convexe paramétrique en appliquant la méthode d'activation des contraintes (ASM), tout en prenant les données de l'indice boursier $SP500$ d'une bourse américaine et on a obtenu la solution optimale et la frontière efficiente.

Mots clés
Programmation Quadratique Convexe et Paramétrique, Méthode d'Activation des Contraintes, Modèle financier de Markowitz.

Abstract

This work aims to study convex quadratic programming from theoretical and practical point of view. For that, we initially introduced some mathematical bagrounds concerning vectors and matrix, quadratic forms and convex functions with their properties. Then we cited the basic concepts of quadratic programming and some methods of resolution. We presented the financial model of Markowitz. Finally, using active set method (ASM), we have solved a parametric convex quadratic programming problem by taking data from the $SP500$ stock market index of an American stock exchange and have obtained the optimal solution and the efficient frontier.

Keywords
Parametric Convex Quadratic Programming, Active Set Method, Financial Model of Markowitz.